

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В КЛЕЕВОМ СОЕДИНЕНИИ

Нахлесточное клеевое соединение и его модификации, такие, как клеештифтовое и клееболтовое, являются одними из наиболее распространенных типов соединений в конструкции современных ЛА. Для расчета таких соединений создано несколько моделей НДС [1-3]. Они отличаются друг от друга степенью детализации и учитывают неравномерность напряжений по толщине соединяемых деталей либо приближенно – неравномерность по ширине соединения и т.д.

Однако следует отметить малое количество работ, направленных на изучение динамических напряжений в соединениях. Это связано, по-видимому, со значительной математической сложностью задачи. Даже простейшая модель [3, 4] приводит к исследованию свойств колебательной системы с двумя типами связанных колебаний. Обзор современной литературы показал, что исследование динамических напряжений в составных балках (как и более общая задача – связанные двухмодовые колебания стержней, например крутильно-изгибные) изучены только в постановках, отвечающих самосопряженному дифференциальному оператору, даже если этот факт специально не оговаривается. Однако широкий спектр прикладных задач не отвечает этому критерию. В случае несамосопряженной спектральной задачи система собственных функций не только не образует базиса, но и не является замкнутой. Для получения замкнутой системы собственные функции приходится дополнять присоединенными функциями (например [5]). Эта проблема для дифференциальных операторов выше второго порядка еще подлежит исследованию. Естественным выходом является численно-аналитический подход к расчету НДС. Наиболее простым автору представляется дифференциально-разностный метод (метод прямых) с переходом от производных по пространственной координате к конечным разностям.

**Постановка задачи.** Уравнения равновесия дифференциальных элементов слоев переменной толщины имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial t^2} = \alpha_1 \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \gamma_1 (U^{(2)} - U^{(1)}); \\ \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial t^2} = \alpha_2 \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} + \gamma_2 (U^{(2)} - U^{(1)}), \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты  $\beta_j$  зависят от производных от толщины соответ-

вующих слоев и в случае постоянных значений толщины равны нулю.

Коэффициенты системы и дисперсионное соотношение для этого случая приведены в [4], дисперсионная кривая имеет две ветви (рис. 1).

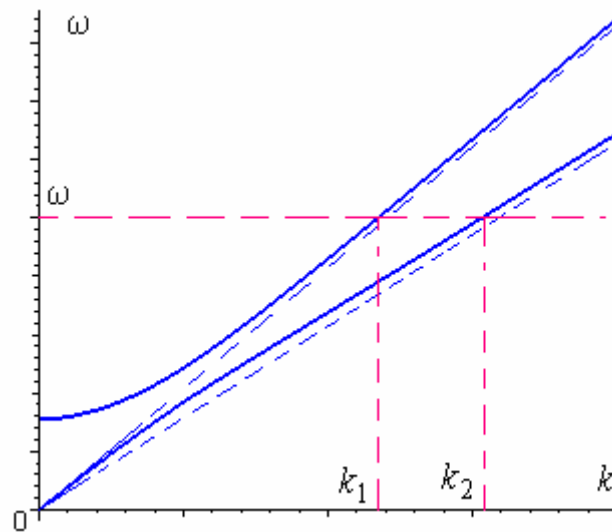


Рисунок 1 - Дисперсионные кривые

Граничные условия примем следующими:

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=L} = F; \quad (2)$$

$$U_2|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (3)$$

где  $F(t) = \frac{F_0}{E_1 \delta_1}$ , соответственно  $F_0$  - поток нормальных напряжений.

Одно из конструктивно-технологических решений соединения, соответствующее данным граничным условиям, показано на рис. 2.

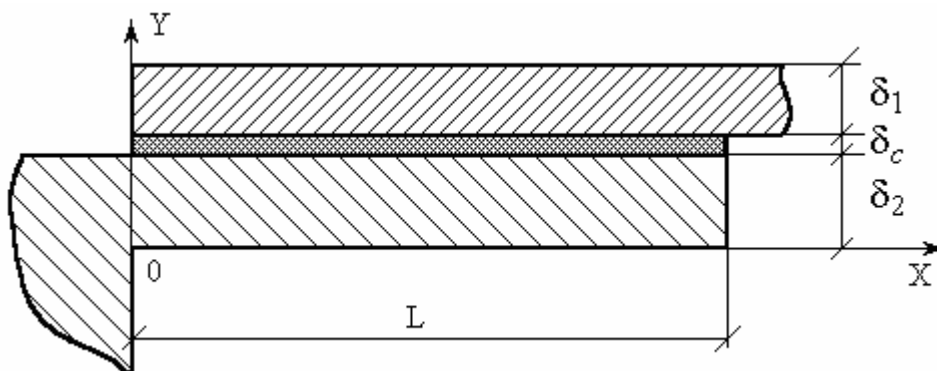


Рисунок 2 - Схема соединения

Краевые условия для слоев неодинаковы в  $x = 0$ . Поэтому в аналитическом решении задачи, записанном в форме разделения переменных, сомножитель, зависящий от  $x$ , будет содержать не одно, как в за-

даче [4], а 4 слагаемых (т.к. всего 4 краевых условия) в виде синуса и косинуса гиперболических от двух волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$ , соответствующих собственным частотам  $\omega$  (см. рис. 1.). Соответственно сомножитель, зависящий от времени  $t$ , будет содержать только 2 слагаемых, а именно синус и косинус  $\omega t$ , и, следовательно, 4 начальные условия

$$U_i|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_i}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (4)$$

не могут быть удовлетворены. Система собственных функций не полна.

**Построение решения.** Операцию дифференцирования по  $x$  в системе (1) заменим разностными выражениями по пятиточечным [6]

$$\frac{d}{dx} u_i^{(j)} = \frac{1}{12h} \left( u_{i-2}^{(j)} - 8u_{i-1}^{(j)} + 8u_{i+1}^{(j)} - u_{i+2}^{(j)} \right);$$

$$\frac{d^2}{dx^2} u_i^{(j)} = \frac{1}{12h^2} \left( -u_{i-2}^{(j)} + 16u_{i-1}^{(j)} - 30u_i^{(j)} + 16u_{i+1}^{(j)} - u_{i+2}^{(j)} \right)$$

и трехточечным (для краевых условий) схемам

$$\frac{d}{dx} u_i^{(j)} = \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{2h}; \quad \frac{d^2}{dx^2} u_i^{(j)} = \frac{u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)}}{h^2}.$$

Здесь  $h = L / N$  - шаг разбиения;  $N$  - число узлов.

После преобразования уравнения (1) приобретают вид

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_i^{(1)}}{dt^2} = a_i^{(1)} u_{i-2}^{(1)} + b_i^{(1)} u_{i-1}^{(1)} + c_i^{(1)} u_i^{(1)} + d_i^{(1)} u_{i+1}^{(1)} + e_i^{(1)} u_{i+2}^{(1)} + f_i^{(1)} u_i^{(2)}; \\ \frac{d^2 u_i^{(2)}}{dt^2} = a_i^{(2)} u_{i-2}^{(2)} + b_i^{(2)} u_{i-1}^{(2)} + c_i^{(2)} u_i^{(2)} + d_i^{(2)} u_{i+1}^{(2)} + e_i^{(2)} u_{i+2}^{(2)} + f_i^{(2)} u_i^{(1)}, \end{cases}$$

где коэффициенты  $a_i^{(j)}, \dots, f_i^{(j)}$  достаточно очевидны.

В более удобной матричной форме:

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = A_i X_{i-2} + B_i X_{i-1} + C_i X_i + D_i X_{i+1} + E_i X_{i+2}, \quad (5)$$

где

$$X_i = \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} a_i^{(1)} & 0 \\ 0 & a_i^{(2)} \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} b_i^{(1)} & 0 \\ 0 & b_i^{(2)} \end{pmatrix}, C_i = \begin{pmatrix} c_i^{(1)} & f_i^{(1)} \\ f_i^{(2)} & c_i^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$D_i = \begin{pmatrix} d_i^{(1)} & 0 \\ 0 & d_i^{(2)} \end{pmatrix}, E_i = \begin{pmatrix} e_i^{(1)} & 0 \\ 0 & e_i^{(2)} \end{pmatrix}.$$

В данной задаче присутствуют граничные условия трех видов:

а) нулевые перемещения второго слоя в  $x = 0$ , т.е.  $u_0^{(2)} = 0$ . В силу симметрии в соседних узлах имеем  $u_{-1}^{(2)} = -u_1^{(2)}$  и  $u_{-2}^{(2)} = -u_2^{(2)}$ ;

б) свободный край, что соответствует  $\frac{du_i^{(j)}}{dx} = 0$ , откуда следует  $u_{i-1}^{(j)} = u_{i+1}^{(j)}$  и  $u_{i-2}^{(j)} = u_{i+2}^{(j)}$ ;

в) к краю приложена нагрузка, т.е.  $\frac{du_N^{(1)}}{dx} = \frac{F_0}{E_1 \delta_1}$ . Выражая производную по трехточечной схеме, находим

$$u_{N-1}^{(1)} = u_{N+1}^{(1)} + 2h \frac{F_0}{E_1 \delta_1}. \quad (6)$$

Записывая уравнения в форме (5) для узлов  $0, \dots, N$ , получаем

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = AX + F, \quad (7)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{pmatrix},$$

Источником появления субматриц  $T$  является соотношение (6).

Если выразить  $u_{N+1}^{(1)}$  в двух последних уравнениях системы через пере-

мещение внутреннего узла  $u_{N-1}^{(1)}$ , то возникнут свободные члены, формирующие столбец  $F$ . Кроме того

$$A = \begin{pmatrix} S_0^1 & D_0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} & D_{N-2} & E_{N-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} & S_{N-1}^2 & D_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & S_N^3 & Q_N \end{pmatrix}.$$

Нижняя строка получена дифференцированием уравнений (1) по трехточечной схеме. Это позволяет исключить перемещения  $u_{N+2}^{(j)}$ . Субматрицы  $S_i^m$  получаем с использованием краевых условий трех описанных типов, исключая перемещения в узлах за пределами области и выражая их через перемещения во внутренних узлах.

Решение системы дифференциальных уравнений (7) имеет вид

$$X = \sum_{i=0}^N \left[ M_i^{(1)} h_i \cos \sqrt{-\lambda_i} t + M_i^{(2)} h_i \sin \sqrt{-\lambda_i} t \right] - A^{-1} F, \quad (8)$$

где  $\lambda_i$  - собственные числа матрицы  $A$ ;  $h_i$  - соответствующие им собственные векторы;  $M_i^{(j)}$  - неизвестные коэффициенты, которые находим из начальных условий (4). Удовлетворяя этим условиям, получаем

$$M_i^{(2)} = 0; \text{ и } \begin{pmatrix} M_0^{(1)} \\ \dots \\ M_N^{(1)} \end{pmatrix} = -H^{-1} (A^{-1} F),$$

где  $H$  - матрица, составленная из собственных векторов  $h_i$ .

**Пример расчета.** Рассмотрим соединение детали из КМ ( $\delta_1 = 3$  мм,  $E_1 = 240$  ГПа,  $\rho_1 = 2200$  кг·м<sup>3</sup>) и металлической законцов-

ки ( $\delta_2 = 5$  мм,  $E_2 = 70$  ГПа,  $\rho_2 = 2650$  кг·м<sup>3</sup>,  $L = 0,15$  м). К композитной детали мгновенно приложено усилие  $F_0 = 10$  кН·м<sup>-1</sup>. Параметры клеевой прослойки:  $G = 77$  МПа,  $\delta_c = 0,3$  мм. Число узлов разбиения  $N = 20$ . На рис. 3 показаны перемещения слоев в точке  $x = L$ .

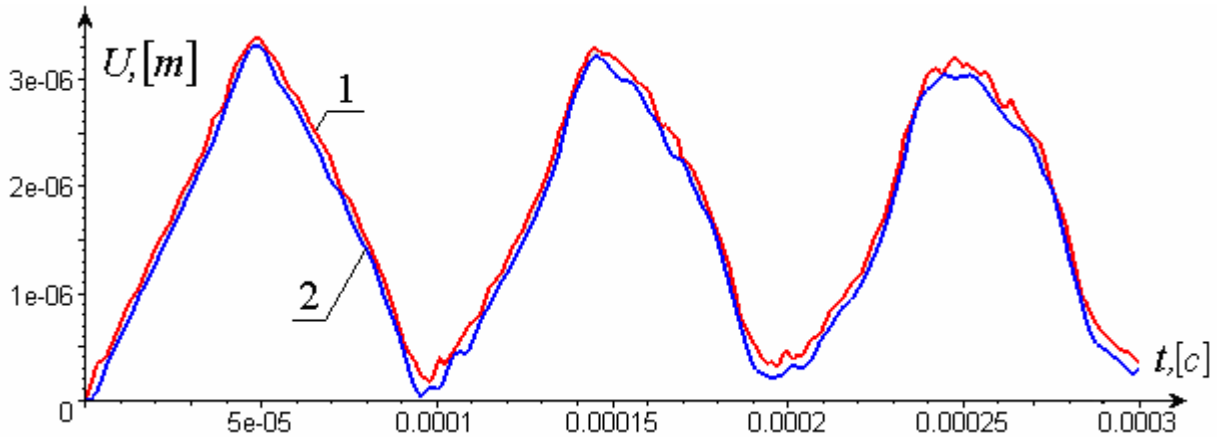


Рисунок 3 - Перемещения слоев на конце соединения

Напряжения в клеевой прослойке в этой же точке и соответствующие показанным выше перемещениям приведены на рис. 4.

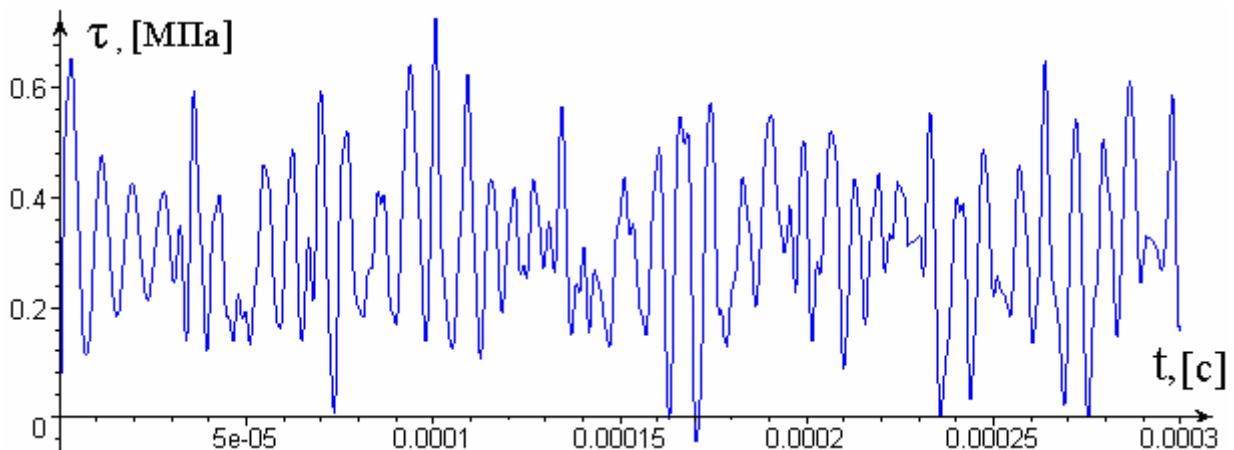


Рисунок 4 - Напряжения в клее в конце соединения

Отметим, что для верификации программы был проведен расчет для условий задачи из работы [4], и результаты совпали с чрезвычайно высокой точностью (менее 0,1%).

Любопытно проследить движение волны в слое. Для этого покажем на рис. 5 перемещения в три момента времени:  $t_1 = 10^{-6}$  с,  $t_2 = 5 \cdot 10^{-6}$  с и  $t_3 = 10^{-5}$  с. Хорошо видно характерное для диспергирующих волн явление – отдельная волна, заметная в момент времени  $t_2$  (А), опережает волновой пакет, движущийся с групповой скоростью и в момент времени  $t_3$  выходит за его пределы (В).

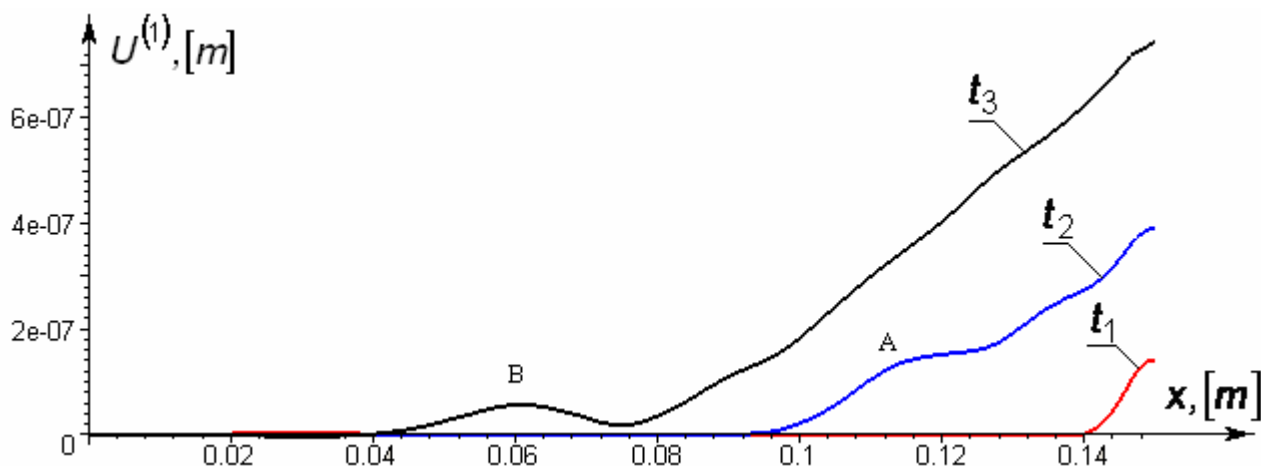


Рисунок 5 - Начало движения волны в слое

**Выводы.** Вычисления показывают, что влияние сил инерции дает значительную поправку к возникающим в клее максимальным напряжениям. Это служит основанием для дальнейших исследований динамических напряжений в соединениях, которые могут проводиться в следующих направлениях:

- построение аналитических решений для разнообразных типов граничных условий;
- учет изгибных колебаний и влияния поперечных связей;
- учет диссипации энергии в соединении.

#### Список использованных источников

1. Карпов Я.С. Проектирование и конструирование соединений деталей из композиционных материалов / Я.С. Карпов, С.П. Кривенда, В.И. Рябков // – Х.: ХАИ, 1997. – 200 с.
2. Кутьинов В.Ф. Расчет клеенных комбинированных конструкций из композиционных материалов // Проектирование, расчет и испытание конструкций из композиционных материалов / В.Ф. Кутьинов – ЦАГИ. – 1982. – Вып. 9. – С.33-47.
3. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины / А.Р. Ржаницын – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
4. Куреннов С.С. К вопросу об определении динамических напряжений в клеевом соединении // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр., Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2005. – Вып.41(2) – С.66-72.
5. Ильин В.А. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам / В.А. Ильин, Л.В. Крицков // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНТИ, М.: 2006, – С. 5–105
6. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М.: «Наука», 1968. – 503 с.

Поступила в редакцию 18.11.2010.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков