УДК 624.078.43 С.С. Куреннов, канд. техн. наук

КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОЙ БАЛКИ. МОДЕЛЬ ГОЛАНДА–РЕЙССНЕРА

Существует несколько математических моделей односрезного клеевого соединения, позволяющих получить аналитическое решение в замкнутом виде. Исторически первой и наиболее простой является модель Фолькерсена. Более строгая постановка задачи дается в известной работе Голанда и Рейсснера [1]. Харт-Смит обобщил этот подход на вязкоупругое и нелинейно-упругое поведение клеевой прослойки [2]. А.Л. Брушковским и А.И. Макеевым [3] дана вариационная формулировка и получено численно-аналитическое решение задач для соединений с переменными или кусочно-однородными параметрами. Подход Голанда и Рейсснера использован для расчета соединений с трещинами в клее и слоями разной длины [4, 5] (несмотря на название задача ставится в линейной постановке).

Одним из направлений развития теории клеевых соединений являются динамические задачи. Актуальность этого направления обусловлена возникающими в ходе эксплуатации авиационной техники динамическими нагрузками и высокими значениями динамических напряжений, которые могут в несколько раз превышать статические [6]. Ряд задач описывает теория составных балок Ржаницына [7], однако условие равенства углов поворота сечений несущих слоев существенно ограничивает применение этой модели. Поэтому возникает задача обобщения модели Голанда и Рейсснера, в котором учитывались бы силы инерции. Рассмотрим дифференциальный элемент соединения, рис. 1.

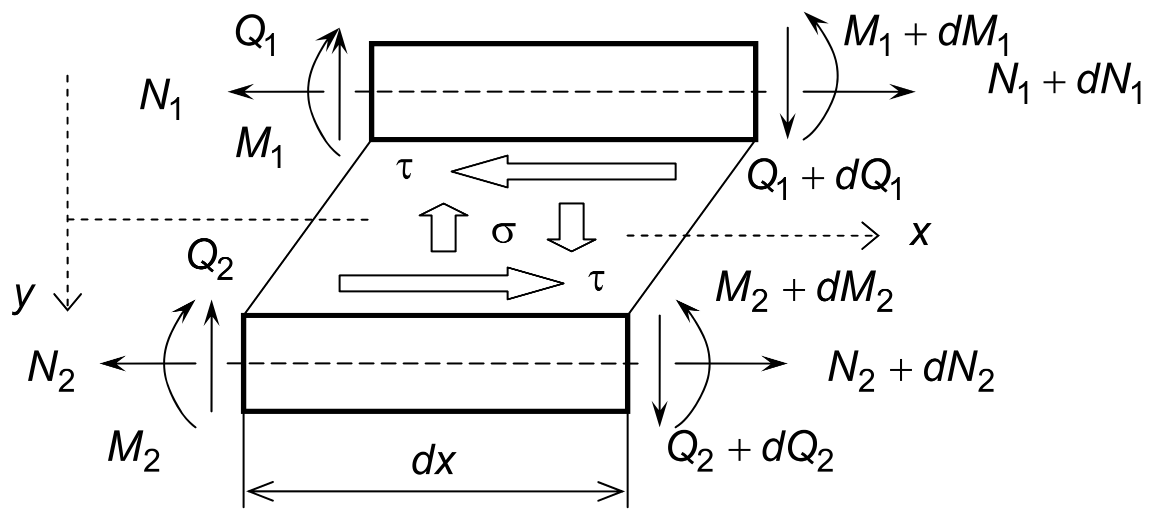

Рисунок 1 – Дифференциальный элемент соединения

Считаем, что углы поворота сечений малы, поэтому $\varphi_i \approx \dfrac{\partial w_i}{\partial x}$.

Массой клеевой прослойки пренебрегаем ввиду ее относительно малой толщины. Уравнения равновесия элементов слоев имеют вид

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} - \tau = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\rho_1\delta_1; \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} + \tau = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\rho_2\delta_2;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \sigma = \rho_1\delta_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}; \qquad \frac{\partial Q_2}{\partial x} - \sigma = \rho_2\delta_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\delta_1}{2}\tau - Q_1 = \rho_1 J_1\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\partial t^2}; \qquad \frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{\delta_2}{2}\tau - Q_2 = \rho_2 J_2\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\partial t^2}.$$

Дифференцируя последние уравнения по x и исключая производные от поперечных сил, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} &= \frac{\delta_1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x} - \sigma + \rho_1\delta_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \rho_1 J_1\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2\partial t^2};\\ \frac{\partial^2 M_2}{\partial x^2} &= \frac{\delta_2}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x} + \sigma + \rho_2\delta_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \rho_2 J_2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\partial t^2}.\end{aligned} \tag{2}$$

Касательные напряжения в клее полагаем равномерно распределенными по толщине и пропорциональными разности продольных перемещений внутренних сторон соединяемых слоев [1, 4, 5]:

$$\tau = \frac{1}{P_c}\left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2}\frac{dw_1}{dx} - \frac{\delta_2}{2}\frac{dw_2}{dx}\right), \tag{3}$$

где x_i – продольное перемещение точек на нейтральной оси слоёв; P_c – податливость соединительного слоя, например, в простейшем случае $P_c = \delta_c G_c^{-1}$ (δ_c и G_c соответственно толщина и модуль сдвига соединительного слоя).

В модели Ржаницына [7] полагается, что соединяемые слои могут перемещаться относительно друг друга только в продольном направлении. Гипотеза о равномерности напряжений по толщине и линейности физического закона распространена и для вертикальных перемещений (Голланд и Рейсснер [1]). Нормальные напряжения полагаются пропорциональными разности поперечных перемещений слоев:

$$\sigma = K(w_2 - w_1), \tag{4}$$

где K – коэффициент упругости соединительного слоя (в первом приближении $K = E_c\delta_c^{-1}$).

Приближенные уравнения прогиба балок имеют вид

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = -\frac{M_i}{D_i}, \tag{5}$$

где D_i – изгибная (или цилиндрическая) жесткость. Пренебрегая влиянием на прогиб продольных усилий в слое, упрощаем задачу и избавляемся от нелинейности в разрешающей системе дифференциальных уравнений.

Дважды дифференцируя (5) и используя уравнения (2) получаем

$$\begin{aligned} D_1\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} &= -\frac{\delta_1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x}+\sigma-\rho_1\delta_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}+\rho_1 J_1\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2\partial t^2};\\ D_2\frac{d^4 w_2}{dx^4} &= -\frac{\delta_2}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x}-\sigma-\rho_2\delta_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}+\rho_2 J_2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\partial t^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Первые два уравнения равновесия (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}=\frac{\tau}{B_1}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\frac{\rho_1\delta_1}{B_1};\qquad \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x}=-\frac{\tau}{B_2}+\frac{\rho_1\delta_1}{B_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \tag{7}$$

где B_i - жесткость соединяемых слоев на растяжение-сжатие (для однородного слоя $B_i=\delta_i E_i$).

Используя кинематические соотношения $\frac{\partial u_i}{\partial x}=\varepsilon_i$, уравнения (7) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\frac{\tau}{B_1}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\frac{\rho_1\delta_1}{B_1};\qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=-\frac{\tau}{B_2}+\frac{\rho_1\delta_1}{B_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Заменяя σ в (6) на выражение (4), получаем систему из 5 уравнений в частных производных (3), (6) и (8) относительно 5 неизвестных: τ, u_1, u_2, w_1, w_2:

$$\begin{cases} D_1\dfrac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+\dfrac{\delta_1}{2}\dfrac{\partial\tau}{\partial x}-K(w_2-w_1)+\rho_1\delta_1\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}-\rho_1 J_1\dfrac{\partial^4 w_1}{\partial x^2\partial t^2}=0;\\ D_2\dfrac{d^4 w_2}{dx^4}+\dfrac{\delta_2}{2}\dfrac{\partial\tau}{\partial x}+K(w_2-w_1)+\rho_2\delta_2\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}-\rho_2 J_2\dfrac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\partial t^2}=0;\\ \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}=(-1)^{k+1}\dfrac{\tau}{B_k}+\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\dfrac{\rho_k\delta_k}{B_k},\ k=1,2;\\ \tau=\dfrac{1}{P_c}\left(u_1-u_2-\dfrac{\delta_1}{2}\dfrac{dw_1}{dx}-\dfrac{\delta_2}{2}\dfrac{dw_2}{dx}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Постановка краевой задачи: Рассмотрим в качестве примера консольную балку длиной $2L$. Зададим следующие краевые условия:

$$u_1\big|_{x=-L}=0;\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=-L}=\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=L}=\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=L}=0; \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right|_{x=-L}=\left.\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\right|_{x=-L}=0;\ w_2\big|_{x=-L}=\left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=-L}=0; \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right|_{x=L}=\left.\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0;\ \left.\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\right|_{x=L}=\left.\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}\right|_{x=L}=0 \tag{12}$$

Приведенные краевые условия соответствуют схеме, показанной на рис. 2.

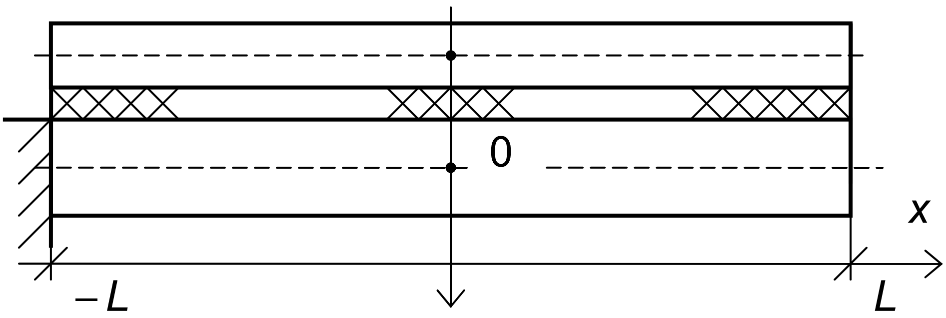

Рисунок 2 – Краевые условия

Краевые условия выбраны таким образом, чтобы продемонстрировать более широкие возможности модели Голанда–Рейсснера по сравнению с моделью составной балки Ржаницына, подход которого не позволяет решить данную задачу ввиду различия в краевых условиях для слоев слева при $x=-L$.

Начальные условия имеют вид

$$u_i\big|_{t=0}=\psi_i;\ w_i\big|_{t=0}=\chi_i;\ \left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=0}=\overline{\psi}_i;\ \left.\frac{\partial w_i}{\partial t}\right|_{t=0}=\overline{\chi}_i. \tag{13}$$

Решение задачи. Из системы (9) можно исключить касательные напряжения τ, в результате чего получим систему 4 дифференциальных уравнений в частных производных относительно продольных и поперечных перемещений. Введем вектор переменных $\vec{\mathbf{V}}=\begin{pmatrix}w_1 & w_2 & u_1 & u_2\end{pmatrix}^T$ и запишем полученную систему в матричном виде

$$\mathbf{A}_4^0\frac{\partial^4\vec{\mathbf{V}}}{\partial x^4}+\mathbf{A}_2^0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{V}}}{\partial x^2}+\mathbf{A}_1^0\frac{\partial\vec{\mathbf{V}}}{\partial x}+\mathbf{A}_0^0\vec{\mathbf{V}}+\mathbf{A}_0^2\frac{\partial^2\vec{\mathbf{V}}}{\partial t^2}+\mathbf{A}_2^2\frac{\partial^4\vec{\mathbf{V}}}{\partial x^2\partial t^2}=0, \tag{14}$$

где матрицы коэффициентов при частных производных

$$\mathbf{A}_4^0=\begin{pmatrix} P_cD_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & P_cD_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix};\ \mathbf{A}_2^0=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\delta_1^2 & -\delta_1\delta_2 & \cdot & \cdot \\ -\delta_1\delta_2 & -\delta_2^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4B_1P_c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4B_2P_c \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_1^0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \delta_1 & -\delta_1 \\ \cdot & \cdot & \delta_2 & -\delta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 & \cdot & \cdot \\ -\delta_1 & -\delta_2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_0^0=\begin{pmatrix} KP_c & -KP_c & \cdot & \cdot \\ -KP_c & KP_c & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_0^2=P_c\begin{pmatrix} \rho_1\delta_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \rho_2\delta_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\rho_1\delta_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\rho_2\delta_2 \end{pmatrix};\ \mathbf{A}_2^2=-P_c\begin{pmatrix} \rho_1 J_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \rho_2 J_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Как и в других задачах о связанных колебаниях, решение системы ищем в виде суперпозиции базисных гармонических колебаний [8], имеющих, например, следующий вид:

$$w_1=X_1(x)\sin\omega t;\quad w_2=X_2(x)\sin\omega t;$$
$$u_1=X_3(x)\sin\omega t;\quad u_2=X_4(x)\sin\omega t.$$

Подставляя в полученную систему и сокращая $\sin\omega t$, получаем

$$\mathbf{A}_4^0\frac{d^4\vec{\mathbf{X}}}{dx^4}+\left(\mathbf{A}_2^0-\omega^2\mathbf{A}_2^2\right)\frac{d^2\vec{\mathbf{X}}}{dx^2}+\mathbf{A}_1^0\frac{d\vec{\mathbf{X}}}{dx}+\left(\mathbf{A}_0^0-\omega^2\mathbf{A}_0^2\right)\vec{\mathbf{X}}=0,\quad (15)$$

где вектор $\vec{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & X_3 & X_4\end{pmatrix}^T$.

Решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (15) ищем в виде $\vec{\mathbf{X}}=C\,\vec{\mathbf{h}}e^{\lambda x}$, где C - произвольная постоянная. Записав систему в матричном виде, получим

$$\mathbf{A}\cdot\vec{\mathbf{h}}=0,$$

где

$$\mathbf{A}=\lambda^4\mathbf{A}_4^0+\left(\mathbf{A}_2^0\lambda^2-\omega^2\mathbf{A}_2^2\right)\lambda^2+\mathbf{A}_1^0\lambda+\left(\mathbf{A}_0^0-\omega^2\mathbf{A}_0^2\right);$$

$\vec{\mathbf{h}}$ **-** собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$.

Матрица $\mathbf{A}$ симметрична, что является следствием принципа взаимности Бетти, являющегося общим принципом линейной механики. Приравняв нулю определитель матрицы $\mathbf{A}$, получим дисперсионное соотношение, связывающее волновые числа λ и частоту ω. Это соотношение имеет вид многочлена 12-й степени по λ и 8-й степени по ω (четные степени), что согласуется с 12 краевыми условиями (10)–(12) и четырьмя модами колебаний. Решение системы (14) имеет вид

$$\vec{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{12} C_i \vec{\mathbf{h}}_i e^{\lambda_i x},$$

где $\vec{\mathbf{h}}_i$ - собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие волновым числам $\lambda_i(\omega)$ и частоте ω.

Для поиска собственных частот колебаний ω (и связанных с ними $\lambda_i(\omega)$) необходимо удовлетворить краевым условиям (10)-(12), что приводит к системе из 12 линейных однородных уравнений относительно $\vec{\mathbf{C}} = (C_1,..,C_{12})^T$, а коэффициенты получаемой системы зависят от ω:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{\mathbf{C}} = 0. \tag{16}$$

Система имеет нетривиальное решение, если $\det \mathbf{B}(\omega) = 0$. В явном виде выписать определитель затруднительно, поскольку он имеет 12-й порядок и все его коэффициенты ненулевые. Поэтому целесообразно применить численный метод решения данного уравнения. Например, путем перебора ω найти соответствующие $\vec{\mathbf{h}}$ и затем вычислить значения $\det \mathbf{B}(\omega)$. Расчеты показывают, что на различных интервалах ω данный определитель принимает либо только действительные, либо только мнимые значения, знак которых изменяется. Найдя интервал изменения знака определителя, для решения уравнения используем метод секущих. Получаем счетное множество собственных частот колебаний ω_i и соответствующих им собственных функций. Следовательно, общее решение системы (14) можем представить в виде

$$\vec{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{\infty} S_j \vec{\mathbf{X}}_j \sin \omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} R_j \vec{\mathbf{X}}_j \cos \omega_j t,$$

где S_j и R_j – коэффициенты, определяемые из начальных условий; $\vec{\mathbf{X}}_j$ – вектор собственных функций, который имеет вид

$$\vec{\mathbf{X}}_j = \sum_{i=1}^{12} q_{ij} \vec{\mathbf{h}}_{ij} e^{\lambda_{i,j} x}.$$

Здесь q_{ij} – i-я компонента собственного вектора матрицы $\mathbf{B}$ (16), соответствующего собственной частоте ω_j; $\vec{\mathbf{h}}_{ij}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий волновым числам $\lambda_{i,j}$, где $i = 1,\ldots,12$ - номер корня дисперсионного соотношения, соответствующего частоте ω_j.

В явном виде перемещения имеют вид

$$w_k = \sum_{j=1}^{\infty} S_j X_j^{(k)}(x) \sin\omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} R_j X_j^{(k)}(x) \cos\omega_j t ;$$
$$u_k = \sum_{j=1}^{\infty} S_j X_j^{(k+2)}(x) \sin\omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} R_j X_j^{(k+2)}(x) \cos\omega_j t , \qquad (17)$$

где $X_j^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{12} q_{ij}\, h_{ij}^{(k)} e^{\lambda_{i,j} x}$, соответственно $h_{ij}^{(n)}$ – n-я компонента вектора $\vec{\mathbf{h}}_{ij}$; $k = 1, 2$.

Удовлетворение начальным условиям. Чтобы удовлетворить начальным условиям (13) минимизируем среднеквадратическое отклонение перемещений (17) от (13), т.е. используем свойство ряда Фурье

$$F = \int_{-L}^{L} \left[\sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} R_j X_j^{(k)} - \chi_k \right)^2 + \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} R_j X_j^{(k+2)} - \psi_k \right)^2 \right] dx +$$
$$+ \int_{-L}^{L} \left[\sum_{k=1}^{2} \left(S_j \omega_j X_j^{(k)} - \overline{\chi}_k \right)^2 + \sum_{k=1}^{2} \left(S_j \omega_j X_j^{(k+2)} - \overline{\psi}_k \right)^2 \right] dx \to \min .$$

Условие минимума имеет вид $\dfrac{\partial F}{\partial R_i} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial S_i} = 0$. Ограничивая суммирование до бесконечности некоторым индексом N, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} \int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{N} R_j \sum_{k=1}^{4} \left(X_j^{(k)} X_i^{(k)} \right) dx = \int_{-L}^{L} \sum_{k=1}^{2} \left(X_i^{(k)} \chi_k + X_i^{(k+2)} \psi_k \right) dx; \\ \int_{-L}^{L} \sum_{j=1}^{N} S_j \sum_{k=1}^{4} \left(X_j^{(k)} X_i^{(k)} \omega_j \right) dx = \int_{-L}^{L} \sum_{k=1}^{2} \left(X_i^{(k)} \overline{\chi}_k + X_i^{(k+2)} \overline{\psi}_k \right) dx, \end{cases} \qquad (18)$$

$i = 1, \ldots, N.$

Собственные функции не ортогональны и поэтому матрица системы (18) не имеет нулевых элементов. Интегралы, определяющие коэффициенты системы, без труда вычисляются аналитически. Расчет же правых частей системы сопряжен с громоздкими вычислениями и поэтому их целесообразнее находить, применяя численные методы.

Модельная задача. Рассмотрим составную балку длиной 40 мм ($L = 0{,}02$ м); $\delta_1 = \delta_2 = 2$ мм; $E_1 = 70$ ГПа; $E_2 = 40$ ГПа; $\delta_c = 0{,}3$ мм; $\rho_1 = 4000$ кг/м^3; $\rho_2 = 2000$ кг/м^3; $G_c = 1{,}64$ ГПа; $E_c = 4{,}44$ ГПа. При этом полагаем слои однородными по толщине, т.е. $D_i = E_i \delta_i^3 / 12$,

$K = E_c / \delta_c$.

В качестве начальных условий в модельной задаче выберем положение $w_2(L,0) = \Delta_0$, где Δ_0 - некоторое перемещение, $\overline{\psi}_i = \overline{\chi}_i = 0$. Т.е. свободный конец был перемещен на Δ_0 и из этого положения отпущен. Скорости в начальный момент нулевые. Чтобы найти соответствующие перемещения слоев ψ_i, χ_i, необходимо решить стационарную задачу нахождения НДС соединения в рамках модели Голанда–Рейсснера. Этой задаче посвящено значительное число статей, например [4; 5], поэтому подробно останавливаться на решении данной задачи не будем. Назначим начальное перемещение $\Delta_0 = 1$ мм.

Поскольку начальные скорости нулевые, то из (18) следует, что $S_i = 0$, т.е. перемещения раскладываются в ряд по косинусам $\omega_j t$. Стержень совершает связанные продольно-поперечные колебания. При этом касательные напряжения в клее (3) обусловлены как продольными u_k, так и поперечными w_k перемещениями слоев. Максимальные касательные τ и нормальные σ напряжения в клее будут в окрестности жесткой заделки при $x = -L$. Покажем их на одном графике (рис. 3).

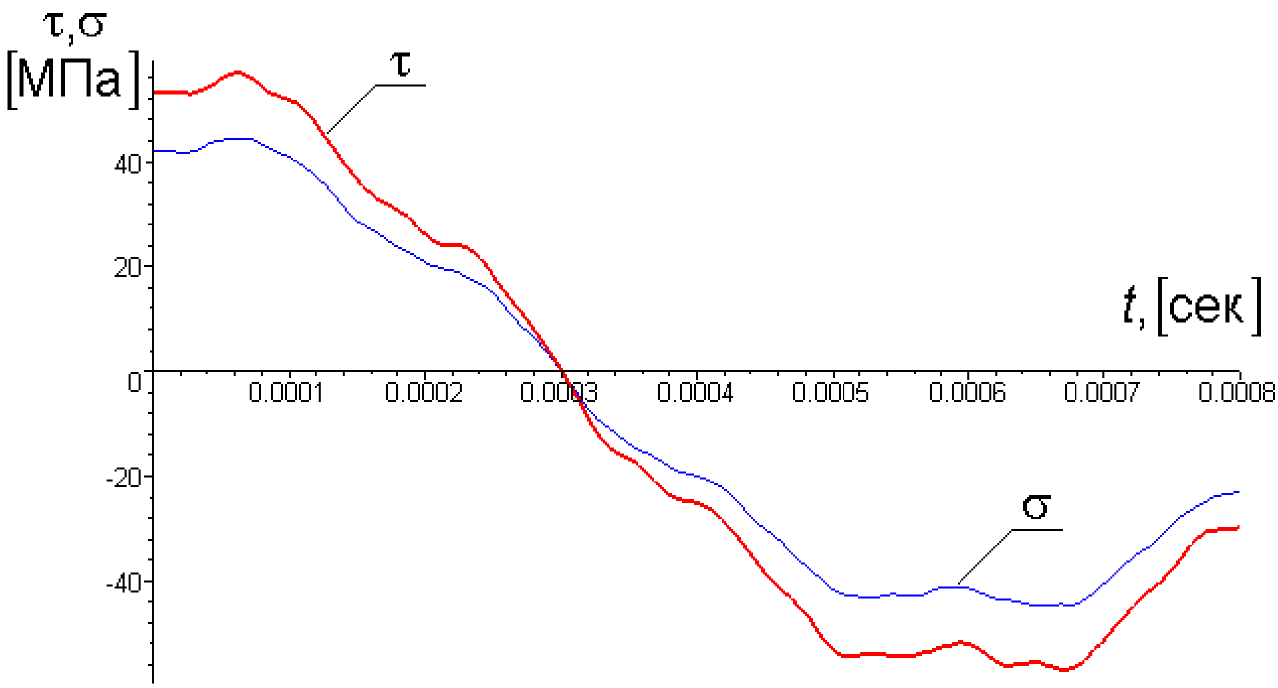

Рисунок 3 – Напряжения в клее в заделке

Выводы

В работе решена задача о свободных колебаниях составной балки по модели Голанда–Рейснера. Данная модель является развитием модели Ржаницына [7] и в дальнейшем может быть использована для решения широкого круга задач динамики соединений. Возможны следующие направления развития модели:

- учет диссипации энергии в клее и соединяемых деталях;
- учет массы клея;
- решение задач для соединений, имеющих слои разной длины;
- решение задач для соединений, состоящих из большего числа слоев (например, в комбинации с моделью Ржаницына [7], если некоторые слои имеют одинаковые краевые условия);
- исследование напряженного состояния соединений при продольном и поперечном ударах, осциллирующей нагрузке и т.д.

Кроме того, представляются целесообразными решение системы (9) с помощью численных методов, например дифференциально-разностного, и исследование динамических напряжений в соединениях с переменными параметрами.

Список использованных источников

1. Goland, M. The stresses in Cemented Joints [Текст] / M. Goland, E. Reissner // J. App. Mech., Vol. 11, 1944, A11-A27.

2. Hart-Smith, L.J. “Adhesive-Bonded Single-Lap Joints”, / Douglas Aircraft Co., NASA Langley Report CR 112236, 1973.

3. Макеев, А.И. Соединения тонкостенных элементов с переменными параметрами [Текст] / А.И. Макеев, А.Л. Брушковский // Прочность конструкций летательных аппаратов.- Х.: ХАИ, 1973. - С.124 - 134.

4. Tong L. Fully-coupled nonlinear analysis of single lap adhesive joints [Текст] / Q. Luo, L. Tong // International Journal of Solids and Structures, Vol. 44, 2007, pp. 2349-2370.

5. L.F.M. Da Silva (Ed) Modeling of Adhesively Bonded Joints [Текст] / Springer, 2008. – 335 p.

6. Курєннов, С.С. Напружений стан клейового з’єднання при поздовжньому пружному ударі зосередженої маси [Текст] / С.С. Курєннов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та «ХАИ» – Вып.3 (67). Х., 2011. – С. 98–105.

7. Ржаницын, А.Р. Составные стержни и пластины [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.

8. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни [Текст] / В.З. Власов М.: Физматгиз, 1959. - 574 с.

Поступила в редакцию 24.02.2012.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков