МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Конспект лекцій з курсу
«Елементарна математика»

Рівень вищої освіти: перший (молодший бакалавр)

Другий семестр: частина 2(після зміни розкладу)

Розробник: старший викладач каф. 405
Кальчук Н. Л

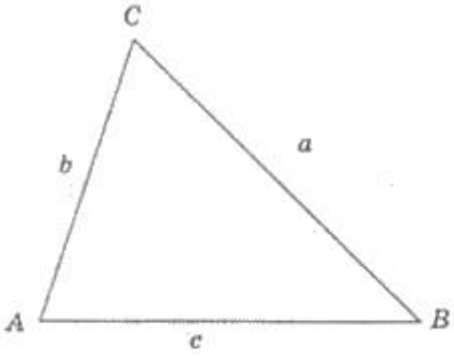
Харків «ХАІ» 2020

Лекція

Планіметрія. Типи трикутників та їх основні властивості.

Трикутником називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.

Точки називають вершинами трикутника, а відрізки — сторонами. На малюнку 1 зображено трикутник *ABC*. Його вершинами є точки *A*, *B* і *C*, а сторонами відрізки *AB*, *BC* і *CA*. Символом Δ можна заміняти слово «трикутник».



мал. 1

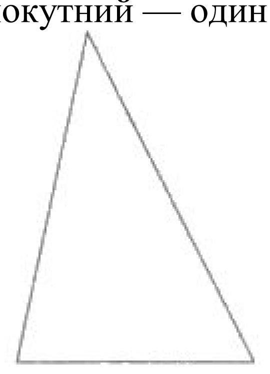
Кутами трикутника *ABC* називають кути *BAC*, *ABC* і *BCA*. Часто їх позначають однією буквою $\angle A, \angle B$ і $\angle C$. Сторони трикутника також можна позначити малими буквами латинського алфавіту *a*, *b* і *c* відповідно до позначення протилежних кутів.

Периметром трикутника називають суму довжин усіх сторін трикутника. Периметр позначають буквою *P*, наприклад, периметр трикутника *ABC*, позначають так: $P_{\Delta ABC}$. Маємо $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA$.

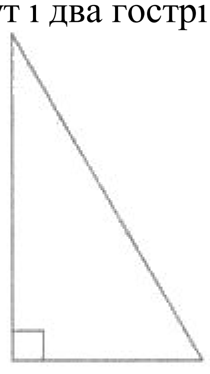
Приклад. Одна із сторін трикутника на 3 см менша за другу і у 2 рази менша за третю. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 27 см.

Розв'язання. Позначимо довжину першої сторони трикутника — x см, тоді довжина другої дорівнює $(x + 3)$ см, а третьої — $2x$ см. За умовою $x + (x + 3) + 2x = 27$; $4x = 24$; $x = 6$ см. Отже, перша сторона трикутника дорівнює 6 см, друга — 9 см, третя — 12 см.

Залежно від кутів розрізняють такі види трикутників: **гострокутні, прямокутні, тупокутні**. У гострокутного трикутника всі кути гострі (мал. 2), прямокутний трикутник має один прямий кут і два гострих (мал. 3), а тупокутний — один тупий кут і два гострі (мал. 4).



мал. 2

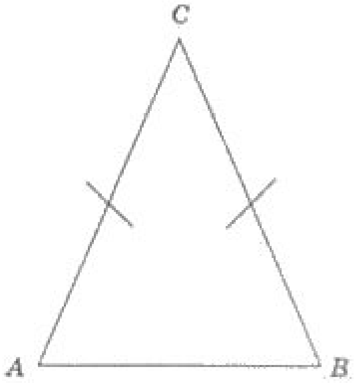


мал. 3

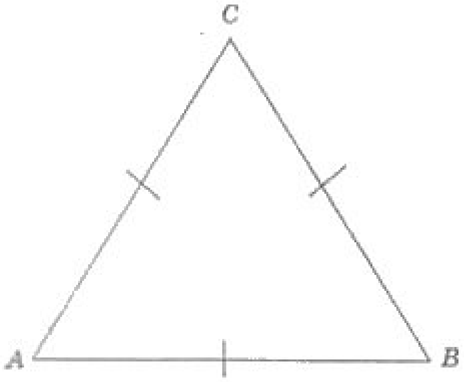
мал. 4

Залежно від довжин сторін розрізняють такі види трикутників: **різносторонній, рівнобедрений, рівносторонній**. У різносторонньому трикутнику довжини всіх сторін різні.

Трикутник називають **рівнобедреним**, якщо в нього дві сторони рівні. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами, а його третю сторону — основою. На малюнку 200 зображено рівнобедрений трикутник *ABC, AB* — його основа; *AC* і *BC* — бічні сторони.



мал. 5



мал. 6

Трикутник, всі сторони якого рівні, називають **рівностороннім** (мал. 6).

Властивість рівнобедреного трикутника: у рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні. На малюнку 5: $\angle A = \angle B$.

Всі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60°.

Ознака рівнобедреного трикутника: якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Легко зрозуміти, що якщо в трикутнику всі кути рівні, то він є рівностороннім.

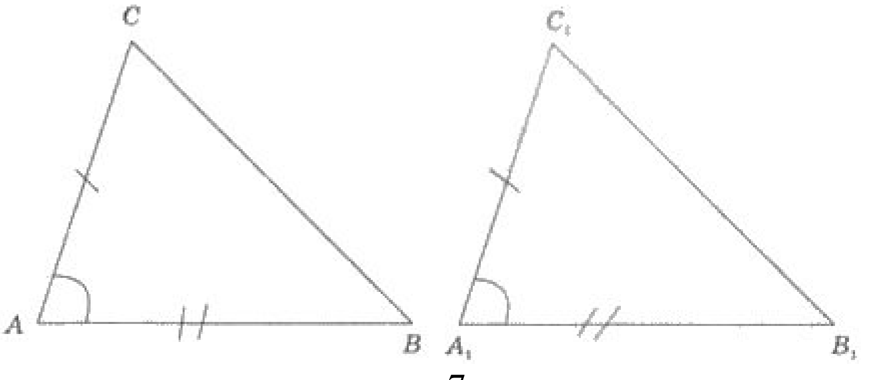
Приклад. Знайдіть бучну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 14 см, а основа дорівнює 4 см.

$$AC = CB = \frac{14-4}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

Розв’язання (мал. 5).

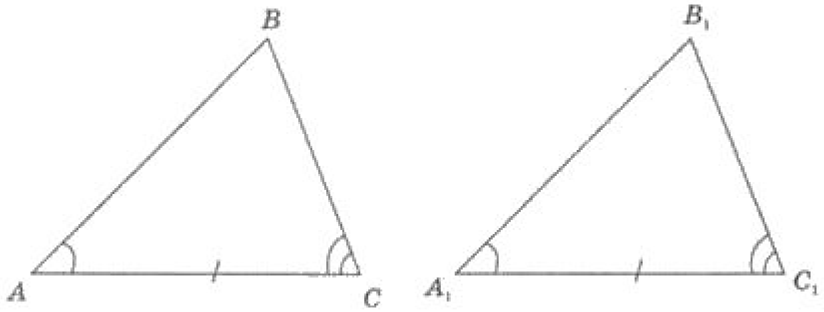
Ознаки рівності трикутників

Перша ознака рівності трикутників. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнює відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 7).



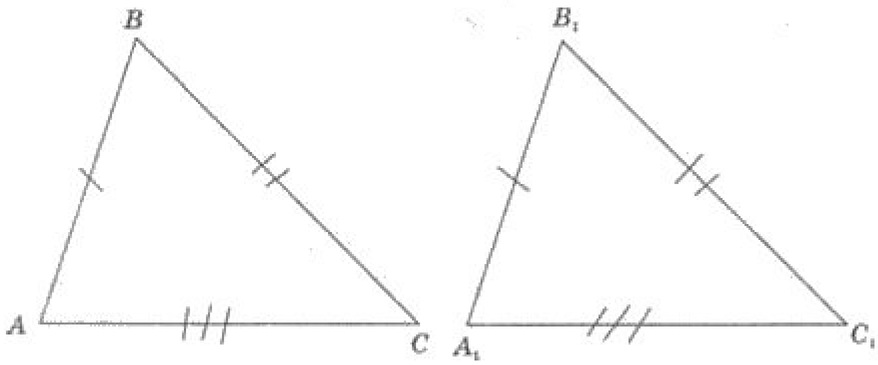
мал. 7

Друга ознака рівності трикутників. Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 8).



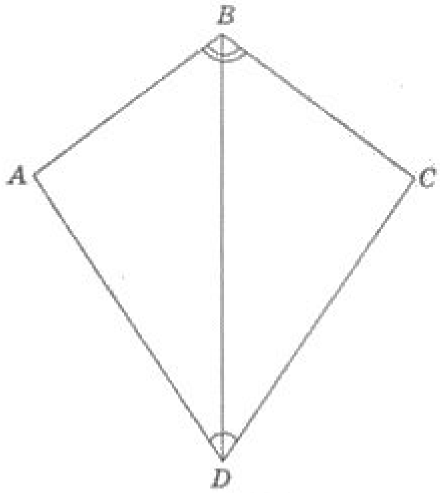
мал. 8

Третя ознака рівності трикутників. Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 9).



мал. 9

Приклад. Чому дорівнює градусна міра кута C (мал. 10), якщо $\angle ADB = \angle CDB, \angle ABD = \angle CBD, \angle A = 80^0$.

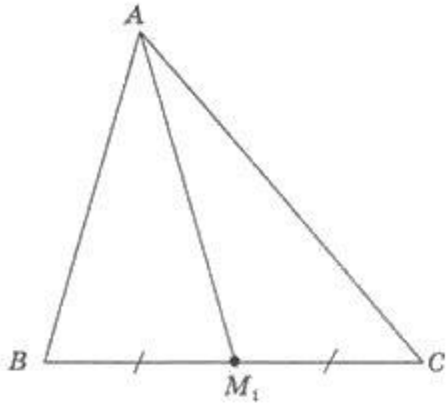


мал. 10

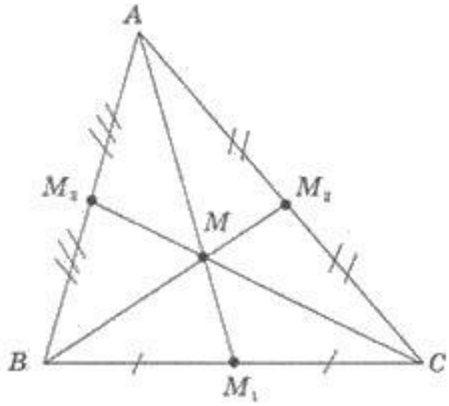
Розв'язання. Сторона BD є спільною стороною трикутників ABD і CBD. За умовою $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$. Тому за другою ознакою рівності трикутників ΔABD = ΔCDB. Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників: $\angle C = \angle A = 80^0$.

Медіана, бісектриса, висота трикутника та їх властивості.

Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.
На малюнку 11 відрізок AM_1 — медіана трикутника ABC. Точку M_1 називають основою медіани. Будь-який трикутник має три медіани. На малюнку 12 відрізки AM_1, BM_2 і CM_3 — медіани трикутника ABC.



мал. 11



мал. 12

Властивість медіан трикутника: у будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (вона називається **центроїдом трикутника**) і в цій точці поділяються у відношенні 2:1, починаючи від вершини.
На малюнку 12 точка M — центроїд трикутника.

Тоді $AM : MM_1 = BM : MM_2 = CM : MM_3 = 2 : 1$ і $AM = \frac{2}{3} AM_1$;
$MM_1 = \frac{1}{3} AM_1$; $BM = \frac{2}{3} BM_2$; $MM_2 = \frac{1}{3} BM_2$; $CM = \frac{2}{3} CM_3$; $MM_3 = \frac{1}{3} CM_3$.

Довжину медіани трикутника m_a проведену до сторони a, можна знайти за формулою:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

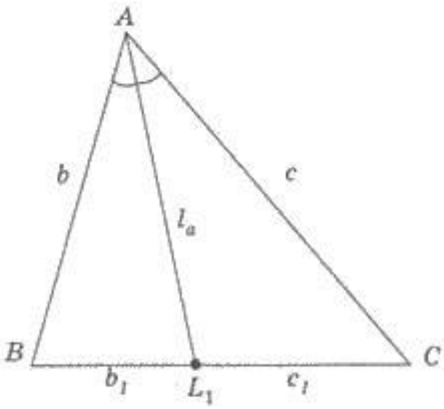
де b і c — сторони трикутника, між якими проходить медіана.

Приклад. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, що проведена до бічної сторони — 5 см. Знайдіть довжини бічних сторін.

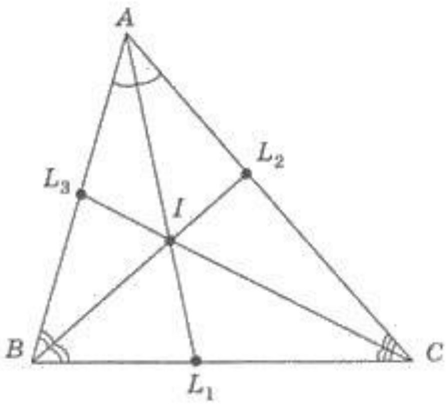
Розв'язання. За умовою основа $a = 4\sqrt{2}$ см, $m_a = 5$ см. Позначимо бічні сторони $b = c = x$.

Тоді маємо: $m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$; $5^2 = \frac{1}{4}\left(2x^2 + 2\left(4\sqrt{2}\right)^2 - x^2\right)$; $x^2 = 36$; $x = 6$ (враховуючи $x > 0$). Отже, довжина бічної сторони 6 см.

Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.
На малюнку 13 відрізок AL_1 — бісектриса трикутника ABC. Точку L_1 називають основою бісектриси AL_1. Будь-який трикутник має три бісектриси.
На малюнку 14 AL_1, BL_2, CL_3 — бісектриси трикутника.



мал. 13



мал. 14

Властивості бісектриси трикутника.

1. У будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці (вона називається **інцентром**).

На малюнку 14 точка I — інцентр трикутника.

2. Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.

На малюнку 13 AL_1 — бісектриса трикутника. Тоді

$$\frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{L_1C}$$

Звідси слідує, що

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL_1}{L_1C}$$

Приклад 1. У трикутнику ABC $AB = 6$ см; $AC = 12$ см; AL_1 — бісектриса. Більший з відрізків, на які бісектриса AL_1 ділить сторону BC, дорівнює 6 см. Знайдіть BC.

Розв'язання. Оскільки $\frac{AB}{AC} = \frac{BL_1}{L_1C}$ і $AB < AC$, то й $BL_1 < L_1C$ Тоді виходячи з умови $L_1C = 6$ см, маємо $\frac{6}{12} = \frac{BL_1}{6}$; $BL_1 = 3$ (см).

Тоді $BC = BL_1 + L_1C = 6 + 3 = 9$ (см).

Довжину бісектриси трикутника l_a, проведеної до сторони a (мал. 13) можна знайти за формулами:

$$l_a = \sqrt{bc - b_1c_1},$$

де b, c — сторони трикутника; b_1 і c_1 — відрізки сторони a, на які її ділить бісектриса;

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b + c}$$

Приклад 2. Обчисліть бісектрису AL_1 трикутника ABC, якщо $AB = 12$ см; $AC = 15$ см; $BC = 18$ см.

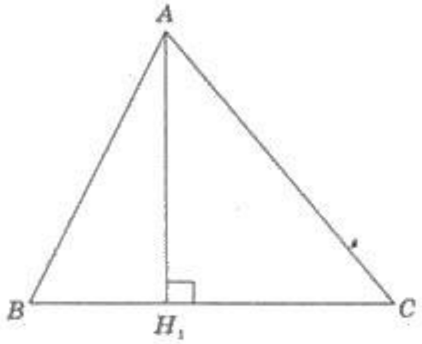
Розв'язання (мал. 13). Позначимо $BL_1 = x$, тоді $L_1C = 18 - x$. За властивістю бісектриси маємо $\frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{L_1C}$; $\frac{12}{x} = \frac{15}{18-x}$; $216 - 12x = 15x$; $27x = 216$; $x = 8$.

Отже, $BL_1 = 8$ см; $L_1C = 10$ см.

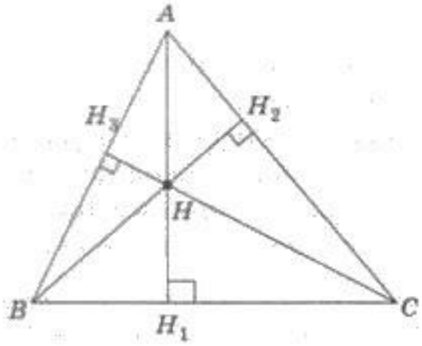
За формулою для обчислення довжини бісектриси маємо $AL_1 = \sqrt{AB \cdot AC - BL_1 \cdot CL_1} = \sqrt{12 \cdot 15 - 8 \cdot 10} = \sqrt{100} = 10$ (см).

Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

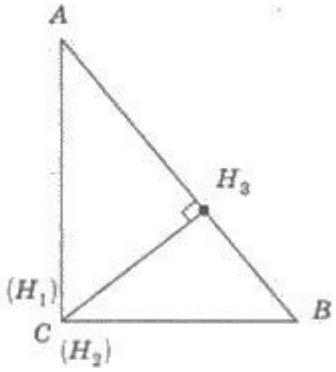
На малюнку 15 відрізок AH_1 — висота ΔABC. Точку H_1 називають основою висоти. Будь-який трикутник має три висоти. На малюнку 16 відрізки AH_1, BH_2, CH_3 — висоти гострокутного ΔABC, на малюнку 17 ці відрізки — висоти прямокутного ΔABC з прямим кутом C, а на малюнку 18 ці відрізки — висоти тупокутного трикутника із тупим кутом A.



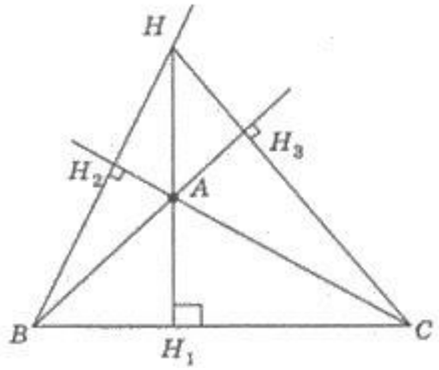
мал. 15



мал. 16



мал. 17



мал. 18

Властивість висот трикутника: у будь-якому трикутнику три висоти або їх продовження перетинаються в одній точці (її називають ортоцентром трикутника).

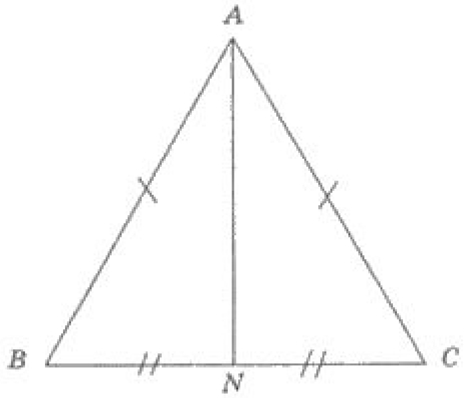
На малюнках 16 і 18 точка H — ортоцентр трикутника, на малюнку 17 ортоцентр трикутника збігається із точкою C — вершиною прямого кута ΔABC.

Способи знаходження довжини висот трикутника будуть розглянуті в наступних параграфах.

Важливою є наступна **властивість медіани рівнобедреного трикутника**.

У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є також бісектрисою і висотою.

На малюнку 19 зображено рівнобедрений трикутник ABC із основою BC; AN - медіана трикутника. Тоді виходячи з властивості: AN є також висотою і бісектрисою.



мал. 19

На основі розглянутої властивості можна зробити **висновки**:

Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою; бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і висотою.

Приклад. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено висоту AN. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника ABN дорівнює 30 см; а периметр трикутника ABC - 36 см.

Розв'язання, (мал. 19) 1) AN - висота рівнобедреного трикутника, що проведена до основи, тому AN є також медіаною. Отже, $BN = NC$.

2) Оскільки $BN = CN$ і $AB = AC$, то $AB + BN = \frac{P_{\Delta ABC}}{2} = \frac{36}{2} = 18$ (см).

3) У ΔABN : $AN = P_{\Delta ABN} - (AB + BN) = 30 - 18 = 12$ (см). Отже, $AN = 12$ (см).

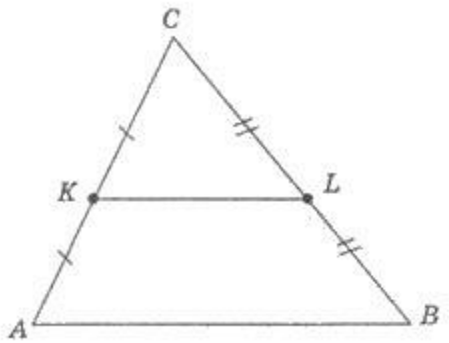
Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох її сторін.

На малюнку 20 KL - середня лінія трикутника ABC.

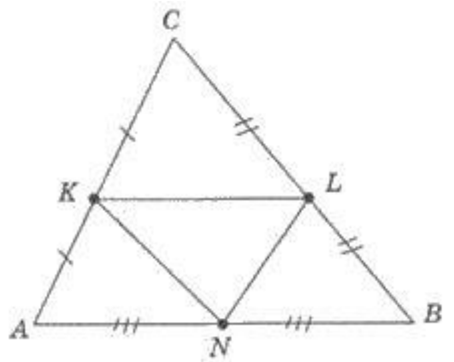
Властивість середньої лінії трикутника:

Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.

На малюнку 20: $KL \parallel AB$; $KL = \frac{AB}{2}$.



мал. 20



мал. 21

Приклад 1. Периметр трикутника дорівнює 30 см. Знайдіть периметр трикутника, вершини якого - середини сторін даного.

Розв'язання (мал. 21). 1) За умовою $P_{\Delta ABC} = 30$ см.

2) $KL = \frac{AB}{2}; KN = \frac{BC}{2}; LN = \frac{AC}{2.}$

3) Тоді $P_{\Delta KLN} = KL + KN + LN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} =$

$= \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{P_{\Delta ABC}}{2} = \frac{30}{2} = 15$ (см).

Приклад 2. Периметр трикутника, який утворений середніми лініями даного трикутника дорівнює 30 см, а сторони даного трикутника відносяться, як 4:5:6. Знайдіть сторони даного трикутника.

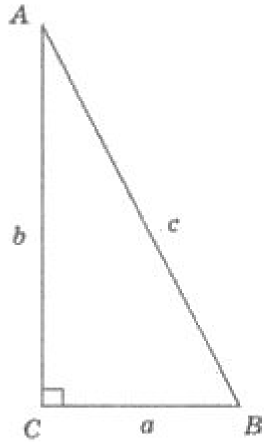
Розв'язання (мал. 21). 1) Використовуючи попередню задачу, маємо $P_{\Delta ABC} = 2 \cdot P_{\Delta KLN} = 2 \cdot 30 = 60$ (см).

2) Позначимо сторони даного трикутника ABC : $AC = 4x$; $BC = 5x$; $AB = 6x$. Тоді $4x + 5x + 6x = 60$; $15x = 60$; $x = 4$ см.

3) Маємо $AC = 4 \cdot 4 = 16$ (см), $BC = 5 \cdot 4 = 20$ (см), $AB = 6 \cdot 4 = 24$ (см).

Нагадаємо, що трикутник називається **прямокутним**, якщо один з його кутів прямий.

На малюнку 22 прямокутний трикутник ABC, у нього $\angle C = 90^0$. Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають **гіпотенузою**, а дві інші сторони - **катетами**.



мал. 22

Розглянемо **властивості прямокутного трикутника**.

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

На малюнку 22: $\angle A + \angle B = 90^0$.

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який його катет.

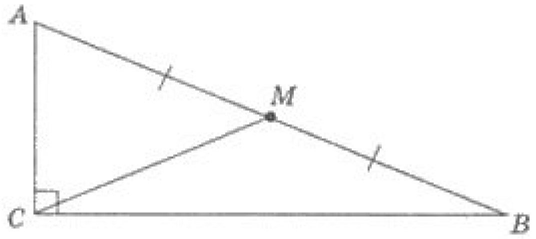
На малюнку 22: $AB > AC, AB > BC$.

3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Якщо $\angle A = 30^0$ (мал. 22), то $BC = AB/2$.

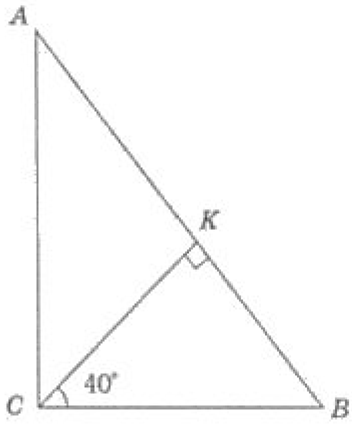
4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Якщо $BC = AB/2$ (мал. 22), то $\angle A = 30^0$.
5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.
На малюнку 23: CM - медіана, $CM = AB/2$. Оскільки $AM = BM = AB/2$, то $AM = BM = CM$.



мал. 23

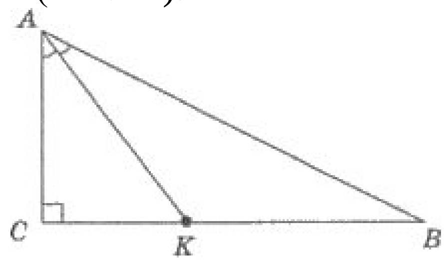
Приклад 1. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, утворює з одним із катетів кут, що дорівнює 40°. Знайдіть гострі кути трикутника.
Розв'язання (мал. 24). 1) CK - висота прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи. За умовою: $\angle KCB = 40^0$.



мал. 24

2) У трикутнику BKC: $\angle B = 180^0 - \left(90^0 + 40^0\right) = 180^0 - 130^0 = 50^0$.

3) У трикутнику ACB: $\angle A = 90^0 - \angle B = 90^0 - 50^0 = 40^0$.
4) Отже гострі кути трикутника дорівнюють 50° і 40°.
Приклад 2. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а бісектриса цього кута дорівнює 4 см. Знайдіть довжину катета, що лежить проти цього кута.
Розв'язання. 1) Нехай трикутник ABC - прямокутний; $\angle C = 90^0$; $\angle CAB = 60^0$; AK - бісектриса; $AK = 4$ см (мал. 25).



мал. 25

2) $\angle CAK = \frac{60^0}{2} = 30^0$. у трикутника *ACK* за властивістю катета, що лежить проти кута 30° маємо *CK* = *AF*/2 = 4/2 = 2 (см).

3) В трикутнику *ABC*: $\angle B = 90^0 - \angle A = 90^0 - 60^0 = 30^0$.

4) $\angle KAB = \frac{60^0}{2} = 30^0$. Тому трикутник *AKB* - рівнобедрений і *KB* = *AK* = 4 (см).

5) Тоді *CB* = *CK* + *KB* = 2 + 4 = 6 (см).

Коло називають **описаним навколо трикутника**, якщо воно проходить через усі вершини трикутника.

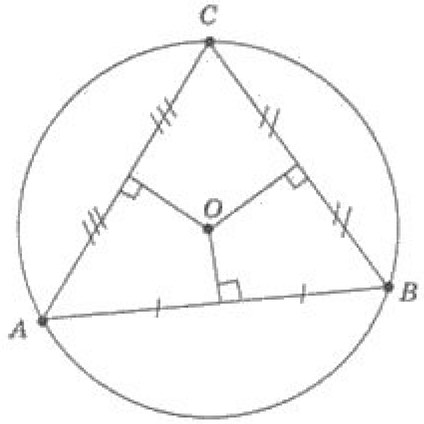
При цьому трикутник називають вписаним у коло.

На малюнку 26 коло описано навколо Δ*ABC*.

Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

На малюнку 26 центр описаного навколо трикутника *ABC* кола - точка *O* є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника *AB*, *AC* і *BC*.

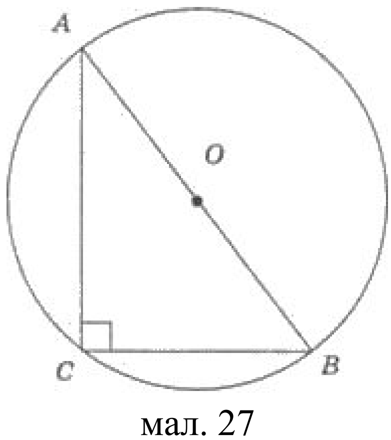
Легко зрозуміти, що серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.



мал. 26

Формула для обчислення радіуса кола описаного навколо прямокутного трикутника: **Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, а радіус кола дорівнює половині гіпотенузи.**

На малюнку 27 коло описане навколо прямокутного трикутника *ABC* з гіпотенузою *AB*. Радіус описаного кола *R* = *AB*/2.



мал. 27

Приклад. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть довжину кола, описаного навколо цього трикутника.

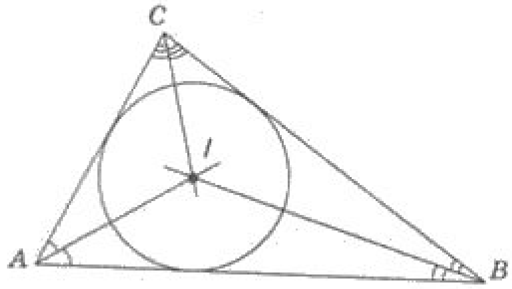
Розв'язання (мал. 27). 1) Радіус кола $R = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см).

2) Довжина кола $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$ (см).

Коло називається **вписаним у трикутник**, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

При цьому трикутник називають описаним навколо кола.

На малюнку 28 коло вписане у трикутник *ABC*.

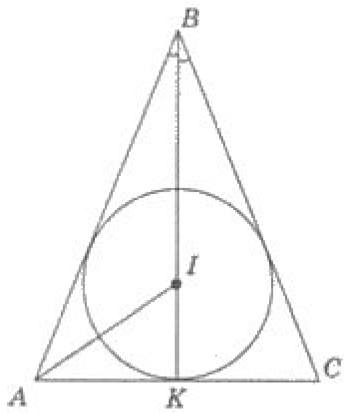


мал. 28

Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.

На малюнку 28 центр кола, вписаного у трикутник *ABC*, є точка *I* - точка перетину бісектрис трикутника (або бісектрис кутів трикутника).

Приклад. Медіана рівнобедреного трикутника, що проведена до основи дорівнює 12 см, бічна сторона відноситься до основи, як 3:2. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник.



мал. 29

Розв'язання. 1) Нехай у ΔABC ($AB = BC$) вписане коло; $BK = 12$ см - медіана трикутника. Тоді *BK* є також висотою і бісектрисою. Оскільки центр вписаного кола - точка *I* є точкою перетину бісектрис трикутника, то $I \in BK$.

2) Оскільки $AB : AC = 3 : 3$, позначимо $AB = 3x$, $AC = 2x$. *K* - середина *AC*, тому $AK = AC/2 = 2x/2 = x$.

3) *AI* - бісектриса трикутника *ABC*. За властивістю бісектриси: $AB/AK = BI/IK$.

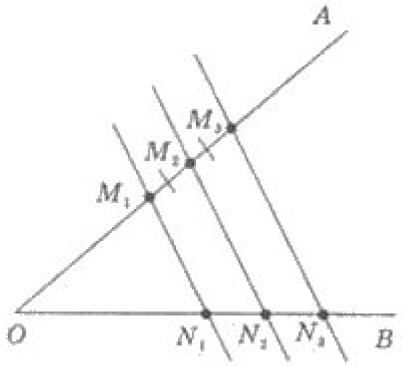
4) Позначимо шуканий радіус кола $IK = 2$см. Тоді $BI = 2 - r$. Маємо $\frac{3x}{x} = \frac{12 - r}{r}$; $\frac{3}{1} = \frac{12 - r}{r}$; $r = 3$ см.

Отже, радіус вписаного кола дорівнює 3 см.

Лекція 9
Основні теореми планіметрії.

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.

На малюнку 1 прямі M_1N_1, M_2N_2 і M_3N_3 паралельні між собою і $M_1M_2 = M_2M_3$. Тоді за теоремою Фалеса: $N_1N_2 = N_2N_3$.



мал. 1

Приклад. На малюнку 1 $M_1M_2 = M_2M_3$ і $M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel M_3N_3$. $M_1M_2 : N_1N_2 = 4 : 5$, $N_2N_3 - M_2M_3 = 2$ (см). Знайдіть M_1M_2, M_2M_3, N_1N_2, N_2N_3.

Розв'язання. За теоремою Фалеса $N_1N_2 = N_2N_3$. Оскільки $M_1M_2 : N_1N_2 = 4 : 5$, то можемо позначити $M_1M_2 = M_2M_3 = 4x$ і $N_1N_2 = N_2N_3 = 5x$. З умови $N_2N_3 - M_2M_3 = 2$ (см), отримаємо $5x - 4x = 2$, тому $x = 2$ (см).

Отже, $M_1M_2 = M_2M_3 = 4 \cdot 2 = 8$ (см), $N_1N_2 = N_2N_3 = 5 \cdot 2 = 10$ (см).

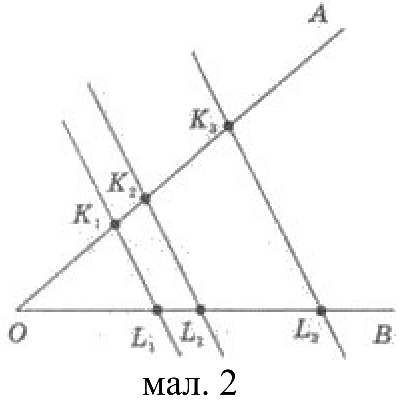
Узагальнена теорема Фалеса. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від його сторін пропорційні відрізки.

На малюнку 2 прямі K_1L_1, K_2L_2 і K_3L_3 паралельні між собою. Тоді за узагальненою теоремою Фалеса:

$$\frac{K_1K_2}{L_1L_2} = \frac{K_2K_3}{L_2L_3}$$

З цієї пропорції можна зробити висновки:

$$\frac{K_1K_2}{K_2K_3} = \frac{L_1L_2}{L_2L_3} \quad \text{і} \quad \frac{K_1K_2}{K_1K_3} = \frac{L_1L_2}{L_1L_3}$$



мал. 2

Приклад. На малюнку 2 $K_1L_1 \parallel K_2L_2 \parallel K_3L_3$, $K_1K_2 = 2$ см; $K_1K_3 = 6$ см, $L_1L_2 = 3$ см. Знайдіть L_2L_3.

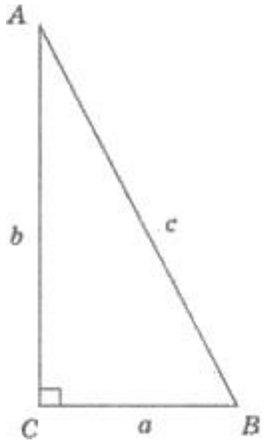
Розв’язання. $K_2K_3 = K_1K_3 - K_1K_2 = 6 - 2 = 4$ (см). За узагальненою теоремою Фалеса

$$\frac{K_1K_2}{L_1L_2} = \frac{K_2K_3}{L_2L_3},\ \frac{2}{3} = \frac{4}{L_2L_3};\ L_2L_3 = 6\ \text{(см)}.$$

Теорема Піфагора: у прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

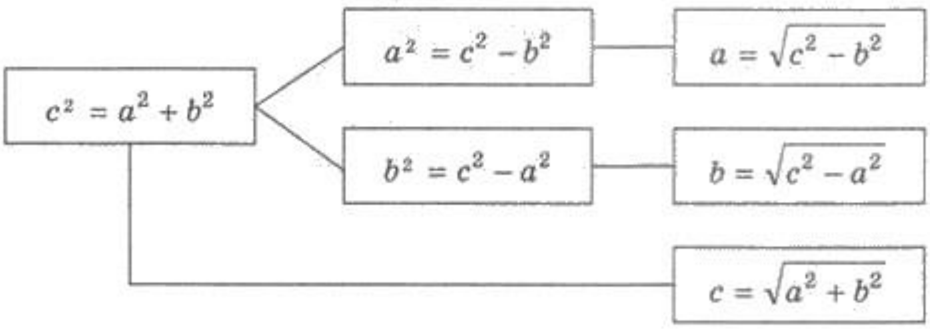
Якщо позначити $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ (мал. 3), то теорему Піфагора можна записати так:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



мал. 3

За допомогою теореми Піфагора, знаючи дві сторони прямокутного трикутника, можна знайти третю. Нам допоможе наступна схема:



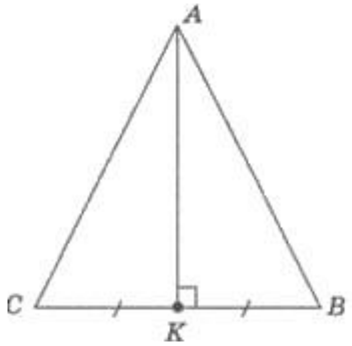
Приклад 1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть гіпотенузу.

Розв’язання. Маємо a = 6 см; b = 8 см.

Тоді $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

Приклад 2. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а його периметр 36 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до основи.

Розв’язання. 1) Нехай задано трикутник ABC, у якого $AB = AC$: $BC = 10$ см; $P_{\Delta ABC} = 36$ см (мал. 4).



мал. 4

Тоді $AB = AC = (36 - 10)/2 = 13$ (см).

2) AK - висота трикутника, тому вона також є медіаною: $CK = BC/2 = 10/2 = 5$ (см).

3) В трикутнику AKC: $AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ (см).

Приклад 3. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а другий на 2 см менший за гіпотенузу. Знайдіть периметр трикутника.

Розв'язання. 1) Нехай $a = 8$ см - катет прямокутного трикутника (мал. 3). Позначимо другий катет $b = x$ (см), тоді гіпотенуза $c = (x + 2)$ см.

2) За теоремою Піфагора: $c^2 = a^2 + b^2$; $(x + 2)^2 = x^2 + 8^2$; $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 64$; $4x = 60$; $x = 15$ см.

3) Отже, $b = 15$ см; $c = 15 + 2 = 17$ (см).

Тоді периметр трикутника $P = 8 + 15 + 17 = 40$ (см).

Важливою є теорема, **обернена до теореми Піфагора**: якщо в трикутнику ABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то кут C цього трикутника прямий.

Приклад 4. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами: 1) 7 см; 8 см; 9 см; 2) 7 см; 24 см; 25 см?

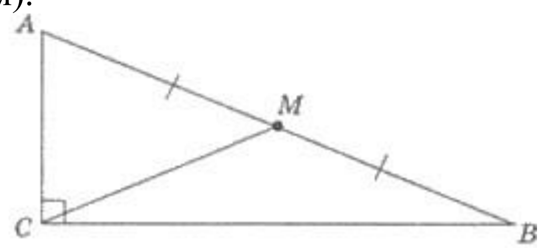
Розв'язання. 1) Оскільки $9^2 \neq 7^2 + 8^2$ $(81 \neq 9 + 64)$, то трикутник не є прямокутним.

2) Оскільки $25^2 = 7^2 + 24^2$ $(625 = 49 + 576)$, то трикутник є прямокутним.

Приклад 5. Сторони трикутника дорівнюють 12 см; 16 см і 20 см. Знайдіть медіану, проведену до найбільшої сторони трикутника.

Розв'язання. Оскільки $12^2 + 16^2 = 20^2$ $(144 + 256 = 400)$, то трикутник є прямокутним із гіпотенузою, що дорівнює 20 см.

2) Медіана, що проведена до гіпотенузи дорівнює її половині (мал. 5), а тому дорівнює $20/2 = 10$ (см).



мал. 5

Розглянемо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C, в якому проведено висоту CD (мал. 6). Тоді:

1) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проекцій катетів на гіпотенузу, тобто

$$CD^2 = AD \cdot DB$$

2) Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи і проекції цього катета на гіпотенузу, тобто

$$AC^2 = AB \cdot AD; \; BC^2 = AB \cdot DB$$

Приклад 1. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на два відрізки 9 см і 16 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи та периметр трикутника.

Розв'язання. 1) (мал. 6). DB = 9 см; ADO = 16 см.

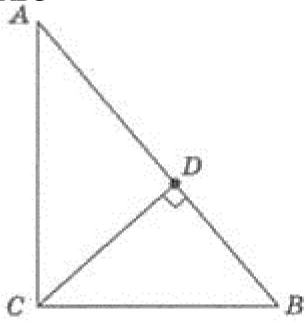
Тоді $CD^2 = AD \cdot DB; \; CD = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$ (см).

2) AB = AD + DB = 16 + 9 = 25 (см).

3) $AC^2 = AB \cdot AD; \; AC = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$ (см).

4) $BC^2 = AB \cdot BD; \; AC = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$ (см).

5) Периметр трикутника $P_{\Delta ABC} = 25 + 20 + 15 = 60$ (см).



мал. 6

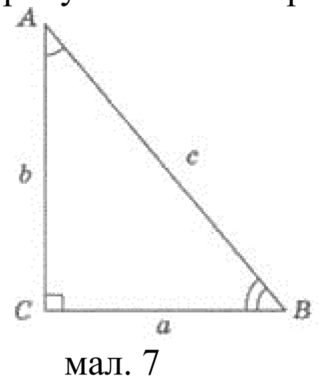
Приклад 2. Катет прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а проекція другого катета на гіпотенузу - 32 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

Розв'язання. 1) (мал. 6) CB = 30 см; AD = 32 см. Позначимо $BD = x$.

2) Маємо $BC^2 = AB \cdot BD$; $30^2 = (32 + x)\,x$; $x^2 + 32x - 900 = 0$. Враховуючи $x > 0$, матимемо $x = 18$ см.

3) Тоді $AB = AD + DB = 32 + 18 = 50$ (см).

Розглянемо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C (мал. 230).



мал. 7

1) Синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню протилежного катета до гіпотенузи.

$$\sin A = \frac{a}{c}; \quad \sin B = \frac{b}{c}.$$

2) Косинус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню прилеглого катета до гіпотенузи.

$$\cos A = \frac{b}{c}; \quad \cos B = \frac{a}{c}.$$

3) Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню протилежного катета до прилеглого.

$$tgA = \frac{a}{b}; \quad tgB = \frac{b}{a}.$$

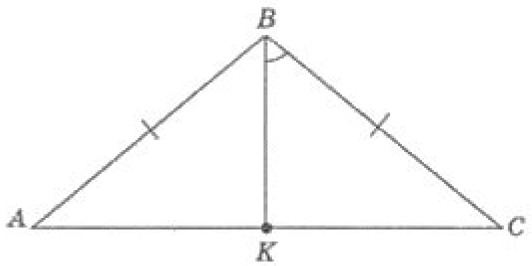
4) Котангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню прилеглого катета до протилежного.

$$ctgA = \frac{b}{a}; \quad ctgB = \frac{a}{b}.$$

Раджу повторити значення тригонометричних функцій гострих кутів 30°, 45°, 60°. Ці кути ще називають табличними кутами.

Приклад 1. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а кут при вершині 120°. Знайдіть бічну сторону та висоту трикутника, проведену до основи.

Розв’язання. 1) Нехай *ABC* - даний трикутник, *AB* = *BC*, *AC* = 12 см; $\angle ABC = 120^0$ (мал. 8).



мал. 8

2) *BK* - висота, медіана і бісектриса трикутника *ABC*.

$$\angle KBC = \angle ABC : 2 = 120° : 2 = 60°; \quad KC = \frac{AC}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

$$3) \text{ У } \Delta BKC: \ \mathrm{tg}\angle \mathrm{KBC} = \frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{BK}}; \quad BK = \frac{6}{\mathrm{tg}60°} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

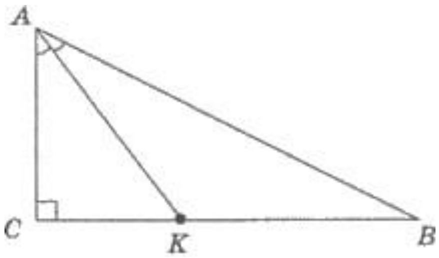
$$4) \text{ У } \Delta BKC: \ \sin \angle KBC = \frac{KC}{BC}; \quad BC = \frac{6}{\sin 60°} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Приклад 2. У $\Delta ABC \quad \angle C = 90°;\ AC = 8$ см; $\cos A = \frac{4}{5}$. Знайдіть *AB* і *BC*.

Розв’язання (мал. 8) . $1) \ \cos A = \frac{AC}{AB}; \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{AB}; \ AB = 10$ (см).

2) За теоремою Піфагора: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

Приклад 3. У $\Delta ABC \quad \angle C = 90°;\ AB = 34$ см; $\mathrm{tg}\, B = \frac{15}{8}$. Знайдіть *AC* і *BC*.



мал. 9

Розв'язання (мал. 9). 1) $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$; $\frac{AC}{BC} = \frac{15}{8}$. Позначимо AC = 15x см, BC = 8x см.

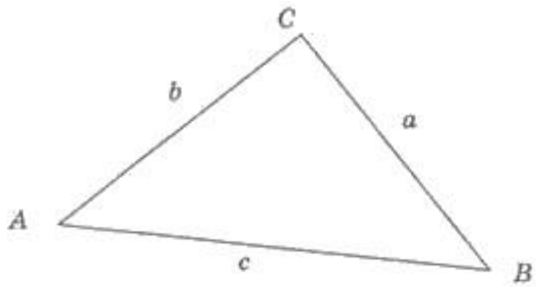
2) За теоремою Піфагора $(15x)^2 + (8x)^2 = 34^2$; $x^2 = 4$; $x = 2$ см.

3) Отже, $AC = 15 \cdot 2 = 30$ (см), $BC = 8 \cdot 2 = 16$ (см).

Теорема косинусів. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Отже, у довільному трикутнику ABC (мал. 10) виконуються рівності:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$



мал. 10

Приклад 1. У трикутнику ABC $AC = 2\sqrt{2}$ см; $BC = 3$ см; $\angle C = 45°$. Знайдіть AB.

Розв'язання (мал. 10) . $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$;

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45°} = \sqrt{8 + 9 - 12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{5} \text{ (см).}$$

Приклад 2. У трикутнику ABC c = 7 см; a = 5 см; $\angle C = 120^0$ (мал. 10). Знайдіть b.

Розв'язання. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; $7^2 = 5^2 + b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \cos 120°$. Маємо квадратне рівняння відносно b: $b^2 + 5b - 24 = 0$. Його корені: $b_1 = 3$; $b_2 = -8$. Другий корінь не підходить. Отже, b = 3 см.

Приклад 3. Одна із сторін трикутника дорівнює 7 см, дві інші утворюють кут 60°, а їх різниця дорівнює 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

Розв'язання. 1) Маємо c = 7 см; $\angle C = 60^0$ (мал. 10). Позначимо $b = x$, тоді $a = x + 3$. За теоремою косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C;$$
$$7^2 = (x+3)^2 + x^2 - 2x(x+3)\cdot\cos 60°;$$
$$x^2 + 3x - 40 = 0.$$
Враховуючи $x > 0$, маємо $x = 5$.
2) Тоді $b = 5$ см, $a = 5 + 3 = 8$ (см).
3) $P = 7 + 5 + 8 = 20$ (см).
Якщо відомі три сторони трикутника, то за теоремою косинусів можна знайти косинус будь-якого кута трикутника, а тому і сам кут. Наприклад, косинус кута C можна знайти за формулою:
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
Зауважимо, що: у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти меншої сторони - менший кут.
Приклад 4. Знайдіть градусну міру середнього за величиною кута трикутника зі сторонами 3 см; 7 см; 8 см.
Розв'язання. 1) $a = 3$ см; $b = 7$ см; $c = 8$ см. Середній за величиною кут - той, що лежить проти сторони b, тобто кут B.
2) Маємо $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2\cdot 3\cdot 8} = \dfrac{1}{2}$.
Тому $\angle B = 60^0$.
Корисним є наступний факт:
Якщо c - найбільша сторона трикутника і
$a^2 + b^2 > c^2$, то $\angle C$ - гострий, трикутник гострокутний;
$a^2 + b^2 = c^2$, то $\angle C$ - прямий, трикутник прямокутний;
$a^2 + b^2 < c^2$, то $\angle C$ - тупий, трикутник тупокутний.
Приклад 5. Визначте вид трикутника зі сторонами $a = 5$ см; $b = 7$ см; $c = 10$ см.
Розв'язання. $a^2 + b^2 - c^2 = 5^2 + 7^2 - 10^2 = -26 < 0$, тому $a^2 + b^2 < c^2$, трикутник тупокутний.
Теорема синусів. Сторони трикутників пропорційні до синусів протилежних кутів.
Отож, у довільному ΔABC (мал. 10):
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
Приклад 1. У трикутнику ABC сторону $BC = 4\sqrt{2};\ \angle A = 45°;\ \angle B = 60°.$ Знайдіть сторону AC.
Розв'язання (мал. 10).
$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B};\quad \frac{4\sqrt{2}}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 60°};\qquad AC = \frac{4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{3}\ \text{(см)}.$$

Приклад 2. У трикутнику *ABC*: *AB* = 1 см; *BC* =. Знайдіть кут *A*, якщо: 1) $\angle C = 45^0$; 2) $\angle C = 30^0$.

Розв'язання (мал. 10) За теоремою синусів $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$; $\frac{1}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}$;

$\sin A = \sqrt{2} \cdot \sin 45°$; $\sin A = 1$; $\angle A = 90°$.

2) $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$; $\frac{1}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}$; $\sin A = \sqrt{2} \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тому $\angle A = 45^0$ або $\angle A = 135^0$. Зауважимо, що в обох випадках сума кутів *A* і *C* менша за 180°, тому задача має два розв'язки.

Узагальнена теорема синусів. У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де *R* - радіус кола описаного навколо трикутника.

Приклад 1. У трикутнику *ABC AB* = $6\sqrt{2}$ см; $\angle C = 135^0$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання. $\frac{AB}{\sin C} = 2R$, де *R* - шуканий радіус $\frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$; $R = 6$ (см).

Приклад 2. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 15 см, а кут між ними 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

мал. 11

Розв'язання. 1) За умовою *a* = 8 см; *b* = 15 см; $\angle C = 60^0$ (мал. 11).

2) Тоді за теоремою косинусів

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60°} = 13$ (см).

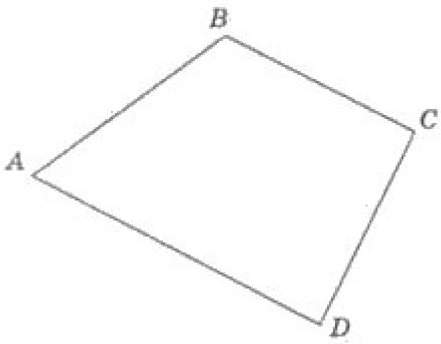
$$\frac{c}{\sin C} = 2R;\ \frac{13}{\sin 60°} = 2R;\ \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R;\ R = \frac{13}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}\ \text{(см)}.$$

3) Маємо

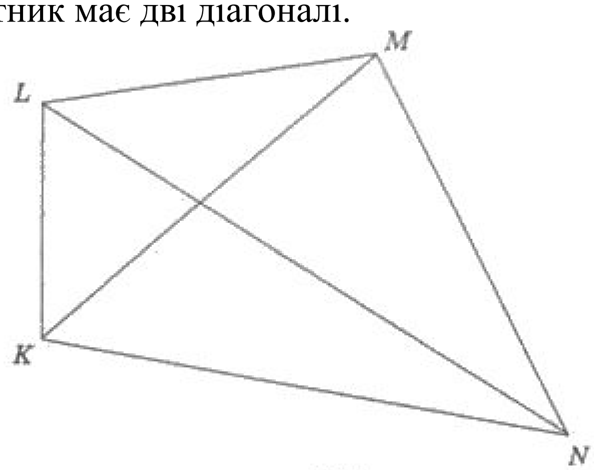
Лекція 10
Чотирикутники. Види чотирикутників.

Чотирикутником називають фігуру, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають.
Ніякі три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не повинні мати ніяких інших спільних точок крім даних.
На малюнку 1 зображено чотирикутник *ABCD*. Точки *A, B, C, D* називають **вершинами чотирикутника**, а відрізки *AB*, *BC*, *CD* і *DA*, що їх сполучають, - **сторонами чотирикутника**.

Вершини чотирикутника, які є кінцями однієї його сторони, називають, **сусідніми**, несусідні вершини називають **протилежними**.
На малюнку 1 вершини *A* і *B* - сусідні, *A* і *C* - протилежні. Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, називають **діагоналями чотирикутника**. На малюнку 2 відрізки *KM* і *LN* - діагоналі чотирикутника *KLMN*. Будь-який чотирикутник має дві діагоналі.



мал. 1

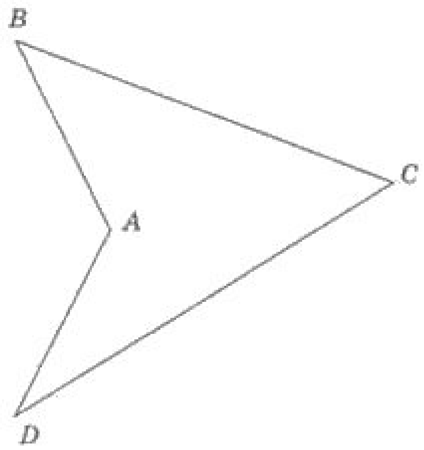


мал. 2

Сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, називають сусідніми, а які не мають спільної вершини, - протилежними. На малюнку 1 сторони *AB* і *BC* - сусідні, сторони *AB* і *CD* - протилежні.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його **периметром**. Периметр позначають буквою ***P***.
Наприклад, периметр чотирикутника *ABCD* можна позначити так: P_{ABCD}. Маємо $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$.

Кутами чотирикутника *ABCD* називають кути *DAB, ABC, BCD* і *CDA* (мал. 1). Кути чотирикутника називають **протилежними**, якщо їх вершини - протилежні вершини чотирикутника, і **сусідніми**, якщо їх вершини - сусідні вершини чотирикутника. На малюнку 1 кути *A* і *C* - протилежні; *A* і *B* - сусідні. Один з кутів чотирикутника може бути більшим від розгорнутого. Наприклад, на малюнку 3 кут *A* чотирикутника *ABCD* більший за розгорнутий. Такий чотирикутник називають **неопуклим**. Якщо ж усі кути чотирикутника менші від 180°, то його називають **опуклим**. Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.



мал. 3

Приклад. Знайдіть невідомі кути чотирикутника, якщо один з них дорівнює 120°, другий та третій відносяться, як 3:5, а четвертий дорівнює півсумі другого та третього.

Розв'язання. Нехай у чотирикутнику *ABCD*: $\angle A = 120^0$. За умовою $\angle B : \angle C = 3:5$. Можна позначити $\angle B = 3x; \angle C = 5x$.

Тоді $\angle D = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{3x + 5x}{2} = 4x.$ Маємо рівняння $120^\circ + 3x + 5x + 4x = 360^\circ;\ 12x = 240^\circ,\ x = 20^\circ.$ Тоді $\angle B = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ;\quad \angle C = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ;\quad \angle D = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ.$

Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

На малюнку 4 зображено паралелограм *ABCD*: *AB* || *CD*, *AD* || *BC*.

Розглянемо **властивості паралелограма**:

1) Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.

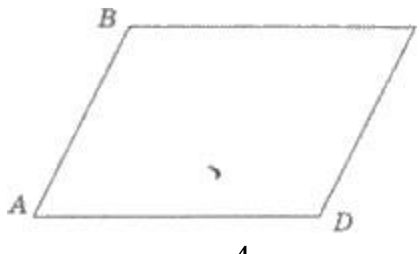
2) Паралелограм є опуклим чотирикутником.

3) У паралелограмі протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні.

На малюнку 4: *AB* = *CD*, *AD* = *BC*, $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$.

4) Периметр паралелограма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.

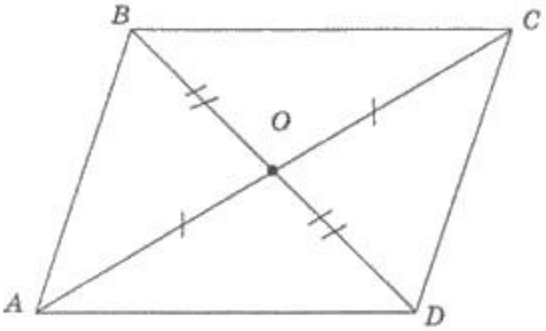
5) Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться пополам.



мал. 4

На малюнку 5: точка *O* - точка перетину діагоналей паралелограма; *AO* = *OC*; *BO* = *OD*.

6) Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.



мал. 5

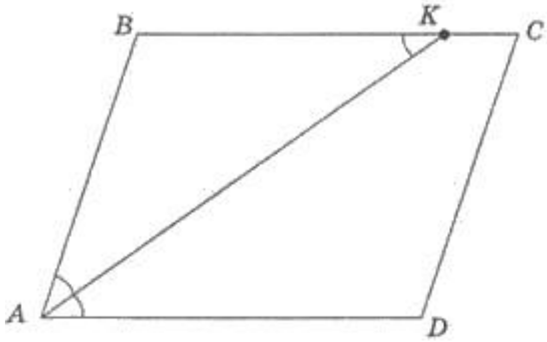
На малюнку 1: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Приклад 1. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо сума двох з них дорівнює 140°.

Розв'язання. Оскільки сума двох кутів паралелограма дорівнює 140°, то це - протилежні кути, наприклад $\angle A$ і $\angle C$ на малюнку 4. Оскільки $\angle A = \angle C$, то

$$\angle A = \angle C = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ \text{ і } \angle B = \angle D = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Приклад 2. У паралелограмі *ABCD* бісектриса кута *A* ділить сторону *BC* на відрізки *BK* = 3 см і *KC* = 2 см (мал. 6). Знайдіть периметр паралелограма.



мал. 6

Розв'язання.

1) *BC* = *BK* + *KC* = 3 + 2 = 5 (см).

2) $\angle KAD = \angle BKA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих *AB* і *BC* січною *AK*).

3) $\angle KAD = \angle KAB$ (за умовою), тому $\angle BKA = \angle KAB$. Отже, за ознакою рівнобедреного трикутника: ΔABK - рівнобедрений, *AB* = *BK* = 3 см.

4) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(3 + 5) = 16$ (см).

Приклад 3. Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 12 см, а одна із сторін на 1 см менша за другу. Знайдіть сторони паралелограма.

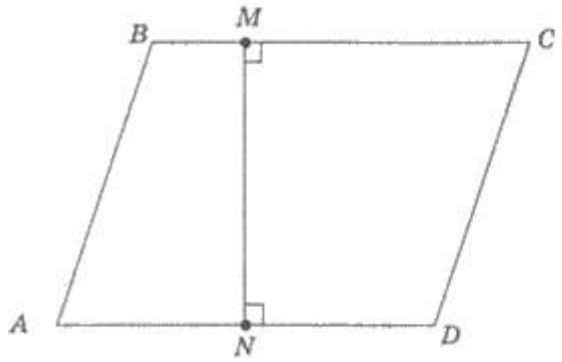
Розв'язання (мал. 5). 1) За умовою *AC* = 11 см; *BD* = 7 см. Нехай *AD* = *x* см, тоді *BC* = (*x* - 1) см.

2) За властивістю діагоналей паралелограма маємо: $11^2 + 7^2 = 2\left(x^2 + (x-1)^2\right)$; $x^2 - x - 42 = 0$.

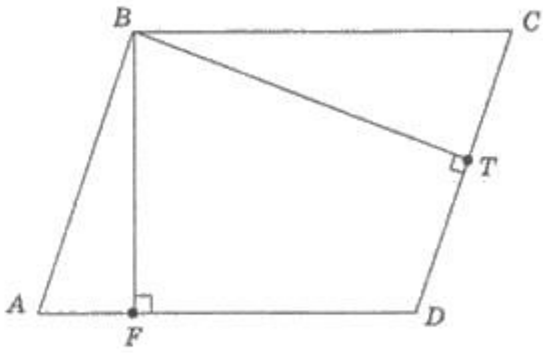
Враховуючи $x > 0$, маємо $x = 7$. Отже, *AD* = 7 см, *BC* = 6 см.

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону. На малюнку 7 *MN* - висота паралелограма; $MN \perp AD$, $MN \perp BC$.

З кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти. Наприклад, на малюнку 8 BF і BT - висоти паралелограма, проведені відповідно до сторін AD і CD.



мал. 7



мал. 8

Приклад 4. У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BF і BT (мал. 8), $\angle FBT = 65^0$. Знайдіть кут A паралелограма.

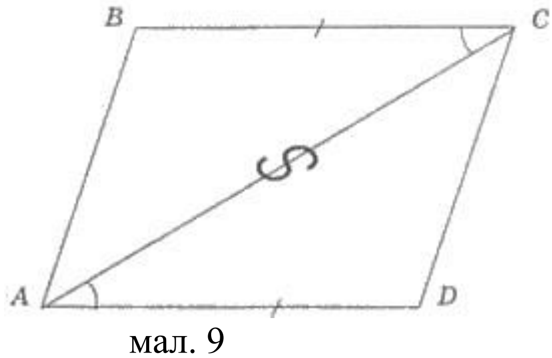
Розв'язання. 1) У чотирикутнику $FBTD$: $\angle D = 360^0 - \left(65^0 + 2 \cdot 90^0\right) = 360^0 - 245^0 = 115^0$.

2) Тоді $\angle A = 180^0 - \angle D = 180^0 - 115^0 = 65^0$.

Ознаки параллелограма

Якщо у чотирикутнику:
1) дві сторони паралельні і рівні, або
2) протилежні сторони попарно рівні, або
3) діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться пополам, або
4) протилежні кути попарно рівні, то чотирикутник є паралелограмом.

Приклад. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 9) $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$, $AB = 3$ см. Знайдіть CD та визначте вид чотирикутника $ABCD$.



мал. 9

Розв'язання. 1) AC – спільна сторона ΔCAD і ΔACB.
2) Маємо: $\Delta CAD = \Delta ACB$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тому $CD = AB = 3$ см.
3) У чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, тому він є паралелограмом.

Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі (мал. 10).

Розглянемо **властивості прямокутника**:
1) У прямокутнику протилежні сторони попарно рівні.
На малюнку 10: $AB = CD$, $AD = BC$.

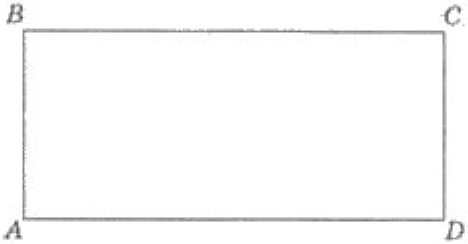
2) Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.

3) Діагоналі прямокутника рівні і точкою перетину діляться пополам.

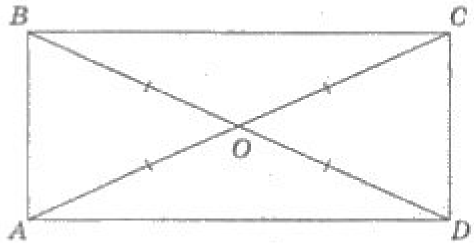
На малюнку 11: $AC = BD$ і $AO = OC$, $BO = DO$. Оскільки $AC = BD$, то матимемо $AO = BO = CO = DO$. Тому маємо наступну властивість.

4) Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

5) Приклад 1. Діагональ прямокутника ділить його кут у відношенні 4:5. Знайдіть кут між діагоналями даного прямокутника.



мал. 10



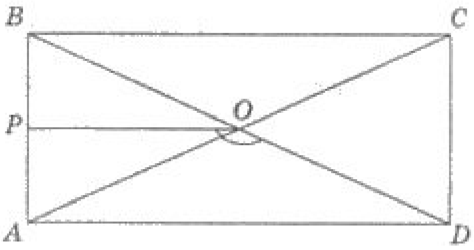
мал. 11

Розв'язання. 1) (мал. 11). Нехай $\angle ADO : \angle ODC = 4 : 5$. Позначимо $\angle ADO = 4x, \angle ODC = 5x$. Тоді $4x + 5x = 90°$; $x = 10°$. Тому $\angle ADO = 4 \cdot 10^0 = 40^0; \angle ODC = 5 \cdot 10^0 = 50^0$.

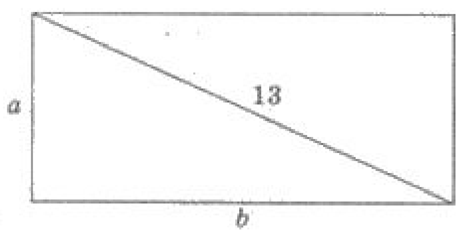
2) ΔOCD - рівнобедрений (бо $OD = OC$). Тому $\angle OCD = \angle ODC = 50^0$. У ΔOCD: $\angle OCD = 180^0 - 2 \cdot 50^0 = 180^0 - 100^0 = 80^0$. Отже, кут між діагоналями даного прямокутника дорівнює 80°.

Приклад 2. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. OP - бісектриса трикутника AOB, $\angle DOP = 160^0$. Знайдіть $\angle CAB$.

Розв'язання (мал. 12).



мал. 12



мал. 13

1) $\angle POB = 180^0 - 160^0 = 20^0$.

2) Оскільки OP - бісектриса ΔAOB, то $\angle BOA = 2 \cdot 20^0 = 40^0$.

3) ΔAOB - рівнобедрений (бо $AO = OB$), тому $\angle CAB = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°.$

Приклад 3. Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а його діагональ 13 см. Знайдіть сторони прямокутника.

Розв'язання. 1) Нехай сторони прямокутника дорівнюють a см і b см.

Тоді $2(a + b) = 34$, тобто $a + b = 17$ і $a^2 + b^2 = d^2$; $a^2 + b^2 = 13^2$; $a^2 + b^2 = 169.$

2) Маємо систему

$$\begin{cases} a + b = 17, \\ a^2 + b^2 = 169; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 17 - b, \\ (17 - b)^2 + b^2 = 169; \end{cases}$$

$b^2 - 17b + 60 = 0$; $b_1 = 5$; $b_2 = 12$. Тоді $a_1 = 12$; $a_2 = 5$.

Отже, сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 12 см.

Ознаки прямокутника

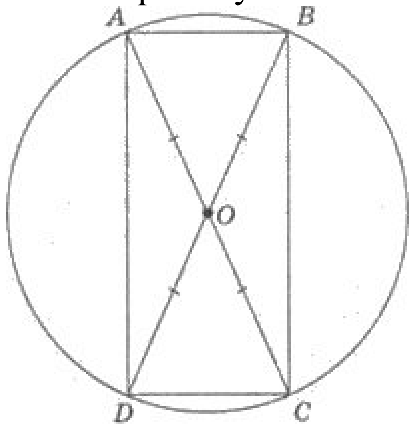
Якщо у паралелограма:

1) всі кути рівні, або
2) один кут прямий, або
3) діагоналі рівні, то паралелограм є прямокутником.

Приклад. У колі з центром *O* проведено діаметри *AC* і *BD* (мал. 14). Визначте вид чотирикутника *ABCD*.

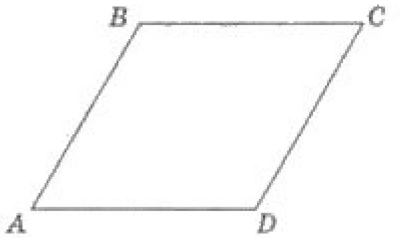
Розв'язання. 1) Оскільки *AO* = *OC*, *BO* = *OD* (як радіуси), то, за ознаками паралелограма, маємо, що *ABCD* - паралелограм.

2) Оскільки *AC* = *BD* (як діаметри), то використовуючи ознаку прямокутника, маємо, що паралелограм *ABCD* є прямокутником.

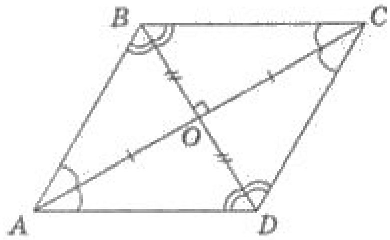


мал. 14

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні (мал. 15).



мал. 15



мал. 16

Розглянемо **властивості ромба**:

1) Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180°.
2) У ромба протилежні кути рівні.

На малюнку 16: $\angle A = \angle C; \angle B = \angle D$.

3) Діагоналі ромба перетинаються і точкою перетину діляться пополам.

На малюнку 16: *AO* = *OC*; *BO* = *OD*.

4) Периметр ромба $P_{ABCD} = 4 \cdot AD$.

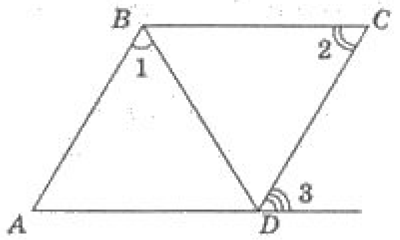
5) Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

На малюнку 16: AC $\perp$ BD.

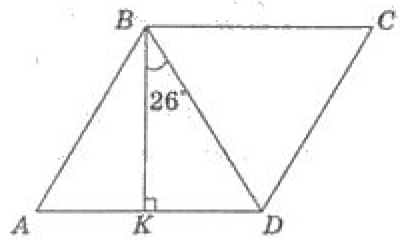
6) Діагоналі ромба ділять кути ромба пополам.

Враховуючи цю властивість і властивість 2 можна зауважити, що $\angle BAO = \angle OAD = \angle DCO = \angle OCB$ і $\angle ABO = \angle OBC = \angle CDO = \angle ODA$.

Приклад 1. Периметр ромба на 15 см більший за його сторону. Знайдіть сторону ромба.
Розв'язання. Нехай сторона ромба дорівнює a см, тоді його периметр дорівнює $4a$ см. За умовою $4a - a = 15$; $3a = 15$; $a = 5$ (см). Отже, сторона ромба дорівнює 5 см.
Приклад 2. ABCD - ромб, $\angle 2 = 70^0$. (мал. 17). Знайдіть $\angle 1$.



мал. 17



мал. 18

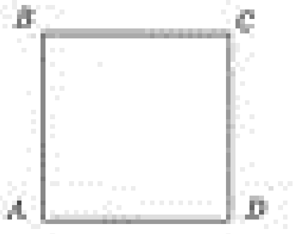
Розв'язання.
1) $\angle ABC = 180° - \angle 2 = 180° - 70° = 110°$.

2) $\angle 1 = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{110°}{2} = 55°$.

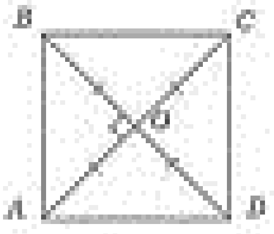
Приклад 3. $ABCD$ - ромб, $\angle 1 = 50^0$. (мал. 17). Знайдіть $\angle 3$.
Розв'язання. 1) $\angle ABC = 2 \cdot \angle ABD = 50° \cdot 2 = 100°$.
2) $\angle 2 = 180° - 100° = 80°$.
3) $AD \parallel BC$, $\angle 2$ і $\angle 3$ - внутрішні різносторонні. Тому $\angle 3 = \angle 2 = 80^0$.
Приклад 4. Кут між висотою і діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини і дорівнює 26°. Знайдіть гострий кут ромба.
Розв'язання. 1) BD - діагональ ромба $ABCD$, BK - його висота (мал. 18), $\angle KBD = 26^0$ (за умовою).
2) У ΔBKD $\angle BDK = 90^0 - 26^0 = 64^0$.
3) $\angle ADC = 2 \cdot 64^0 = 128^0$. Тоді $\angle BAD = 180^0 - 128^0 = 52^0$. Отже, гострий кут ромба дорівнює 52°.

Ознаки ромба

Якщо у паралелограма:
1) дві сусідні сторони рівні, або
2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або
3) діагональ ділить навпіл кут паралелограма, то паралелограм є ромбом.
Приклад. Всі сторони чотирикутника рівні. Встановіть вид чотирикутника.
Розв'язання. 1) Нехай $AB = BC = CD = DA$ (мал. 15). Оскільки у чотирикутника протилежні сторони попарно рівні, то за означенням паралелограма, маємо, що $ABCD$ - паралелограм.
2) У паралелограма $ABCD$ сусідні сторони рівні. Тому $ABCD$ - ромб (за ознакою ромба).
Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні (мал. 19).



мал. 19



мал. 20

Сформулюємо властивості квадрата:

1) Усі кути квадрата прямі.

2) $P_{ABCD} = 4 \cdot AB$ (мал. 19).

3) Діагоналі квадрата рівні.

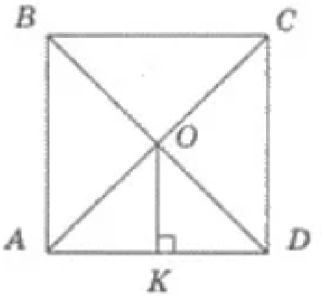
На малюнку 20: $AC = BD$.

4) Діагоналі квадрата перпендикулярні і точкою перетину діляться пополам.

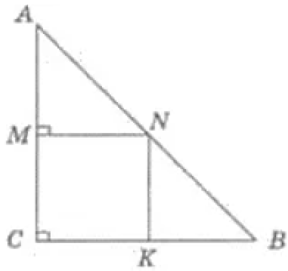
На малюнку 20: $AC \perp BD$ і $AO = BO = CO = DO$ (враховуючи властивість 3).

5) Діагоналі квадрата ділять його кути пополам, тобто утворюють зі сторонами квадрата кути 45°.

Приклад 1. Точка перетину діагоналей квадрата віддалена від його сторони на 5 см. Знайдіть периметр квадрата.



мал. 20



мал. 21

Розв'язання. 1) Нехай точка O - точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$ (мал. 20). $OK \perp AD$, OK = 5 см - відстань від точки O до сторони квадрата AD.

2) OK - висота рівнобедреного трикутника AOD (у якого $AO = OD$), тому вона також медіана і бісектриса.

3) Оскільки $\angle OAD = 45^0$ і $\angle AOD = \frac{90^0}{2} = 45^0$то ΔAOK - рівнобедрений $AK = KO$ = 5 см. Аналогічно KD = 5 см.

4) Сторона ромба $AD = 5 \cdot 2 = 10$ (см), його периметр $P = 10 \cdot 4 = 40$ (см).

Приклад 2. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^0$) вписано квадрат $CMNK$ так, що прямий кут у трикутника і квадрата спільний, а точка N належить AB. Периметр квадрата дорівнює 40 см. Знайдіть довжину катета трикутника.

Розв'язання. 1) На малюнку 21 квадрат $CMNK$ вписано у ΔABC вказаним способом.

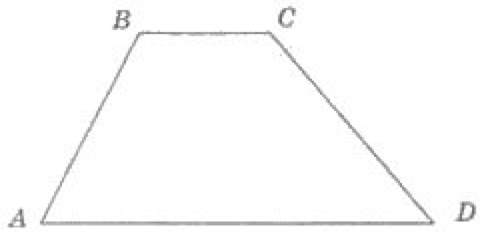
3) $\angle A = 45^0$. В ΔAMN: $\angle AMN = 90^0 - 45^0 = 45^0$. Тому ΔAMN - рівнобедрений і $AM = MN = 10$ (см).

4) Тоді катет трикутника $AC = CM + MA = 10 + 10 = 20$ (см).

Ознаки квадрата

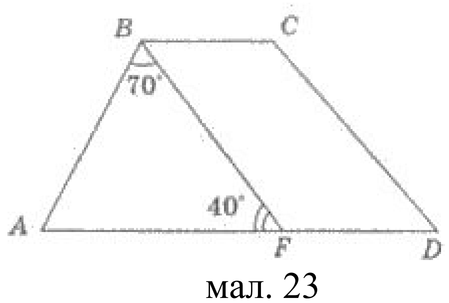
1) Якщо діагоналі прямокутника перпендикулярні, то він є квадратом.
2) Якщо діагоналі ромба рівні, то він є квадратом.
Приклад. У чотирикутника всі сторони рівні всі кути рівні. Визначте вид чотирикутника.
Розв’язання. 1) Оскільки у чотирикутника всі кути рівні, то за ознакою прямокутника, він є прямокутником.
2) Оскільки у прямокутника всі сторони рівні, то він є квадратом.

Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні (мал. 22).
На малюнку 22 зображено трапецію *ABCD*, у якої сторони *AD* і *BC* паралельні.
Паралельні сторони трапеції називають її основами, а не паралельні - бічними сторонами.

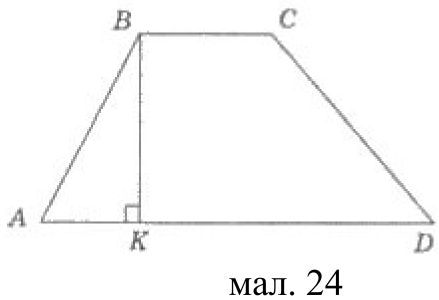


мал. 22

Розглянемо **властивості трапеції**:
1) Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.
На малюнку 22: $\angle A+\angle B=180^0, \angle C+\angle D=180^0$.
2) Трапеція є опуклим чотирикутником.
Приклад 1. У трапеції *ABCD* *BC* - менша основа. На відрізку *AD* взято точку *E* так, що $BE \parallel CD$; $\angle ABE=70^0; \angle BEA=40^0$. Знайдіть кути трапеції.
Розв’язання. 1) В ΔABE: $\angle A=180^0-\left(70^0+40^0\right)=70^0$.
2) $\angle ABC=180^0-\angle A=180^0-70^0=110^0$.
3) Оскільки $BE \parallel CD$, то відповідні кути *AEB* і *CDA* рівні. Отже, $\angle D=40^0$.
4) $\angle BCD=180^0-\angle D=180^0-40^0=140^0$.
Кути трапеції дорівнюють 70°, 110°, 140° і 40°.



мал. 23



мал. 24

Висотою трапеції називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містять протилежну основу.
Найчастіше висоту проводять з вершини трапеції. На малюнку 24 *BK* - висота трапеції *ABCD*.
Приклад 2. У трапеції *ABCD* з вершини кута *B*, градусна міра якого 126° проведено висоту трапеції *BK* (мал. 24). Знайдіть кути ΔABK.

Розв'язання.

1) $\angle A = 180° - \angle ABK = 180° - 126° = 54°$.

2) В ΔABK $\angle K = 90°$;

$\angle ABK = 90° - 54° = 36°$.

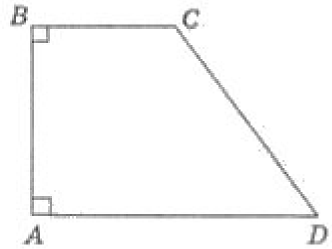
Трапецію називають прямокутною, якщо один з її кутів прямий. На малюнку 25 - прямокутна трапеція *ABCD*, у якої $\angle A = 90^0$. Очевидно, що $\angle B = 90^0$. *AB* є меншою стороною трапеції, і її висотою.

Приклад 1. У прямокутної трапеції тупий кут удвічі більший за гострий. Знайдіть ці кути трапеції.

Розв'язання (мал. 25). 1) Позначимо $\angle D = x$, тоді $\angle C = 2x$.

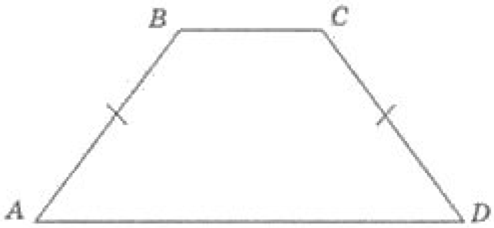
2) Маємо $x + 2x = 180°$; $3x = 180°$; $x = 60°$.

3) Отже, $\angle D = 60^0$, $\angle C = 2 \cdot 60^0 = 120^0$

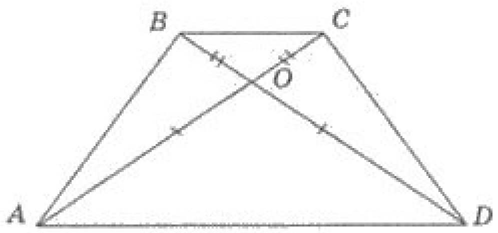


мал. 25

Трапецію називають рівнобічною, якщо її бічні сторони рівні. На малюнку 27 рівнобічна трапеція *ABCD*, у якої *AB* = *CD*.



мал. 26



мал. 27

Розглянемо **властивості рівнобічної трапеції**:

1) У рівнобічні трапеції кути при основі рівні.

На малюнку 26: $\angle A = \angle D; \angle B = \angle C$.

2) Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

На малюнку 27: *AC* = *BD*; *BO* = *OC*.

Ознаки рівнобічної трапеції. Якщо у трапеції:

1) кути при основі рівні, або

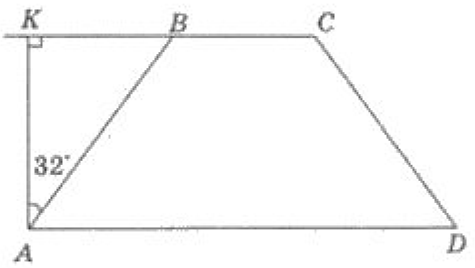
2) діагоналі рівні, то вона є рівнобічною.

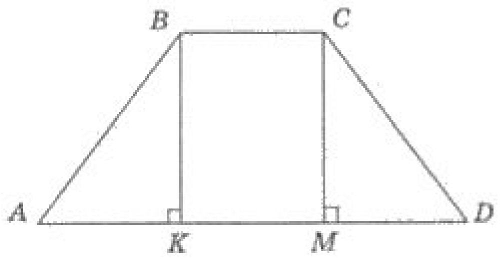
Приклад 2. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини гострого кута, утворює з бічною стороною кут 32°. Знайдіть кути трапеції.

Розв'язання (мал. 28). 1) Оскільки *AK* - висота трапеції, то $\angle KAD = 90^0$.

Тому $\angle BAD = 90^0 - 32^0 = 58^0$.

2) $\angle D = \angle A = 58°$; $\angle ABC = \angle C = 180° - 58° = 122°$.





Мал. 28 мал. 29

Приклад 3. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 17 см, а її основи дорівнюють 26 см і 10 см. Знайдіть висоту трапеції.

Розв'язання. 1) На малюнку 29 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$, у якої основи $AD = 26$ см, $BC = 10$ см; бічні сторони $AB = CD = 17$ см.

2) Проведемо дві висоти BK і CM. Тоді $\Delta ABK = \Delta DCM$ (за катетом і гіпотенузою), а тому $AK = MB$.

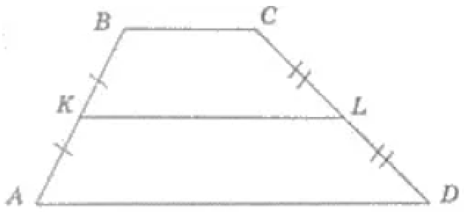
3) Оскільки $BKMC$ - прямокутник, то $KM = BC$.

Маємо $AK = MD = \dfrac{AD - KM}{2} = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{26 - 10}{2} = 8$ (см).

У ΔABK: $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см). Отже, висота трапеції дорівнює 15 см.

Середньою лінією трапеції називають відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.

На малюнку 30 відрізок KL - середня лінія трапеції $ABCD$.



мал. 30

Властивість середньої лінії трапеції: Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

На малюнку 30 $KL \parallel AD$; $KL \parallel BC$ і $KL = \dfrac{AD + BC}{2}$.

Приклад 1. Бічні сторони трапеції дорівнюють 6 см і 7 см, а її середня лінія - 9 см. Знайдіть параметри трапеції.

Розв'язання. 1) На малюнку 30 зображено трапецію, у якої бічні сторони $AB = 6$ см, $CD = 7$ см; середня лінія $KL = 9$ см.

2) Оскільки $KL = \dfrac{AD + BC}{2}$, то $9 = \dfrac{AD + BC}{2}$; $AD + BC = 18$ (см).

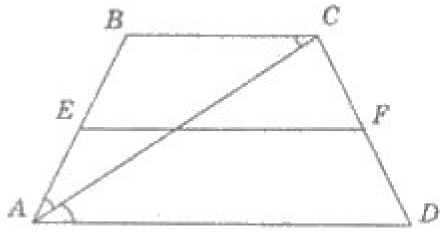
3) Тоді периметр

$P = AB + BC + CD + DA = AB + CD + (AD + BC) = 6 + 7 + 18 = 31$ (см).

Приклад 2. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи відносяться, як 1:2, а периметр трапеції дорівнює 60 см.

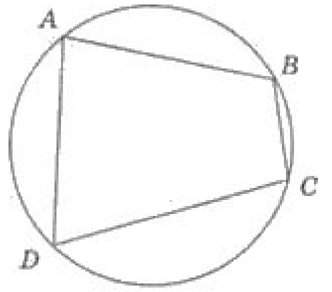
Розв'язання. 1) Нехай $ABCD$ - дана трапеція (мал. 31). $BC : AD = 1 : 2$; $\angle BAC = \angle CAD$; EF - середня лінія.

2) Позначимо $BC = x$, тоді $AD = 2x$ і $EF = \frac{2x + x}{2} = \frac{3}{2}x$.
3) $\angle CAD = \angle BCA$ (внутрішні різносторонні при прямих AD і BC та січній AC). $\angle BAC = \angle CAD$ (за умовою). Тому $\angle BAC = \angle BCA$. Отже, ΔBAC - рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). Тому $AB = BC = x$. Також $CD = AB = x$.
4) Оскільки периметр трапеції дорівнює 60 см, маємо $x + x + x + 2x = 60$; $5x = 60$; $x = 12$ см.
5) Тоді $EF = 3/2 \cdot 12 = 18$ (см).



мал. 31

Чотирикутник називають вписаним в коло, якщо всі його вершини лежать на колі. (мал. 32). Коло при цьому називають описаним навколо чотирикутника.



мал. 32

Властивості вписаного чотирикутника.
1) Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.
На малюнку 32: $\angle A + \angle C = 180^0$; $\angle B + \angle D = 180^0$. Таким чином, у вписаному чотирикутнику $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.
2) Якщо трапеція є вписаним чотирикутником, то вона рівнобічна.
Приклад 1. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 117^0$; $\angle D = 67^0$.
Розв'язання.
$\angle A = 180^0 - \angle C = 180^0 - 117^0 = 63^0$; $\angle B = 180^0 - \angle D = 180^0 - 67^0 = 113^0$.
Приклад 2. Трапеція вписана у коло, радіус якого 10 см, так, що діаметр є більшою основою трапеції. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює бічній стороні.
Розв'язання. 1) Нехай трапеція $ABCD$ вписана у коло вказаним способом, точка O - центр кола; $O \in AD$. Тоді $AD = 2 \cdot AO = 2 \cdot 10 = 20$ (см).
2) $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD$ (за трьома сторонами).

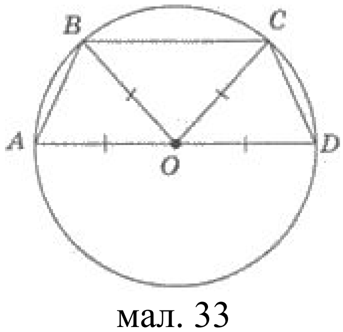
Тому $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

3) Оскільки ΔAOB - рівнобедрений і $\angle AOB = 60^0$, то $\angle BAO = \angle OBA = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$, тобто ΔAOB - рівносторонній.

$AB = AO = 10$ см.

4) Тоді $BC = AB = 10$ см і $CD = AB = 10$ см.

5) Периметр трапеції $P_{ABCD} = AD + 3 \cdot AB = 20 + 10 \cdot 3 = 50$ (см).



мал. 33

Ознаки вписаного чотирикутника. Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо такого чотирикутника можна описати коло.

З цієї ознаки слідує, що:

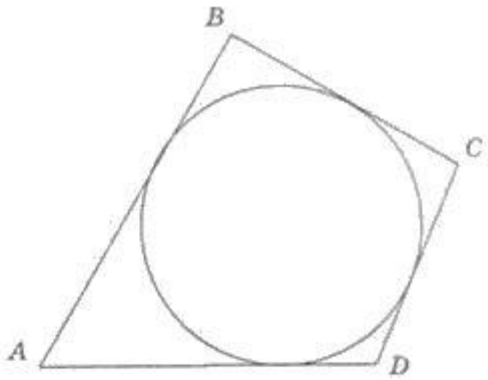
1) навколо будь-якого прямокутника можна описати коло;

2) навколо рівнобедреної трапеції можна описати коло.

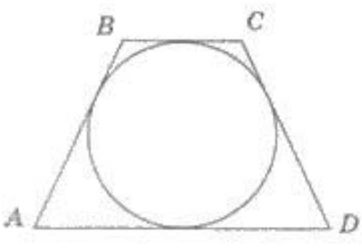
Чотирикутник називають описаним навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола (мал. 34). Коло при цьому називають вписаним у чотирикутник.

Властивість описаного чотирикутника: в описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні.

На малюнку 34: $AD + BC = AB + CD$. Крім того можна зауважити, що $AD + BC = AB + CB = \frac{P_{ABCD}}{2}$.



мал. 34



мал. 35

Приклад. Коло вписане в рівнобедрену трапецію, периметр якої 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

Розв’язання (мал. 35).

1) $AB + CD = \frac{P_{ABCD}}{2} = \frac{20}{2} = 10$ (см).

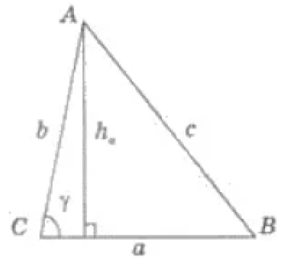
2) Трапеція рівнобічна. Тому $AB = CD = 10/2 = 5$ (см).

Ознака описаного чотирикутника. Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то цей чотирикутник можна вписати в коло.

З цієї ознаки слідує, що у будь-який ромб можна вписати коло.

Лекція 11
Площі трикутників та чотирикутників
Формули для обчислення площі трикутника.

Площа трикутника S (мал. 1) обчислюється за такими формулами (a, b, c - сторони трикутника; h_a - висота, проведена до сторони a; γ - кут між сторонами a і b): $S = \frac{1}{2} a h_a$; $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.



мал. 1

Також застосовується формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ – півпериметр}$$

і формули $S = pr$ і $S = abc/4R$, де r - радіус вписаного кола; R – радіус описаного кола. З формули $S = 1/2ah_a$ можна знайти висоту $h_a = 2S/a$, а з формули $S = pr$ і $S = abc/4R$, відповідно r і R:

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Площу прямокутного трикутника S з катетами a і b можна знаходити за формулою:

$$S = \frac{ab}{2},$$

а площу правильного трикутника зі стороною a за формулою:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Приклад 1. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 3 см, а кут між ними 60º.

Розв’язання. Маємо $a = 6$ см; $b = 3$ см; $\gamma = 60^\circ$. Тоді:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{18\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = 4{,}5\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Зауважимо, що найбільшою висотою трикутника є та, що проведена до найменшої сторони; найменшою висотою є та висота, яка проведена до найбільшої сторони.

Приклад 2. Знайдіть найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 25 см; 29 см і 6 см.

Розв’язання. 1) Знайдемо площу трикутника S за формулою Герона:

$$p = \frac{25+29+6}{2} = 30 \text{ (см)}; \quad S = \sqrt{30(30-25)(30-29)(30-6)} = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Найбільшою висотою трикутника є висота, проведена до сторони, що дорівнює 6 см, отже: $h = 2S/a = (2 \cdot 60)/6 = 20$ (см).

Приклад 3. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Знайдіть радіус кола R, описаного навколо трикутника та радіус кола r, вписаного в трикутник.

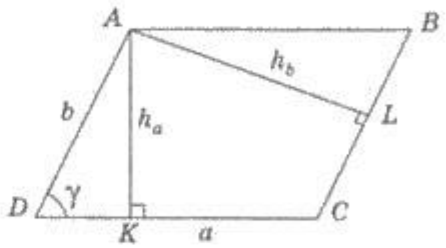
Розв’язання. 1) Знайдемо площу трикутника за формулою Герона;

$$p = \frac{4+13+15}{2} = 16 \text{ (см)}; \quad S = \sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)} = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

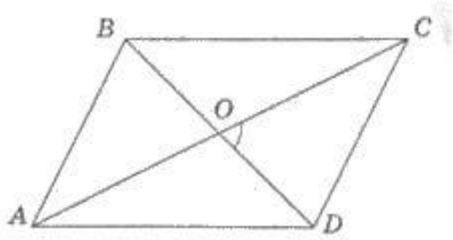
2) Тоді $R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8} = 8{,}125$ (см); $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{16} = 1{,}5$ (см).

Формули для обчислення площі паралелограма.

Площа паралелограма 8 (мал. 2 і мал. 3) обчислюється за такими формулами (a і b - сторони паралелограма; γ - кут між ними; h_a і h_b - висоти проведені відповідно до сторін a і b):



мал. 2



мал. 3

Приклад 1. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см. Висота, проведена до більшої сторони дорівнює 3 см. Знайдіть висоту, проведену до меншої сторони.

Розв’язання. 1) Маємо $a = 6$ см; $b = 8$ см; $h_b = 3$ см. Необхідно знайти h_a.

2) Оскільки $S = ah_a$ і $S = bh_b$, то $ah_a = bh_b$. Маємо $6 \cdot h_a = 8 \cdot 3$; $h_a = 4$ см.

Приклад 2. Дві висоти паралелограма дорівнюють 2 см і 3 см, а кут між ними 60º. Знайдіть площу паралелограма.

Розв’язання. 1) На малюнку 2 $h_a = 2$ см; $h_b = 3$ см; $\angle KAL = 60^0$.

2) В чотирикутнику $AKCL$: $\angle C = 360^0 - \left(60^0 + 2 \cdot 90^0\right) = 360^0 - 240^0 = 120^0$.

3) $\angle D = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

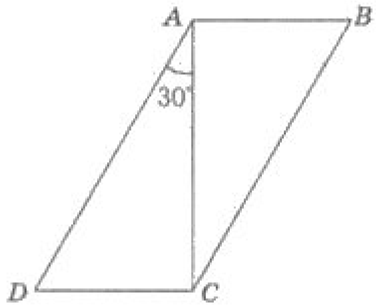
4) В ΔDKA ($\angle K = 90^\circ$): $\sin \angle ADK = \frac{AK}{AD}$;

$$AD = \frac{h_a}{\sin\gamma} = \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ (см)}.$$

5) $S = bh_b = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3 = 4\sqrt{3}$ (см²).

Приклад 3. Периметр паралелограма дорівнює 90 см, а гострий кут дорівнює 60°. Діагональ паралелограма ділить його тупий кут на частини у відношенні 1:3. Знайдіть площу паралелограма.

Розв'язання. 1) Тупий кут паралелограма дорівнює 180º - 60° = 120°. Оскільки діагональ ділить його у відношенні 1:3, то вона утворює зі сторонами паралелограма кути 30° і 90°, тобто діагональ є також висотою (мал. 4).



мал. 4

2) Нехай $AD = x$, тоді $DC = x/2$ (як катет, що лежить проти кута 30°).

3) Оскільки периметр дорівнює 90 см, то $2\left(x+\frac{x}{2}\right)=90;\ x=30$ см.

4) Отже, AD = 30 см, DC = 15 см.

5) В ΔADC: $AC=\sqrt{AD^2-DC^2}=\sqrt{30^2-15^2}=15\sqrt{3}$ (см).

6) Тоді площа паралелограма $S = DC\cdot AC = 15\cdot 15\sqrt{3} = 225\sqrt{3}$ (см²).

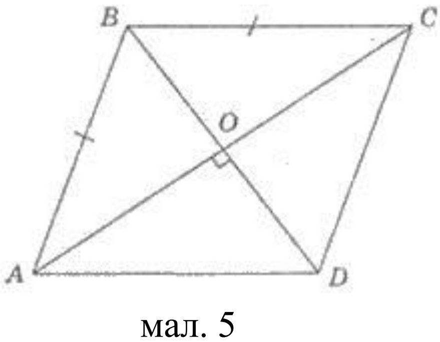
Формули для обчислення площі ромба.

Площа ромба S (мал. 5 і мал. 6) обчислюється за такими формулами (*a* - сторона ромба; *h* - висота ромба; γ - кут ромба):

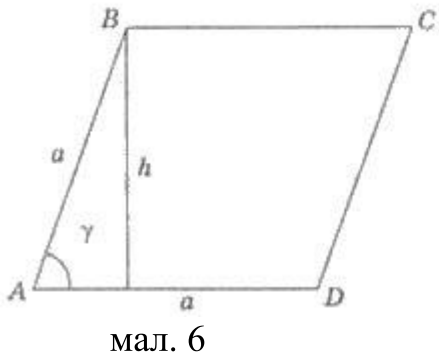
$$S = ah$$

$$S = a^2 \sin\gamma$$

$$S = \frac{1}{2} AC\cdot BD$$



мал. 5



мал. 6

Приклад 1. Кути ромба відносяться як 1:3, а сторона ромба дорівнює 4 см. Знайдіть площу ромба.

Розв'язання. 1) Оскільки $\angle A : \angle ABC = 1 : 3$ (мал. 5), то позначимо $\angle A = x$, $\angle ABC = 3x$.

2) Маємо рівняння $x + 3x = 180°$; $4x = 180°$; $x = 45°$. Отже, $\angle A = 45°$.

3) Тоді площа ромба $S=a^2\sin\gamma=4^2\cdot\sin 45°=16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$ (см²).

Приклад 2. Периметр ромба дорівнює 20 см, а сума його діагоналей - 14 см. Знайдіть площу ромба.

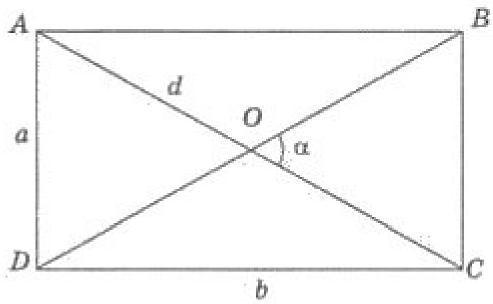
Розв'язання. 1) Оскільки периметр ромба дорівнює 20 см, то його сторона a = AB = 20/4 = 5 (см).
2) Позначимо діагональ ромба $AC = d_1$ і $BD = d_2$ (мал. 5). Тоді за умовою $d_1 + d_2 = 14$.

3) В ΔAOD: $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 5^2$; $d_1^2 + d_2^2 = 100$.

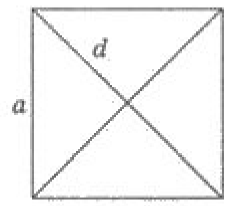
4) Маємо систему $\begin{cases} d_1 + d_2 = 14, \\ d_1^2 + d_2^2 = 100. \end{cases}$ розв'язавши яку отримаємо $d_1 = 6$; $d_2 = 8$ або $d_1 = 8$; $d_2 = 6$.
5) Отже, діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 8 см. Тоді його площа $S = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см²).

Формули для обчислення площі прямокутника і квадрата.

Площа прямокутника S (мал. 7) обчислюється за такими формулами (a і b - сторони прямокутника; d - його діагональ; α - кут між діагоналями):



мал. 7



мал. 8

Площа квадрата в (мал. 8) обчислюється за такими формулами формували (a - сторона квадрата; d - його діагональ):

$$S = a^2$$

$$S = \frac{1}{2}d^2$$

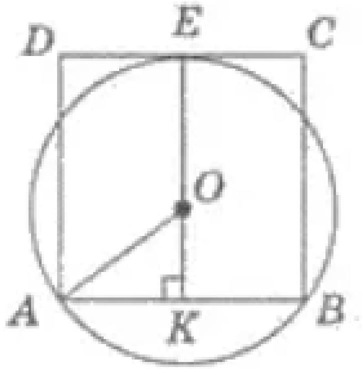
Приклад 1. Знайдіть площу прямокутника діагональ якого дорівнює 10 см і утворює з однією із сторін кут 30°.
Розв'язання. 1) На малюнку 7: AC = 10 см; $\angle ACD = 30°$.
2) ΔDOC - рівнобедрений ($DO = OC$), тому $\angle DOC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$. Тоді $\alpha = 180° - 120° = 60°$.

3) Площа прямокутника $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \sin 60° = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ (см²).
Приклад 2. Дано квадрат, дві вершини якого лежать на колі радіуса 10 см, а дві інші - на дотичній до цього кола. Знайдіть площу квадрата.
Розв'язання. 1) На малюнку 9 квадрат $ABCD$ і коло, радіус якого дорівнює 10 см з центром у точці O розташовані так, як сказано в умові задачі. Проведемо через центр кола перпендикуляр EK до сторін AB і CD.

2) Позначимо сторону квадрата $AB = x$. Тоді в ΔAOK: $\angle K = 90^\circ$; $AK = \frac{x}{2}$; $OK = EK - EO = x - 10$; $AO = 10$.

3) Маємо $AO^2 = AK^2 + KO^2$; $10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x-10)^2$; $5x - 80x = 0$. Враховуючи $x > 0$, маємо $x = 16$ см.

4) Площа квадрата $S = 16^2 = 256$ (см^2).



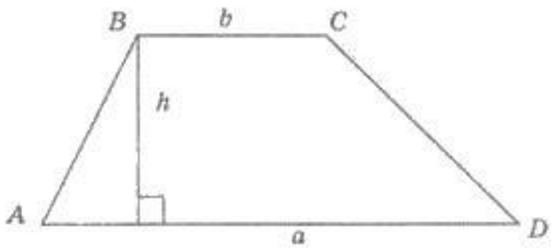
Мал. 9

Формули для обчислення площі трапеції.

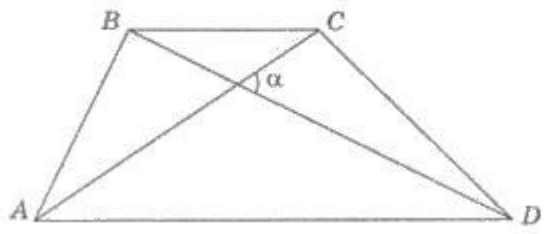
Площа трапеції S (мал. 10 і мал. 11) обчислюється за такими формулами (a і b - основи трапеції, h - її висота):

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$S = AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$$



мал. 10



мал. 11

Приклад 1. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагональ якої дорівнює 4 см, а кут між діагоналями дорівнює 30°.

Розв'язання. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні $d_1 = d_2 = 4$ (см). Тоді площа трапеції $S = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 4$ (см^2).

Приклад 2. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а центр описаного кола належить більшій основі. Знайдіть площу трапеції.

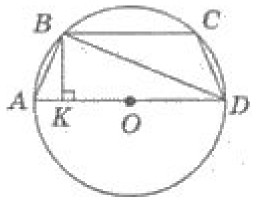
Розв'язання. 1) Трапеція $ABCD$ вписана в коло так, що AD - діаметр кола (мал. 12). $AD = 20$ см; $BC = 12$ см.

2) $AK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{20-12}{2} = 4$ (см).

3) Тоді $KD = AD - AK = 20 - 4 = 16$ (см).

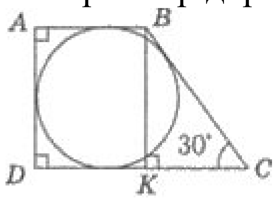
4) $\angle ABD = 90°$ (як такий, що спирається на діаметр). Тоді за властивістю пропорційних відрізків прямокутного трикутника: $BK = \sqrt{AK \cdot KD} = \sqrt{4 \cdot 16} = 8$ (см).

5) Площа трапеції $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK = \frac{20 + 12}{2} \cdot 8 = 128$ (см²).



мал. 12

Приклад 3. Навколо кола описано прямокутну трапецію з гострим кутом 30°. Знайдіть площу трапеції, якщо її периметр дорівнює 24 см.



мал. 13

Розв’язання. 1) Оскільки трапеція є описаним чотирикутником, то $AB + CD = AD + BC = \frac{P}{2} = \frac{24}{2} = 12$ (см).

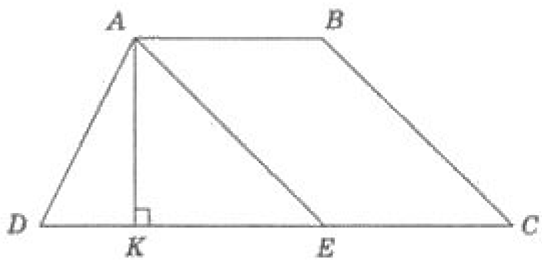
2) Нехай $BK = AD = h$ — висота трапеції.

3) В ΔBCK : $BC = 2 \cdot BK = 2h$ (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°).

4) Маємо $h + 2h = 12$; $3h = 12$; $h = 4$ (см).

5) Тоді площа трапеції $S = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{12}{2} \cdot 4 = 24$ (см²).

Приклад 4. Довжини паралельних сторін трапеції дорівнюють 25 см і см, а довжини паралельних - 20 і 13 см. Знайдіть площу трапеції.



мал. 14

Розв’язання. 1) На малюнку 14 зображено трапецію *ABCD*, у якої *DC* = 25 см; *AD* = 13 см, *BC* = 20 см. Оскільки *BC* - більша бічна сторона, то $\angle BCD$ - гострий, $\angle ADC$ може бути як гострим, так і тупим. Метод розв’язування задачі, що пропонується, підходить для обох випадків. На малюнку 14 *ADC* - гострий.

2) Проведемо $AE \parallel BC$ і AK – висоту трапеції і ΔAED. Оскільки $ABCD$ - паралелограм, то $AE = BC = 20$ см; $EC = AB = 4$ см. Маємо $DE = DC - EC = 25 - 4 = 21$ (см).

3) Знайдемо площу ΔADE за формулою Герона: $p = \frac{21+20+13}{2} = 27$ (см); $S_\Delta = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 14} = 126$ (см^2).

4) З іншого боку $S_\Delta = \frac{1}{2} DE \cdot AK$; $AK = \frac{2 \cdot 126}{21} = 12$ (см).

5) Тоді площа трапеції $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AK = \frac{4+25}{2} \cdot 12 = 174$ (см^2).

Лекція 12

Многокутники. Типи многокутників. Вписані та описані многокутники.

Многокутник та його елементи.

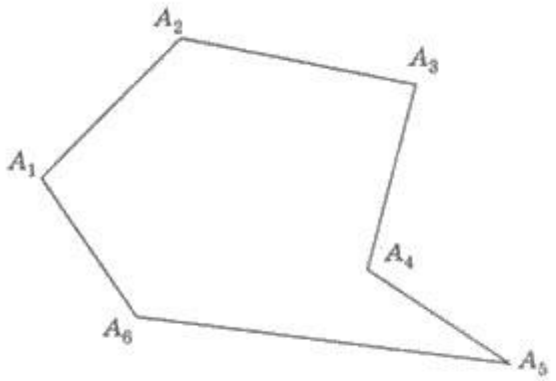
Розглянемо фігуру $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, зображену на малюнку 1. Вона складається з відрізків A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 і A_6A_1. При цьому вони розміщені так, що суміжні відрізки (A_1A_2 і A_2A_3, A_2A_3 і A_3A_4, ..., A_6 A_1 і A_1A_2) не лежать на одній прямій, а несуміжні відрізки не мають спільних точок.

Тому фігуру називають **многокутником**. Точки A_1, A_2, ..., A_6 називають вершинами многокутника, а відрізки A_1A_2, A_2A_3, ..., A_6A_1 - сторонами многокутника. Суму довжин усіх сторін многокутника називають **периметром многокутника**.

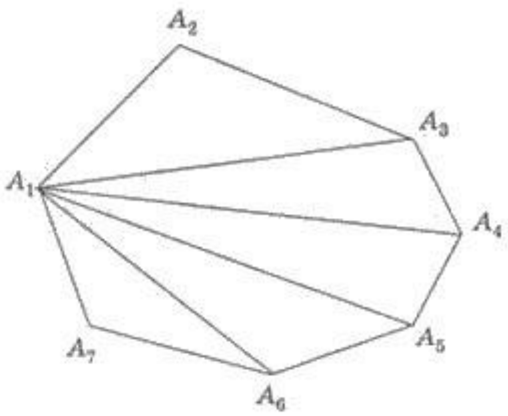
Найменше число сторін (а також вершин) многокутника - три. У такому випадку маємо трикутник. Також окремим видом многокутника є чотирикутник. Многокутник з n сторонами (вершини) називають n -кутником. На малюнку 1 зображено шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Дві сторони многокутника називають **сусідніми**, якщо вони мають спільну вершину; якщо ж сторони многокутника не мають спільної вершини, їх називають **не сусідніми**. Так, наприклад, сторони A_3A_4 і A_4A_5. - сусідні, а A_2A_3 і A_1A_6- не сусідні (мал. 1).

Дві вершини многокутника називають **сусідніми**, якщо вони належать одній стороні, якщо ж вершини многокутника не належать одній стороні, їх називають **не сусідніми**. Так, наприклад, вершини A_1 і A_2 - сусідні, A_3 і A_6 - не сусідні (мал. 1).



мал. 1



мал. 2

Відрізок, що сполучає дві несусідні вершини многокутника, називають **діагоналлю многокутника**. На малюнку 2 зображено діагоналі многокутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, що виходять з вершин A_1: A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6.

Приклад 1. Скільки діагоналей має n -кутник?

Розв'язання. З кожної вершини n -кутника виходить (n -3) діагоналі. Всіх вершин n, а кожна діагональ повторюється 2 рази, наприклад, A_1A_3 і A_3A_1. Тому всіх діагоналей у n -кутнику буде $(n(n - 3))/2$.

Приклад 2. Кількість діагоналей n -кутника на 25 більша за кількість його сторін. Знайдіть n.

Розв'язання. Використовуючи формулу попереднього прикладу та умову цього прикладу, маємо $(n(n - 3))/2 - n = 25$. Враховуючи $n > 0$, отримаємо $n = 10$.
Кути, сторони яких містять сторони многокутника, називають **кутами многокутника**.

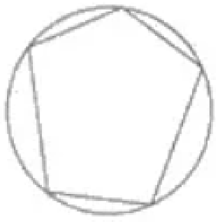
Опуклий многокутник. Сума кутів описаного многокутника.

Якщо всі кути многокутника менші за розгорнутий, то многокутник називають **опуклим**, якщо хоч один кут многокутника більший за розгорнутий, то многокутник називають **неопуклим**. На малюнку 2 зображено опуклий многокутник, а на малюнку 1 — неопуклий.
Сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180°(n - 2)$.
Приклад 1. Чи існує опуклий многокутник; у якого сума кутів дорівнює: 1) 1980°; 2) 3610°?
Розв'язання. 1) Припустимо, що існує n -кутник, у якого сума кутів дорівнює 1980°. Тоді $180^o (n - 2) = 1980°$; $n - 2 = 11$; $n = 13$. Отже, існує многокутник, у якого сума кутів дорівнює 1980. Це 13-кутник.
2) По аналогії з попереднім випадком, маємо $180^o (n - 2) = 3610°$; $n-2=20\frac{1}{18}$
$n=22\frac{1}{18}$. Оскільки $n \notin N$, то не існує опуклого многокутника, у якого сума кутів дорівнює 3610^o.
Кути опуклого многокутника іноді називають ще **внутрішніми кутами многокутника**. Кут, суміжний з внутрішнім кутом многокутника, називають **зовнішнім кутом многокутника**.
Сума зовнішніх кутів опуклого n -кутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.
Приклад 2. Знайдіть кількість діагоналей опуклого n -кутника, якщо сума його зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині, на 1800^o менша за суму внутрішніх кутів.
Розв'язання. 1) Оскільки сума зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°, то за умовою задачі можна знайти суму внутрішніх кутів n -кутника: $360° + 1800^o = 2160^o$.
2) Маємо рівняння $180^o(n - 2) = 2160°$; $n - 2 = 12$; $n = 14$. Маємо чотирнадцятикутник.
3) Кількість його діагоналей дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}=\frac{14\cdot 11}{2}=77$.

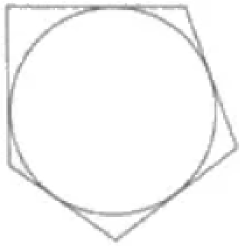
Вписані в коло та описані навколо кола многокутники.

Многокутник називають **вписаним в коло**, якщо всі його вершини лежать на колі (мал. 3). Коло при цьому називають описаним навколо многокутника.

Многокутник називають **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до кола (мал. 4). Коло при цьому називають вписаним у многокутник.



мал. 3

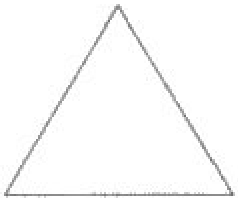


мал. 4

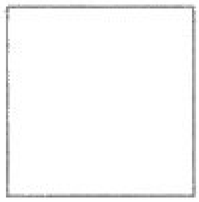
Означення правильного многокутника.

Правильним многокутником називають опуклий многокутник, у якого всі сторони рівні і всі кути рівні.

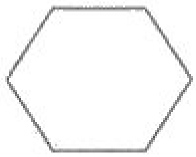
Прикладами правильних многокутників є рівносторонній трикутник (мал. 5) і квадрат (мал. 6). На малюнку 7 зображений правильний шестикутник.



мал. 5



мал. 6



мал. 7

Нехай α_n - внутрішній кут правильного n-кутника. Легко бачити, що

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

Наприклад, за цією формулою: кут правильного трикутника:

$$\alpha_3 = \frac{180°(3-2)}{3} = 60°,$$

правильного чотирикутника (квадрата) :

$$\alpha_4 = \frac{180°(4-2)}{4} = 90°,$$

що узгоджується з відомим раніше.

Приклад 1. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його внутрішній кут дорівнює 150°.

Розв'язання. Маємо $\alpha_n = 150°$; $150° = (180°(n - 2))/n$; $150°n = 180°n - 360°$; $30°n = 360°$; $n = 12$. Отже, кількість сторін правильного многокутника дорівнює 12.

Приклад 2. Знайдіть периметр правильного многокутника, сторона якого дорівнює 4 см, а зовнішній кут на 108° менший за внутрішній.

Розв'язання. 1) Нехай внутрішній кут правильного многокутника дорівнює α_n, тоді зовнішній - α_n -108°.

2) Оскільки внутрішній і зовнішній кути многокутника є суміжними, то $\alpha_n + \alpha_n - 108° = 180°$; $2\alpha_n = 288°$; $\alpha_n = 144°$.

3) Маємо рівняння для кількості сторін n правильного многокутника $144° = (180°(n - 2))/n$. Звідки $n = 10$.

4) Периметр многокутника $P = 4 \cdot 10 = 40$ (см).

Вписані в коло та описані навколо кола правильні многокутники.

Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло. Зауважимо, що:

1) коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане у нього, мають один і той самий центр;

2) коло, вписане у правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їх серединах.

Нехай α_n - сторона правильного n -кутника; R - радіус кола описаного навколо цього n -кутника, а r - радіус кола, вписаного в цей n -кутник. У наступну таблицю систематизуємо формули, що пов'язують між собою будь-які дві з розглянутих трьох величин.

Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$r = \dfrac{a_n}{2tg\dfrac{180°}{n}}$	$r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \dfrac{a_4}{2}$	$r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = R\cos\dfrac{180°}{n}$	$r = \dfrac{R}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Приклад 1. Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо правильного трикутника та вписаного в нього, якщо їх різниця дорівнює 4 см. Чому дорівнює сторона цього трикутника.

Розв'язання. 1) Позначимо $R = x$ см, тоді $r = (x - 4)$ см.

2) За відомою формулою $r = R/2$ маємо $x - 4 = x/2$; $x = 8$ см.

3) Отже, $R = 8$ см; $r = 4$ см; $a_3 = \dfrac{6 \cdot r}{\sqrt{3}} = \dfrac{6 \cdot 4}{\sqrt{3}} = \dfrac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$ (см).

Приклад 2. Радіус кола, вписаного у правильний многокутник, дорівнює 2 см, а радіус кола, описаного навколо нього 4 см. Знайдіть периметр многокутника.

Розв'язання. 1) Нехай n - кількість сторін правильного многокутника.

2) За відомою формулою маємо $r = R\cos\dfrac{180°}{n}$; $2\sqrt{3} = 4\cos\dfrac{180°}{n}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{180°}{n}$.

Враховуючи $n \in N$, $n \geq 3$, маємо $\dfrac{180°}{n} = 30°$; $n = 6$.

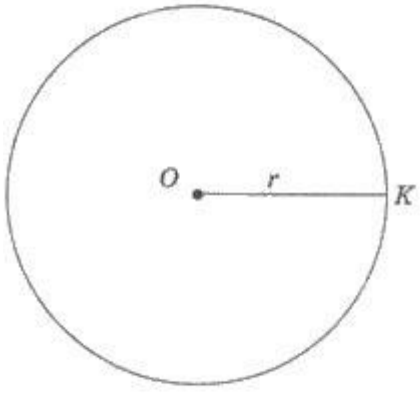
3) Отже, маємо шестикутник $a_6 = R = 4$ см.

4) Периметр $P = 6 - a_6 = 6 \cdot 4 = 24$ (см)

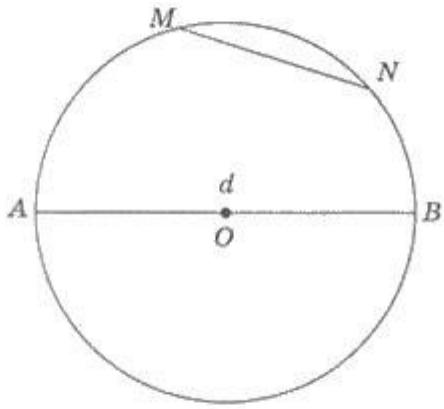
Лекція 13
Коло та круг. Сектор і сегмент.
Коло, його елементи.

Колом називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають **центром кола**, а відрізок, що сполучає центр кола з будь-якою точкою кола, називають **радіусом**.

На малюнку 1 зображено коло з центром у точці O і радіусом OK. Всі радіуси кола мають одну й ту саму довжину. Радіус кола часто позначають буквою r.



мал. 1



мал. 2

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають **хордою**. Хорду, що проходить через центр кола, називають **діаметром**. На малюнку 2 зображено хорду MN та діаметр AB. Діаметр кола часто позначають буквою d.

Діаметр кола удвічі довший за радіус: $\boldsymbol{d = 2r}$.

Розглянемо деякі **властивості елементів кола**.

1. Діаметр є найбільшою з хорд.
2. Діаметр з будь-якої точки видно під прямим кутом.

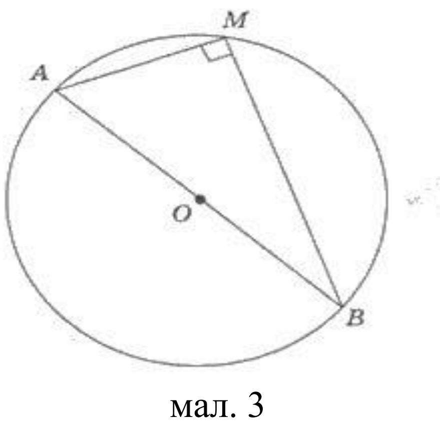
На малюнку 3: AB — діаметр кола, M — довільна точка кола. Тоді $\angle AMB = 90°$.

3. Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

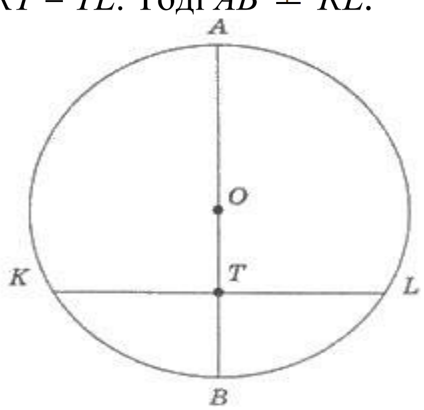
На малюнку 4: AB — діаметр, KL — хорда, $AB \perp KL$. Тоді $KT = TL$.

4. Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є іншим діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

На малюнку 4: AB — діаметр, KL — хорда, $KT = TL$. Тоді $AB \perp KL$.



мал. 3



мал. 4

Круг, його елементи.

Частину площини, обмежену колом, разом із самим колом, називають **кругом** (мал. 5).

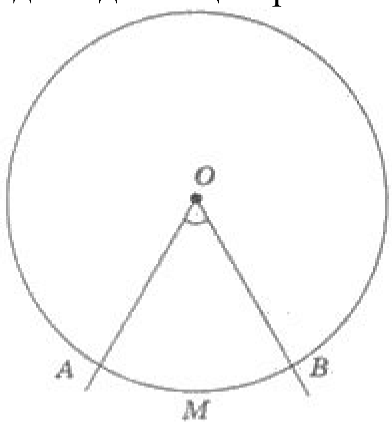
мал. 5

Центром, радіусом, діаметром, хордою круга називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке є межею даного круга.

Центральні та вписані кути.

Центральним кутом називають кут з вершиною у центрі кола.

На малюнку 6 $\angle AOB$ — центральний кут. Він розбиває коло на дві дуги *AMB* і *ANB*. Дугу кола можна вимірювати в градусах: градусною мірою дуги кола називають градусну міру відповідного центрального кута.



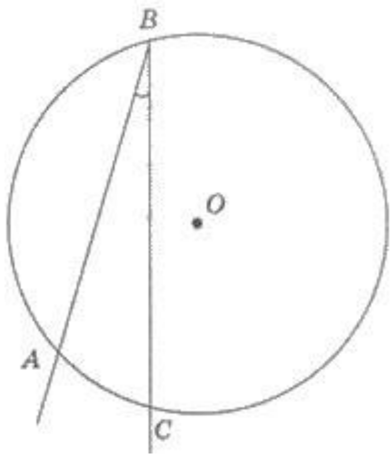
мал. 6

Наприклад, якщо $\angle AOB = 60^0$, то $\smile$ AMB = 60° (використано значок дуги $\smile$), а $\smile$ *ANB* = 360° - 60° = 300°.

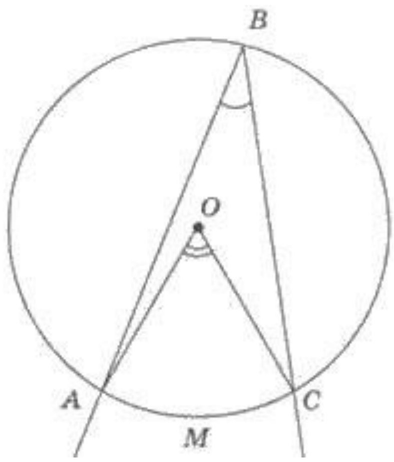
Кажуть, що $\angle AOB$ спирається на дугу *AMB*. **Вписаним кутом** називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають його.

На малюнку 7: $\angle ABC$ — вписаний кут. Властивість вписаного кута. Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

На малюнку 8: $\angle ABC$ — вписаний кут, що спирається на дугу *AMC*; $\angle AOC$ — центральний кут, що спирається на ту саму дугу *AMC*. Тоді $\angle ABC = \frac{\cup AMC}{2} = \frac{\angle AOC}{2}$.



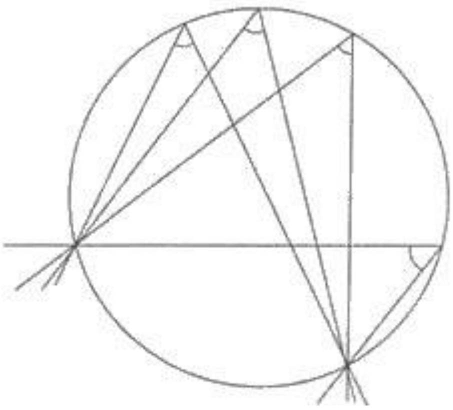
мал. 7



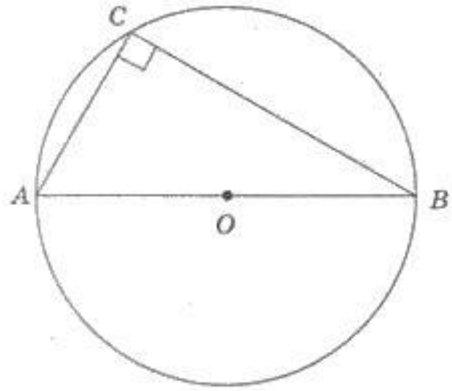
мал. 8

Наслідок 1. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні (мал. 9).

Наслідок 2. Вписаний кут, що спирається на діаметр прямий (мал. 10).

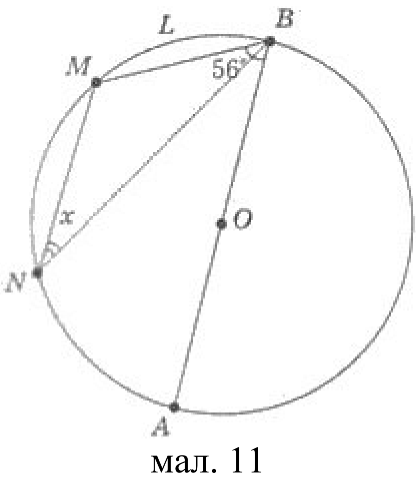


мал. 9



мал. 10

Приклад. Точка O — центр кола (мал. 11), $\angle ABM = 56^0$. Знайдіть величину кута x.



мал. 11

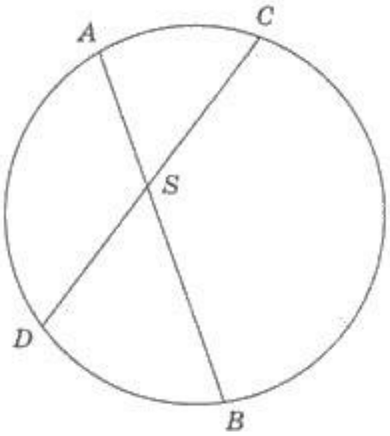
Розв'язання. 1) $\angle MBA = 56^0$, тому $\smile$ MNA = 56° · 2 = 112°.

2) $\cup MLB = 180° - 112° = 68°$.

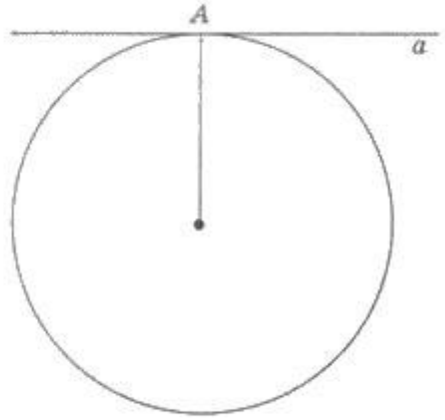
3) Тоді $\angle x = \dfrac{\cup MLB}{2} = \dfrac{68°}{2} = 34°$.

Властивість двох хорд, що перетинаються.

Якщо хорди AB і CB перетинаються в точці S, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$ (мал. 12).



мал. 12



мал. 13

Приклад. Хорда AB, довжина якої 11 см, перетинається з хордою CD в точці S. AS = 3 см; CS = 4 см. Знайдіть довжину хорди CD.

Розв’язання. 1) SB = AB - AS = 11 - 3 = 8 (см).

2) За властивістю хорд, що перетинаються

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS;$$

$$3 \cdot 8 = 4 \cdot DS;\ DS = 6 \text{ (см)}.$$

3) Тоді $CD = DS + SC = 6 + 4 = 10$ (см).

Дотична до кола та її властивості.

Дотичною до кола називають пряму, яка має одну спільну точку з колом. Цю точку називають **точкою дотику**.

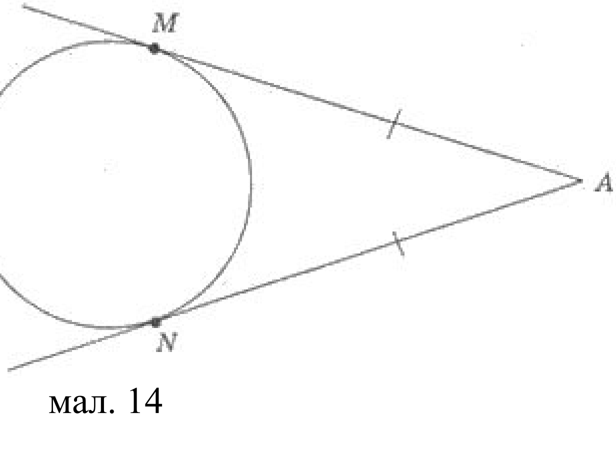
На малюнку 13 пряма a — дотична до кола із центром у точці O; точка A — точка дотику.

Властивості дотичної до кола:

1. Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного у точку дотику. На малюнку 13: $a \perp OA$.

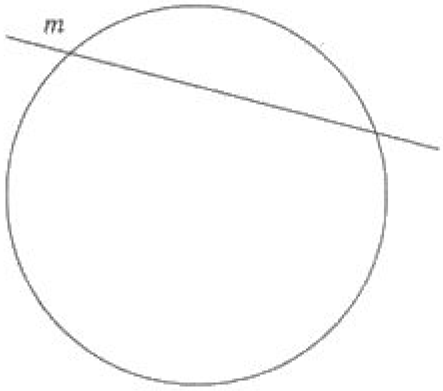
2. Відстань від центра кола до дотичної до цього кола дорівнює радіусу кола. На малюнку 13: відстань від центра кола точки O до дотичної a дорівнює радіусу кола OA.

3. Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола рівні між собою. На малюнку 14: до кола із точки A проведено дві дотичні; M і N — точки дотику. Тоді $AM = AN$.



мал. 14

Пряму, яка має з колом дві спільні точки називають **січною**. На малюнку 15 пряма m — січна до кола.

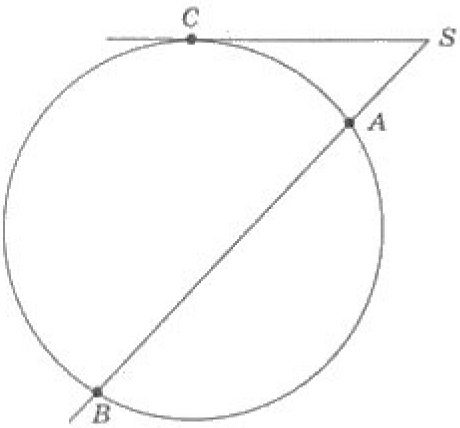


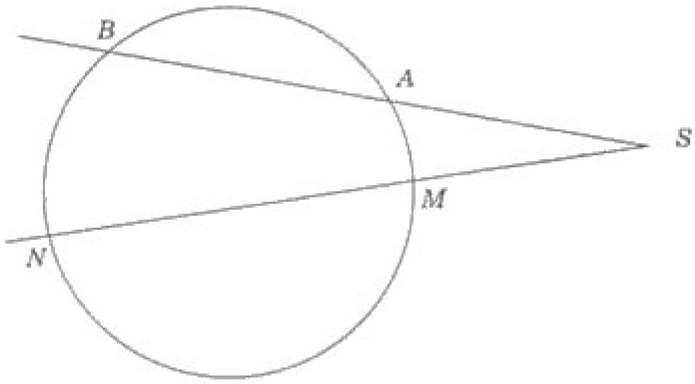
мал. 15

Властивості дотичної та січної.

1. Якщо з точки S, яка знаходиться поза колом, провести січну, яка перетинає коло в точках A і B та січну SC, де C — точка дотику, то

$$SC^2 = SA \cdot SB \text{ (мал. 16).}$$





мал. 16 мал. 17

2. Якщо з точки S провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга в точках M і N, то

$$SA \cdot SB = SM \cdot SN \text{ (мал. 17).}$$

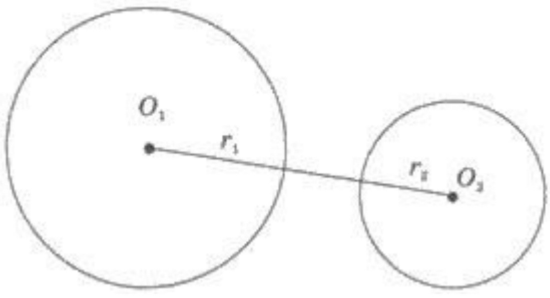
Приклад. З точки S, що знаходиться поза колом, до кола проведено січну, що перетинає коло в точках A і B та січну SC завдовжки 6 см. AB = 5 см. Знайдіть SA, якщо $SA < SB$.

Розв’язання (мал. 16). Нехай $SA = x$ см, тоді $SB = x + 5$ (см). Маємо $SC^2 = SA \cdot SB$; $6^2 = x(x + 5)$; $x^2 + 5 - 36 = 0$. Враховуючи $x > 0$, маємо $x = 4$ (см). Отже, $SA = 4$ (см).

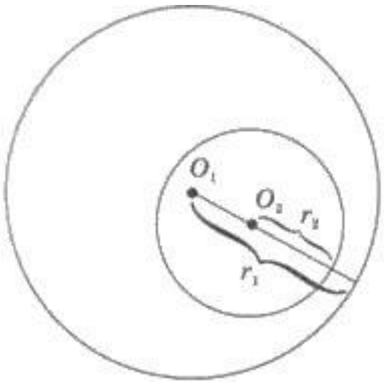
Взаємне розміщення двох кіл.

Розглянемо взаємне розміщення двох кіл, центри яких точки O_1 і O_2, а радіуси відповідно r_1 і r_2, де $r_1 \geq r_2$.

а) Два кола не перетинаються, тобто не мають спільних точок (мал. 18 і мал. 19).

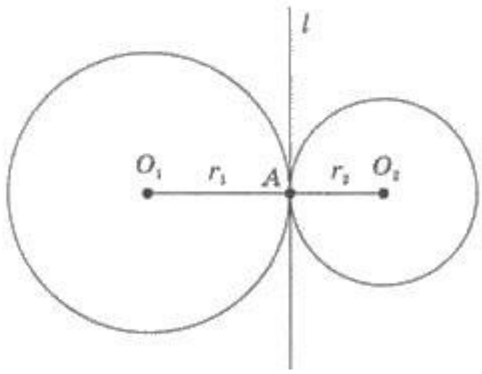


мал. 18

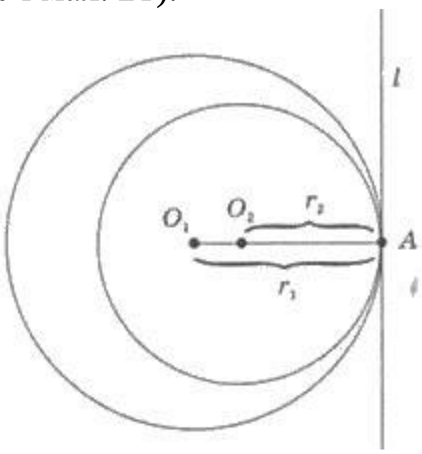


мал. 19

Тоді $O_1O_2 > r_1 + r_2$ (мал. 18) або $O_1O_2 < r_1 - r_2$ (мал. 19).
б) Два кола мають одну спільну точку (мал. 20 і мал. 21).



мал. 20



мал. 21

В цьому випадку кажуть, що кола дотикаються, а спільну точку називають **точкою дотику**.
Можливі два випадки розміщення: дотик називають **зовнішнім**, якщо центри кіл розміщенні по різні боки від точки дотику (мал. 20) і внутрішнім, якщо по один бік від спільної точки (мал. 21).

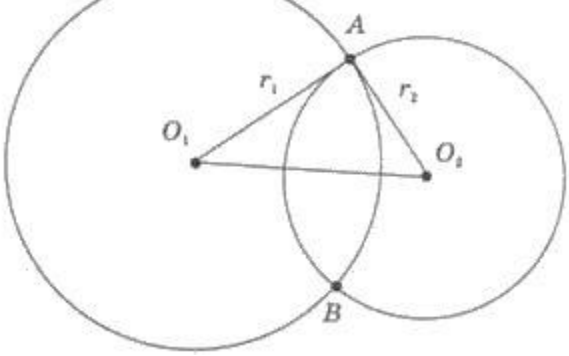
У випадку **зовнішнього дотику**:

1) $O_1O_2 = r_1 + r_2$.
2) У точці A існує спільна дотична l до двох кіл.
3) $l \perp O_1O_2$.

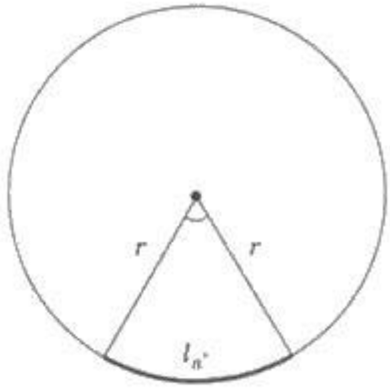
У випадку **внутрішнього дотику**:

1) $O_1O_2 = r_1 - r_2$.
2) У точці A існує спільна дотична l до двох кіл.
3) $l \perp O_1O_2$.

в) Два кола мають дві спільні точки (мал. 22).



мал. 22



мал. 23

В цьому випадку: $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$.

Приклад 1. Відстань між центрами двох кіл $O_1O_2 = 9$ см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють: 1) $r_1 = 6$ см; $r_2 = 3$ см; 2) $r_1 = 7$ см; $r_2 = 4$ см; 3) $r_1 = 2$ см; $r_2 = 5$ см.

Розв'язання. 1) $9 = 6 + 3$; $O_1O_2 = r_1 + r_2$; зовнішній дотик.

2) $7 – 4 < 9 < 7 + 4$; $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$; кола перетинаються.

3) $9 > 2 + 5$; $O_1O_2 > r_1 + r_2$; кола не перетинаються.

Приклад 2. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їх центрами 18 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 4:5.

Розв'язання. Позначимо радіуси кіл $r_1 = 4x$ см; $r_2 = 5x$ см. Тоді $r_1 + r_2 = 18$; $4x + 5x = 18$; $9x = 18$; $x = 2$. Отже, $r_1 = 4 \cdot 2 = 8$ (см), $r_2 = 5 \cdot 2 = 10$ (см).

Довжина кола. Довжина дуги кола.

Довжина кола, радіус якого дорівнює r, обчислюється за формулою:

$$C = 2\pi r.$$

Приклад 1. Знайдіть діаметр кола, довжина якого дорівнює 18π см.

Розв'язання.

$C = 2\pi r;\ r = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{18\pi}{2\pi} = 9$ см, тоді діаметр $d = 2r = 2 \cdot 9 = 18$ (см).

Довжина дуги l_{n^0}, що відповідає центральному куту $n°$ кола радіусом r (мал. 23) обчислюється за формулою:

$$l_{n^0} = \frac{\pi r n}{180}$$

Приклад 2. Радіус кола дорівнює 4 см. Знайдіть довжину дуги, що відповідає центральному кут 135°.

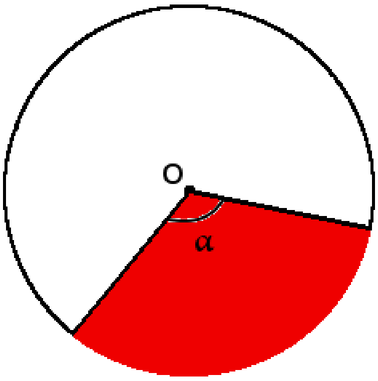
Розв'язання. $l_{135^0} = \dfrac{\pi \cdot 4 \cdot 135}{180} = 3\pi(\text{см})$

Приклад 3. Довжина дуги кола дорівнює 6π см, а її градусна міра — 72°. Знайдіть радіус кола.

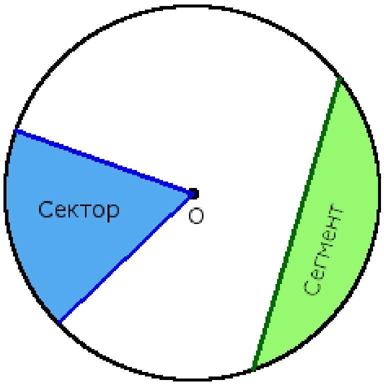
Розв'язання. $6\pi = \dfrac{\pi r \cdot 72^\circ}{180};\ 6 = \dfrac{2r}{5};\ r = 15$ (см).

Частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута називається **круговим сектором**.

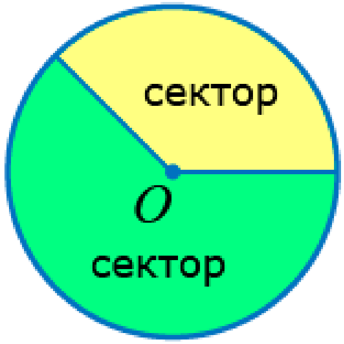
Сектор – це частина круга, обмежена двома радіусами і дугою. Два радіуси розділяють круг на два сектори.



мал. 24



мал. 25



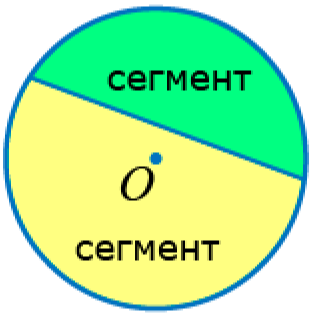
мал. 26

Площа кругового сектора обчислюється за формулою:

$S = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{\pi R^2 \beta^0}{360^0}$, де R - радіус круга, а α - радіанна міра кута, β - градусна міра відповідного центрального кута.

Круговий сегмент – це спіральна частина круга і півплощини.

Сегмент – частина круга, яка обмежена дугою і хордою, що з’єднує її кінці. Будь-яка хорда ділить круг на два сегменти.



Площа сегмента, який не дорівнює півкругу, обчислюється за формулою: $S = \frac{\pi R^2}{360^0 \alpha \pm S_\Delta}$, де α - градусна міра центрального кута, що містить дугу кругового сегмента, а S_Δ - площа трикутника з вершинами в центрі круга і на кінцях радіусів, які обмежують даний сектор. Знак «+» треба брати, коли $\alpha > 180^0$, а знак «-», - тоді, коли $\alpha < 180^0$.

Лекція 14

Загальні теореми стереометрії.

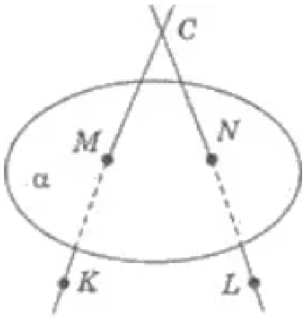
Стереометрія - це розділ геометрії, який вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

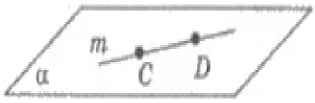
Позначення фігур в стереометрії: точка *A*, пряма *AB* або пряма *a*, площина *ABC*. Записи $A \in \alpha$ (точка *A* належить площині α), $a \subset \alpha$ (пряма *a* лежить в площині α або площина α проходить через пряму *a*). Запис $a \in \alpha$ є неправильним.

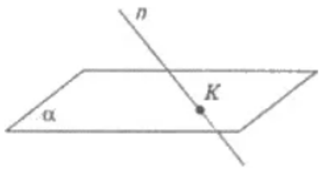
Аксіоми стереометрії

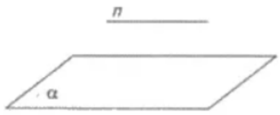
С₁. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належать їй.

На малюнку 1 точка *M* і *N* належать площині α (площина α проходить через ці точки), а точки *C*, *K* і *L* - не належать цій площині. Для запису цього, як і планіметрії, використовують значки $\in$ і $\notin$. Наприклад, $M \in \alpha$; $K \notin \alpha$.









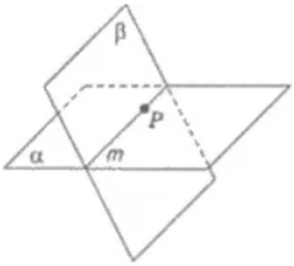
мал. 1 мал. 2 мал. 3 мал. 4

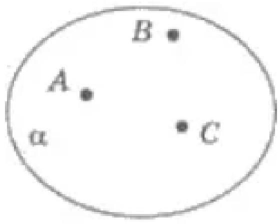
С₂. Якщо дві точки прямої належать площині, то всі точки прямої належать цій площині.

У цьому випадку кажуть, що пряма належить площині, або площина проходить через пряму. На малюнку 2 точки *C* і *D* прямої *m* належать площині α, тому і пряма *m*, якій належать ці точки, належить площині α.

Це записують так: $m \subset \alpha$. Запис $n \not\subset \alpha$ означає, що пряма *n* не належить площині α (мал. 3 і мал. 4), тобто існує така точка прямої *n*, яка не належить площині α. На малюнку 3 пряма *n* та площина мають спільну точку *K*. Говорять, що пряма *n* і площина α перетинаються в точці *K*. Це записують так: $n \cap \alpha = K$.

Якщо через пряму *m* проходять дві різні площини α і β, то говорять, що площини α і β перетинаються по прямій *m* (мал. 5); записують це так: $\alpha \cap \beta = m$.





Мал. 5 мал. 6

С$_3$. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

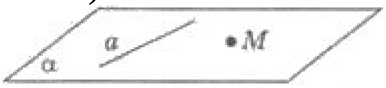
На малюнку 5 площини α і β мають спільну точку *Р* (точка *Р* належить як площині α, так і площині β, яка в свою чергу, належить прямій *m*. Аксіома С$_3$ стверджує, що площини α і β перетинаються по прямій *m*.

С$_4$. Через будь-які три точки, які не належать одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

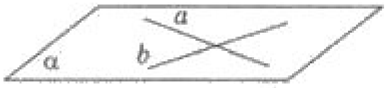
На малюнку 6 точки *А, В* і *С* не належать одній прямій. Аксіома С$_4$ стверджує, що існує одна площина а така, що $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$.

Сформулюємо **найпростіші наслідки з аксіом стереометрії**.

1. Через пряму і точку, що не лежать на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну (мал. 7).
2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну (мал. 8).



мал. 7

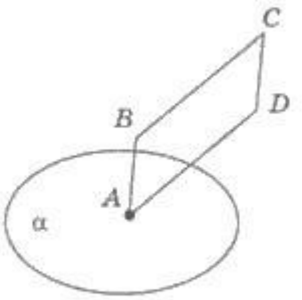


мал. 8

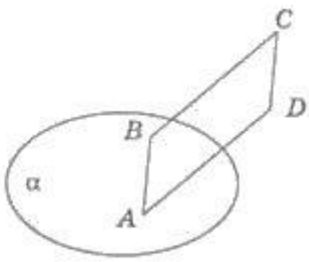
З аксіоми С$_4$ та розглянутих наслідків випливає, що площину можна задавати:
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, що не лежить на ній;
3) двома прямими, що перетинаються.

Ще один спосіб задавання площини буде розглянуто у подальшому.

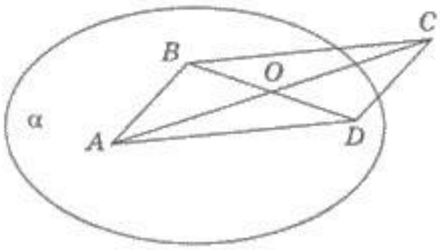
Приклад. Дано площину α і паралелограм *ABCD*. Чи може площині α належати: 1) тільки одна вершина паралелограма; 2) тільки дві вершини паралелограма; 3) тільки три вершини паралелограма?



мал. 9



мал. 10



мал. 11

Розв'язання. 1) Так (мал. 9); 2) так (мал. 10);

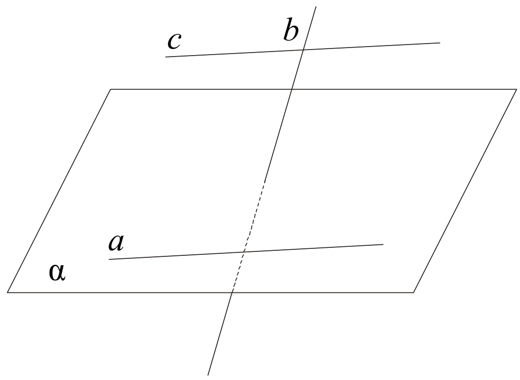
3) Припустимо, що може бути розташування площини α і паралелограма *ABCD*, при якому три вершини паралелограма *A, B* і *D* належать площині α, а вершина *С* - ні (мал. 11). Проведемо діагоналі *AC* і *BD*. За властивістю діагоналей паралелограма, вони перетинаються в точці *О*. Оскільки $B \in \alpha$ і $D \in \alpha$, то $BD \subset \alpha$, а тому і точка *О* належить α. Оскільки $A \in \alpha$ і $O \in \alpha$, то $AO \subset \alpha$. Оскільки точка *С* належить прямій *АО*, а пряма *АО* належить площині α, то і точка *С* належить площині α. Тому наше припущення не вірне. Не можуть тільки три вершини паралелограма *ABCD* належати площині α.

Теорема 1. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести єдину площину.

Теорема 2. Через дві прямі, що перетинаються можна провести одну площину.

Перехресними називаються прямі, що не лежать в одній площині.

Ознака перехресних прямих. Якщо пряма a лежить у площині α, а пряма b перетинає цю площину в точці, що не лежить на прямій a, то ці прямі схрещуються (мал. 12).



мал. 12

Кутом між двома перехресними прямими називається кут між пересічними прямими, відповідно рівнобіжними двом даним перехресної прямої.

Теорема 3. Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то й інша пряма перетинає площину.

Теорема 4. Через дві паралельні прямі можна провести єдину площину.

Відстанню між перехресними прямими називається довжина їхнього загального перпендикуляра.

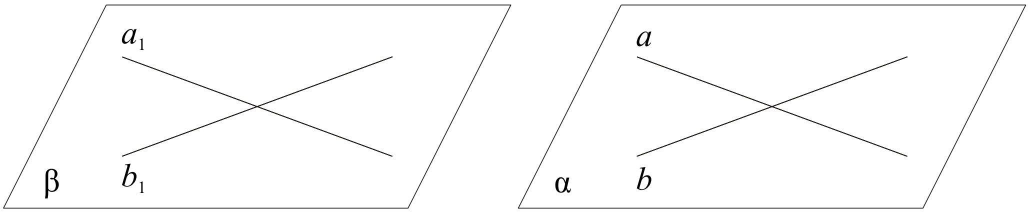
Пряма a називається *рівнобіжної* площини α, якщо вона не має з цією площиною загальних точок.

Ознака паралельності прямої і площини. Якщо пряма паралельна деякій прямій a, що лежить у площині α, то вона паралельна площині α (рис. 12).

Паралельними називаються дві площини, що не мають загальних точок.

Теорема 5. Через точку, що не лежить у даній площині, можна провести єдину площину, рівнобіжну даній.

Теорема 6 (ознака паралельності площин). Якщо дві пересічні прямі однієї площини відповідно паралельні двом пересічними прямим іншої площини, то ці площини паралельні (мал. 13).



мал. 13

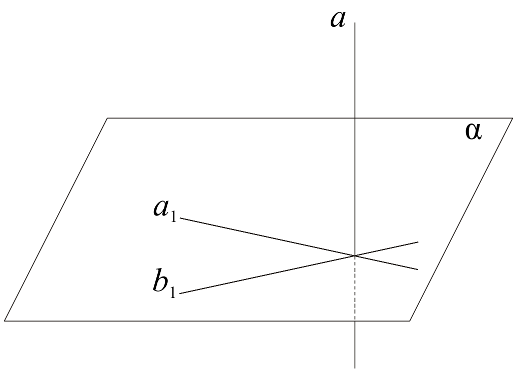
Теорема 7. Якщо площина перетинає одну їх двох паралельних площин, то вона перетинає й іншу, причому лінії перетинання паралельні.

Перпендикулярність у просторі. Проекція прямої. Двогранний кут

Пряма a, що лежить у площині α, поділяє цю площину навпіл на півплощини і називається *границею напівплощин*.

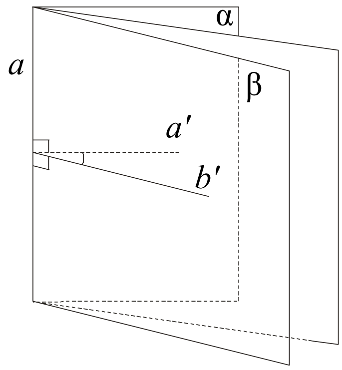
Пряма a називається *перпендикулярною* площині α, якщо вона перпендикулярна будь-якій прямій, що належить площині α.

Теорема 1 (ознака перпендикулярності прямої і площини). Пряма a перпендикулярна площині α, якщо вона перпендикулярна двом пересічним прямим, що лежать у площині α (мал. 14).



мал. 14

Двогранним кутом називається область простору, обмежена двома напівплощинами, що мають загальну границю, яка називається *ребром* двогранного кута (мал. 15). Якщо пряма a_1, що лежить у площині α, перпендикулярна ребру a і пряма b_1, що лежить у площині β, перпендикулярна ребру a, то кут між прямими a_1 і b_1 називається *лінійним кутом двогранного кута*.



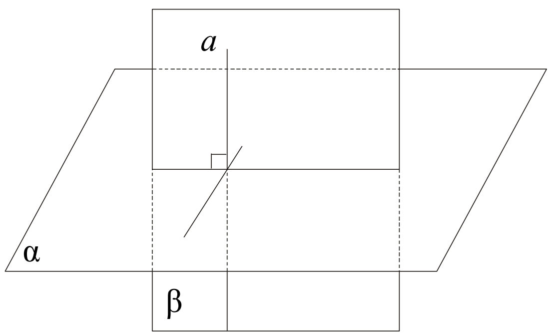
мал. 15

Бісекторною площиною двогранного кута називається площина, що проходить через ребро двогранного кута і поділяє його на два рівних двогранних кути (мал. 15).

Властивість точок бісекторної площини. Кожна точка бісекторної площини рівновіддалена від граней двогранного кута. *Зворотна властивість:* якщо точка рівновіддалена від граней двогранного кута, то вона належить його бісекторній площині.

При перетині двох площин утвориться чотири двогранних кути. Якщо лінійний кут одного з цих двогранних кутів прямий, то ці площини називаються *перпендикулярними*.

Теорема 2 (ознака перпендикулярності площин). Якщо пряма a, перпендикулярна площині α, належить площині β, то площини α і β перпендикулярні (мал. 16).



мал. 16

Перпендикулярною проекцією точки A на площину α називається основа перпендикуляра, опущеного з точки A на площину α.

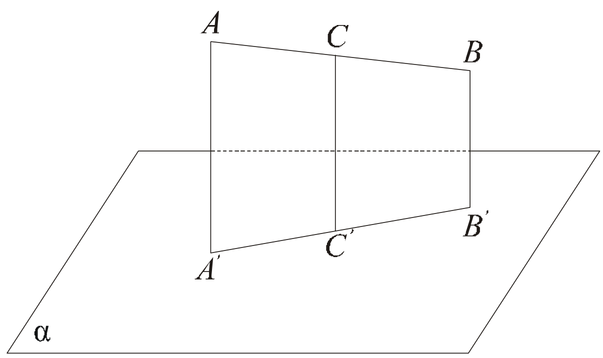
Проекцією фігури на площину α називається множина точок площини α, що є проекціями всіх точок проекційної фігури. *Проекцією прямої* на площину є також пряма (чи, в окремому випадку, точка). Якщо пряма a перетинає площину α в точці A, то проекція прямої також проходить через точку A.

Якщо пряма a паралельна площині α, то її проекція a' буде паралельна α.

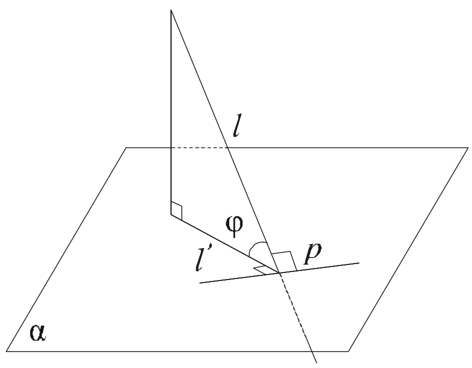
Властивості, проектування:

1) Якщо прямі a і b паралельні, то їхні проекції паралельні або, в окремих випадках, є однією прямою або ж двома точками.

2) Якщо точка C поділяє відрізок AB у співвідношенні $m : n$ (мал. 17), то при проектуванні точка C' розділить відрізок $A'B'$ в тому ж відношенні, тобто $\dfrac{A'C'}{C'B'} = \dfrac{m}{n}$.



мал. 17



мал. 18

Теорема 3 (про три перпендикуляри). Якщо похила l перпендикулярна деякій прямій p площини α, то її проекція також перпендикулярна прямій p (мал. 18).

Зворотна теорема. Якщо проекція l' похилої l перпендикулярна прямій p, то її проекція також перпендикулярна прямій p.

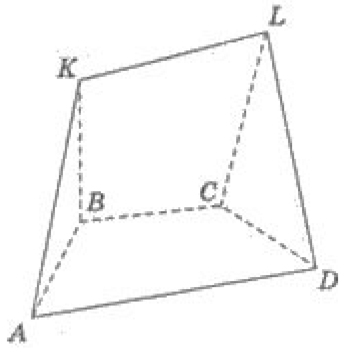
Кутом між прямою l і площиною α називається кут між прямою α і її проекцією l' на площину α (кут φ на мал. 18).

Лекція 15

Многогранники.

Многогранником називають тіло, поверхня якого складається із скінченої кількості плоских многокутників.

На малюнку 1 многогранник, поверхня якого складається із трапеції *ABCD*, *AKLD* і *KLCB* та трикутників *AKB* і *CLD*.



мал. 1

Многокутники, які обмежують многогранник називають **гранями**, їх сторони - **ребрами**, а кінці ребер - **вершинами многогранника**.

Гранями многогранника, зображеного на малюнку 1 є многокутник *ABCD, AKLD, ABK, CLD, KLCB*; ребрами відрізки - *AB, BC, CD, DA, BK, CL, AK, KL* і *LD*; вершинами - точки *A, B, C, D, K* і *L*.

Площа поверхні многокутника - це сума площ усіх його граней.

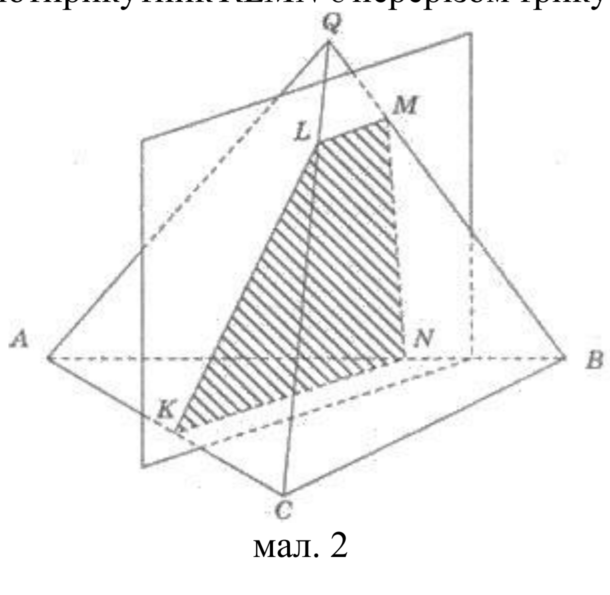
В курсі шкільної геометрії розглядають найпростіші многогранники: призми і піраміди.

ПОНЯТТЯ ПЕРЕРІЗУ МНОГОГРАННИКА.

При розв'язанні деяких геометричних задач, пов'язаних із многогранниками, корисно вміти будувати на малюнку перерізи многогранника різними площинами.

Будемо називати **січною площиною многогранника** будь-яку площину, по обидві сторони від якої є точки даного многогранника. Січна площина перетинає грані многогранника по відрізках. Многогранник, сторонами якого є ці відрізки, і називають **перерізом многогранника**.

На малюнку 2 чотирикутник *KLMN* є перерізом трикутної піраміди *QABC*.

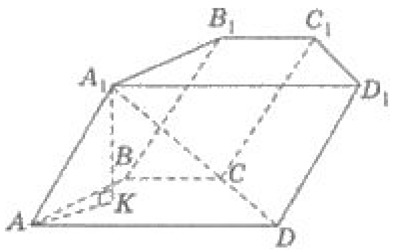


мал. 2

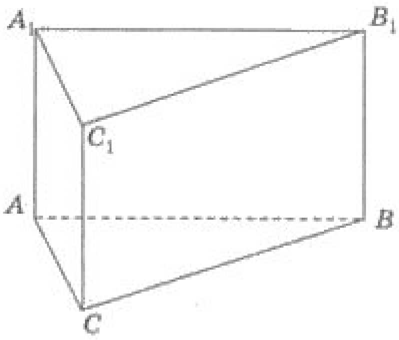
Зауважимо, що в задачах січну площину задають одним із знайомих нам способів:
1) трьома точками, що не лежать на одній прямій, або
2) прямою і точкою, що не лежить на ній, або
3) двома прямими, що перетинаються, або
4) двома паралельними прямими.
Для побудови перерізу достатньо побудувати точки перетину січної площини із ребрами многогранника, після чого провести відрізки, що з’єднують кожні дві побудовані точки, що належать одній і тій самій грані.
Надалі будемо розглядати найпростіші перерізи призм і пірамід.

Означення призми. Елементи призми. Види призм.

Призмою називають многогранник, у якого дві грані (які називаються основами), рівні і їх відповідні сторони паралельні, а інші грані - паралелограми, у кожного з яких дві сторони є відповідними сторонами основ. На малюнку 3 зображено призму, основи якої $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Тому призму називають призмою $ABCDA_1B_1C_1D_1$. За ознакою паралельності площин маємо властивість призми:
основи призми паралельні.



мал. 3



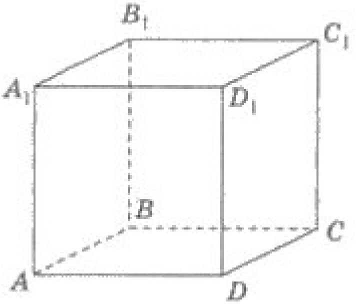
мал. 4

Грані призми, які не є гранями основ називають **бічними гранями призми**, а сторони бічних граней, які належать основам - **бічними ребрами призми**. На малюнку 3 паралелограми AA_1D_1D, ABB_1A_1, BB_1C_1C і CC_1D_1D - бічні грані призми; відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 - бічні ребра призми.
Зрозуміло, що: всі бічні ребра призми рівні і паралельні.
Призму називають *n* -кутною, якщо її основою є *n* -кутник.
На малюнку 3 зображено чотирикутну призму.
Перпендикуляр, проведений з деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називають **висотою призми**.
На малюнку 3: A_1K - висота призми.
Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані, називають **діагоналлю призми**.
На малюнку 3: A_1C - діагональ призми.
Призму називають **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ, в протилежному випадку призму називають похилою.
На малюнку 3 зображено похилу чотирикутну призму, а на малюнку 4 - пряму трикутну призму.

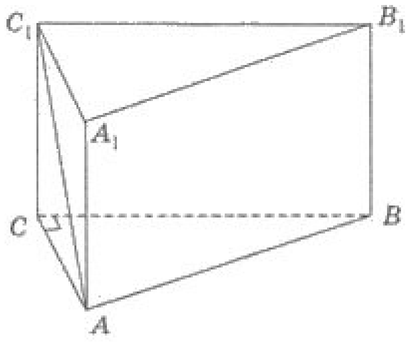
Зрозуміло, що бічні грані прямої призми - прямокутники, а висота прямої призми дорівнює її бічному ребру.

Пряму призму називають **правильною**, якщо її основою є правильний многокутник.

На малюнку 5 зображено правильну чотирикутну призму, її основа - квадрат ABCD. У правильній призмі всі бічні грані - рівні прямокутники.



мал. 5



мал. 6

Приклад 1. Висота похилої призми дорівнює 4 см. Знайти бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 60º.

Розв'язання. 1) Оскільки многокутник, що лежить в основі призми не має значення, використаємо малюнок 3. За умовою A_1K = 4 см; де A_1K - висота призми.

2) AK - проекція AA_1 на площину основи. Тому $\angle A_1AK$ - кут, що утворює бічне ребро із площиною основи. За умовою $\angle A_1AK = 60°$.

3) В ΔAA_1K ($\angle K = 90°$): $\sin A = \frac{A_1K}{AA_1}$; $AA_1 = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$ (см).

Приклад 2. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою 20 см і катетом 16 см. Знайти довжину діагоналі грані призми, що містить менший катет трикутника, якщо висота призми дорівнює 5 см.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ - трикутна призма, що задана в умові; $\angle C = 90°$, AB = 20 см; BC = 16 см; CC_1 = 5 см.

2) В ΔABC: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см).

3) Отже $AC < BC$, а тому необхідно знайти діагональ бічної грані, що містить AC, тобто довжину відрізка AC_1.

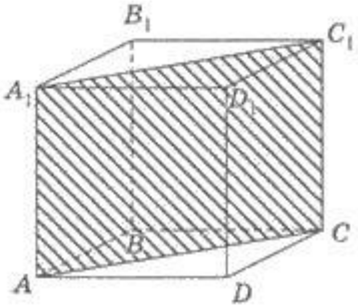
4) В ΔACC_1: $C_1A = \sqrt{AC^2 + CC_1^{\,2}} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (см).

Перерізи призми.

Розглянемо деякі найпростіші перерізи призми.

Переріз призми, який проходить через два бічних ребра, що не належать одній основі, називають **діагональним перерізом**.

На малюнку 7 AA_1C_1C — діагональний переріз прямої призми. Цей переріз є прямокутником, одна із його сторін - діагональ основи AC, а інша - бічне ребро AA_1. У похилій призмі діагональним перерізом є паралелограм.



мал. 7

Часто у задачах необхідно не тільки побудувати переріз, а й знайти його площу або периметр, або використати переріз з іншою метою.

Приклад 1. В основі прямої призми лежить ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 60°. Знайти площу діагонального перерізу призми, однією із сторін якого є більша діагональ ромба, якщо бічне ребро призми дорівнює 2 см.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - призма, в основі якої лежить ромб $ABCD$, AB = 8 см, $\angle A = 60°$, AC - більша діагональ ромба (мал. 7). Тоді ACC_1A_1 - діагональний переріз, площу якого необхідно знайти. CC_1 = 2 см (за умовою).

2) $\angle ADC = 180° - 60° = 120°$

3) У ΔADC за теоремою косинусів: $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\angle D$;

$AC = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4^2 \cdot \cos 120°} = 4\sqrt{3}$ (см).

4) Тоді $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot CC_1 = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$ (см²).

Часто у задачах розглядають перерізи призми, що проходять через сторону основи призми і які перетинають бічні ребра призми.

Приклад 2. В основі прямої призми лежить рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює 2 см. Через сторону цього трикутника проведено переріз, який утворює кут 30° із площиною основи і перетинає бічне ребро у його середині. Знайти довжину бічного ребра призми.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ - трикутна призма, основа якої - рівнобедрений трикутник ABC, AB = 2 см (мал. 8).

2) Через сторону AB основу трикутника проведено переріз ABK, де K - середина CC_1.

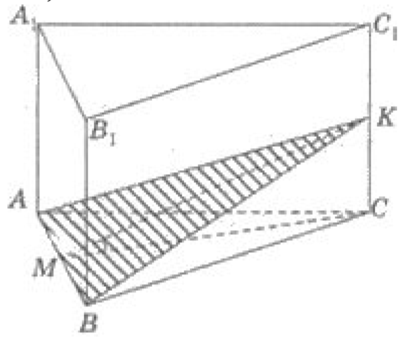
3) Проведемо в трикутнику ABC медіану CM, яка є також висотою цього трикутника: $CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см).

4) Оскільки $CM \perp AB$ і CM є проекцією KM на площину ABC, то за теоремою про три перпендикуляри: $KM \perp AB$.

Тоді $\angle$KMC - кут, що утворює переріз з площиною основи. За умовою $\angle KMC = 30°$.

5) В ΔKMC ($\angle C = 90°$): $\operatorname{tg} M = \frac{KC}{MC}$; $KC = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$ (см).

6) Оскільки K - середина CC_1, то $CC_1 = 2KC = 1 \cdot 2 = 2$ (см).



мал. 8

Площі повної та бічної поверхонь призми.

Площею повної поверхні призми називають сум площ всіх її граней, а площею бічної поверхні призми - суму площ її бічних граней.

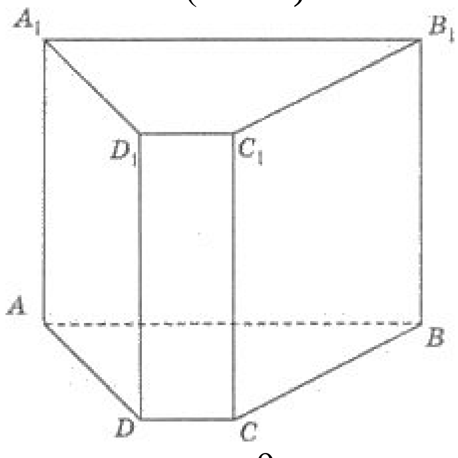
Площа $S_{повн}$ повної поверхні призми виражається через площу $S_{біч}$ її бічної поверхні і площу $S_{осн}$ основ призми формулою

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}$$

Теорема про площу бічної поверхні прямої призми. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину її бічного ребра.

Приклад 1. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, менша основа якої дорівнює 3 см, бічна сторона 4 см, а кут при основі 60°. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює більшій основі трапеції.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - чотирикутна призма, що задана в умові; $DC = 3$ см, $AD = 4$ см, $\angle DAB = 60°$ (мал. 9).



мал. 9

2) Виконаємо планіметричний малюнок трапеції $ABCD$, що лежить в основі призми (мал. 10), та проведемо в ній висоти DK і CL.

мал. 10

3) В ΔADK: $\cos A = \dfrac{AK}{AD}$; $AK = 4\cos 60^\circ = 2$ (см).

4) $KDCL$ - прямокутник, тому $KL = DC = 3$ см.

5) $\Delta BAK = \Delta CBL$ (за катетом і гіпотенузою), тому $AK = LB$; $LB = 2$ см.

6) Тоді $AB = 2 + 3 + 2 = 7$ (см).

7) Висота призми BB_1 за умовою дорівнює більшій основі трапеції. Отже, $BB_1 = 7$ см.

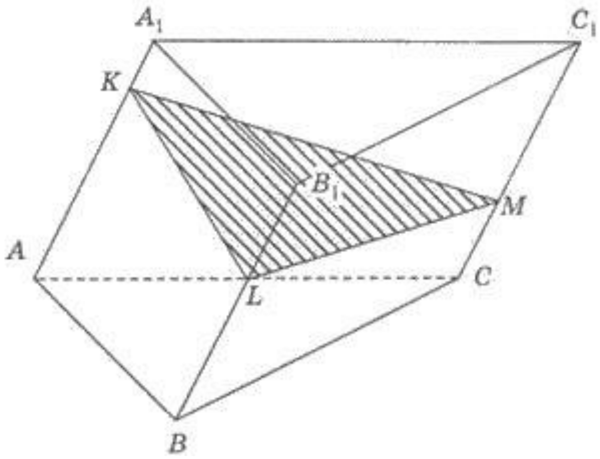
8) $S_{біч} = P_{ABCD} \cdot BB_1$; $P_{ABCD} = 3 + 7 + 2 \cdot 4 = 18$ (см).

9) Тоді $S_{біч} = 18 \cdot 7 = 126$ (см^2).

Нехай у похилій призмі проведено переріз, перпендикулярний до бічних ребер, що перетинає всі бічні ребра (переріз KLM на малюнку 11). Тоді бічну поверхню похилої призми можна знайти за формулою:

$$S_{біч} = P_{пер} \cdot l,$$

де $P_{пер}$ - периметр перерізу; l - довжина бічного ребра.



мал. 11

Приклад 2. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні. їх спільне бічне ребро знаходиться на відстанях 3 см і 4 см від двох інших бічних ребер. Знайти довжину бічного ребра призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 120 см^2.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ - похила призма, у якої KL — відстань між паралельними ребрами BB_1 і AA_1, бічні грані ABB_1A_1 і BB_1C_1C взаємно перпендикулярні (мал. 11).

2) Виберемо на ребрі BB_1 деяку точку L та проведемо $KL \perp BB_1$ та $LM \perp BB_1$; LM - відстань між паралельними ребрами BB_1 і CC_1, за умовою $KL = 3$ см; $LM = 4$ см.

3) Оскільки $KL \perp BB_1$ і $LM \perp BB_1$, то $KLM \perp BB_1$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини). Тому $\angle KLM$ - кут між бічними гранями ABB_1A_1 і BB_1C_1C. За умовою $\angle KLM = 90^\circ$.

4) В ΔKLM: $KM = \sqrt{KL^2 + LM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

5) Переріз KLM перпендикулярний до бічних ребер призми.

6) $S_{біч} = P_{пер} \cdot l$; тоді бічне ребро $l = \dfrac{S_{біч}}{P_{пер}}$.

7) $P_{пер} = 3 + 4 + 5 = 12$ (см).

8) $l = \frac{120}{12} = 10$ (см).

Об'єм призми.

Об'єм призми V дорівнює добутку її основи на висоту:

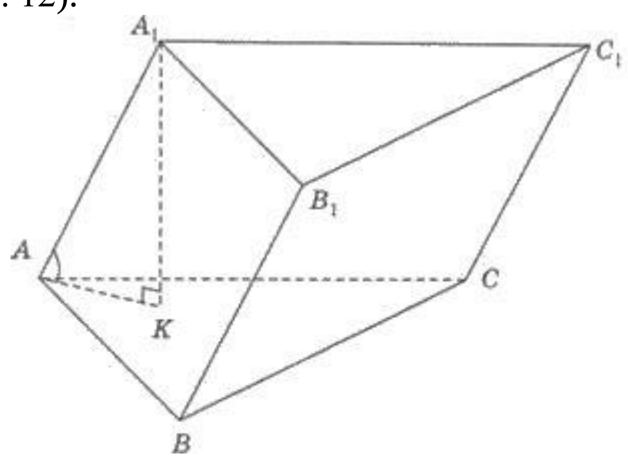
$$V = S_{осн} \cdot h,$$

де $S_{осн}$ - площа основа призми; h - висота призми.

Приклад 1. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 6 см. Бічне ребро призми дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 60º. Знайти об'єм призми.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ - задана в умові призма; ΔABC - правильний; $AB = 6$ см; $AA_1 = 4$ см; A_1K - висота призми; $\angle A_1AK$ - кут нахилу бічного ребра до площини основи;

$\angle A_1AK = 60°$ (мал. 12).



мал. 12

2) Площа основи $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де $a = AB$ - сторона основи.

Маємо $S_{осн} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см²).

3) В ΔAA_1K ($\angle K = 90°$):

$\sin\angle A_1AK = \frac{A_1K}{AA_1}$; $A_1K = 4\sin 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см).

4) Маємо $V = S_{осн} \cdot A_1K = 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 54$ (см³).

Приклад 2. У прямій трикутній призмі сторони основ дорівнюють 4 см; 13 см і 15 см. Через бічне ребро призми і більшу за довжиною висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 60 см². Знайти об'єм призми.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ - задана в умові призма (мал. 13); $AC = 4$ см; $AB = 13$ см; $BC = 15$ см.

2) Оскільки AC - менша сторона основи, то більшою висотою є висота BK, що проведена до цієї сторони.

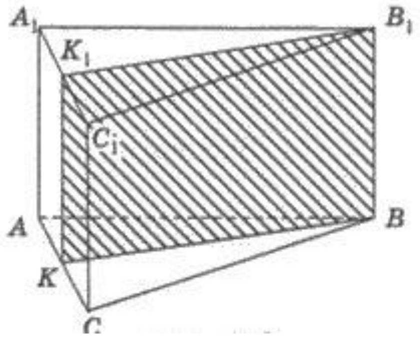
3) За формулою Герона знайдемо площу основи призми - трикутника ABC.

$p = \frac{4+13+15}{2} = 16$ (см); $S_{осн} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24$ (см²).

4) З іншого боку $S_{осн} = (AC \cdot BK)/2$; маємо $BK = (2 \cdot 24)$ .4 = 12 (см).
5) Проведемо переріз через KB і BB_1. За умовою $S_{KK_1B_1B} = 60$ (см^2). З іншого боку $S_{KK_1B_1B} = BK \cdot BB_1$. Маємо $BB_1 = 60/12 = 5$ (см).
6) Тоді об'єм призми $V = S_{осн} \cdot BB_1 = 24 \cdot 5 = 120$ (см^3).
Якщо у похилій призмі проведено переріз, перпендикулярний до бічних ребер, що перетинає всі бічні ребра (переріз KLM на малюнку 11). Тоді об'єм призми V можна знайти за формулою:

$$V = S_{пер} \cdot l,$$

де $S_{пер}$ - площа перерізу; l - довжина бічного ребра.



мал. 13

Приклад 3. Дві бічні грані трикутної призми мають площі 30 см^2 і 40 см^2 і утворюють кут 60°. Знайти об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.
Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ - задана в умові призма (мал. 11); $S_{AA_1B_1B} = 30$ см^2; $S_{BB_1C_1C} = 40$ см^2; $BB_1 = 5$ см.
2) Виконавши побудови, аналогічні побудовам приклада 2 . Матимемо: $\angle KLM = 60°$; $KL \perp BB_1$; $LM \perp BB_1$.

3) $S_{AA_1B_1B} = BB_1 \cdot KL$; $KL = \dfrac{30}{5} = 6$ (см).

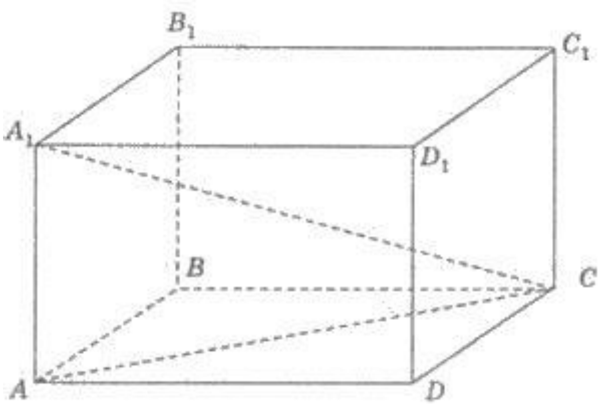
4) $S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot LM$; $LM = \dfrac{40}{5} = 8$ (см).

5) $S_{KLM} = \dfrac{1}{2} \cdot KL \cdot LM \cdot \sin\angle KLM = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ (см^2).

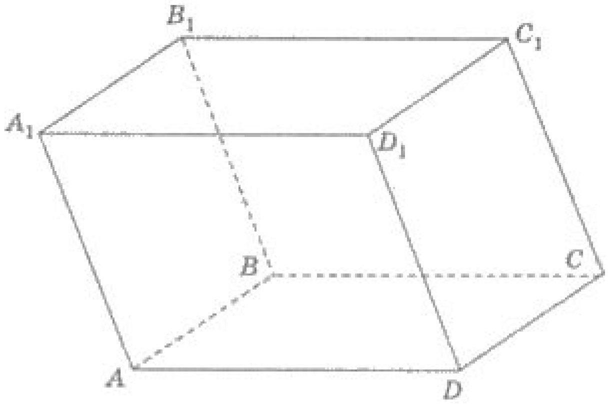
6) Тоді об'єм призми $V = S_{KLM} \cdot BB_1 = 12\sqrt{3} \cdot 5 = 60\sqrt{3}$ (см^3).

Означення паралелепіпеда, його властивості.

Паралелепіпедом називають призму, основою якої є паралелограм.
У паралелепіпеда всі грані - паралелограми.
Оскільки паралелепіпед є призмою, то всі властивості призми справедливі і для паралелепіпеда.
Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площин основи, називають **прямим паралелепіпедом**. Його бічні грані - прямокутники. На малюнку 14 зображено прямий паралелепіпед.



мал. 14



мал. 15

Якщо ж бічні ребра паралелепіпеда не перпендикулярні до площини основи, то паралелепіпед називають **похилим**. На малюнку 15 зображено похилий паралелепіпед.

Грані паралелепіпеда, які не мають спільних вершин, називають **протилежними гранями**. На малюнку 15 протилежними гранями є грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 і CDD_1C_1, AA_1D_1D і BB_1C_1C.

Розглянемо **властивості паралелепіпеда**.

1) Протилежні грані паралелепіпеда паралельні і рівні.

2) Діагоналі паралелепіпеда перетинаються і точкою перетину діляться пополам.

Приклад 1. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 10 см і 17 см, а одна з діагоналей основи 21 см. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 29 см. Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання. 1) Нехай a = 10 см і b = 17 см - сторони основи; d_1 = 21 см - діагональ основи. За властивістю діагоналей паралелепіпеда: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, звідси $d_2^2 = 2(10^2 + 17^2) - 21^2$; $d_2 = \sqrt{337}$ (см).

Оскільки $\sqrt{337}$ < 21, то більшою діагоналлю паралелепіпеда є та, проекцією якої на площину основи є діагональ основи з довжиною 21 см.

2) (мал. 14) AC = 21 см; A_1C = 29 см.

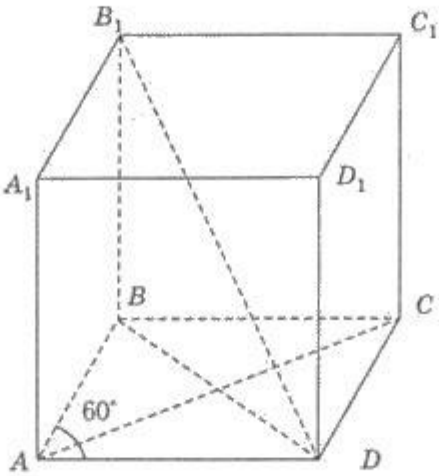
$$\text{У } \Delta AA_1C: \ AA_1 = \sqrt{A_1{}^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20 \ (\text{см}).$$

3) Оскільки прямий паралелепіпед є видом прямої призми, то площу бічної поверхні $S_{біч}$ прямого паралелепіпеда можна знайти за формулою $S_{біч} = Pl$, де P - периметр основи, l - довжина бічного ребра.

$P = 2(10 + 17) = 54$ (см). $S_{біч} = 54 \cdot 20 = 1080$ (см^2).

Приклад 2. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі ромба. Знайти об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - заданий в умові паралелепіпед; $ABCD$ - ромб; AB = 4 см; $\angle BAD = 60°$ (мал. 16).



мал. 16

2) Площа основи $S_{осн} = AB^2 \sin\angle BAD = 4^2 \cdot \sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$ (см²).

3) ΔABD - рівносторонній; $BD = AB = 4$ см.

4) В ΔABC: $\angle ABC = 90^\circ$, за теоремою косинусів:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$;

$AC = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4^2 \cos 120^\circ} = 4\sqrt{3}$ (см).

5) Оскільки $BD < AC$, то B_1D - менша діагональ паралелепіпеда.

$B_1D = AC = 4\sqrt{3}$ (см).

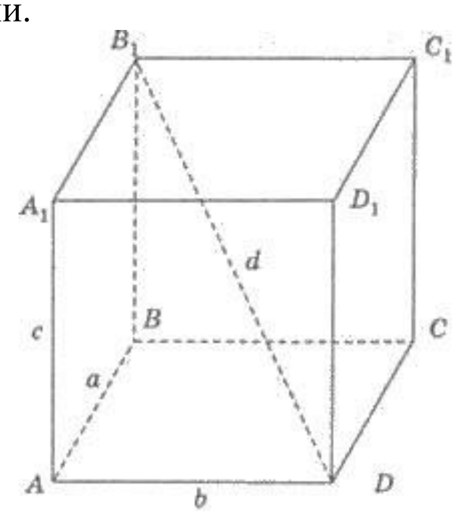
6) В ΔBB_1D маємо $BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4^2} = 4\sqrt{2}$ (см).

7) Тоді об'єм $V = 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{6}$ (см³).

Прямокутний паралелепіпед, його властивості.

Прямокутним паралелепіпедом називають прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник (мал. 17).

Зауважимо, що всі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками, всі двогранні кути прямими.



мал. 17

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами** (або **лінійними вимірами**) прямокутного

паралелепіпеда. Зрозуміло, що в даному прямокутному паралелепіпеді чотири ребра мають довжину *a*, чотири - довжину *b*; чотири - довжину *c*.
На практиці часто замість слова «виміри» відносно прямого паралелепіпеда вживають слова «довжина», «ширина», «висота».
Важливими властивостями прямокутного паралелепіпеда є наступні.
1) Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.
Якщо позначити діагональ $B_1D = d$, то маємо формулу

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

2) Всі чотири діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.
Крім відомої формули, для знаходження площі повної поверхні $S_{пов}$ прямокутного паралелепіпеда з вимірами *a, b, c* можна використовувати формулу

$$S_{пов} = 2\,(ab + ac + bc).$$

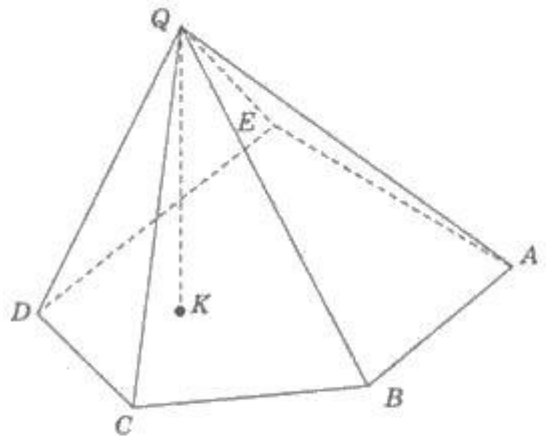
Приклад 1. Довжини основ прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 3 см, а діагональ - 7 см. Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.
Розв’язання. 1) $a = 2$ см; $b = 3$ см; $d = 7$ см.
Маємо $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $c^2 = d^2 - (a^2 + b^2)$; $c^2 = 7^2 - (2^2 + 3^2)$; $c^2 = 36$; $c = 6$ (см).
2) Тоді $S_{пов} = 2(2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6) = 72$ (см^2).
Прямокутний паралелепіпед, всі три виміри якого рівні, називають **кубом**.
Всі грані куба - рівні один одному квадрати.
Якщо куб має ребро довжиною *a*, то його повну поверхню $S_{пов}$ та об’єм *V* можна знайти за формулами:

$$S_{пов} = 6a^2; \qquad V = a^3.$$

Приклад 2. Відро вміщує 9 л води. Скільки відер води необхідно, щоб заповнити скляний куб з ребром 50 см. (округлити до цілих)?
Розв’язання. 1) 9 л = 9 дм^3; 50 см = 5 дм.
2) Об’єм куба $V = 5^3 = 125$ (дм^3).
3) Тоді для заповнення скляного куба необхідно: $\frac{125}{9} = 13\frac{8}{9} \approx 14$ (відер).

Означення піраміди. Елементи піраміди.

Пірамідою називають многогранник, у якого одна з граней (яку називають основою) - довільний многокутник, інші грані - трикутники зі спільною вершиною.
На малюнку 18 зображено піраміду, основою якої є многокутник *ABCDE*. Грані зі спільною вершиною, про які йде мова в означені піраміди, - трикутники *ABQ*, *BCQ*, *CDQ*, *DEQ*, *AEQ*. Ці грані називають **бічними гранями піраміди**, їх спільну вершину - точку *Q* називають **вершиною піраміди**. Піраміду, зображену на малюнку 18 називають пірамідою *QABCDE*.
Ребра піраміди, які з’єднують вершину піраміди з вершинами основи піраміди, називають **бічними ребрами піраміди**. На малюнку 18 відрізки *QA*, *QB*, *QC*, *QD* і *QE* - бічні ребра піраміди.



мал. 18

Піраміду називають *n* -кутною, якщо її основою є *n* -кутник.

Трикутну піраміду називають також **тетраедр**. На малюнку 18 зображено п'ятикутну піраміду.

Перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини основи, називають **висотою піраміди**.

На малюнку 18 відрізок QK є висотою піраміди, точка K - основою висоти.

При розв'язуванні задач важливою є наступна **властивість**:

Якщо у піраміді виконується одна з двох наступних умов: всі бічні ребра утворюють з площиною основи рівні кути або довжини всіх бічних ребер рівні, то основою висоти піраміди є центр кола описаного навколо основи піраміди.

Приклад 1. Кожне з бічних ребер тетраедра дорівнює 65/8 см. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см. Знайти висоту піраміди.

Розв'язання (мал. 19). 1) Нехай $QABC$ - тетраедр, що задано в умові, $QA = QB = QC = \dfrac{65}{8}$; $AB = AC = 5$ см; $BC = 6$ см; QK - висота тетраедра.

2) Оскільки всі бічні ребра тетраедра рівні, то точка K - центр кола, описаного навколо трикутника ABC; $AK = R$ - радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

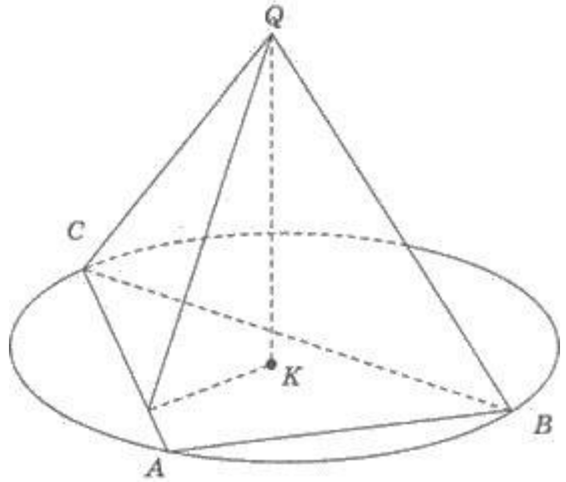
3) За відомою формулою $R = \dfrac{abc}{4S}$, де a, b, c - сторони трикутника; S - його площа.

4) Знайдемо площу трикутника за формулою Герона $p = \dfrac{5+5+6}{2} = 8$ (см); $S = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 12$ (см^2).

5) Тоді $R = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \dfrac{25}{8}$ (см); $AK = \dfrac{25}{8}$ (см).

6) В ΔAQK ($\angle K = 90°$):

$$QK = \sqrt{AQ^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{25}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ (см).}$$



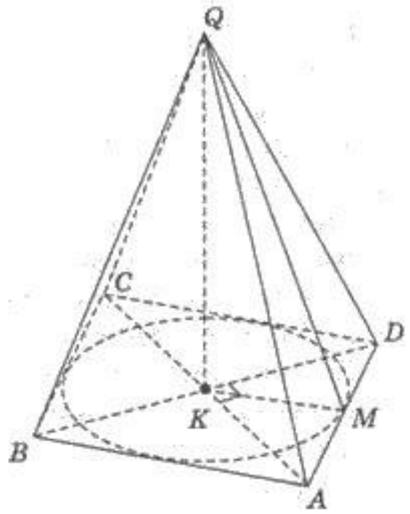
мал. 19

Також при розв'язуванні задач важливою є **властивість**:

Якщо у піраміді виконується одна з двох наступних умов: всі бічні грані утворюють з площиною основи рівні кути або довжини висот всіх бічних граней рівні, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди.

Приклад 2. Основою піраміди є ромб з діагоналями 40 см і 30 см. Висота піраміди дорівнює 5 см. Всі висоти бічних граней рівні між собою. Знайти довжину висоти бічної грані.

Розв'язання. 1) Оскільки всі висоти бічних граней рівні між собою, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу. Оскільки основою є ромб, то точка K - основа висоти є точкою перетину діагоналей ромба. На малюнку 20 зображено піраміду $QABCD$, що задано в умові.



мал. 20

2) $ABCD$ - основа піраміди, $AC = 30$ см, $BD = 40$ см, QK - висота піраміди, $QK = 5$ см.

3) QM - висота бічної грані, $QM \perp AD$

4) KM - проекція QM на площину основи. За теоремою про три перпендикуляри: $KM \perp AD$.

5) AD - висота прямокутного трикутника AKD.

6) $AK = \frac{AC}{2} = \frac{30}{2} = 15$ (см),

$KD = \frac{BD}{2} = \frac{40}{2} = 20$ (см),

$AD = \sqrt{AK^2 + KD^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ (см).

7) Знайдемо двічі площу ΔAKD: $S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2} AK \cdot KD$; $S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2} AD \cdot KM$.

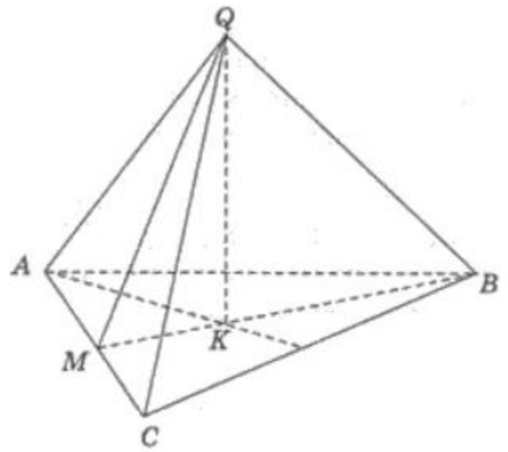
Тоді $\frac{1}{2} AK \cdot KD = \frac{1}{2} AD \cdot KM$, $AK \cdot KD = AD \cdot KM$;

$KM = \frac{AK \cdot KD}{AD} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ (см).

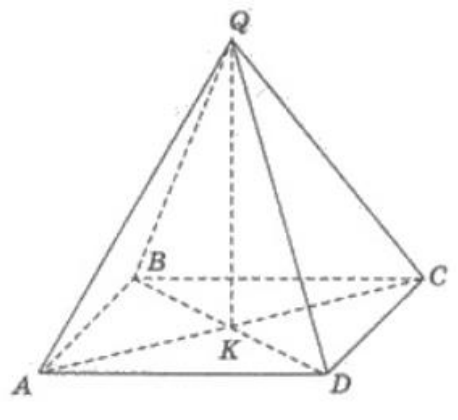
8) В ΔQKM ($\angle K = 90°$): $QM = \sqrt{KQ^2 + KM^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (см).

Правильна піраміда.

Піраміду називають правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основи висоти збігаються із центром цього многокутника. Нагадаємо, що центром правильного многокутника називають **центр описаного навколо нього (або вписаного в нього) кола**. На малюнку 21 зображено правильну трикутну піраміду, а на малюнку 22 - правильну чотирикутну піраміду, висоти яких - відрізки *QK*; точка *K* - центр правильного многокутника, що лежить в основі піраміди.



мал. 21



мал. 22

Віссю правильної піраміди називають пряму, яка містить її висоту.

Властивості правильної піраміди:

1) Усі бічні ребра правильної піраміди рівні.

2) Усі бічні грані правильної піраміди - рівні рівнобедрені трикутники.

3) Усі апофеми правильної піраміди рівні між собою.

Приклад. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота - 2 см. Знайти довжину бічного ребра.

Розв’язання. 1) (мал. 21) Нехай *QABC* - правильна піраміда, *QK* = 2 см - висота піраміди.

2) Оскільки точка K - центр описаного навколо трикутника ABC кола, то $KB = R$ - радіус цього кола. За відомою формулою $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, де $a = AB = 6$ см - сторона основи. Отже, $KB = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}(\text{см})$.

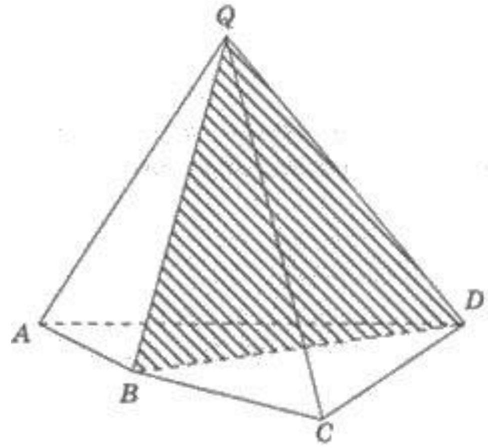
3) В $\Delta QKB\left(\angle K = 90^0\right): QB = \sqrt{KQ^2 + KB^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4(\text{см})$.

Перерізи піраміди.

Розглянемо найпростіший переріз піраміди.

Переріз піраміди, що проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, називають **діагональним перерізом**.

На малюнку 23: *QBD* - діагональний переріз чотирикутної піраміди *QABCD*.



мал. 23

Діагональні перерізи піраміди - трикутники, однією з вершин яких є вершина піраміди, а протилежна їй сторона - діагональ основи.

Приклад 1. Знайти периметр діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а бічне ребро - 5 см.

Розв'язання. 1) Нехай *QABCD* - правильна чотирикутна піраміда (мал. 22), *QAC* - її діагональний переріз.

2) За умовою $AD = DC = 3\sqrt{2}$ см, $QA = QC = 5$ см.

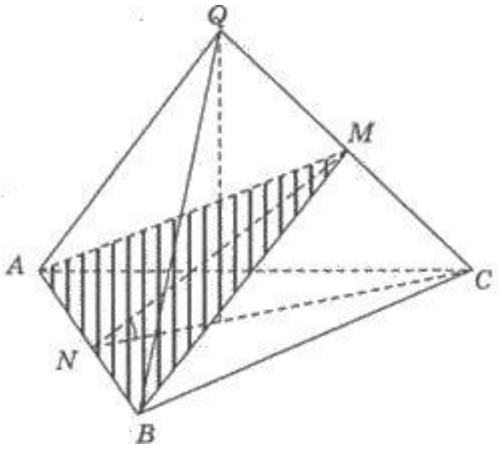
3) В ΔADC ($\angle D = 90°$): $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 6$ (см).

4) Тоді периметр перерізу Р = 6 + 5 + 5 = 16 (см).

Часто у задачах розглядають перерізи піраміди, що проходять через сторону основи піраміди і перетинають бічні ребра піраміди.

Приклад 2. У правильній трикутній піраміді, сторона основи якої дорівнює 8 см, через сторону основи перпендикулярно До бічного ребра проведено переріз. Знайти площу перерізу, якщо він утворює кут 30° із площиною основи піраміди.

Розв'язання. 1) Проведемо у правильній піраміді *QABC* з основою *ABC* висоту *BM* бічної грані *BQC* (мал. 24).



мал. 24

2) $\Delta BMC = \Delta AMC$ (за двома сторонами і кутом між ними), тому $\angle AMC = \angle BMC = 90°$.

3) За ознакою перпендикулярності прямої і площини: $AMB \perp QC$. Тому ABM - переріз, площу якого треба знайти.

4) CN - висота основи піраміди, $CN \perp AB$, тому за теоремою про три перпендикулярами $MN \perp AB$.

5) За ознакою перпендикулярності прямої і площини маємо $MNC \perp AB$, тому кут MNC - кут, що утворює переріз із площиною основи. За умовою $\angle MNC = 30°$.

6) $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MN$.

7) В ΔCBN: $CN = \sqrt{BC^2 - BN^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

8) В ΔNMC ($\angle M = 90°$):

$$\cos\angle MNC = \frac{MN}{NC},\ MN = 4\sqrt{3}\cos 30° = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

9) Тоді $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см²).

Площа повної та бічної поверхонь піраміди.

Площею повної поверхні піраміди називають суму площ всіх її граней, а площею бічної поверхні піраміди - суму площ її бічних граней.

Площа $S_{повн}$ повної поверхні піраміди виражається через площу $S_{біч}$ її бічної поверхні і площу $S_{осн}$ основи піраміди формулою

$$S_{повн} = S_{біч} + S_{осн}$$

Приклад 1. Всі плоскі кути при вершині тетраедра дорівнюють 30°. Знайти площу бічної поверхні цього тетраедра, якщо його бічні ребра дорівнюють 4 см, 5 см і 6 см.

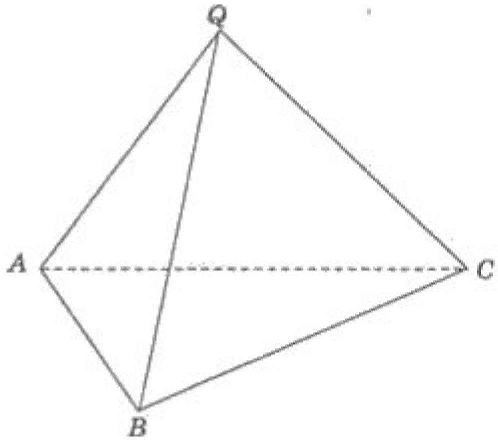
Розв’язання. 1) на малюнку 25 тетраедр $QABC$. За умовою $\angle AQB = \angle BQC = \angle AQC = 30°$; $QA = 4$ см; $QB = 5$ см; $QC = 6$ см.

$$2)\ S_{біч} = S_{QAB} + S_{QBC} + S_{QAC} =$$

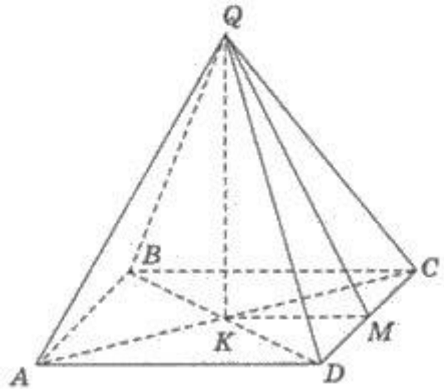
$$= \frac{1}{2} \cdot QA \cdot QB \cdot \sin\angle AQB + \frac{1}{2} \cdot QB \cdot QC \cdot \sin\angle BQC + \frac{1}{2} \cdot QA \cdot QC \cdot \sin\angle AQC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \sin 30^\circ (20 + 30 + 24) = 18{,}5 \ \text{(см}^2\text{)}.$$



мал. 25



мал. 26

Теорема про площу бічної поверхні правильної піраміди. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.

Приклад 2. Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 см, а висота - 3 см.

Розв'язання. 1) На малюнку 26 зображено правильну чотирикутну піраміду $QABCD$, AD = 8 см - сторона основи, яка є квадратом, QK = 3 см - висота піраміди.

2) $S_{повн} = S_{біч} + S_{осн}$.

3) $S_{осн} = AD^2 = 8^2 = 64$ (см^2).

4) QM - висота, медіана ΔQDC. Оскільки M середина CD, а K – середина AC, то KM - середня лінія ΔACD. Тому $KM = AD/2 = 8/2 = 4$ (см).

5) У ΔQKM ($\angle K = 90^\circ$): $QM = \sqrt{QK^2 + KM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

6) $S_{біч} = pl$, де p - півпериметр основи, $l = QM$ - апофема.

$$S_{біч} = \frac{4 \cdot 8}{5} \cdot 5 = 80 \ \text{(см}^2\text{)}.$$

7) $S_{повн} = 64 + 80 = 144$ (см^2).

Об'єм піраміди.

Об'єм піраміди V дорівнює третині добутку площі її основи на висоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h,$$

де $S_{осн}$ - площа основи піраміди, h - висота піраміди.

Приклад 1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

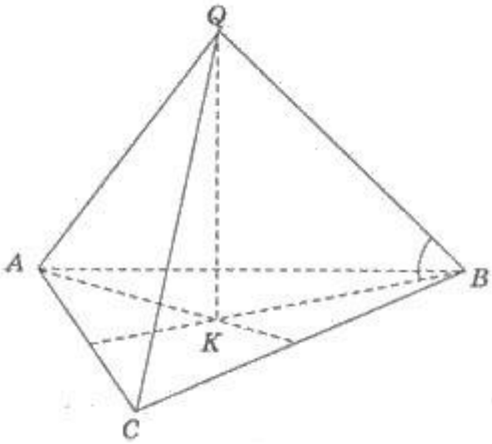
Розв'язання. 1) (мал. 27). Нехай *QABC* - задана в умові піраміда; ΔABC - правильний; *BC* = 6 см; *QK* - висота піраміди; $\angle QBK = 45°$.

2) Площа основи $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де *a* = *BC* = 6 см - сторона основи. Маємо $S = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см²).

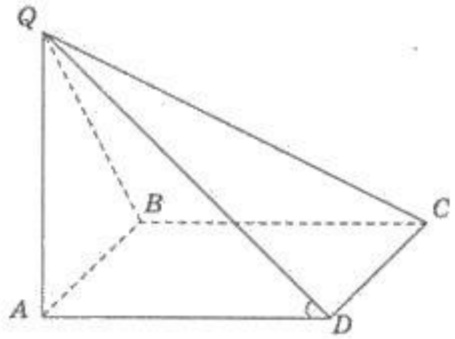
3) Оскільки *K* - центр трикутника, то *KB* = *R* - радіус кола, описаного навколо основи: $KB = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

4) В ΔQKB ($\angle K = 90°$; $\angle QBK = 45°$): $\angle KQB = 180° - (90° + 45°) = 45°$. Тому ΔQKB - рівнобедрений і *QK* = *KB* = 2 (см).

5) Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot QK = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$ (см³).



мал. 27



мал. 28

Приклад 2. В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 30º. Знайти об'єм піраміди, якщо середнє за величиною бічне ребро піраміди дорівнює 4 см.

Розв'язання. 1) Нехай *QABCD* - задана в умові піраміда; *ABCD* - квадрат; бічні грані *QAD* і *QAB* перпендикулярні площині основи (мал. 28).

2) Оскільки бічні грані *QAD* і *QAB* перпендикулярні площині основи, то бічне ребро по якому перетинаються ці грані, також перпендикулярне до основи. Тому *QA* = *h* - висота піраміди.

3) $AD \perp DC$, тому за теоремою про три перпендикуляри $QD \perp DC$. А отже $QAD \perp DC$. Тому $\angle QDA$ - кут, що утворює бічна грань *QDC* із площиною основи $\angle QDA = 30°$ (за умовою).

4) Оскільки ΔQAD - прямокутний ($\angle A = 90°$), то $QD > QA$. ΔQDC - прямокутний ($\angle QDC = 90°$), тому $QD < QC$. Враховуючи також *QD* = *QB* (з рівності трикутників *QAD* і *QAB*) матимемо, що саме *QD* - середнє за величиною бічне ребро. За умовою *QD* = 4 см.

5) В ΔQAO: *QA* = 4/2 = 2 (см), використовуючи властивість катета, що лежить проти кута 30°.

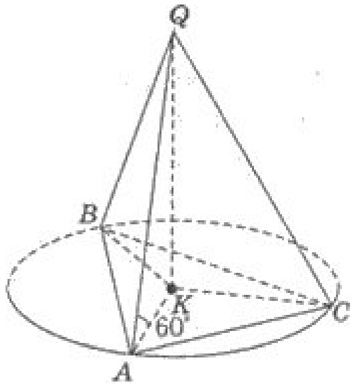
$AD = \sqrt{QD^2 - QA^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (см).

6) Площа основи $S = AD^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ (см²).

7) Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2 = 8$ (см³).

Приклад 3. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 4 см, 5 см і 6 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60º. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання. 1) Нехай *QABC* - задана в умові піраміда, *AB* = 4 см, *AC* = 5 см, *BC* = 6 см (мал. 29).



мал. 29

2) За відомою властивістю: точка *K* - основа висоти *QK* є центром кола, описаного навколо ΔABC, *AK* = *R* - радіус описаного кола.

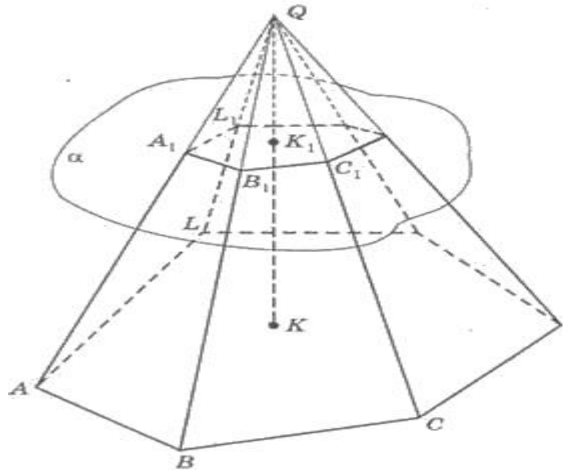
3) $\angle QAK = 60°$ (за умовою).

4) В ΔQAK: $QK = R \operatorname{tg} \angle QAK = \sqrt{3}R$ (см).

5) Оскільки $R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S}$, де *S* – площа трикутника, то маємо $V = \frac{1}{3}S \cdot \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} \cdot \sqrt{3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{12} = 10\sqrt{3}$ (см³).

Означення зрізаної піраміди. Елементи зрізаної піраміди.

Розглянемо довільну піраміду *QABC...L*. Проведемо площину α, паралельну до основи піраміди. Ця площина перетинає бічні ребра піраміди у точках A_1, B_1, C_1, ... ,L_1 (мал. 30). Площина α розбиває піраміду на два многогранники.



мал. 30

Многогранник, гранями якого є многокутники $ABC...L$ і $A_1B_1C_1...L_1$ (нижня і верхня основи), що розташовані у паралельних площинах і чотирикутники AA_1B_1B, BB_1C_1C,…,LL_1A_1A (бічні грані) називають **зрізаною пірамідою**. Відрізки AA_1, BB_1, CC_1, ...,LL_1 називають **бічними ребрами зрізаної піраміди**. Зрізану піраміду з основами $ABC...L$ і $A_1B_1C_1...L_1$ позначають так $ABC...LA_1B_1C_1...L_1$.

Зрізану піраміду називають ***n* -кутною**, якщо її основами є n -кутники.

Перпендикуляр, проведений з деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називають **висотою зрізаної піраміди**. На малюнку 30 відрізок KK_1 - висота зрізаної піраміди.

Властивості зрізаної піраміди:

1) Бічними гранями зрізаної піраміди є трапеції.

2) Основи зрізаної піраміди - подібні многокутники.

Правильна зрізана піраміда.

Зрізану піраміду називають **правильною**, якщо вона отримана в результаті перерізу правильної піраміди площиною, паралельною основі.

Висоту бічної грані правильної зрізаної піраміди називають **апофемою правильної зрізаної піраміди**.

Зазначимо **властивості правильної зрізаної піраміди**.

1) Усі бічні ребра правильної зрізаної піраміди рівні.

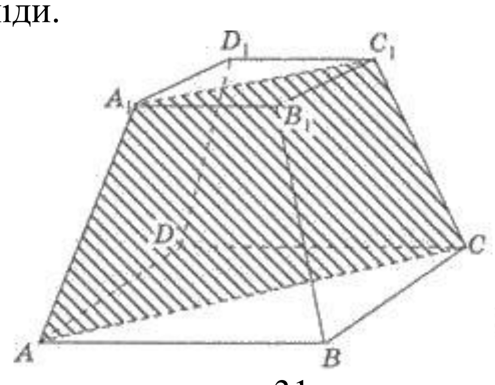
2) Усі бічні грані правильної зрізаної піраміди - рівні рівнобедрені трапеції.

3) Усі апофеми правильної зрізаної піраміди рівні між собою.

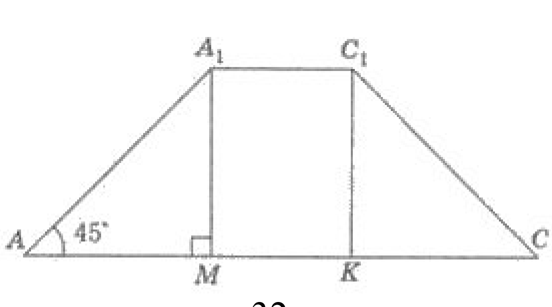
Діагональний переріз зрізаної піраміди.

Переріз зрізаної піраміди, що проходить через два бічних ребра, що не лежать на одній грані, називають **діагональним перерізом**.

На малюнку 31: AA_1C_1C - діагональний переріз чотирикутної зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Діагональні перерізи зрізаної піраміди - трапеції, основами яких є паралельні діагоналі основ, а бічними ребрами - бічні ребра зрізаної піраміди.



мал. 31



мал. 32

Приклад. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 7 см і 3 см, а бічне ребро утворює із площиною більшої основи кут 45°. Знайти площу діагонального перерізу зрізаної піраміди.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - задана в умові правильна чотирикутна зрізана піраміда, AB = 7 см,

$A_1B_1 = 3$ см, $\angle A_1AC = 45°$.

2) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} =$

$= \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ (см).

3) $A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1{}^2 + B_1C_1{}^2} =$

$= \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$ (см).

4) Виконаємо планіметричний малюнок перерізу AA_1C_1C, площу якого необхідно знайти (мал. 32) і проведемо в ньому дві висоти A_1M і C_1K.

$$AM = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

5) Тоді

6) У ΔAA_1M: $\angle AA_1M = 90° - 45° = 45°$, тому ΔAA_1M — рівнобедрений і $A_1M = AM = 2\sqrt{2}$ (см).

7) $S_{AA_1C_1C} = \dfrac{AC + A_1C_1}{2} \cdot A_1M = \dfrac{7\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 20$ (см²).

Площі повної та бічної поверхонь зрізаної піраміди.

Площею бічної поверхні зрізаної піраміди називають суму площ її бічних граней, а площею повної поверхні суму площ всіх її граней.

Площа $S_{\text{повн}}$ повної поверхні зрізаної піраміди виражається через площу $S_{\text{біч}}$ її бічної поверхні і площ S_1 і S_2 основ піраміди формулою

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + S_1 + S_2$$

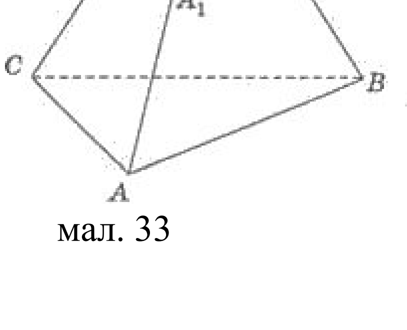
Теорема про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди. Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.

Якщо p_1 - півпериметр однієї основи, p_2 - півпериметр іншої, а l - апофема правильної зрізаної піраміди, то площу бічної поверхні можна знайти за формулою

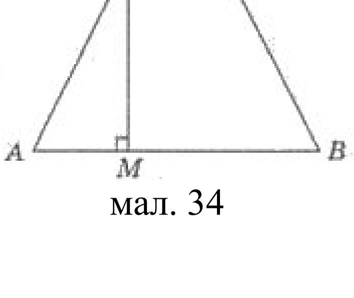
$$S_{біч} = (p_1 + p_2)l$$

Приклад. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 14 см і 4 см, а бічне ребро - 13 см. Знайти площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

Розв’язання. 1) На малюнку 33 зображено правильну зрізану трикутну піраміду $ABCA_1B_1C_1$, $AB = 14$ см, $A_1B_1 = 4$ см, $AA_1 = 13$ см.



мал. 33



мал. 34

2) Виконаємо планіметричний малюнок бічної грані AA_1B_1B (мал. 34). A_1M - висота бічної грані, апофема піраміди.

3) $AM = \dfrac{AB - A_1B_1}{2} = \dfrac{14-4}{2} = 5$ (см).

4) В ΔAMA_1 ($\angle M = 90°$): $A_1M = \sqrt{AA_1{}^2 - AM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

5) $S_{біч} = (p_1 + p_2)l = \left(\dfrac{3 \cdot 14}{2} + \dfrac{3 \cdot 4}{2}\right) \cdot 12 = 324$ (см²).

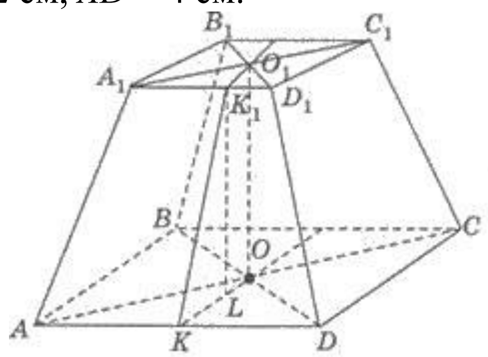
Об'єм зрізаної піраміди.

Об'єм V зрізаної піраміди з висотою h і площами основ S і S_1 обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{SS_1} + S_1\right)$$

Приклад. Знайти об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють 4 см і 2 см, а бічна грань нахилена до площини основа під кутом 45°.

Розв'язання. 1) На малюнку 35 зображено правильну зрізану піраміду, що задано в умові, A_1D_1 = 2 см, AD = 4 см.



мал. 35

2) Площі основ $S = 4^2 = 16$ (см²), $S_1 = 2^2 = 4$ (см²).

3) OK і O_1K_1 - радіуси кіл вписаних в основи, $O_1K_1 = 2/2 = 1$ (см), $OK = 4/2 = 2$ (см).

4) Проведемо K_1L паралельно до висоти O_1O, $K_1L = O_1O = h$.

5) $KL = KO - K_1O_1 = 2 - 1 = 1$ (см).

6) $\angle K_1KL$ - кут нахилу бічної грані до площини основи, $\angle K_1KL = 45°$ (за умовою).

7) Тоді ΔK_1KL - рівнобедрений, $KL = K_1L$ і $K_1L = 1$ (см).

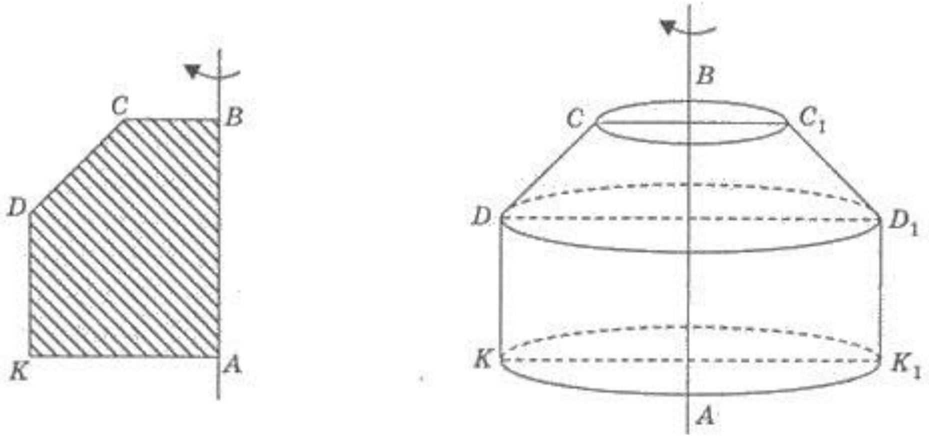
8) Отже, $V = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(16 + \sqrt{16 \cdot 4} + 4\right) = \dfrac{28}{3}$ (см³).

Лекція 16

Тіла обертання.

Тіла і поверхні обертання.

Нехай деякий плоский опуклий многокутник *ABCDK* обертається навколо нерухомої прямої, що містить сторону *AB* (мал. 1). Тоді кожна точка, що належить многокутнику, крім точок, що належать стороні *AB*, описує коло, центр якого належить прямій *AB*. При цьому весь многокутник *ABCDK* описує тіло обертання, пряму *AB* називають віссю обертання цього тіла.



мал. 1

Площина, що проходить через вісь тіла обертання, перетинає його по деякій фігурі. Цю фігуру називають **осьовим перерізом**.

Осьовим перерізом тіла обертання, що зображено на малюнку 1 є многокутник $CDKK_1D_1C_1$.

Поверхню, утворену обертанням ламаної *BCDKA* навколо прямої *AB* називають **поверхнею обертання**.

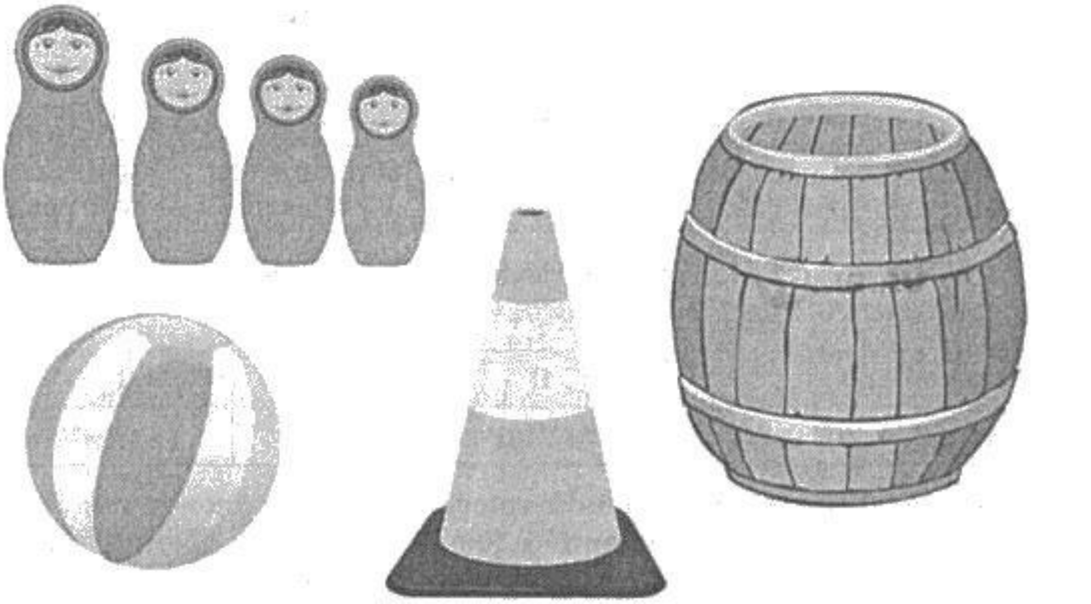
Якщо тіло обертання, що утворене обертанням многокутника *ABCDK* перетнути площиною перпендикулярною прямій *AB*, то в перерізі отримаємо круг, центр якого належить прямій *AB*.

Таким чином приходимо до означення тіла обертання (у найпростішому випадку), яким будемо користуватись у шкільному курсі геометрії.

Тілом обертання називають таке тіло, яке площинами, перпендикулярними до деякої прямої (осі обертання), перетинається по кругах з центрами на цій прямій.

В загальному виді: тілом обертання називають **геометричне тіло**, утворене обертанням деякої плоскої фігури навколо фіксованої прямої, яку називають **віссю обертання**.

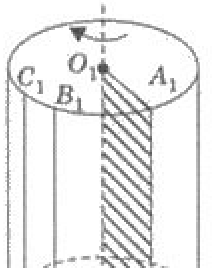
Прикладами тіл обертання у побуті є іграшки (наприклад, матрьошка, м’яч), бочки, діжки тощо (мал. 2).



мал. 2

Означення циліндра. Елементи циліндра.

Циліндром називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутника навколо осі, що містить одну з його сторін.
На малюнку 3 прямокутник OO_1A_1A обертається навколо прямої, що містить сторону OO_1 цього прямокутника. Пряма OO_1 є віссю циліндра, утвореного в результаті цього обертання. Сторони прямокутника OA і O_1A_1 описують рівні круги, що лежать в паралельних площинах. Ці круги називають **основами циліндра**, їх радіус - **радіусом циліндра**, діаметр - **діаметром циліндра**. На малюнку 3: OA і O_1A_1 - радіуси циліндра.



мал. 3

Поверхню, утворену обертанням сторони прямокутника AA_1, яка паралельна осі циліндра, називають **бічною поверхнею циліндра**. Кожний відрізок цієї поверхні (а також його довжину), що паралельний і дорівнює відрізку AA_1, називають **твірними циліндра**. На малюнку 3: AA_1, BB_1, CC_1 - твірні циліндра.
Відстань між площинами основ, яка дорівнює твірній циліндра, називають **висотою циліндра**.
Зауважимо, що природно позначати радіус циліндра буквою r, а висоту - h.
Приклад. Прямокутник, діагональ якого дорівнює 10 см, а одна із сторін на 2 см менша за іншу, обертається навколо більшої сторони прямокутника. Знайти радіус та висоту отриманого циліндра.

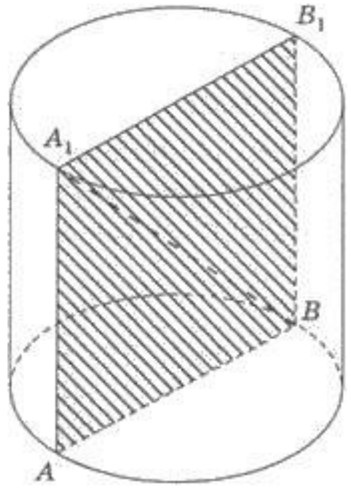
Розв'язання. 1) Нехай прямокутник AOO_1A_1 обертається навколо осі OO_1, $OO_1 > OA$ (мал. 3).
2) Позначимо $OA = x$ см, тоді $OO_1 = (x + 2)$ см. За умовою $O_1A = 10$ см. Маємо $x^2 + (x + 2)^2 = 10^2$; $2x^2 + 4x - 96 = 0$; $x^2 + 2x - 48 = 0$; $x_1 = 6$; $x_2 = -8$. Враховуючи $x > 0$, маємо $x = 6$ см.
3) Отже, радіус циліндра $OA = 6$ см, а висота $AA_1 = OO_1 = 6 + 2 = 8$ (см).

Перерізи циліндра площинами.

Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називають **осьовим перерізом циліндра** (мал. 4). Осьовий переріз циліндра — прямокутник, одна із сторін якого дорівнює діаметру циліндра, а інша - його висоті. На малюнку 4 прямокутник ABB_1A_1 - осьовий переріз циліндра; AB - діаметр циліндра; AA_1 - твірна, що дорівнює висоті циліндра. Якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат, його інколи називають рівнобічним (або рівнобедреним або рівностороннім).

Приклад 1. Довжина кола основи циліндра дорівнює 12 π см, а діагональ осьового перерізу - 13 см. Знайти твірну циліндра.

Розв'язання. 1) Нехай A_1B - діагональ осьового перерізу циліндра (мал. 4); $A_1B = 13$ см.



мал. 4

2) Позначимо радіус циліндра - r. Тоді за умовою $2\pi r = 12\pi$, звідси $2r = 12$ (см). Тому $AB = 2r = 12$ см.

3) В ΔAA_1B: $AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см).

Приклад 2. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайти площу осьового перерізу циліндра.

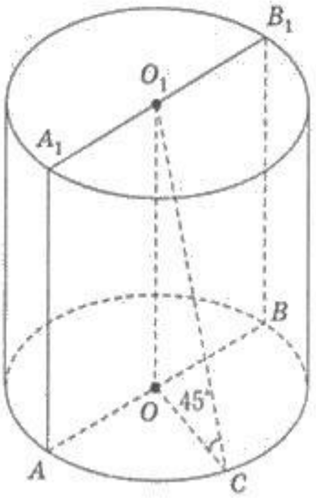
Розв'язання. 1) Нехай O_1C - відрізок, що з'єднує центр верхньої основи - точку O_1 з точкою C кола нижньої основи (мал. 5). $O_1C = 4\sqrt{2}$ см.
2) OC - проекція O_1C на площину нижньої основи, тому $\angle O_1CO$ - кут, що утворює відрізок O_1C з площиною нижньої основи. За умовою $\angle O_1CO = 45°$.

3) В ΔOO_1C: $OO_1 = O_1C \sin \angle O_1CO = 4\sqrt{2} \sin 45° = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ (см);

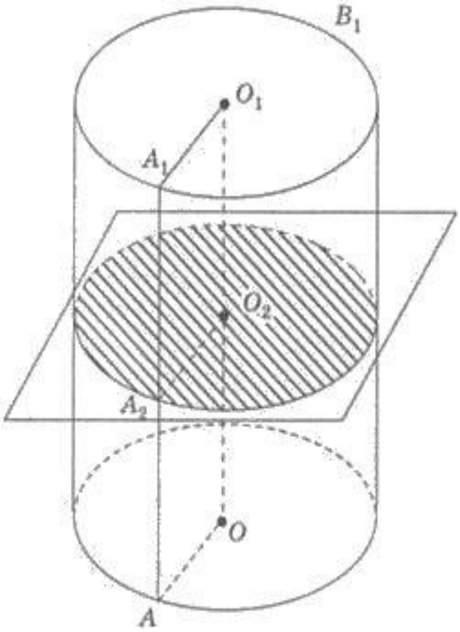
$OC = O_1C \cos \angle O_1CO = 4\sqrt{2} \cos 45° = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ (см).

4) AA_1B_1B - осьовий переріз, $AA_1 = OO_1 = 4$ см; $AB = 2 \cdot AO = 4 \cdot 2 = 8$ (см).

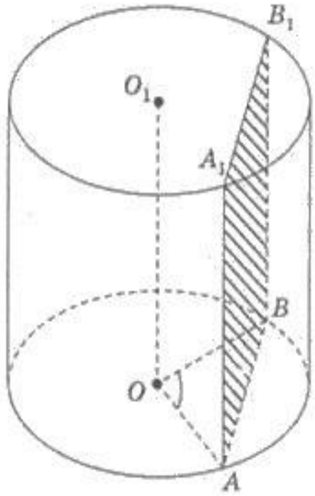
5) Тому площа діагонального перерізу $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot AA_1 = 8 \cdot 4 = 32$ (см^2).



мал. 5



мал. 6



мал. 7

Переріз циліндра площиною, яка є паралельною до площини основ - круг, що дорівнює кругу основи циліндра (мал. 6). Радіус перерізу A_2O_2 дорівнює радіусу циліндра AO.

Перерізом циліндра площиною, паралельної осі циліндра є прямокутник. На малюнку 7 прямокутник AA_1B_1B - переріз циліндра площиною, паралельної осі циліндра OO_1.

Дві його сторони: AA_1 і BB_1 - твірні циліндра, а дві інші: AB і A_1B_1 - паралельні і рівні хорди основ.

Приклад 3. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу 60°. Радіус основи циліндра дорівнює 6 см, а висота - 5 см. Знайти периметр отриманого перерізу.

Розв'язання. 1) Нехай ABB_1A_1 - переріз, що задано в умові (мал. 7), $AO = OB = 6$ см, $AA_1 = 5$ см, $\angle AOB = 60°$.

2) Оскільки $AO = OB$, то ΔAOB - рівнобедрений, $\angle OAB = \angle OBA = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$. Тому ΔAOB - рівносторонній, $AB = OA = 6$ см.

3) Отже, периметр перерізу $P_{ABB_1A_1} = 2\left(AA_1 + AB\right) = 2\left(5 + 6\right) = 2 \cdot 11 = 22$ (см).

Площі бічної та повної поверхонь циліндра.

Площа бічної поверхні циліндра $S_{біч}$ радіус основи якого дорівнює r, а висота h обчислюється за формулою

$$S_{біч} = 2\pi rh$$

Щоб знайти площу повної поверхні циліндра $S_{повн}$ необхідно до площі його бічної поверхні додати площі двох його основ. Оскільки основою є круг, площа якого дорівнює πr^2, то маємо

$$S_{повн} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r + h)$$

Приклад. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 4 см і утворює кут 60º із площиною основи. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання. 1) На малюнку 4 зображено осьовий переріз циліндра - прямокутник ABB_1A_1, діагональ якого A_1B = 4 см, $\angle A_1BA$ = 60°.

2) В ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AA_1 = A_1B\sin\angle A_1BA = 4\sin 60° = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см);

$AB = A_1B\cos\angle A_1BA = 4\cos 60° = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ (см).

3) Отже, $h = 2\sqrt{3}$ (см), $r = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (см).

Тоді $S_{біч} = 2\pi rh = 2\pi\cdot 1\cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi$ (см²).

Об'єм циліндра.

Об'єм циліндра *V* дорівнює добутку площі його основи *S* на висоту *h*:

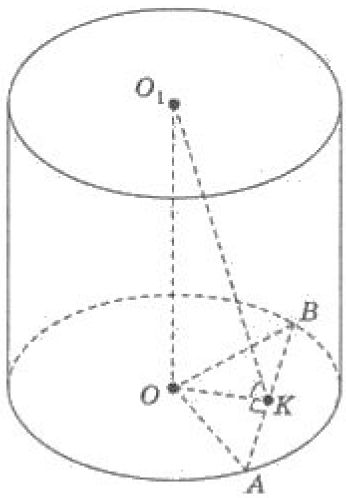
$$V = Sh.$$

Якщо радіус циліндра дорівнює *r*, а висота *h*, то об'єм циліндра:

$$V = \pi r^2 h.$$

Приклад. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом 120º. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди дорівнює 4 см і утворює кут 60° із площиною нижньої основи. Знайти об'єм циліндра.

Розв'язання. 1) На малюнку 8 зображено заданий в умові циліндр, $\angle BOA$ = 120°, *К* - середина *AB*, O_1K = 4 см, $\angle O_1KO$ = 60°.



мал. 8

2) В ΔO_1KO ($\angle O = 90°$):

$$OO_1 = O_1K \sin\angle O_1KO = 4\sin 60^\circ = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$O_1O = h.$

3) В ΔO_1KO: $OK = O_1K\cos\angle O_1KO = 4\cos 60^\circ = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ (см).

4) Оскільки K - середина AB і ΔAOB - рівнобедрений ($OA = OB$), то OK - медіана, бісектриса, висота ΔAOB, $\angle OKA = 90^\circ$, $\angle AOK = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

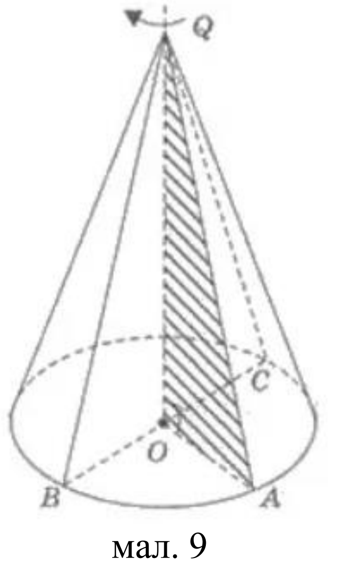
5) В ΔOKA: $OA = \frac{OK}{\cos\angle AOK} = \frac{2}{\cos 60^\circ} = 4$ (см). Отже, $r = 4$ см.

6) Об'єм циліндра $V = \pi r^2 h = \pi\cdot 4^2\cdot 2\sqrt{3} = 32\sqrt{3}\pi$ (см³).

Означення конуса. Елементи конуса.

Конусом називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо осі, що містить один з його катетів.

На малюнку 9 прямокутний трикутник QOA з прямим кутом O обертається навколо прямої, що містить катет QO цього трикутника, пряма QO є віссю конуса, утвореного в результаті цього обертання. Точку Q називають **вершиною конуса**, катет QO (та його довжину) називають **висотою конуса**. Інший катет OA цього трикутника описує круг, який називають **основою конуса**. Радіус цього круга називають **радіусом конуса**, діаметр - **діаметром конуса**. На малюнку 9: OA, OB, OC - радіуси конуса, BC - його діаметр.



мал. 9

Поверхню, утворену обертанням гіпотенузи QA трикутника QOA називають **бічною поверхнею конуса**. Кожний відрізок цієї поверхні (а також його довжину), що з'єднує вершину конуса точку Q з точкою кола основи називають **твірними конуса**. На малюнку 9: QA, QB, QC - твірні конуса. Всі твірні конуса рівні між собою і нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом.

Зауважимо, що природно позначати радіус конуса буквою r, висоту — буквою h, твірну - буквою l.

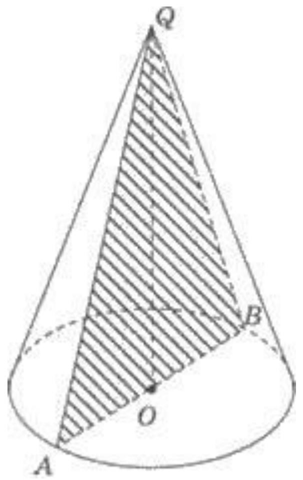
Приклад. Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а катет 8 см обертається навколо цього катета. Знайти площу основи утвореного конусом.

Розв'язання. 1) (мал. 9). $QA = l = 10$ см, $QO = h = 8$ см. В ΔQOA: $OA = r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\ (\text{см})$.

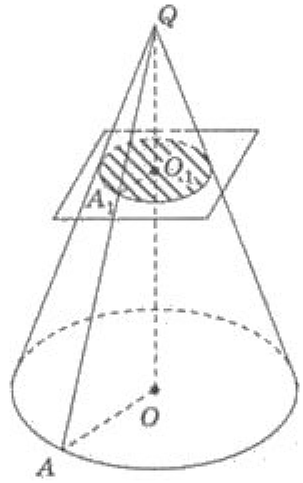
2) Тоді площа основи $S = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi\ \left(\text{см}^2\right)$

Перерізи конуса площинами.

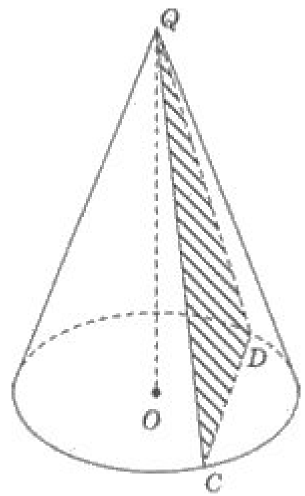
Переріз конуса площиною, який проходить через його вісь, називають **осьовим перерізом** (мал. 10). Осьовий переріз конуса - рівнобедрений трикутник, основа якого - діаметр конуса, а бічні сторони - твірні конуса. Висоти цього рівнобедреного трикутника співпадає з висотою конуса. На малюнку 10 трикутник QAB - осьовий переріз конуса, AB - діаметр конуса, QA і QB - твірні конуса, QO - висота конуса.



мал. 10



мал. 11



мал. 12

Якщо осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник, його інколи називають рівностороннім (або рівнобічним, або рівнобедреним).

Приклад 1. Довжина кола основи конуса дорівнює 4π см. Знайти площу осьового перерізу конуса, якщо він є прямокутним трикутником.

Розв'язання. 1) Нехай QAB - осьовий переріз конуса, $\angle BQA = 90°$ (мал. 10).

2) Позначимо $OB = OA = r$. За умовою $2\pi r = 4\pi$, тоді $r = 2$ см.

3) ΔQAB - рівнобедрений прямокутний:

$$\angle QBO = \frac{180° - 90°}{2} = 45°.$$

4) В ΔQOB: $\angle BQO = 90° - 45° = 45°$, тому $QO = OB = 2$ см.

5) $S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot QO = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4\ (\text{см}^2)$.

Переріз конуса площиною, яка є паралельною до площини основи є круг (мал. 11). Центр цього круга - точка O, знаходиться на осі конуса.

Приклад 2. Висота конуса дорівнює 9 см, а радіус основи - 6 см. На відстані 3 см від вершини конуса проведено переріз площиною, паралельною до основи конуса. Знайти площу цього перерізу.

Розв'язання. 1) За умовою задачі $OQ = 9$ см, $AO = 6$ см, $QO_1 = 3$ см (мал. 11).

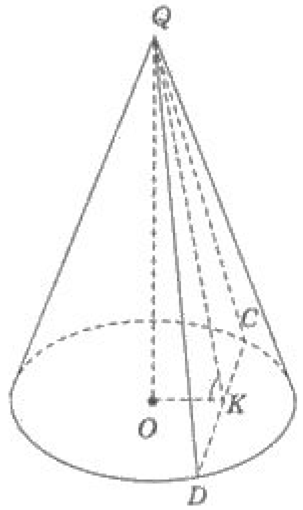
2) $\Delta QA_1O_1 \sim \Delta QAO$ (за двома кутами), тоді $\frac{QO_1}{QO} = \frac{A_1O_1}{AO}$, $\frac{3}{9} = \frac{A_1O_1}{6}$, $A_1O_1 = 2$ (см).

3) Тоді площа перерізу $S_{пер} = \pi \cdot A_1O_1^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ (см²).

Перерізом конуса площиною, який проходить через вершину конуса, є рівнобедрений трикутник, бічними сторонами якого є твірні конуса. На малюнку 12 трикутник *QCD* - переріз конуса площиною, що проходить через вершину конуса *Q*. Його бічні сторони - твірні *QC* і *QD* конуса, а основа - хорда основи конуса *CD*.

Приклад 3. Через вершину конуса проведено переріз, який нахилений до площини основи під кутом 60°. Знайти висоту конуса, якщо відстань від центра основи хорди, по який переріз перетинає основу, дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. 1) Нехай *QCD* - переріз, про який йде мова у задачі (мал. 13).



мал. 13

2) ΔQCD - рівнобедрений, *CD* - його основа, проведемо *QK* - висоту і медіану ΔQCD.

3) Оскільки $QK \perp CD$ і *OK* - проекція *QK* на площину основи, то за теоремою про три перпендикуляри, матимемо $OK \perp CD$.

4) Тоді *OK* - відстань від точки *O* до хорди *CD*, $OK = 4\sqrt{3}$ см (за умовою).

5) Оскільки $QK \perp CD$ і $OK \perp CD$, то площина *DQK* перпендикулярна хорді *CD*, тому $\angle QKO$ - кут нахилу перерізу *QCD* до площини основи. За умовою $\angle QKO = 60°$.

6) В ΔQKO ($\angle O = 90°$): $\operatorname{tg} \angle QKO = \frac{OQ}{OK}$, $OQ = 4\sqrt{3}\operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ (см).

Площі бічної та повної поверхонь конуса.

Площа бічної поверхні конуса $S_{біч}$, радіус основи якого дорівнює r, а твірна l обчислюється за формулою:

$$S_{біч} = \pi rl .$$

Щоб знайти площу повної поверхні конуса $S_{повн}$ необхідно до площі його бічної поверхні додати площу основи. Основою конуса є круг радіуса r, тому:

$$S_{пов} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\left(r + l\right)$$

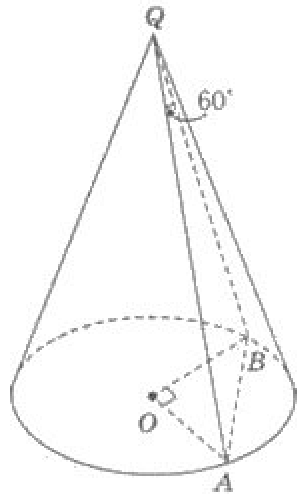
Приклад. Хорду, що лежить в основі конуса, видно з його вершини під кутом 60°, а з центра основи - під прямим кутом. Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 4 см.

Розв'язання. 1) на малюнку 14 зображено конус, AB - хорда основи, $\angle AQB = 60°$, $\angle AOB = 90°$, $QA = QB = l = 4$ см.

$\angle QAB = \angle QBA = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$, тому ΔAQB - рівносторонній, $AB = 4$ см.

3) В ΔAOB ($\angle AOB = 90°$): $r^2 + 2^2 = 4^2$, $r = 2\sqrt{2}$ (см).

4) Тоді $S_{біч} = \pi rl = \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}\pi$ (см²).



мал. 14

Об'єм конуса.

Об'єм конуса V дорівнює третині добутку площі його основи S на висоти h:

$$V = \frac{1}{3}Sh .$$

Якщо радіус основи конуса дорівнює r, а висота h, то об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h .$$

Приклад. Знайти об'єм конуса, якщо його осьовим перерізом є правильний трикутник зі стороною 12 см.

Розв'язання. 1) (мал. 10) Нехай ΔQAB - осьовий переріз конуса, $QA = QB = AB = 12$ см.

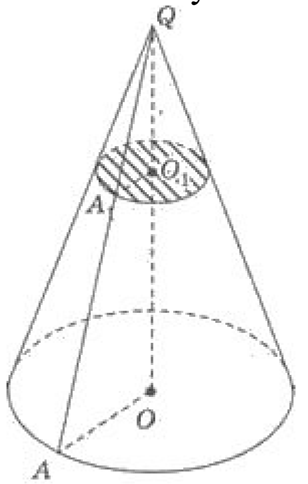
2) Тому радіус основи $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ (см).

3) В ΔQOA висота $h = QO = \sqrt{AQ^2 - AO^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ (см).

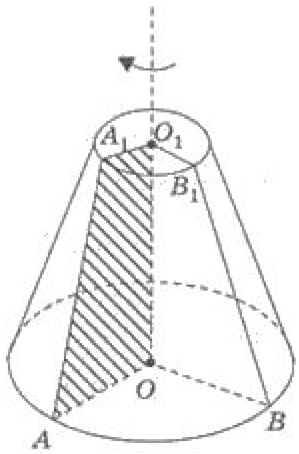
4) Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi$ (см³).

Означення зрізаного конуса. Елементи зрізаного конуса.

Розглянемо довільний конус і проведемо площину, паралельну до основи конуса. Ця площина перетинається з конусом по кругу і розбиває конус на дві частини (мал. 15). Одна з цих частин є конусом, а іншу називають **зрізаним конусом**. Основа вихідного конуса і круг, отриманий в перерізі називають **основами зрізаного конуса**, а відрізок, що з'єднує їх центри - **висотою зрізаного конуса**. На малюнку 15: OA і O_1A_1 - радіуси основ зрізаного конуса, OO_1 - висота зрізаного конуса.



мал. 15



мал. 16

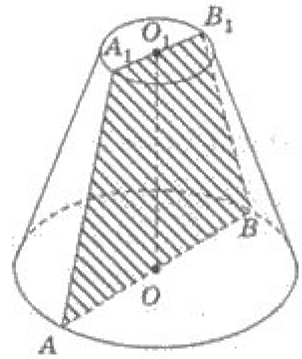
Зрізаний конус можна розглядати і як геометричне тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції навколо прямої, що містить її меншу бічну сторону. На малюнку 16 прямокутна трапеція OO_1A_1A з прямими кутами O і O_1 обертається навколо прямої OO_1. Цю пряму називають віссю зрізаного конуса. Бічна сторона OO_1 трапеції OO_1A_1A є висотою зрізаного конуса, а основи трапеції - радіусами основ зрізаного конуса.

Поверхню, утворену обертанням більшої бічної сторони AA_1 трапеції OO_1A_1A називають **бічною поверхнею зрізаного конуса**. Кожний відрізок цієї поверхні (а також його довжину), який сполучає найближчі точки кіл основ зрізаного конуса, називають **твірними зрізаного конуса**. На малюнку 16: AA_1 і BB_1 - твірні зрізаного конуса. Вони рівні між собою.

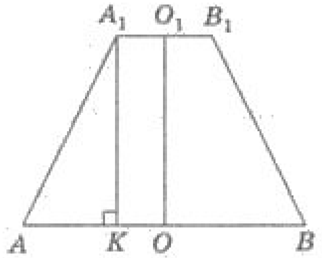
Зауважимо, що природно позначати радіуси основ зрізаного конуса - r_1 і r_2, висоту - h, твірну - l.

Осьовий переріз зрізаного конуса.

Переріз зрізаного конуса площиною, який проходить через його вісь, називають **осьовим перерізом зрізаного конуса** (мал. 17). Осьовий переріз зрізаного конуса - рівнобічна трапеція, основи якої - діаметри основ конуса, бічні сторони - твірні зрізаного конуса, висота цієї трапеції дорівнює висоті зрізаного конуса.



мал. 17



мал. 18

Приклад. Довжина твірної зрізаного конуса дорівнює 13 см, висота - 12 см, а більший із радіусів основ - 7 см. Знайти площу осьового перерізу зрізаного конуса.

Розв'язання. 1) Нехай AA_1B_1B - осьовий переріз зрізаного конуса, $AA_1 = 13$ см, $OO_1 = 12$ см, $AO = 7$ см (мал. 17).

2) Виконаємо планіметричний малюнок перерізу (мал. 18) і проведемо висоту A_1K трапеції AA_1B_1B, $A_1K = OO_1 = 12$ см.

3) В ΔAA_1K ($\angle K = 90°$): $AK = \sqrt{AA_1^2 - A_1K^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см). Тоді $A_1O_1 = KO = AO - AK = 7 - 5 = 2$ (см).

4) $AB = 2 \cdot AO = 2 \cdot 7 = 14$ (см), $A_1B_1 = 2 \cdot A_1O_1 = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

Тоді $S_{AA_1B_1B} = \dfrac{AB + A_1B_1}{2} \cdot A_1K = \dfrac{14+4}{2} \cdot 12 = 108$ (см²).

Площі бічної і повної поверхонь зрізаного конуса.

Площа бічної поверхні зрізаного конуса $S_{біч}$, радіуси основ якого дорівнюють r і r_1, а твірна l обчислюється за формулою:

$$S_{\text{біч}} = \pi l(r + r_1).$$

Щоб знайти площу повної поверхні зрізаного конуса $S_{повн}$ необхідно до площі його бічної поверхні додати площі двох його основ. Оскільки основами є круги радіусів r і r_1, то

$$S_{повн} = \pi l(r + r_1) + \pi r^2 = \pi l(r + r_1) + \pi\left(r^2 + r_1^2\right).$$

Приклад. Знайти площу повної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 3 см і 5 см, якщо відомо, що в осьовий переріз конуса можна вписати коло.

Розв'язання. 1) На малюнку 17 подано зрізаний конус, у якого $r = AO = 5$ см, $r_1 = A_1O_1 = 3$ см.

2) Трапеція AA_1B_1B - осьовий переріз зрізаного конуса, $AB = 2 \cdot AO = 2 \cdot 5 = 10$ (см), $A_1B_1 = 2 \cdot A_1O_1 = 2 \cdot 3 = 6$ (см), $AA_1 = l$. Оскільки в трапецію AA_1B_1B можна вписати коло, то $AB + A_1B_1 = 2l$, $2l = 10 + 6$, $l = 8$ (см).

3) Отже, $S_{повн} = \pi \cdot 8(5+3) + \pi\left(5^2 + 3^2\right) = 98\pi(\text{см})$.

Об'єм зрізаного конуса.

Об'єм V зрізаного конуса з висотою h і радіусами r і r_1 обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + rr_1 + r_1^{\,2}\right).$$

Приклад. У зрізаному конусі радіус меншої основи дорівнює 5 см. Висота конуса дорівнює 3 см, а його твірна утворює з площиною більшої основи кут 45°. Знайти об'єм зрізаного конуса.

Розв'язання. 1) На малюнку 19 зображено зрізаний конус, у якого $A_1O_1 = r_1 =$ $= 5$ см; $O_1O = h = 3$ см.

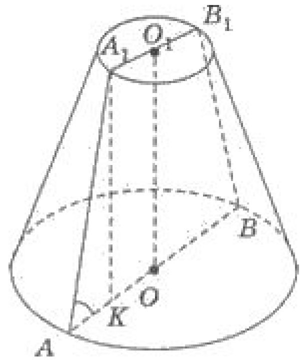
2) Нехай AA_1B_1D - осьовий переріз конуса. За умовою $\angle A_1AO = 45°$.

3) Проведемо $A_1K \parallel OO_1$. Тоді A_1O_1OK – прямокутник і $A_1K = OO_1 = 3$ см, $KO = A_1O_1 = 5$ см.

4) В ΔAA_1K: $AK = A_1K \cdot \mathrm{ctg}\angle AA_1K = 3 \cdot \mathrm{ctg}45^0 = 3 \cdot 1 = 3$ (см).

5) Тоді $r = AO = AK + KO = 3 + 5 = 8(\text{см})$.

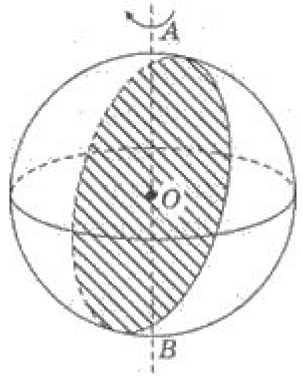
6) Об'єм зрізаного конуса $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot \left(8^2 + 8 \cdot 5 + 5^2\right) = 129\,\pi$ (см³).



мал. 19

Означення кулі і сфери. Елементи кулі і сфери.

Кулею називають геометричне тіло, утворене обертанням круга навколо осі, що містить його діаметр (мал. 20).



мал. 20

Центр круга, який обертається називають **центром кулі**, радіус круга - **радіусом кулі**, а діаметр круга - **діаметром кулі**. На малюнку 20 точка *O* - центр кулі, *OA* і *OB* - радіуси кулі, а *AB* - діаметр кулі.

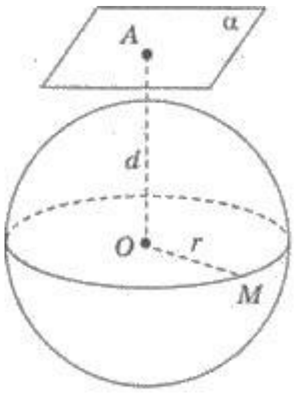
Поверхню кулі називають **сферою**.

Центр, радіус та діаметр кулі є також **центром, радіусом та діаметром сфери**. Всі точки сфери знаходяться на одній і тій самій відстані, що дорівнює радіусу, від центра сфери. Інші точки кулі, які не належать сфері, називають **внутрішніми точками**, про такі точки кажуть, що вони лежать всередині

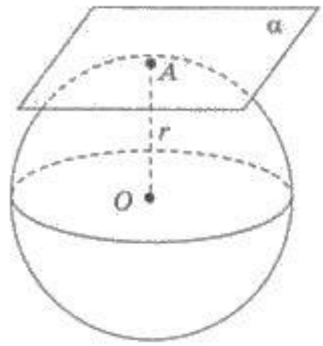
сфери. Внутрішні точки кулі знаходяться від центра кулі на відстані, яка менша за радіус.
Таким чином приходимо до ще одного означення сфери і кулі.
Сферою називають поверхню, яка складається із всіх точок простору, рівновіддалених від однієї і тієї самої точки. Цю точку називають **центром сфери**, а відстань від центра сфери до будь-якої її точки - **радіусом сфери**.
Кулею називають геометричне тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться на відстані, не більшій за дану від даної точки. Цю точку називають **центром кулі**, а дану відстань - **радіусом кулі**.
Приклад. Радіус сфери дорівнює 3,5 см. Всередині чи зовні сфери розміщена точка A, якщо вона віддалена від центра сфери на: 1) $\sqrt{10}$ см, 2) $\sqrt{14}$ см.
Розв'язання. 1) Оскільки $\sqrt{10}$ < 3,5, то точка *A* розміщена всередині сфери.
2) Оскільки $\sqrt{14}$ > 3,5, то точка *A* розміщена зовні сфери.

Взаємне розміщення кулі і площин.

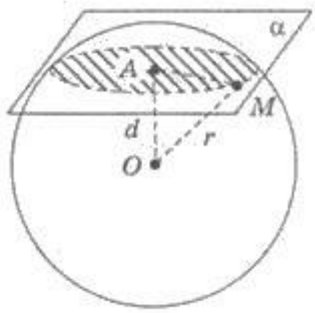
Площина α і куля можуть або не мати спільних точок (мал. 21) або мати одну спільну точку (мал. 22) або перетинатися і мати безліч спільних точок (мал. 23).



Мал. 21



мал. 22



мал. 23

Нехай *OM* = *r* — радіус кулі, а *OA* = *d* - перпендикуляр, опущений з центра кулі - точка *O* до площини α (відстань від центра кулі до площини α).
а) Якщо площина α і куля не мають спільних точок, то $d > r$;
б) Якщо площина α і куля мають одну спільну точку, то $d = r$;
в) Якщо площина α і куля мають безліч спільних точок, то $d < r$.
Зауважимо, що обернене твердження також вірне: якщо $d > r$, то площина і куля не мають спільних точок, якщо $d = r$, то площина і куля мають одну спільну точку, якщо $d < r$, то площина і куля мають безліч спільних точок.
Приклад. Радіус кулі дорівнює 4,5 см. Скільки спільних точок має куля із площиною, якщо відстань від центра кулі до площини дорівнює: 1) 4 см, 2) $4\frac{1}{2}$ см, 3) 5 см.
Розв'язання. 1) 4 < 4,5, тому безліч спільних точок.
2) $4\frac{1}{2} = 4{,}5$, тому одна спільна точка.
3) 5 > 4, тому жодної спільної точки.

Розглянемо детальніше випадки коли площина і куля мають одну або безліч спільних точок.

Площина дотична до кулі (сфери).

Якщо площина має із кулею (сферою) лише одну спільну точку, то кажуть, що площина дотикається до кулі (сфери).

На малюнку 22 площина α дотинається до сфери, точку *A*, яка є спільною точкою площини і сфери, називають **точкою дотику**. Площина, дотична до кулі має властивість, аналогічну властивості дотичної до кола: дотична до кулі площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

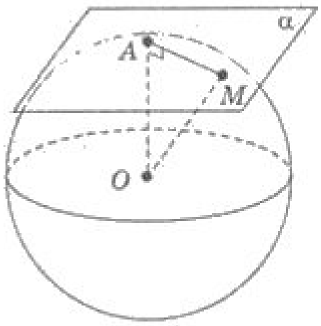
На малюнку 22: $OA \perp \alpha$.

Приклад. До кулі радіус якої 8 см проведемо дотичну площину. На цій площині взято точку *M*, яка знаходиться на відстані 15 см від точки дотику кулі і площини. Знайти відстань від точки *M* до центра кулі.

Розв’язання. 1) Нехай куля із центром у точці *O* дотикається до площини α у точці *A*, $OA = 8$ см (мал. 24).

2) *M* - довільна точка площини α, така, що $AM = 15$ см. Треба знайти відстань *OM*.

3) Оскільки ОА $\perp$ α, то $\angle OAM = 90°$. Маємо $OM = \sqrt{AO^2 + AM^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см).



мал. 24

Переріз кулі площиною.

Якщо площина α і куля мають безліч спільних точок (мал. 23), то кажуть про переріз кулі площиною.

Якщо площина проходить через центр кулі (мал. 20), то її називають **діаметральною площиною**. Переріз кулі діаметральною площиною є круг, радіус якого дорівнює радіусу кулі. Такий переріз називають **великим кругом**, а коло, що його обмежує - **великим колом**.

Переріз кулі площиною, відмінною від діаметральної площини, є також круг, радіус якого менший за радіус кулі. На малюнку 20 перерізом кулі площиною α є круг, центр якого - точка *A*, яка є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі - точки *O* на площину α. Радіус цього круга *AM*, де *M* - точка, що належить перерізу площини α зі сферою, що обмежує кулю. При цьому $OM = r$ — радіус кулі.

Приклад. Діаметр кулі дорівнює 50 см. Кулю перетнуто площиною на відстані 24 см від центра. Знайти площу утвореного перерізу.

Розв’язання. 1) Радіус кулі $r = 50 : 2 = 25$ (см).

2) За малюнком 23: $AM = \sqrt{OM^2 - AO^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$ (см). AM – радіус перерізу.

3) Площа перерізу $S = \pi \cdot AM^2 = \pi \cdot 7^2 = 49\pi$ (см²).

Площа сфери.

Площа сфери радіуса r обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi r^2 \cdot$$

Приклад. Скільки фарби треба, щоб пофарбувати 10 куль, радіус кожної з яких дорівнює 5 см, якщо на 1 м^2 витрачається 170 г фарби (округлити до цілих грамів)?

Розв'язання. 1) Площа поверхні однієї сфери $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (см²).

2) Площа поверхонь 10 куль дорівнює $S_1 = 10 \cdot 100\pi = 1000\pi$ (см^2). Оскільки 1 м$^2 = 10\ 000$ см^2, то $S_1 = \frac{1000\pi}{10000} = 0{,}1\pi$ (м^2).

3) Тоді маса фарби m, яка необхідна для фарбування цих куль $m = 0{,}1\pi \cdot 170 = 53$ (г).

Об'єм кулі.

Об'єм кулі V, радіус якої дорівнює r, обчислюється за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Приклад. Необхідно переплавити в одну кулю дві чавунні кулі радіусами 5 см і 6 см. Знайти (з точністю до десятих сантиметра) радіус нової кулі.

Розв'язання. 1) Об'єм початкових куль: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$ і $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3$.

2) Об'єм отриманої кулі $V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 341$.

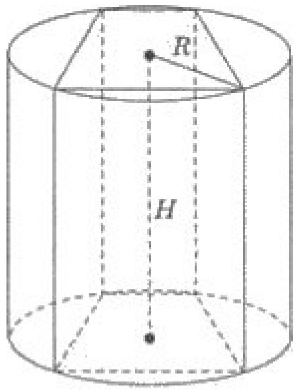
3) З іншого боку за відомою формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Маємо $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 341$, $r^3 = 341$, $r = \sqrt[3]{341} \approx 7$ (см).

КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ.

Нами вже розглянуто прості геометричні тіла: призма, піраміда, циліндр, конус, куля. Але у природі, техніці та геометрії також розглядають і комбінації вказаних геометричних тіл.

1. Призма, вписана у циліндр.

Призму називають вписаною у циліндр, якщо її основи вписані в основи циліндра, а бічні ребра є твірними циліндра (мал. 25).



мал. 25

При цьому циліндр називають **описаним навколо призми**. Зрозуміло, що оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площини основи, то призма, вписана у циліндр, є прямою.

З означення призми, вписаної у циліндр, випливають її властивості:

1) Циліндр можна описати навколо прямої призми, якщо її основою є многокутник, навколо якого можна описати коло. При цьому радіус циліндра R дорівнює радіусу цього кола.

2) Висота H призми, яка сполучає центри кіл, описаних навколо основ, належить осі циліндра.

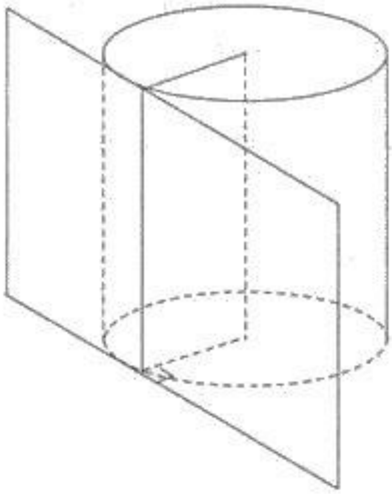
Приклад. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, в основі якої лежить: 1) трикутник, 2) ромб, який не є квадратом?

Розв'язання. 1) Так, оскільки навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

2) Ні, оскільки навколо ромба, який не є квадратом, не можна описати коло.

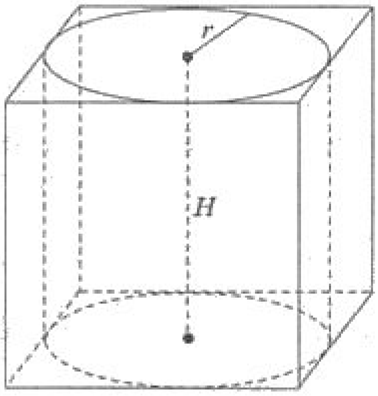
Призма, описана навколо циліндра.

Дотичною площиною до циліндра називають площину, що проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до площини осьового перерізу, який містить твірну циліндра (мал. 26).



мал. 26

Призму називають описаною навколо циліндра, якщо її основи описані навколо основ циліндра, а бічні грані належать площинам, дотичним до циліндра (мал. 27).



мал. 27

При цьому циліндр називають вписаним у призму, оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площини основ, то бічні грані призми, які містять твірні, також перпендикулярні до площин основ, тобто призма, описана навколо циліндра, є прямою.

З означення призми, описаної навколо циліндра, маємо її властивості:

1) Циліндр можна вписати в пряму призму, якщо її основою є многокутник, в який можна вписати коло. При цьому радіус циліндра r дорівнює радіусу цього кола.

2) Висота *H* призми, яка сполучає центри кіл, вписаних в основи, належить осі циліндра.

Приклад. Навколо циліндра, висота якого дорівнює 5 см, описано чотирикутну призму, три сторони основи якої в порядку слідування дорівнюють 3 см, 4 см і 7 см. Знайти площу бічної поверхні призми.

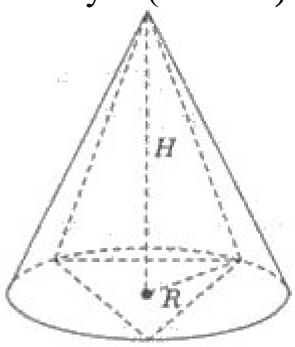
Розв'язання. 1) Позначимо невідому сторону чотирикутника основи x. Оскільки цей чотирикутник описано навколо кола (мал. 27), то $3 + 7 = 4 + x$, звідси $x = 6$ см.

2) Площа бічної поверхні призми $S_{біч} = P \cdot l$, де P - периметр основи, l - бічне ребро, яке дорівнює висоті циліндра. Маємо: $P = 3 + 7 + 4 + 6 = 20$ (см).

3) $S_{біч} = 20 \cdot 5 = 100$ (см^2).

Піраміда, вписана у конус.

Піраміду називають вписану у конус, якщо її основа вписана в основу конуса, а вершиною є вершина конуса (мал. 28).



мал. 28

При цьому конус називають описаним навколо піраміди.

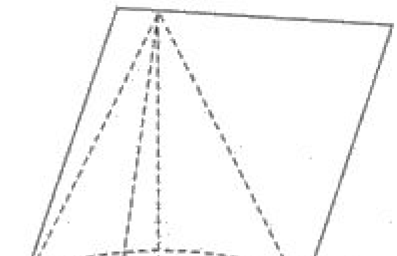
Зрозуміло, що бічні ребра піраміди, вписаної у конус, є твірними конуса.

Властивості піраміди, вписаної у конус, такі:

1) Конус можна описати навколо піраміди, якщо її основою є многокутник, навколо якого можна описати коло, а висота піраміди проходить через центр цього кола.
2) Радіус основи конуса дорівнює радіусу кола R, описаного навколо основи піраміди, а висота конуса H дорівнює висоті піраміди.
Приклад. Навколо піраміди, сторони основи якої дорівнюють 10 см, 10 см і 12 см, а висота 8 см, описано конус. Знайти площу осьового перерізу конуса.
Розв'язання. 1) Нехай радіус основи дорівнює R, а висота - H (мал. 28). Тоді площа осьового перерізу конуса $S_п = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot H = RH$.
2) Висота конуса дорівнює дорівнює висоті піраміди, тому $H = 8$ см.
3) Радіус конуса знайдемо як радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Використаємо формулу $R = abc/4S$, де a, b, c - сторони трикутника, S - його площа.
4) За формулою Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ - півпериметр трикутника.
Маємо $p = \frac{10+10+12}{2} = 16$ (см). $S = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48$ (см²).
5) Тоді $R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = 6{,}25$ (см).
6) Тоді $S_п = 6{,}25 \cdot 8 = 50$ (см²).

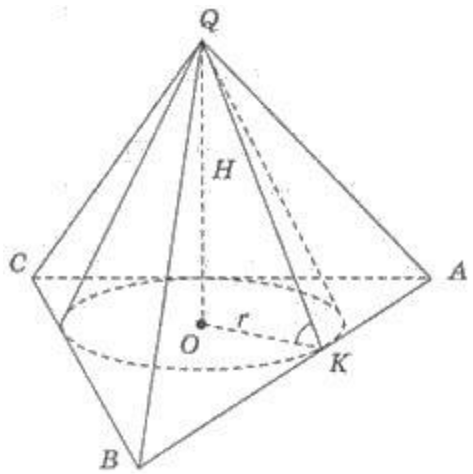
Піраміда, описана навколо конуса.

Дотичною площиною до конуса називають площину, що проходить через твірну конуса і перпендикулярна до площини осьового перерізу, який містить цю твірну (мал. 29).



мал. 29

Піраміду називають описаною навколо конуса, якщо її основа описана навколо основи конуса, а вершиною є вершина конуса (мал. 30).



мал. 30

При цьому конус називають вписаним у піраміду. Зауважимо, що бічні грані піраміди належать площинам, дотичним до конуса.

Виходячи з означення, маємо властивості піраміди, описаної навколо конуса.

1) Конус можна вписати в піраміду, якщо її основою є многокутник, в який можна вписати коло, а висота піраміди проходить через центр цього кола.

2) Радіус основи конуса дорівнює радіусу кола r, вписаного в основу піраміди, а висота конуса H дорівнює висоті піраміди.

Приклад. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60º. Знайти висоту конуса, вписаного у піраміду.

Розв'язання. 1) Нехай у трикутну піраміду з основою ABC і вершиною Q вписано конус (мал. 30). Основа висоти конуса точка О - центр кола, вписаного в ΔABC.

2) Нехай точка K - точка дотику кола, вписаного в ΔABC, до сторони AB. Позначимо $OK = R$ - радіус кола, вписаного в ΔABC, і також радіус основи конуса.

3) $OK \perp AB$, за теоремою про три перпендикуляри $QK \perp AB$, тому $\angle QKO$ - лінійний кут двогранного кута при ребрі основи піраміди. За умовою $\angle QKO = 60°$.

4) За відомою формулою радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник, знаходиться за формулою $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, де a, b - катети, c - гіпотенуза.

5) За умовою $AC = 6$ см, $BC = 8$ см - катети.

Тоді гіпотенуза $AB = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ (см).

6) Маємо $r = \dfrac{6+8-10}{2} = 2$ (см).

7) QO - висота піраміди і конуса. В ΔOQK ($\angle O = 90°$): $\operatorname{tg} \angle QOK = \dfrac{OQ}{OK}$, тоді $OQ = 2 \operatorname{tg} 60° = 2\sqrt{3}$ (см).

Многогранник, вписаний в кулю.

Многогранник називають вписаним у кулю, якщо всі його вершини лежать на поверхні кулі.

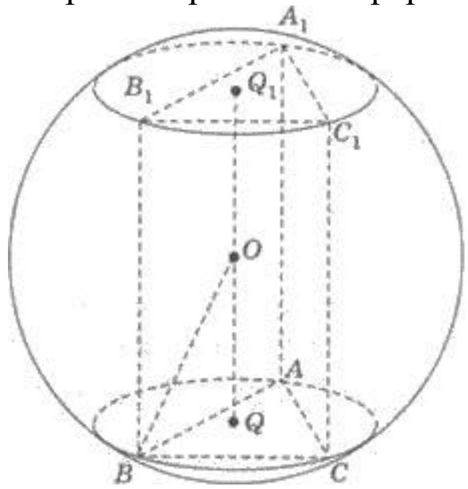
При цьому кулю називають **описаною навколо многогранника**.

Основні властивості призми, вписаної в кулю, такі (мал. 31):

1) Кулю можна описати навколо прямої призми, якщо її основою є многокутник, навколо якого можна описати коло.

2) Центр кулі є серединою висоти призми, що сполучає центри кіл, описаних навколо многокутників основ призми.

3) Основи призми вписані в рівні паралельні перерізи кулі.



мал. 31

Приклад 1. Навколо правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 5 см, описано кулю. Радіус кулі дорівнює 13 см. Знайти висоту призми.

Розв'язання. 1) Нехай навколо правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ описано кулю (мал. 31).

2) $QB = R_{ABC}$ - радіус кола, описаного навколо ΔABC. $R_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, де a = 5 см - сторона основи правильного трикутника ABC.

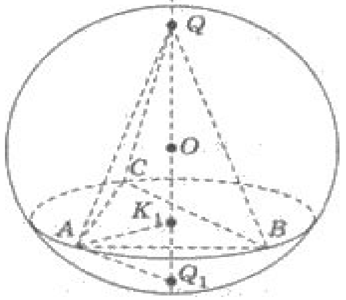
Тоді $R_{\Delta ABC} = \frac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 5$ (см).

3) У ΔOQB: $OB = R$ = 13 см - радіус кулі, $\angle OQB = 90°$.

Маємо $OQ = \sqrt{OB^2 - QB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

4) Оскільки точка O - середина висоти призми QQ_1 то $QQ_1 = 2 \cdot 12 = 24$ (см).

Основні властивості піраміди, що вписана у кулю, наступні (мал. 32).

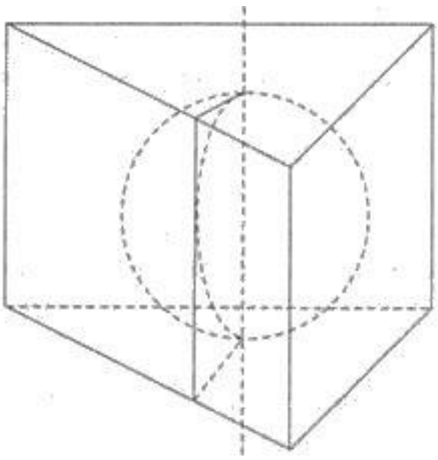


мал. 32

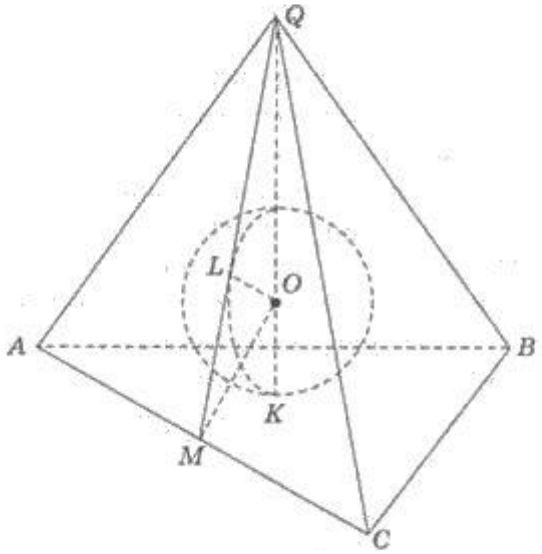
1) Кулю можна описати навколо піраміди, якщо її основою є многокутник, навколо якого можна описати коло. Центр кулі, описаної навколо піраміди, лежить на перпендикулярі до площини основи, проведеному через центр кола, описаного навколо основи.
2) Центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, лежить на прямій, що містить висоту піраміди.
3) Центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, збігається з центром кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, бічною стороною якого є бічне ребро піраміди, а висотою - висота піраміди. Радіус кулі дорівнює радіусу цього кола.
Зазначимо, що центр описаної кулі може належати висоті піраміди, або лежати на її продовженні (тобто знаходиться або всередині піраміди, або за її межами). Розв'язуючи задачі способом, запропонованим нижче, немає потреби розглядати два випадки. При обраному способі розв'язування місце розташування центра кулі (усередині чи поза пірамідою) не враховується.
Приклад 2. Доведіть, що радіус кулі R, описаної навколо правильної піраміди, можна знайти за формулою $R = \frac{r^2 + H^2}{2H}$, де H - висота піраміди, r - радіус кола, описаного навколо основи піраміди.
Розв'язання. 1) Нехай точка O - центр кулі, описаної навколо правильно: піраміди з висотою QK (мал. 32). За умовою $QK = R$, $KA = r$ - радіус кола описаного навколо основи.
2) Продовжимо QK до другого перетину з кулею в точці Q_1. Тоді $QQ_1 = 2R$ - діаметр кола, а тому $\angle QAQ_1 = 90°$ і QQ_1 - гіпотенуза прямокутного трикутника QAQ_1.
3) У ΔQKA ($\angle K = 90°$): $AQ^2 = QK^2 + AK^2$; $AQ^2 = H^2 + r^2$.
4) За властивістю катета прямокутного трикутника у ΔQAQ_1 матимемо $AQ^2 = QQ_1 \cdot QK$, тобто $AQ^2 = 2R \cdot H$.
5) Отже, $AQ^2 = H^2 + r^2$ і $AQ^2 = 2RH$. Звідси $H^2 + r^2 = 2RH$; $R = (r^2 + H^2)/2H$, що й треба було довести.

Многогранник, описаний навколо кулі.

Многогранник називають описаним навколо кулі, якщо всі його грані дотикаються до поверхні кулі.
При цьому кулю називають **вписаною у многогранник**.
Основні властивості призми, описаної навколо кулі, такі (мал. 33):
1) Кулю можна вписати у пряму призму, якщо її основою є многокутник, у який можна вписати коло, а висота призми дорівнює діаметру цього кола.
2) Центр кулі є серединою висоти призми, яка сполучає центри кіл, вписаних у многокутники основ призми.



мал. 33



мал. 34

Приклад 1. Відомо, що в трикутну призму, сторони основ якої дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, можна вписати кулю. Знайти радіус цієї кулі.

Розв'язання. 1) Діаметр вписаної кулі дорівнює висоті призми і в той самий час дорівнює діаметру кола, вписаного в основу призми. Отже, радіус кола, вписаного в основу призми дорівнює радіусу кулі.

2) Радіус кола r, вписаного в основу призми, знайдемо за формулою $r = S/p$, де S - площа трикутника основи, p - його півпериметр.

3) $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ (см).

4) За формулою Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84 \ (\text{см}^2).$$

5) $r = \frac{84}{21} = 4$ (см).

6) Отже, радіус кулі також дорівнює 4 см.

Сформулюємо основні властивості піраміди, описаної навколо кулі (мал. 34).

1) Якщо в піраміді всі двогранні кути при основі рівні між собою, то в цю піраміду можна вписати сферу. Центр сфери належить висоті піраміди, точка дотику з основою піраміди збігається з центром вписаного в основу кола, а точки дотику з бічними гранями належать висотам цих граней.

2) У будь-яку правильну піраміду можна вписати кулю. Центр кулі належить висоті піраміди.

3) Центр кулі, вписаної у правильну піраміду, збігається з центром кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, бічною стороною якого є апофема правильної піраміди, а висотою — висота піраміди. Радіус кулі дорівнює радіусу цього кола.

Приклад 2. Відомо, що в трикутну піраміду, висота якої дорівнює 20 см, а висота однієї з бічних граней 25 см, можна вписати кулю. Знайти її радіус.

Розв'язання. 1) Нехай QK - висота трикутної піраміди $QABC$, а QM - висота бічної грані (мал. 34). За умовою $QK = 20$ см, $QM = 25$ см.

2) За умовою в піраміду можна вписати кулю. Нехай центр цієї кулі – точка O, а точка L - точка дотику кулі до бічної грані QAC, $L \in QM$.
3) Позначимо $OK = OL = r$ - радіус вписаної кулі.
4) Прямокутні трикутники OKM і OLM рівні (за катетом і гіпотенузою). Тому $\angle OMK = \angle OML$, а отже, MO - бісектриса кута QMK, а тому й трикутника QMK.
5) За властивістю бісектриси трикутника маємо $\frac{QM}{MK} = \frac{OQ}{OK}$ (1).
6) У ΔQMK: $MK = \sqrt{MQ^2 - QK^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ (см).
7) Врахуємо, що $OQ = QK - OK$, та підставимо у рівність (1): $\frac{25}{15} = \frac{20 - r}{r}$; звідси $r = 8 \cdot 4/7$ (см).
Зауважимо, що в геометрії розглядають також інші комбінації геометричних тіл (наприклад, циліндра і піраміди, кулі і циліндра тощо).