УДК 539.3

А.Г. Николаев, д-р физ.-мат. наук
Е.М. Орлов

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА СО СФЕРОИДАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) в пространственных канонических телах с усложненными физико-механическими свойствами, в частности, с трансверсальной изотропией материала тела необходимо при создании моделей пористых и композиционных материалов, а также в расчетах на прочность при конструировании изделий из этих материалов. В большинстве опубликованных работ по этой проблеме использован метод конечных элементов [1, 2]. Одним из основных аналитических методов решения краевых задач для трансверсально-изотропных канонических тел является метод разделения переменных, который применялся в работах [3–5]. В работе [5] была предпринята попытка методом Фурье построить точные решения уравнений равновесия термоупругого трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью. Однако ввиду того что построенная вектор-функция не является регулярной в рассматриваемой области, она не может считаться решением. Распределения напряжений в трансверсально-изотропном многосвязном каноническом теле без учета температурного поля исследовались в работе [6], в которой использовался обобщенный метод Фурье (ОМФ).

В настоящей статье впервые построены общие точные решения основных осесимметричных краевых задач теории термоупругости для трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной неоднородностью. Полученные результаты использованы при решении осесимметричной краевой задачи термоупругости для трансверсально-изотропного пространства с абсолютно твердым и равномерно нагретым сфероидальным включением. Предложенная методика может быть распространена на любой тип граничных условий и неодносвязные области. Проведен численный анализ распределения напряжений на поверхности и в экваториальной плоскости включения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим первую осесимметричную краевую задачу теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной неоднородностью. Предполагается, что трансверсально-изотропное пространство, имеющее внутреннюю сфероидальную границу, занимает область Ω, с центром неоднородности совмещено начало декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3), а оси Ox_3, анизотропии и симметрии рассматриваемого тела совпадают. Исследуемая краевая задача в силу стационарности распадается на задачу теплопроводности (1, 2) и задачу термоупругости (3, 4), то есть задачу решения неоднородной системы уравнений равновесия в перемещениях трансверсально изотропной среды

$$k_{ii}T_{,ii}=0,\ \ i=1,\ 2,\ 3; \tag{1}$$

$$T_{|\Gamma}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(3)} P_n(\cos\eta); \tag{2}$$

$$c_{ii}u_{i,ii}+\sum_{j\neq i} b_{ij}u_{i,ji}+\sum_{j\neq i} a_{ij}u_{i,jj}=\sum_{k=1}^{3} c_{ik}\alpha_k T_{,i},\ \ i,j=1,\ 2,\ 3; \tag{3}$$

$$\mathbf{U}_{|\Gamma}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n^{(1)}P_n^{(1)}(\cos\eta)\mathbf{e}_\rho+b_n^{(0)}P_n(\cos\eta)\mathbf{e}_z\right] \tag{4}$$

в области Ω, где k_{ii} - коэффициенты теплопроводности $(k_{11}=k_{22})$; α_k - коэффициенты линейного теплового расширения; $b_n^{(j)}$ - заданные коэффициенты; $c_{ij}=E_{iijj}$ при $i,j=1,2,3$; $c_{44}=E_{1313}=E_{2323}$; $\frac{c_{11}-c_{12}}{2}=E_{1212}$; $a_{ij}=E_{ijij}$ и $b_{ij}=a_{ij}+c_{ij}$ при $i\neq j$; E_{ijkl} – элементы тензора упругих постоянных; Γ - граница сфероида; $\mathbf{F}$ - усилие на граничной поверхности; ρ, z и $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e_z}$ - соответственно координаты и орты цилиндрической системы координат, совмещенной с декартовой; $P_n^m(x)$ - присоединенная функция Лежандра первого рода.

Уравнение $\left(\frac{\rho}{d_2}\right)^2+\left(\frac{z}{d_1}\right)^2=1$ задает границу включения.

2. Построение общего решения. Вводятся три вытянутые сфероидальные (сжатые сфероидальные, сферические) системы координат (ξ_j,η_j,φ) $(j=1,2,3)$, координаты которых связаны с цилиндрическими координатами такими соотношениями:

$$\begin{cases}\rho=c_j\cdot sh\xi_j\cdot\sin\eta_j, & \eta_j\in[0;\pi];\\ z=\sqrt{\nu_j}\cdot c_j\cdot ch\xi_j\cdot\cos\eta_j, & \xi_j\in[0;\infty),\end{cases}$$

где $c_j>0$ - параметры сфероидальных систем координат; $\nu_3=\frac{k_{33}}{k_{11}}$; ν_1,ν_2 - два разных положительных корня уравнения:

$$c_{44}c_{11}\nu^2+(c_{13}^2+2c_{13}c_{44}-c_{11}c_{33})\nu+c_{33}c_{44}=0.$$

Уравнения поверхности сфероидальной полости запишутся в виде $\xi_j = \xi_{j0}$. На граничной поверхности должны выполнятся такие соотношения:

$$c_1 \cdot sh\xi_{10} = c_2 \cdot sh\xi_{20} = c_3 \cdot sh\xi_{30};$$

$$\sqrt{\nu_1}c_1 \cdot ch\xi_{10} = \sqrt{\nu_2}c_2 \cdot ch\xi_{20} = \sqrt{\nu_3}c_3 \cdot ch\xi_{30}.$$

Тогда $cos\eta_j = \dfrac{z}{\sqrt{\nu_j}c_j \cdot ch\xi_{j0}}$ на поверхности сфероида не зависит от j.

Будем искать решение задачи теплопроводности в виде

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})} u_{3,n}^{+},$$

а вектор перемещений – в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(j)}}{Q_n^{(1)}(q_{j,0})} \mathbf{U}_{j,n,0}^{+}(\xi_j, \eta_j) + \tilde{\nabla}_\mathbf{1}\varphi + \tilde{\nabla}_\mathbf{2}\boldsymbol{\psi} - \mathbf{U_0},$$

где $a_n^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты; $z = \sqrt{\nu_j} z_j$; $k_j = \dfrac{b_{31}\nu_j}{\left(a_{33} - a_{31}\nu_j\right)}$;

$\mathbf{U}_{j,n,0}^{+} = -u_{j,n}^{+(1)}\mathbf{e}_\rho - \dfrac{k_j}{\sqrt{\nu_j}} u_{j,n}^{+(0)}\mathbf{e}_z$; $u_{j,n}^{+(m)} = Q_n^{-m}(q_j)P_n^m(p_j) =$

$= (-1)^m Q_n^m(q_j)P_n^{-m}(p_j)$; $q_j = ch\left(\xi_j\right)$; $p_j = cos\left(\eta_j\right)$; $Q_n^m(x)$ - присоединенная функция Лежандра второго рода;

$$\mathbf{U_0} = \left[\left(-1 + \frac{\gamma_3}{\nu_2 - \nu_1}\right) \frac{a_0^{(3)}\gamma_1 c_3\sqrt{\nu_3}}{Q_0(q_{3,0})(\nu_1 - \nu_3)} \frac{1}{2} ln\left(\frac{q_{3,0}^2 - 1}{q_{1,0}^2 - 1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_0^{(3)}}{Q_0(q_{3,0})}\left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1\gamma_3}{(\nu_2 - \nu_1)}\right) \frac{c_3\sqrt{\nu_3}}{\nu_2 - \nu_3} \frac{1}{2} ln\left(\frac{q_{3,0}^2 - 1}{q_{2,0}^2 - 1}\right)\right]\mathbf{e_z};$$

$\tilde{\nabla}_\mathbf{1}\varphi + \tilde{\nabla}_\mathbf{2}\boldsymbol{\psi} - \mathbf{U_0}$ – частное решение неоднородного уравнения равновесия. Для его построения введены такие дифференциальные операторы

$$\tilde{\nabla}_1 = k_1\mathbf{e}_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + k_1\mathbf{e}_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$\tilde{\nabla}_2 = \mathbf{e}_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{e}_{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

где $\{\mathbf{e}_{x_i}\}_{i=1}^{3}$ - орты декартовой системы координат, выбранной так, что Ox_3 совпадает с осью анизотропии; $k_j = \dfrac{b_{31}\nu_j}{a_{33} - a_{31}\nu_j}$. После подстановки $\tilde{\nabla}_\mathbf{1}\varphi + \tilde{\nabla}_\mathbf{2}\boldsymbol{\psi} - \mathbf{U_0}$ в неоднородное уравнение равновесия получаем систему дифференциальных уравнений для φ и ψ

$$\left[\Delta_2 + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\psi = \gamma_1 T; \tag{5}$$

$$\left[\Delta_2 + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\varphi = \gamma_2 T + \gamma_3 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}; \tag{6}$$

$$\gamma_1 = \frac{\nu_1\beta_1 - k_1\beta_3}{c_{44}(1+k_1)};\ \gamma_2 = \frac{\beta_3 c_{44}(1+k_1) - c_{13}(\nu_1\beta_1 - k_1\beta_3)}{\nu_1 c_{11} c_{44}(1+k_1)};$$

$$\gamma_3 = \frac{c_{33} + \nu_1 c_{13}}{\nu_1 c_{11}};\ \beta_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik}\alpha_k .$$

В качестве решений последней системы выберем такие регулярные функции:

$$\psi = \frac{\gamma_1}{\nu_1 - \nu_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})}\frac{c_3^2\nu_3}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n-1}\left[\left(u_{3,n-2}^{+} - u_{3,n}^{+}\right) - \frac{c_1\sqrt{\nu_1}}{c_3\sqrt{\nu_3}}\left(u_{1,n-2}^{+} - u_{1,n}^{+}\right)\right] - \frac{1}{2n+3}\left(u_{3,n}^{+} - u_{3,n+2}^{+}\right)\right\};$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,\ \varphi_1 = \frac{\gamma_3}{\nu_2 - \nu_1}\psi,$$

$$\varphi_2 = \left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1\gamma_3}{\nu_2 - \nu_1}\right)\frac{1}{\nu_2 - \nu_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})}\frac{c_3^2\nu_3}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n-1}\left[\left(u_{3,n-2}^{+} - u_{3,n}^{+}\right) - \frac{c_1\sqrt{\nu_1}}{c_3\sqrt{\nu_3}}\left(u_{2,n-2}^{+} - u_{2,n}^{+}\right)\right] - \frac{1}{2n+3}\left(u_{3,n}^{+} - u_{3,n+2}^{+}\right)\right\}.$$

Тогда слагаемые, отвечающие за частное неоднородное решение уравнение равновесия, примут вид

$$\tilde{\nabla}_\mathbf{2}\boldsymbol{\psi} = \frac{\gamma_1 c_3\sqrt{\nu_3}}{\nu_1 - \nu_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^{(3)}}{Q_n(q_{3,0})(2n+1)}\left\{\left[-\sqrt{\nu_3}u_{3,n-1}^{+(1)} + \sqrt{\nu_1}u_{1,n-1}^{+(1)} + \sqrt{\nu_3}u_{3,n+1}^{+(1)}\right]\mathbf{e}_\rho - \left[-u_{3,n-1}^{+} + u_{1,n-1}^{+} + u_{3,n+1}^{+}\right]\mathbf{e}_z\right\};$$

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{1}}\varphi_{\mathbf{1}} = \frac{\gamma_3}{\nu_2 - \nu_1}\frac{\gamma_1 c_3\sqrt{\nu_3}}{\nu_1 - \nu_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^{(3)}}{Q_n\left(q_{3,0}\right)(2n+1)}\left\{k_1\left[-\sqrt{\nu_3}u_{3,n-1}^{+(1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\nu_1}u_{1,n-1}^{+(1)} + \sqrt{\nu_3}u_{3,n+1}^{+(1)}\right]\mathbf{e}_\rho + \left[-u_{3,n-1}^{+} + u_{1,n-1}^{+} + u_{3,n+1}^{+}\right]\mathbf{e}_z\right\};$$

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{1}}\varphi_{\mathbf{2}} = \left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1\gamma_3}{\nu_2 - \nu_1}\right)\frac{c_3\sqrt{\nu_3}}{\nu_2 - \nu_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^{(3)}}{Q_n\left(q_{3,0}\right)(2n+1)}\left\{k_1\left[-\sqrt{\nu_3}u_{3,n-1}^{+(1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\nu_2}u_{2,n-1}^{+(1)} + \sqrt{\nu_3}u_{3,n+1}^{+(1)}\right]\mathbf{e}_\rho + \left[-u_{3,n-1}^{+} + u_{2,n-1}^{+} + u_{3,n+1}^{+}\right]\mathbf{e}_z\right\}.$$

Заметим, что если к φ и ψ прибавить $\sum_{i=1}^{3} C_i x_i + C_0$, где C_k – постоянные, $k = 0, 1, 2, 3$, то результат будет также является решением системы (5), (6). Перемещения $\tilde{\nabla}_{\mathbf{1}}\varphi + \tilde{\nabla}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\psi}$ включают в себя постоянный сдвиг, а именно $\mathbf{U_0}$. Исключим его из решения.

Неизвестные коэффициенты $a_n^{(1)}$ и $a_n^{(2)}$ можно найти, удовлетворив граничным условиям на сфероидальной поверхности. Получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_n^{(1)} r_{1,n}^{+(1)} + a_n^{(2)} r_{2,n}^{+(1)} = \tilde{b}_n^{(1)} \\ a_n^{(1)} r_{1,n}^{+(0)} + a_n^{(2)} r_{2,n}^{+(0)} = \tilde{b}_n^{(0)} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\quad r_{j,n}^{+(1)} = 1, \qquad r_{j,n}^{+(0)} = -\frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}}\frac{Q_n(q_{j,0})}{Q_n^{(1)}(q_{j,0})}, \qquad j = 1, 2;$

$\tilde{b}_0^{(t)} = \left(b_0^{(t)} + U_0\right)\delta_{0,t} - \overline{b}_{-1}^{(t)} - \overline{b}_0^{(t)}, \qquad \tilde{b}_m^{(t)} = \left(-m(m+1)\right)^t b_m^{(t)} - \overline{b}_m^{(t)},$
$m = 1, 2, \ldots,\ t = 0, 1;\ U_0 = \mathbf{U_0}\cdot\mathbf{e_z};\ \delta_{i,j}$ - дельта-символ Кронекера;

$$\overline{b}_k^{(t)} = -\frac{\gamma_1 c_3\sqrt{\nu_3}}{\nu_1 - \nu_3}\left\{-\left(\sqrt{\nu_3}\right)^t\left(\tilde{a}_{k+1}^{(3)} - \tilde{a}_{k-1}^{(3)}\right)Q_k^{(t)}(q_{3,0}) + \left(\sqrt{\nu_1}\right)^t\tilde{a}_{k+1}^{(3)}Q_k^{(t)}(q_{1,0})\right\} +$$

$$+\left(\gamma_2 + \frac{\gamma_1\gamma_3}{\nu_1 - \nu_3}\right)\frac{c_3\sqrt{\nu_3}}{\nu_2 - \nu_3}(-k_1)^t\left\{-\left(\sqrt{\nu_3}\right)^t\left(\tilde{a}_{k+1}^{(3)} - \tilde{a}_{k-1}^{(3)}\right)Q_k^{(t)}(q_{3,0}) + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\nu_2}\right)^t\tilde{a}_{k+1}^{(3)}Q_k^{(t)}(q_{2,0})\right\},\ \tilde{a}_k^{(3)} = \begin{cases}\dfrac{a_k^{(3)}}{Q_k(q_{3,0})(2k+1)}, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & k < 0\end{cases};$$

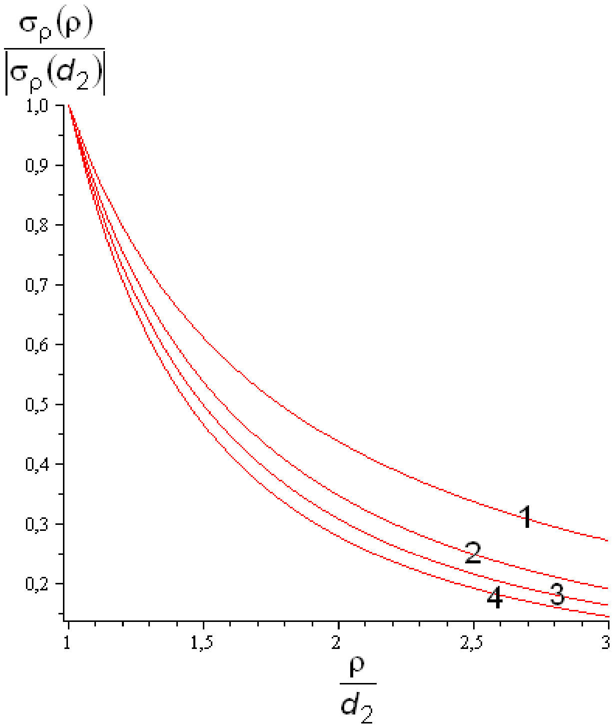
3. Задача о трансверсально-изотропном пространстве с абсолютно твердым равномерно нагретым сфероидальным включением. Будем считать сфероидальную неоднородность абсолютно твердым включением, имеющим температуру T_0. Тогда граничные условия для задач (1, 2) и (3, 4) будут соответственно:

$$T_{|\Gamma} = T_0;$$

$$\mathbf{U}_{|\Gamma} = 0.$$

Удовлетворяя граничным данным, найдем неизвестные коэффициенты: $a_0^{(3)} = T_0$, $a_n^{(3)} = 0$ для $n > 0$; $a_n^{(1)} = a_n^{(2)} = 0$ для $n > 1$. Коэффициенты $a_0^{(j)}, a_1^{(j)}$ для $j = 1, 2$ - являются решениями систем алгебраических уравнений 2-го порядка. На рисунках 1, 2 приведены графики напряжений для таких соотношений полуосей вытянутого сфероида: $\dfrac{d_1}{d_2} = 4, 2, 1.5, 1.2$, графики пронумерованы в том же порядке.

На графиках рисунка 1 видно, что чем больше соотношения между большой и малой полуосями, тем медленней затухают приведенные напряжения в экваториальной плоскости, а графики рисунка 2 показывают, что наибольшее изменение приведенных напряжений на поверхности вытянутого сфероидального включения возникает, когда его форма близка к сферической.



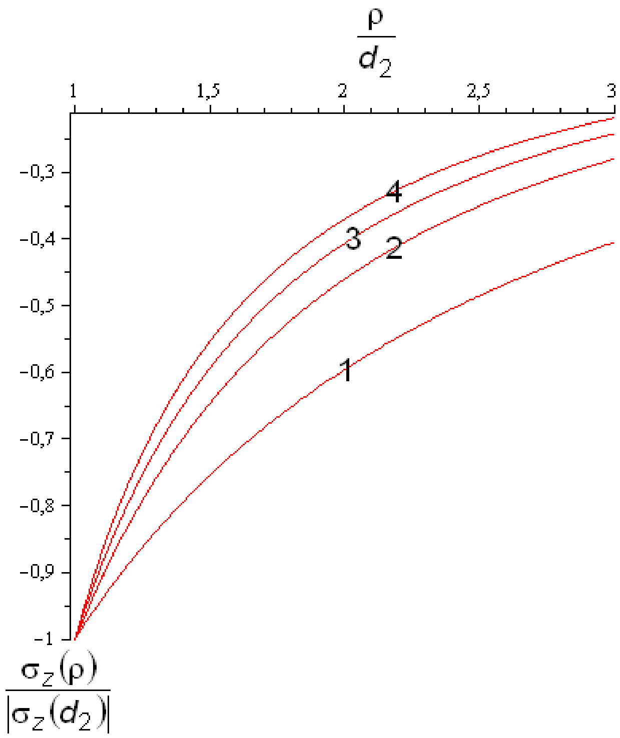


Рисунок 1 – Напряжения в экваториальной плоскости

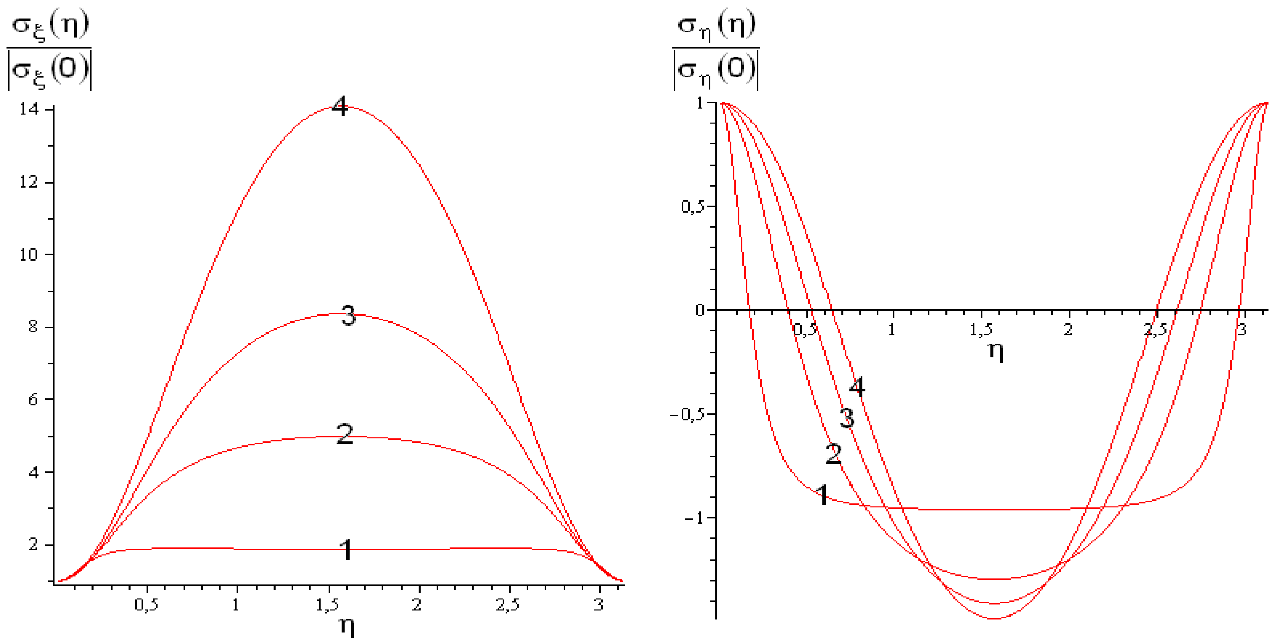


Рисунок 2 – Напряжения на поверхности включения

Список использованных источников

1. Z. Haktan Karadeniz. A numerical study on the coefficients of thermal expansion of fiber reinforced composite materials/ Z. Haktan Karadeniz and Dilek Kumlutas // Composite Structures. – V. 78, Issue 1. – 2007. – P. 1 – 10.

2. Nao-Aki Noda. Two-dimensional and axisymmetric unit cell models in the analysis of composite materials / Nao-Aki Noda, Yasushi Takase, Yasu-Aki Shukuwa // Composite Structures. – V. 79, Issue 2. – 2007. – P. 163 – 173

3. Ding H.J. Analytical thermoelastodynamic solutions for a nonhomogeneous transversely isotropic hollow sphere / H.J. Ding, H.M. Wang, W.W. Chen // Appl. Mech. – 2002. – 72, № 8. – P. 545 – 553.

4. Подильчук Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Граничные задачи статики упругого тела / Ю.Н. Подильчук. – К.: Наук. думка, 1984. – Т. 1. – 303 с.

5. Подильчук Ю.Н. Темоупругая деформация трансверсально-изотропного витягнутого сфероида / Ю.Н. Подильчук // Прикладная. механика. – 1987. – 23, № 12. – С. 25 – 34.

6. Николаев А.Г. Круговая трещина в трансверсально-изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 9 – 14.

Поступила в редакцию 01.06.2011.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков