УДК 517 Т.В. Рвачева, канд. физ.-мат. наук

ОДНА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ТЕЙЛОРА

Многие проблемы проектирования и конструирования авиакосмической техники приводят к краевым задачам теории оболочек [1 - 3]. Для решения таких задач используются различные методы, в том числе и вариационные [4, 5]. При этом возникает необходимость вычислять кратные интегралы по областям сложной формы от функции, заданной неявно. В этом случае вычисление ее значений является трудоемким, но при известном значении функции в точке значения ее производных в этой точке вычисляются относительно просто (по формуле дифференцирования неявно заданной функции). В такой ситуации квадратурная формула предлагаемого ниже типа при той же точности требуют меньшего объема вычислений, чем формулы, использующие только значения функции в точках.

Предлагаемая в настоящей статье квадратурная формула построена на основе обобщенного ряда Тейлора и использует значения подынтегральной функции и ее производных до третьего порядка включительно.

Пусть

$$N_n = \left\{-2^{n-1}, -2^{n-1}+1, \ldots, 0, \ldots 2^{n-1}-1, 2^{n-1}\right\},\ n \neq 0; N_0 = \{-1, 0, 1\};$$

$$x_{n,k} = \left\{\frac{k}{2^{n-1}}\right\},\ n \neq 0,\ k \in N_n;\ x_{0,k} = \{k\},\ k \in N_0.$$

В [6] доказан следующий факт: если функция f принадлежит классу H_ρ, где $\rho \in [1,2)$, т. е. если $f \in C^\infty[-1,1]$ и

$$\exists \rho \in [1,2) : \left\| f^{(k)} \right\|_{C[-1,1]} \leq c(f)\rho^k 2^{\frac{k(k+1)}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad , \tag{1}$$

то f раскладывается в так называемый обобщенный ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \varphi_{n,k}(x), \tag{2}$$

где функции $\varphi_{n,k}(x) \in H_1$ – так называемые базисные функции обобщенного ряда Тейлора – однозначно определяются из условий:

$$(\varphi_{n,k}(x_{m,s}))^{(m)} = \delta_n^m \delta_s^k .$$

Функции $\varphi_{n,k}(x)$ являются конечными линейными комбинациями сдвигов функции $up(x)$:

$$\varphi_{n,k}(x) = \sum_l c_l^{(n,k)} up(x - l2^{-n})$$

и играют роль функций x^n в обычных рядах Тейлора.

Функция

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt$$

является решением с компактным носителем функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Ряд (2) сходится на промежутке $[-1,1]$ равномерно. Следовательно, с помощью этого ряда можно построить квадратурные формулы для нахождения интегралов от функций, удовлетворяющих (1).

Предположим, необходимо вычислить интеграл от 0 до 1 от функции, удовлетворяющей (1). Тогда можно построить квадратурную формулу на базе обобщенного ряда Тейлора:

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) a_{n,k} + R_m(f),$$

где $a_{n,k} = \int_0^1 \varphi_{n,k}(x)dx$.

Подобная квадратурная формула впервые была рассмотрена в работе В. К. Ярмолюка [7]. Им был рассмотрен случай $m = 1$, найдены соответствующие коэффициенты $a_{n,k}$ и получена следующая квадратурная формула:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(-1) + f(1)) + f(0) + \frac{13}{144}(f'(-1) - f'(1)).$$

Оценка остатка $R_m(f)$ в работе [7] не проводилась.

В работе [8] автором была получена следующая оценка остатка $R_m(f)$ в случае, если

$$\left\| f^{(n)} \right\|_{C[-1,1]} \le c(f) n^{\alpha n}, \quad \alpha > 1,$$

т. е., в случае, когда $f(x)$ принадлежит классу Жеврея:

$$\left|R_m(f)\right| \le c(f)\, m^{\alpha m} 2^{\frac{-m(m+1)}{2}}.$$

В настоящей работе рассмотрен случай $m=3$.

Автором построены функции $\varphi_{n,k}$ до $k=3$ включительно и вычислены соответствующие $a_{n,k}$.

Для $m=3$ квадратурная формула имеет вид

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big)+\frac{13}{144}\big(f'(0)-f'(1)\big)+$$
$$+\frac{1}{288}\left(\frac{17}{8}f''(0)-\frac{9}{4}f''\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{17}{8}f''(1)\right)+$$
$$+\frac{1}{64^2}\left(\frac{38657}{32400}f'''(0)-f'''\left(\frac{1}{4}\right)+f'''\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{38657}{32400}f'''(1)\right). \qquad (3)$$

В табл. 1 приведены погрешности, полученные при вычислении интеграла от 0 до 1 от различных функций по формуле Симпсона:

$$I_C=\frac{1}{12}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right),$$

и с помощью полученной выше квадратурной формулы (3).

Таблица 1 – Погрешности формулы Симпсона и квадратурной формулы (3) на основе обобщенного ряда Тейлора

$f(x)$	$I=\int_0^1 f(x)dx$	Погрешность формулы Симпсона $I-I_C$	Погрешность квадратурной формулы (3) $I-I_T$
x^4	$0,2$	$-5,2\cdot10^{-4}$	$6,8\cdot10^{-5}$
arctg x	$0,438824573$	$-6\cdot10^{-5}$	$-1,6\cdot10^{-5}$
e^x	$1,718281828$	$-3,7\cdot10^{-5}$	$6,1\cdot10^{-6}$
$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$0,855624392$	$-2,7\cdot10^{-5}$	$6,4\cdot10^{-7}$

Выводы

Получена квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов от дифференцируемых функций. Формула построена на основе обобщенного ряда Тейлора для некоторых неквазианалитических классов бесконечно дифференцируемых функций и использует значения подынтегральной функции и ее производных до третьего порядка включительно. Приведенную формулу целесообразно применять в тех случаях, когда знание значений подынтегральной функции в заданных точках позволяет относительно легко найти значение ее производных в этих точках, в частности, когда она задана неявно или удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, например, уравнению вида

$$y'(x) = f(x, y).$$

Список использованных источников

1. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М.: Высш. шк.., 1985. – 392 с.
2. Общая нелинейная теория упругих оболочек / С. А. Кабриц, Е. И. Михайловский, П. Е. Товстик и др. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. – 388 с.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности: пер. с яп. / К. Васидзу. — М.: Мир, 1987. – 542 с.
5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Рвачев В. А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение / В. А. Рвачев // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45. – Вып. 1(271). – С. 77–103.
7. Ярмолюк В. К. О применении обобщенных рядов Тейлора для приближенного вычисления интегралов / В. К. Ярмолюк // Мат. методы анализа динамических систем. – 1983. – Вып. 7. – С. 48–50.
8. Рвачова Т. В. Про застосування узагальненого ряду Тейлора до побудови квадратурних формул / Т. В Рвачова. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та информатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 81–86.

Поступила в редакцию 20.11.2010.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков