

## РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНО ПРОГРЕТОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) в пространственных канонических телах с усложненными физико-механическими свойствами, в частности, с трансверсальной изотропией материала тела необходимо при создании моделей пористых и композиционных материалов, а также в расчетах на прочность при конструировании изделий из этих материалов. В большинстве опубликованных работ по этой проблеме использован метод конечных элементов [1, 2]. Одним из основных аналитических методов решения краевых задач для трансверсально-изотропных канонических тел является метод разделения переменных, который применялся в работах [3–5]. В работе [5] была предпринята попытка методом Фурье построить точные решения уравнений равновесия термоупругого трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью. Однако ввиду того что построенная вектор-функция не является регулярной в рассматриваемой области, она не может считаться решением. Распределения напряжений в трансверсально-изотропном многосвязном каноническом теле без учета температурного поля исследовались в работе [6], в которой использовался обобщенный метод Фурье (ОМФ). В работе [7] при помощи ОМФ впервые построены общие точные решения основных осесимметричных краевых задач теории термоупругости для трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью. Полученные результаты использованы при решении осесимметричной краевой задачи термоупругости для трансверсально-изотропного пространства с абсолютно твердым и равномерно нагретым сфероидальным включением.

В настоящей статье ОМФ применен к решению термоупругой краевой задачи для трансверсально изотропного полупространства со сфероидальной неоднородностью. Рассмотрена задача для случая неподвижных границ с постоянными температурами. Проведен численный анализ распределения напряжений на поверхности и в экваториальной плоскости включения. Приведен качественный анализ напряжений в зависимости от геометрических параметров.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим первую осесимметричную краевую задачу термоупругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной неоднородностью. Предполагается, что трансверсально-изотропное полупространство,

имеющее внутреннюю сфероидальную границу, занимает область  $\Omega$ , с центром неоднородности совмещено начало декартовой системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , а оси  $Ox_3$ , анизотропии и симметрии рассматриваемого тела совпадают. Исследуемая краевая задача в силу стационарности распадается на задачу теплопроводности с заданным температурным полем (1) и задачу термоупругости (2, 3, 4), то есть задачу решения неоднородной системы уравнений равновесия в перемещениях трансверсально изотропной среды

$$T = \frac{c_3 \sqrt{v_3}}{\sqrt{v_3 \rho^2 + z^2}}; \quad (1)$$

$$c_{ij} u_{i,jj} + \sum_{j \neq i} b_{ij} u_{i,jj} + \sum_{j \neq i} a_{ij} u_{i,jj} = \sum_{k=1}^3 c_{ik} \alpha_k T_{,i}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_{|\Gamma_1} = c_{44} \int_0^\infty [\lambda B_1(\lambda) J_1(\lambda \rho) \mathbf{e}_\rho + \lambda B_0(\lambda) J_0(\lambda \rho) \mathbf{e}_z] \lambda d\lambda; \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_{|\Gamma_2} = \frac{c_{44}}{\sqrt{d_1^2 \sin^2 \eta + d_2^2 \cos^2 \eta}} \sum_{n=0}^\infty [b_n^{(1)} P_n^{(1)}(\cos \eta) \mathbf{e}_\rho + b_n^{(0)} P_n(\cos \eta) \mathbf{e}_z]; \quad (4)$$

в области  $\Omega$ , где  $k_{ij}$  - коэффициенты теплопроводности ( $k_{11} = k_{22}$ );  $\alpha_k$  - коэффициенты линейного теплового расширения;  $b_n^{(j)}, B_j(\lambda)$  - заданные коэффициенты и функции;  $c_{ij} = E_{ijj}$  при  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $c_{44} = E_{1313} = E_{2323}$ ;  $\frac{c_{11} - c_{12}}{2} = E_{1212}$ ;  $a_{ij} = E_{ijj}$  и  $b_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$  при  $i \neq j$ ;  $E_{ijkl}$  - элементы тензора упругих постоянных;  $\Gamma_1, \Gamma_2$  - граница полупространства и сфероиды;  $\rho, z$  и  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z$  - соответственно координаты и орты цилиндрической системы координат, совмещенной с декартовой;  $P_n^m(x)$  - присоединенная функция Лежандра первого рода.

Уравнения  $z = -h$  и  $\left(\frac{\rho}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{z}{d_1}\right)^2 = 1$  задают границы

полупространства и полости соответственно.

**2. Построение общего решения.** Вводятся три вытянутые сфероидальные (сжатые сфероидальные, сферические) системы координат  $(\xi_j, \eta_j, \varphi)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), координаты которых связаны с цилиндрическими координатами такими соотношениями:

$$\begin{cases} \rho = c_j \cdot sh \xi_j \cdot \sin \eta_j, & \eta_j \in [0; \pi]; \\ \mathbf{z} = \sqrt{v_j} \cdot c_j \cdot ch \xi_j \cdot \cos \eta_j, & \xi_j \in [0; \infty), \end{cases}$$

где  $c_j > 0$  - параметры сфероидальных систем координат;  $v_3 = \frac{k_{33}}{k_{11}}$ ;

$v_1, v_2$  - два разных положительных корня уравнения:

$$c_{44}c_{11}v^2 + (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33})v + c_{33}c_{44} = 0.$$

Уравнения поверхности сфероидальной полости запишутся в виде  $\xi_j = \xi_{j0}$ . На граничной поверхности должны выполняться такие соотношения:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot sh \xi_{10} &= c_2 \cdot sh \xi_{20} = c_3 \cdot sh \xi_{30}; \\ \sqrt{v_1}c_1 \cdot ch \xi_{10} &= \sqrt{v_2}c_2 \cdot ch \xi_{20} = \sqrt{v_3}c_3 \cdot ch \xi_{30}. \end{aligned}$$

Тогда  $\cos \eta_j = \frac{z}{\sqrt{v_j}c_j \cdot ch \xi_{j0}}$  на поверхности сфероида не зависит от  $j$ .

Будем вектор перемещений – в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(j)}}{Q_n^{(1)}(q_{j,0})} \mathbf{U}_{j,n,0}^+(\xi_j, \eta_j) + \sum_{j=1}^2 \int A_j(\lambda) \mathbf{V}_{j,0}^-(\rho, \mathbf{z}_j, \lambda) + \sum_{i=1}^2 \nabla_i \psi_i,$$

где  $a_n^{(j)}, A_j(\lambda)$  – неизвестные коэффициенты и плотности;  $\mathbf{z} = \sqrt{v_j} \mathbf{z}_j$ ;

$$\mathbf{V}_{j,0}^{\pm}(\rho, \mathbf{z}_j, \lambda) = - \sum_{t=0}^1 \left( \mp \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right)^{1-t} v_j^{\pm(t)} \mathbf{e}_{\rho_{2-t}}; \quad v_j^{\pm(t)} = e^{\pm \lambda \frac{z}{\sqrt{v_j}}} J_t(\lambda \rho);$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\rho_1} = \mathbf{e}_{\rho} \\ \mathbf{e}_{\rho_2} = \mathbf{e}_z \end{cases}; \quad k_j = \frac{b_{31}v_j}{(a_{33} - a_{31}v_j)}; \quad \mathbf{U}_{j,n,0}^{\pm} = - \sum_{t=0}^1 \left( \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right)^{1-t} u_{j,n}^{\pm(t)} \mathbf{e}_{\rho_{2-t}};$$

$$u_{j,n}^{\pm(t)} = \begin{cases} Q_n^{-t}(q_j) \\ P_n^{-t}(q_j) \end{cases} P_n^t(p_j) = (-1)^t \begin{cases} Q_n^t(q_j) \\ P_n^t(q_j) \end{cases} P_n^{-t}(p_j); \quad q_j = ch(\xi_j);$$

$p_j = \cos(\eta_j)$ ;  $Q_n^m(x)$  - присоединенная функция Лежандра второго

рода;  $\sum_{i=1}^2 \nabla_i \psi_i$  – частное решение неоднородного уравнения равновесия.

Для его построения введены такие дифференциальные операторы

$$\nabla_i = \mathbf{e}_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + k_i \mathbf{e}_{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3};$$

а функции  $\psi_j$  являются регулярным решением системы:

$$\left[ \Delta_2 + v_i \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \psi_i = \gamma_i T, \quad i = 1, 2; \quad (5)$$

$$\gamma_i = \frac{(-1)^i}{\frac{k_2}{v_2} - \frac{k_1}{v_1}} \cdot \frac{\beta_3 - k_{3-i} v_i \beta_1}{v_{3-i} [c_{44}(1+k_i) + c_{13} k_i]}; \quad \beta_i = \sum_{k=1}^3 c_{ik} \alpha_k. \quad (6)$$

решением системы (5) будут такие функции:

$$\psi_i = \frac{\gamma_i}{v_i - v_4} c_4 \sqrt{v_4} \left[ z \omega_i(\rho, z) - \left( \sqrt{v_4 \rho^2 + z^2} - \sqrt{v_i \rho^2 + z^2} \right) \right],$$

где:

$$\omega_i(\rho, z) = \ln \left( \frac{v_i}{v_4} \cdot \frac{\sqrt{v_4 \rho^2 + z^2} + z}{\sqrt{v_i \rho^2 + z^2} + z} \right);$$

Используя следующие теоремы сложения:

$$v_j^{-(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) i_n(\lambda c_j) u_{j,n}^{-(t)};$$

$$u_{j,n}^{+(t)} = (\pm 1)^{n+t} c_j \int_0^{\infty} v_j^{\mp(t)} i_n(\lambda c_j) d\lambda, \quad \begin{cases} z_j > c_j \\ z_j < -c_j \end{cases}, \quad \begin{cases} n \neq -1 \\ t \neq 0 \end{cases};$$

$$- u_{j,-1}^{+(0)}(\xi_j, \eta_j) + u_{s,-1}^{+(0)}(\xi_s, \eta_s) - \left[ - u_{j,-1}^{+(0)}(\xi_{j0}, \eta_j) + u_{s,-1}^{+(0)}(\xi_{s0}, \eta_s) \right] =$$

$$= (\pm 1)^{-1} \int_0^{\infty} \left[ - c_j v_j^{\mp(0)} i_{-1}(\lambda c_j) + c_s v_s^{\mp(0)} i_{-1}(\lambda c_s) \right] d\lambda, \quad \begin{cases} z_j > c_j \\ z_j < -c_j \end{cases}; \\ \begin{cases} z_s > c_s \\ z_s < -c_s \end{cases};$$

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x); \quad I_n(x) - \text{присоединенная функция Бесселя.}$$

можно полностью представить решение либо в сфероидальных либо в цилиндрических координатах. Таким образом удовлетворяя граничным условиям и пользуясь ортогональностью и полнотой функций Лежандра, а также обратным преобразованием Ханкеля, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно  $a_n^{(j)}$  фредгольмовость оператора которой исследована в [8].

**3. Задача о специально прогретом трансверсально-изотропном полупространстве со сфероидальной полостью для случая свободных границ.** Для случая свободных граничных условий необходимо выбрать условия (3, 4) такими:

$$\mathbf{F}_{|\Gamma_1} = 0;$$

$$\mathbf{F}_{|\Gamma_2} = 0.$$

На рисунках 1, 2 приведены графики напряжений для постоянного соотношения полуосей вытянутого сфероида  $\frac{d_1}{d_2} = 2$  и для переменного соотношения расстояния от начала координат до границы полупространства к большой полуоси сфероида, а именно для таких соотношений  $\frac{h}{d_1} = 1.1, 1.25, 1.5, 4$ , графики пронумерованы в том же порядке. На рисунках 3, 4 приведены графики напряжений для постоянного соотношения расстояния от начала координат до границы полупространства к большой полуоси сфероида  $\frac{h}{d_1} = \frac{3}{2}$  и для переменного соотношения полуосей вытянутого сфероида, а именно для таких соотношений  $\frac{d_1}{d_2} = 4, 2, 1.5, 1.2$ , графики пронумерованы в том же порядке.

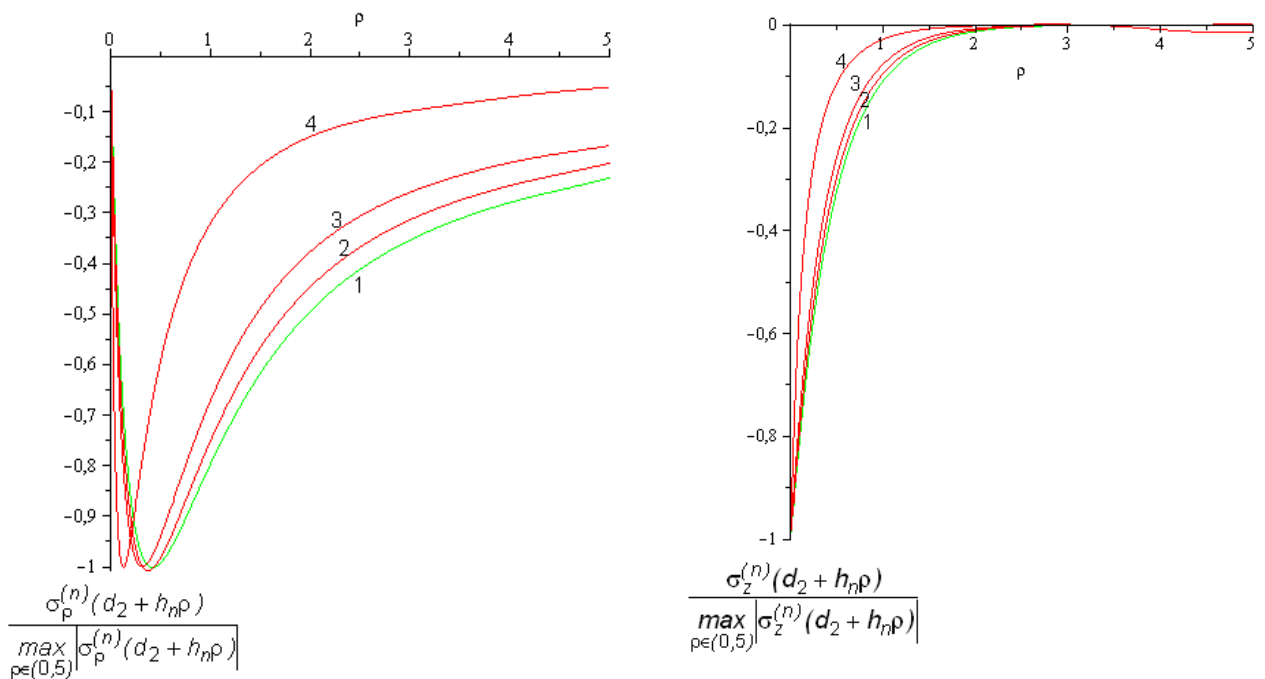


Рисунок 1 – Напряжения в экваториальной плоскости при фиксированных  $d_1, d_2$  и переменном  $h$

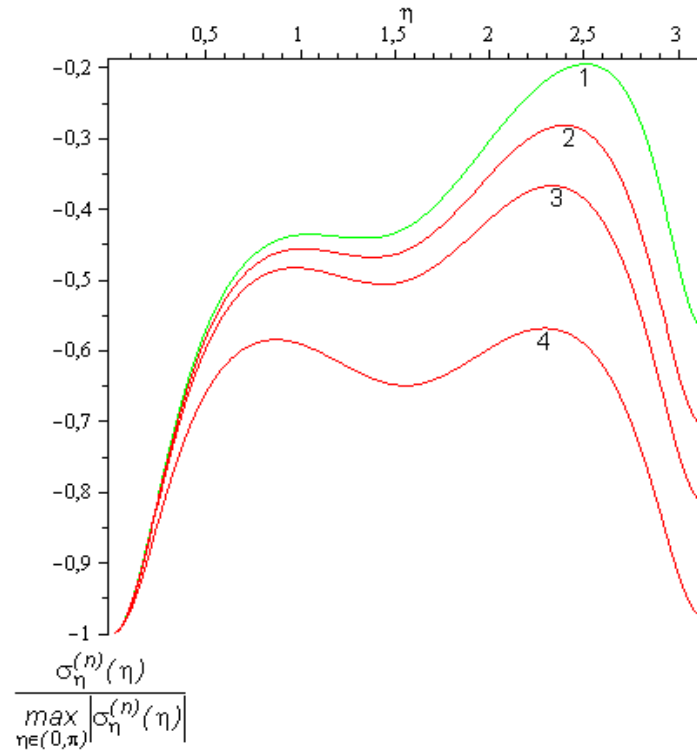


Рисунок 2 – Напряжения на поверхности включения при фиксированных  $d_1$ ,  $d_2$  и переменном  $h$

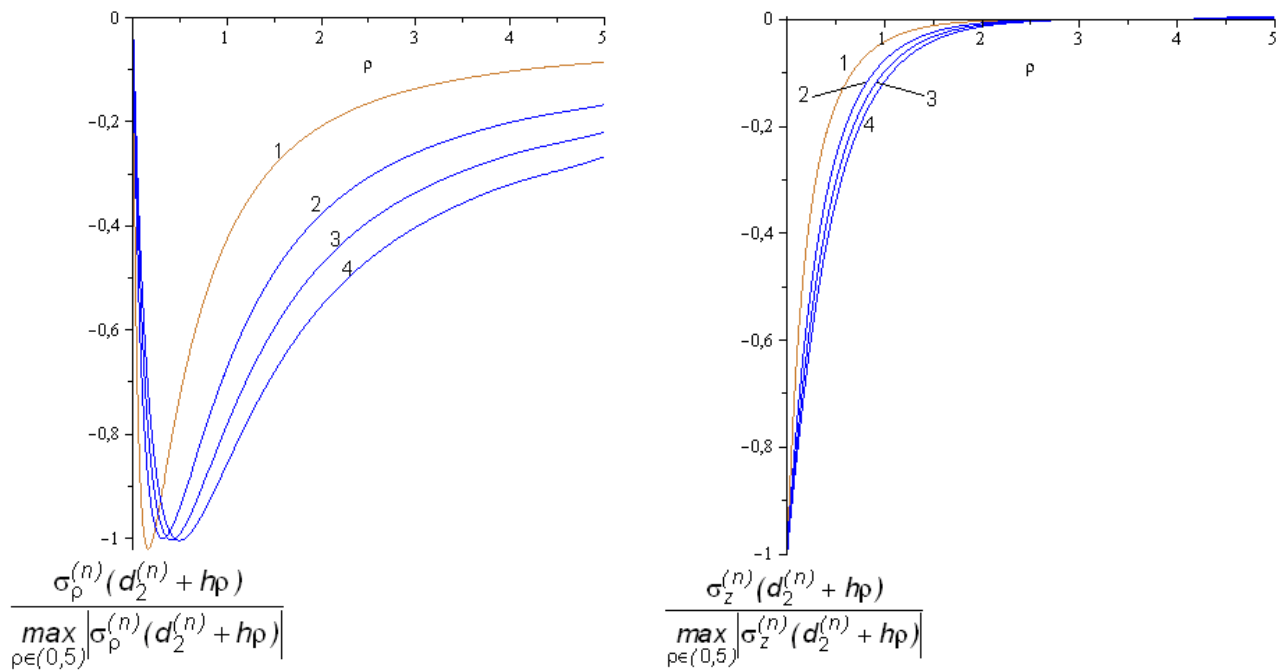


Рисунок 3 – Напряжения в экваториальной плоскости при фиксированных  $d_1$ ,  $h$  и переменном  $d_2$

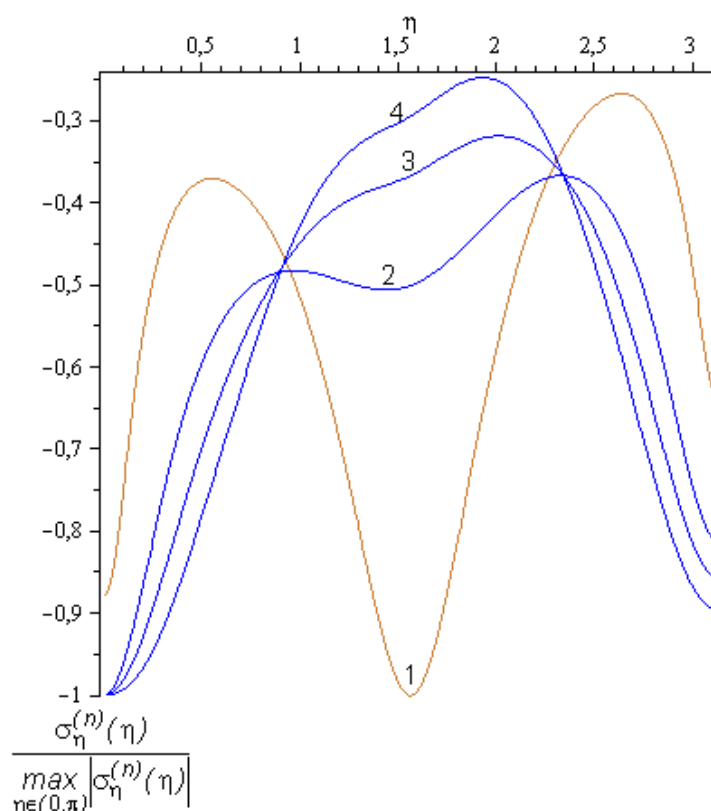


Рисунок 4 – Напряжения на поверхности включения при фиксированных  $d_1$ ,  $h$  и переменном  $d_2$

#### Список использованных источников

1. Haktan Karadeniz Z. A numerical study on the coefficients of thermal expansion of fiber reinforced composite materials [Текст]/ Z. Haktan Karadeniz and Dilek Kumlutas // Composite Structures. – V. 78, Issue 1. – 2007. – P. 1 – 10.
2. Nao-Aki Noda Two-dimensional and axisymmetric unit cell models in the analysis of composite materials [Текст] / Nao-Aki Noda, Yasushi Takase, Yasu-Aki Shukuwa // Composite Structures. – V. 79, Issue 2. – 2007. – P. 163 – 173
3. Ding, H.J. Analytical thermoelastodynamic solutions for a nonhomogeneous transversely isotropic hollow sphere [Текст] / H.J. Ding, H.M. Wang, W.W. Chen // Appl. Mech. – 2002. – 72, № 8. – P. 545 – 553.
4. Подильчук, Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Граничные задачи статики упругого тела. [Текст]. – К.: Наук. думка, 1984. – Т. 1. – 303 с.
5. Подильчук, Ю.Н. Темоупругая деформация трансверсально-изотропного втянутого сфероида [Текст] // Прикладная. механика. – 1987. – 23, № 12. – С. 25 – 34.

6. Николаев, А.Г. Круговая трещина в трансверсально-изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки [Текст] / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 9 – 14.

7. Николаев, А.Г. О точном решении осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной неоднородностью [Текст] / А.Г. Николаев, Е.М. Орлов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2011. – Выпуск 2 (66). – С. 81 – 87.

8. Николаев, А.Г. Некоторые осесимметричные задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью [Текст] / А.Г. Николаев, Е.М. Орлов, И.А. Юхно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2007. – Выпуск 1 (48). – С. 42 – 49.

*Поступила в редакцию 30.11.2011.*

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*