

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

**Н. І. КОСАЧ**

**ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ КАЛІБРУВАННІ  
ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ ВИТРАТИ**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2017

УДК 531.732:681.121  
К71

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Н. Є. Гоц,  
канд. техн. наук, доц. Г. О. Павлова

**Косач, Н. І.**

К71 Оцінювання невизначеності при калібруванні засобів вимірювання витрати [Текст] : навч. посіб. / Н. І. Косач. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2017. – 64 с.

ISBN 978-966-662-574-1

Наведено відомості, що розглядаються під час викладення дисципліни «Вимірювання маси та витрати». Висвітлено суть оцінювання невизначеності при калібруванні засобів вимірювання витрати речовин, які мають лінійні й нелінійні калібрувальні характеристики.

Для студентів вищих навчальних закладів напряму підготовки «Метрологія, стандартизація і сертифікація» за спеціальністю «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка», а також для науковців, аспірантів і викладачів.

Іл. 8. Табл. 9. Бібліогр.: 6 назв

**УДК 531.732:681.121**

© Косач Н. І., 2017  
© Національний аерокосмічний  
університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут», 2017

ISBN 978-966-662-574-1

## ВСТУП

Останніми роками все більшу увагу приділяють саме калібруванню засобів вимірювальної техніки (ЗВТ), зокрема приладів вимірювання витрати речовин (ЗВТ витрати) як рідин, включаючи нафту й нафтопродукти, так і газів, включаючи зріджений і природний. Тому доречно виникають питання щодо точності й достовірності нормування калібрувальних характеристик ЗВТ витрати, оцінювання невизначеності, яка пов'язана з цим калібруванням, правильності й однозначності застосування алгоритму оцінювання невизначеності вимірювань, отриманих з використанням узагальненої характеристики, а також для обчислення невизначеності середнього від кількості вимірів тієї самої витрати.

Зазвичай не всі ЗВТ витрати мають лінійні калібрувальні характеристики, що, однак, не обмежує їх застосування у певних галузях, але потребує деяких інших підходів при оцінюванні невизначеності, яка виникає при вимірюванні.

Оцінювання невизначеності при калібруванні й застосуванні ЗВТ витрати, що мають лінійні й нелінійні характеристики, здійснюється за різними процедурами.

У цьому посібнику розглядаються процедури, які застосовують для отримання калібрувальних характеристик ЗВТ витрати, які за отриманими даними калібрування є лінійними або нелінійними, але описуються поліномом квадратичного, кубічного або більш високого степеня нелінійності при застосуванні методу найменших квадратів, і оцінювання невизначеності, що пов'язана з цим калібруванням. Ці процедури застосовують тільки при використанні поліномів, які описуються цілими числами. Ці процедури також можна застосовувати до лінійної послідовності даних калібрування.

Узагалі реалізувати апроксимацію нелінійної характеристики й оцінювання невизначеності без застосування комп'ютера дуже складно, тому в цьому посібнику запропоновано те, до чого користувач має доступ. У багатьох випадках можна застосувати стандартні програми обчислення, доступні для більшості комп'ютерів.

Для ЗВТ витрати, які мають нелінійні калібрувальні характеристики, здійснювати екстраполяцію поза діапазоном отриманих під час калібрування даних не допускається.

Цей посібник має прикладну спрямованість – підвищення рівня освоєння матеріалу, який викладається студенту під час вивчення засобів вимірювання витрати, умов їх застосування й методів калібрування.

У цьому виданні визначено процедури, які застосовуються для отримання калібрувальних характеристик засобів вимірювання витрати речовин (ЗВТ витрати) будь-якого типу, що мають лінійні або нелінійні калібрувальні характеристики і які застосовують як у закритих трубопроводах, так і у відкритих каналах. У посібнику також наведено процедури оцінювання невизначеності, яка пов'язана з цим калібруванням; алгоритми для оцінювання невизначеності, що виникає при вимірюванні, отримані з використанням узагальненої характеристики, і для обчислення невизначеності середнього від кількості вимірів

тієї самої витрати. Розглядувані процедури оцінювання невизначеності застосовуються тільки при калібруванні ЗВТ витрати, які мають лінійні й нелінійні калібрувальні характеристики.

Навчальний посібник спрямовано на покращання якості опанування дисциплін з навчального плану підготовки бакалавра за напрямом підготовки «Метрологія, стандартизація і сертифікація» і спеціальністю «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка».

У цьому виданні наведено терміни і їх означення, які застосовуються під час викладення матеріалу, загальні питання щодо оцінювання невизначеності вимірювань при калібруванні й застосуванні ЗВТ витрати.

Для контролю засвоєння матеріалу наведено приклади обчислення невизначеності при калібруванні ЗВТ витрати, які мають лінійні й нелінійні калібрувальні характеристики, для відкритого каналу й закритого трубопроводу.

Посібник складається з двох розділів «Оцінювання невизначеності при калібруванні ЗВТ витрати речовин, що мають лінійні калібрувальні характеристики» і «Оцінювання невизначеності при калібруванні ЗВТ витрати речовин, що мають нелінійні калібрувальні характеристики»

## ТЕРМІНИ І ЇХ ОЗНАЧЕННЯ

Під час викладення дисципліни застосовуються такі терміни і їх означення.

**Калібрувальна характеристика** – характеристика, яку проведено через точки, що відповідають показанням витратоміра, залежно від деякої функції витрати.

**Границі довірчого інтервалу** – верхні й нижні границі інтервалу спостережуваного або розрахункового значення, у якому знаходиться дійсне значення з певною імовірністю, з урахуванням незначної невилученої систематичної похибки.

**Коефіцієнт кореляції** – показник ступеня залежності між двома змінними. Така залежність може бути зумовлена деякою причиною або впливом третьої змінної величини, але вирішити це не можна тільки на основі статистичних даних.

**Коваріація** – змішаний момент першого порядку невиправлених середніх величин, тобто

$$\text{Cov}(x, y) = \left[ \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right] / (n-1).$$

**Похибка вимірювання** – загальний термін, що означає різницю між вимірним і дійсним значеннями величини.

Похибка має як систематичні, так і випадкові складові.

**Випадкова похибка** – складова похибки вимірювання, яка непередбачено змінюється від вимірювання до вимірювання. Цю похибку неможливо скоригувати. Причина виникнення цієї похибки може бути як відомою, так і невідомою.

**Систематична похибка** – складова похибки вимірювання, яка є сталою або змінюється за певним законом від вимірювання до вимірювання. Причина виникнення цієї похибки може бути як відомою, так і невідомою.

**Промак, або груба помилка**, – похибка, через яку вимірювання будуть хибними. Такі похибки зазвичай мають індивідуальну причину, таку, як перебої в роботі приладу або некоректне передання одного або більше значень вимірної величини.

**Функція** – математична формула, що виражає залежність між двома або більше змінними.

**Апроксимувальна лінія** – лінія, яку проведено через кілька точок таким чином, щоб мінімізувати їх розкид відносно цієї лінії.

**Залишок** – різниця між спостережуваною величиною й відповідною величиною, яку розраховано за рівнянням регресії.

**Середньоквадратичний відхил вибірки (експериментальний)** – значення дисперсії відносно середнього значення  $n$  вимірів, що визначають за формулою

$$s(x) = \left[ \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1) \right]^{1/2}.$$

Якщо  $n$  вимірів визначено як основну сукупність, то наведена нижче формула забезпечує типову оцінку середньоквадратичного відхилу:

$$\sigma = \left[ \sum (x_i - \mu)^2 / n \right]^{1/2}.$$

**Границя систематичної похибки** – складова загальної невизначеності, пов'язана із систематичною похибкою. Її значення не зменшується при збільшенні кількості вимірів.

**Випадкова невизначеність** – оцінка, що є характеристикою діапазону значень, у межах якого з певним ступенем імовірності може знаходитися справжнє значення вимірюваної величини. Її значення, подане середніми значеннями, може бути зменшено при збільшенні кількості вимірів.

**Варіація** – значення дисперсії, що базується на середньому квадратичному відхилі від середнього арифметичного, яке визначають так:

$$Var(x) = \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1).$$

**Метод найменших квадратів** – метод обчислення коефіцієнтів рівняння специфічної форми, яке вибрано для апроксимації даних характеристики. Принцип найменших квадратів – мінімізація суми квадратів відхилень даних від характеристики.

**Поліном** – декілька умов для змінної  $x$ , за яких її степінь у вигляді цілого числа збільшується.

**Регресійний аналіз** – процес визначення кількісної залежності змінної від однієї або більше інших змінних. Багато з доступних комп'ютерних програм, що застосовуються для апроксимації характеристики, мають у назві слово «регресія».

## ПОЗНАЧЕННЯ Й СИМВОЛИ

Під час викладення матеріалу застосовують такі позначення й символи:

- $a$  – точка перетину калібрувальної характеристики з віссю ординат;
- $b$  – градієнт (або нахил) калібрувальної характеристики;
- $c$  – коефіцієнт у рівнянні за методом зважених найменших квадратів;
- $Cov()$  – коваріація змінних, наведених у дужках;
- $e_R()$  – випадкова невизначеність змінної, наведеної в дужках;
- $e_S()$  – границі систематичної похибки змінної, наведеної в дужках;
- $\ln$  – натуральний логарифм;
- $n$  – кількість вимірів, які використовують для одержання калібрувальної характеристики;
- $Q$  – витрата;
- $R$  – коефіцієнт кореляції;
- $s()$  – експериментальний середньоквадратичний відхил змінної, наведеної в дужках;
- $s_R$  – середньоквадратичний відхил (середньоквадратична похибка) точок від апроксимувальної прямої лінії;

- $t$  – коефіцієнт Стьюдента  $t$  (такий самий, який наведено в ДСТУ ISO 5168 або в будь-якому наборі статистичних таблиць);
- $w_i$  –  $i$ -й ваговий коефіцієнт-фактор у методі зважених найменших квадратів;
- $x$  – незалежна змінна, яка спричиняє найменшу похибку;
- $y$  – залежна змінна, яка спричиняє найбільшу похибку;
- $U$  – загальна невизначеність;
- $U_{ADD}$  – невизначеність за адитивною моделлю, яка забезпечує частку спостережених даних приблизно від 95 % до 99 %,
$$U_{ADD} = e_S + e_R;$$
- $U_{RSS}$  – невизначеність за типом квадратного кореня із суми квадратів, яка забезпечує частку спостережених даних приблизно 95 %,
$$U_{RSS} = (e_S^2 + e_R^2)^{1/2};$$
- $\gamma$  – відношення середньоквадратичного відхилу незалежної змінної  $x$  до середньоквадратичного відхилу залежної змінної  $y$ ;
- $\Delta$  – різниця між спостережуваним і розрахунковим значеннями;
- $\mu$  – математичне сподівання;
- $\sigma$  – середньоквадратичний відхил;
- $\theta$  – коефіцієнт впливу;
- $b_j$  – коефіцієнт  $x_j$ ;
- $C_{jb}$  – елемент оберненої матриці;
- $e_r()$  – випадкова невизначеність змінної, що зазначається в круглих дужках;
- $e_s()$  – систематична невизначеність змінної, що зазначається в круглих дужках;
- $e(\hat{y}_e)$  – загальна невизначеність коефіцієнта калібрування;
- $g_j$  – коефіцієнт  $j$ -го ортогонального полінома;
- $m$  – степінь полінома;
- $n$  – кількість значень даних;
- $p_j(x)$  –  $j$ -й ортогональний поліном;
- $s()$  – експериментальний середньоквадратичний відхил змінної, що зазначається в круглих дужках;
- $s_r$  – оцінка середньоквадратичного відхилу значень від характеристики;
- $t$  – коефіцієнт Стьюдента;
- $x$  – незалежна змінна;
- $x^*$  – довільне позначення значення  $x_i$ ;
- $\bar{x}$  – середнє арифметичне  $x$ ;
- $x_i$  – значення  $x$  в  $i$ -й точці даних;
- $x_j$  –  $j$ -та незалежна змінна (у множинній лінійній регресії);
- $x_{ji}$  – значення  $x_j$  в  $i$ -й точці даних;
- $y$  – залежна змінна;
- $\bar{y}$  – середнє арифметичне  $y_i$ ;
- $\hat{y}$  – значення  $y$ , описане рівнянням апроксимованої характеристики;

- $y_i$  – значення  $y$  в  $i$ -й точці даних;
- $\hat{y}_i$  – значення  $\hat{y}$  при  $x = x_i$ ;
- $\nu$  – кількість ступенів вільності.

Додаткові позначення й символи або такі, що відрізняються від указаних, наведено в тому розділі, де їх застосовано.

## **1 ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ КАЛІБРУВАННІ ЗВТ ВИТРАТИ РЕЧОВИН, ЩО МАЮТЬ ЛІНІЙНІ КАЛІБРУВАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

### **1.1 Загальні питання**

Калібрувальну характеристику ЗВТ витрати можна вважати лінійною в таких випадках:

- залежності між двома змінними є лінійними;
- одну або обидві змінні можна перетворити так, що уможливило створення між ними лінійної залежності, наприклад, з допомогою логарифмів;
- повний діапазон можна поділити таким чином, що в межах кожного піддіапазону залежності між двома змінними можна було б вважати лінійними;
- систематичні відхилення від апроксимованої характеристики є незначними порівняно з невизначеністю, пов'язаною з окремими спостереженнями, що формують характеристику.

У більшості калібрувань залежності між змінними мають функціональний характер і їх наведено в деякій формі математичного виразу. Будь-який відхил спостережуваних значень від цієї залежності можна приписати похибкам вимірювання одного чи іншого виду, які можуть впливати на одну або обидві змінні і бути випадковими, систематичними або комбінацією цих двох складників.

Призначення процедури калібрування є подвійним:

- 1) оцінювання форми вихідної математичної залежності,
- 2) забезпечення оцінювання невизначеності апроксимувальною прямою лінією.

Існує пара значень  $(x, y)$ , для якої випадкові невизначеності й границі систематичної похибки в значеннях  $x$  і  $y$  буде оцінено одним із методів, наведених у підрозділі 1.3. Вибір процедури, що застосовують для обчислення коефіцієнтів і невизначеності в рівнянні калібрування, залежить від відносних величин випадкових складників  $e_R(x)$  і  $e_R(y)$ .

Там, де похибку однієї з цих двох змінних можна вважати незначною, застосовують методи, які викладено в підрозділах 1.5–1.7.

Основне рівняння калібрувальної характеристики ЗВТ витрати має такий вигляд:

$$y = a + bx \tag{1.1}$$



де  $x$  – змінна з меншою похибкою;

$a, b$  – коефіцієнти апроксимувальної прямої, які необхідно визначити.

Там, де обидві змінні дають похибку, а  $x$  – змінна з меншою похибкою, усе ще можна застосовувати методи, наведені в підрозділах 1.5 і 1.6, якщо змінну  $x$  можна встановлювати за розрахунковим значенням протягом калібрування. Цей підхід є відомим як метод Берксона.

Особливий випадок виникає, коли змінна  $y$  є фактично сталою і незалежною від  $x$ , тобто де апроксимувальна лінія є паралельною до осі  $X$ . У цих випадках для оцінювання невизначеності треба застосовувати методи, наведені в підрозділі 1.7.

Вибір процедури апроксимування здійснюється на основі попереднього вивчення інформації про отримані дані. Зокрема, це має бути спрямовано для встановлення невизначеностей і границь систематичних похибок  $x$  і  $y$  та адекватності припущення лінійності. Там, де залежність є нелінійною, слід перетворити її на лінійну форму, що, таким чином, спростить наступне маніпулювання даними.

## 1.2 Випадкові невизначеності й границі систематичної похибки при однократних вимірюваннях

Процедуру визначення випадкових невизначеностей і границь систематичних похибок двох змінних наведено в ДСТУ ISO 5168.

Перший крок при оцінюванні – підготування таблиці для кожної змінної із зазначенням різних джерел похибки. Таблиці повинні містити похибки будь-яких основних процедур вимірювання й окремо випадкові й систематичні складники.

Для значень змінної величини, обчислених прямим вимірюванням, випадкову невизначеність отриманого під час вимірювання значення  $x$  можна знайти шляхом розрахунку експериментального середньоквадратичного відхилення від  $n$  вимірів з використанням формули

$$s = \left[ \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

або

$$s = \left\{ n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right\} / [n(n - 1)]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

потім підставити в рівняння

$$e_R(x) = ts(x). \quad (1.4)$$

При застосуванні формул (1.2) – (1.3) потрібно пам'ятати, що отриманий результат може змінюватися залежно від величини  $y$ . Невизначеність  $y$ , яку можна обчислити шляхом підставлення  $y$  замість  $x$  у формули (1.2) – (1.3), може

також змінюватися залежно від величини  $x$ . На таких змінах базується метод, що буде застосовано в наступній апроксимації калібрувальної характеристики. Істотним є те, що невизначеність оцінюють при достатній кількості точок, щоб дати можливість точно оцінити будь-яку розширену задачу.

Там, де значення змінної величини отримано як суму або різницю кількох незалежних складових вимірювання, невизначеність оцінюють шляхом обчислення загального середнього квадратичного відхилу за формулою

$$s(x) = \left[ \sum s(x_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.5)$$

використовуючи заміну з рівняння (1.4).

В інших випадках, де змінні отримано з більш складних функцій комплексних змінних або елементи є корельованими, загальний середньоквадратичний відхил треба визначати за методами, наведеними в підрозділі 1.12. Тоді невизначеність можна знову отримати заміною в рівнянні (1.4).

Оцінювання систематичної похибки, яке є трохи складнішим, описано в ДСТУ ISO 5168. Навіть коли всі відомі джерела визначено й ураховано, усе ще буде залишатися деяка кількість невизначених похибок. У цих випадках будь-яка оцінка буде залежати від суб'єктивного судження, ґрунтованого на таких доказах, як попередні калібрування, хронологія тощо.

Якщо змінну величину знаходять як суму елементарних складових, то можуть виникнути певні труднощі при визначенні систематичних похибок, унаслідок того, що в більшості випадків знаки складових є невідомими. У цих випадках похибки треба об'єднати, використовуючи процедуру обчислення квадратного кореня із суми квадратів за формулою

$$e_s = \left( \sum_i e_{s,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Якщо більш складні функції піднесено до степеня, то границю систематичної похибки  $e_s$  визначають за методом, наведеним у підрозділі 1.13, замінюючи змінну відповідною змінною  $e_{s,i}^2$ .

Процес оцінювання вважають повним, якщо всі джерела похибки було визначено й оцінено, а однократні вимірювання об'єднано для повного оцінювання випадкової похибки й границь систематичних похибок кожної змінної.

### 1.3 Лінійність калібрувальної характеристики

Бажано провести попереднє оцінювання, щоб установити, чи забезпечено лінійну калібрувальну характеристику адекватною й об'єктивною апроксимацією спостережуваних вимірів.

З доступних методів найбільш ефективними є такі, що ґрунтуються на візуальному вивченні відхилів вимірів від апроксимувальної лінії, яку можна отримати, застосовуючи метод Бартлетта.

Перший крок: дані треба розташовувати в порядку зростання в напрямку або  $x$ , або  $y$ , а середні значення цих двох змінних визначають із рівнянь

$$\bar{x} = \sum x_i / n; \quad \bar{y} = \sum y_i / n. \quad (1.7)$$

Другий крок: дані треба поділити на три однакові й взаємно виключальні інтервали, а середні значення двох кінцевих груп розрахувати як і раніше. Позначивши їх відповідно  $\bar{x}_1, \bar{y}_1$  і  $\bar{x}_3, \bar{y}_3$ , нахил  $b$  апроксимувальної лінії можна визначити так:

$$b = (\bar{y}_3 - \bar{y}_1) / (\bar{x}_3 - \bar{x}_1). \quad (1.8)$$

Третій крок: якщо лінія пройшла через спільні середні значення  $\bar{x}, \bar{y}$ , то рівняння характеристики буде мати вигляд

$$(y_i - \bar{y}) = b(x_i - \bar{x}) \quad (1.9)$$

або із заміною  $\bar{y} - b\bar{x} = a$ :

$$\hat{y}_i = a + bx_i. \quad (1.10)$$

Четвертий крок: залишки можна визначити за формулою

$$\Delta(y_i) = (y_i - \hat{y}_i) = (y_i - a - bx_i). \quad (1.11)$$

Як альтернативу наведеній вище процедурі для більш точної апроксимації можна застосувати метод найменших квадратів, описаний у підрозділі 1.6, із залишками, які розраховують за рівнянням (1.11).

Як для попереднього оцінювання, отримані таким способом залишки треба розташувати в порядку зростання й нанести на графік сукупну характеристику частих повторювань, усереднену за ймовірністю.

Якщо точки лежать на приблизно прямій лінії без будь-якого очевидного загального скривлення, то можна вважати, що дані є приблизно нормально розподіленими.

На цій стадії необхідно почати аналіз можливості дослідження будь-яких винятково більших або менших залишків, оскільки їх виникнення може серйозно вплинути на розташування остаточної апроксимувальної лінії і відповідно

збільшити невизначеність. Допомагає у визначенні таких «викидів» використання результатів випробування Груба, як це описано в додатку Е ДСТУ ISO 5168. Однак необхідно підкреслити, що навіть там, де результат випробування є позитивним, рішення відхилити спостережений результат завжди треба приймати на обґрунтованих фізичних підставах після ретельного вивчення всіх обставин. Для прийняття рішення потрібно брати до уваги, що точка може бути справжньою, а залишок виникає через відсутність узгодженості моделі при спостереженні. Необхідно також пам'ятати, що в разі відхилення результату спостереження весь процес апроксимації й обчислення залишків треба буде повторити.

Інші випробування, які треба застосовувати, містять графічне зображення залишків  $\Delta y$  від спостережуваного значення незалежної змінної  $x$  і заявленого значення  $\hat{y}$ . Точки повинні лежати в горизонтальній смужці однакової ширини (рисунок 1.1, а) якщо:

- а) математична залежність є адекватною;
- б) процес апроксимації було правильно виконано;
- в) дисперсія суттєво не змінюється з  $x$ .

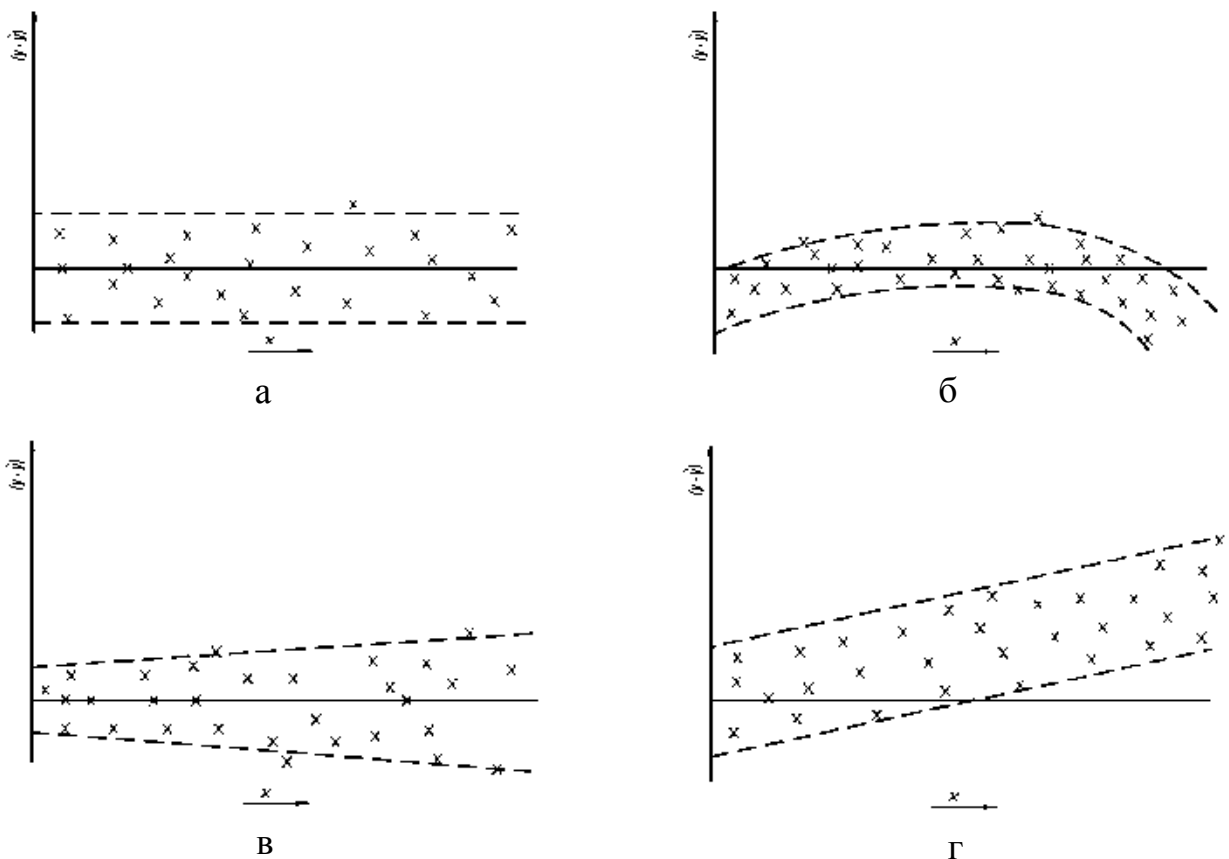


Рисунок 1.1 – Графіки залишків  $(y - \hat{y})$  за величиною  $x$ :

а – нормальна конфігурація; б – нелінійна залежність; в – варіація змінної;  
г – похибка обчислення

Відхилення від ідеальної форми (рисунок 1.1, а) можуть бути такими:

1 Смуга формує чіткі висхідні або спадні криві (рисунок 1.1, б), при цьому допускається, що залежність є нелінійною.

2 Зростальне розширення або звуження смуги, що залишається горизонтальною (рисунок 1.1, в); це означає, що дисперсія змінюється в діапазоні вимірювання і деяка форма процедури розширення потрібна для остаточної апроксимації.

Альтернативою при розширенні може бути можливість перетворення даних для одержання однакової варіації. Наприклад, якщо збільшується змінна  $x$ , то зображення  $\log_{10} y$  від  $x$  або  $\log_{10} y$  від  $\log_{10} x$  може дати однакове змінення в  $\log_{10} y$ . Під час перетворення необхідно стежити, щоб калібрувальний графік залишався лінійним.

Треба зазначити, що будь-яке перетворення змінних призводить до збільшення даних і може трапитися, що отримана калібрувальна характеристика буде трохи відрізняться від оригіналу в разі використання неперетворених даних.

3 Смуга відображає однакову прямолінійну висхідну або спадну тенденцію в її положенні (рисунок 1.1, г), при цьому припускається наявність похибки безпосередньо під час апроксимації або в наступному обчисленні  $y$ .

#### 1.4 Лінеаризація даних

Якщо попередні випробування показали, що калібрування найкраще подано деякою формою нелінійної залежності, то необхідно розглянути можливість перетворення її на лінійну форму. Перевага такої дії полягає в тому, що апроксимація калібрувальної характеристики й обчислення невизначеності тоді стають відносно нескладними процесами. Існують дві процедури.

**Перша** процедура містить фактичне перетворення даних, і її застосовують тільки там, де залежність має суто математичний характер. Для цієї категорії форма перетворення здебільшого визначається безпосередньо формою функції. Таким чином, для калібрування ЗВТ витрати, який застосовується у відкритому каналі, залежність між рівнем води й витратою можна виразити рівнянням

$$Q = c (h + h_0)^b, \quad (1.12)$$

де  $h$  – вимірюваний рівень води, м;

$h_0$  – початкова коригувальна величина, що відображає рівень води при нульовій витраті, м;

$c$  – коефіцієнт;

$b$  – показник степеня.

Цю формулу в логарифмічному вигляді

$$\ln Q = \ln c + b \ln(h + h_0) \quad (1.13)$$

можна застосовувати для лінеаризації даних.

**Друга** процедура. В інших випадках лінеаризація є можливою, якщо калібрувальну характеристику поділити на кілька інтервалів, у кожному з яких її можна розглядати як лінійну. На відміну від описаного вище методу ця процедура є універсальною і не важливо, чи є функціональні залежності між двома змінними. Для розв'язання задачі необхідно дотримуватися двох умов:

– у кожному інтервалі характеристики скрізь, де це можливо, має бути приблизно однакова кількість спостережень, що дає приблизно той самий ступінь невизначеності, як і апроксимувальна лінія;

– для забезпечення плавного переходу й уникнення неоднорідності кожний інтервал характеристики повинен мати дві або три спільні точки з будь-якими суміжними інтервалами.

Після завершення процесу лінеаризації необхідно здійснити перевірку на лінійність за процедурою, описаною в підрозділі 1.3.

## **1.5 Апроксимація оптимальною прямою лінією**

### **1.5.1 Основні положення**

Попередні випробування вже забезпечують оцінку середньоквадратичних відхилів двох змінних, і при розгляді процедури апроксимації залишається тільки обчислити відношення

$$\gamma = s(y)/s(x). \quad (1.14)$$

Якщо значення  $\gamma$  є великим, тобто не меншим 20, то треба застосовувати класичний метод найменших квадратів, наведений у підрозділі 1.5.2.

Якщо отримане значення знаходиться нижче від цієї границі, то все ще можна застосовувати процедуру з підрозділу 1.5.2, але за умови, що змінну  $x$  можна довести до необхідного значення, виходячи з методу Берксона.

В інших випадках необхідно застосовувати інші методи.

Під час описання процедури калібрування треба зазначити, що звичайну умовність щодо залежних і незалежних змінних було відхилено. У наведених нижче пунктах змінну  $x$  необхідно завжди брати з найменшою похибкою.

### **1.5.2 Застосування методу Берксона (похибку вносить одна змінна)**

Якщо похибку однієї змінної можна оцінити як незначну порівняно з іншою змінною, то апроксимація калібрувальної характеристики здійснюється за класичною технологією регресії.

При цьому нахил  $b$  апроксимувальної лінії

$$\hat{y}_i = a + bx_i \quad (1.15)$$

визначають з рівняння

$$b = \frac{\sum [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.16)$$

а точку перетину – з рівняння

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (1.17)$$

Коефіцієнт кореляції  $r$ , що відображає ступінь залежності між  $x$  і  $y$ , можна визначити так:

$$r = \frac{\sum [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\left[ \sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.18)$$

Для закінчення процесу апроксимації треба розрахувати середньоквадратичний відхил спостережених значень для апроксимувальної лінії за формулами

$$s_R = \left[ \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n-2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.19)$$

$$s_R = \left[ \sum (y_i - a - bx_i)^2 / (n-2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.20)$$

або

$$s_R = s(y)(1-r^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.21)$$

де

$$s(y) = \left[ \sum (y_i - \bar{y})^2 / (n-1) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.22)$$

При використанні рівняння (1.21) зберігається достатня кількість значущих цифр, що гарантує відсутність великої похибки округлення.

Якщо сучасні обчислювальні засоби є недоступними, то  $b$ ,  $r$  і  $s(y)$  можна отримати простіше з рівнянь

$$b = \left[ n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \right] / \left[ n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right], \quad (1.23)$$

$$r = \left[ n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \right] / \left\{ \left[ n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right] \cdot \left[ n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.24)$$

$$s(y) = \left\{ n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 \right\} / n(n-1) \Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.25)$$

де  $a$  визначають з рівняння (1.17).

Тут також необхідно діяти обережно, щоб зберегти достатню кількість значущих цифр для уникнення великих похибок при округленні.

Якщо калібрувальна характеристика складається з двох або більше інтервалів, то точку їх перетину треба визначати заздалегідь.

Напишемо рівняння двох суміжних ділянок

$$y_1 = a_1 + b_1 x \quad \text{і} \quad y_2 = a_2 + b_2 x, \quad (1.26)$$

тоді в точці перетину  $y_1 = y_2$ , і загальне значення  $x$  розраховують як

$$x = (a_1 - a_2) / (b_2 - b_1). \quad (1.27)$$

Відповідне значення  $y$  можна визначити, підставляючи  $x$  у рівняння (1.26).

## 1.6 Апроксимація оптимальною зваженою лінією

Якщо з попередніх випробувань на лінійність, наведених у підрозділі 1.3, випливає, що дисперсія  $y$  не є сталою і змінюється зі змінням величини  $x$ , то метод найменших квадратів є недійсним і його необхідно замінити зваженою формою з розширеного регресійного аналізу для запобігання зміщенню.

Тоді застосовувану процедуру будують на заміні рівнянь (1.16), (1.17) і (1.23) такими відношеннями:

$$b = \left\{ \sum c_i x_i y_i - [(\sum c_i x_i)(\sum c_i y_i)] / n \right\} / \left\{ \sum c_i x_i^2 - [(\sum c_i x_i)^2 / n] \right\}, \quad (1.28)$$

$$a = (\sum c_i y_i - b \sum c_i x_i) / n. \quad (1.29)$$

Тоді середньоквадратичний відхил значень  $y_i$  можна отримати з рівняння (1.22), а середньоквадратичні похибки апроксимувальної лінії – з рівняння (1.19) або (1.20).

У випадках, коли варіації окремих спостережень є відомими, ваговий коефіцієнт  $c_i$  визначають з відношень

$$w_i = 1 / \text{var } y_i; \quad c_i = w_i / \bar{w}. \quad (1.30)$$



В інших випадках відповідне значення для цього коефіцієнта можна отримати:

- а) обчисленням різниць значень  $y_i$  від оцінки калібрувальної характеристики;
- б) графічним зображенням квадратів різниць замість відповідних значень  $x_i$ ;
- в) апроксимацією лінії за методами, які наведено в ДСТУ ISO 7066-2;
- г) використанням лінії для отримання середньоквадратичних відхилів  $\Delta^2(y_i)$ ;
- д) заміщенням значення  $\Delta^2(y_i)$  для  $\text{var } y_i$  у рівнянні (1.30).

### 1.7 Визначення калібрувальної характеристики, коли $y$ не залежить від $x$

Іноді нахил калібрувальної лінії є нульовим, а змінна  $y$  є сталою в діапазоні значень  $x$ . У цьому випадку, якщо  $y$  не залежить від  $x$ , калібрувальна лінія стає горизонтальною прямою лінією, а коефіцієнт калібрування дорівнює середній арифметичній кількості значень  $y_i$ :

$$\bar{y} = \sum y_i / n. \quad (1.31)$$

Для підтвердження відповідності калібрувальної характеристики цій формі треба виконати випробування, щоб визначити, чи дійсно нахил апроксимувальної лінії можна вважати нульовим.

У цьому випадку для значення

$$b \pm ts(b) \quad (1.32)$$

$s(b)$  розраховують за формулою

$$s(b) = s_R / [(n-1)^{1/2} s(x)]. \quad (1.33)$$

Якщо нуль потрапив у межі, отримані з даних рівняння (1.32), то можна вважати, що лінія фактично є горизонтальною, і коефіцієнт обчислюється за рівнянням (1.31).

### 1.8 Обчислення невизначеності

Випадкова невизначеність апроксимувальної лінії в точці  $x = x_k$  розраховується за рівнянням

$$e_R(\hat{y}) = ts_R \left\{ (1/n) + [(x_k - \bar{x})^2 / \sum (x_i - \bar{x})^2] \right\}^{1/2}, \quad (1.34)$$

тоді невизначеність при однократному спостереженні в точці  $x = x_k$  можна знайти з рівняння

$$e_R(y_k) = ts_R \left\{ 1 + (1/n) + \left[ (x_k - \bar{x})^2 / \sum (x_i - \bar{x})^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (1.35)$$

Два значення є істотно різними:  $e_R(\hat{y})$  – невизначеність значення, яке було розраховано за рівнянням лінії, тоді як  $e_R(y_k)$  – невизначеність однократного вимірювання.

У рівняннях (1.34) і (1.35) інтервал невизначеності має параболічну форму, з її найвужчою шириною в середньому значенні  $x$ . Ширина також залежить від рівня довірчої ймовірності і при довірчій ймовірності 99 % буде більшою, ніж при 95 %.

### 1.9 Границі систематичної похибки й оформлення результатів роботи

Для закінчення аналізу границі систематичної похибки результатів калібрування треба оцінити відповідно до принципів, викладених у ДСТУ ISO 5168 і підрозділі 1.3. Через труднощі при визначенні знака й розміру таких похибок окремі складники треба об'єднати за методом середніх квадратів. Якщо значення змінної величини отримують як суму або різницю значень елементів, то загальну границю систематичної похибки можна визначити з рівняння

$$e_S = \left( \sum e_{S,i}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.36)$$

Якщо значення змінної величини базуються на більш складних функціях типу добутку або часткової похідної, то застосовують метод, що замінює відповідні різниці з  $e_{S,i}$  на  $e_S$  (див. підрозділ 1.13).

Про випадкову невизначеність і границю систематичної похибки потрібно завжди повідомляти окремо. Якщо потрібне також окреме число, яке є комбінованою невизначеністю, то його обчислюють адитивним методом або методом квадратного кореня із суми квадратів за формулою

$$U_{ADD} = e_S + ts \quad (1.37)$$

або

$$U_{RSS} = \left[ e_S^2 + (ts)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.38)$$

За формулою (1.38) завжди одержують менше значення.

Отримані величини  $U_{ADD}$  або  $U_{RSS}$  не треба вважати довірчим інтервалом у точно статистичному значенні, тому що границя систематичної похибки, за означенням, базується на суб'єктивному судженні.

### **1.10 Екстрапольовані значення**

Коефіцієнти калібрування і їх невизначеності, які отримують екстраполяцією калібрувальної лінії, можуть точно не відповідати описаним у попередніх підрозділах вимогам через непередбачені чинники, які можуть негативно впливати на результати вимірювань. Однак можуть бути випадки, коли необхідно оцінити витрати поза діапазоном калібрування, і тоді застосовують процедури, описані нижче.

На рисунку 1.2 суцільною лінією зображено калібрувальний графік ЗВТ витрати в стані, визначеному границями  $x_1$  і  $x_2$  і пунктирною лінією – продовженням цього стану до необхідної точки  $x_3$ . Пунктирними лініями також позначено границю невизначеності, яку екстрапольовують до точки  $x_3$ .

У випадку, коли на відкалібрований ЗВТ витрати поширюється будь-який міжнародний стандарт, у якому запропоновано значення витрати й невизначеності, а також забезпечено екстрапольовані значення у та їх границі невизначеності (рисунок 1.2, а), застосовують екстрапольовані границі довірчого інтервалу.

Однак якщо екстрапольовані границі не відповідають передбаченим у міжнародному стандарті (рисунок 1.2, б), то застосовують границі довірчого інтервалу, наведені в міжнародному стандарті.

Нарешті, якщо значення  $u$  знаходяться поза інтервалом, передбаченим у міжнародному стандарті, або якщо на ЗВТ витрати не поширюється цей стандарт, то знову застосовують екстрапольовані границі довірчого інтервалу.

### **1.11 Невизначеність при застосуванні калібрувальної характеристики для однократного вимірювання витрати**

У випадку, коли для вимірювання витрати застосовують відкалібрований ЗВТ витрати, будь-яку невизначеність у положенні калібрувальної характеристики буде переміщено до розрахункового значення як систематичну похибку. Крім випадку, коли нахил лінії є фактично нульовим і за рівнянням (1.15) діапазон калібрування є постійним, невизначеність вимірювання витрати завжди буде більшою, ніж з однією калібрувальною характеристикою. Це буде так, навіть коли умови вимірювання номінально є ідентичними тим, які існують протягом процесу калібрування, а розходження виникає через невизначеність у розташуванні місця положення точки на графіку калібрування.

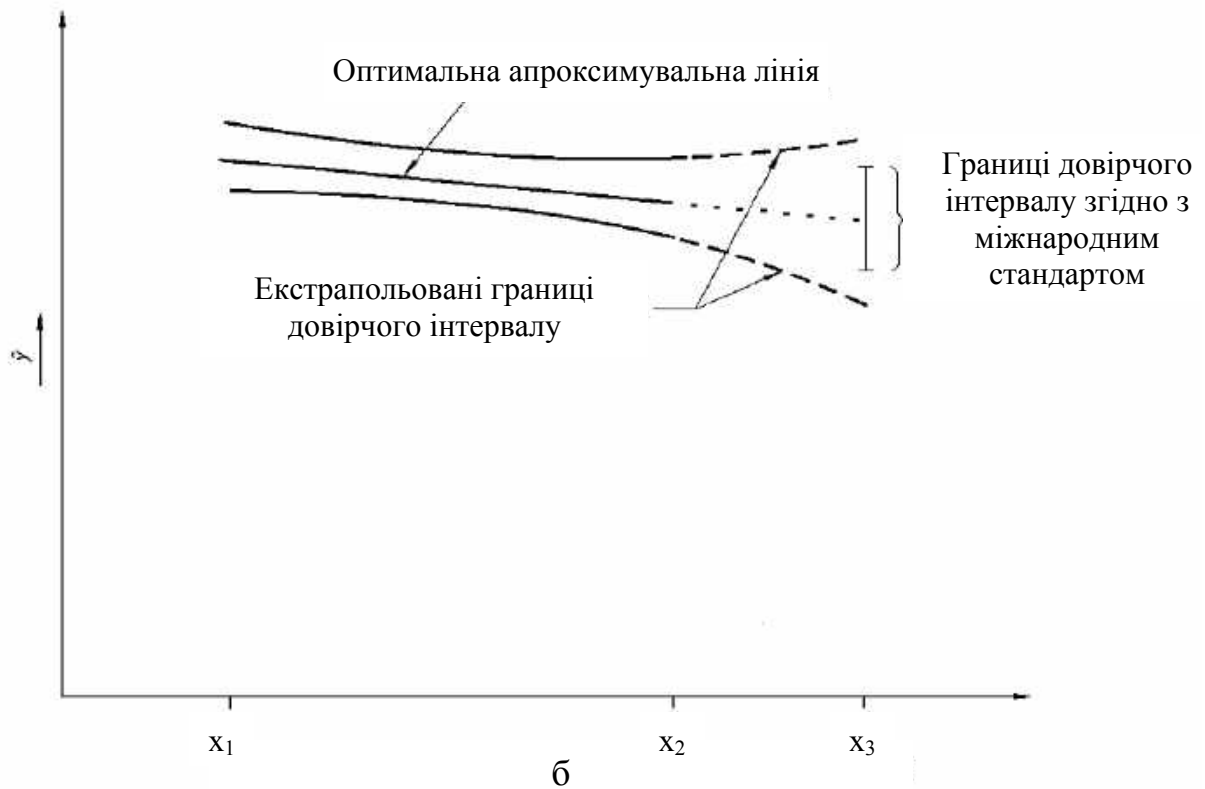
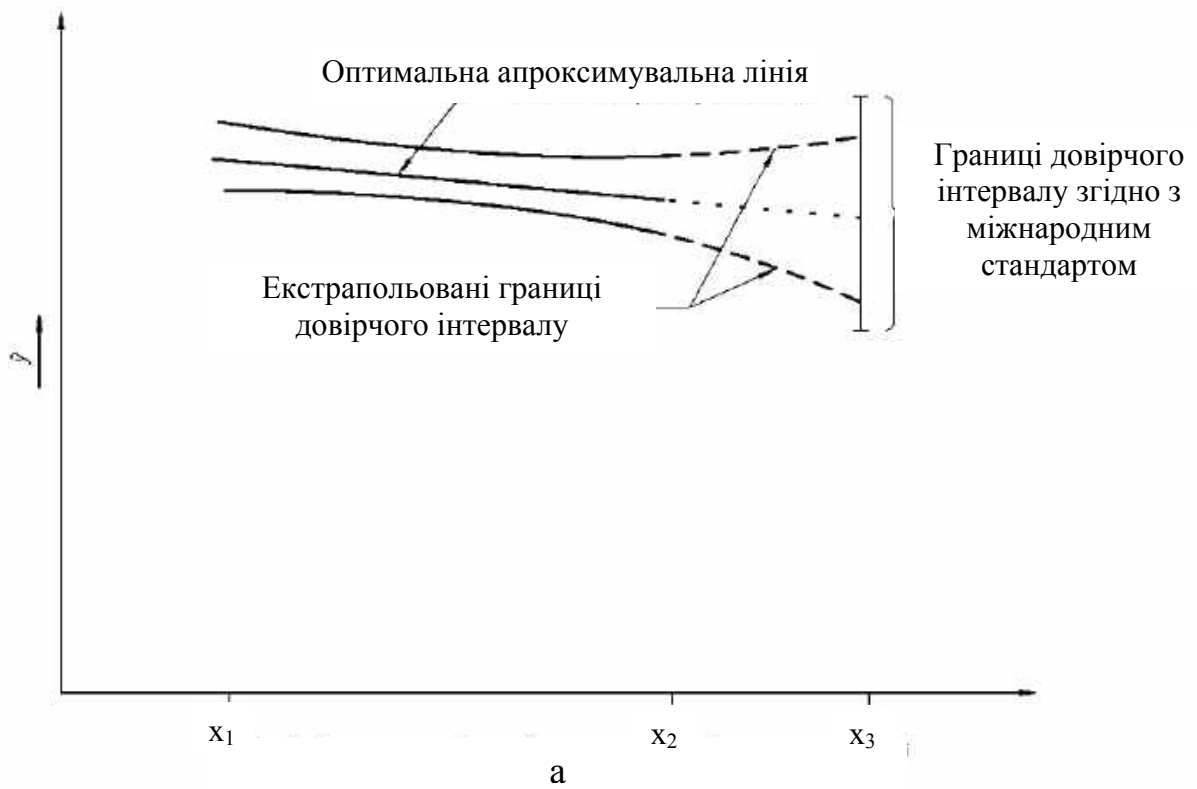


Рисунок 1.2 – Критерії границь довірчого інтервалу:  
 а – внутрішні екстрапольовані границі; б – зовнішні екстрапольовані границі

Цю додаткову невизначеність разом з будь-якими доданими внесками, які є результатом отримання й зведення даних, треба оцінити із застосуванням процедур, наведених у ДСТУ ISO 5168, з випадковою невизначеністю й границями систематичної похибки, які обчислюють окремо й пізніше комбінують через  $U_{RSS}$ .

Загальну невизначеність вимірювання обчислюють за формулою

$$U_{RSS}(\hat{y}) = \left[ U_{RSS}^2(\hat{y}_0) + U_{RSS}^2(\hat{y}_c) \right]^{1/2}, \quad (1.39)$$

де  $U_{RSS}(\hat{y}_0)$  – загальна додаткова невизначеність;

$U_{RSS}(\hat{y}_c)$  – загальна невизначеність калібрувальної характеристики.

Внесок додаткової невизначеності у загальну невизначеність вимірювання витрати залежить від характеру калібрувальної характеристики. Є дві головні умови щодо додаткової невизначеності.

1. Якщо нахил калібрувальної характеристики є нульовим, то значення витрати можна отримати множенням деякої функції вихідного сигналу ЗВТ витрати на коефіцієнт, який не залежить від витрати. Тому в цьому випадку немає додаткової невизначеності й рівняння (1.39) спрощується до такого:

$$U_{RSS}(\hat{y}) = U_{RSS}(\hat{y}_c), \quad (1.40)$$

тобто невизначеність вимірювання витрати дорівнює невизначеності калібрувальної характеристики.

2. Якщо нахил калібрувальної характеристики ЗВТ витрати не дорівнює нулю, то коефіцієнтом калібрування буде функція витрати, і для оцінювання витрати необхідна деяка форма повторюваного процесу. Для цього застосовують початкове оцінювання коефіцієнта калібрування, щоб одержати перше наближення до витрати. Усе це використовують для отримання більш точного значення коефіцієнта калібрування. Процес повторюють, поки послідовні оцінки витрати не стануть ідентичними. У цьому випадку будь-яка похибка вимірювання вихідного сигналу ЗВТ витрати призведе до похибки використовуваного коефіцієнта, а повну невизначеність будемо обчислювати за рівнянням (1.39).

Невизначеність буде й далі збільшуватися, якщо умови застосування не відповідають тим, за яких було виконано калібрування, наприклад різні розташування, рідина, апаратура тощо, і, звичайно, у цих випадках необхідно оцінювати границі довірчого інтервалу для кожної ситуації, що виникає.

## 1.12 Обчислення варіації загальної функції

Якщо загальна варіація базується на добутку або відношенні двох або більше складових варіацій, то необхідно застосовувати не просте комбінаторне рівняння (1.5), а більш складний вираз, пов'язаний зі стандартною похибкою загальної функції. Диференціали  $(\partial X / \partial x_i)$  у рівнянні є ідентичними коефіцієнтам впливу  $(\theta = \partial R / \partial Y_i)$ , які в ДСТУ ISO 5168 використано при об'єднанні похибок елементів.

Якщо  $X = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , де  $f$  – будь-яка функція, то

$$\begin{aligned} \text{Var}X &= (\partial X / \partial x_1)^2 \text{Var}x_1 + (\partial X / \partial x_2)^2 \text{Var}x_2 + \dots + (\partial X / \partial x_n)^2 \text{Var}x_n + \\ &+ 2 \left\{ [(\partial X / \partial x_1)(\partial X / \partial x_2)] \text{Cov}(x_1, x_2) + [(\partial X / \partial x_1)(\partial X / \partial x_3)] \text{Cov}(x_1, x_3) + \dots \right. \\ &\left. \dots + [(\partial X / \partial x_{n-1})(\partial X / \partial x_n)] \text{Cov}(x_{n-1}, x_n) \right\}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Якщо на члени рівняння (1.41) з більш високими диференціалами можна не зважати, а коваріації дорівнюють нулю, тобто змінні є незалежними, то порядок рівняння (1.41) зменшується до першого.

Як приклад наведемо рівняння витрати рідини, що протікає через сегмент відкритого поточного каналу ЗВТ витрати:

$$Q_i = b_{c,i} d_i \bar{v}_i, \quad (1.42)$$

де  $b_c$ ,  $d$ ,  $v$  – залежні змінні.

Для визначення варіації функції (1.42) використаємо перший порядок рівняння (1.41). При цьому отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{Var}Q_i &= (\partial Q_i / \partial b_{c,i})^2 \text{Var}b_{c,i} + (\partial Q_i / \partial d_i)^2 \text{Var}d_i + (\partial Q_i / \partial \bar{v}_i)^2 \text{Var}\bar{v}_i = \\ &= (d_i \bar{v}_i)^2 \text{Var}b_{c,i} + (b_{c,i} \bar{v}_i)^2 \text{Var}d_i + (b_{c,i} d_i)^2 \text{Var}\bar{v}_i. \end{aligned} \quad (1.43)$$

## 1.13 Приклад калібрування ЗВТ витрати для відкритого каналу

### 1.13.1 Застосовувані символи

При визначенні калібрувальної характеристики ЗВТ витрати застосовують такі символи:

$h_0$  – початкова коригувальна величина, що позначає рівень води при нульовій витраті, м;

$h$  – вимірюваний рівень води, м;

$c$  – коефіцієнт;

$b$  – показник ступеня;

$Q$  – витрата, м<sup>3</sup>/с.

### 1.13.2 Обчислення характеристики залежності витрати води від її рівня

Інформацію для визначення залежності витрати води від її рівня наведено в таблиці 1.1.

Необхідно обчислити рівняння оцінки, середньоквадратичний відхил ( $s_R$ ) точок від апроксимувальної лінії і випадкову невизначеність  $e_R(Q)$  залежності.

При калібруванні ЗВТ витрати, який застосовують для вимірювання витрати води у відкритому каналі за методом швидкість – площа, залежність між витратою води і її рівнем можна виразити рівнянням

$$Q = c (h + h_0)^b, \quad (1.44)$$

яке в логарифмічній формі записують так:

$$\ln Q = \ln c + b \ln(h + h_0). \quad (1.45)$$

Зробивши відповідні заміни

$$\ln(h + h_0) = x; \quad \ln Q = y; \quad \ln c = a,$$

отримаємо лінійне рівняння

$$y = a + bx,$$

яке є аналогічним рівнянню (1.1).

При такому способі калібрування похибка визначення рівня майже завжди є набагато меншою за похибку вимірювання витрати, яка дає значення  $y$  в рівнянні (1.14) більше 20.

Відкориговане значення рівня води, наведене в таблиці 1.1,  $h_0 = -0,115$  м.

Апроксимацію даних можна виконати, застосовуючи класичний метод найменших квадратів, наведений у підрозділі 1.6.

Підставимо значення з таблиці 1.1 у перше рівняння (1.23), і потім з рівняння (1.17) визначимо нахил калібрувальної характеристики:

$$b = \frac{\{[32 (-2,9337)] - [93,7855 (-15,5798)]\}}{\{[32(35,5093)] - (-15,5798)^2\}} = 1,5301 \quad (1.46)$$

і таку точку перетину:

$$\ln c = 2,9308 - 1,5301(-0,4869) = 3,6757. \quad (1.47)$$

Таблиця 1.1 – Типові дані для обчислення характеристик залежності витрати води від її рівня

Номер спостереження	$Q_i$ , м <sup>3</sup> /с	Рівень $h_i$ , м	$h + h_0$ , м	$\ln Q_i$ ( $y_i$ )	$\ln(h + h_0)$ ( $x_i$ )	$xy$	$x^2$
1	2,463	0,272	0,157	0,9014	-1,8515	-1,6689	3,4280
2	2,325	0,273	0,158	0,8437	-1,8452	-1,5568	3,4048
3	2,923	0,303	0,188	1,0726	-1,6713	-1,7926	2,7932
4	3,242	0,307	0,192	1,1762	-1,6502	-1,9410	2,7232
5	3,841	0,334	0,219	1,3457	-1,5187	-2,0437	2,3064
6	4,995	0,374	0,259	1,6084	-1,3509	-2,1728	1,8249
7	5,410	0,393	0,278	1,6882	-1,2801	-2,1611	1,6386
8	5,422	0,394	0,279	1,6905	-1,2765	-2,1579	1,6294
9	5,883	0,402	0,287	1,7721	-1,2483	-2,2121	1,5582
10	6,154	0,410	0,295	1,8171	-1,2208	-2,2183	1,4904
11	7,376	0,463	0,348	1,9982	-1,0556	-2,1093	1,1143
12	9,832	0,520	0,405	2,2856	-0,9039	-2,0660	0,8170
13	11,321	0,548	0,433	2,4266	-0,8370	-2,0311	0,7006
14	12,372	0,576	0,461	2,5154	-0,7744	-1,9479	0,5997
15	11,825	0,580	0,465	2,4702	-0,7657	-1,8914	0,5863
16	13,826	0,616	0,501	2,6266	-0,6911	-1,8152	0,4776
17	14,102	0,626	0,511	2,6463	-0,6714	-1,7767	0,4508
18	19,020	0,721	0,606	2,9455	-0,5009	-1,4754	0,2509
19	19,790	0,739	0,624	2,9852	-0,4716	-1,4078	0,2224
20	20,280	0,747	0,632	3,0096	-0,4589	-1,3811	0,2106
21	21,204	0,796	0,681	3,0542	-0,3842	-1,1734	0,1476
22	23,996	0,846	0,731	3,1779	-0,3133	-0,9956	0,0982
23	36,242	1,041	0,926	3,5902	-0,0769	-0,2761	0,0059
24	54,591	1,340	1,225	3,9999	0,2029	0,8116	0,0412
25	67,327	1,526	1,411	4,4096	0,3443	1,4494	0,1185
26	79,050	1,761	1,646	4,3701	0,4983	2,1776	0,2483
27	110,783	2,010	1,895	4,7076	0,6392	3,0091	0,4086
28	162,814	2,632	2,517	5,0926	0,9231	4,7010	0,8521
29	227,600	3,265	3,150	5,4276	1,1474	6,2276	1,3165
30	228,800	3,280	3,165	5,4328	1,1522	6,2597	1,3276
31	228,500	3,306	3,191	5,4315	1,1603	6,3022	1,3463
32	236,600	3,340	3,225	5,4664	1,1709	6,4006	1,3710
Усього				93,7855	-15,5798	-2,9337	35,5093



Отже,

$$\ln Q = 3,6757 + 1,5301 \ln(h - 0,115), \quad (1.48)$$

звідки

$$Q = 39,479 (h - 0,115)^{1,5301}. \quad (1.49)$$

Характеристику оцінки, зображену на рисунку 1.3, де рівень води відкладено по осі ординат, а витрату – по осі абсцис, отримано з нормальної гідрометричної практики.

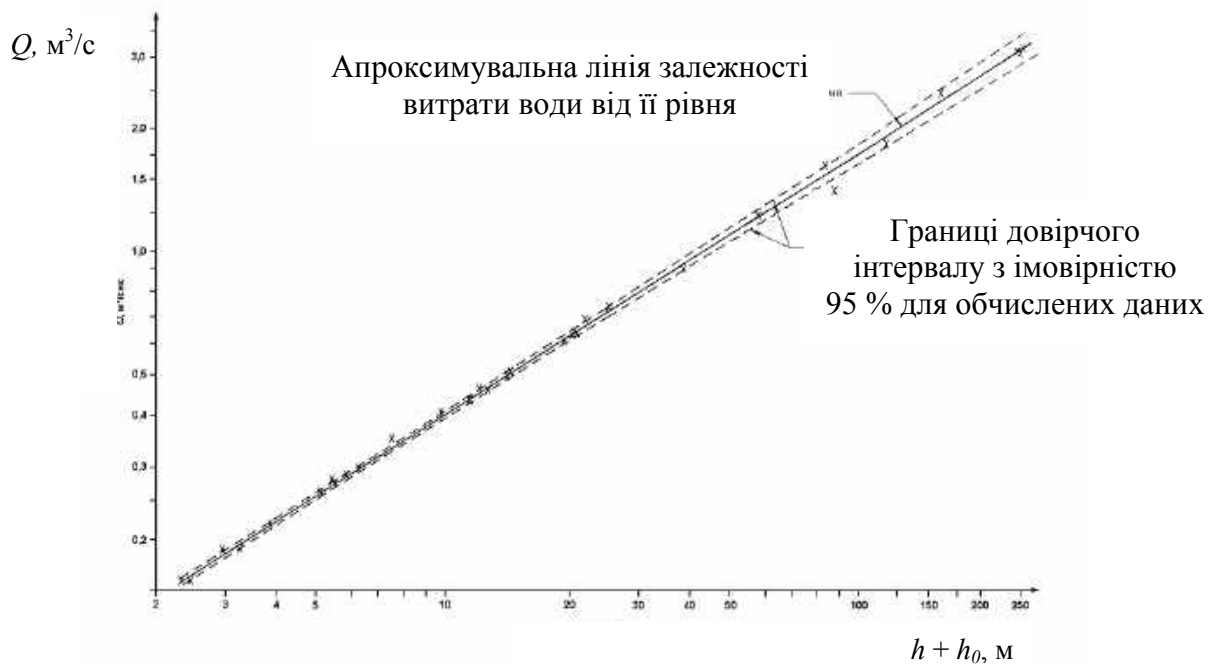


Рисунок 1.3 – Графік залежності витрати рідини від її рівня, побудований за даними таблиці 1.1

Як видно з рівняння (1.19), середньоквадратичний відхил точок від апроксимувальної лінії визначають за формулою

$$S_R = \left[ \sum (\ln Q_i - \overline{\ln Q})^2 / (n - 2) \right]^{1/2}, \quad (1.50)$$

за якою при заміні даних значеннями з таблиці 1.2 отримаємо

$$S_R = (0,02918/30)^{1/2} = 0,031. \quad (1.51)$$

Випадкову невизначеність у відсотках для  $\ln Q$ , яку розраховано від апроксимуючої лінії в точці  $(h + h_0)_k$ , визначимо, використовуючи рівняння (1.34) у вигляді

$$e_R'(\widehat{\ln Q}) = ts_R \left\{ \frac{1}{n} + \frac{[\ln(h+h_0)_k - \overline{\ln(h+h_0)}]^2}{\sum [\ln(h+h_0) - \overline{\ln(h+h_0)}]^2} \right\}^{1/2} \cdot 100 =$$

$$= 6,3 \{0,03125 + [\ln(h-0,115)_k + 0,4869]^2 / 27,9238\}^{1/2}. \quad (1.52)$$

Відсоток випадкової невизначеності для окремого значення  $\ln Q_i$  розрахуємо, використовуючи рівняння (1.35):

$$e_R'(\widehat{\ln Q}) = ts_R \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{[\ln(h+h_0)_k - \overline{\ln(h+h_0)}]^2}{\sum [\ln(h+h_0) - \overline{\ln(h+h_0)}]^2} \right\}^{1/2} \cdot 100 =$$

$$= 6,3 \{1,03125 + [\ln(h-0,115)_k + 0,4869]^2 / 27,9238\}^{1/2}. \quad (1.53)$$

Значення  $e_R'(\widehat{\ln Q})$  для витрати, яке обчислюється в кожній спостережуваній точці  $(h+h_0)_k$ , можна оцінити із рівняння (1.52). Результати зображують по обидва боки характеристики залежності витрати води від її рівня таким чином, щоб границі довірчого інтервалу для логарифма витрати були симетричними, при цьому мінімальна ширина має бути  $\ln(h+h_0)$ .

Заміна з таблиці 1.2:

– для спостереження 1:

$$e_R'(\widehat{\ln Q}) = 6,3 \{0,03125 + [(-1,8515 + 0,4869)^2 / 27,9238]\}^{1/2} = 1,97 \%;$$

– для спостереження 18:

$$e_R'(\widehat{\ln Q}) = 6,3 \{0,03125 + [(-0,5009 + 0,4869)^2 / 27,9238]\}^{1/2} = 1,11 \%;$$

– для спостереження 32:

$$e_R'(\widehat{\ln Q}) = 6,3 \{0,03125 + [(-1,1709 + 0,4869)^2 / 27,9238]\}^{1/2} = 2,27 \%.$$

Суму цих результатів разом зі значеннями для інших спостережень наведено в заключному стовпці таблиці 1.2.

Асиметричні границі для неперетворених витрат можна отримати, використовуючи вирази

$$100 (e^z - 1) \text{ – для верхньої границі довірчого інтервалу } 95 \%, \quad (1.54)$$

$$100 (1 - e^{-z}) \text{ – для нижньої границі довірчого інтервалу } 95 \%,$$

де  $z$  – права частина рівняння (1.53), крім множника 100.

Застосовуючи приклад для спостереження 1, отримаємо верхню і нижню границі довірчого інтервалу при  $P = 0,95$ :

$$100 (e^{0,0197} - 1) = 100 (1,0199 - 1) = 1,99 \%;$$

$$100 (1 - e^{-0,0197}) = 100 [1 - (1/e^{0,0197})] = 100 (1 - 0,9804) = 1,96 \%.$$

Таблиця 1.2 – Значення для обчислення  $s_R$  та  $e_R(\ln Q)$ 

Номер спостереження	$h + h_0$	$\ln(h + h_0) \cdot x_j$	$(x_i - \bar{x})^2$	$Q_i$	$\ln Q_i \cdot y_i$	$\hat{Q}$	$e_R \ln Q, y$	$(y_i - \bar{y})^2$	$e_R(\ln Q)$
1	0,157	-1,8515	1,8621	2,463	0,9014	2,323	0,8428	0,00342	1,97
2	0,158	-1,8452	1,8450	2,325	0,8437	2,345	0,8523	0,00007	1,96
3	0,188	-1,6713	1,4028	2,923	1,0726	3,060	1,1184	0,00209	1,80
4	0,192	-1,6502	1,3533	3,242	1,1762	3,160	1,1506	0,00065	1,78
5	0,219	-1,5187	1,0646	3,841	1,3457	3,865	1,3520	0,00003	1,66
6	0,259	-1,3509	0,7465	4,995	1,6084	4,996	1,6086	0,00000	1,52
7	0,278	-1,2801	0,6292	5,410	1,6882	5,568	1,7170	0,00083	1,46
8	0,279	-1,2765	0,6235	5,422	1,6905	5,598	1,7224	0,00101	1,46
9	0,287	-1,2483	0,5797	5,883	1,7721	5,846	1,7658	0,00004	1,44
10	0,295	-1,2208	0,5386	6,154	1,8171	6,097	1,8078	0,00008	1,42
11	0,348	-1,0556	0,3234	7,376	1,9982	7,851	2,0606	0,00389	1,30
12	0,405	-0,9039	0,1739	9,832	2,2856	9,902	2,2927	0,00005	1,22
13	0,433	-0,8370	0,1226	11,321	2,4266	10,968	2,3950	0,00099	1,19
14	0,461	-0,7744	0,0826	12,372	2,5154	12,072	2,4909	0,00060	1,16
15	0,465	-0,7657	0,0777	11,825	2,4702	12,233	2,5041	0,00115	1,16
16	0,501	-0,6911	0,0417	13,826	2,6266	13,711	2,6182	0,00007	1,14
17	0,511	-0,6714	0,0340	14,102	2,6463	14,132	2,6484	0,00000	1,14
18	0,606	-0,5009	0,0002	19,020	2,9455	18,345	2,9094	0,00130	1,11
19	0,624	-0,4716	0,0002	19,970	2,9852	19,185	2,9541	0,00096	1,11
20	0,632	-0,4589	0,0008	20,280	3,0096	19,563	2,9736	0,00129	1,11
21	0,681	-0,3842	0,0105	21,204	3,0542	21,931	3,0879	0,00113	1,12
22	0,731	-0,3133	0,0301	23,996	3,1779	24,442	3,1963	0,00033	1,13
23	0,926	-0,0769	0,1681	36,242	3,5902	35,098	3,5581	0,00102	1,22
24	1,225	0,2029	0,4758	54,591	3,9999	53,855	3,9863	0,00018	1,38
25	1,411	0,3443	0,6909	67,327	4,2096	66,859	4,2026	0,00004	1,49
26	1,646	0,4983	0,9706	79,050	4,3701	84,631	4,4383	0,00465	1,62
27	1,895	0,6392	1,2681	110,783	4,7076	104,989	4,6538	0,00288	1,74
28	2,517	0,9231	1,9881	162,814	5,0926	162,095	5,0882	0,00001	2,02
29	3,150	1,1474	2,6709	227,600	5,4276	228,478	5,4314	0,00001	2,24
30	3,165	1,1522	2,6866	228,800	5,4328	230,145	5,4387	0,00003	2,25
31	3,191	1,1603	2,7133	228,500	5,4315	233,044	5,4512	0,00038	2,26
32	3,225	1,1709	2,7483	236,600	5,4664	236,854	5,4674	0,00000	2,27

$$\sum \ln(h + h_0) = -0,4869; \sum (y_i - \bar{y})^2 = 0,02918; \sum (x_i - \bar{x})^2 = 27,9238$$

## 1.14 Приклад обчислення невизначеності при калібруванні ЗВТ для закритого трубопроводу

### 1.14.1 Загальні відомості

У цьому прикладі оцінюється невизначеність при калібруванні ЗВТ витрати на основі звужувального пристрою з фланцями й наводиться процес обчислення невизначеності вимірювання витрати, яку отримано після калібрування звужувального пристрою.

Калібрувальний пристрій є таким, у якому вода після протікання через звужувальний пристрій у випробувальній секції трубопроводу зазвичай надходить до бака, з якого її подають назад до входу випробувальної ділянки. Коли потік стабілізується, його направляють до бака, що зважується, замість бака, з якої її подають, при цьому вимірюють інтервал часу.

Протягом часу надходження води до бака, що зважується, вимірюють диференціальний тиск перед і за звужувальним пристроєм диференціальними манометрами повітря – вода або ртуть – вода; процедуру повторюють 25 раз у кожній певній точці діапазону витрати. Температуру води у випробувальній ділянці й температуру повітря необхідно вимірювати при кожному вимірюванні витрати води. З допомогою вимірювача густини визначають густину вимірювальної води ( $1,00142 \text{ кг/м}^3$ ) і порівнюють з густиною дистильованої води за тієї самої температури, і це значення застосовують протягом усього процесу калібрування.

### 1.14.2 Символи, що використовуються в прикладі

При викладенні прикладу калібрування ЗВТ витрати використовуються такі символи:

$A_o$  – площа звужувального пристрою,  $\text{м}^2$ ;

$C$  – коефіцієнт витрати;

$D$  – діаметр труби,  $\text{м}$ ;

$d$  – діаметр звужувального пристрою,  $\text{м}$ ;

$g$  – прискорення вільного падіння,  $\text{м/с}^2$ ;

$H, H'$  – диференціальний тиск у звужувальному пристрої,  $\text{Па}$ ;

$p_s$  – абсолютний статичний тиск,  $\text{Па}$ ;

$Re_d$  – число Рейнольдса,  $Re = 4Q / \pi v d$ ;

$t$  – час відхилення,  $\text{с}$ ;

$W$  – маса води, що збиралася протягом процедури відхилення,  $\text{кг}$ ;

$\beta$  – відношення діаметрів,  $\beta = d/D$ ;

$\theta_w$  – температура води у випробувальній секції,  $^\circ\text{C}$ ;

$\nu$  – кінематична в'язкість,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$\rho_w$  – густина чистої води,  $\text{кг/м}^3$ .

### 1.14.3 Обчислення коефіцієнта калібрування

Середній діаметр отвору звужувального пристрою дорівнює 164,34 мм, а діаметр трубопроводу вище за течією – 204,98 мм, що дає відношення діаметрів  $\beta = 0,8017$ .

Результати калібрування для 25 точок наведено в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3 – Результати калібрування

Номер випробування	Витрата $Q$ , м <sup>3</sup> /с	Коефіцієнт витрати $C$ ( $\gamma$ )	Число Рейнольдса* $Re_d \cdot 10^{-6}$	$10^3 / Re_d^{1/2}$ ( $x$ )
1	0,0315	0,5997	0,2448	2,0209
2	0,0460	0,5962	0,3576	1,6723
3	0,0589	0,5957	0,4593	1,4755
4	0,0719	0,5937	0,5609	1,3353
5	0,0873	0,5937	0,6828	1,2102
6	0,0835	0,5927	0,6533	1,2372
7	0,1302	0,5908	1,0188	0,9907
8	0,1540	0,5904	1,2078	0,9099
9	0,1783	0,5896	1,3985	0,8456
10	0,2051	0,5896	1,6159	0,7867
11	0,2310	0,5875	1,8116	0,7430
12	0,2583	0,5895	2,0160	0,7043
13	0,2568	0,5892	2,0236	0,7030
14	0,2458	0,5890	1,9414	0,7177
15	0,2314	0,5885	1,8457	0,7361
16	0,2174	0,5912	1,7377	0,7586
17	0,2024	0,5893	1,6220	0,7852
18	0,1927	0,5891	1,5442	0,8047
19	0,1799	0,5882	1,4418	0,8328
20	0,1536	0,5903	1,2307	0,9014
21	0,1418	0,5901	1,1365	0,9380
22	0,1284	0,5895	1,0290	0,9858
23	0,1179	0,5904	0,9427	1,0299
24	0,1076	0,5905	0,8599	1,0784
25	0,0944	0,5922	0,7549	1,1510

\* Базується на площі перерізу

Значення витрати одержимо з рівняння

$$Q = 1,00105W/\rho_w t, \quad (1.55)$$

де стала 1,00105 – коригувальний коефіцієнт для врахування впливу густини повітря на показання ваг;

$$\rho_w = 1000,25 - 0,008\theta_w - 0,00486 \theta_w^2 + (0,46 \cdot 10^{-6}) p_s,$$

а коефіцієнт калібрування – з рівняння

$$C = Q (1 - \beta^4)^{1/2} / A_o (2gH)^{1/2}. \quad (1.56)$$

#### 1.14.4 Лінеаризація калібрувального графіка

З графіка коефіцієнтів калібрування, побудованого за відповідними числами Рейнольдса, видно, що залежності є нелінійними. З попереднього досвіду відомо, що лінійні залежності можна отримати, будуючи графік залежності  $C$  від функції оберненої величини  $Re_d$ , а для цього прикладу було вибрано  $(1/Re_d)^{1/2}$ . Остаточний графік зображено на рисунку 1.4

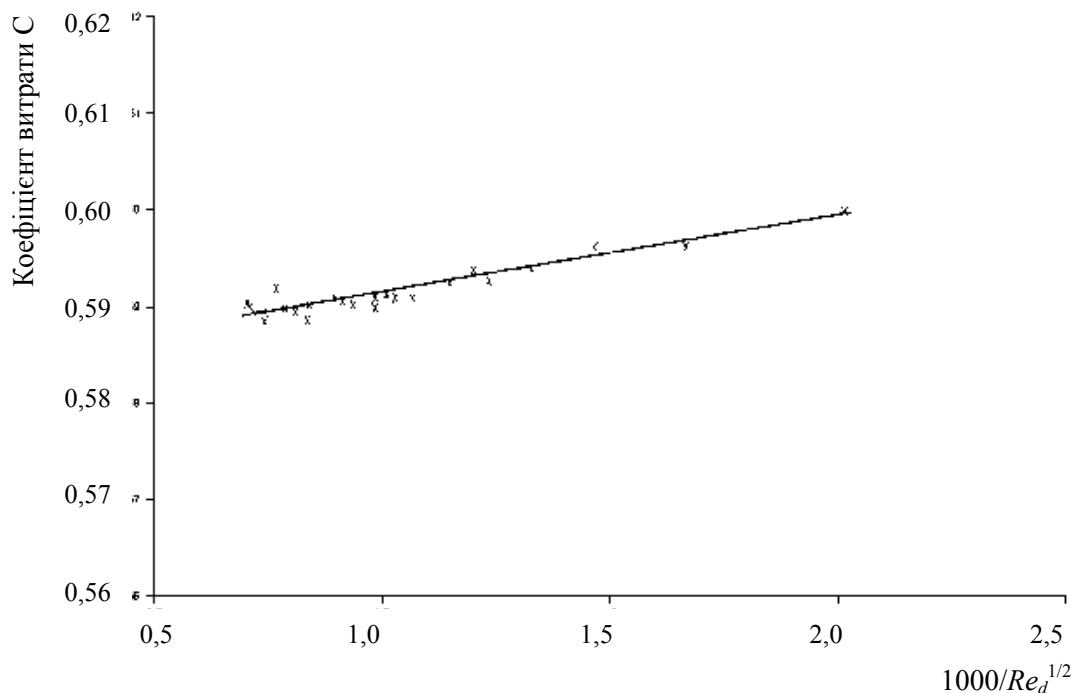


Рисунок 1.4 – Коефіцієнт витрати як функція від  $1000/Re_d^{1/2}$

З аналізу даних, виконаного як описано в підрозділі 1.4, випливає, що ця залежність є лінійною, і апроксимацію лінії можна виконати із застосуванням класичного методу найменших квадратів, наведеного в підрозділі 1.6.

#### 1.14.5 Невизначеність в окремих точках калібрування

Відповідно до принципів, викладених у підрозділі 1.13, випадкову невизначеність у коефіцієнті  $C$ , %, можна розрахувати за рівнянням

$$e'_R(C) = \left\{ e'^2_R(Q) + e'^2_R(g)/4 + e'^2_R(H)/4 + [2/(1 - \beta^4)]^2 e'^2_R(d) + [2\beta^4/(1 - \beta^4)]^2 e'^2_R(D) \right\}^{1/2}. \quad (1.57)$$

Випадкову невизначеність і границі систематичної похибки в значеннях шести складників (таблиця 1.4) обчислено із застосуванням принципів, наведених у ДСТУ ISO 5168. Підставивши їх у рівняння (1.57), отримаємо випадкову невизначеність, що дорівнює 0,16 %.

Використовуючи подібне рівняння для  $e'_s$  (замінивши  $e'_R$  на  $e'_s$ ) і, підставляючи його на місце останнього стовпця таблиці 1.4, отримаємо значення границі систематичної похибки 0,75 %.

Таблиця 1.4 – Складники невизначеності й границі похибки

Змінна	Випадкова невизначеність, %	Границі систематичної похибки, %
$d$	0,00	0,20
$D$	0,00	0,20
$g$	незначна	незначна
$H$	0,10	0,05
$Q$	0,15	0,15
$\nu$	0,00	0,50

Таким самим способом обчислимо випадкову невизначеність для функції  $(1/Re_d)^{1/2}$ , яку наведемо у вигляді

$$X = 1/(Re_d)^{1/2} = (\pi \nu d/4Q)^{1/2}. \quad (1.58)$$

Тоді випадкову невизначеність у відсотках можна знайти з рівняння

$$e'_R(X) = \left\{ e'^2_R(\nu) + e'^2_R(d) + e'^2_R(Q) \right\} / 4^{1/2}. \quad (1.59)$$

Підставивши значення для  $e'_R$  з таблиці 1.4 у формулу (1.59), отримаємо випадкову невизначеність  $X$ , яка дорівнює 0,08 %.

Використавши відповідне рівняння для  $e'_s(X)$ , отримаємо границю систематичної похибки, що дорівнює 0,28 %.

#### 1.14.6 Оптимальна апроксимація калібрувальної характеристики

Використавши зазначені в підрозділі 1.14.5 відсотки й дані з таблиці 1.5, знайдемо абсолютну випадкову невизначеність у середніх значеннях цих двох змінних за формулами

$$e'_R(1/Re_d)^{1/2} = 8,3 \cdot 10^{-7}; \quad e'_R(C) = 9,5 \cdot 10^{-4},$$

звідки при підставленні її в рівняння (1.14) отримуємо  $\gamma = 1144$ .

Таблиця 1.5 – Величини для обчислення невизначеності графіка калібрування

Величина	Значення
$x$	1,01417
$y$	0,591064
$s^2(x)$	1,087864
$s^2(y)$	$8,101213 \cdot 10^{-6}$
$Cov(xy)$	$8,985401 \cdot 10^{-7}$

Випадкова невизначеність у функції  $(1/Re_d)^{1/2}$  при цьому є незначною, і тому рівняння калібрувальної характеристики можна навести у вигляді

$$C = a + b (10^3/Re_d)^{1/2}. \quad (1.60)$$

Підставивши необхідні розраховані суми квадратів і значення з таблиці 1.5 у рівняння (1.16) і (1.17), отримаємо

$$C = 0,5827 + (8,2597/Re_d)^{1/2}, \quad (1.61)$$

а коефіцієнт кореляції, розрахований з рівняння (1.18), буде дорівнювати 0,9570.

Із рівняння (1.16) випливає, що значення  $b$  є дуже малим і коефіцієнт витрати змінюється незначно зі змінням числа Рейнольдса. Ураховуючи це, визначимо, чи можна нахил калібрувальної характеристики визнати нульовим. Підставимо значення з таблиці 1.5 у рівняння (1.32) і (1.33) і визначимо границі довірчого інтервалу при імовірності 95 % для  $b$  як  $0,0082597 \pm (2,06 \cdot 0,0005007)$ . Оскільки цей інтервал не містить нуля, можна визначити, що  $b$  відрізняється від нуля.

Виходячи з цього, випадкову невизначеність у будь-якому значенні  $C$  можна обчислити за рівнянням (1.34), необхідне значення  $s_R$  – за рівнянням (1.19), (1.20) або (1.21). Заміну в останньому рівнянні наведемо у вигляді

$$s_R = 8,42 \cdot 10^{-4}.$$

Підставивши це значення в рівняння (1.34), отримаємо

$$e_R(\hat{C}) = 2,06 \cdot (8,42 \times 10^{-4}) \left\{ 0,04 + [(x_k - 1,01417)^2 / 2,610874]^{1/2} \right\}, \quad (1.62)$$



$$\text{при } x_k = \bar{x} = 1,01417 \quad e_R(\hat{C}) = 3,469 \cdot 10^{-3};$$

$$\text{при } x_k = 2,0209 \quad e_R(\hat{C}) = 1,134 \cdot 10^{-3};$$

$$\text{при } x_k = 0,7030 \quad e_R(\hat{C}) = 4,8 \cdot 10^{-4}.$$

Рівняння (1.62) дає випадкову невизначеність у значенні коефіцієнта калібрування, і тепер її треба об'єднати з границею систематичної похибки, яка є такою самою, як і в будь-якому окремому вимірюванні значення  $C$ , тобто

$$e_s(C) = \left\{ e_s^2(Q) + e_s^2(g)/4 + e_s^2(H)/4 + [2/(1-\beta^4)]^2 e_s^2(d) + [2\beta^4/(1-\beta^4)]^2 e_s^2(D) \right\}^{1/2}. \quad (1.63)$$

Підставивши відповідні значення з таблиці 1.4, одержимо  $e'_s(\hat{C}) = 0,75\%$ .

Загальну невизначеність для будь-якого значення  $\hat{C}$ , що відповідає 95% імовірності, отримаємо комбінуванням за методом квадратного кореня із суми квадратів; випадкову невизначеність обчислимо за рівнянням (1.62) із наведеною вище границею систематичної похибки, наприклад:

$$\text{при } x_k = \bar{x} = 1,01417 \quad U'_{RSS}(\hat{C}) = (0,035^2 + 0,75^2)^{1/2} \% = 0,75\%;$$

$$\text{при } x_k = 2,0209 \quad U'_{RSS}(\hat{C}) = (0,11^2 + 0,75^2)^{1/2} \% = 0,76\%;$$

$$\text{при } x_k = 0,7030 \quad U'_{RSS}(\hat{C}) = (0,05^2 + 0,75^2)^{1/2} \% = 0,75\%.$$

Це – невизначеність, пов'язана з визначенням фактичного значення  $C$ , і її необхідно застосовувати, наприклад, для оцінювання невизначеності при застосуванні стандартизованих або зведених у таблицю значень коефіцієнта витрати. Можна зазначити, що в наведеному прикладі систематична похибка значною мірою є переважною.

Однак якщо для вимірювання витрати за умов, що є строго ідентичними під час калібрування (та сама рідина при таких самих тиску й температурі, тих самих значеннях коефіцієнтів впливу тощо), застосовують попередньо відкалібрований звужувальний пристрій, то похибки при визначенні геометричних характеристик звужувального пристрою не впливають, оскільки можна припустити, що  $C = kQH^{1/2}$ . Границю систематичної похибки  $\hat{C}$  у цьому випадку визначають таким чином:

$$e'_s(\hat{C}) = [e_s^2(Q) + 0,25e_s^2(H)]^{1/2}. \quad (1.64)$$

Підставивши заміни відповідних значень з таблиці 1.4, отримаємо

$$e'_s(\hat{C}) = [0,15^2 + 0,25 \cdot 0,05^2]^{1/2} = 0,15 \text{ \%}.$$

Тоді повну невизначеність у будь-якому значенні  $\hat{C}$  отримаємо з рівнянь (1.68) і (1.69), наприклад:

$$\text{при } x_k = \bar{x} = 1,01417 \quad U'_{RSS}(\hat{C}) = (0,035^2 + 0,15^2)^{1/2} \% = 0,15 \text{ \%};$$

$$\text{при } x_k = 2,0209 \quad U'_{RSS}(\hat{C}) = (0,11^2 + 0,15^2)^{1/2} \% = 0,19 \text{ \%};$$

$$\text{при } x_k = 0,7030 \quad U'_{RSS}(\hat{C}) = (0,05^2 + 0,15^2)^{1/2} \% = 0,16 \text{ \%}.$$

#### 1.14.7 Невизначеність вимірювання витрати при застосуванні відкаліброваного звужувального пристрою

Якщо кут нахилу калібрувальної характеристики не дорівнює нулю, то при її застосуванні для оцінювання витрати виникає додаткова невизначеність. З урахуванням того, що тільки  $H$  і  $v$  впливають на невизначеність у  $1/(Re_d)^{1/2}$ , рівняння (1.59) можна звести до такого:

$$e_R(X) = \left\{ e_R^2(v)/4 + [e_R^2(H')]/8 \right\}^{1/2}. \quad (1.65)$$

Аналогічно можна виразити  $e_S$  для границь систематичної похибки.

Вплив  $H$  і  $v$  на значення  $C$  залежить від нахилу калібрувальної характеристики і в абсолютних величинах подається у вигляді

$$U_{RSS} = b[e_R^2(X) + e_S^2(X)]^{1/2}. \quad (1.66)$$

Загальну невизначеність  $U_{RSS}(C)$  обчислимо, поєднуючи значення  $U_{RSS}$  з формули (1.66) з невизначеністю для калібрувальної характеристики за методом найменших квадратів:

$$U_{RSS}(C) = [U_{RSS}^2(\hat{C}) + U_{RSS}^2(C_0)]^{1/2}. \quad (1.67)$$

Таким самим чином обчислимо випадкову невизначеність при вимірюванні  $Q$  за формулою

$$e_R(Q) = 0,5e_R(H'), \quad (1.68)$$

а границю систематичної похибки –

$$e_s(Q) = [e_s^2(C) + 0,25e_s^2(H')]^{1/2}. \quad (1.69)$$

Якщо задати

$$e'_R(v) = 0,0 \%; \quad e_s(v) = 1,0 \%;$$

$$e'_R(H') = 0,5 \%; \quad e_s(H') = 1,0 \%,$$

то з рівняння (1.38) і пов'язаної з ним формули для границі систематичної похибки маємо

$$e'_R(X) = 0,5/8^{1/2} = 0,18 \%,$$

$$e'_S(X) = (0,25 + 0,125)^{1/2} = 0,61 \%.$$

Таким чином, узявши значення  $Re_d^{1/2}$  в точці, де сходяться повторення, таким, що дорівнює  $8 \cdot 10^5$  (тобто  $x_k = 0,00112$ ), отримаємо

$$U_{RSS} = 8,26 [(0,00112 \cdot 0,0018)^2 + (0,00112 \cdot 0,0061)^2]^{1/2} = 5,88 \cdot 10^{-5}.$$

Для наведеного значення  $Re_d$  і  $C = 0,5919$  абсолютну невизначеність для калібрувальної характеристики задаємо так:

$$U_{RSS}(\hat{C}) = (0,5919 \cdot 0,0016) = 9,4704 \cdot 10^{-4}.$$

Об'єднавши  $U_{RSS}(\hat{C})$  і  $U_{RSS}(C_0)$  за методом найменших квадратів і поділивши на коефіцієнт калібрування, одержимо

$$U'_{RSS}(C) = [(9,4704 \cdot 10^{-4})^2 + (5,88 \cdot 10^{-5})^2]^{1/2} / 0,5919 = 0,16 \%.$$

Із рівнянь (1.68) і (1.69) отримаємо

$$e'_R(Q) = (0,5 \cdot 0,5) \% = 0,25 \%,$$

$$e'_S(Q) = [0,16^2 + 0,25(1)^2]^{1/2} \% = 0,52 \%.$$

## 2 ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ КАЛІБРУВАННІ ЗВТ ВИТРАТИ РЕЧОВИН, ЩО МАЮТЬ НЕЛІНІЙНІ КАЛІБРУВАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 2.1 Апроксимація калібрувальної характеристики ЗВТ витрати

#### 2.1.1 Загальні положення

Основне рівняння калібрувальної характеристики ЗВТ витрати згідно з розділом 1 повинне мати такий вигляд:

$$y = a + bx, \quad (2.1)$$

де  $x$  – змінна з меншою похибкою;

$a, b$  – коефіцієнти апроксимувальної лінії, які визначають.

Однак це не завжди є можливим і не відповідає дійсній калібрувальній характеристиці ЗВТ витрати. Якщо залежність є нелінійною, то там, де це є можливим, слід зробити перетворення на лінійну форму (2.1), щоб спростити маніпулювання даними.

Якщо під час проведення калібрування ЗВТ витрати було встановлено, що його калібрувальна характеристика є нелінійною, то необхідно апроксимувати її поліномом будь-якого степеня. Однак спочатку необхідно розглянути можливість простого перетворення змінних  $x$  або  $y$  (або їх обох) шляхом ефективної лінеаризації даних для застосування методів прямої лінеаризації (див. розділ 1). Деякі відповідні перетворення також запропоновано в розділі 1.

Якщо неможливо застосувати пряму лінію, то необхідно визначити степінь і коефіцієнти функції полінома, які найкраще подати послідовністю  $n$  пар  $(x_i, y_i)$  значень даних, отриманих під час калібрування. Якщо, наприклад, вибрано квадратичний вираз, то характеристика буде мати вигляд

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2. \quad (2.2)$$

Загальний вираз полінома буде таким:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + \dots + b_jx^j + \dots + b_mx^m,$$

або

$$\hat{y} = \sum_{j=0}^m b_jx^j. \quad (2.3)$$

Застосовуючи метод найменших квадратів, обчислимо коефіцієнти  $b_j$  для мінімізації суми квадратів відхилень точок даних від характеристики:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

де  $\hat{y}_i$  – значення, розраховане з формули (2.2) при  $x = x_i$ .

У деяких випадках ступінь полінома  $m$  буде визначено заздалегідь. Наприклад, з практичного досвіду відомо, що дані калібрування буде задовільно наведено кубічним ( $m = 3$ ) виразом. Інакше необхідно вибирати ступінь апроксимації, збільшуючи його, поки не буде досягнуто оптимального (див. підрозділ 2.3.3).

Якщо збільшення ступеня апроксимації не приводить до суттєвого вдосконалення характеристики, як описано в підрозділі 2.3.3, і його необхідно ще збільшувати, то, імовірно, функціональну залежність не можна застосовувати для опису полінома. Якщо отримане рівняння є задовільним, але існує дуже багато умов для його застосування, то характеристика може мати дрібні коливання. Як звичайний приклад можна навести дані, що є фактично постійними майже в усьому діапазоні  $x$ , але сильно змінюються поблизу однієї з меж діапазону. У таких випадках необхідно поділити діапазон на частини, у яких буде спостерігатися їх лінійність, або застосувати поліном більш низького степеня. Альтернативне перетворення однієї або обох змінних може привести до лінійності характеристики або до функції полінома більш низького степеня; перетворення незалежної змінної на відношення  $1/x$  у деяких випадках приведе до адекватної лінійності.

Метод найменших квадратів не можна застосовувати, якщо вплив випадкової невизначеності  $e_r(x)$  значень  $x_i$  є дуже великим порівняно з випадковою невизначеністю  $e_r(y)$  значень  $y_i$ .

Якщо значення нахилу (який у цьому випадку означає похідну) калібрувальної характеристики

$$d\hat{y}/dx = b_1 + 2b_2x + \dots,$$

завжди менше, ніж одна п'ята від  $e_r(y)/e_r(x)$ , то можна вважати, що метод є прийнятним.

У тих випадках, коли це не виконується, треба вибрати інше математичне оброблення, яке в цьому посібнику не розглядається. Тому, якщо в нормальній практиці для калібрування будь-якого специфічного ЗВТ витрати змінні зображають графічно так, що наведені вище умови не виконуються, необхідно змінити звичайне розташування абсциси й ординати, що приводить до застосування специфічних методів, які треба визначати окремо залежно від пакета отриманих значень.

Якщо будь-яку змінну перетворено перед апроксимацією, то невизначеність, наведена в підрозділі 2.4, належить до нових перетворених змінних. Якщо випадкову невизначеність  $e_r(y)$ , яка є наслідком перетворення залежної змінної, не можна вважати постійною в діапазоні, то треба застосувати метод зважених найменших квадратів. Цей метод не описано в цьому посібнику, але існує багато комп'ютерних бібліотек програм, де його можна знайти.

### 2.1.2 Методи обчислення

Стандартні бібліотеки програм для апроксимації характеристики за методом найменших квадратів є доступними на більшості комп'ютерів. Метод апроксимації прямою лінією, описаний у розділі 1, зазвичай є відомим як лінійна, або проста лінійна, регресія: еквівалентний метод апроксимації поліномом можна описати як поліном або нелінійну регресію, що є спеціальним типом множинної лінійної регресії. У підрозділі 2.3 наведено подальшу інформацію про методи регресії і їх використання.

Як альтернативну до стандартних програм регресії можна застосовувати метод ортогональних поліномів, описаний у підрозділі 2.4. Цей метод є найбільш прийнятним, якщо степінь апроксимації заздалегідь є невідомим.

Якщо значення  $x$  є рівномірно розподіленими, то за недоступності комп'ютера можна застосовувати метод скінченних різниць, наведений у підрозділі 2.5, для забезпечення швидкого визначення степеня апроксимації при поданні даних. Коефіцієнти полінома, який описує дані, можна також розрахувати, але це не буде поліномом найменших квадратів. Обчислення невизначеності із застосуванням методу скінченних різниць у цьому посібнику не розглядається.

### 2.1.3 Вибір оптимального степеня апроксимації

Оптимальну апроксимацію визначають методами або збільшення значення степеня  $m$  до певного максимуму, або поки не відбудеться подальше суттєве вдосконалення характеристики. Середньоквадратичний відхил  $s_r$  необхідно обчислити для кожного степеня ( $s_r$  – корінь квадратний варіації залишків), застосовуючи рівняння

$$s_r^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - m - 1), \quad (2.3)$$

де  $\hat{y}_i$  – значення, знайдене за формулою (2.2) при  $x = x_i$ .

Варіація залишків  $s_r^2$  є еквівалентною  $s^2(y, x)$ .

Степінь  $m$  завжди має бути набагато меншим, ніж кількість точок даних  $n$ .

Якщо дані добро описано поліномом степеня  $m$ , то  $s_r$  буде значно зменшуватися доти, доки не буде досягнуто степеня  $m$ , після чого  $s_r$  залишиться приблизно постійним. Однак зазвичай степінь, при якому  $s_r$  зменшується

неістотно, є неочевидним, і об'єктивний критерій значення слід використовувати для виявлення оптимального степеня застосування.

Збільшення степеня апроксимації від  $m - 1$  до  $m$  вважається забезпеченням статистично істотної вдосконаленої апроксимації, якщо новий коефіцієнт  $b_m$  значно відрізняється від нуля, тобто якщо дорівнює  $b_m + t_{95}s(b_m)$  і  $b_m - t_{95}s(b_m)$  ( $b_m$  за рівнем довірчої ймовірності 95 %) за виключенням нуля.

Цю умову можна виразити так:

$$\left| \frac{b_m}{s(b_m)} \right| > t_{95},$$

де  $t_{95}$  – коефіцієнт Стюдента  $t$  за рівнем довірчої ймовірності 95 % при  $\nu = n - m - 1$ .

Значення  $t_{95}$  як функції кількості степенів вільності  $\nu$  можна обчислити за таким емпіричним рівнянням:

$$t_{95} = 1,96 + 2,36/\nu + 3,2/\nu^2 + 5,2/\nu^3,^{84} \quad (2.4)$$

Для коефіцієнта ортогонального полінома  $g_m$  (див. підрозділ 2.6) цю умову визначають за рівнянням

$$\left| \frac{g_m}{s(g_m)} \right| > t_{95}.$$

Вираз для варіації коефіцієнтів  $s^2(b_m)$  і  $s^2(g_m)$  наведено в підрозділах 2.3 і 2.4 відповідно.

Важливо перевірити вплив збільшення степеня апроксимації принаймні на одне значення. Крім того, якщо перші показники ніяк не вплинули на вдосконалення, або (як це часто має місце) тільки парні або непарні значення степеня апроксимації істотно впливають на вдосконалення.

З огляду на статистику, найвищий степінь, який істотно впливає на уточнення апроксимації рівнем довірчої ймовірності 95 %, можна вважати оптимальним степенем. Однак перш ніж цей степінь буде вибрано для забезпечення найпридатнішого виразу подання даних, потрібно розглянути інші чинники. Ці чинники містять будь-які уявлення про очікувану форму характеристики, наявність не занадто складної функціональної форми, діапазон, який необхідно навести, і точність, до якої необхідно прагнути.

Під час оцінювання цих чинників завжди бажано будувати графіки даних і можливих характеристик. Ці графіки також показують інші можливі проблеми, наприклад такі:

– якщо степінь є занадто малим, то характеристика не буде відображати

реальну тенденцію в даних, і розраховане значення  $\hat{y}$  може мати похибку в деякій частині діапазону;

– якщо ступінь є занадто великим, то характеристика може відображати розсіювання даних, а не основну тенденцію.

У прикладах, наведених у підрозділі 2.5, показано застосування деяких із цих принципів.

## 2.2 Обчислення невизначеності

Випадковий складник невизначеності отриманого значення  $\hat{y}$  за рівнем довірчої ймовірності 95 % обчислюють за формулою

$$e_r(\hat{y}) = t_{95}s(\hat{y}),$$

де  $s(\hat{y})$  – корінь квадратний дисперсії  $s^2(\hat{y})$  від  $\hat{y}$ .

Вираз для  $s^2(\hat{y})$  наведено в підрозділах 2.5 і 2.6. Узагалі,  $s^2(\hat{y})$  можна виразити як функцію полінома від  $x$  степеня  $2m$ . Важливо гарантувати, що досить багато істотних даних використовуються при обчисленні  $s^2(\hat{y})$  для запобігання великим похибкам округлення.

Слід зазначити, що оцінка невизначеності, поданої як  $e_r(\hat{y})$ , буде дійсною тільки для степеня виразу полінома, який вибрано для кращого наближення до істинних функціональних залежностей між  $y$  і  $x$ .

Істинне значення  $y$  за рівнем довірчої ймовірності 95 % має вигляд

$$y \pm e_r(\hat{y}).$$

Невизначеність коефіцієнта калібрування

$$e(\hat{y}) = [e_r^2(\hat{y}) + e_s^2(\hat{y})]^{1/2},$$

де  $e_s(\hat{y})$  – систематичний складник невизначеності в  $\hat{y}$ .

У ДСТУ ISO 5168 застосовано принципи використання лінійного додавання або кореня квадратного від суми квадратів комбінації випадкових і систематичних похибок.

Якщо залежну змінну перетворено, то всі невизначеності будуть належати до перетвореної змінної.



## 2.3 Методи регресії

### 2.3.1 Загальні положення

Методи регресії для апроксимації калібрувальної характеристики є широко доступними під різними назвами в бібліотеках стандартних комп'ютерних програм, які ґрунтуються на деякому рівні знання регресійного аналізу. Мета викладення цього підрозділу полягає в забезпеченні загального опису методів і термінів характеристики регресії, що відповідає основному фонду бібліотек програм.

Найбільш доступним є метод регресії, який являє собою як просту, так і множинну лінійну регресію. Характеристику можна апроксимувати із застосуванням спеціальної множинної лінійної регресії, відомої як поліноміальна, або нелінійна, регресія. Якщо поліноміальна регресія є недоступною для програми, то можна застосовувати метод множинної лінійної регресії, хоча це менш зручно. Можна застосовувати спеціальні типи методів множинної лінійної регресії, такі, як «покроковий» і «виключення невідомих», або «зворотне рішення».

Далі для підсумування будемо застосовувати знак  $\sum_{i=1}^n$ .

### 2.3.2 Множинна лінійна регресія

Змінну  $y$ , яка лінійно залежить від  $m$  незалежних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , подамо в такому вигляді:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + U, \quad (2.5)$$

де  $\beta_0, \dots, \beta_m$  – невідомі коефіцієнти регресії;

$U$  – міра випадкових чинників, які спричиняють відхилення залежності  $y(m)$  від точної лінійності.

Для послідовності з  $n$  спостережень

$$(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

оцінки коефіцієнтів регресії

$$b_0, b_1, \dots, b_m$$

мають бути такими, щоб оцінка дійсного значення

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_{1i} + \dots + b_m x_{mi}, \quad (2.6)$$

відповідала послідовності ( $i - x$ ) спостережень незалежних змінних.

Застосування процедури найменших квадратів для мінімізації  $\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$  приводить до  $(m + 1)$  одночасних рівнянь, зазвичай відомих як нормальні рівняння:

$$\begin{aligned} nb_0 + \sum(x_{1i})b_1 + \sum(x_{2i})b_2 + \dots + \sum(x_{mi})b_m &= \sum y_i ; \\ \sum(x_{1i})b_0 + \sum(x_{1i})^2 b_1 + \dots + \sum(x_{1i}x_{mi})b_m &= \sum(x_{1i}y_i) ; \\ \sum(x_{mi})b_0 + \sum(x_{mi}x_{1i})b_1 + \dots + \sum(x_{mi})^2 b_m &= \sum(x_{mi}y_i) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тоді їх можна розв'язати для  $(m + 1)$  невідомих  $b_0, b_1, \dots, b_m$ .

### 2.3.3 Поліноміальна (нелінійна) регресія

Якщо залежність між двома змінними є нелінійною, але її можна апроксимувати функцією полінома

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m ,$$

то говорять, що цю залежність можна описати поліноміальною, або нелінійною, регресією  $y$  від  $x$ . Це можна розглядати як множинну лінійну регресію з незалежними змінними  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , заміненими на  $x, x^2, \dots, x^m$ .

У підрозділах 2.3.4 і 2.3.5 кожний з виразів множинної лінійної регресії можна перетворити на еквівалентні вирази поліноміальної регресії, замінюючи  $j$ -ту незалежну змінну  $x_j$  на  $x^j$  і відповідні значення даних  $x_{ji}$  на  $x_i^j$ .

### 2.3.4 Обчислення коефіцієнтів і варіації

Розглянемо рівняння множинної лінійної регресії з  $m = 2$

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad (2.8)$$

яке є еквівалентним

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad (2.9)$$

у випадку поліноміальної регресії.

При застосуванні критерію найменших квадратів нормальні рівняння будуть такими:

$$nb_0 + \sum (x_{1i})b_1 + \sum (x_{2i})b_2 = \sum y_i ; \quad (2.10)$$

$$\sum (x_{1i})b_0 + \sum (x_{1i})^2 b_1 + \sum (x_{1i}x_{2i})b_2 = \sum (x_{1i}y_i); \quad (2.11)$$

$$\sum (x_{2i})b_0 + \sum (x_{2i}x_{1i})b_1 + \sum (x_{2i})^2 b_2 = \sum (x_{2i}y_i). \quad (2.12)$$

Традиційний метод розв'язання нормальних рівнянь застосовується для обчислення оберненої тривимірної (3 x 3) матриці з коефіцієнтами  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$ . Якщо ця матриця має вигляд

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} b_0 &= C_{00} \sum y_i + C_{01} \sum (x_{1i}y_i) + C_{02} \sum (x_{2i}y_i), \\ b_1 &= C_{10} \sum y_i + C_{11} \sum (x_{1i}y_i) + C_{12} \sum (x_{2i}y_i), \\ b_2 &= C_{20} \sum y_i + C_{21} \sum (x_{1i}y_i) + C_{22} \sum (x_{2i}y_i), \end{aligned} \quad (2.13)$$

або в узагальненому вигляді

$$b_j = \sum_{k=0}^m [C_{jk} \sum (x_{ki}y_i)],$$

де  $x_{ki} = 1$  при  $k = 0$ .

Необхідно звернути увагу на те, що матриця нормальних рівнянь є симетричною, отже, обернена матриця також є симетричною.

Варіації коефіцієнтів

$$s^2(b_0) = s_r^2 C_{00},$$

$$s^2(b_1) = s_r^2 C_{11},$$

$$s^2(b_2) = s_r^2 C_{22},$$

де середньоквадратичний відхил, наведений у підрозділі 2.1.3,

$$s_r^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}.$$

Оскільки обернена матриця є симетричною, то отримаємо

$$\begin{aligned} C_{01} &= C_{10}, \\ C_{02} &= C_{20}, \\ C_{12} &= C_{21}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ці недіагональні рядки застосуємо для обчислення коваріації між коефіцієнтами  $b_j$ . Коваріацію позначимо  $COV$ :

$$\begin{aligned} COV(b_0, b_1) &= s_r^2 C_{01}; \\ COV(b_0, b_2) &= s_r^2 C_{02}; \\ COV(b_1, b_2) &= s_r^2 C_{12}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Коваріація двох коефіцієнтів характеризує ефект змінення однієї величини на іншу. Обернена матриця, помножена на скаляр  $s_r^2$ , є відомою як варіація коваріації, або матриця варіації коваріацій.

У випадку, коли  $x_1 = x_1^*$  і  $x_2 = x_2^*$ , рівняння регресії має вигляд

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1^* + b_2 x_2^*. \quad (2.16)$$

Варіація значень  $x_1^*$  і  $x_2^*$  для  $\hat{y}$  (2.16) дає

$$s^2(\hat{y}) = s_r^2 \left[ C_{00} + C_{11} (x_1^*)^2 + C_{22} (x_2^*)^2 + 2C_{01} x_1^* + 2C_{02} x_2^* + 2C_{12} x_1^* x_2^* \right]. \quad (2.17)$$

Другий множник виникає тому, що  $C_{jk} = C_{kj}$  для кожних  $j, k$ . Загальна формула має вигляд

$$s^2(\hat{y}) = s_r^2 \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m (C_{jk} x_j^* x_k^*), \quad (2.18)$$

де  $x_j^* = 1, x_k^* = 1$  для  $j = 0, k = 0$ .

Для поліноміальної регресії  $x_j^* = (x^*)^j$  і  $x_k^* = (x^*)^k$ , отже,

$$s^2(\hat{y}) = s_r^2 \sum_{j=0}^m \left[ \sum_{k=0}^m C_{jk} (x^*)^{j+k} \right].$$

Апроксимуючи цю формулу до форми полінома степеня  $2m$ , одержимо

$$s^2(\hat{y}) = s_r^2 \sum_{j=0}^m \left[ \left( \sum_{k=0}^j C_{k,j-k} \right) (x^*)^j \right] + s_r^2 \sum_{j=m+1}^{2m} \left[ \left( \sum_{k=j-m}^m C_{k,j-k} \right) (x^*)^j \right]. \quad (2.19)$$

### 2.3.5 Усереднена форма подання результатів

Найменші квадрати (або регресійний аналіз) іноді виражають в «усередненій» формі, у якій кожен змінну замінено її відхилом від середнього значення. У цій формі рівняння (2.8) замінено на таке:

$$\hat{y} - \bar{y} = b_1(x_1 - \bar{x}_1) + b_2(x_2 - \bar{x}_2), \quad (2.20)$$

де риску над символом застосовують, щоб позначити середнє значення величини, яке подано символом для  $n$  вимірів.

### 2.3.6 Числові методи, які застосовуються в комп'ютерних бібліотеках

Для методу найменших квадратів (або обчислення регресії), наведених у підрозділі 2.5, можна застосовувати різноманітні числові методи з бібліотеки комп'ютерних програм. Основні числові методи, які застосовуються в комп'ютерах для регресії й маніпуляцій матриці найменших квадратів:

- а) виключення невідомих методом Гаусса або Гаусса – Джордана;
- б) розкладення Холецкого;
- в) ортогональні розкладення (зазвичай розкладення Хоузехолдера або змінене розкладення Грама – Шмидта).

Застосування особливих методів зазвичай не є важливими для користувачів. Однак слід зазначити, що методи виключення невідомих призводять до накопичення похибок округлення таким чином, що для поліномів високого степеня обчислені коефіцієнти  $b_j$  можуть бути неприйнятними, а для поліномів помірних степенів (до  $m = 3$  або  $4$ ) – прийнятним.

## 2.4 Апроксимація калібрувальної характеристики ортогональними поліномами

У цьому підрозділі наведено основні особливості апроксимації характеристики ортогональними поліномами із застосуванням методів регресії, розглянутих у підрозділі 2.5. Апроксимація характеристики ортогональними поліномами є особливо ефективною, коли показник степеня невідомий, і це не

призводить до швидкого збільшення похибки округлення, яка може виникнути при застосуванні методу виключення невідомих (див. підрозділи 2.2 і 2.3).

Результати апроксимації характеристики ортогональними поліномами будуть ідентичними (крім похибки округлення) результатам, отриманим за методами регресії, описаними в підрозділі 2.3.

Зазвичай програми з комп'ютерної бібліотеки, у яких використовуються ортогональні поліноми, не містять достатньої інформації для легкого обчислення невизначеності. Лише деякі містять повну інформацію для обчислення невизначеності при калібруванні.

Для методу ортогональних поліномів поліном

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$$

замінено еквівалентною формою

$$\hat{y} = g_0p_0(x) + g_1p_1(x) + g_2p_2(x) + \dots + g_mp_m(x), \quad (2.21)$$

де  $p_j(x)$  – поліном степеня  $j$ , що задовольняє умови ортогональності для всіх  $j \neq k$ :

$$\sum [p_j(x_i)p_k(x_i)] = 0, \quad p_0(x) = 0. \quad (2.22)$$

Оскільки цей ортогональний поліном (2.21) описано достатньою кількістю точок даних  $x_i$ , то коефіцієнти, які їх визначають, отримують згідно з [4] із застосуванням відношення повторення з трьома рядками.

Унаслідок умови ортогональності всі елементи в прямій і оберненій матрицях, складених з нормальних рівнянь (див. підрозділ 2.2), дорівнюють нулю, за винятком тих, які розташовано по діагоналі ( $j = k$ ), а коефіцієнти  $g_j$  отримано безпосередньо з нормальних рівнянь таким чином:

$$g_j = \frac{\sum [y_i p_j(x_i)]}{\sum [p_j(x_i)]^2}. \quad (2.23)$$

Варіації коефіцієнтів отримують з елементів обернених матриць, як у підрозділі 2.5:

$$s^2(g_j) = s_r^2 C_j = \frac{s_r^2}{\sum [p_j(x_i)]^2}. \quad (2.24)$$

При  $x = x^*$  (коваріації дорівнюють нулю) отримаємо

$$s^2(\hat{y}) = s^2(g_0) + [p_1(x^*)]^2 s^2(g_1) + \dots + [p_m(x^*)]^2 s^2(g_m) = \frac{s_r^2}{n} + s_r^2 \sum_{j=1}^m \frac{[p_j(x^*)]^2}{\sum [p_j(x_i)]^2}. \quad (2.25)$$

Оскільки коефіцієнти  $g_j$  обчислено за рівнянням (2.23), а показник степеня апроксимації збільшено, попередні коефіцієнти будуть незмінними. Саме це робить ортогональний поліном особливо зручним, якщо степінь апроксимації задалегідь є невідомим. Після того, як оптимальний степінь вибрано, необхідно перетворити форму полінома для  $\hat{y}$  в ортогональному вигляді (рівняння (2.21)) на більш зручний простий ряд

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m,$$

застосовуючи коефіцієнти, що характеризують ортогональні поліноми, отримані з урахуванням первісного рекурентного відношення.

## 2.5 Приклади калібрування ЗВТ витрати, що мають нелінійні калібрувальні характеристики

Цей підрозділ містить три приклади калібрування ЗВТ витрати – два калібрування ЗВТ витрати, застосовуваних у закритих трубопроводах, і один – у відкритих каналах за методом «швидкість – площа» з використанням вимірювача швидкості потоку.

Дані, наведені в таблицях 2.1, 2.2 і 2.3, можна застосовувати для перевірки дії будь-якої програми, придатної для обчислення калібрувальної характеристики. Точність, з якою обчислюють результати, буде залежати від застосованого методу й від точності комп'ютера. Результати, наведені в цьому підрозділі, отримано з допомогою еквівалента арифметики подвійної точності до 18 десяткових цифр.

### 2.5.1 Приклад калібрування витратоміра змінного перепаду тиску

У таблиці 2.1 наведено 12 пар значень даних, отриманих при калібруванні витратоміра змінного перепаду тиску.

Спочатку необхідно перевірити за методом найменших квадратів відповідність апроксимації функціональної залежності між  $y$  і  $x$ . Це необхідно для того, щоб спочатку показати, що випадковою похибкою в  $x$  можна знехтувати. У цьому випадку за методами, описаними в ДСТУ ISO 5168, обчислюють приблизні значення

$$e_r(y) = 0,0013 \text{ і } e_r(x) = 0,005,$$

тому що  $e_r(y)/e_r(x) = 0,26$ .

Таблиця 2.1 – Дані калібрування витратоміра змінного перепаду тиску

$Re \cdot 10^{-6}$	Коефіцієнт витрати
0,220	0,97046
0,308	0,97031
0,355	0,96945
0,450	0,96989
0,562	0,96927
0,657	0,96841
0,768	0,97042
0,888	0,96954
0,998	0,96911
1,148	0,97131
1,249	0,97174
1,385	0,97407

Отриману калібрувальну характеристику зображено на рисунку 2.1, де  $y$  – коефіцієнт витрати,  $x$  – число Рейнольдса, поділене на  $10^6$ .

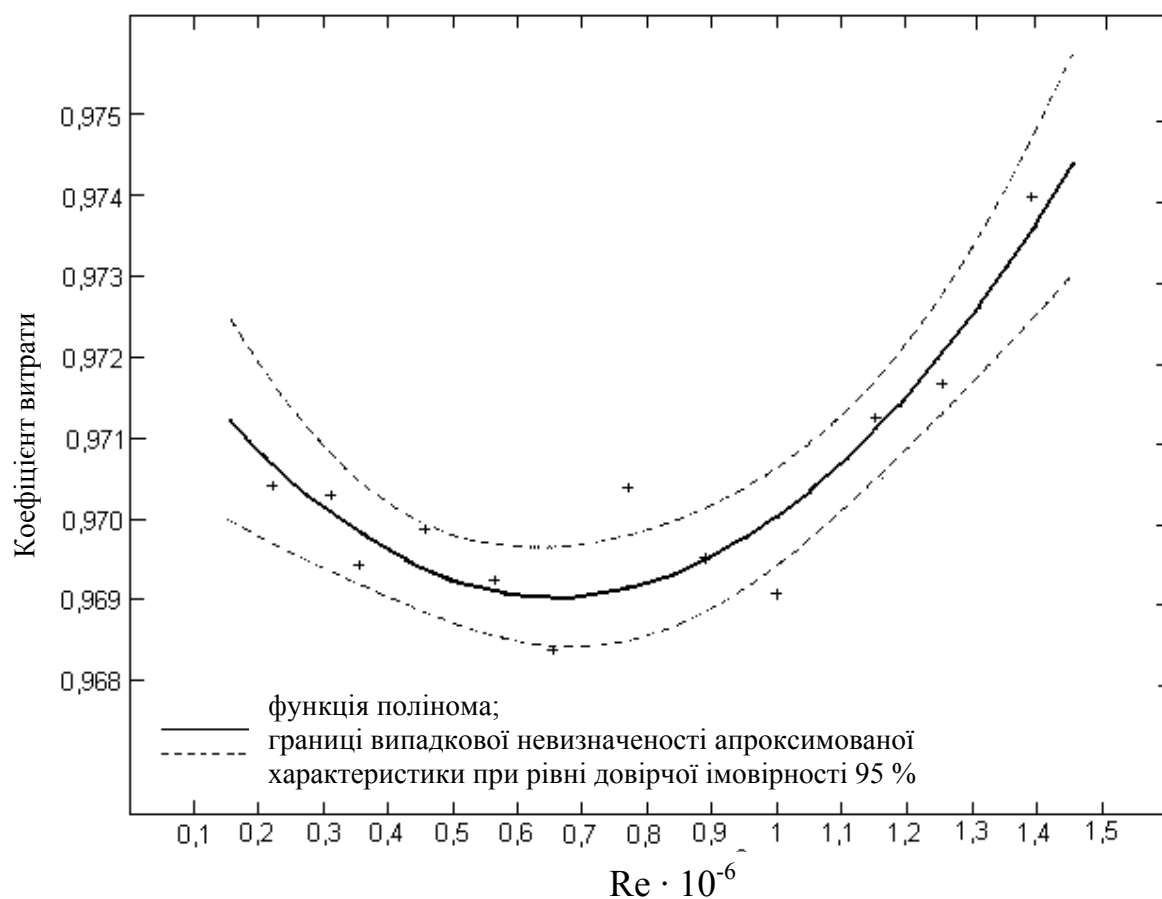


Рисунок 2.1 – Апроксимація калібрувальних даних поліномом другого степеня

З рисунка 2.1 видно, що будь-яке значення нахилу будь-якої апроксимованої характеристики не буде перевищувати 0,015, що є меншим за одну п'яту від  $e_r(y)/e_r(x)$ , і, таким чином, методи найменших квадратів можна застосовувати.



Кожний метод, описаний у підрозділах 2.3 і 2.4, можна застосовувати для апроксимації даних, оскільки дадуть ідентичні результати, крім похибки округлення. Застосування комп'ютерної програми для апроксимації даних, наведених у таблиці 2.1, ортогональними поліномами максимального степеня 5 дає такий висновок:

DEGREE	RESIDUAL STANDARD DEVIATION	PERCENTAGE SIGNFICANCE
0	.150309-02	100.00
1	.126028-02	96.11
2	.643462-03	99.96
3	.641446-03	66.60
4	.673798-03	36.77
5	.727772-03	1.14

SUGGESTED DEDREE - 2  
 ENTER DEGREE (12), OR - 1 TO EXIT  
 >

Деякі числа комп'ютер виводить у «науковій примітці», наприклад перший середньоквадратичний відхил надруковано як «.150309-02», що еквівалентно  $0,150309 \cdot 10^{-2}$ , або 0,00150309.

Замість перевірки на дійсність кожного нового коефіцієнта у зв'язку з тим, що показник степеня апроксимації є збільшеним і значно відрізняється від нуля за рівнем довірчої ймовірності 95 %, як описано в підрозділі 2.1.3, ця програма друкує значення рівня у відсотках, при якому коефіцієнт відрізняється від нуля.

У цьому прикладі уточнення, отримане між степенями 1 і 2, є дуже істотним (99,96 %), тоді як при більш високих степенях немає ніякого істотного уточнення. Таким чином, запропонований степінь 2 є відповідним. Уведення степеня 2 дає таку докладну апроксимацію:

> 2  
 POLYNOMIAL COEFFICIENTS, LISTED IN INCREASING POWERS OF X-  
 .97273964+000    -.11222161-001    .85781873-002  
 COEFFICIENTS FOR SQUARE OF RANDOM UNCERTAINTY-  
 .38979504-005    -.21527711-004    .45708054-004    -.40537128-004  
 .12833299-004

DATA		Значення за програмою		
X	Y	POLYNOMIAL Y	RESIDUAL Y - Y(POL)	RANDOM UNCERTAINTY
.22000	.97046	.97069	-.22595-03	.9862-03
.30800	.97031	.97010	.21303-03	.7311-03
.35500	.96945	.96984	-.38684-03	.6373-03

DATA		POLYNOMIAL	RESIDUAL	RANDOM
X	Y	Y	Y - Y(POL)	UNCERTAINTY
.45000	.96989	.96943	.46325-03	.5465-03
.56200	.96927	.96914	.12785-03	.5663-03
65700	.96841	.96907	-.65944-03	.6157-03
.76800	.97042	.96918	.12394-02	.6529-03
.88800	.96954	.96954	.13637-05	.6471-03
.99800	.96911	.97008	-.97383-03	.6126-03
1.1480	.97131	.97116	.14818-03	.6180-03
1.2490	.97174	.97211	-.36514-03	.7493-03
1.3850	.97407	.97365	.41816-03	.1134-02

ENTER DEGREE (12), OR -1 TO EXIT  
>-1  
END OF EXECUTION  
>

У роздруківці коефіцієнти полінома внесено в послідовності значень степенів. Таким чином, вираз для характеристики буде мати вигляд

$$\hat{y} = 0,97274 - 0,01122x + 0,008578x^2 .$$

П'ять коефіцієнтів для квадрата випадкової невизначеності, наведені в п'ятому й шостому рядках, визначають поліном четвертого степеня, що подає квадрат випадкової невизначеності  $e_r(\hat{y})$  як функцію від  $x$ . Це можна побачити на рисунку 2.1 і в роздруківці, у якій випадкова невизначеність змінюється між 0,00055 і 0,00065 у великому діапазоні, набуваючи значення 0,00113 у крайніх точках. Якщо діапазон даних калібрування ширший за необхідний діапазон калібрування, то збільшення випадкової невизначеності в крайніх точках не буде істотним. Це можна побачити, наприклад, з роздруківки, де видно, що випадкова невизначеність становить приблизно 0,00075 у крайніх точках діапазону значень  $x$  від 0,30 до 1,25.

### 2.5.2 Приклад калібрування турбінного ЗВТ витрати

У прикладі, наведеному в підрозділі 2.5.1, вибір кращого показника степеня був прямим, тому що значення коефіцієнтів різко змінилися від 99,96 % до набагато меншого за 95 %. Однак зазвичай ситуація є менш чіткою. У таблиці 2.2 наведено дані калібрування турбінного ЗВТ витрати. Коефіцієнт ЗВТ витрати  $y$  – це кількість імпульсів, що припадає на кубічний метр.

Таблиця 2.2 – Дані калібрування турбінного ЗВТ витрати

Частота $x$ , Гц	Коефіцієнт ЗВТ витрати $y$ , $\text{м}^{-3}$
28,24	573,76
32,12	574,71
35,58	575,14
40,16	574,84
43,48	575,74
48,82	576,20
52,06	576,50
54,36	976,44
54,86	575,61
56,48	576,40
58,18	575,54
58,38	576,67
60,92	575,94
64,72	575,41
67,74	575,01
71,72	574,51
76,52	574,88
82,64	574,42
83,06	574,05
88,40	574,88
91,94	573,69
96,90	573,25
99,58	573,07

При застосуванні комп'ютерної програми ортогональних поліномів для оброблення цих даних попередній процес апроксимації дає такий результат:

DEGREE	RESIDUAL STANDARD DEVIATION	PERCENTAGE SIGNIFICANCE
0	1.05171	100.00
1	.929832	98.58
2	.532487	100.00
3	.448948	99.30
4	.455227	50.25
5	.416441	95.13
6	.428974	11.37

SUGGESTED DEGREE- 5

Показник степеня 5 є придатним тільки за умови, що його запропоновано за рівнем довірчої ймовірності 95 %. Якщо дані відрізняються неістотно, то значення у відсотках, можливо, було менше 95 % від п'ятого степеня, і можна запропонувати третій степінь. У цій ситуації досить важко вибрати оптимальний степінь. Поліном п'ятого степеня краще відповідає даним, але не завжди поліном високого степеня може забезпечити краще наближення до істинної основної функціональної залежності між  $y$  і  $x$ .

Нарешті, вибір степеня має велике значення. Легше приймати рішення, якщо кожену характеристику зобразити разом з її довірчими границями й точками даних. На рисунках 2.2 і 2.3 показано ефект апроксимації даних з характеристикою третього й п'ятого степенів апроксимації відповідно.

З досвіду відомо, що коефіцієнт турбінного ЗВТ витрати має тенденцію до різкого зменшення нижче за деяку витрату, вище за діапазоном є тенденція до зрівняння. Характеристика для полінома третього степеня відповідає цій структурі краще, і це є більш простим, так що це – кращий вибір.

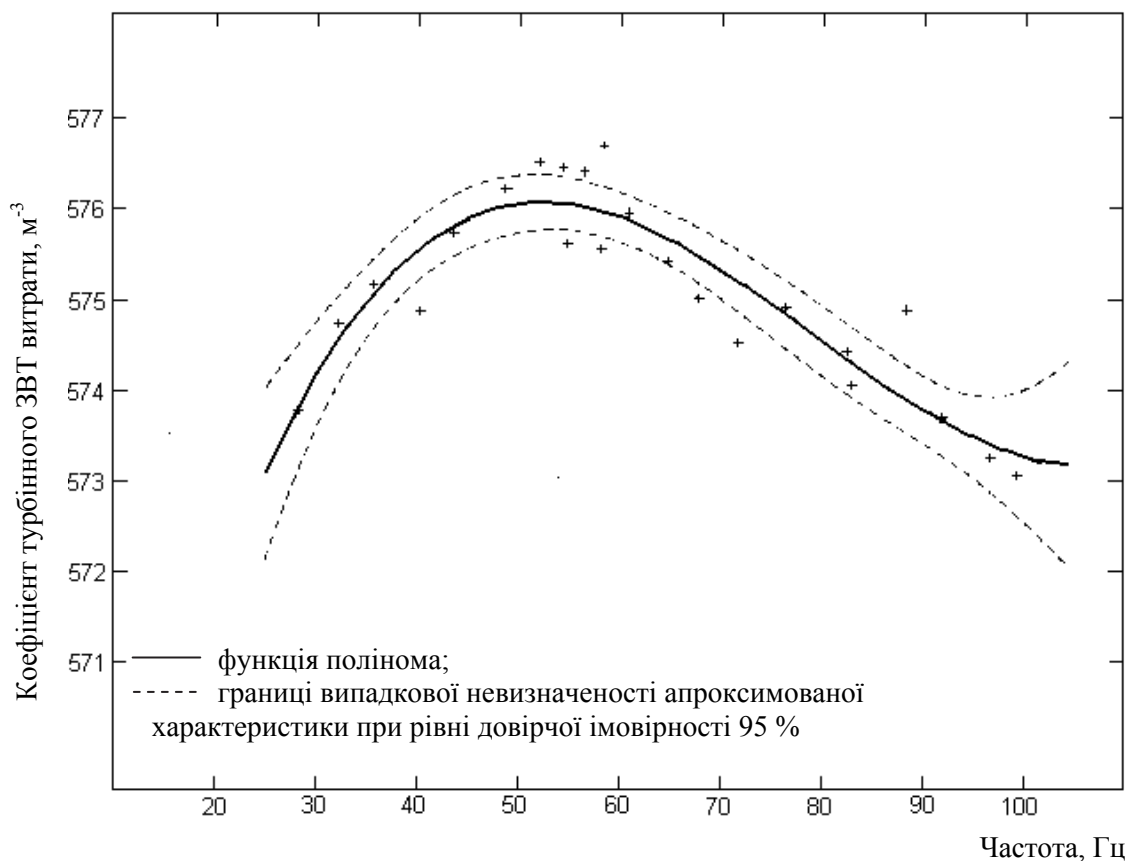


Рисунок 2.2 – Апроксимація калібрувальних даних поліномом третього степеня

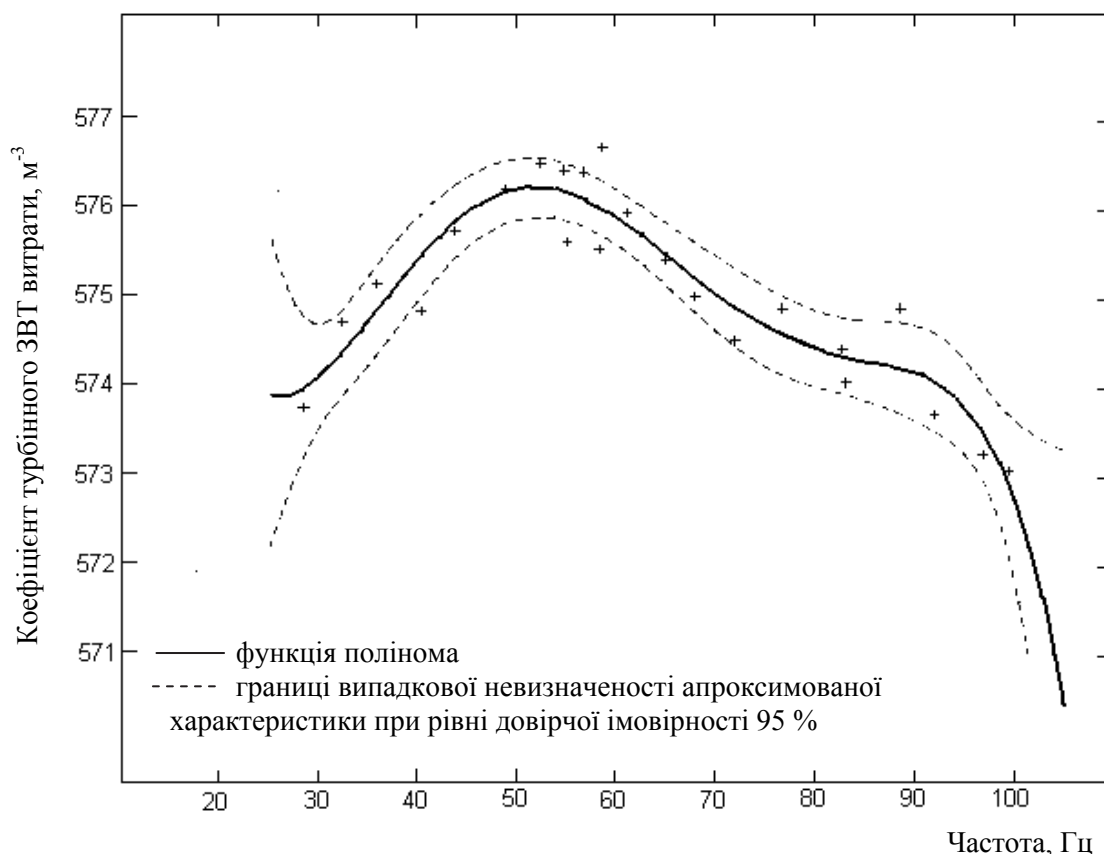


Рисунок 2.3 – Апроксимація калібрувальних даних поліномом п'ятого степеня

### 2.5.3 Приклад калібрування ЗВТ витрати для відкритого каналу

Дані, отримані при калібруванні ЗВТ витрати, який застосовується для вимірювання витрати у відкритому каналі, наведено в таблиці 2.3. Ці дані дають змогу оцінити значення величини отриманої відповідної витрати.

Таблиця 2.3 – Дані калібрування ЗВТ витрати для відкритих каналів

Рівень рідини, м	Витрата, м <sup>3</sup> /с
4,92	1390
4,95	1450
5,05	1500
5,15	1600
5,21	1650
5,30	1750
5,47	1820
5,50	1890
5,58	2000
5,61	2010

Кінець таблиці 2.3

Рівень рідини, м	Витрата, м <sup>3</sup> /с
5,73	2100
5,81	2160
5,90	2 270
6,50	2950
6,70	3300
6,90	3410
7,10	3800
7,20	3810
7,30	4800
7,50	4500
7,60	5100
7,70	5300
7,80	5220
7,90	5400
7,90	6100
8,00	6500
8,10	6100
8,40	6900
8,60	7350
9,00	8900
9,50	10100
9,60	12200
10,10	14000
10,50	14600
11,40	22500
11,90	28700
12,10	31500
12,60	36000
13,20	45000
13,50	52000
13,50	51000
13,80	56000

Якщо дані з таблиці 2.3 апроксимовано з максимальним степенем 5, то комп'ютерна програма дає такі вихідні дані:

DEGREE	RESIDUAL STANDARD DEVIATION	PERCENTAGE SIGNIFICANCE
0	15107.8	100.00
1	5927.44	100.00
2	1539.71	100.00
3	534.002	100.00
4	503.890	98.04
5	499.663	79.50

SUGGESTED DEGREE- 4  
ENTER DEGREE (12), OR -1 TO EXIT  
>

Уводимо степінь 4, щоб отримати відповідні деталі апроксимації. Це дає такі вихідні данні:

>4

POLINOMIAL COEFFICIENTS, LISTED IN INCREASING POWERS OF X-

```
.48004925+004  -.37421273+004  .10730031+004      -.12228391+003
.60793445+001
COEFICIENTS FOR SQUARE OF RANDOM UNCERTAINTY-
.89518922+009  -.86129348+009  .35689887+009      -.83190923+008
.11933195+008  -.10790425+007  .60091427+005      -.18852659+004
.25524470+002
```

Вихідні дані

DATA		POLYNOMIAL	RESIDUAL	RANDOM UNC
X	Y	Y	Y-Y(POL)	OF Y(POL)
4,9200	1390,0	1361,5	28,502	481,8
4,9500	1450,0	1386,6	63,402	459,1
5,0500	1500,0	1472,2	27,774	392,1
5,1500	1600,0	1560,9	39,132	338,6
5,2100	1650,0	1615,5	34,496	313,1
5,3000	1750,0	1699,5	50,491	284,2
5,4700	1820,0	1865,0	-44,990	256,9
5,5000	1890,0	1895,1	-5,1311	255,1
5,5800	2000,0	1976,9	23,091	253,8
5,6100	2010,0	2008,0	1,8932	254,3
5,7300	2100,0	2135,9	-35,856	259,8
5,8100	2160,0	2223,7	-63,710	265,2
5,9000	2270,0	2325,2	-55,194	271,6
6,1000	2500,0	2561,2	-61,201	283,2

DATA		POLYNOMIAL	RESIDUAL	RANDOM UNC
X	Y	Y	Y-Y(POL)	OF Y(POL)
6,2500	2750,0	2748,3	1,7459	287,6
6,5000	2950,0	3080,8	-130,84	286,2
6,7000	3300,0	3367,4	-67,434	278,5
6,9000	3410,0	3674,3	-264,25	267,5
7,1000	3800,0	4003,4	-203,35	255,8
7,2000	3810,0	4177,0	-366,97	250,6
7,3000	4800,0	4357,0	442,95	246,3
7,5000	4500,0	4737,9	-237,86	241,3
7,6000	5100,0	4939,3	160,70	241,0
7,7000	5300,0	5148,6	151,43	242,3
7,8000	5220,0	5366,1	-146,06	245,1
7,9000	5400,0	5592,2	-192,17	249,4
7,9000	6100,0	5592,2	507,83	249,4
8,0000	6500,0	5827,3	672,69	254,8
8,1000	6100,0	6071,9	28,104	261,2
8,4000	6900,0	6866,9	33,126	284,3
9,5000	10100,0	10762,0	-662,29	351,0
9,6000	12200,0	11210,0	990,24	353,8
10,100	14000,0	13735,0	265,28	363,9
10,500	14600,0	16143,0	-1542,6	375,4
11,400	22500,0	23096,0	-596,44	435,5
11,900	28700,0	28061,0	639,21	468,2
12,100	31500,0	30302,0	1198,1	473,1
12,600	36000,0	36614,0	-614,14	452,3
13,200	45000,0	45682,0	-681,72	410,1
13,500	52000,0	50898,0	1101,9	483,3
13,500	51000,0	50898,0	101,88	483,3
13,800	56000,0	56613,0	-612,90	694,9

ENTER DEGREE (12), OR -1 TO EXIT

> -1

END OF EXECUTION

Кількість нулів не відображає точність даних випробування.

За отриманими результатами вираз для калібрувальної характеристики має вигляд

$$\hat{y} = 4800 - 3\,742x + 1073,0x^2 - 122,28x^3 + 6,079x^4.$$



Відповідну калібрувальну характеристику разом з її границями випадкової невизначеності за рівнем довірчої імовірності 95 % показано на рисунку 2.4.

За правилами будування графіків необхідно, щоб залежні змінні знаходилися на вертикальній осі, але в гідрології їх прийнято будувати так, як показано на рисунку 2.4.

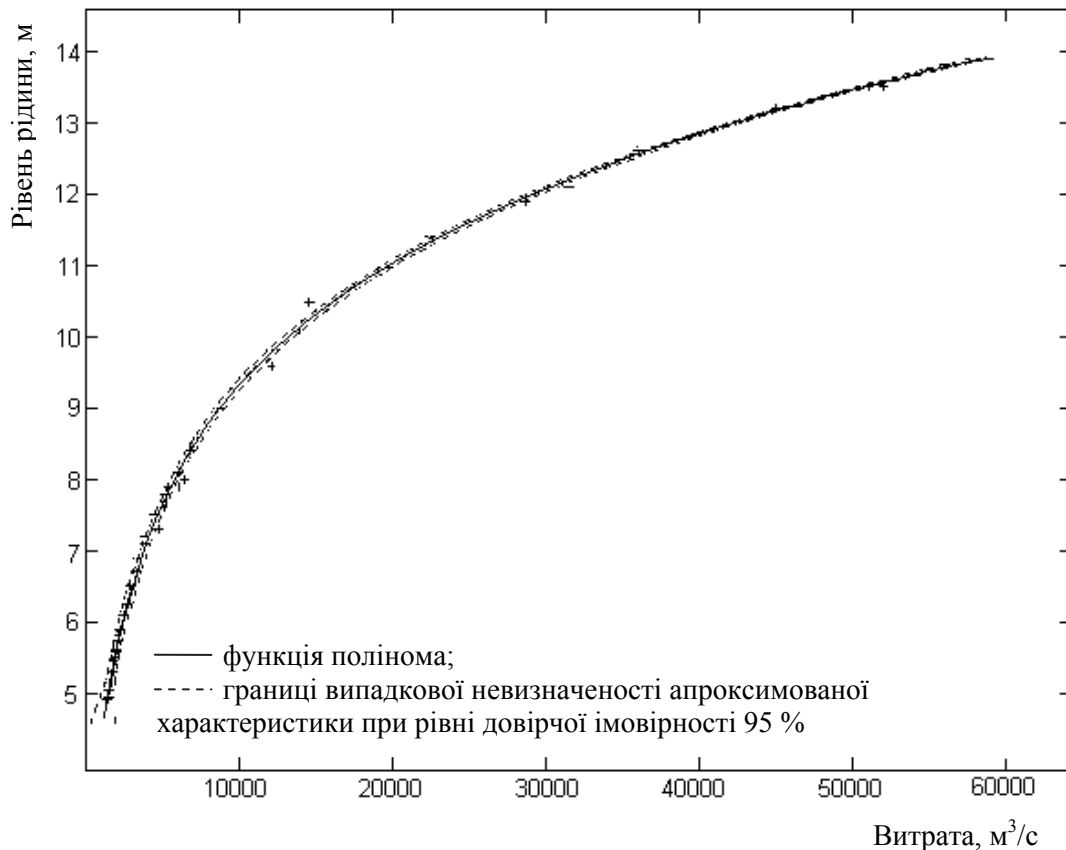


Рисунок 2.4 – Витрата, апроксимована поліномом четвертого степеня

## 2.6 Метод скінченних різниць

Якщо значення  $x$  є рівномірно розподіленими, то за відсутності комп'ютера можна застосувати таблицю скінченних різниць для швидкого визначення показника степеня апроксимації при поданні даних. Коефіцієнти полінома, подані даними, можна також обчислити, хоча це не буде поліномом найменших квадратів. Обчислення невизначеності із застосуванням методу скінченних різниць у цьому посібнику не наводиться.

Розглянемо приклад будування таблиці скінченних різниць.

Першу  $\Delta^{(1)}$ , другу  $\Delta^{(2)}$  і третю різниці  $\Delta^{(3)}$  для ряду  $n$  значень  $(x_i, y_i)$ , обчислюють так:

$$\Delta^{(1)} = y_{i+1} - y_i \quad \text{для } i = 1, \dots, n - 1;$$

$$\Delta^{(2)} = \Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)} \quad \text{для } i = 1, \dots, n-2;$$

$$\Delta^{(3)} = \Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)} \quad \text{для } i = 1, \dots, n-3.$$

Отримані значення наведено в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4 – Значення скінченних різниць

$x$	$y$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
0,06	3622	40		
0,07	3662	25	-15	29
0,08	3687	39	14	-28
0,09	3726	25	-14	4
0,10	3751	15	-10	20
0,11	3766	25	10	-25
0,12	3791	10	-15	18
0,13	3801	13	3	-19
0,14	3814	-3	-16	23
0,15	3811	4	7	-16
0,16	3815	-5	-9	8
0,17	3810	-6	-1	-4
0,18	3804	-11	-5	4
0,19	3793	-12	-1	-10
0,20	3781	-23	-11	7
0,21	3758	-27	-4	6
0,22	3731	-25	2	
0,23	3706			
$\bar{x} =$ = 0,145	$\bar{y} =$ = 3757,17	$\bar{\Delta}^{(1)} =$ = 4,941 2	$\bar{\Delta}^{(2)} =$ = -4,0625	$\bar{\Delta}^{(3)} =$ = 1,133 3

Значення середнього арифметичного для кожного стовпця чисел ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{\Delta}^{(1)}$ ,  $\bar{\Delta}^{(2)}$ ,  $\bar{\Delta}^{(3)}$ ) наведено в кінці таблиці 2.4.

Стовпець  $\Delta^{(1)}$  відображає чіткий тренд від додатного значення до від'ємного.

У стовпці  $\Delta^{(2)}$ , хоч і є істотні відхилення, середнє будь-яких трьох або чотирьох послідовних значень ніколи не буде дуже відрізнятися від середнього значення  $-4,0625$ .

У стовпці  $\Delta^{(3)}$  відхилення є більшими, але збалансовані додатні й від'ємні числа помітно не впливають на тренд від нуля. У цьому випадку, оскільки треті різниці є відхиленнями від значень близьких до нуля, застосовується поліном другого степеня.

Коефіцієнти полінома другого степеня можна розрахувати за формулами

$$b_0 = \bar{y} + \frac{(n^2 - 1)\bar{\Delta}^{(2)}}{24} - \frac{\bar{\Delta}^{(1)}\bar{x}}{d_x} + \frac{\bar{\Delta}_2\bar{x}^2}{2d_x^2},$$

$$b_1 = \frac{\bar{\Delta}^{(1)}}{d_x} - \frac{\bar{\Delta}^{(2)}\bar{x}}{d_x^2},$$

$$b_2 = \frac{\bar{\Delta}^{(2)}}{2d_x^2},$$

де  $d_x$  – різниця між послідовними значеннями  $x$ .

Поліном набуває вигляду

$$\hat{y} = 3313,12 + 6384,74x - 20312,5x^2.$$

Для порівняння: поліном найменших квадратів для того ж самого набору даних має вигляд

$$\hat{y} = 3306,97 + 6484,63x - 20663,7x^2.$$

Для даних, друга різниця яких змінюється випадково біля нуля, можна застосувати лінійний вираз. Тоді коефіцієнти розрахуємо за формулами

$$b_0 = \bar{y} - \frac{\bar{\Delta}^{(1)}\bar{x}}{d_x},$$

$$b_1 = \frac{\bar{\Delta}^{(1)}}{d_x}.$$

Застосувати метод скінченних різниць найкраще, використовуючи дані з відносно малим випадковим розкидом.

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке калібрувальна характеристика ЗВТ витрати і яким є її вигляд?
2. Що таке середньоквадратичний відхил вибірки і як його визначають?
3. У яких нормативних документах регламентується процедура оцінювання невизначеності вимірювання при калібруванні ЗВТ витрати?
4. Дати пояснення невизначеності.
5. Яким способом можна здійснювати лінеаризацію даних?
6. Що таке апроксимація отриманих даних і якими методами її можна здійснювати?
7. Наведіть процедуру обчислення невизначеності.
8. Наведіть приклад оформлення результату обчислення невизначеності.
9. Що таке довірчий інтервал і як його позначають на графіках?
10. Що таке варіація і як її обчислюють?
11. У чому полягає особливість калібрування ЗВТ витрати для відкритого каналу?
12. Наведіть формулу й графік залежності витрати рідини від її рівня у каналі.
13. У чому полягає особливість калібрування ЗВТ витрати для закритого трубопроводу?
14. Наведіть формулу й графік залежності витрати рідини від числа Рейнольдса.
15. Наведіть складники, які враховують під час оцінювання невизначеності при калібруванні ЗВТ витрати для закритого трубопроводу.
16. Наведіть приклад нелінійної калібрувальної характеристики ЗВТ витрати.
17. Наведіть приклад застосування методу найменших квадратів для обчислення коефіцієнтів калібрувальної характеристики.
18. Як здійснюють апроксимацію нелінійної калібрувальної характеристики ЗВТ витрати?
19. Наведіть формулу, за якою обчислюють невизначеність коефіцієнта калібрування.
20. У якому випадку застосовують множинну лінійну регресію для апроксимації калібрувальної характеристики?
21. У якому випадку застосовують поліноміальну регресію для апроксимації калібрувальної характеристики?
22. Наведіть усереднену форму подання результатів регресійного аналізу.
23. Наведіть метод апроксимації калібрувальної характеристики ортогональними поліномами.
24. Наведіть приклад калібрування ЗВТ витрати, який має нелінійну калібрувальну характеристику.
25. Що таке метод скінченних різниць і в якому випадку його застосовують?

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Керівництво з вираження невизначеності (GUM:1993, First edition, 1993 ISO: Geneva 1995) [Текст] / перекл. М. В. Москаленко. – Харків : ХДНДІМ, 2002. – 114 с.
2. ЕА-4/02 М:2013 Вираз невизначеності вимірювання при калібруванні [Електронний ресурс]. – Електрон. дані. – Київ : НААУ, 2013. – 73 с. – Режим доступу : [http://naau.org.ua/wp-content/uploads/2015/06/EA-4\\_02.pdf](http://naau.org.ua/wp-content/uploads/2015/06/EA-4_02.pdf)
3. ДСТУ ISO 5168:2013. Вимірювання витрати плинного середовища. Методики оцінювання невизначеності (ISO 5168:2005, IDT). – Чинний від 2014-07-01. – Київ : Держспоживстандарт України, 2013. – 55 с.
4. ДСТУ ISO/TR 7066-1:2007. Оцінення невизначеності під час калібрування та застосування приладів вимірювання витрати. Частина 1. Лінійні калібрувальні характеристики (ISO/TR 7066-1:1997, IDT). – Чинний від 2009-01-01. – Київ : Держспоживстандарт України, 2008. – 28 с.
5. ДСТУ ISO/TR 7066-2:2007. Оцінення невизначеності під час калібрування та застосування приладів вимірювання витрати. Частина 2. Нелінійні калібрувальні характеристики (ISO 7066-2:1988, IDT). – Чинний від 2009-01-01. – Київ : Держспоживстандарт України, 2008. – 34 с.
6. Forsythe, G. E. Generation and use orthogonal polynomials for data fitting with a digital computer // J. Soc. Ind. Appl. Maths, 5 (2). – 1951. – P. 14–88.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
ТЕРМІНИ І ЇХ ОЗНАЧЕННЯ .....	5
ПОЗНАЧЕННЯ Й СИМВОЛИ.....	6
<b>1 ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ КАЛІБРУВАННІ ЗВТ ВИТРАТИ РЕЧОВИН, ЩО МАЮТЬ ЛІНІЙНІ КАЛІБРУВАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....</b>	<b>8</b>
1.1 Загальні питання.....	8
1.2 Випадкові невизначеності й границі систематичної похибки при однократних вимірюваннях.....	9
1.3 Лінійність калібрувальної характеристики.....	10
1.4 Лінеаризація даних.....	13
1.5 Апроксимація оптимальною прямою лінією.....	14
1.5.1 Основні положення.....	14
1.5.2 Застосування методу Берксона (похибку вносить одна змінна).....	14
1.6 Апроксимація оптимальною зваженою лінією.....	16
1.7 Визначення калібрувальної характеристики, коли $y$ не залежить від $x$ .....	17
1.8 Обчислення невизначеності.....	17
1.9 Границі систематичної похибки й оформлення результатів роботи.....	18
1.10 Екстрапольовані значення.....	19
1.11 Невизначеність при застосуванні калібрувальної характеристики для однократного вимірювання витрати.....	19
1.12 Обчислення варіації загальної функції.....	22
1.13 Приклад калібрування ЗВТ витрати для відкритого каналу.....	22
1.13.1 Застосовувані символи.....	22
1.13.2 Обчислення характеристики залежності витрати води від її рівня.....	23
1.14 Приклад обчислення невизначеності при калібруванні ЗВТ для закритого трубопроводу.....	28
1.14.1 Загальні відомості.....	28
1.14.2 Символи, що використовуються в прикладі.....	28
1.14.3 Обчислення коефіцієнта калібрування.....	29
1.14.4 Лінеаризація калібрувального графіка.....	30
1.14.5 Невизначеність в окремих точках калібрування.....	30
1.14.6 Оптимальна апроксимація калібрувальної характеристики.....	31
1.14.7 Невизначеність вимірювання витрати при застосуванні відкаліброваного звужувального пристрою.....	34
<b>2 ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ КАЛІБРУВАННІ ЗВТ ВИТРАТИ РЕЧОВИН, ЩО МАЮТЬ НЕЛІНІЙНІ КАЛІБРУВАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....</b>	<b>36</b>
2.1 Апроксимація калібрувальної характеристики ЗВТ витрати.....	36
2.1.1 Загальні положення.....	36
2.1.2 Методи обчислення.....	38

2.1.3 Вибір оптимального степеня апроксимації.....	38
2.2 Обчислення невизначеності.....	40
2.3 Методи регресії.....	41
2.3.1 Загальні положення.....	41
2.3.2 Множинна лінійна регресія.....	41
2.3.3 Поліноміальна (нелінійна) регресія.....	42
2.3.4 Обчислення коефіцієнтів і варіації.....	42
2.3.5 Усереднена форма подання результатів.....	45
2.3.6 Числові методи, які застосовуються в комп'ютерних бібліотеках...	45
2.4 Апроксимація калібрувальної характеристики ортогональними поліномами.....	45
2.5 Приклади калібрування ЗВТ витрати, що мають нелінійні калібрувальні характеристики.....	47
2.5.1 Приклад калібрування витратоміра змінного перепаду тиску.....	47
2.5.2 Приклад калібрування турбінного ЗВТ витрати.....	50
2.5.3 Приклад калібрування ЗВТ витрати для відкритого каналу.....	53
2.6 Метод скінченних різниць.....	57
ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ.....	60
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....	61

Навчальне видання

**Косач Наталія Ігорівна**

**ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ КАЛІБРУВАННІ  
ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ ВИТРАТИ**

Редактор О. Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2017

Підписано до друку 13.10.2017

Формат 60x84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 3,6. Обл.-вид. арк. 4. Наклад 100 пр.

Замовлення 291. Ціна вільна

---

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001