УДК 536.21 С.С. Куреннов, канд. техн. наук

ОСРЕДНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР СЛОЕВ В ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

Проектировочный расчет клеевых соединений или многослойных панелей зачастую требует учета температурных напряжений. Температурные воздействия могут быть обусловлены условиями эксплуатации изделия, технологией изготовления, ремонта и т.д. В большинстве работ в формулы расчета напряженного состояния входят отклонения температур соединяемых слоев от температуры равновесного состояния. При этом температура слоя считается постоянной по толщине и ее изменение в течение времени подробно не изучается. Однако при больших скоростях нагрева и высокой теплопроводности первого слоя разность деформаций слоев достигает своего максимального значения не в стационарном состоянии, а в некоторый момент времени, когда внешний слой уже нагрелся, а внутренний еще остается не нагретым.

Чтобы более подробно изучить этот вопрос, решим задачу теплопроводности в составном стержне, состоящем из двух разнородных материалов. Влиянием клеевой прослойки на распространение температуры пренебрегаем ввиду ее малой толщины. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (1)$$

где $c(x)$ – удельная теплоемкость; $\rho(x)$ – плотность; $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности; $u(x,t)$ – температура.

Толщина первого слоя δ_1, общая толщина двухслойной пластины равна l. Следовательно, коэффициенты уравнения (1) описываются формулами

$$c(x)=\begin{cases}c_1, & 0<x<\delta_1,\\ c_2, & \delta_1<x<l,\end{cases}\quad \rho(x)=\begin{cases}\rho_1, & 0<x<\delta_1,\\ \rho_2, & \delta_1<x<l,\end{cases}\quad \lambda(x)=\begin{cases}\lambda_1, & 0<x<\delta_1,\\ \lambda_2, & \delta_1<x<l.\end{cases}$$

Краевые условия примем следующими:

$$u(0,t)=T_1,\quad u(l,t)=0,\quad (0<t<\infty).$$

Начальные условия $u(x,0)=\varphi(x)$, $(0<x<l)$.

Поскольку краевые условия не являются однородными, решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x), \qquad (2)$$

где функция $w(x)$ удовлетворяет краевым условиям исходной задачи, а на функцию $v(x,t)$ накладываются однородные краевые условия $v(0,t)=0$, $v(l,t)=0$. Поскольку вид функции $w(x)$ произволен, удобнее ее представить в виде стационарного решения уравнения (1), т.е. в виде двух отрезков прямых:

$$w(x)=\begin{cases} T_1-k_1x, \ \ 0\le x<\delta_0, \\ (l-x)k_2, \ \delta_0\le x\le l. \end{cases}$$

При этом краевые условия выполняются автоматически, а неизвестные константы k_1 и k_2 найдем из условий сопряжения температур и тепловых потоков в точке $x=\delta_1$:

$$\lim_{x=\delta_1-0} w=\lim_{x=\delta_1+0} w \quad \text{и} \quad \lambda_1 \lim_{x=\delta_1-0}\frac{dw}{dx}=\lambda_2 \lim_{x=\delta_1+0}\frac{dw}{dx}.$$

Это приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} T_1-k_1\delta_1=(l-\delta_1)k_2, \\ \lambda_1k_1=\lambda_2k_2. \end{cases}$$

Подставляя (2) в (1) и проведя очевидные преобразования, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Согласно методу разделения переменных решение уравнения (3) ищем в виде

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\, e^{-\omega_n^2 t}\, X_n(x).$$

согласно [1]

$$X_n(x)=\begin{cases} \sin\frac{\omega_n}{a_1}x \Big/ \sin\frac{\omega_n}{a_1}\delta_0, & 0\le x<\delta_1, \\ \sin\frac{\omega_n}{a_2}(l-x)\Big/\sin\frac{\omega_n}{a_2}(l-\delta_0), & \delta_1<x\le l. \end{cases}$$

В свою очередь $a_i=\sqrt{\dfrac{\lambda_i}{c_i\rho_i}}$, $i=1,2$.

Равенство температур в точке δ_1 с обеих сторон выполняется автоматически. Условие равенства тепловых потоков в точке δ_1 имеет вид

$$\lambda_1\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=\delta_1-0}=\lambda_2\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=\delta_1+0}.$$

Это приводит к трансцендентному уравнению относительно собственных чисел ω

$$\frac{\lambda_1}{a_1} ctg\left(\frac{\omega}{a_1}\delta_1\right) = \frac{\lambda_2}{a_2} ctg\left(\frac{\omega}{a_2}(\delta_1 - l)\right). \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет бесконечное число корней, которые локализованы между точками разрыва функций. Это обстоятельство позволяет построить простой алгоритм поиска решений уравнения (4).

Константы C_n находим по формулам

$$C_n = \frac{\int_0^l c(x)\rho(x)[\varphi(x) - w(x)]X_n(x)\,dx}{\|X_n\|}, \quad \|X_n\| = \int_0^l c(x)\rho(x)X_n^2(x)\,dx.$$

Отметим, что данные интегралы без труда вычисляются аналитически. Средняя температура слоев такая:

$$\bar{u}_1(t) = \frac{1}{\delta_1}\int_0^{\delta_1} u(x,t)dx, \quad \bar{u}_2(t) = \frac{1}{l - \delta_1}\int_{\delta_1}^{l} u(x,t)dx.$$

Подставляя полученные ранее формулы, получаем:

$$\bar{u}_1(t) = T_1 - k_1\frac{\delta_1}{2l} + \frac{a_1}{\delta_1}\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\omega_n^2 t}\frac{\left(1 - cos\frac{\omega_n}{a_1}\delta_0\right)}{\omega_n \cdot sin\frac{\omega_n}{a_1}\delta_0},$$

$$\bar{u}_2(t) = k_2\left[\frac{l - \delta_1}{2} + a_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n e^{-\omega_n^2 t}}{(l - \delta_1)k_2}\frac{\left(1 - cos\frac{\omega_n}{a_2}(l - \delta_1)\right)}{\omega_n \cdot sin\frac{\omega_n}{a_2}(l - \delta_1)}\right].$$

Зная средние температуры слоев, не составляет труда вычислить соответствующие температурные деформации и напряжения в составной пластине. При этом предполагается, что изгиб и межслойный сдвиг отсутствуют. Эти гипотезы существенно упрощают модель и позволяют применять простые аналитические или численно-аналитические методики определения напряженного состояния соединения [3, 4].

Максимальная разница в средних деформациях слоев будет при условии $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1\bar{u}_1 - \alpha_2\bar{u}_2) = 0$, где α_i - коэффициенты температурного линейного расширения i-го слоя.

Отсюда получаем уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_1 \frac{a_2\left(1-\cos\frac{\omega_n}{a_2}(l-\delta_1)\right)}{(l-\delta_1)\sin\frac{\omega_n}{a_2}(l-\delta_1)} - \alpha_2 \frac{a_1\left(1-\cos\frac{\omega_n}{a_1}\delta_1\right)}{\delta_1 \sin\frac{\omega_n}{a_1}\delta_1}\right) C_n \omega_n e^{-\omega_n^2 t} = 0,$$

которое без труда решается, например, с помощью метода Ньютона.

Численные результаты. Рассмотрим соединение деталей из алюминия и стеклопластика. Толщина слоев 5 мм, $\varphi(x)=0$. Параметры материалов [2]: $c_1 = 880$ Дж/(м·градС), $\lambda_1 = 150$ Вт/(м·^{0}С), $\rho_1 = 2800$ кг/м^3, $\alpha_1 = 2{,}3\cdot 10^{-5}$ 1/^{0}С, $c_2 = 1400$ Дж/(м·^{0}С), $\lambda_1 = 0{,}4$ Вт/(м·^{0}С), $\rho_1 = 1500$ кг/м^3, $\alpha_2 = 1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/^{0}С. На рисунке 1 показаны график функции $\Delta\varepsilon_T = \alpha_1\bar{u}_1(t) - \alpha_2\bar{u}_2(t)$ и горизонтальная асимптота, которая соответствует стационарному состоянию.

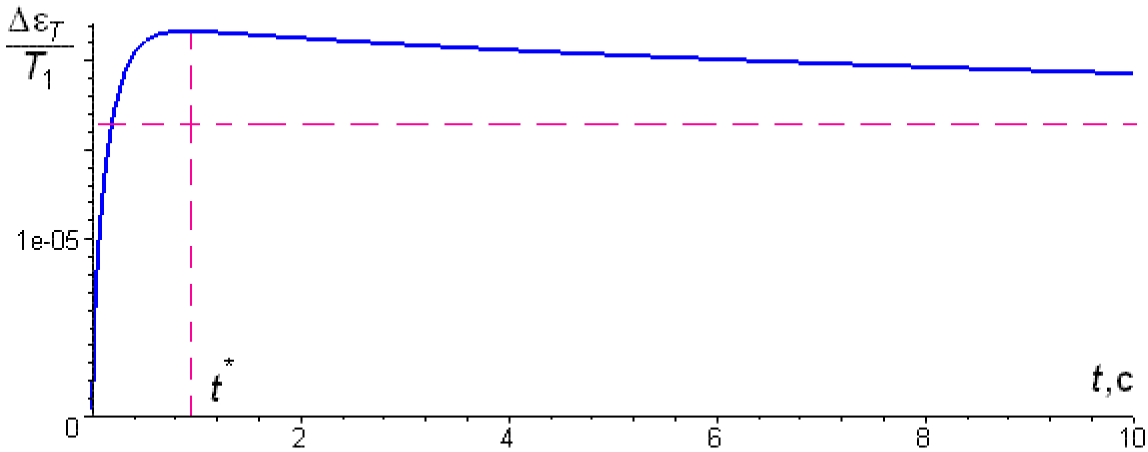

Рисунок 1 – Удельная разность средних деформаций

В момент времени t^* разность средних деформаций достигает наибольшего значения. Графики распределения температуры по толщине пластины в разные моменты времени показаны на рис. 2.

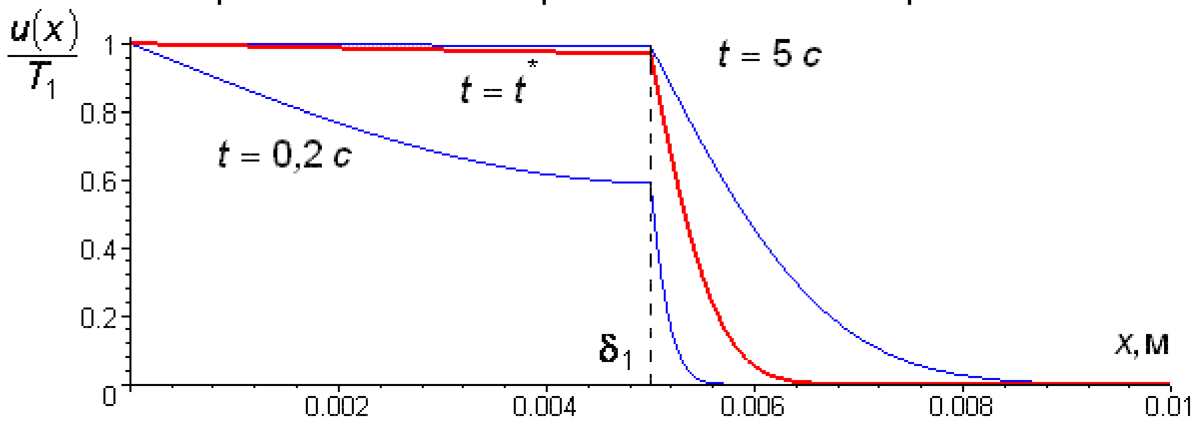

Рисунок 2 – Распределение температуры по толщине

Выводы. Из графика на рисунке 1 видно, что максимальные температурные напряжения, вычисленные по предложенной модели, превышают более чем на 25% напряжения в стационарном состоянии. При этом эффект, вызванный неравномерным нагревом, усиливается, если коэффициент температурного расширения второго слоя близок к аналогичному коэффициенту первого слоя или превышает его. Однако если нагрев происходит со стороны материала с меньшей теплопроводностью, то показанный эффект отсутствует, и функция разности средних температурных деформаций $\Delta\varepsilon_T$ экстремума не имеет и стремится к асимптоте снизу, т.е. наибольшие напряжения в этом случае возникают при стационарном распределении температуры.

Результаты модельной задачи иллюстрируют важность исследования влияния скорости и направления нагрева на температурные напряжения в многослойных пластинах. Дальнейшие исследования могут проводиться в таких направлениях:

- обобщение на большее число слоев;
- решение задач для других типов краевых условий, таких, как лучистый и конвективный теплообмен;
- решение задач для многослойных цилиндров и других криволинейных объектов;
- оптимальное управление нагревом;
- включение в модель изгиба.

Список использованных источников

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков – М.: «Высш. шк.», 1967. – 600 с.

2. Полежаев Ю.В. Тепловая защита / Ю.В. Полежаев, Ф.Б. Юревич – М.: «Энергия», 1975. – 408 с.

3. Карпов Я.С. Проектирование и конструирование соединений деталей из композиционных материалов / Я.С. Карпов, С.П. Кривенда, В.И. Рябков // – Х.:, Нац. аэроксм. ун-т им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», 1997. – 201 с.

4. Кривенда С.П. Вплив податливості з'єднувального шару на напружено-деформований стан з'єднання / С.П. Кривенда, І.М. Тараненко // Вопр. проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е.Жуковского «ХАИ». – Вып. 2. Х., 2009. – С. 25–32.

Поступила в редакцию 21.02.2011.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков