

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНОЙ БАЛКИ НА РЕГЛАМЕНТИРОВАННЫЙ ПРОГИБ

1 Проектирование балки с регламентированным прогибом.

На практике часто встречаются задачи, когда проектные параметры балки должны обеспечивать вполне конкретную изгибную жесткость, от которой зависит, с одной стороны, прогиб, а с другой – спектр частот собственных колебаний. В данной работе рассмотрено решение задачи проектирования балки минимальной массы при ограничении на ее прогиб в произвольном сечении.

Для получения формул для расчета перемещения балки в сечении $x = x_0$ (рис. 1, а) воспользуемся теоремой Кастильяно, согласно которой

$$w = \int_0^l \frac{M_\Sigma}{(EI)} \left(\frac{dM_\Sigma}{dQ_0} \right) dx. \quad (1)$$

В этой формуле (EI) – изгибная жесткость балки, которая в общем случае является функцией от координаты x ; Q_0 – произвольная фиктивная сила, прикладываемая в точке x_0 ; M_Σ – сумма моментов от действующих внешних сил M и фиктивной силы Q_0 $M(Q_0)$. Для консольной балки (см. рис. 1, а) моменты равны:

– при $0 \leq x \leq x_0$

$$M_\Sigma = M + Q_0(x_0 - x); \quad (2)$$

– при $x_0 \leq x \leq l$

$$M_\Sigma = M, \quad (3)$$

а для балки на двух шарнирных опорах (рис. 1, б) после определения дополнительных реакций от силы Q_0 получено:

– при $0 \leq x \leq x_0$

$$M_\Sigma = M - Q_0(l - x_0) x / l; \quad (4)$$

– при $x_0 \leq x \leq l$

$$M_\Sigma = M - Q_0(l - x) x_0 / l. \quad (5)$$

При проектировании для упрощения расчетов пренебрегают изгибной жесткостью стенки с заплечиками [1]. Кроме того, считая стенку спроектированной по условиям прочности и устойчивости, принимают ее массу известной и постоянной величиной [1]. Тогда целевая функция проектирования принимает вид

$$\bar{G} = \int_0^l (\delta_\varepsilon b_\varepsilon \rho_\varepsilon + \delta_H b_H \rho_H) dx \rightarrow \min, \quad (6)$$

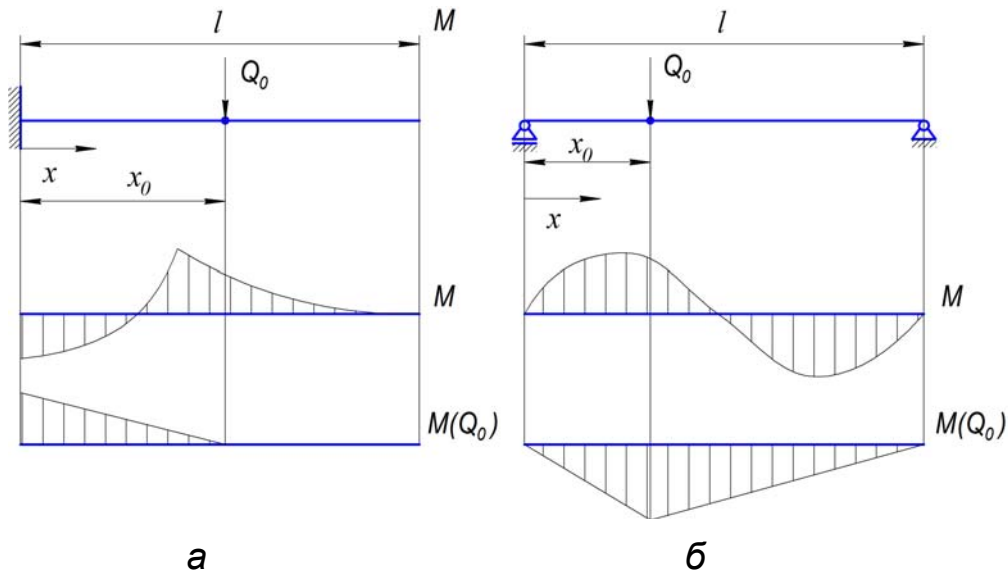


Рисунок 1 - К определению прогиба балки

а ограничение для консольной балки –

$$\int_0^{x_0} \frac{M(x_0 - x)}{(EI)} dx \leq w_0; \quad (7)$$

для балки на двух опорах –

$$\int_0^{x_0} \frac{M x (l - x_0)}{(EI)l} dx + \int_{x_0}^l \frac{M x_0 (l - x)}{(EI)l} dx \leq w_0. \quad (8)$$

Здесь принято, что $Q_0 = 0$.

Так как для балки на двух опорах прогиб определяется суммой двух интегралов (8), в прямой постановке задача не приводится к классической изопериметрической вариационной задаче, поэтому сводят одно ограничение к двум изолированным. Для этого принимают во внимание, что в точке $x = x_0$ прогиб имеет максимум, а значит,

$\frac{dw(x)}{dx} = 0$, и вместо проектируемой балки рассматривают две балки,

каждая из которых заделана в сечении $x = x_0$ (рис. 2). Реакции в опорах от силы Q_0

$$R_A = Q_0 \frac{l - x_0}{l}; \quad R_B = Q_0 \frac{x_0}{l}. \quad (9)$$

Дополнительные изгибающие моменты от силы R_A для левой и R_B для правой балок можно записать так:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\text{лев}} &= R_A (x_0 - x) = Q_0 \frac{l - x_0}{l} (x_0 - x); \\ \bar{M}_{\text{пр}} &= R_B (l - x_0 - x) = Q_0 \frac{x_0}{l} (l - x_0 - x). \end{aligned} \quad (10)$$

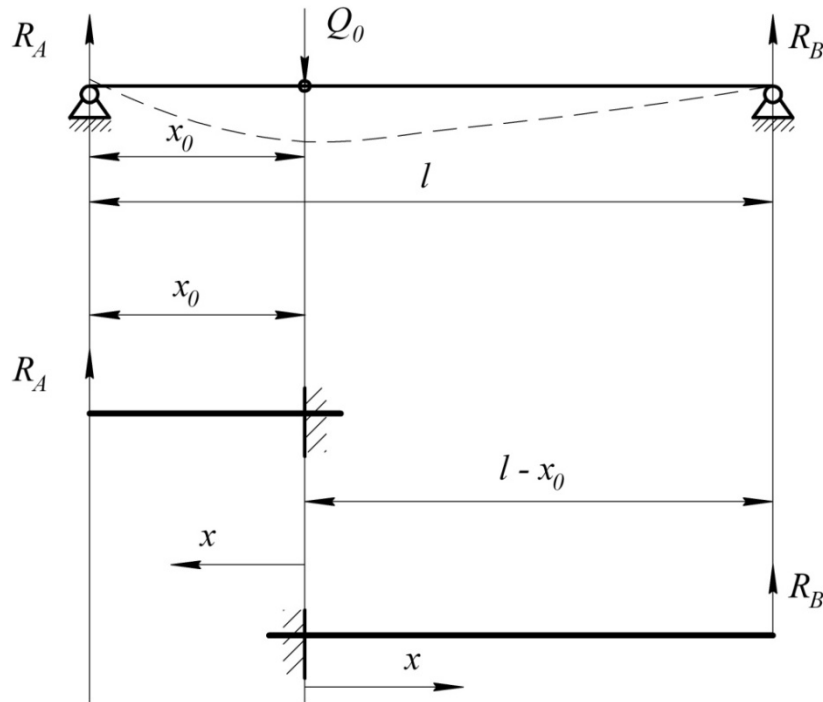


Рисунок 2 - Схема декомпозиции проектируемой балки

Тогда прогибы левой и правой балок согласно теореме Кастильяно определяются зависимостями

$$\int_0^{x_0} \frac{M(x_0 - x)}{(EI)} dx = \frac{w_0 l}{l - x_0}; \quad \int_0^{x_0} \frac{M(l - x_0 - x)}{(EI)} dx = \frac{w_0 l}{x_0}. \quad (11)$$

Таким образом, можно сформулировать две изолированные изопериметрические вариационные задачи. И так как задачи проектирования для консольной балки и балки на двух опорах имеют один характер, рассматривают проектирование только для консольной балки.

Ограничение (7) принимают в виде равенства и после подстановки в него выражения для (EI) получили

$$\int_0^{x_0} \frac{M(x_0 - x)(E_\epsilon \delta_\epsilon b_\epsilon + E_H \delta_H b_H)}{H_{эф}^2 E_\epsilon \delta_\epsilon b_\epsilon E_H \delta_H b_H} dx = w_0. \quad (12)$$

Задача минимизации функционала (6) при ограничении (12) является типовой изопериметрической вариационной задачей, которую решают методом неопределенных множителей Лагранжа, для чего составляют новый функционал в виде

$$L = \delta_\epsilon b_\epsilon \rho_\epsilon + \delta_H b_H \rho_H + \lambda \frac{M(E_\epsilon \delta_\epsilon b_\epsilon + E_H \delta_H b_H)}{H_{эф}^2 E_\epsilon \delta_\epsilon b_\epsilon E_H \delta_H b_H} (x_0 - x), \quad (13)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа, который для изопериметрической вариационной задачи является константой.

Разрешающая система уравнений для определения толщины δ_e и δ_H и ширины полок b_e и b_H имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_e} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \delta_H} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial b_e} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial b_H} = 0, \quad (14)$$

а для нахождения λ к этой системе добавляется уравнение связи (12).

После некоторых преобразований получится такая система уравнений:

$$c_1 = \frac{w_0 E_H \delta_H^2 b_H^2 \left(H - \frac{\delta_H}{2} \psi \right)^3}{\psi M(x_0 - x) \left(H - \frac{3\delta_H}{2} \psi \right)}; \quad (15)$$

$$c_2 = \frac{w_0 E_H \delta_H^2 b_H^2 \left(H - \frac{\delta_H}{2} \psi \right)^2}{\psi M(x_0 - x)}.$$

Решением этой системы являются формулы

$$\delta_H = \frac{2H(c_1 - c_2)}{\psi(3c_1 - c_2)}; \quad (16)$$

$$b_H = \frac{\psi(3c_1 - c_2)^2}{4H^2 c_1 (c_1 - c_2)} \sqrt{\frac{\psi c_2 |M|(x_0 - x)}{w_0 E_H}}, \quad (17)$$

где

$$\psi = 1 + \sqrt{\frac{\rho_e}{\rho_H} \cdot \frac{E_H}{E_e}}; \quad (18)$$

$$c_1 = \int_0^{x_0} \frac{H - \frac{\delta_H}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_e}{\rho_H} \frac{E_H}{E_e}} \right)}{H - \frac{3\delta_H}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_e}{\rho_H} \frac{E_H}{E_e}} \right)} \delta_H b_H dx = \int_0^{x_0} \frac{H - \frac{\delta_H}{2} \psi}{H - \frac{3\delta_H}{2} \psi} \delta_H b_H dx; \quad (19)$$

$$c_2 = \int_0^{x_0} \delta_H b_H dx. \quad (20)$$

Аналогично получатся формулы для δ_e и b_e :

$$\delta_e = \frac{2H(c_1 - c_2)(\psi - 1)}{\psi(3c_1 - c_2)}; \quad (21)$$

$$b_{\epsilon} = \frac{\rho_H \psi (3c_1 - c_2)^2 (\psi - 1)}{\rho_{\epsilon} 4H^2 c_1 (c_1 - c_2)} \sqrt{\frac{\psi c_2 |M| (x_0 - x)}{w_0 E_H}}. \quad (22)$$

Площади полок определяются такими зависимостями:

$$f_{\epsilon} = \delta_{\epsilon} b_{\epsilon} = \frac{E_H}{E_{\epsilon}} \frac{3c_1 - c_2}{2Hc_1} \sqrt{\frac{\psi c_2 |M| (x_0 - x)}{w_0 E_H}}; \quad (23)$$

$$f_H = \delta_H b_H = \frac{3c_1 - c_2}{2Hc_1} \sqrt{\frac{\psi c_2 |M| (x_0 - x)}{w_0 E_H}}.$$

Аналитическое решение этих уравнений не представляется возможным, поэтому предложен алгоритм численного метода определения толщины и ширины полок:

– задание коэффициентов c_1 и c_2 нулевого приближения. Их величина пропорциональна объему полок, поэтому инженер может достаточно обоснованно назначить параметры c_1 и c_2 ;

– определение δ_{ϵ} , δ_H , b_{ϵ} , b_H , f_{ϵ} , f_H ;

– вычисление значений c_1 и c_2 первого приближения по формулам (19) и (20);

– повторение предыдущих двух пунктов до достижения требуемой степени сходимости.

Принципиально итерационный процесс сходится при любых c_1 и c_2 (но $c_1 \neq c_2$), потому что на каждой последующей итерации извлекается квадратный корень из некоторых величин, а известно, что результат последовательного многократного извлечения корня из любой величины (больше или меньше единицы) всегда приводит к единице.

Так как в данном алгоритме извлекается корень из некоторых величин, а в частности из изгибающего момента M , то необходимо брать абсолютное его значения, что противоречит определению прогиба в случае со знакопеременным моментом (рис. 3).

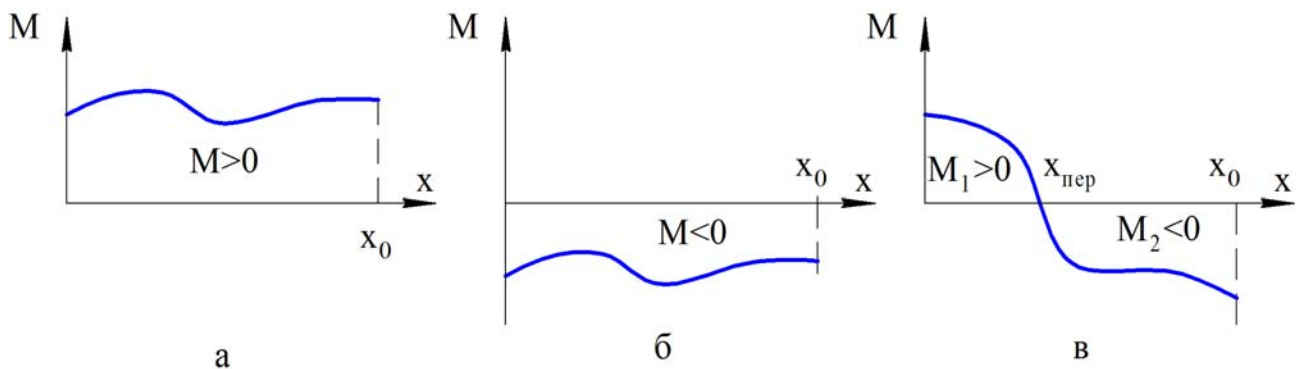


Рисунок 3 – Варианты знаков изгибающего момента

Для случаев а и б (см. рис. 3), где момент имеет постоянный знак на участке балки $x \in [0; x_0]$, расчеты прогиба не изменятся, а для случая в, где момент знакопеременный на участке балки $x \in [0; x_0]$, прогиб не может определяться по абсолютному значению момента $|M|$:

$$\text{а) } M > 0; \quad w = \int_0^{x_0} \frac{M (x_0 - x)}{(EI)} dx \leq w_0;$$

$$\text{б) } M < 0; \quad w = \int_0^{x_0} \frac{|M| (x_0 - x)}{(EI)} dx \leq w_0;$$

$$\text{в) } M_1 > 0; M_2 < 0; \text{ или } M_1 < 0; M_2 > 0;$$

$$w_0 = \int_0^{x_0} \frac{M (x_0 - x)}{(EI)} dx = \int_0^{x_{\text{пер}}} \frac{|M_1| (x_0 - x)}{(EI)} dx - \int_{x_{\text{пер}}}^{x_0} \frac{|M_2| (x_0 - x)}{(EI)} dx \neq \int_0^{x_0} \frac{|M| (x_0 - x)}{(EI)} dx. \quad (24)$$

где $x_{\text{пер}}$ – координата перемены знака момента M .

Поэтому для расчета балки с ограничением на прогиб при знакопеременном моменте на расчетной длине балки формулы (16) – (23) для определения параметров балки не подходят, вернее сказать – предельный прогиб в этих формулах необходимо подставлять другой, который будет равен

$$w'_0 = \frac{(\eta + 1)}{(\eta - 1)} w_0; \quad \eta = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\int_0^{x_{\text{пер}}} \frac{\sqrt{|M_1| (x_0 - x)}}{H_1} dx}{\int_{x_{\text{пер}}}^{x_0} \frac{\sqrt{|M_2| (x_0 - x)}}{H_2} dx}. \quad (25)$$

2 Проектирование балки с регламентированным прогибом совместно с ограничениями по несущей способности

Ранее предлагалось решать задачи проектирования балки, удовлетворяющей ограничениям по прочности, устойчивости и прогибу, так:

- спроектировать балку по условиям обеспечения несущей способности (выполнение ограничений по прочности и устойчивости);
- определить прогиб;
- если прогиб больше заданного, то спроектировать балку по требуемой изгибной жесткости и провести сравнение распределения площадей по сечениям. На этой основе принять в качестве конструктивных параметры, определяемые верхней огибающей кривых (см. рис.4).

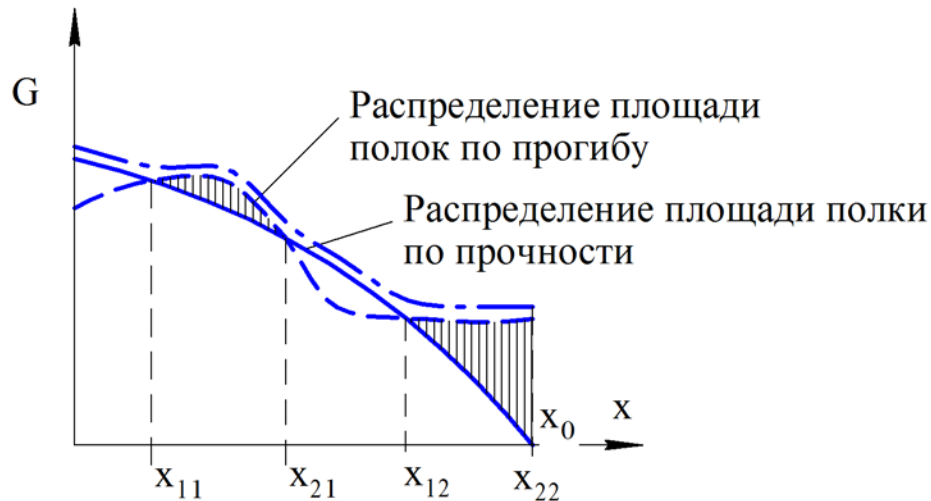


Рисунок 4 - Сопоставление площади полки, найденных по условиям обеспечения прочности и жесткости

На рисунке 4 координаты x_{1j} и x_{2j} - это координаты начала и конца участка, где распределение площади полки по прогибу превышает распределение площади полки по прочности.

Так как для балки конструктивными параметрами принимаются площади полки верхней огибающей, что обеспечит на некоторых участках избыток прочности и в целом для балки меньший прогиб, то можно снизить массу полки, используя «запас прогиба»:

$$\Delta w = \int_0^{x_{11}} |M| (x_0 - x) \left[\frac{1}{(EI)_{пр}} - \frac{1}{(EI)_w} \right] dx + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} |M| (x_0 - x) \left[\frac{1}{(EI)_{пр}} - \frac{1}{(EI)_w} \right] dx \right), \quad (26)$$

где j , n - номер участка и их количество, на которых площади полки по прогибу превышают площади полки по прочности;

$(EI)_{пр}$ - изгибная жесткость балки для поперечного сечения балки, спроектированной по условиям обеспечения несущей способности;

$(EI)_w$ - изгибная жесткость балки для поперечного сечения балки, спроектированной по требуемой изгибной жесткости;

x_0 - координата сечения максимального прогиба балки.

Можно сказать, что Δw - это разница прогибов на участках, где площади по прочности превышают площади по прогибу.

Используя новое значение предельного прогиба балки можно проектировать по указанному выше алгоритму

$$w'_0 = (w_0 - \Delta w). \quad (27)$$

Таким образом, спроектированная балка по данному значению предельного прогиба будет иметь в целом прогиб, равный заданному, а это значит, что масса балки в целом уменьшится.

Для проверки данной методики проектирования были рассмотрены численные примеры для консольной балки с различной нагрузкой: постоянным (рис. 5, а) и знакопеременным (рис. 5, б) изгибающим моментом $M(x)$ по длине балки. Исходные данные: $H = 200$ мм, $b_e = 60$ мм, $b_n = 80$ мм, $y_N = H/2 = 100$ мм, $l = 5$ м, изготавливаемой из КМ с такими характеристиками $F_p = 1000$ МПа, $F_c = 700$ МПа, $E = 120$ ГПа, $\rho = 1500$ кг/м³. Нагрузки расчетных случаев показанные на рис. 5 при $q = 0,1$ кН/м, $P = 0,2$ кН. Предельное значение прогиба $w_0 = 800$ мм.

Балка проектировалась по трем последовательным пунктам:

- 1) проектирование по прочности;
- 2) проектирование по прогибу;
- 3) проектирование по прочности и по прогибу.

В результате данных численных экспериментов были построены графики распределения площади полок по длине балки (рис. 6), а также сделан вывод, что после совместного проектирования балки по прочности и по прогибу масса балки уменьшается.

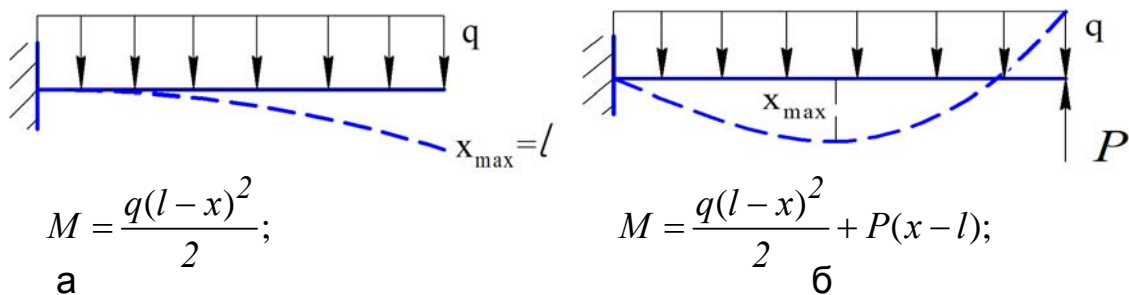


Рисунок 5 – Нагрузки на балку:

а – постоянный момент; б – знакопеременный момент

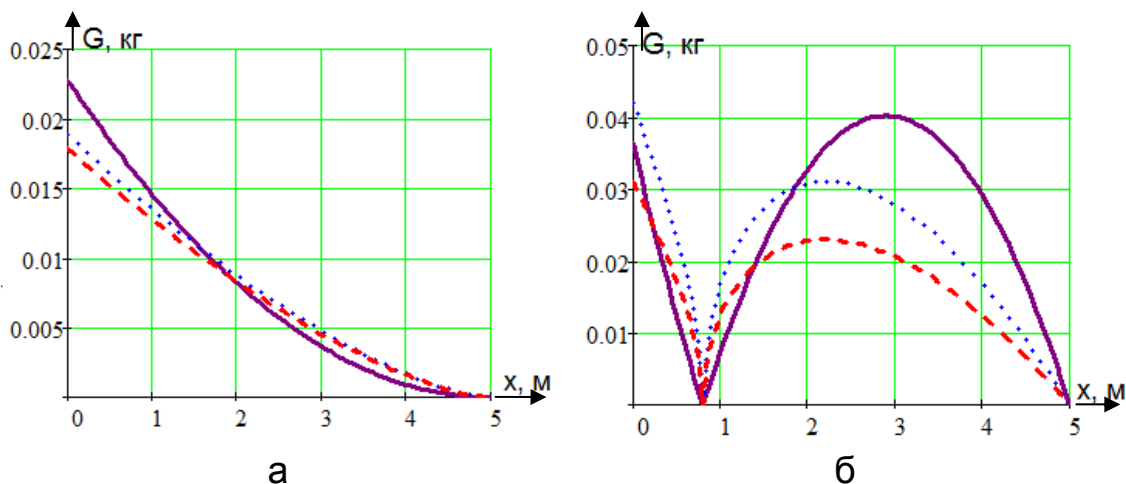


Рисунок 6 – Распределение площади полок балки:

а – постоянный момент; б – знакопеременный момент;

— - по прочности; - по прогибу; - - - по прочности и прогибу

Выводы

Предложена численная методика проектирования композитной балки с регламентированным прогибом совместно с ограничениями по несущей способности, которая рассмотрена на численных примерах, что позволило проверить ее и внести коррективы. Численные расчеты показали, что такой алгоритм проектирования позволяет снизить массу балки на 5...10% по сравнению с ранее использованными методиками.

В дальнейшем предполагается рассмотрение большего количества численных примеров для консольных и закрепленных на двух опорах балок, а также проработка выводов об оптимальных зависимостях ширины полок.

Список использованных источников

1. Карпов, Я.С. Проектирование деталей и агрегатов из композиционных: учебник [Текст] / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2010. – 768 с.
2. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов [Текст] / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Карпов, Я.С. Проектирование и конструктивно-технологические решения лонжеронного крыла из композиционных материалов: учеб. пособие [Текст] / Я.С. Карпов, Ф.М. Гагауз, П.М. Гагауз. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2004. – 143 с.
4. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: «Наук. думка», 1975. – 704 с.

Поступила в редакцию 21.10.2011.

*Рецензент: канд. техн. наук, проф. В.В. Кириченко,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*