МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. Г. Михайлова

ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2011

УДК 528.14 (075.8)
М69

Рецензенти: канд. геогр. наук, доц. А. М. Байназаров,
канд. техн. наук, доц. В. А. Жилін

Михайлова, В. Г.
М69 Зрівнювання геодезичних вимірів [Текст] : навч. посібник / В. Г. Михайлова. - Х.: Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2011. – 36 с.

Висвітлено теоретичні питання специфічних методик математичної обробки геодезичних вимірів. Сформульовано задачу зрівнювання багатьох виміряних величин. Викладено основи параметричного та корелатного способів її розв'язання. Наведено методику оцінювання точності за результатами зрівнювання, а також групові та комбіновані способи зрівнювання.

Для студентів, що навчаються за напрямком 0801 „Геодезія та землеустрій" (спеціальність 6.080101 "Геодезія, картографія та землеустрій").

Бібліогр.: 6 назв

УДК 528.14 (075.8)

ВСТУП

Математична обробка геодезичних вимірів є фізико-математичною дисципліною, що використовується не тільки для аналізу та обробки результатів вимірювань, але й для їх проектування або планування, отже, має інженерний характер і набуває специфічних рис, зумовлених характером вимірювань.

Виконання геодезичних робіт безпосередньо пов'язано з вимірами, які отримують з деякою точністю. Як би ретельно ні проводились процеси вимірювання, набуті у результаті цього значення виміряних величин завжди будуть мати похибки. Поява похибок у вимірах залежить від різних факторів: несприятливих зовнішніх умов, недосконалості та класу точності приладів вимірювання, недостатньої кваліфікації спостерігачів, що проводять вимірювання, тощо. Для подальшого використання результатів вимірювань тих чи інших фізичних величин слід насамперед усунути похибки. Зрозуміло, що цілком вилучити ці похибки з результатів вимірювань неможливо, але добитися їх мінімального впливу на результати спостережень дозволяє математична обробка геодезичних вимірів як однієї величини, так і деякої сукупності величин. Це дає можливість одержати їхні надійні значення та оцінку точності. При цьому недостатньо правил теорії похибок вимірів, і використовуються особливі прийоми, запропоновані теорією зрівнювальних обчислень.

Сучасні технології вимірювань дозволяють одержати достатньо точні результати тих чи інших фізичних величин. Сучасні засоби вимірювань мають у своєму складі програмне забезпечення, що дозволяє проводити в автоматизованому режимі математичну обробку результатів вимірювань та набувати їхніх надійних значень. Тому спеціалісти сучасного геодезичного виробництва повинні добре володіти основами математичної обробки геодезичних вимірів.

1 ЗАДАЧІ ТА ОСНОВНІ СПОСОБИ ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ

Геодезичні побудови створюються для визначення взаємного положення у просторі об'єктів, що знаходяться на земній поверхні, під нею та над нею в стані рівноваги або руху. Вони являють собою різні геометричні фігури, в яких *прямим* або *посереднім* способом вимірюють різні елементи, які дають можливість знайти параметри, що характеризують взаємне положення вершин геометричних фігур у тривимірному просторі.

У геодезичній побудові вимірюють не тільки ***u*** *необхідних елементів*, яких достатньо для відшукання потрібних параметрів, але й ***r*** *додаткових* або *надлишкових елементів*, що пов'язані з необхідними математичними співвідношеннями. Усі виміряні $n=u+r$ елементів супроводжуються похибками (випадковими або систематичними). Тому виміряне значення x_i елемента відрізняється від свого дійсного або справжнього значення X_i. Воно має дійсну, або справжню, похибку

$$\Delta_i=x_i-X_i \quad (i=1\div n).$$

Параметри є функціями елементів геодезичної побудови. Обчислене за виміряними елементами значення параметра

$$y=f(x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

відрізняється від його дійсного, або справжнього, значення

$$Y=f(X_1,X_2, \dots ,X_n).$$

Воно має дійсну, або справжню, похибку

$$\Delta(y)=y-Y,$$

що є функціонально залежною від похибок Δ_i вимірювання елементів. Кожний параметр може бути знайдений за різними комбінаціями u елементів з n. Такі значення одного й того ж параметра є різними.

Вимірювання надлишкових елементів у геодезичній побудові виконується, по-перше, для контролю вимірювання усіх елементів, по-друге, для підвищення точності та відшукання найбільш правдоподібних значень цих елементів, й, по-третє, для оцінки точності результатів вимірювань. Елементи геодезичної побудови пов'язані між собою різними геодезичними умовами, які можна записати у такому вигляді:

$$\varphi_j(X_1,X_2, \dots ,X_n)=0 \ (j=1\div r).$$

Вони називаються *фундаментальними* або *умовними рівняннями*, а також *рівняннями зв'язку*. При підстановці в умовні рівняння виміряних значень елементів отримують нев'язки w_j, тобто

$$\varphi_j(x_1,x_2, \dots ,x_n)=w_j.$$

Вимірювання вважаються виконаними *правильно*, якщо ці нев'язки за своєю абсолютною величиною не перевищують декотрого *допустимого* *значення*. Таким чином, задача визначення ймовірніших значень виміряних величин розв'язується за правилами теорії похибок вимірів.

Зрівнювання геодезичних побудов виконується лише тоді, коли в таких побудовах вимірюють надлишкові елементи. У процесі зрівнювання усувають нев'язки в геодезичних побудовах, визначають вірогідні значення елементів і оцінюють їхню точність, тобто забезпечується звищення точності геодезичних побудов та однозначне визначення їхніх параметрів.

Для зрівнювання геодезичних побудов недостатньо правил теорії похибок вимірів, тому використовуються особливі прийоми, що розроблюються в теорії *зрівнювальних обчислень*.

Зрівнювання геодезичних побудов виконується різними способами. Основними є два способи. Перший називається *способом умов*, *корелатним способом* або *способом умовних вимірювань*, а другий – *параметричним способом* або *способом необхідних невідомих*. Усі інші способи, що мають свої назви, являють собою видозмінення або різні комбінації цих способів.

1.1 Корелатний спосіб зрівнювання

Нехай x_i $(i=1 \div n)$ – результати вимірювання декотрих величин, справжні значення яких дорівнюють X_i. При цьому кількість n виконаних вимірювань більше кількості u необхідних вимірювань, кількість надлишкових вимірювань позначається $r=n-u$, а також відомо, що величини X_i зв'язані між собою незалежними умовними рівняннями

$$\varphi_j\,(X_1,X_2,\ldots,X_n)=0 \quad (j=1 \div r\,). \tag{1.1}$$

Ваги результатів вимірювань позначаються через p_i відповідно.

Оскільки значення x_i отримані з декотрими похибками, то при підстановці цих результатів у ліві частини умовних рівнянь у правих їхніх частинах, як правило, отримують не нулі, а нев'язки w_j, що є справжніми похибками функцій f_j:

$$\varphi_j\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)=w_j\,. \tag{1.2}$$

Означимо

$$X_i=x_i+v_i, \tag{1.3}$$

де v_i – шукані поправки до виміряних величин x_i . Тоді зрівнені результати вимірювань повинні задовольняти рівнянням

$$\varphi_j\,(x_1+v_1\,, x_2+v_2\,,\ldots, x_n+v_n)=0. \quad (1.4)$$

Однак якщо умовні рівняння (1.4) будуть мати нелінійний вигляд, то задача може бути практично нерозв'язуваною. Щоб зробити задачу зрівнювання розв'язуваною та отримати алгоритм, зведемо рівняння (1.4) до лінійного вигляду, використовуючи те, що поправки v_i завжди є достатньо малими порівняно з величинами x_i.

Тоді отримаємо систему умовних рівнянь поправок

$$a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \ldots + a_{jn}v_n = -w_j \qquad (j=1 \div r\,), \quad (1.5)$$

у якій використовується матриця коефіцієнтів з елементами

$$a_{ji} = (\partial\varphi_j/\partial x_i)_0\,.$$

Визначення v_i виконується згідно з принципом найменших квадратів, тобто

$$[\,pv^2] = min,$$

де квадратними скобками позначають Гаусову суму. Для цього будується система нормальних рівнянь корелат вигляду

$$\begin{cases} [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]\,k_2 + \ldots + [qa_1a_r]\,k_r + w_1 = 0, \\ [qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]\,k_2 + \ldots + [qa_2a_r]\,k_r + w_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [qa_1a_r]k_1 + [qa_2a_r]\,k_2 + \ldots + [qa_ra_r]\,k_r + w_r = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

де $q_i=1/p_i$.

Матриця коефіцієнтів поданої системи є квадратною порядку r, симетричною, додатно визначеною рангу r, неособливою.

Отримавши в результаті розв'язання системи (1.6) корелати k_j, використовують рівняння

$$v_i = q_ia_{1i}k_1 + q_ia_{2i}k_2 + \ldots + q_ia_{ri}\,k_r, \quad (1.7)$$

за допомогою яких знаходять шукані поправки v_i $(i=1 \div n\,)$.

У результаті зрівнені значення x^*_i визначають як

$$x^*_i = x_i + v_i \qquad (i=1 \div n\,). \quad (1.8)$$

1.2 Параметричний спосіб зрівнювання

Нехай x_i $(i=1\div n)$ – результати вимірювання декотрих величин, справжні значення яких дорівнюють X_i. При цьому кількість n виконаних вимірювань більше кількості u необхідних вимірювань, а кількість надлишкових вимірювань позначається $r=n-u$.

Розмірності виміряних величин і поправок до них вибирають з таким розрахунком, щоб середні квадратичні похибки m_i виміряних величин були близькими до одиниці. При обчисленні ваг виміряних величин за формулою

$$p_i=c/m_i^2$$

коефіцієнт c вибирають таким, щоб значення p_i були як можливо близькими до одиниці.

Далі вибирають *необхідні невідомі* T_ψ $(\psi=1\div u)$, через які виражають виміряні елементи X_i у вигляді так званих *параметричних рівнянь*:

$$X_i= f_i\,(T_1,T_2,\dots,T_u). \tag{1.9}$$

Необхідні невідомі вибирають так, щоб параметричні рівняння мали найбільш простий вигляд. При цьому невідомі повинні не мати математичних зв'язків між собою, а всі виміряні величини повинні виражатися через вибрані невідомі.

Знаходять приблизні значення t_ψ $(\psi=1\div u)$ невідомих величин за допомогою математичних співвідношень, що відповідають поданій геодезичній побудові, та встановлюють розмірності поправок до них.

Позначимо через t_ψ^* зрівнені значення необхідних невідомих, а через $x^*_i=x_i+v_i$ – зрівнені значення виміряних величин, де v_i – поправки до величин x_i. Тоді можна записати:

$$v_i= f_i\,(t^*_1,t^*_2,\dots,t^*_u) -x_i. \tag{1.10}$$

Позначимо далі через τ_ψ поправки до приблизних значень необхідних невідомих. Тоді (1.10) буде мати вигляд

$$v_i= f_i\,(t_1+\tau_1,t_2+\tau_2,\dots,t_u+\tau_u) -x_i. \tag{1.11}$$

У результаті перетворення рівнянь (1.11) отримаємо *систему параметричних рівнянь поправок:*

$$v_i=a_{i1}\tau_1+a_{i2}\tau_2+\ldots+a_{iu}\tau_u+l_i, \tag{1.12}$$

у якій використовується матриця коефіцієнтів з елементами

$$a_{i\psi}=(\partial f_i/\partial t_\psi)_0,$$

а вільні члени обчислюються за формулою

$$l_i=f_i(t_1, t_2,\ldots,t_u)-x_i.$$

.

Рішення системи будемо шукати з умови

$$[pv^2]=min.$$

Для цього будується *система нормальних рівнянь поправок до приблизних значень необхідних невідомих* вигляду

$$\begin{cases} [pa_1a_1]\tau_1+[pa_1a_2]\tau_2+\ldots+[pa_1a_u]\tau_u+[pa_1l]=0, \\ [pa_1a_2]\tau_1+[pa_2a_2]\tau_2+\ldots+[pa_2a_u]\tau_u+[pa_2l]=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_1a_u]\tau_1+[pa_2a_u]\tau_2+\ldots+[pa_ua_u]\tau_u+[pa_ul]=0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Матриця коефіцієнтів поданої системи є квадратною порядку u, симетричною, додатно визначеною рангу u, неособливою.

Отримавши в результаті розв'язання системи (1.13) поправки τ_ψ до приблизних значень необхідних невідомих t_ψ, використовують вираз

$$t_\psi^*=t_\psi+\tau_\psi$$

для визначення їхніх зрівнених значень t_ψ^*.

Поправки до виміряних величин отримують за *системою параметричних рівнянь поправок*

$$v_i=a_{i1}\tau_1+a_{i2}\tau_2+\ldots+a_{iu}\tau_u+l_i. \tag{1.14}$$

Зрівнені значення виміряних величин визначаються за формулою

$$x^*_i=x_i+v_i\ .$$

Усі обчислення перевіряють згідно з рівняннями

$$x^*_i = f_i\,(t^*_1, t^*_2, \ldots, t^*_u). \qquad (1.15)$$

Слід відзначити, що невиконання цих контрольних рівнянь може статись не тільки через похибки вимірювань, але й внаслідок недостатньої точності приблизних значень невідомих. Ознакою цього є недопустимо великі абсолютні значення поправок. У цьому випадку зрівнені значення величин слід розглядати як приблизні значення та повторити з ними весь процес зрівнювання.

1.3 Оцінювання точності за матеріалами зрівнювання

Оцінювання точності результатів зрівнювання параметричним способом потребує обчислення зазначених нижче характеристик.

Якщо n – кількість вимірювань, u - кількість параметрів, $p_i(i=1 \div n)$ - ваги виміряних величин, v_i - поправки до виміряних величин, то середню квадратичну похибку одного вимірювання можна визначити як

$$m = ((v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)/(n-u))^{0,5}, \qquad (1.16)$$

а середню квадратичну похибку одиниці ваги – за формулою

$$\mu = ((p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2)/(n-u))^{0,5}. \qquad (1.17)$$

Якщо

$$F = F(t^*_1, t^*_2, \ldots, t^*_u),$$
$$a_{i\psi} = (\partial f_i / \partial t_\psi)_0, \quad \eta_\psi = (\partial F / \partial t_\psi)_0, \quad \psi = 1 \div u,$$

то з системи нормальних рівнянь

$$\begin{cases} [pa_1a_1]z_1 + [pa_1a_2]z_2 + \ldots + [pa_1a_u]z_u + \eta_1 = 0, \\ [pa_1a_2]z_1 + [pa_2a_2]z_2 + \ldots + [pa_2a_u]z_u + \eta_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_1a_u]z_1 + [pa_2a_u]z_2 + \ldots + [pa_ua_u]z_u + \eta_u = 0 \end{cases} \qquad (1.18)$$

можуть бути знайдені перехідні коефіцієнти $z_1, z_2, \ldots, z_u$, а обернена вага функції F визначиться за формулою

$$-1/P_F = (\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \ldots + \eta_u z_n). \qquad (1.19)$$

Середня квадратична похибка функції обчислюється як

$$m_F = \mu/(P_F)^{0,5}. \qquad (1.20)$$

Тепер розглянемо оцінювання точності результатів зрівнювання корелатним способом.

Нехай n – кількість вимірів, r - кількість умовних рівнянь, $p_i(i=1 \div n)$ - поправки до виміряних величин, v_i - ваги.

Середня квадратична похибка одного рівноточного вимірювання визначиться як

$$m=((v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2)/r)^{0,5}, \qquad (1.21)$$

а середня квадратична похибка одиниці ваги нерівноточних вимірів – за формулою

$$\mu=((p_1v_1^2+p_2v_2^2+\ldots+p_nv_n^2)/r)^{0,5}. \qquad (1.22)$$

Якщо A – матриця коефіцієнтів умовних рівнянь поправок, $Z=(AA^T)^{-1}$, то середні квадратичні похибки елементів вектора корелат можуть бути обчислені для рівноточних вимірів за формулою

$$m_j=m\cdot(z_{jj})^{0,5} \qquad (j=1 \div r), \qquad (1.23)$$

а для нерівноточних – як

$$m_j= \mu\cdot(z_{jj})^{0,5} \qquad (j=1 \div r). \qquad (1.24)$$

Вага функції F може бути обчислена з використанням формули

$$1/P_F=[(\lambda^2/p)\cdot r], \qquad (1.25)$$

де

$$\lambda_i=(\partial F/\partial x_i)_0 \quad (i=1 \div n).$$

Її середня квадратична похибка визначиться як

$$m_F=\mu/(P_F)^{0,5}. \qquad (1.26)$$

2 ВИДОЗМІНЕНІ СПОСОБИ ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ

2.1 Групові способи розв'язання умовних рівнянь

Існує кілька модифікацій корелатного способу зрівнювання геодезичних побудов. Виникли вони з практичних розумінь, що пов'язані з необхідністю зрівнювання складних геодезичних мереж з великою кількістю умовних рівнянь і, отже, нормальних рівнянь корелат. Оскільки обсяг обчислювальної роботи зростає значно швидше, ніж кількість нормальних рівнянь, більш ефективним є застосування таких нормальних рівнянь, при яких потрібно було б розв'язувати системи з не дуже великою кількістю рівнянь навіть при зростанні кількості таких систем.

Зупинимося на двохгруповому способі Гауса, що лежить в основі багатьох інших широко розповсюджених багатогрупових способів зрівнювальних обчислень. У цьому способі умовні рівняння розподіляють на дві групи.

Розглянемо систему з чотирьох умовних рівнянь, що розподіляються на дві групи по два рівняння в кожній:

$$\begin{cases} \begin{cases} [a_1v]+w_1=0, \\ [a_2v]+w_2=0, \end{cases} & (2.1) \\ \begin{cases} [a_3v]+w_3=0, \\ [a_4v]+w_4=0. \end{cases} & (2.2) \end{cases}$$

У поданому зображенні системи квадратними скобками позначають Гаусову суму, $\{a_{ji}\}$ $(j=1\div r;\ i=1\div n)$ - матриця коефіцієнтів системи умовних рівнянь поправок, $r=4$ - кількість надлишкових або додаткових елементів, n - кількість виміряних елементів, w_j - нев'язки.

Методика двохгрупового зрівнювання полягає у тому, що спочатку знаходять первинні поправки v_i' шляхом розв'язання рівнянь тільки першої групи при умові $[pv'^2]=min$ і вводять їх у виміряні величини. Потім знаходять вторинні поправки v_i'' шляхом розв'язання усієї заданої системи при умові $[pv''^2]=min$. При цьому вільні члени рівнянь обчислюють з урахуванням первинних поправок. Остаточні значення поправок отримують як суми

$$v_i=v_i'+v_i''.$$

Застосування такого способу зрівнювання є ефективним лише тоді, коли перша група рівнянь розпадається на незалежні рівняння, що легко розв'язуються. Двохгруповий спосіб Гауса використовується для обгрунтування інших прийомів зрівнювальних обчислень. Розглянемо спосіб приближень Гауса.

Нехай дана та ж система умовних рівнянь, що розподілена на дві групи (2.1) і (2.2). Розв'язавши окремо першу групу рівнянь (2.1), знайдемо первинні поправки $\boldsymbol{v_i'}$. Вторинні поправки $\boldsymbol{v_i''}$ обчислимо з сумісного розв'язання умовних рівнянь

$$\begin{cases} \begin{cases} [a_1v'']+w_1'=0, \\ [a_2v'']+w_2'=0, \end{cases} \\ \begin{cases} [a_3v'']+w_3'=0, \\ [a_4v'']+w_4'=0, \end{cases} \end{cases} \tag{2.3}$$

де вільні члени обчислені за формулами

$$\begin{aligned} w_1' &= f_1(x_1+v_1',x_2+v_2',\dots,x_n+v_n'), \\ w_2' &= f_2(x_1+v_1',x_2+v_2',\dots,x_n+v_n'). \\ w_3' &= f_3(x_1+v_1',x_2+v_2',\dots,x_n+v_n'), \\ w_4' &= f_4(x_1+v_1',x_2+v_2',\dots,x_n+v_n'). \end{aligned}$$

Розглядаючи тепер систему умовних рівнянь (2.3) як початкову, знов застосуємо до неї двохгруповий спосіб Гауса.

Спочатку розв'язуємо окремо другу групу рівнянь (2.3). У результаті отримаємо треті поправки. Розв'язуючи таким чином почергово групи умовних рівнянь, поступово зменшуємо нев'язки.

Шукані поправки обчислюються за формулою

$$v_i=v_i'+v_i''+v_i'''+\dots+v_i^{(s)}. \tag{2.4}$$

де $\boldsymbol{s}$ – кількість приближень, що ліквідують усі нев'язки.

У цьому способі умовні рівняння можна розподілити на будь-яку кількість груп. Найбільш ефективним розподілом є такий, при якому групи розподіляються на незалежні рівняння.

2.2 Спосіб Крюгера

У 1905 році Крюгер запропонував спосіб двохгрупового зрівнювання, що є подальшим розвитком способу Гауса. У цьому способі немає необхідності у послідовних приближеннях. Початкова система умовних рівнянь розподіляється на дві групи.

Розглянемо систему з п'яти умовних рівнянь з $\boldsymbol{n}$ невідомими

$$\begin{cases} \begin{cases} [a_1v]+w_1=0, \\ [a_2v]+w_2=0, \\ [a_3v]+w_3=0, \end{cases} \\ \begin{cases} [a_4v]+w_4=0, \\ [a_5v']+w_5=0 \end{cases} \end{cases} \qquad (2.5)$$

(у поданому зображенні системи $\{a_{ji}\}$ $(j=1 \div r;\ i=1 \div n)$ - матриця коефіцієнтів системи умовних рівнянь поправок, $r=5$ - кількість надлишкових або додаткових елементів, n - кількість виміряних елементів, w_j - нев'язки). Припустимо, що перші три рівняння є простими. Ваги p_i $(i=1 \div n)$ виміряних елементів є відомими. Необхідно визначити поправки v_i для усієї системи.

Розв'язують першу групу класичним корелатним способом, ставлячи за мету знаходження її поправок v_i':

$$\begin{cases} [a_1v']+w_1=0, \\ [a_2v']+w_2=0, \\ [a_3v']+w_3=0. \end{cases}$$

У результаті підстановки виправлених результатів вимірювань одержуємо таку систему умовних рівнянь поправок:

$$\begin{cases} \begin{cases} [a_1v'']=0, \\ [a_2v'']=0, \\ [a_3v'']=0, \end{cases} \\ \begin{cases} [\alpha_1v'']+w_4'=0, \\ [\alpha_2v'']+w_5'=0, \end{cases} \end{cases} \qquad (2.6)$$

де w_4' і w_5' отримані за первинно виправленими результатами вимірювань.

Перетворимо другу групу умовних рівнянь поправок так, щоб загальна система нормальних рівнянь розпалась на дві незалежні системи. Для цього необхідно, щоб коефіцієнти перетвореної системи були декотрими лінійними функціями коефіцієнтів кожної з груп.

Припустимо, що такі перетворення виконані та отримана така система умовних рівнянь:

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
[a_1v'']=0,\\
[a_2v'']=0,\\
[a_3v'']=0,
\end{cases}\\
\begin{cases}
[\mathcal{A}_1v'']+w_4'=0,\\
[\mathcal{A}_2v'']+w_5'=0.
\end{cases}
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

Перехідні множники, що відповідають цьому перетворенню, можуть бути визначені шляхом розв'язання таких систем нормальних рівнянь:

$$
\begin{cases}
[qa_1a_1]\rho_{11} +[qa_1a_2]\,\rho_{21} +[qa_1a_3]\,\rho_{31} +[qa_1\alpha_1] =0,\\
[qa_1a_2]\,\rho_{11} +[qa_2a_2]\,\rho_{21} +[qa_2a_3]\,\rho_{31}+[qa_2\alpha_1] =0,\\
[qa_1a_3]\,\rho_{11} +[qa_2a_3]\,\rho_{21} +[qa_3a_3]\,\rho_{31}+[qa_3\alpha_1] =0,
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

$$
\begin{cases}
[qa_1a_1]\rho_{12} +[qa_1a_2]\,\rho_{22} +[qa_1a_3]\,\rho_{32} +[qa_1\alpha_2] =0,\\
[qa_1a_2]\,\rho_{12} +[qa_2a_2]\,\rho_{22} +[qa_2a_3]\,\rho_{32}+[qa_2\alpha_2] =0,\\
[qa_1a_3]\,\rho_{12} +[qa_2a_3]\,\rho_{22} +[qa_3a_3]\,\rho_{32}+[qa_3\alpha_2] =0,
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

де $q_i=1/p_i$.

Перетворені коефіцієнти при цьому обчислюються згідно з формулами

$$\mathcal{A}_{1i}=a_{1i}\rho_{11}+a_{2i}\rho_{21}+a_{3i}\rho_{31}+\alpha_{1i}, \tag{2.10}$$

$$\mathcal{A}_{2i}=a_{1i}\rho_{21}+a_{2i}\rho_{22}+a_{3i}\rho_{32}+\alpha_{2i}. \tag{2.11}$$

Система нормальних рівнянь корелат, що відповідає перетвореній другій групі рівнянь, буде мати вигляд

$$
\begin{cases}
[q\mathcal{A}_1\mathcal{A}_1]k_4+ [q\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2]k_5+w_4'=0,\\
[q\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2]k_4+ [q\mathcal{A}_2\mathcal{A}_2]k_5+w_5'=0,
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

де k_4, k_5 – корелати системи умовних рівнянь для перетвореної другої групи системи (2.7).

Поправки, що відповідають другій групі умовних рівнянь, отримують за формулою

$$v_i''=q_i\mathcal{A}_{1i}\,k_4+ q_i\mathcal{A}_{2i}\,k_5,$$

остаточні ж поправки визначають як суми

$$v_i=v_i'+v_i''.$$

2.3 Спосіб Урмаєва - Крюгера

Спосіб Крюгера був у подальшому удосконалений Н.А. Урмаєвим, який спростив використання цього способу для зрівнювання кутів тріангуляційних мереж.

Умовні рівняння для системи трикутників розділяють на дві групи. До першої групи віднесемо усі умови фігур:

$$\begin{cases} v_1+v_2+v_3+w_1=0, \\ v_4+v_5+v_6+w_2=0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ v_{n-2}+v_{n-1}+v_n+w_s=0, \end{cases} \tag{2.13}$$

де n - кількість кутів у мережі. У другу групу включимо інші умовні рівняння. Припустимо, що до неї увійшло два таких рівняння:

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n+w_\alpha=0, \\ \beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\ldots+\beta_n v_n+w_\beta=0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Для першої групи отримаємо нормальні рівняння корелат вигляду

$$\begin{cases} 3k_1'+w_1=0, \\ 3k_2'+w_2=0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 3k_s'+w_s=0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Отже, первинні поправки мають вигляд

$$\begin{aligned} &v_1'=v_2'=v_3'=k_1'=w_1/3, \\ &v_4'=v_5'=v_6'=k_2'=w_2/3, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &v_{n-2}'=v_{n-1}'=v_n'=k_s'=w_s/3. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Рівняння для визначення допоміжних корелат відрізняються від нормальних рівнянь першої групи тільки вільними членами. Вони мають такий вигляд:

$$\begin{cases} 3\rho_{\alpha 1}+[a_1\alpha]=0, \\ 3\rho_{\alpha 2}+[a_2\alpha]=0, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 3\rho_{\alpha s}+[a_s\alpha]=0 \end{cases} \qquad (2.17)$$

і

$$\begin{cases} 3\rho_{\beta 1}+[a_1\beta]=0, \\ 3\rho_{\beta 2}+[a_2\beta]=0, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 3\rho_{\beta s}+[a_s\beta]=0, \end{cases} \qquad (2.18)$$

де

$$a_{11}=a_{12}=a_{13}=1, \quad a_{14}=a_{15}=a_{16}=\ldots=a_{1n}=0, \quad a_{24}=a_{25}=a_{26}=1,$$
$$a_{21}=a_{22}=a_{23}=\ldots=a_{2n}=0, \quad s_{n-2}=s_{n-1}=s_n=1, \quad s_1=s_2=\ldots=s_{n-s}=0.$$

Тоді допоміжні корелати можуть бути виражені формулами:

$$\begin{aligned} &\rho_{\alpha 1}=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)/3, \\ &\rho_{\alpha 2}=-(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)/3, \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ &\rho_{\alpha s}=-(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n)/3, \\ &\rho_{\beta 1}=-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)/3, \\ &\rho_{\beta 2}=-(\beta_4+\beta_5+\beta_6)/3, \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ &\rho_{\beta s}=-(\beta_{n-2}+\beta_{n-1}+\beta_n)/3. \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Коефіцієнти та перетворені члени вільних рівнянь другої групи будуть мати такі значення:

$$\begin{aligned} &A_1=\alpha_1+\rho_{\alpha 1}, \quad A_2=\alpha_2+\rho_{\alpha 1}, \quad A_3=\alpha_3+\rho_{\alpha 1}, \\ &A_4=\alpha_4+\rho_{\alpha 2}, \quad A_5=\alpha_5+\rho_{\alpha 2}, \quad A_6=\alpha_6+\rho_{\alpha 2}, \\ &A_{n-2}=\alpha_{n-2}+\rho_{\alpha s}, \quad A_{n-1}=\alpha_{n-1}+\rho_{\alpha s}, \quad A_n=\alpha_n+\rho_{\alpha s}, \\ &w_A=w_1\rho_{\alpha 1}+w_2\rho_{\alpha 2}+\ldots+w_s\rho_{\alpha s}+w_\alpha, \\ &B_1=\beta_1+\rho_{\beta 1}, \quad B_2=\beta_2+\rho_{\beta 1}, \quad B_3=\beta_3+\rho_{\beta 1}, \\ &B_4=\beta_4+\rho_{\beta 2}, \quad B_5=\beta_5+\rho_{\beta 2}, \quad B_6=\beta_6+\rho_{\beta 2}, \\ &B_{n-2}=\beta_{n-2}+\rho_{\beta s}, \quad B_{n-1}=\beta_{n-1}+\rho_{\beta s}, \quad B_n=\beta_n+\rho_{\beta s}, \\ &w_B=w_1\rho_{\beta 1}+w_2\rho_{\beta 2}+\ldots+w_s\rho_{\beta s}. \end{aligned}$$

Якщо нормальні рівняння першої групи розв'язані та кути виправлені, то при визначенні вторинних поправок з розв'язання рівнянь обох груп маємо

$$w_1=w_2=\ldots=w_s=0,\quad w_A=w_\alpha,\quad w_B=w_\beta.$$

Склавши нормальні рівняння другої групи, обчислюємо вторинні поправки v_i''. Остаточні поправки визначають за формулою

$$v_i=v_i'+v_i''.$$

З цього видно, що перетворення рівнянь другої групи здійснюється достатньо просто. Для переходу від умовного рівняння

$$(\eta_1 v_1+\eta_2 v_2+\eta_3 v_3)+(\eta_4 v_4+\eta_5 v_5+\eta_6 v_6)+$$
$$+\ldots+(\eta_{n-2} v_{n-2}+\eta_{n-1} v_{n-1}+\eta_n v_n)+w_\eta=0$$

до його перетвореного вигляду

$$(\acute\eta_1 v_1+\acute\eta_2 v_2+\acute\eta_3 v_3)+(\acute\eta_4 v_4+\acute\eta_5 v_5+\acute\eta_6 v_6)+\ldots$$
$$+(\acute\eta_{n-2} v_{n-2}+\acute\eta_{n-1} v_{n-1}+\acute\eta_n v_n)+w_{\acute\eta}=0$$

знаходимо з використанням кутів мережі величини

$$\acute\eta_i=\eta_i-(\eta_i+\eta_{i+1}+\eta_{i+2})/3,$$
$$\acute\eta_{i+1}=\eta_{i+1}-(\eta_i+\eta_{i+1}+\eta_{i+2})/3,$$
$$\acute\eta_{i+2}=\eta_{i+2}-(\eta_i+\eta_{i+1}+\eta_{i+2})/3,$$
$$(i=1,4,7,\ldots,n-2).$$

Обчислення перетворених коефіцієнтів перевіряємо за формулою

$$\acute\eta_i+\acute\eta_{i+1}+\acute\eta_{i+2}+\acute\eta_{i+3}=0.$$

2.4 Спосіб Больца

Спосіб Больца використовується для сумісного зрівнювання існуючих геодезичних побудов і приєднаних до них побудов, знов виконаних. Він являє собою видозмінення способу Крюгера, що засноване на оберненні матриць коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Припустимо, що є побудова, у якій три умовних рівняння поправок:

$$\begin{cases} [a_1v]+w_1=0, \\ [a_2v]+w_2=0, \\ [a_3v]+w_3=0. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Відповідно до класичного корелатного способу визначають матрицю $\boldsymbol{N}$ коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат, знаходять обернену до неї матрицю $\boldsymbol{\Theta}$ і обчислюють корелати за формулами:

$$\begin{aligned} k_1 &= -\Theta_{11}w_1 - \Theta_{12}w_2 - \Theta_{13}w_3, \\ k_2 &= -\Theta_{21}w_1 - \Theta_{22}w_2 - \Theta_{23}w_3, \\ k_3 &= -\Theta_{31}w_1 - \Theta_{32}w_2 - \Theta_{33}w_3. \end{aligned} \qquad (2.21)$$

Далі використовують рівняння (1.7), за допомогою яких знаходять поправки $v_i\ (i=1\div n)$:

$$v_i=a_{1i}k_1+a_{2i}k_2+a_{3i}k_3.$$

Тепер розглянемо приєднану побудову з умовними рівняннями поправок

$$\begin{cases} [a_4v]+w_4=0, \\ [a_5v]+w_5=0. \end{cases}$$

Виконаємо перетворення умов, що знов виникли, до вигляду

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_4v]+w_4'&=0, \\ [\mathcal{A}_5v]+w_5'&=0. \end{aligned} \qquad (2.22)$$

При цьому перехідні множники крюгерівських перетворень будуть визначені згідно з формулами:

$$\begin{aligned} \rho_{14} &= -\Theta_{11}[a_1a_4] - \Theta_{12}[a_2a_4] - \Theta_{13}[a_3a_4], \\ \rho_{24} &= -\Theta_{21}[a_1a_4] - \Theta_{22}[a_2a_4] - \Theta_{23}[a_3a_4] \\ \rho_{34} &= -\Theta_{31}[a_1a_4] - \Theta_{32}[a_2a_4] - \Theta_{33}[a_3a_4], \\ \rho_{15} &= -\Theta_{11}[a_1a_5] - \Theta_{12}[a_2a_5] - \Theta_{13}[a_3a_5], \\ \rho_{25} &= -\Theta_{21}[a_1a_5] - \Theta_{22}[a_2a_5] - \Theta_{23}[a_3a_5], \\ \rho_{35} &= -\Theta_{31}[a_1a_5] - \Theta_{32}[a_2a_5] - \Theta_{33}[a_3a_5]. \end{aligned} \qquad (2.23)$$

Перетворені коефіцієнти матимуть вигляд

$$\mathcal{A}_{4i}=a_{1i}\rho_{14}+a_{2i}\rho_{24}+a_{3i}\rho_{34}+a_{4i},$$
$$\mathcal{A}_{5i}=a_{1i}\rho_{15}+a_{2i}\rho_{25}+a_{3i}\rho_{35}+a_{5i}, \qquad i=1\div n+n1,$$

де $n1$ – кількість виконаних додаткових величин вторинної побудови. Вільні члени w_4' і w_5' отримують як нев'язки за первинно виправленими результатами вимірювань з використанням формул

$$w_4'=f_4\,(x_1+v_1,x_2+v_2,\ldots,x_n+v_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+n1}),$$
$$w_5'=f_5\,(x_1+v_1,x_2+v_2,\ldots,x_n+v_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+n1}).$$

Обчислимо корелати за формулами

$$k_4=-Q_{44}w_4'-Q_{45}w_5',$$
$$k_5=-Q_{54}w_4'-Q_{55}w_5'. \qquad (2.24)$$

Далі для знаходження додаткових членів v_i' розкладання поправок v_i використовують рівняння

$$v_i'=\mathcal{A}_{4i}k_4+\mathcal{A}_{5i}k_5, \qquad i=1\div n+n1_i.$$

При виникненні нової приєднаної побудови з умовними рівняннями поправок

$$\begin{cases}[a_6v]+w_6=0,\\ [a_7v]+w_7=0\end{cases}$$

виконують первинне і вторинне перетворення.

Первинно перетворена система умовних рівнянь поправок має вигляд

$$[\mathcal{A}_6v]+w_6'=0,$$
$$[\mathcal{A}_7v]+w_7'=0.$$

При цьому перехідні множники крюгерівських перетворень будуть визначені згідно з формулами:

$$\rho_{16}=-\Theta_{11}[a_1a_6]-\Theta_{12}[a_2a_6]-\Theta_{13}[a_3a_6],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.25)$$
$$\rho_{37}=-\Theta_{31}[a_1a_7]-\Theta_{32}[a_2a_7]-\Theta_{33}[a_3a_7],$$

перетворені коефіцієнти матимуть вигляд

$$\mathcal{A}_{6i}=a_{1i}\rho_{16}+a_{2i}\rho_{26}+a_{3i}\rho_{36}+a_{6i},$$
$$\mathcal{A}_{7i}=a_{1i}\rho_{17}+a_{2i}\rho_{27}+a_{3i}\rho_{37}+a_{7i},, \qquad i=1\div n+n1+n2, \qquad (2.26)$$

де $n2$ – кількість виконаних додаткових величин нової приєднаної побудови, а вільні члени w_6' і w_7' отримують з використанням формул

$$w_6'=f_6(x_1+v_1',x_2+v_2',\ldots,x_{n+n1}+v_{n+n1}',x_{n+n1+1},\ldots,x_{n+n1+n2}),$$
$$w_7'=f_7(x_1+v_1',x_2+v_2',\ldots,x_{n+n1}'+v_{n+n1}',x_{n+n1+1},\ldots,x_{n+n1+n2}). \qquad (2.27)$$

Вторинно перетворена система умовних рівнянь поправок набуває вигляду

$$\begin{cases}[\mathcal{A}_6v]+w_6''=0,\\ [\mathcal{A}_7v]+w_7''=0.\end{cases}$$

При цьому перехідні множники крюгерівських перетворень будуть визначені за формулами

$$\begin{aligned}\rho_{46}&=-\Theta_{44}[A_4A_6]-\Theta_{45}[A_5A_6],\\ \rho_{56}&=-\Theta_{54}[A_4A_6]-\Theta_{55}[A_5A_6],\\ \rho_{47}&=-\Theta_{44}[A_4A_7]-\Theta_{45}[A_5A_7],\\ \rho_{57}&=-\Theta_{54}[A_4A_7]-\Theta_{55}[A_5A_7],\end{aligned} \qquad (2.28)$$

вторинно перетворені коефіцієнти матимуть вигляд

$$\mathcal{A}_{6i}'=\mathcal{A}_{4i}\rho_{46}+\mathcal{A}_{5i}\rho_{56}+\mathcal{A}_{6i},$$
$$\mathcal{A}_{7i}'=\mathcal{A}_{4i}\rho_{47}+\mathcal{A}_{5i}\rho_{57}+\mathcal{A}_{7i},\ i=1\div n+n1+n2. \qquad (2.29)$$

Вільні члени w_6'' і w_7'' отримують з використанням формул

$$w_6''=w_4'\rho_{46}+w_5'\rho_{56}+w_6',$$
$$w_7''=w_4'\rho_{47}+w_5'\rho_{57}+w_7'. \qquad (2.30)$$

Корелати обчислюють за формулами

$$k_6=-\Theta_{66}w_6''-\Theta_{67}w_7'', \qquad (2.31)$$
$$k_7=-\Theta_{76}w_6''-\Theta_{77}w_7''.$$

Таким чином, способом Больца одержують поправки

$$v_i=a_{1i}k_1+a_{2i}k_2+a_{3i}k_3+\mathcal{A}_{4i}k_4+\mathcal{A}_{5i}k_5+\mathcal{A}_{6i}'k_7+\mathcal{A}_{7i}'k_7,$$

що лінійно розкладені за вільними членами умовних рівнянь.

2.5 Параметричний спосіб з надлишковими невідомими

Розглянемо один із способів зрівнювання геодезичних побудов, що є видозміненням параметричного способу. Він використовується для таких побудов, при яких виміряні елементи можуть бути зображені не тільки через необхідні невідомі, але й через невідомі, що зв'язані з необхідними декотрими математичними співвідношеннями. Такий випадок визначення значень u невідомих із n рівнянь поправок і r умовних рівнянь виникає при зрівнюванні напрямів способом координат у тріангуляційній мережі, що має тверді дирекційні кути та сторони. Припустимо, що при цьому вибрано невідомі t_ψ^* $(\psi=1\div u)$, що зв'язані незалежними один від одного рівняннями:

$$\begin{cases} \varphi_1(t_1^*,\ t_2^*,\dots,t_u^*)=0; \\ \varphi_2(t_1^*,\ t_2^*,\dots,t_u^*)=0; \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_r(t_1^*,\ t_2^*,\dots,t_u^*)=0. \end{cases}$$

Кожна надлишкова невідома приводить до створення одного незалежного рівняння цього типу.

Можливі два варіанти розв'язання поставленої задачі. Перший варіант використовує перехід до класичного параметричного способу. Якщо є n рівнянь поправок

$$v_i=a_{i1}\tau_1+a_{i2}\tau_2+\dots+a_{iu}\tau_u+l_i \qquad (i=1\div n),$$

де τ_ψ - поправки до приблизних значень невідомих, v_i - поправки до виміряних величин, $a_{i\psi}$ - коефіцієнти, l_i - вільні члени, та r умовних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{11}\tau_1+\dots+\mathcal{A}_{1u}\tau_u+w_1=0, \\ \mathcal{A}_{21}\tau_1+\dots+\mathcal{A}_{2u}\tau_u+w_2=0, \\ \dots\dots\dots \\ \mathcal{A}_{r1}\tau_1+\dots+\mathcal{A}_{ru}\tau_u+w_r=0, \end{cases} \qquad (2.32)$$

де $u>r$ і $n>(u-r)$, $\mathcal{A}_{j\psi}=(\partial\varphi_j/\partial\tau_\psi)_0$ $(j=1\div r)$ - коефіцієнти, w_j – нев'язки, то виключають r невідомих з загальної кількості u невідомих. Для цього розв'язують умовні рівняння та знаходять

$$\begin{cases} \tau_1=\mathcal{A}'_{11}\tau_{1+r}+\ldots+\mathcal{A}'_{1u}\tau_u+w_1, \\ \tau_2=\mathcal{A}'_{21}\tau_{1+r}+\ldots+\mathcal{A}'_{2u}\tau_u+w_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_r=\mathcal{A}'_{r1}\tau_{1+r}+\ldots+\mathcal{A}'_{ru}\tau_u+w_r, \end{cases} \qquad (2.33)$$

де $\mathcal{A}_{j\psi}'$ – перетворені при цьому коефіцієнти.

Підставляючи невідомі $\tau_1,\tau_2 ,\ldots,\tau_r$ у первинні рівняння поправок, отримаємо n рівнянь поправок з $(k-r)$ невідомими, на основі яких складаємо нормальні рівняння. З рішення цих рівнянь знаходимо невідомі τ_{1+r}, τ_{2+r}, … , τ_u. За раніше складеними рівняннями визначаємо невідомі $\tau_1,\tau_2 ,\ldots,\tau_r$.

Перший варіант використовують тоді, коли кількість умовних рівнянь є невеликою та зручно за допомогою таких рівнянь зображати вибрані невідомі.

Другий варіант використовується при малій кількості параметричних рівнянь поправок. При цьому здійснюється перехід до способу умов. Тоді виключають з $(n+r)$ рівнянь u невідомих і встановлюють $(n+r-u)$ корелатних рівнянь поправок.

2.6 Спосіб умов з додатковими невідомими

У ряді випадків умовні рівняння спрощуються при введенні додаткових невідомих. Це збільшує кількість умовних рівнянь, але в обчислювальному значенні робить розв'язання задачі зрівнювання менш складним. При цьому зрівнені значення елементів геодезичної побудови x^*_i $(i=1\div n)$ і додаткових невідомих y^*_h $(h=1\div s)$ (s - кількість додаткових невідомих) будуть зв'язані умовними рівняннями

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1^*,x_2^*, \ldots ,x_n^*, y_1^*,y_2^*, \ldots ,y_s^*)=0, \\ \varphi_2(x_1^*,x_2^*, \ldots ,x_n^*, y_1^*,y_2^*, \ldots ,y_s^*)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r(x_1^*,x_2^*, \ldots ,x_n^*, y_1^*,y_2^*, \ldots ,y_s^*)=0. \end{cases} \qquad (2.34)$$

Ваги p_i $(i=1\div n)$ виміряних елементів є відомими.

Умовні рівняння поправок визначаються за формулами

$$
\begin{cases}
[a_1v]+\mathcal{A}_{11}\tau_1+\ldots+\mathcal{A}_{1s}\,\tau_s+w_1=0,\\
[a_2v]+\mathcal{A}_{21}\tau_1+\ldots+\mathcal{A}_{2s}\,\tau_s+w_2=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[a_rv]+\mathcal{A}_{r1}\tau_1+\ldots+\mathcal{A}_{rs}\,\tau_s+w_r=0,
\end{cases}
\tag{2.35}
$$

де $a_{ji}=(\partial\varphi_j/\partial x_i)_0$, $\mathcal{A}_{jh}=(\partial\varphi_j/\partial t_h)_0$, $w_j=\varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s)$, $y_1^*=y_1+\tau_1$, $y_2^*=y_2+\tau_2$, ... , $y_s^*=y_s+\tau_s$,τ_h – поправки до приблизних значень необхідних невідомих.

Система $(r+s)$ нормальних рівнянь з невідомими $k_1, k_2, \ldots, k_r, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ має вигляд:

$$
\begin{cases}
[qa_1a_1]k_1+\ldots+[qa_1a_r]\,k_r+\mathcal{A}_{11}t\tau_1+\ldots+\mathcal{A}_{1s}t\tau_s+w_1=0,\\
[qa_1a_2]k_1+\ldots+[qa_2a_r]\,k_r+\mathcal{A}_{21}t\tau_1+\ldots+\mathcal{A}_{2s}t\tau_s+w_2=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[qa_1a_r]k_1+\ldots+[qa_ra_r]\,k_r+\mathcal{A}_{r1}t\tau_1+\ldots+\mathcal{A}_{rs}t_s+w_r=0,\\
\mathcal{A}_{11}k_1+\ldots+\mathcal{A}_{r1}k_r=0,\\
\mathcal{A}_{12}k_1+\ldots+\mathcal{A}_{r2}k_r=0,\\
\ldots\ldots\ldots\\
\mathcal{A}_{1s}k_1+\ldots+\mathcal{A}_{rs}k_r=0,
\end{cases}
\tag{2.36}
$$

де $q_i=1/p_i$.

Після розв'язання системи рівнянь отримаємо поправки

$$v_i=q_ia_{1i}k_1+q_ia_{2i}\,k_2+\ldots+q_ia_{ri}\,k_r.$$

Цей спосіб зрівнювання геодезичних побудов має загальний характер у тому значенні, що усі інші способи зрівнювання є його окремими випадками. Окрім наведеного безпосереднього розв'язання поставленої задачі можливі інші прийоми. Для переходу до способу умов виключають невідомі τ_h, тобто виражають їх через поправки v_i. Тоді виникає необхідність розв'язання умовних рівнянь, що зв'язують поправки v_i. Для переходу до параметричного способу зрівнювання виражають поправки v_i через невідомі τ_h. Спосіб зрівнювання з додатковими невідомими використовують, коли $r>u$ та $n>r-u$. При переході до способу умов розв'язують $(r-u)$ умовних рівнянь, а при переході до параметричного способу - $(u+n-r)$ рівнянь поправок. Якщо $r=u$, то зрівнювання не потрібне. У цьому випадку вважають, що поправки v_i дорівнюють нулеві та рівняння розв'язуються відносно u невідомих. При $r<u$ розв'язок задачі стає невизначеним. Якщо в системі заданих рівнянь випустити частину членів,

то отримаємо інші способи зрівнювальних обчислень. Виключаючи члени з невідомими τ_h, отримують умовні рівняння. Виключаючи члени з поправками v_i, крім однієї, та залишивши в різних рівняннях різні поправки v_i, приходимо до параметричного способу, в якому $r=n$. Якщо $r<n$, то для кожної поправки v_i не можна скласти окремого рівняння і слід декотрі v_i відносити до невідомих. У випадку $r>n$ первинні рівняння розподіляють на дві групи. У кожному рівнянні першої групи повинно бути по одній поправці v_i та невідомі t_h $(h=1\div s)$. У другій групі випускають поправки v_i. В цьому випадку маємо параметричний спосіб з умовними рівняннями.

Використовується спосіб умов з додатковими невідомими для зрівнювання складних геодезичних побудов – тріангуляційних і полігонометричних мереж. Додатковими невідомими є координати, дирекційні кути, вихідні сторони на перетині рядів тріангуляції. Ця система умовних рівнянь розподіляється на слабо зв'язані між собою частини. Загальними для цих частин є додаткові невідомі. При визначенні в лінійно-кутових мережах систематичних похибок вимірювання сторін використовується спосіб умов з додатковими невідомими. Таким способом можна скористатись для виправлення похибок у коефіцієнтах рівнянь поправок та умовних рівнянь, що виникли при їх складанні без повторного розв'язання системи нормальних рівнянь.

Спосіб умов з додатковими невідомими є особливо зручним при сумісному зрівнюванні комбінованих геодезичних мереж (тріангуляція, трилатерація, полігонометрія та засічки). Цей спосіб є основою загального алгоритму, що є придатним до різних видів геодезичних побудов.

2.7 Параметричний спосіб із залежними параметрами

У деяких випадках при зрівнюванні зручно виразити виміряні величини не тільки через параметри $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_u^*$, а і через надлишкові невідомі. У такому випадку використовується параметричний спосіб із залежними параметрами. На відміну від класичного параметричного способу мають місце математичні зв'язки типу

$$\varphi_h(t_1^*,t_2^*,\ldots,t_u^*)=0 \qquad (h=1\div s), \tag{2.37}$$

де $t_\psi^*=t_\psi+\tau_\psi$, τ_ψ – приблизні значення невідомих, s – кількість надлишкових невідомих.

Зрівнені значення виміряних величин x_i^* $(i=1\div n$, n – кількість виміряних величин$)$ виражають як функції невідомих параметрів

$$x_i^*=f_i(t_1^*,t_2^*,\ldots,t_u^*) \; (i=1\div n). \tag{2.38}$$

Таким чином, вибирають $m=u+s$ невідомих, що утворюють вектор $\tau=(\tau_1, \tau_2, \tau_u)$, який має відповідати математичній умові

$$B\tau+W=0, \tag{2.39}$$

де

$$b_{h\psi}=(\partial f_h/\partial t_\psi)_0,$$
$$w_h=\varphi_h(t_1,t_2,\ldots t_u).$$

У параметричному способі із залежними параметрами використовується зведена до лінійного вигляду система рівнянь поправок і умовних рівнянь

$$\begin{cases} V=A\tau+l, \\ B\tau+W=0, \end{cases} \tag{2.40}$$

де $a_{i\psi}=(\partial f_i/\partial t_\psi)_0$, $w_h=\varphi_h(t_1,t_2,\ldots t_u)$, $l_i=f_i(t_1,t_2,\ldots,t_u)$, v_i - поправки до виміряних величин.

Кількість умовних рівнянь дорівнює $s=m-u$ і не дорівнює кількості надлишкових вимірів.

Система нормальних рівнянь тоді має такий вигляд:

$$\begin{cases} N_{11}\tau_1+N_{12}\tau_2+\ldots+N_{1u}\tau_u+B_{11}k_1+\ldots+B_{s1}k_s+l_1=0, \\ N_{21}\tau_1+N_{22}\tau_2+\ldots+N_{2u}\tau_u+B_{12}k_1+\ldots+B_{s2}k_s+l_2=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_{u1}\tau_1+N_{u2}\tau_2+\ldots+N_{uu}\tau_u+B_{1u}k_1+\ldots+B_{su}k_s+l_u=0, \\ B_{11}\tau_1+B_{12}\tau_2+\ldots+B_{1u}\tau_u+ \qquad w_1=0, \\ B_{21}\tau_1+B_{22}\tau_2+\ldots+B_{2u}\tau_u+ \qquad w_2=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{s1}\tau_1+B_{s2}\tau_2+\ldots+B_{su}\tau_u+ \qquad w_s=0, \end{cases} \tag{2.41}$$

де $N=A^TPA$.

Із розв'язання системи нормальних рівнянь визначають поправки τ_ψ до наближених значень t_ψ невідомих параметрів. Зрівнювані значення параметрів обчислюють за формулою

$$t_\psi^*=t_\psi+\tau_\psi.$$

За параметричними рівняннями поправок визначають поправки до виміряних величин

$$v_i=a_{i1}\tau_1+a_{i2}\tau_2+\ldots+a_{iu}\tau_u+l_i.$$

Зрівнені значення виміряних величин обчислюють за формулою

$$x_i^*=x_i+v_i.$$

2.8 Зрівнювання за методом вузлів у параметричному способі

Професор В.В. Попов запропонував спрощені правила обчислень при зрівнюванні нівелірних і полігонометричних мереж параметричним способом.

Попередньо складається схема мережі. На схемі позначають відомі константи і виміряні величини.

Для нівелірної мережі обчислюють ваги вимірів за формулою

$$p_i=c/z_i \qquad (i=1\div n),$$

де c – постійний коефіцієнт, z_i - кількість штативів у ході нівелірної мережі або довжина ходу. Ваги p_i також позначають на схемі. Вибирають параметри $T_1,T_2,\ldots,T_u$ і обчислюють їхні наближені значення $t_1,t_2,\ldots,t_u$ через значення відомих констант і через виміряні величини за найкоротшим шляхом. Параметричні рівняння поправок не складають, а обчислюють лише вільні члени l_i за формулою

$$l_i= f_i\,(t_1,t_2,\ldots,t_u) -x_i \qquad (i=1\div n),$$

де x_i – значення виміряних величин, $f_i\,(t_1,t_2,\ldots,t_u)$ - значення виміряних перевищень, обчислених через наближені значення параметрів. Вільні члени l_i позначають на схемі. Кількість нормальних рівнянь u дорівнює кількості невідомих параметрів $t_1,t_2,\ldots,t_u$, а система нормальних рівнянь має вигляд

$$N\tau+E=0, \qquad (2.42)$$

де $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_u)$ – вектор поправок до приблизних значень необхідних невідомих. Елементи $N_{\theta\psi}$ матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь обчислюють за спрощеним правилом:

1) діагональні елементи $N_{\theta\theta}$ дорівнюють сумі ваг ходів, що сходяться до вузлової точки θ;

2) недіагональні елементи $N_{\theta\psi}$ дорівнюють вазі ходу з протилежним знаком, що з'єднує вузлові точки θ і ψ.

Перетворені вільні члени нормальних рівнянь e_i обчислюють як суму добутку вільних членів l_i на відповідні ваги p_i ходів, що сходяться до вузлової точки i, причому знак добутку $l_i p_i$ зберігається, коли хід спрямований від вузлової точки, і змінюється на протилежний, коли хід має напрямок від вузлової точки.

Далі користуються класичним параметричним способом.

При зрівнюванні мереж полігонометрії способом вузлів окремо зрівнюють кути та прирости координат . Ваги вимірів обчислюють за формулою

$$p_i = c/z_i \qquad (i=1 \div n),$$

де z_i – кількість кутів в окремих ходах при зрівнюванні кутів або довжини при зрівнюванні приростів координат.

Після визначення зрівнюваних значень шуканих параметрів окремі ходи мереж нівелювання та полігонометрії зрівнюють як розімкнені.

2.9 Зрівнювання за методом полігонів у корелатному способі

Аналогічно параметричному способу професор В.В. Попов запропонував спрощення обчислень при зрівнюванні нівелірних і полігонометричних мереж.

Попередньо складають схему геодезичної мережі, на якій позначають константи та виміряні величини.

Для нівелірної мережі обчислюють ваги вимірювань за формулою

$$p_i = c/z_i \qquad (i=1 \div n),$$

де c – постійний коефіцієнт, z_i - кількість штативів у ході нівелірної мережі або довжина ходу. Ваги p_i також позначають на схемі. Визначають кількість умовних рівнянь за формулою

$$r = n + (R-1),$$

де n – кількість замкнених полігонів, R - кількість вихідних реперів.

Полігони нумерують, стрілками показують напрям обходу полігона. Згідно з рисунком мережі нівелювання для виділених полігонів складають умовні рівняння поправок. Їхні коефіцієнти набувають значення з множини $\{-1;0;1\}$. Коефіцієнт є додатним, коли напрям ходу збігається з напрямом обходу полігона, а від'ємним – коли не збігається. Треба зауважити, що не можна виділяти полігон, який складається із двох або більше замкнених полігонів, і складати для нього умовне рівняння поправок, бо воно буде залежним.

Коефіцієнти $N_{\theta\psi}$ нормальних рівнянь визначають за допомогою рисунка мережі за правилами:

1) діагональний елемент $N_{\psi\psi}$ дорівнює сумі обернених ваг перевищень ходів полігона з номером ψ;

2) недіагональні елементи $N_{\theta\psi}$ дорівнюють оберненим вагам перевищень, що відповідають загальним ходам для двох полігонів з номерами θ і ψ, і мають додатний знак, коли напрями обходу полігонів збігаються, і від'ємний – коли вони не збігаються.

Далі використовують класичний корелатний спосіб.

При зрівнюванні мереж полігонометрії методом полігонів окремо зрівнюють кути та прирости координат.

Ваги при зрівнюванні кутів визначають через кількість кутів, а при зрівнюванні приростів координат - через довжини ходів.

Після визначення поправок до перевищень ходів нівелірних мереж, до кутів і приростів координат мереж полігонометрії виконують зрівнювання розімкнених ходів між вихідними пунктами і вузловими точками та між вузловими точками.

2.10 Зрівнювання з врахуванням похибок вихідних даних

У переважній більшості випадків при зрівнюванні допускають, що вихідні дані (координати та висоти пунктів, вихідні сторони та дирекційні кути) безпомилкові, але вони отримані за результатами спостережень або із зрівнювання геодезичних мереж більш високої точності (класів, розрядів) і тому обтяжені похибками. Якщо при постановці задачі зрівнювання не можна нехтувати похибками вихідних даних, то виникає задача зрівнювання з врахуванням похибок вихідних даних. Це дозволяє дослідити рівень їхнього впливу на складові елементи геодезичної мережі.

Розглянемо використання параметричного способу для цього випадку.

За наявності похибок вихідних даних кількість невідомих параметрів визначається за формулою

$$U=u+m,$$

де u – кількість невідомих шуканих параметрів, m - кількість невідомих параметрів вихідних даних.

Точні значення параметрів позначимо відповідно через $T_1,T_2,\dots,T_u$ і $Z_1,Z_2,\dots,Z_m$. Між ними має бути відсутнім функціональний зв'язок. Істинні значення результатів вимірів та їх параметри виражаються функціонально рівняннями зв'язку за формулою

$$X_i=f_i(T_1,T_2,\ldots,T_u,Z_1,Z_2,\ldots,Z_m), \tag{2.43}$$

де X_i – точні значення виміряних величин, причому кількість n усіх вимірів повинна бути більшою за величину $u+m$, тобто $n>u+m$.

Оскільки істинні значення виміряних величин і параметрів нам невідомі, то при зрівнюванні необхідно знайти такі зрівняні значення x_i^*, t_ψ^* і z_ψ^*, при яких будуть задовольнятись умови

$$\begin{cases} x_i^*=x_i+v_i=f_i(t_1^*,t_2^*,\ldots,t_u^*,z_1^*,z_2^*,\ldots,z_m^*)(i=1\div n), \\ z_\mu^*=z_\mu+\Delta z_\mu=\varphi_\mu(z_1^*,z_2^*,\ldots,z_m^*)(\mu=1\div m), \end{cases} \tag{2.44}$$

де n – кількість виміряних величин, v_i – поправки до виміряних величин, Δz_μ - поправки до z_μ.

Зрівнювані параметри t_ψ^* і t_ψ^* визначаються за формулами

$$\begin{gathered} t_\psi^*=t_\psi+\tau_\psi, \\ z_\mu^*=z_\mu+\Delta z_\mu, \end{gathered} \tag{2.45}$$

де t_ψ , z_μ – наближені значення параметрів, τ_ψ ,Δz_μ - поправки.

Рівняння поправок будуть мати вигляд

$$\begin{gathered} v_i=f_i(t_1^*,t_2^*,\ldots,t_u^*,z_1^*,z_2^*,\ldots,z_m^*)-x_i\,, \\ v^{(z)}{}_\mu=\varphi_\mu(z_1^*,z_2^*,\ldots,z_m^*). \end{gathered} \tag{2.46}$$

Параметричні рівняння поправок набувають такого вигляду:

$$\begin{gathered} v_i=a_{i1}\tau_1+a_{i2}\tau_2+\ldots+a_{iu}\tau_u+b_{i1}\Delta z_1+\ldots+b_{im}\Delta z_m+l_i, \\ v^{(z)}{}_\mu=c_{\mu 1}\Delta z_1+\ldots+c_{\mu m}\Delta z_m=\Delta z_\mu, \end{gathered} \tag{2.47}$$

де

$$\begin{gathered} a_{i\psi}=(\partial f_i/\partial t_\psi)_0, \quad b_{i\mu}=(\partial f_i/\partial z_\mu)_0, \\ c_{\mu\psi}=(\partial\varphi_\mu/\partial z_\psi)_0=0, \text{ якщо } \mu\neq\psi,\ c_{\mu\mu}=1, \\ l_i=f_i(t_1,t_2,\ldots,t_u,z_1,z_2,\ldots,z_m)-x_i. \end{gathered}$$

Система параметричних рівнянь поправок може бути зображена таким чином:

$$
\begin{cases}
v_1=a_{11}\tau_1+a_{12}\tau_2+\ldots+a_{1u}\tau_u+b_{11}\Delta z_1+\ldots+b_{1m}\Delta z_m+l_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n=a_{n1}\tau_1+a_{n2}\tau_2+\ldots+a_{nu}\tau_u+b_{n1}\Delta z_1+\ldots+b_{nm}\Delta z_m+l_n, \\
v^{(z)}{}_1= \qquad\qquad\qquad \Delta z_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v^{(z)}{}_m= \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta z_m.
\end{cases}
\qquad (2.48)
$$

Отримаємо систему нормальних рівнянь

$$
\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & \tilde{R}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \end{pmatrix} = 0, \qquad (2.49)
$$

де

$$
R_{11}=A^TPA, \quad R_{12}=A^TPB, \quad R_{21}=B^TPA,
$$
$$
\tilde{R}_{22}=R_{22}+P_z=B^TPB+P_z, \quad L_1=A^TPl, \; L_2=B^TPl,
$$

$\boldsymbol{P}$ – ваги виконаних вимірювань, матриця ваг вихідних даних має діагональний вигляд:

$$
\underset{m\times m}{P_z}= \begin{pmatrix} p^{(z)}{}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p^{(z)}{}_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & p^{(z)}{}_m \end{pmatrix}.
$$

Таким чином, використані матриці з розмірностями

$$
\underset{n\times k}{R_{11}}, \quad \underset{n\times m}{R_{12}}, \quad \underset{m\times n}{R_{21}}, \quad \underset{m\times m}{R_{22}}, \quad \underset{m\times m}{P_z}.
$$

Наведемо особливості зрівнювання геодезичних мереж із врахуванням похибок вихідних даних корелатним способом.

Рівняння зв'язку та умовні рівняння складають так само, як і в класичному корелатному способі. Вони включають як виміряні величини, та і вихідні дані та їхні поправки. Кількість їх дорівнює $r=n-u$, як і при безпомилкових вихідних даних. Таким чином, рівняння зв'язку буде мати вигляд

$$
\varphi_j(X_1,X_2,\ldots,X_n,Z_1,Z_2,\ldots,Z_m)=0, \qquad (2.50)
$$

де X_i $(i=1\div n)$ - істинні значення виміряних величин, Z_μ $(\mu=1\div m)$ - істинні значення вихідних даних.

Нев'язки математичних умов обчислюємо за формулою

$$w_j=\varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_n,z_1,z_2,\ldots,z_m). \qquad (2.51)$$

Умовні рівняння поправок мають вигляд

$$a_{j1}v_1+a_{j2}v_2+\ldots+a_{jn}v_n+c_{j1}vz_1+c_{j2}vz_2+\ldots+c_{jm}vz_m+w_j=0, \qquad (2.52)$$

де

$$a_{ji}=(\partial\varphi_j/\partial x_i)_0, \quad c_{j\mu}=(\partial\varphi_j/\partial z_\mu)_0,$$

Використовуємо корелатні рівняння поправок

$$v_i=q_i(a_{1i}k_1+a_{2i}k_2+\ldots+a_{ri}\,k_r), \qquad (2.53)$$
$$v^{(z)}_\mu=q^{(z)}_\mu(c_{1i}k_1+c_{2i}k_2+\ldots+c_{ri}\,k_r),$$

Отримаємо нормальні рівняння

$$NK+W=0, \qquad (2.54)$$

де

$$N=N_1+N_2, \qquad N_1=AP^{-1}A^T, \qquad N_2=CP^{-1}{}_ZC^T.$$

Із розв'язання нормальних рівнянь визначають корелати k_1, k_2, … , k_r, а за формулами (2.53) обчислюють поправки до виміряних величин v_i і до вихідних даних $v^{(z)}_\mu$.

Зрівнені значення обчислюють за формулами:

$$x_i^*=x_i+v_i,$$
$$z_\mu^*=z_\mu+v^{(z)}_\mu.$$

2.11 Зрівнювання з врахуванням залежних вимірів

У переважній більшості випадків безпосередні виміри елементів геодезичних мереж не є залежними, тобто корегованими. При зрівнюванні мереж можуть братися не самі вимірювання, а їхні функції.

Узагальнений спосіб зрівнювання з врахуванням корельованих елементів геодезичної мережі полягає в необхідності визначення матриці ваги вимірів P. На відміну від класичного параметричного способу (при незалежних вимірах), матриця **P** не буде діагональною. Її можна отримати із результатів обробки або попереднього зрівнювання вимірів.

Якщо фізично існує зв'язок між багатократно виміряними величинами, то мірою їхньої точності буде дисперсія або кореляційна матриця K_x:

$$K_x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & \sigma_2^2 & \dots & K_{2n} \\ . & . & . & . \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Прийнявши дисперсію одиниці ваги за σ^2_0, можна отримати вагу виміряних величин за формулою

$$p_i=\sigma^2_0/\sigma^2_i. \quad (2.56)$$

Якщо елементи мережі є функціями від безпосередньо виконаних вимірів, то для визначення вагової матриці використовують кореляційну матрицю.

При зрівнюванні для обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь при залежних параметрах необхідно використовувати недіагональну вагову матрицю **P**, тобто

$$N=A^TPA, \quad L'=A^TPL,$$

де $P=K^{-1}_x$.

Нормальні рівняння визначаються за формулою

$$N\tau+L'=0. \quad (2.57)$$

Усі інші обчислення виконують за формулами класичного параметричного способу зрівнювання.

У корелатному способі зрівнювання геодезичних мереж за наявності залежних вимірів виникає необхідність у визначенні матриці обернених ваг **Q**, яка теж не буде діагональною. Аналогічно параметричному способу обернену матрицю **Q** можна визначити за допомогою кореляційних матриць K_x, коли маємо окремі залежні вимірювання, та K_y – за наявності елементів, що є функціями інших виміряних величин. Різниця полягає у визначенні оберненої ваги вимірів. При цьому формула (2.56) зводиться до вигляду

$$p_i^{-1}=q_i=\sigma_i^2/\sigma_0^2. \quad (2.58)$$

Обернена вагова матриця залежних корельованих вимірів геодезичної мережі визначиться за формулою

$$Q=P^{-1}=\begin{pmatrix} P_1^{-1} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & P_2^{-1} & \dots & q_{2n} \\ . & . & . & . \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & P_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_2 & \dots & q_{2n} \\ . & . & . & . \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

де $q_{ij}=K_{ij}/\sigma^2_0$ – міри залежності між виміряними величинами.

Матриця $Q=P^{-1}$ використовується при обчисленні коефіцієнтів нормальних рівнянь за наявності залежних вимірювань. Коефіцієнти нормальних рівнянь визначаються за формулою

$$N=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_2 & \dots & q_{2n} \\ . & . & . & . \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

Нормальні рівняння мають вигляд

$$NK+W=0,$$

а рівняння поправок –

$$V=QA^TK.$$

Усі інші обчислення виконуються так само, як і в класичному корелатному способі зрівнювання.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Видуев, Н. Г. Математическая обработка геодезических измерений [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. Г. Видуев, А. Г. Григоренко. – К.: Вища шк., 1978. – 376 с.

2. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань [Текст] : навч. посіб. для вищ. навч. закл. / П. М. Зазуляк, В. І. Гавриш, Е. М. Євсєєва, М. Д. Йосипчук; під заг. ред. В. І. Гавриш. - Л.: Растр-7, 2007. – 407 с.

3. Войтенко, С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів [Текст] : навч. посіб. для вищ. навч. закладів / С. П. Войтенко. - К.: КНУБА, 2005. – 235 с.

4. Маркузе, Ю. И. Техника вычислений в геодезии [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Маркузе, В. В. Голубев. - М.: Недра, 1980. – 121 с.

5. Гайдаев, П. А. Математическая обработка геодезических сетей [Текст] / П. А. Гайдаев. - М.: Недра, 1977. – 288 с.

6. Гайдаев, П. А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст] : учебник для вузов / П. А. Гайдаев, В. Д. Большаков; под. ред. Б. С. Кузьмина и В. Е. Гмурмана. - М.: Недра, 1969. – 317 с.

ЗМІСТ

Вступ 3
1 Задачі та основні способи зрівнювання геодезичних побудов . 3
1.1 Корелатний спосіб зрівнювання 5
1.2 Параметричний спосіб зрівнювання 7
1.3 Оцінювання точності за матеріалами зрівнювання 9
2 Видозмінені способи зрівнювання геодезичних побудов 11
2.1 Групові способи розв'язання умовних рівнянь 11
2.2 Спосіб Крюгера 12
2.3 Спосіб Урмаєва - Крюгера 15
2.4 Спосіб Больца 17
2.5 Параметричний спосіб з надлишковими невідомими . . . 21
2.6 Параметричний спосіб з додатковими невідомими 22
2.7 Параметричний спосіб з залежними параметрами 24
2.8 Зрівнювання за методом вузлів у параметричному способі 26
2.9 Зрівнювання за методом полігонів у корелатному способі 27
2.10 Зрівнювання з врахуванням похибок вихідних даних . . . 28
2.11 Зрівнювання з врахуванням залежних вимірів 31
Бібліографічний список 34

Навчальне видання

Михайлова Віра Георгіївна

ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Редактор Є.О. Александрова

Зв. план, 2011
Підписано до видання 25.07.2011
Ум. друк. арк. 2. Обл.- вид. арк. 2,25. Електронне видання

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова,17
http://www.khai.edu
Видавничий центр „ХАІ"
61070, Харків-70, вул. Чкалова,17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК№391, видане Державним комітетом інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України від 30.03.2001 р.