

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського  
"Харківський авіаційний інститут"

**С.Ю. Нестеренко, Ю.О.Шепетов**

**ВИБІР ПАРАМЕТРІВ КОСМІЧНИХ ЕНЕРГОРУШІЙНИХ СИСТЕМ  
ДЛЯ МАНЕВРІВ З МАЛОЮ ТЯГОЮ**

Навчальний посібник до курсового й дипломного проектування

Харків "ХАІ" 2009

УДК 629.78.015 (075.8)

**С.Ю. Нестеренко. Вибір параметрів космічних енергорушійних систем для маневрів з малою тягою:** навч. посібник до курс. і дипл. проектування / С.Ю. Нестеренко, Ю.О. Шепетов. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2009. – 37 с.

Розглянуто найбільш типові космічні операції, для здійснення яких можуть бути використані рушійні установки відносно малої тяги. Наведено необхідний мінімум понять і закономірностей з галузі небесної механіки та космонавтики. Залежно від специфіки конкретної операції зроблено пошук параметрів космічних операцій, інваріантних відносно конкретного засобу для їх здійснення: характеристичної швидкості, зміни фактичної швидкості, повної енергії або імпульсу.

Наведено певні відомості про методики визначення параметрів космічних рушійних установок малої тяги залежно від потреб ряду характерних космічних маневрів.

Для студентів, що вивчають курси "Вступ до фаху", "Загальний устрій плазмових прискорювачів та енергоустановок", "Основи теорії й функціонування плазмових прискорювачів".

Іл. 8. Табл. 5. Бібліогр.: 3 назви

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. М. Борцов,  
канд. техн. наук Є.Я. Сінельников

## ЗМІСТ

Список умовних позначень, індексів і скорочень.....	4
Передмова.....	5
1 Малі збурення слабо еліптичної орбіти.....	6
1.1 Орбітальна система координат.....	6
1.2 Рівняння еволюції орбіти, близької до колової.....	8
1.4 Періодичні й вікові збурення. Еволюція в площині орбіти.....	9
1.4 Еволюція площини орбіти.....	11
2 Маневри з малою тягою.....	12
2.1 Можливості маневрів з малою тягою.....	12
2.2 Маневр зі сталим малим тангенціальним прискоренням.....	12
3 Характеристики електроракетних рушійних установок.....	17
4 Стабілізація орбіти супутника за наявності атмосферного опору.....	19
5 Оптимізація за сумарною масою параметрів енергорушійної установки на базі електроракетних двигунів .....	25
6 Корекція орбіти супутника з урахуванням дії припливних сил і несферичної складової поля тяжіння.....	31
Бібліографічний список.....	34
Додаток. Масові характеристики сонячних енергоустановок.....	35

## СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ІНДЕКСІВ І СКОРОЧЕНЬ

- $a$  – велика піввісь, м;  
 $A$  – робота над одиницею маси,  $\text{м}^2/\text{с}^2$ ;  
 $C_x$  – коефіцієнт лобового опору;  
 $E$  – ексцентрична аномалія;  
 $E_k$  – кінетична енергія одиниці маси,  $\text{м}^2/\text{с}^2$ ;  
 $\vec{F}$  – сила, Н;  
 $\vec{g}$  – гравітаційне прискорення,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  
 $h$  – висота, м;  
 $H$  – товщина шару однорідної атмосфери, м;  
 $i$  – нахил орбіти;  
 $K$  – гравітаційний параметр,  $\text{м}^3/\text{с}^2$ ;  
 $m, M$  – маса, кг;  
 $\dot{m}$  – секундна масова витрата, кг/с;  
 $N$  – потужність, Вт;  
 $r, R$  – радіус, м;  
 $\vec{r}$  – радіус-вектор, м;  
 $s$  – конструкційний параметр;  
 $S_m$  – площа міделя,  $\text{м}^2$ ;  
 $t$  – час, с;  
 $T$  – період обертання, с;  
 $U$  – потенціальна енергія одиниці маси,  $\text{м}^2/\text{с}^2$ ;  
 $\vec{V}$  – швидкість, м/с;  
 $V_{ch}$  – характеристична швидкість, м/с;  
 $\vec{w}$  – прискорення,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  
 $\alpha$  – кут підйому траєкторії; питома потужність, кг/Вт;  
 $\beta$  – питома маса нагромаджувача, кг/Дж;  
 $\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$  – гравітаційна стала;  
 $\varepsilon$  – енергія, Дж; відносний ексцентриситет;  
 $\rho$  – щільність,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  
 $\varphi$  – азимут (полярний кут) ;  
 $\Phi_p$  – аргумент перицентра;  
 $\Phi$  – потенціальна енергія одиничної маси в полі тяжіння;  
 $\omega$  – частота,  $\text{с}^{-1}$ ;  
 $\Omega$  – довгота висхідного вузла;  
ЕРРУ – електроракетна рушійна установка;  
ЗП – збурююче прискорення;  
СЕУ – сонячна енергоустановка;  
ЯЕУ – ядерна енергоустановка.

## ПЕРЕДМОВА

Ракетні рушійні установки малої тяги призначено для здійснення операцій, що не потребують тяги, близької до сили тяжіння, або більшої, ніж остання. До таких задач належать:

- збереження елементів орбіт космічних апаратів за наявності збурюючих чинників: атмосферного опору, припливної дії зовнішніх тіл тяжіння; несферичних складових головного центра тяжіння;

- міжорбітальні перельоти в полі одного тіла тяжіння, наприклад перехід з базової низької орбіти на стаціонарну та ін.;

- міжорбітальні перельоти в полі декількох тіл тяжіння – міжпланетні операції.

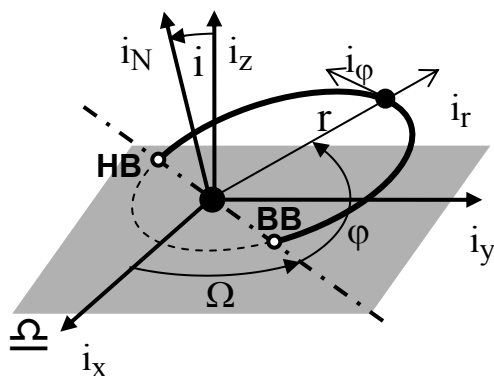
В усіх зазначених випадках мова йде про змінення параметрів орбіти під дією великої головної сферичної складової сили тяжіння головного центра й малих довгостроково діючих збурень, до яких можна віднести й тягу двигунів. Для визначення оптимальних енергетичних і тягових характеристик енергорушійної установки малої тяги у цьому разі необхідно уявляти результати дії малих збурюючих чинників на рух космічного об'єкта. При цьому **не є потрібною настільки висока точність** математичних методів траєкторних розрахунків, яка необхідна при розв'язанні задач балістики, коли слід не тільки певним чином змінити швидкість або енергію космічного апарата, але й забезпечити його потрапляння в конкретне місце в конкретний момент часу. Проте при вирішенні задачі оптимізації крім траєкторних параметрів необхідно враховувати також характерні показники енергетичних і рушійних установок.

У роботі викладено методи аналізу руху космічних об'єктів за наявності різних збурюючих чинників на рівні точності, достатньої для визначення характеристичних швидкостей операцій і вимог до енергорушійних установок, за допомогою яких здійснюються ці операції.

# 1 МАЛІ ЗБУРЕННЯ СЛАБКО ЕЛІПТИЧНОЇ ОРБИТИ

## 1.1 Орбітальна система координат

Опис руху довільної кількості об'єктів потребує наявності базової системи координат, що дозволяє співвіднести їхні положення й швидкості (рис. 1.1)



**Рисунок 1.1 – Площина орбіти**

BB – висхідний вузол

NB – низхідний вузол

Якщо базова система координат є планетоцентричною, то базовою звичайно визначають площину екватора планети, а у геліоцентричній системі – площину земної орбіти (екліптики). У геоцентричній і геліоцентричній системах базовою віссю, як правило, вибирають напрямок на точку весняного рівнодення.

Орбітальна система координат побудована на радіальному  $i_r$ , азимутальному  $i_\phi$  ортах і поперечному до них нормальному орті  $i_N$ . Орти базової і орбітальної систем зв'язані так:

$$i_r = i_x (\cos \Omega \cos \varphi - \sin \Omega \cos i \sin \varphi) + i_y (\sin \Omega \cos \varphi + \cos \Omega \cos i \sin \varphi) + i_z \sin i \sin \varphi ; \quad (1.1)$$

$$i_\phi = -i_x (\cos \Omega \sin \varphi + \sin \Omega \cos i \cos \varphi) - i_y (\sin \Omega \sin \varphi - \cos \Omega \cos i \cos \varphi) + i_z \sin i \cos \varphi ; \quad (1.2)$$

$$i_N = i_x \sin \Omega \sin i - i_y \cos \Omega \sin i + i_z \cos i ; \quad (1.3)$$

$$i_x = i_r (\cos \Omega \cos \varphi - \sin \Omega \cos i \sin \varphi) - i_\phi (\cos \Omega \sin \varphi + \sin \Omega \cos i \cos \varphi) + i_N \sin \Omega \sin i ; \quad (1.4)$$

$$i_y = i_r (\sin \Omega \cos \varphi + \cos \Omega \cos i \sin \varphi) - i_\phi (\sin \Omega \sin \varphi - \cos \Omega \cos i \cos \varphi) - i_N \cos \Omega \sin i ; \quad (1.5)$$

$$i_z = i_r \sin i \sin \varphi + i_\phi \sin i \cos \varphi + i_N \cos i . \quad (1.6)$$

З рівнянь (1.1) – (1.6) у загальному випадку для визначення елементів ортів можна було б записати

$$di_r = i_\phi (\cos i d\Omega + d\varphi) + i_N (\sin \varphi di - \sin i \cos \varphi d\Omega) ; \quad (1.7)$$

$$di_\phi = -i_r (\cos i d\Omega + d\varphi) + i_N (\cos \varphi di + \sin i \sin \varphi d\Omega) ; \quad (1.8)$$

$$di_N = -i_r (\sin \varphi di - \sin i \cos \varphi d\Omega) - i_\phi (\cos \varphi di + \sin i \sin \varphi d\Omega) . \quad (1.9)$$

Однак в орбітальній системі координат радіальний орт обертається в

площині орбіти. У такому випадку з рівнянь (1.7) – (1.9) випливає

$$\sin \varphi \, di = \sin i \cos \varphi \, d\Omega; \quad (1.10)$$

$$di_r = i_\varphi (\cos i \, d\Omega + d\varphi); \quad (1.11)$$

$$di_\varphi = -i_r (\cos i \, d\Omega + d\varphi) + i_N \frac{\sin i}{\sin \varphi} d\Omega = -i_r (\cos i \, d\Omega + d\varphi) + i_N \frac{1}{\cos \varphi} di; \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} di_N &= -i_r (\sin \varphi \, di - \sin i \cos \varphi \, d\Omega) - i_\varphi \frac{\sin i}{\sin \varphi} d\Omega = \\ &= -i_r (\sin \varphi \, di - \sin i \cos \varphi \, d\Omega) - i_\varphi \frac{1}{\cos \varphi} di. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В орбітальній системі радіус-вектор і сферична складова гравітаційного прискорення мають тільки радіальні проекції (див. рис. 1.1), причому

$$\vec{r} = i_r r, \quad \vec{g} = -\frac{K i_r}{r^2}; \quad (1.14)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = i_r V_r + i_\varphi V_\varphi; \quad (1.15)$$

$$\vec{w} + \vec{g} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = i_r (w_r + g) + i_\varphi w_\varphi + i_N w_N; \quad (1.16)$$

$$V_r = \frac{dr}{dt}, \quad V_\varphi = r \left( \frac{d\varphi}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = r \left( \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tgi}} \frac{di}{dt} \right), \quad (1.17)$$

де  $\vec{w}$  – збурююче прискорення.

Таким чином, можемо записати рівняння руху об'єкта в проекціях:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dV_r}{dt} = w_r + \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{K}{r^2}; \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (V_\varphi r) = w_\varphi; \quad (1.19)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_\varphi}{r} - \frac{w_N \sin \varphi}{V_\varphi \operatorname{tgi}}; \quad (1.20)$$

$$V_\varphi \sin i \frac{d\Omega}{dt} = w_N \sin \varphi, \quad V_\varphi \frac{di}{dt} = w_N \cos \varphi. \quad (1.21)$$

## 1.2 Рівняння еволюції орбіти, близької до колової

Якщо орбіта є близькою до колової радіусом  $a_0$ , виконуються нерівності

$$|r - a_0| \ll a_0, \quad |V_r| \ll \sqrt{\frac{K}{a_0}}, \quad \left| V_\varphi - \sqrt{\frac{K}{a_0}} \right| \ll \sqrt{\frac{K}{a_0}}. \quad (1.22)$$

Будемо також вважати малим збурююче прискорення  $\vec{w}$ .

Перепишемо систему рівнянь (1.18) – (1.21) з **лінійною точністю**, зберігаючи степені малих величин не вище першої:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r - 2 \frac{V_\varphi}{\omega_g} + 3a = \frac{w_r}{\omega_g^2}; \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{\omega_g} \frac{dV_\varphi}{d\tau} + \frac{dr}{d\tau} = \frac{w_\varphi}{\omega_g^2}; \quad (1.27)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 1 + \frac{V_\varphi - \omega_g r}{\omega_g a_0} - \frac{w_N \sin \varphi}{\omega_g^2 a_0 \operatorname{tg} i}; \quad (1.28)$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{w_N}{\omega_g^2 a_0} \sin \varphi; \quad \frac{di}{d\tau} = \frac{w_N}{\omega_g^2 a_0} \cos \varphi, \quad (1.30)$$

де

$$\tau = \omega_g (t - t_P), \quad \omega_g = \sqrt{\frac{K}{a_0^3}}. \quad (1.31)$$

За відсутності збурень (при  $\vec{w} = 0$ ) з рівнянь (1.26) – (1.28) одержимо

$$\Omega = \text{const}; \quad (1.32)$$

$$i = \text{const}; \quad (1.33)$$

$$r^{(\varepsilon)}(\tau) = a_0 (1 - \varepsilon_0 \cos \tau); \quad (1.34)$$

$$V_\varphi^{(\varepsilon)}(\tau) = \omega_g a_0 (1 + \varepsilon_0 \cos \tau); \quad (1.35)$$

$$\varphi^{(\varepsilon)}(\tau) = \varphi_{P0} + \tau + 2\varepsilon_0 \sin \tau. \quad (1.36)$$

Результати порівняння виразів (1.32) – (1.36) з рівняннями еліптичного руху показують, що вирази (1.32), (1.33) точно, а (1.34) – (1.36) з урахуванням степенів  $\varepsilon$  не вище першого відповідають еліптичній орбіті з великою піввіссю  $a_0$ , відносним ексцентриситетом  $\varepsilon_0$  і аргументом перицентра  $\varphi_{P0}$ .

Таким чином, вирази (1.32) – (1.36) можна використовувати для опису незбуреного руху об'єкта по орбіті з малим ексцентриситетом.



### 1.3 Періодичні й вікові збурення. Еволюція в площині орбіти

Проекції збурюючого прискорення (ЗП)  $\vec{w}$  можуть містити складові, які по-різному залежать від часу: **сталі** або майже сталі (наприклад, тяга двигунів, атмосферний опір у вузькому коридорі висоти орбіти); **періодичні** (припливні або пов'язані з несферичністю головного центра тяжіння). Збурення руху об'єкта також можуть бути систематичними або періодичними. Періодичну зміну будь-якого параметра в часі називають **періодичним** збуренням, систематичну зміну – **віковим** збуренням. Періодичні збурення також часто називають **хитанням**, а вікові збурення – **віковим зміщенням**, або просто **зміщенням**.

З рівняння (1.30) видно, що площина орбіти може мінятися тільки під дією нормальної проекції збурюючого прискорення. При  $w_N = 0$  змінюються тільки характеристики руху в площині, причому рівняння (1.26) – (1.28) є лінійними і у випадку, коли  $w_r$  й  $w_\phi$  подано як явні функції часу, розв'язки можуть бути записані як сума часткових розв'язків для кожної складової  $\vec{w}$  окремо.

**Стале радіальне ЗП:**  $w_N = 0$ ,  $w_\phi = 0$ ,  $w_r = w_{r0} = \text{const}$ .

У такому випадку з формул (1.26) - (1.28) одержуємо

$$r = a_0 \left[ 1 + \frac{w_{r0}}{\omega_g^2 a_0} - \left( \varepsilon_0 + \frac{w_{r0}}{\omega_g^2 a_0} \right) \cos \tau \right]; \quad (1.37)$$

$$V_\phi = \omega_g a_0 \left[ 1 - \frac{w_{r0}}{\omega_g^2 a_0} + \left( \varepsilon_0 + \frac{w_{r0}}{\omega_g^2 a_0} \right) \cos \omega_g \tau \right]; \quad (1.38)$$

$$\phi = \phi_{P0} + \left( 1 - \frac{2w_{r0}}{\omega_g^2 a} \right) \tau + 2 \left( \varepsilon_0 + \frac{2w_{r0}}{\omega_g^2 a} \right) \sin \tau. \quad (1.39)$$

Порівнюючи вирази (1.37) – (1.39) з (1.34) – (1.36), з лінійною точністю можемо кваліфікувати даний випадок як рух по еліптичній орбіті зі сталими  $a$  і  $\varepsilon$ , а також великою піввіссю, що рівномірно обертається :

$$a = a_0 \left( 1 + \frac{w_{r0}}{\omega_g^2 a_0} \right), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{w_{r0}}{\omega_g^2 a_0}, \quad \phi_P = \phi_{P0} - \frac{2w_{r0}(t - t_{P0})}{\omega_g a} \quad (1.40)$$

і періодом обертання

$$T = \frac{2}{\pi \omega_g} \left( 1 + \frac{2w_{r0}}{\omega_g^2 a} \right). \quad (1.41)$$

Цей випадок є ілюстрацією збурень, спричинених радіальною проекцією несферичної складової гравітаційного прискорення.

**Періодичне радіальне ЗП:**  $w_N = 0$ ,  $w_\varphi = 0$ ,  $w_r = w_{rc} \cos \frac{\omega\tau}{\omega_g} + w_{rs} \sin \frac{\omega\tau}{\omega_g}$ :

$$r = a_0(1 - \varepsilon_0 \cos \tau) + \frac{w_{rc}}{\omega_g^2 - \omega^2} \left( \cos \frac{\omega\tau}{\omega_g} - \cos \tau \right) + \frac{w_{rs}}{\omega_g^2 - \omega^2} \left( \sin \frac{\omega\tau}{\omega_g} - \frac{\omega}{\omega_g} \sin \tau \right); \quad (1.42)$$

$$V_\varphi = \omega_g a_0(1 + \varepsilon_0 \cos \tau) - \frac{\omega_g w_{rc}}{\omega_g^2 - \omega^2} \left( \cos \frac{\omega\tau}{\omega_g} - \cos \tau \right) - \frac{\omega_g w_{rs}}{\omega_g^2 - \omega^2} \left( \sin \frac{\omega\tau}{\omega_g} - \frac{\omega}{\omega_g} \sin \tau \right); \quad (1.43)$$

$$\varphi = \varphi_{p0} + \tau + 2\varepsilon_0 \sin \tau - \frac{2\omega_g w_{rc}}{(\omega_g^2 - \omega^2)\omega a_0} \left( \sin \frac{\omega\tau}{\omega_g} - \frac{\omega}{\omega_g} \sin \tau \right) - \frac{2w_{rs}}{(\omega_g^2 - \omega^2)a_0} \left( \cos \tau - \cos \frac{\omega\tau}{\omega_g} \right). \quad (1.44)$$

Якщо  $\omega \neq \omega_g$ , всі елементи в площині орбіти **хитають** навколо елементів незбуреної орбіти (1.34) – (1.36). Особливий інтерес становить випадок резонансного  $\omega = \omega_g$  періодичного збурення

$$r = a_0 - \left( a_0 \varepsilon_0 + \frac{w_{rs} \tau}{2\omega_g^2} \right) \cos \tau + \left( \frac{w_{rs}}{2\omega_g^2} + \frac{w_{rc} \tau}{2\omega_g^2} \right) \sin \tau; \quad (1.45)$$

$$V_\varphi = \omega_g a_0 + \omega_g \left( a_0 \varepsilon_0 + \frac{w_{rs} \tau}{2\omega_g^2} \right) \cos \tau - \left( \frac{w_{rs}}{2\omega_g} + \frac{w_{rc} \tau}{2\omega_g} \right) \sin \tau; \quad (1.46)$$

$$\varphi = \varphi_{p0} + \tau + \left( 2\varepsilon_0 - \frac{w_{rs} \tau}{\omega_g^2 a} - \frac{w_{rc}}{\omega_g^2 a} \right) \sin \tau + \frac{w_{rc} \tau}{\omega_g^2 a} \cos \tau. \quad (1.47)$$

У цьому випадку всі елементи в площині орбіти також **хитають** навколо елементів незбуреної орбіти (1.34) – (1.36), але із зростаючою в часі амплітудою. Нагадаємо, що отримані розв'язки є справедливими тільки при малих відхиленнях фактичного руху від незбуреного.

**Стале азимутальне ЗП:**  $w_N = 0$ ,  $w_r = 0$ ,  $w_\varphi = w_{\varphi 0} = \text{const}$ :

$$r = a_0(1 - \varepsilon_0 \cos \tau) + \frac{2w_{\varphi 0}}{\omega_g^2} (\tau - \sin \tau); \quad (1.48)$$

$$V_\varphi = \omega_g a_0(1 + \varepsilon_0 \cos \tau) - \frac{w_{\varphi 0}}{\omega_g} (\tau - 2 \sin \tau); \quad (1.49)$$

$$\varphi = \varphi_{P0} + \tau + 2\varepsilon_0 \sin \tau - \frac{w_{\varphi 0}}{\omega_g^2 a} \left( \frac{3}{2} \tau^2 - 4(1 - \cos \tau) \right). \quad (1.50)$$

Результати аналізу рівнянь (1.46) – (1.38) показують наявність **вікових зміщень**

$$r_t = \frac{2w_{\varphi 0}}{\omega_g} (t - t_{P0}), \quad V_{\varphi t} = -w_{\varphi 0} (t - t_{P0}). \quad (1.51)$$

Відзначимо, що похідна за часом від вікового зміщення азимутальної швидкості (1.51) із **знаком мінус** дорівнює азимутальному збурюючому прискоренню.

#### 1.4 Еволюція площини орбіти

З рівнянь (1.30) випливає, що еволюція площини орбіти є можливою тільки за наявності нормального збурюючого прискорення. Джерелом такого ЗП може бути припливна дія зовнішнього тіла, площина орбіти якого відносно головного центра тяжіння не збігається з площиною орбіти досліджуваного об'єкта. Крім того, еволюція площини орбіти, не збіжної з екваторіальною площиною, може відбуватися внаслідок несферичності головного центра тяжіння. З урахуванням залежності азимуту від часу (1.36) для початкової незбуреної слабо еліптичної орбіти можна з рівнянь (1.30) записати

$$\sin i \frac{d\Omega}{d\varphi} \approx \frac{w_N}{\omega_g^2 a_0} (\sin \varphi - \varepsilon_0 \sin \varphi_{P0} + \varepsilon_0 \sin(\varphi_{P0} - 2\varphi)); \quad (1.52)$$

$$\frac{di}{d\varphi} \approx \frac{w_N}{\omega_g^2 a_0} (\cos \varphi - \varepsilon_0 \cos \varphi_{P0} - \varepsilon_0 \cos(\varphi_{P0} - 2\varphi)). \quad (1.53)$$

З формул (1.52), (1.53) видно, що вікове зміщення нахилу орбіти й довготи висхідного вузла можливе за наявності одного з трьох чинників:

- **синхронного** нормального ЗП (перші доданки в дужках правої частини);
- сталого нормального ЗП (другі доданки);
- періодичного нормального ЗП з періодом, що дорівнює половині періоду незбуреної орбіти (треті доданки).

Найбільший практичний інтерес має випадок синхронного ЗП (саме такими є збурення припливне й пов'язане з несферичністю центра тяжіння). Якщо залежність ЗП від азимуту

$$w_N = w_{Nc} \cos \varphi + w_{Ns} \sin \varphi, \quad (1.54)$$

для вікового зміщення площини орбіти маємо

$$\sin i \frac{d\Omega_t}{dt} \approx \frac{w_{Ns}}{2\omega_g a_0}, \quad \frac{di_t}{dt} \approx \frac{w_{Nc}}{2\omega_g a_0}. \quad (1.55)$$

## 2 МАНЕВРИ З МАЛОЮ ТЯГОЮ

### 2.1 Можливості маневрів з малою тягою

Припустимо, що слід виконати маневр переходу з колової орбіти радіусом  $R_0$  на необмежену відстань від центра тяжіння. Здається очевидним, що реактивне прискорення треба спрямувати радіально. У такому випадку рівняння (1.18), (1.19) можна записати як

$$\frac{dV_r}{dt} = w - \frac{K}{r^2} + \frac{V_\phi^2}{r}; \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r V_\phi) = 0, \quad r V_\phi = \sqrt{K R_0} = \text{const}, \quad (2.2)$$

звідки

$$\frac{dV_r}{dt} = w - \frac{K}{r^2} + \frac{K R_0}{r^3}. \quad (2.3)$$

При сталій величині  $w$  з виразу (2.3) випливає

$$V_r \frac{dV_r}{dr} = w - \frac{K}{r^2} + \frac{K R_0}{r^3}; \quad (2.4)$$

$$\frac{V_r^2}{2} = w(r - R_0) + \frac{K}{r} - \frac{K R_0}{2r^2} - \frac{K}{2R_0} = \frac{[2wr^2R_0 - K(r - R_0)](r - R_0)}{2r^2R_0}. \quad (2.5)$$

Можна записати умову, при якій  $V_r$  дорівнює нулю:

$$R_* = R_0 \left( 1 + \frac{\frac{4wR_0^2}{K}}{1 - \frac{4wR_0^2}{K} + \sqrt{1 - \frac{8wR_0^2}{K}}} \right). \quad (2.6)$$

Видно, що при реактивному прискоренні, меншому від однієї восьмої гравітаційного на стартовій орбіті, існує значення радіуса  $R_*$ , де радіальна проекція швидкості обертається в нуль, тобто гранично досягне значення радіуса, після якого починається зниження. Апарат буде здійснювати періодичний рух по незамкненій траєкторії.

### 2.2 Маневр зі сталим малим тангенціальним прискоренням

За наявності малої тяги більш доцільним є "вкладання" її в тангенціальну

складову – нарощування одночасно енергії й моменту кількості руху (який, власне, й забезпечує незбільшення кривизни траєкторії). У курсовій системі координат цьому випадку відповідає система рівнянь у вигляді

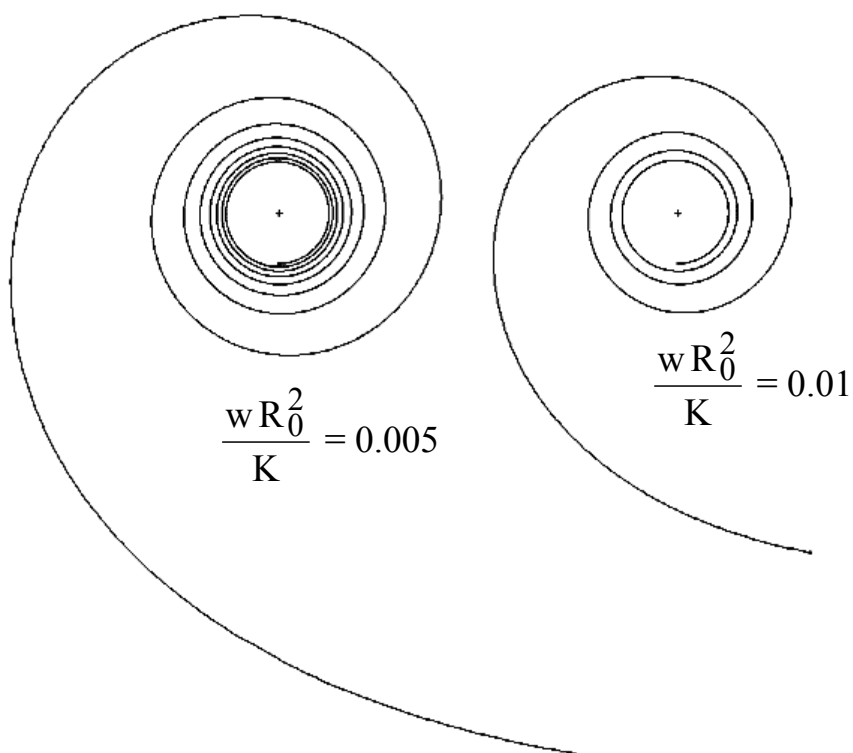
$$V = \sqrt{\frac{K}{r}} v; \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \sqrt{\frac{K}{r^3}} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{v \cos \alpha}; \quad (2.8)$$

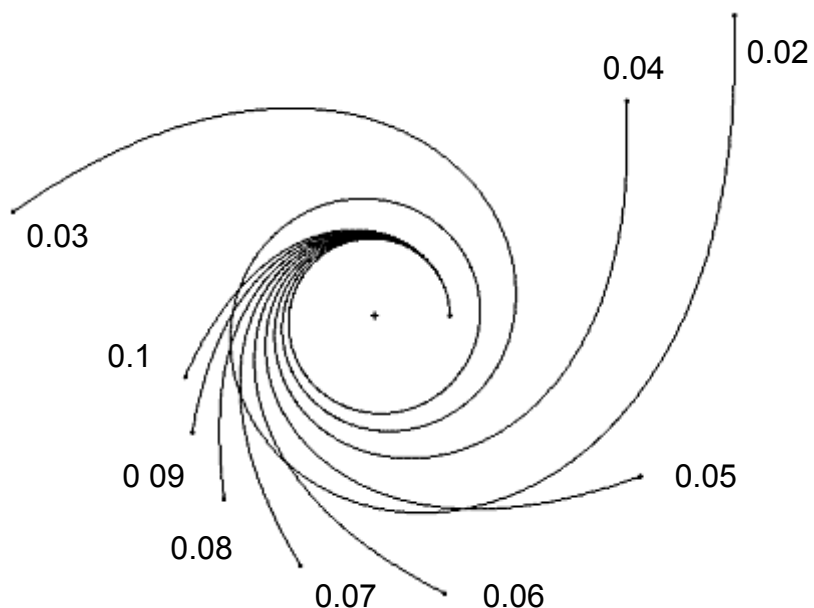
$$2 \frac{v dv}{d\varphi} = \frac{2 \frac{w r^2}{K} - (2 - v^2) \sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (2.9)$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = 1 - \frac{1}{v^2}. \quad (2.10)$$

Траєкторії й характеристики маневрів переходу з колової орбіти на параболічну з малим постійним тангенціальним реактивним прискоренням визначено в результаті числових розв'язань системи рівнянь (2.6) – (2.10), показано на рис. 2.1, 2.2 й наведено в табл. 2.1.



**Рисунок 2.1 – Траєкторії переходу з колової орбіти на параболічну**



**Рисунок 2.2 – Траєкторії переходу з колової орбіти на параболічну**  
 (цифрами показано відношення реактивного прискорення до прискорення вільного падіння на стартовій орбіті)

**Таблиця 2.1 – Характеристики маневрів переходу з колової траєкторії на параболічну з малим постійним тангенціальним прискоренням**

$\frac{w R_0^2}{K}$	$\frac{R}{R_0}$	$\frac{w R^2}{K}$	n	$\frac{t}{T_0}$	$\frac{V_{ch}}{V_{I0}}$
0	$\infty$	0.773	$\infty$	$\infty$	1.0000
0.0001	87.900	0.773	398.005	1463.148	0.9193
0.001	27.805	0.773	39.906	136.325	0.8566
0.002	19.661	0.773	20.011	66.007	0.8295
0.005	12.431	0.773	8.074	25.013	0.7858
0.01	8.783	0.772	4.095	11.869	0.7458
0.02	6.202	0.769	2.105	5.563	0.6991
0.03	4.971	0.741	1.451	3.498	0.6593
0.04	4.379	0.767	1.108	2.570	0.6459
0.05	4.111	0.845	0.909	1.987	0.6243
0.06	3.783	0.859	0.786	1.582	0.5964
0.07	3.440	0.829	0.701	1.296	0.5701
0.08	3.127	0.783	0.638	1.090	0.5477
0.09	2.858	0.735	0.588	0.936	0.5292
0.1	2.629	0.691	0.548	0.818	0.5141
0.5	1.109	0.615	0.153	0.134	0.4205
1.0	1.028	1.057	0.079	0.066	0.4157
$\infty$	1.000	1.000	0	0	0.4142

У цій таблиці n – кількість витків

Зазначені закономірності **стосуються будь-якого** (не обов'язково реактивного) малого тангенціального ЗП. Ним, наприклад, може бути **опір атмосфери на великих висотах**. У випадку, коли протягом всього маневру ЗП є істотно меншим, ніж гравітаційне, можна одержати приблизні аналітичні розв'язки. Диференціюванням (2.10) з підстановкою рівняння (2.9) можна отримати

$$\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2} = \frac{2\frac{wr^2}{K} - (2 - v^2)\sin\alpha}{v^4 \cos\alpha}. \quad (2.11)$$

Зміна  $r$  на одному витку, кут  $\alpha$  і різниця  $v-1$  є незначними, що дозволяє вважати  $\sin\alpha \approx \alpha$ ,  $v \approx 1$  і записати

$$\sin\alpha \approx 2\frac{wr^2}{K} + \left( \sin\alpha_0 - 2\frac{wr^2}{K} \right) \cos\varphi, \quad (2.12)$$

де  $\alpha_0$  – початкове значення кута підйому траєкторії.

При старті з колової орбіти  $\alpha_0 = 0$ . Однак, як видно з виразу (2.12), синус кута підйому траєкторії незалежно від свого початкового значення здійснює протягом одного витка гармонійне коливання відносно середнього значення:

$$\sin\tilde{\alpha} \approx 2\frac{wr^2}{K}, \quad (2.13)$$

де  $\alpha_0$  – початкове значення кута підйому траєкторії.

При цьому середня на витку швидкість дорівнює локальній коловій:

$$\tilde{V} = \sqrt{\frac{K}{r}}. \quad (2.14)$$

Вираз щодо змінення швидкості за час, більший порівняно з періодом обертання, з урахуванням (2.13) набуває вигляду

$$\frac{dV}{dt} = -w. \quad (2.15)$$

Крім того, можна записати такі залежності між часом, радіальною й кутовою координатами:

$$t = \frac{V_0 - V}{w} = \frac{\sqrt{K}}{w} \left( \frac{1}{\sqrt{R_0}} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right); \quad (2.16)$$

$$r = \frac{R_0}{\left( 1 - \sqrt{\frac{R_0}{K}} w t \right)^2} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{4wR_0^2}{K} \varphi}}; \quad (2.17)$$

$$\varphi = \frac{K}{4w} \left( \frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{K}{4w} \left( \frac{1}{R_0^2} - \left( \frac{1}{\sqrt{R_0}} - \frac{wt}{\sqrt{K}} \right)^4 \right). \quad (2.18)$$

Таким чином, при малому тангенціальному збуренні рівноважний кут підйому траєкторії є таким, що тангенціальна проекція гравітаційного прискорення вдвічі перевищує ЗП і спрямована в протилежний бік. Внаслідок цього рівнодіюче прискорення дорівнює збурюючому з оберненим знаком. Характеристична швидкість переміщення з точки старту в будь-яку точку траєкторії дорівнює модулю різниці фактичних швидкостей:

$$V_{ch}(r) = |V - V_0| = \left| \sqrt{\frac{K}{r}} - \sqrt{\frac{K}{R_0}} \right|. \quad (2.19)$$

Принциповою ж відмінністю від імпульсного маневру виявляється те, що в силу зазначеного вище співвідношення збурюючого й гравітаційного впливів прискорювальне збурення викликає зменшення фактичної швидкості, а гальмуюче – збільшення.

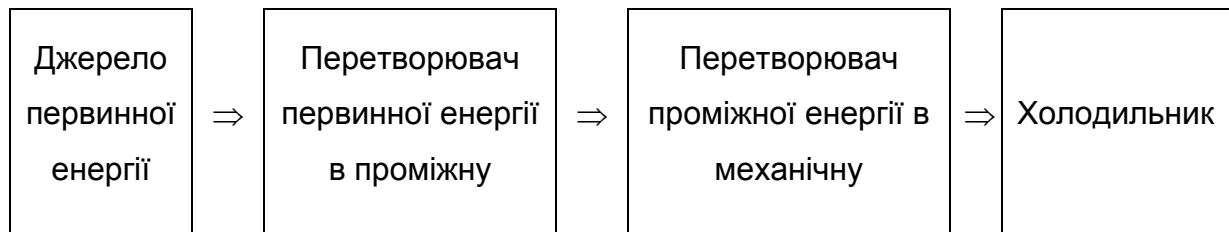
На заключному етапі, коли швидкість наближається до значення локальної параболічної, відношення реактивного прискорення до гравітаційного вже не є малим (див. табл. 2.1). Однак при малій стартовій величині цього відношення час заключного етапу й змінення швидкості на ньому є незначними порівняно із загальними, тобто характеристична швидкість переходу з колової на параболічну орбіту з малим реактивним прискоренням приблизно дорівнює стартовій коловій швидкості:

$$V_{ch} = \sqrt{\frac{K}{R_0}}. \quad (2.20)$$



### 3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОРАКЕТНИХ РУШІЙНИХ УСТАНОВОК

У найбільш загальному вигляді схема перетворення енергії в ракетній рушійній установці виглядає так:



Холодильник являє собою засіб відведення невикористаної при створенні тяги частини первинної й проміжної енергій.

У хімічних двигунах первинною є хімічна енергія пального і окислювача, що внаслідок хімічної реакції перетворюється в теплову (проміжну), а потім у результаті розширення – у механічну енергію. На всіх етапах перетворення енергії бере участь одна й та сама маса. Хімічна енергія палива перетворюється в теплову, потім у механічну енергію тієї ж маси, разом з якою у вигляді теплової скидається корисно невідпрацьована енергія. Таким чином, достатніми економічними показниками хімічної ракетної рушійної установки є питомий імпульс і конструкційний параметр.

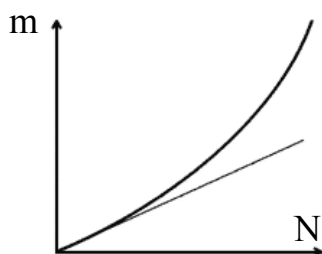
В електроракетних рушійних установках (ЕРПУ) перетворювач первинної енергії в електричну й двигун являють собою різні системи. Варіювання величини енергії, що підводиться до одиниці маси робочого тіла, приводить до змінень питомого імпульсу. Повна маса космічного апарата з електроракетною рушійною установкою складається з корисної маси, маси рушійної установки (включно з робочою речовиною) й **маси енергоустановки**. Залежності останньої і маси робочої речовини від питомого імпульсу при фіксованій тязі є протилежними одна одній. Із збільшенням питомого імпульсу збільшуються потужність двигунів і, відповідно, маса енергоустановки. Існує таке значення питомого імпульсу, при якому сумарна маса системи "корисна маса – рушійна установка – енергоустановка" є мінімальною при фіксованій корисній масі.

На рис. 3.1 показано характерну залежність маси сонячної енергоустановки (СЕУ) від корисної потужності. Існує досить протяжна лінійна ділянка, бо площа й маса перетворювачів (фото- або термоелементів, термоемісійних перетворювачів) є прямо пропорційними до потужності. Відхилення зазначеної залежності від лінійної зумовлено тим, що із зростанням лінійних розмірів перетворювача виникає необхідність посилення елементів кріплення, а також збільшення товщини кабелів передачі електроенергії для того, щоб не допустити

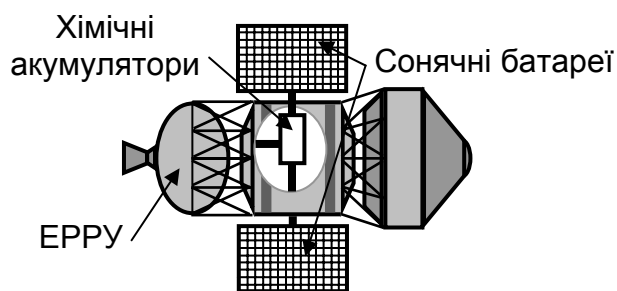
зростання втрат на опір у довгих проводах. Схожі властивості мають радіоізотопні енергоустановки, де первинним джерелом є невимушений ядерний розпад.

Необхідним елементом електроракетної енергорушійної установки є акумулятори (рис. 3.2), які нагромаджують електроенергію в той час, коли споживана потужність поступається виробленій, і віддають енергію в бортову мережу, коли переважає споживана потужність.

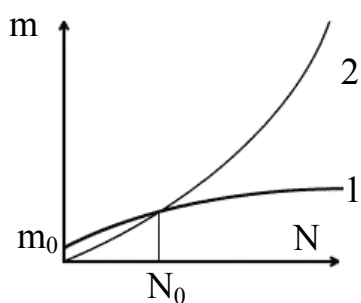
Принципово відмінну залежність маси від електричної потужності (рис. 3.3) мають ядерні енергетичні установки (ЯЕУ). Навіть при зникаюче малій потужності маса ЯЕУ є кінцевою, тобто не меншою від критичної маси  $m_0$ . Однак із зростанням потужності маса ЯЕУ збільшується повільніше, ніж у прямій пропорції до  $N$ , бо основну частину маси становить захист, товщина якого пропорційна логарифму потужності, у результаті чого при більших потужностях маса ЯЕУ збільшується значно повільніше, ніж у пропорції до потужності.



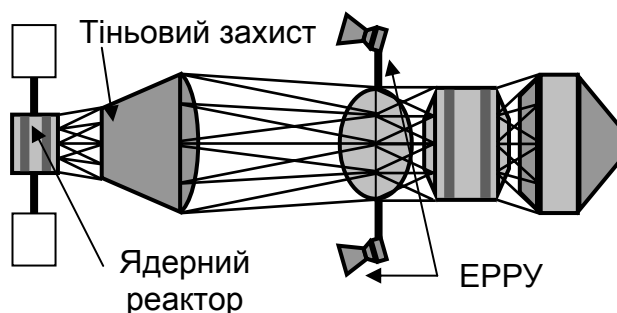
**Рисунок 3.1 – Залежність маси CEU від корисної потужності**



**Рисунок 3.2 – Космічний апарат з ЕРРУ й CEU**



**Рисунок 3.3 – Порівняльні характеристики ЯЕУ (1) і CEU (2)**



**Рисунок 3.4 – Космічний апарат з ЕРРУ і ЯЕУ**

Існує значення потужності ( $N_0$  на рис. 3.3), починаючи з якого виграв за масою досягається при використанні ядерної енергоустановки.

#### 4 СТАБІЛІЗАЦІЯ ОРБИТИ СУПУТНИКА ЗА НАЯВНОСТІ АТМОСФЕРНОГО ОПОРУ

Атмосфера Землі є нестационарною системою, стан якої залежить від багатьох чинників. Однак деякі обставини дозволяють розв'язувати задачу щодо руху космічного апарата під дією атмосфери як стаціонарну. Так, помітні еволюції траєкторії можуть відбуватися:

- відносно швидко, якщо апарат рухається в найменш підданих збуренням щільних шарах атмосфери, і значення характеристик атмосфери в будь-який момент часу мало відрізняються від деяких середніх;

- відносно повільно, якщо рух здійснюється в розрідженому шарі, найбільш підданому збуренням, але вплив стає помітним за довгий час, і середні значення характеристик атмосфери також виявляються близькими до деяких сталих.

Для оцінювання збурюючої дії атмосфери з точністю, достатньою для формулювання вимог до рушійної установки, досить прийняти модель **стаціонарної стандартної** атмосфери (табл. 4.1), отриману на основі вимірів характеристик на різних висотах і спрощеної моделі рівноваги, яка складається з рівнянь стану ідеального газу й газодинамічної рівноваги:

$$P = \frac{\rho}{m} k T; \quad (4.1)$$

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g, \quad (4.2)$$

де  $h$  – висота;

$g$  – прискорення вільного падіння;

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – стала Больцмана;

$P, \rho, T, m$  – відповідно тиск, щільність, температура й середня молекулярна маса.

Якщо  $T = \text{const}$ , розв'язанням рівняння є **розподіл Больцмана**:

$$\frac{P(h)}{P(h_0)} = \frac{\rho(h)}{\rho(h_0)} = \exp\left(-\frac{U(h) - U(h_0)}{kT}\right); \quad (4.3)$$

$$U(h) = -K m \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0 + h} \right) = -m g_0 R_0^2 \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0 + h} \right), \quad (4.4)$$

де  $U$  – потенціальна енергія молекули в полі тяжіння;

$K$  – гравітаційний параметр;

$R_0, g_0$  – радіус планети й прискорення вільного падіння на поверхні.

Як правило (виняток становлять атмосфери планет групи Юпітера), товщина шару атмосфери, здатного вплинути на рух космічного апарата, істотно менша ніж радіус планети, і залежністю прискорення вільного падіння від висоти в цьому шарі можна знехтувати. У такому випадку з рівнянь (4.3), (4.4) випливає

$$\frac{P(h)}{P(h_0)} = \frac{\rho(h)}{\rho(h_0)} = \exp\left(-\frac{h-h_0}{H}\right); \quad (4.5)$$

$$H = \frac{kT}{mg}, \quad (4.6)$$

де  $H$  – товщина шару однорідної атмосфери, у якому містилася б вся маса атмосфери, якби щільність не зменшувалася зі змінням висоти.

**Таблиця 4.1 – Стандартна атмосфера Землі**

h, км	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	P, Па	T, К	H, км	h, км	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	P, Па	T, К	H, км
<b>Тропосфера</b>					<b>Термосфера</b>				
0	$1.225 \cdot 10^0$	$1.01 \cdot 10^5$	288.8	8.40	90	$2.846 \cdot 10^{-6}$	$1.35 \cdot 10^{-1}$	165.7	4.82
2	$1.007 \cdot 10^0$	$7.95 \cdot 10^4$	275.2	8.00	100	$3.734 \cdot 10^{-7}$	$2.14 \cdot 10^{-2}$	199.0	5.80
4	$8.194 \cdot 10^{-1}$	$6.17 \cdot 10^4$	262.2	7.62	120	$1.480 \cdot 10^{-8}$	$2.04 \cdot 10^{-3}$	477.0	14.0
6	$6.601 \cdot 10^{-1}$	$4.72 \cdot 10^4$	249.2	7.25	140	$3.020 \cdot 10^{-9}$	$7.50 \cdot 10^{-4}$	849.9	25.2
8	$5.258 \cdot 10^{-1}$	$3.57 \cdot 10^4$	236.2	6.87	160	$1.123 \cdot 10^{-9}$	$4.02 \cdot 10^{-4}$	1207	36.3
10	$4.135 \cdot 10^{-1}$	$2.65 \cdot 10^4$	223.3	6.49	180	$6.015 \cdot 10^{-10}$	$2.51 \cdot 10^{-4}$	1371	42.2
12	$3.119 \cdot 10^{-1}$	$1.94 \cdot 10^4$	216.7	6.30	200	$3.673 \cdot 10^{-10}$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	1404	44.9
<b>Стратосфера</b>					220	$2.157 \cdot 10^{-10}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$		50.7
14	$2.278 \cdot 10^{-1}$	$1.42 \cdot 10^4$	216.7	6.30	240	$1.356 \cdot 10^{-10}$	$7.36 \cdot 10^{-5}$		55.3
16	$1.665 \cdot 10^{-1}$	$1.04 \cdot 10^4$	216.7	6.30	260	$9.120 \cdot 10^{-11}$	$5.18 \cdot 10^{-5}$		57.9
18	$1.216 \cdot 10^{-1}$	$7.57 \cdot 10^3$	216.7	6.30	280	$6.489 \cdot 10^{-11}$	$3.67 \cdot 10^{-5}$		57.6
20	$8.891 \cdot 10^{-2}$	$5.53 \cdot 10^3$	216.7	6.30	300	$4.757 \cdot 10^{-11}$	$2.57 \cdot 10^{-5}$	1423	54.6
22	$6.600 \cdot 10^{-2}$	$4.04 \cdot 10^3$	216.7	6.30	320	$2.977 \cdot 10^{-11}$	$1.83 \cdot 10^{-5}$		62.5
24	$4.752 \cdot 10^{-2}$	$2.96 \cdot 10^3$	216.7	6.30	340	$2.001 \cdot 10^{-11}$	$1.35 \cdot 10^{-5}$		68.6
<b>Мезосфера</b>					360	$1.451 \cdot 10^{-11}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$		71.2
					380	$1.122 \cdot 10^{-11}$	$7.64 \cdot 10^{-6}$		69.4
28	$2.466 \cdot 10^{-2}$	$1.60 \cdot 10^3$	225.3	6.55	400	$8.994 \cdot 10^{-12}$	$5.66 \cdot 10^{-6}$	1480	63.7
30	$1.786 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^3$	231.2	6.72	420	$5.772 \cdot 10^{-12}$	$4.24 \cdot 10^{-6}$		74.9
32	$1.304 \cdot 10^{-2}$	$8.88 \cdot 10^2$	237.2	6.90	440	$4.030 \cdot 10^{-12}$	$3.30 \cdot 10^{-6}$		83.4
34	$9.602 \cdot 10^{-3}$	$6.70 \cdot 10^2$	243.1	7.07	460	$3.086 \cdot 10^{-12}$	$2.61 \cdot 10^{-6}$		86.1
36	$7.122 \cdot 10^{-3}$	$5.09 \cdot 10^2$	249.0	7.24	480	$2.560 \cdot 10^{-12}$	$2.06 \cdot 10^{-6}$		82.0
38	$5.321 \cdot 10^{-3}$	$3.89 \cdot 10^2$	255.0	7.41	500	$2.212 \cdot 10^{-12}$	$1.59 \cdot 10^{-6}$	1576	72.6
40	$4.003 \cdot 10^{-3}$	$3.00 \cdot 10^2$	260.9	7.59	520	$1.449 \cdot 10^{-12}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$		87.0
42	$3.031 \cdot 10^{-3}$	$2.32 \cdot 10^2$	266.8	7.76	540	$1.038 \cdot 10^{-12}$	$9.97 \cdot 10^{-7}$		98.0
44	$2.310 \cdot 10^{-3}$	$1.81 \cdot 10^2$	272.8	7.93	560	$8.255 \cdot 10^{-13}$	$8.17 \cdot 10^{-7}$		101.0
46	$1.770 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^2$	278.7	8.10	580	$7.209 \cdot 10^{-13}$	$6.67 \cdot 10^{-7}$		94.3
48	$1.374 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^2$	282.7	8.22	600	$6.617 \cdot 10^{-13}$	$5.31 \cdot 10^{-7}$	1691	81.3
50	$1.083 \cdot 10^{-3}$	$8.79 \cdot 10^1$	282.7	8.22	620	$4.337 \cdot 10^{-13}$	$4.26 \cdot 10^{-7}$		100.0
52	$8.536 \cdot 10^{-4}$	$6.93 \cdot 10^1$	282.7	8.22	640	$3.146 \cdot 10^{-13}$	$3.54 \cdot 10^{-7}$		114.6
54	$6.787 \cdot 10^{-4}$	$5.46 \cdot 10^1$	280.2	8.15	660	$2.583 \cdot 10^{-13}$	$2.98 \cdot 10^{-7}$		117.6
56	$4.593 \cdot 10^{-4}$	$4.28 \cdot 10^1$	271.4	7.89	680	$2.372 \cdot 10^{-13}$	$2.50 \cdot 10^{-7}$		107.4
58	$4.416 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^1$	262.5	7.63	700	$2.302 \cdot 10^{-13}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	1812	89.6
60	$3.524 \cdot 10^{-4}$	$2.57 \cdot 10^1$	257.7	7.49	800	$6.666 \cdot 10^{-14}$			80.7
70	$1.001 \cdot 10^{-4}$	$6.02 \cdot 10^0$	209.6	6.09	900	$2.619 \cdot 10^{-14}$			107.0
80	$2.120 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^0$	165.7	4.82	1000	$4.438 \cdot 10^{-15}$			56.3

Вираз (4.5) добре описує розподіл характеристик у **стратосфері** (в діапазоні висот 12...24 км), де молекулярний склад і температура повітря практично сталі. У приповерхневому шарі атмосфери Землі – **тропосфері**, як і в атмосферах багатьох планет, основним процесом теплоперенесення є конвекція, коли енергія газового об'єму переноситься разом з масою практично без обміну із сусідніми об'ємами. У цьому випадку існує адіабатичний зв'язок між газодинамічними параметрами

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (4.7)$$

У такому разі розв'язанням рівняння (4.2) є вираз

$$\left( \frac{\rho(h)}{\rho(h_0)} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{P(h)}{P(h_0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{h-h_0}{H(h_0)}, \quad (4.8)$$

де  $H(h_0)$  – товщина шару однорідної атмосфери (4.6) на висоті  $h_0$ .

У діапазоні висот 28...80 км міститься **мезосфера**, у якій переважним процесом перенесення тепла від поверхні є теплопровідність, чим і обумовлено зменшення температури із зростанням висоти. На висотах більше 80 км атмосфера зазнає впливу космічного випромінювання, у тому числі й іонізуючого, що обумовлює можливість реакцій з утворенням нестабільних станів – атомарних і молекулярних іонів, молекул  $O_3$  (озону) та ін. Розпад таких станів супроводжується виділенням енергії й призводить до додаткового нагрівання повітря, через що розподіл температури в цих шарах є **інверсним** (на відміну від тиску й щільності температура зростає із збільшенням висоти). Цей шар називають **термосферою**.

У космонавтиці умовною верхньою межею атмосфери вважають висоту, на якій космічний апарат з типовою масою і розмірами, маючи початкову колову швидкість, може зробити один виток до занурення в щільні шари атмосфери. Висота умовної верхньої межі атмосфери Землі дорівнює приблизно 200 км.

Найбільш "заселеним" космічними апаратами є шар у діапазоні висот 300...500 км. Нижче проходить вже згадана умовна межа атмосфери, вище – радіаційний пояс Землі, робота в якому навіть безпілотних апаратів з багатьох точок зору є небажаною. У найбільш "заселеному" шарі скільки-небудь помітний вплив атмосфери на характеристики траєкторії апарата проявляється протягом великої кількості витків. Атмосферний вплив можна вважати слабким збуренням і застосовувати при його описі підхід, наведений у попередньому розділі. У цьому

випадку рівняння руху апарата можна записувати, підставляючи середню за виток величину сили атмосферного опору:

$$\tilde{F}_a = \frac{1}{T} \int_0^T F_a dt, \quad (4.9)$$

де  $T$  – період обертання;

$F_a$  – сила опору атмосфери:

$$F_a = C_x S_m \frac{\rho V^2}{2}. \quad (4.10)$$

Усі характеристики в загальному випадку змінюються протягом одного обертання, а саме коефіцієнт лобового опору  $C_x$  і площа міделя  $S_m$  – в результаті різної орієнтації апарата стосовно набігаючого потоку на різних ділянках орбіти, щільність повітря й швидкість руху апарата – внаслідок змінення висоти (при еліптичній орбіті). Для оцінювання впливу атмосфери необхідно також використати осереднені за один виток значення  $C_x$  і  $S_m$ :

$$\tilde{F}_a = \tilde{C}_x \tilde{S}_m \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\rho V^2}{2} dt. \quad (4.11)$$

Інтегрування цього рівняння зручніше виконувати з використанням виразів

$$V^2 = \frac{K}{a} \frac{1 + \varepsilon \cos E}{1 - \varepsilon \cos E}, \quad (4.12)$$

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{K}} (1 - \varepsilon \cos E) dE, \quad (4.13)$$

де  $a$  – велика піввісь еліптичної орбіти.

Змінення щільності залежно від висоти на одному витку можна вважати таким, що визначається експоненціальним законом (4.5)

$$\rho = \rho_P e^{-\frac{a \varepsilon}{H} (1 - \cos E)}; \quad (4.14)$$

$$H = \frac{\rho_A - \rho_P}{\ln \frac{\rho_P}{\rho_A}}, \quad (4.15)$$

де  $\rho_P, \rho_A$  – щільність атмосфери в перицентрі й апоцентрі орбіти.  
Якщо підставити вирази (4.12) – (4.15) в рівняння (4.11), одержимо

$$\tilde{F}_a = \tilde{C}_x \tilde{S}_m \frac{\tilde{\rho} \tilde{V}^2}{2}, \quad (4.16)$$

де  $\tilde{V}, \tilde{\rho}$  – середні за виток значення швидкості й щільності повітря:

$$\tilde{V} = \sqrt{\frac{K}{a}}; \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho_P \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{a\varepsilon}{H}(1-\cos E)} (1 + \varepsilon \cos E) dE = \\ &= \rho_P e^{-\frac{a\varepsilon}{H}} \left( I_0\left(\frac{a\varepsilon}{H}\right) + \varepsilon I_1\left(\frac{a\varepsilon}{H}\right) \right); \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos x} dx, \quad I_1(z) = \frac{dI_0(z)}{dz}, \quad (4.19)$$

де  $I_0, I_1$  – модифіковані функції Бесселя першого роду, нульового й першого порядків, що мають такі властивості:

$$I_0(z) \approx 1 + \frac{z^2}{4}, \quad I_1(z) \approx \frac{z}{2}, \quad z \rightarrow 0, \quad (4.30)$$

$$e^{-z} I_1(z) \approx e^{-z} I_0(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

Найпростішим, на перший погляд, рішенням була б робота рушійної установки зі сталою тягою, що дорівнює  $\tilde{F}_a$ . Однак існує ряд причин, за якими постійна робота двигунів є небажаною:

- якщо первинним джерелом енергії є Сонце, робота двигунів на тіньовій стороні орбіти потребувала б наявності у складі енергоустановки апарата потужної й масивної батареї акумуляторів;

- у випадку застосування електроракетних двигунів, які є джерелом електромагнітних хвиль (як правило, у радіодіапазоні), важко забезпечити

одночасне функціонування двигуна й ряду електронних і радіопристроїв.

Тому двигуни вмикаються періодично, і час існування апарата розділяється на деяку кількість рівних за тривалістю **циклів**, кожний з яких складається з **пасивної** (з вимкненими двигунами) і **активної** (з працюючими двигунами) ділянок. Якщо тривалість пасивної ділянки є невеликою, характеристики траєкторії не встигають помітно змінитися, і величину сили атмосферного опору на пасивній ділянці можна вважати сталою, що дорівнює  $\tilde{F}_a$ . У такому випадку для подолання атмосферного опору необхідно, щоб сумарний імпульс тяги двигунів  $F$  на **активній ділянці циклу**  $T_t$  дорівнював сумарному імпульсу сили  $\tilde{F}_a$  за весь цикл  $T_c$ :

$$F T_t = \tilde{F}_a T_c. \quad (4.22)$$

Якщо первинним джерелом енергії є Сонце, то

$$T_t < T_*, \quad (4.23)$$

де  $T_*$  – час перебування на освітленій частині орбіти за один цикл.

З погляду на мінімізацію маси енергоустановки оптимальною була б рівність тривалості одного циклу і періоду обертання апарата на його орбіті, двигун вмикався б один раз за виток. Однак при тривалому часі існування апарата це призводило б до відповідно великої кількості циклів вмикання двигуна й великої кількості спрацьовувань комутуючих пристроїв. Ресурс же цих пристроїв щодо кількості спрацьовувань є обмеженим  $\sim(1\dots 10) \cdot 10^4$ . У таких випадках тривалість одного циклу можна зробити такою, що дорівнюватиме декільком періодам обертання, що призвело б до деякого збільшення маси акумуляторів у складі енергоустановки, але дозволило б вирішити проблему ресурсу двигуна.

У досліджуваному випадку залежність збурюючої сили  $i$ , відповідно, необхідної сили тяги від маси апарата відсутня, атмосферний вплив визначається розмірами й формою апарата, але не масою. Маса існує явно тільки у виразі для визначення характеристичної швидкості маневру:

$$V_{ch} = I_s \ln \frac{1}{1 - \frac{F t_{\Sigma}}{M_0 I_s T_c} T_t} = I_s \ln \frac{1}{1 - \frac{\tilde{F}_a t_{\Sigma}}{M_0 I_s}}. \quad (4.24)$$



## 5 ОПТИМІЗАЦІЯ ЗА СУМАРНОЮ МАСОЮ ПАРАМЕТРІВ ЕНЕРГОРУШІЙНОЇ УСТАНОВКИ НА БАЗІ ЕЛЕКТРОРАКЕТНИХ ДВИГУНІВ

Корисна й споживана потужності ракетного двигуна

$$N_u = \frac{F I_s}{2} = \frac{\dot{m} I_s^2}{2} = \frac{F^2}{2 \dot{m}}; \quad (5.1)$$

$$N_t = \frac{F I_s}{2 \eta}, \quad (5.2)$$

де  $\eta$  – енергетичний ККД двигуна.

Стартова маса  $M_0$  апарата пов'язана з масою корисного вантажу  $m_{PL}$ :

$$M_0 = m_{PL} + m_t + m_p + m_N(N_t), \quad (5.3)$$

де  $m_N(N_t)$  – маса енергоустановки як функція потужності;

$m_t, m_p$  – маси конструкції рушійної установки й робочої речовини.

При цьому

$$\frac{m_{PL}}{M_0} = 1 - \frac{s}{s-1} \left( 1 - e^{-\frac{V_{ch}}{I_s}} \right) - \frac{m_N \left( \frac{F I_s}{2 \eta} \right)}{M_0}, \quad (5.4)$$

де  $s$  – конструкційний параметр.

Якщо маса енергоустановки пропорційна її потужності, то

$$m_N(N_t) = \alpha N_t; \quad (5.5)$$

$$\frac{m_{PL}}{M_0} = 1 - \frac{s}{s-1} \left( 1 - e^{-\frac{V_{ch}}{I_s}} \right) - \frac{\alpha F I_s}{2 \eta M_0}, \quad (5.6)$$

де  $\alpha$  – питома маса енергоустановки, кг/Вт.

Тоді зв'язок між тягою, питомим імпульсом і часом маневру

$$F t = M_0 I_s \left( 1 - e^{-\frac{V_{ch}}{I_s}} \right). \quad (5.7)$$

Як було зазначено в попередньому розділі, характеристична швидкість міжорбітального переходу з малою тангенціальною тягою

$$V_{ch} = \left| \sqrt{\frac{K}{R_s}} - \sqrt{\frac{K}{R_f}} \right|. \quad (5.8)$$

При заданому часі переходу тяга відповідно до рівняння (5.7) є функцією питомого імпульсу. У такому випадку з урахуванням (5.6) отримуємо

$$\frac{m_{PL}}{M_0} = 1 - \left( \frac{s}{s-1} + \frac{\alpha I_s^2}{2\eta t} \right) \left( 1 - e^{-\frac{V_{ch}}{I_s}} \right). \quad (5.9)$$

Оптимальному значенню питомого імпульсу (мінімуму  $m_t + m_p + m_N$ ) відповідає рівність нулю похідної корисної маси за питомим імпульсом. Якщо продиференціювати (5.9) за  $I_s$ , одержимо

$$\frac{\left( \frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}} \right)^3 e^{-\frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}}}}{2 - \left( 2 + \frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}} \right) e^{-\frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}}}} = \frac{s-1}{s} \frac{\alpha V_{ch}^2}{2\eta t}; \quad (5.10)$$

$$\frac{m_{PL \text{ max}}}{M_0} = 1 - \frac{s}{s-1} \frac{2 \left( 1 - e^{-\frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}}} \right)^2}{2 - \left( 2 + \frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}} \right) e^{-\frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}}}}. \quad (5.11)$$

Для заданого  $s$  існує граничне значення відношення  $\frac{V_{ch}}{I_s}$ , при якому маса корисного навантаження стає нульовою:

$$2 - \left( 2 + \frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}} \right) e^{-\frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}}} - 2 \frac{s}{s-1} \left( 1 - e^{-\frac{V_{ch}}{I_{s \text{ opt}}}} \right)^2 = 0. \quad (5.12)$$

Найкращі системи зберігання й подачі робочого тіла у двигунах малої тяги характеризуються значеннями конструкційного параметра  $s \sim 10$ . При цьому

максимальні значення відношення  $\frac{V_{ch}}{I_s}$  є наближеними до одиниці. Це дозволяє розкласти експоненту в рівнянні (5.10) у ряд Тейлора зі збереженням членів не вище квадратичного, що приводить до виразу для визначення оптимального питомого імпульсу:

$$I_{s \text{ opt}} \approx \sqrt{\frac{V_{ch}^2}{4} + \frac{s}{s-1} \frac{2\eta t}{\alpha} - \frac{V_{ch}}{2}}. \quad (5.13)$$

Як зазначено в розд. 4, при подоланні атмосферного опору заданою є умова

$$F t_t = \tilde{F}_a t_{\Sigma}, \quad (5.14)$$

де  $F_t$  і  $\tilde{F}_a$  – тяга й сила атмосферного опору;

$t_t$  і  $t_{\Sigma}$  – повний час роботи двигуна й час існування космічного апарата.

З урахуванням (5.7) це робить характеристичну швидкість функцією питомого імпульсу. З використанням (5.7) можна отримати вираз величини маси заправленої рушійної установки:

$$m_t + m_p = \frac{s}{s-1} \frac{F t_{\Sigma}}{I_s} \frac{T_t}{T_c}, \quad (5.15)$$

де  $T_c$  і  $T_t$  – повна тривалість і тривалість активної ділянки одного циклу роботи двигуна.

Оскільки величини  $t_{\Sigma}$ ,  $T_c$  і  $T_t$  є заданими, то значення  $t_t$  і  $F$  є сталими.

Якщо первинним джерелом енергії для енергоустановки космічного апарата є Сонце, до складу енергоустановки входять:

- **первинні перетворювачі**: сонячні батареї або перетворювачі теплової енергії сонячного випромінювання в електричну (термоємисійні, термоелектричні, машинні тощо);

- **нагромаджувачі**: батареї акумуляторів електричної енергії.

Первинні перетворювачі містять елементи з великими поверхнями: панелі сонячних батарей, дзеркала сонячних концентраторів та ін. Необхідність орієнтації цих поверхонь на Сонце (рис. 5.1) неминуче призводить до того, що на деяких ділянках траєкторії вони орієнтовані не паралельно потоку повітря. У такому випадку сила атмосферного опору містить дві складові:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_{aA} + \vec{F}_{aN}, \quad (5.16)$$

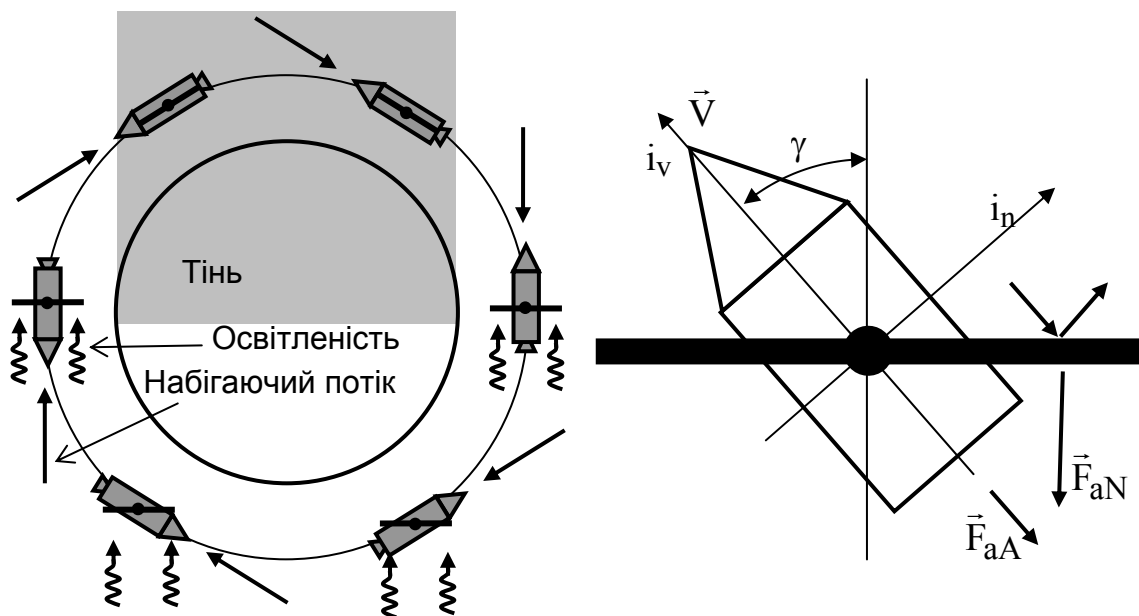
де  $\vec{F}_{aA}$  – сила опору, що діє саме на космічний апарат;

$\vec{F}_{aN}$  – сила опору, що діє на поверхні конструкції енергоустановки:

$$\vec{F}_{aN} = \mp 2\rho V^2 S_N \cos^2 \gamma (i_v \cos \gamma + i_n \sin \gamma), \quad (5.17)$$

де  $\gamma$  – кут між вектором швидкості й напрямком на Сонце.

Верхній знак у рівнянні (5.17) відповідає ділянці між виходом з тіні й моментом зеніту, нижній – між моментом зеніту й заходженням у тінь.



**Рисунок 5.1 – Атмосферний опір при застосуванні СЕУ**

Сила опору атмосфери містить як тангенціальну (паралельну швидкості) складову, так і нормальну. Нормальна складова є періодичною, знакозмінною й спричиняє малі хитання ексцентриситету орбіти, не змінюючи велику піввісь. Тангенціальна складова може призвести до вікового зміщення великої півосі орбіти й має врівноважуватися тягою двигуна так само, як і сила атмосферного опору, що діє саме на апарат.

Таким чином, рушійна установка за час роботи в одному циклі вмикання-вимикання має компенсувати сумарний імпульс атмосферного опору:

$$FT_t = \tilde{F}_{aA} T_c + \tilde{F}_{aN} T_S, \quad (5.18)$$

де  $T_S$  – час роботи первинного перетворювача енергії в одному циклі, коли його площини орієнтовані не паралельно потоку повітря.

Середнє значення сили опору на площинах енергоустановки

$$\tilde{F}_{aN} = \tilde{C}_{xN} S_N \frac{\tilde{\rho}^* \tilde{V}^2}{2}, \quad (5.19)$$

де  $\tilde{C}_{xN}$  – середня за виток величина коефіцієнта лобового опору;

$$\tilde{C}_{xN} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \cos^3 \gamma d\gamma = \frac{16}{3\pi} \approx 1; \quad (5.20)$$

$\tilde{\rho}^*$  – середнє значення щільності атмосфери на освітленій ділянці;

$$\tilde{\rho}^* = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \rho dt, \quad (5.21)$$

де  $T^*$  – час перебування на освітленій ділянці траєкторії.

У термосфері на освітленій ділянці величина  $\tilde{\rho}^*$  може значно відрізнитися від середнього за виток значення  $\tilde{\rho}$ .

Площу поверхні елементів конструкції енергоустановки можна вважати пропорційною потужності:

$$S_N = \sigma N_S, \quad (5.22)$$

де  $N_S$  – потужність первинного перетворювача;

$\sigma$  – питома площа конструкції енергоустановки, м<sup>2</sup>/Вт.

Якщо первинний перетворювач не пов'язано із Сонцем і він не містить елементів конструкції з поверхнями, не паралельними атмосферному потоку, у виразі (5.22) і наведених нижче формулах величину  $\sigma$  можна вважати такою, що дорівнює нулю. Вважаючи ККД нагромаджувача в режимах заряду й розряду таким, що дорівнює одиниці, можна записати

$$N_S T_S = N T_t = F T_t \frac{I_s}{2\eta}, \quad \varepsilon_a = N_S (T_S - T_t), \quad (5.23)$$

де  $\varepsilon_a$  – максимально можливий запас енергії у нагромаджувачі.

Маса енергоустановки в розглянутому випадку містить масу первинного перетворювача, пропорційну потужності  $N_S$ , і масу нагромаджувача, пропорційну максимально можливому запасу енергії  $\varepsilon_a$ :

$$m_N = (\alpha + \beta(T_S - T_t)) N_S, \quad (5.24)$$

де  $\alpha$  – питома маса первинного перетворювача, кг/Вт;

$\beta$  – питома маса нагромаджувача, кг/Дж.

Сукупність виразів (4.16), (5.15), (5.18) – (5.20), (5.22) – (5.24) дає змогу записати рівняння сумарної маси  $m_{tN}$  енергетичної й рушійної установок:

$$m_{tN} = m_t + m_p + m_N = \frac{s}{s-1} \tilde{F}_a t_\Sigma \frac{\frac{1}{I_s} + \frac{s-1}{s} \frac{T_c}{2\eta t_\Sigma} \frac{\alpha + \beta(T_S - T_t)}{T_S}}{1 - \sigma \tilde{C}_{xN} \frac{\tilde{\rho}^* \tilde{V}^2}{2} \frac{I_s}{2\eta}}. \quad (5.25)$$

Мінімальна величина  $m_{tN}$  існує при оптимальному значенні питомого імпульсу

$$I_{s \text{ opt}} = \frac{\sqrt{b^2 + a} - b}{a}, \quad (5.26)$$

де

$$a = \frac{s-1}{s} \frac{T_c}{2\eta t_\Sigma} \frac{\alpha + \beta(T_S - T_t)}{T_S}, \quad b = \frac{\sigma}{2\eta} \tilde{C}_{xN} \frac{\tilde{\rho}^* \tilde{V}^2}{2}. \quad (5.27)$$

При цьому також

$$m_t + m_p = \frac{s}{s-1} \frac{\tilde{F}_{aA} t_\Sigma}{I_{s \text{ opt}}} \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + a}} \right); \quad (5.28)$$

$$m_N = \frac{s}{s-1} \frac{\tilde{F}_{aA} t_\Sigma}{I_{s \text{ opt}}} \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a}} \right); \quad (5.29)$$

$$m_{tN} = 2 \frac{s}{s-1} \frac{\tilde{F}_a t_\Sigma}{I_{s \text{ opt}}}; \quad (5.30)$$

$$F = \tilde{F}_{aA} \frac{T_c}{T_t} \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + a}} \right). \quad (5.31)$$

Можна зазначити, що при інших сталих величина  $m_{tN}$  буде найменшою при мінімальному значенні  $\frac{\alpha + \beta(T_S - T_t)}{T_S}$ , яке залежно від співвідношення  $\alpha$  і  $\beta T_t$

одержують, якщо час роботи первинного перетворювача в одному циклі  $T_S$  є:

- або максимально можливим, що дорівнює тривалості перебування на освітленій ділянці траєкторії  $T_*$ ;
- або мінімально можливим, що дорівнює тривалості роботи двигуна в одному циклі  $T_t$ ;

$$T_S = \begin{cases} T_t, & \beta T_t > \alpha \\ T_*, & \beta T_t < \alpha \end{cases}. \quad (5.32)$$

## 6 КОРЕКЦІЯ ОРБИТИ СУПУТНИКА З УРАХУВАННЯМ ДІЇ ПРИПЛИВНИХ СИЛ І НЕСФЕРИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ПОЛЯ ТЯЖІННЯ

У розд. 1 наведено рівняння (1.30) еволюції площини орбіти й показано, що вікове зміщення площини орбіти (1.55) обумовлено складовими ЗП, синхронними з обертанням об'єкта:

$$w_N = w_{Nc} \cos \varphi + w_{Ns} \sin \varphi + \dots \quad (6.1)$$

Нормальну несферичну складову тяжіння головного центра можна визначити як

$$w_N^{(el)}(\vec{r}) = -\frac{3}{5} I \frac{\gamma m R_e^2}{r^4} e_p \sin i \cos i \sin \varphi, \quad (6.2)$$

де  $e_p, I$  – коефіцієнти, зумовлені несферичністю центрального тіла:

$$e_p = \frac{R_e^2}{R_p^2} - 1, \quad I = \frac{5 \int_0^{R_e} \rho(r) r^4 dr}{3 R_e^2 \int_0^{R_e} \rho(r) r^2 dr}, \quad (6.3)$$

де  $R_e, R_p$  – екваторіальний і полярний радіуси;

$\rho(r)$  – щільність як функція відстані від центра.

Для визначення припливних чинників вікового зміщення площини орбіти можна записати:

$$w_{Nc}^{(M)} = \frac{3}{2} \left( A_{cc}^{(r)} A_c^{(N)} + A_{sc}^{(r)} A_s^{(N)} \right) \omega_M^2 r; \quad (6.4)$$

$$w_{Ns}^{(M)} = \frac{3}{2} \left( A_{cs}^{(r)} A_c^{(N)} + A_{ss}^{(r)} A_s^{(N)} \right) \omega_M^2 r - \frac{3}{5} I \frac{\gamma m R_e^2}{r^4} e_p \sin i \cos i;$$

$$A_{cc}^{(r)} = \cos \Delta \Omega, \quad A_{ss}^{(r)} = \cos \Delta \Omega \cos i_M \cos i + \sin i_M \sin i;$$

$$A_{cs}^{(r)} = -\sin \Delta \Omega \cos i, \quad A_{sc}^{(r)} = \sin \Delta \Omega \cos i_M; \quad (6.5)$$

$$A_c^{(N)} = \sin \Delta \Omega \sin i, \quad A_s^{(N)} = \sin i_M \cos i - \cos \Delta \Omega \cos i_M \sin i;$$

$$\Delta \Omega = \Omega - \Omega_M,$$

де  $i, \Omega$  – нахил орбіти й довгота висхідного вузла орбіти апарата;

$i_M, \Omega_M$  – нахил орбіти, довгота висхідного вузла збурюючого тіла;

$\omega_M$  – колова частота обертання системи головного центра тяжіння й

збурюючого тіла

$$\omega_M^2 = \frac{\gamma(M + M_0)}{a^3}. \quad (6.6)$$

Отже, для визначення чинників вікового зміщення площини орбіти можна записати

$$w_{Nc} = w_{Nc}^{(M)}, \quad w_{Ns} = w_{Ns}^{(M)} - \frac{3}{5} I \frac{\gamma m R_e^2}{r^4} e_p \sin i \cos i. \quad (6.7)$$

Визначимо час роботи рушійної установки з наявним реактивним прискоренням  $w_t$ , що є необхідним для відновлення вихідних значень  $i$  та  $\Omega$ . Відносно еволюції площини колової орбіти радіусом  $a_0$  під дією реактивного прискорення можна записати

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_g, \quad \sin i \frac{d\Omega}{d\varphi} \approx \frac{w_t}{\omega_g^2 a_0} \sin \varphi, \quad \frac{di}{d\varphi} \approx \frac{w_t}{\omega_g^2 a_0} \cos \varphi. \quad (6.8)$$

Якщо рушійна установка вмикається в момент, коли азимут (відлічений від висхідного вузла) дорівнює  $\varphi_0$ ,  $i$  вимикається, коли азимут дорівнює  $\varphi$ , то змінення нахилу орбіти й довготи висхідного вузла під дією тяги дорівнюють:

$$\sin i \Delta\Omega_t \approx \frac{w_t}{\omega_g^2 a_0} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi), \quad \Delta i_t \approx \frac{w_t}{\omega_g^2 a_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0). \quad (6.9)$$

Нагадаємо, що стале ЗП спричиняє періодичні збурення площини орбіти. Це означає, що співвідношення ЗП, тяги й часу між вмиканнями двигуна мають бути такими, щоб рушійна установка встигала відновити вихідні величини  $i$  та  $\Omega$  за час одного напіввитка:

$$\varphi - \varphi_0 \leq \pi. \quad (6.10)$$

Для відновлення вихідної орбіти необхідно, щоб

$$\Delta\Omega_t = -\Delta\Omega, \quad \Delta i_t = -\Delta i. \quad (6.11)$$

У такому випадку з рівнянь (6.2) – (6.11) одержимо

$$\frac{w_t}{\omega_g} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) = -\frac{w_{Ns} t}{2}, \quad \frac{w_t}{\omega_g} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) = -\frac{w_{Nc} t}{2} \quad (6.12)$$

або



$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{w_{Ns}}{w_{Nc}} + \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{w_{Ns}^2 + w_{Nc}^2} \omega_g t}{4 w_t}; \quad (6.13)$$

$$\varphi - \varphi_0 = -2 \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{w_{Ns}^2 + w_{Nc}^2} \omega_g t}{4 w_t}. \quad (6.14)$$

Якщо модуль аргументу арксинуса у рівняннях (6.13), (6.14) перевищує одиницю, це означає порушення умови (6.10) і неможливість відновити площину орбіти при знакопостійному реактивному прискоренні.

Для часу  $t_{t1}$  роботи двигуна й змінення характеристичної швидкості за час одного вмикання маємо

$$t_{t1} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\omega_g}; \quad (6.15)$$

$$\Delta V_{ch} = |w_t t_{t1}| = \frac{2 w_t}{\omega_g} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{w_{Ns}^2 + w_{Nc}^2} \omega_g t}{4 w_t}. \quad (6.16)$$

При інших сталих характеристична швидкість має найменше значення при малих аргументах арксинуса у виразі (6.16). Тоді

$$\Delta V_{ch} \approx \frac{\sqrt{w_{Ns}^2 + w_{Nc}^2} t}{2} \quad (6.17)$$

за час одного вмикання двигуна.

За час  $t_\Sigma$  активного існування космічного апарата сумарна характеристична швидкість корекції площини орбіти

$$V_{ch} \approx \frac{\sqrt{w_{Ns}^2 + w_{Nc}^2} t_\Sigma}{2}. \quad (6.18)$$

Необхідну тягу двигуна при цьому можна визначити так:

$$F = \frac{m V_{ch}}{t_t}, \quad (6.19)$$

де  $m$  – маса апарата;

$t_t$  – сумарний час роботи двигуна.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы/ Г.Н. Дубошин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
2. Соловьев Ц.В. Прогнозирование межпланетных полетов/ Ц.В. Соловьев, Е.В Тарасов. – М.: Машиностроение, 1973. – 400 с.
3. Никифоров А.Ф. Специальные функции математической физики: учебн. пособие / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1984. – 344 с.

**ДОДАТОК**  
**МАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОНЯЧНИХ ЕНЕРГОУСТАНОВОК**

Маса сонячної енергоустановки

$$M_{SPS} = M_C + M_{CB} + M_{SA}, \quad (Д.1)$$

де  $M_C$  – маса апаратури регулювання і контролю;

$M_{CB}$  – маса хімічної батареї;

$M_{SA}$  – маса панелей фотоелектричної батареї.

Маса апаратури регулювання й контролю

$$M_C = \alpha_C N_S, \quad (Д.2)$$

де  $\alpha_C$  – питома маса (для сучасних блоків апаратури регулювання та контролю

$$\alpha_C = (1.2 \dots 1.4) \cdot 10^3 \text{ кг/Вт}).$$

Маса хімічної батареї

$$M_C = \beta_{CB} e^{\lambda_q \tau_{SC}} \varepsilon_{CB}, \quad (Д.3)$$

де  $\beta_{CB}$  – питома маса хімічної батареї (табл. Д.1);

$\tau_{SC}$  – термін служби космічного апарата;

$\lambda_q$  – коефіцієнт деградації ємності хімічної батареї (див. табл. Д.1);

$\varepsilon_{CB}$  – максимальна енергія, що може накопичуватися в акумуляторах.

Якщо акумулятори мають забезпечити роботу апаратури на тіньовій ділянці орбіти, то

$$\varepsilon_{CB} = N_0 t_0, \quad (Д.4)$$

де  $N_0$  – потужність апаратури на тіньовій ділянці орбіти;

$t_0$  – час перебування на тіньовій ділянці орбіти.

Маса фотоелектричної батареї

$$M_{SA} = \alpha_{SA} N_S, \quad (Д.5)$$

де  $\alpha_{SA}$  – питома маса фотоелектричної батареї (табл. Д.2);

$N_S$  – потужність сонячної енергоустановки,

$$N_S = \frac{N_A e^{\lambda_p \tau_{SC}}}{1 - \varepsilon}, \quad (Д.6)$$

де  $\lambda_p$  – коефіцієнт деградації фотоелектричної батареї (див. табл. Д.2);

$\varepsilon$  – середньорічне затінення орбіти (табл. Д.3);

$N_A$  – споживана потужність, середня на витку.

Площу фотоелектричної батареї можна визначати як:

$$S_{SA} = \sigma_{SA} N_S, \quad (Д.7)$$

де  $\sigma_{SA}$  – питома площа фотоелектричної батареї (див. табл. Д.2).

Таблиця Д.1 – Питомі характеристики хімічних батарей

Тип акумулятора	Низькі орбіти		Високі орбіти	
	$\beta_{CB}$ , кг/Дж	$\lambda_q$ , 1/рік	$\beta_{CB}$ , кг/Дж	$\lambda_q$ , 1/рік
Нікель-кадмієвий	$1.16 \cdot 10^{-5}$	0.24	$1.06 \cdot 10^{-5}$	0.18
Нікель-водневий	$1.1 \cdot 10^{-5}$	0.12	$0.97 \cdot 10^{-5}$	0.08
Літійевий	$0.54 \cdot 10^{-5}$	0.35	$0.5 \cdot 10^{-5}$	0.3

Таблиця Д.2 – Питомі характеристики фотоелектричних перетворювачів (на відстані 1 а.о. від Сонця)

Матеріал фотоелементів	$\alpha_{SA}$ , кг/Вт	$\lambda_p$ , 1/рік	$\sigma_{SA}$ , м <sup>2</sup> /Вт
Арсенід галію GaAs	$5 \cdot 10^{-3}$	0.011	$3 \cdot 10^{-3}$
Кремній Si	$15 \cdot 10^{-3}$	0.026	$4.2 \cdot 10^{-3}$

Таблиця Д.3 – Середньорічне затінення орбіти

Перигей/апогей, км	Нахил орбіти, °							
	0	22,5	45	67,5	90	112,5	135	157,5
400/400	0.385	0.390	0.386	0.370	0.324	0.261	0.318	0.368
600/600	0.361	0.367	0.361	0.341	0.272	0.229	0.265	0.340
800/800	0.341	0.348	0.342	0.318	0.235	0.203	0.232	0.316
1200/1200	0.309	0.318	0.310	0.280	0.191	0.169	0.186	0.277
2000/2000	0.263	0.275	0.265	0.220	0.138	0.124	0.137	0.215
10000/10000	0.078	0.126	0.088	0.038	0.028	0.026	0.028	0.037
40000/40000	0.008	0.041	0.008	0.004	0.004	0.003	0.003	0.004
400/600	0.372	0.378	0.373	0.355	0.297	0.244	0.292	0.353
400/800	0.362	0.368	0.362	0.342	0.276	0.230	0.273	0.340
400/1200	0.343	0.350	0.344	0.320	0.248	0.209	0.247	0.317
400/2000	0.313	0.322	0.314	0.281	0.212	0.178	0.211	0.278
400/10000	0.150	0.192	0.159	0.108	0.089	0.073	0.087	0.109
400/40000	0.032	0.077	0.032	0.025	0.020	0.016	0.020	0.025

**Нестеренко Сергій Юрійович  
Шепетов Юрій Олексійович**

**ВИБІР ПАРАМЕТРІВ КОСМІЧНИХ ЕНЕРГОРУШІЙНИХ СИСТЕМ  
ДЛЯ МАНЕВРІВ З МАЛОЮ ТЯГОЮ**

Редактор В.М. Коваль

Зв. план. 2009

Підписано до друку 14.10.2009

Формат 60×84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 2.1. Обл.-вид. арк. 2.31. Наклад 50 прим.

Замовлення 366. Ціна вільна

---

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є.Жуковського  
"Харківський авіаційний інститут"  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
<http://www.khai.edu>  
Видавничий центр "ХАІ"  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)