

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

М. П. Благодарний

**СПЕЦІАЛЬНІ ПИТАННЯ СУЧАСНОГО КЕРУВАННЯ
ТА ОПТИМІЗАЦІЇ**

Частина 1

**МЕТОДИ ОБҐРУНТУВАННЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ
В УМОВАХ ПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ**

Навчальний посібник для самостійної роботи студентів

Харків «ХАІ» 2019

УДК 681.51.015.23:519.85(076.5)
Б68

Рецензенти: д-р техн. наук Ю. В. Паржин,
канд. техн. наук, доц. О. В. Сєверінов

Благодарний, М. П.

Б68 Спеціальні питання сучасного керування та оптимізації [Текст] : навч. посіб. для самот. роботи студентів. У 3 ч. Ч. 1. Методи обґрунтування управлінських рішень в умовах повної інформації / М. П. Благодарний. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2019. – 176 с.

ISBN 978-966-662-696-0

Викладено загальні принципи керування системами, значення й місце математичних методів при обґрунтуванні рішень. Основну увагу приділено методам математичного програмування (лінійного, цілочислового, нелінійного, динамічного). Наведено геометричне трактування розглядуваних методів, численні приклади розв'язання задач математичного програмування.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» (спеціалізація «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси та виробництва»).

Іл. 51. Табл. 45. Бібліогр.: 23 назви

УДК 681.51.015.23:519.85(076.5)

© Благодарний М. П., 2019
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2019

ISBN 978-966-662-696-0

ПЕРЕДМОВА

На сучасному етапі суспільство розвивається в умовах науково-технічного прогресу, що охоплює не тільки науки й техніку, а й такі сфери, як промисловість, сільське господарство, військова справа та ін. Підвищення технічного рівня, ускладнення організаційної структури виробничих підрозділів потребує вдосконалення методів планування й керування.

Однією з необхідних умов підвищення ефективності керування є автоматизація процесів збору й оброблення інформації, широке використання засобів обчислювальної техніки, математичних моделей. Зі свого боку, це підвищує значення прикладної математики й кібернетики під час підготовки спеціалістів в області автоматизації.

Ця робота є першою частиною навчального посібника, призначеного для вивчення математичних методів планування й керування в умовах повної інформації, що набули поширення як в економічних, так і в прикладних задачах. У другий і третій частинах посібника буде розглянуто методи обґрунтування управлінських рішень в умовах невизначеності й протидії.

Викладення матеріалу починається з розгляду загальних принципів керування системами й з'ясування значення й місця математичних методів при обґрунтуванні й прийнятті рішень.

Особливу увагу приділено розгляду методів математичного програмування (планування), з допомогою яких вирішуються однокрокові й багатокрокові задачі оптимізації в умовах повної інформації. З метою полегшення засвоєння матеріалу й надання йому більшої наочності в посібнику широко використовується геометричне трактування розглянутих методів, для більшого їх розуміння наведено приклади розв'язання задач оптимізації.

1. МОДЕЛІ ОБҐРУНТУВАННЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ В ОРГАНІЗАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

1.1. Загальні положення

Під організаційними системами будемо розуміти такі системи, елементами яких є людина або колектив людей. Відповідно до організаційних систем можна віднести промислове підприємство, військову частину, навчальний заклад тощо. Організаційними системами є й складні людино-машинні системи, у яких функції керування розподіляються між людиною й електронно-обчислювальною машиною.

Поняття керування в організаційних системах пов'язане з поняттям операції. Операція – це впорядкована сукупність дій колективу зі взаємними відносинами, спрямованих на досягнення мети або вирішення поставленого завдання. До операцій належать, наприклад, дії військового підрозділу, спрямовані на виконання бойового завдання, робота промислового підприємства з метою виконання плану випуску продукції тощо.

Очевидно, для зменшення витрат в організаційній системі передбачається керування операцією, яку здійснюють з допомогою цієї системи. Оскільки кожна організаційна система може мати не одну, а кілька цілей і, отже, здійснювати кілька операцій, керування організаційною системою завжди є ширшим, ніж керування однією конкретною операцією.

Організаційну систему, яка здійснює операцію, можна подати у вигляді двох підсистем: керувальної і керованої. Керувальна підсистема (керівництво) є керувальним органом, а керована – об'єктом керування.

Як і будь-яка інша, організаційна система в кожен момент часу характеризується вектором станів, який позначимо через $\bar{X}(t)$. Поводженням організаційної системи назвемо змінення її стану, наслідком якого є певний результат. Результат характеризує мету, поставлену перед системою. Отже, поведження системи завжди пов'язане з досягненням поставленої мети. При змінненні стану системи змінюється й стан середовища.

Сукупність станів системи й середовища в один і той самий момент часу називають ситуацією. Так, розглядаючи ситуацію, що склалася під час ведення бою, слід мати на увазі як стан підрозділу, що веде бойові дії, так і стан противника. При цьому командир підрозділу намагається провести операцію так, щоб досягти бажаного результату (успіху) бою. Таким чином, проведення операції означає змінення ситуації в бажаному напрямку.

Результатом називають ситуацію, що склалася на момент завершення операції. Звідси випливає, що мета й завдання проведених системою операцій можна трактувати як бажані стани, яких система має набути внаслідок здійснення операції.

Для проведення операції керувальний орган повинен мати достатні ресурси: знаряддя й предмети праці; засоби виробництва, обладнання, озброєння; бойову техніку; матеріали; енергію; транспорт; грошові кошти й т. ін. До ресурсів слід віднести час, що відводиться на операцію, а також самих людей – учасників операції. Розподіляючи ресурси відповідним чином, керувальний орган може керувати операцією.

Стратегією керувального органу назвемо спосіб використання або розподілу ресурсів протягом усієї операції. Вибираючи ту чи іншу стратегію, керувальний орган формує послідовність команд (наказів, сигналів), унаслідок чого так чи інакше розподіляються ресурси під час здійснення операції. З цього випливає, що стратегія і керувальні дії(вплив) тісно пов'язані між собою. Кожній стратегії відповідає свій керувальний вплив, який потребує використання відповідних ресурсів. Тому і стратегію, і керувальний вплив на інтервалі (t_0, t) будемо позначати вектором $\bar{U}_{t_0}(t)$. Кількісно вектор $\bar{U}_{t_0}(t)$ характеризує ті ресурси, які використовуються під час вибору відповідної стратегії.

Очевидно, що виділені на проведення операції ресурси можна подати вектором \bar{U}^0 . Ресурси, що витрачаються під час операції $\bar{U}_{t_0}(t)$, відповідно до вибраної стратегії не повинні перевищувати виділених ресурсів. Це означає, що при здійсненні операції має виконуватися нерівність

$$\bar{U}_{t_0}(t) \leq \bar{U}^0. \quad (1.1)$$

Вплив з боку середовища також змінює стан організаційної системи. У деяких випадках цей вплив має активний характер протидії досягненню мети системою навіть шляхом знищення частини її ресурсів. Відповідно до взятих позначень назвемо вплив $\bar{\xi}_{t_0}(t)$ стратегією середовища. Для середовища також має місце обмеження

$$\bar{\xi}_{t_0}(t) \leq \bar{\xi}^0, \quad (1.2)$$

де $\bar{\xi}^0$ – ресурси середовища, що виділяються з метою перешкоджання проведенню операції.

Для ілюстрації наведених вище положень розглянемо таку операцію. В умовах радіопротидії противника необхідно організувати передання команд керування об'єктами керування. Для цього керувальний орган має n_1 комплектів короткохвильових радіостанцій, n_2 комплектів ультракороткохвильових радіостанцій і n_3 комплектів засобів

радіорелейного зв'язку. Противник має у своєму розпорядженні m_1 генераторів перешкод короткохвильового діапазону і m_2 генераторів перешкод ультракороткохвильового діапазону.

Таким чином, керувальному органу системи зв'язку виділено ресурси

$$\bar{U}^0 = (\bar{U}_1^0, \bar{U}_2^0, \bar{U}_3^0),$$

де $\bar{U}_1^0 = n_1$, $\bar{U}_2^0 = n_2$, $\bar{U}_3^0 = n_3$.

Для виконання поставленого завдання (передання команд керування) керувальний орган може скористатися або окремими засобами радіозв'язку, наприклад тільки короткохвильовими радіостанціями, або їх сукупністю. Кожен спосіб використання засобів радіозв'язку й становитиме стратегію керувального органу. Наприклад, як одну із можливих стратегій протягом сеансу зв'язку (t_0, t) можна використати стратегію

$$\bar{U}_{t_0}(t) = (\bar{U}_{1,t_0}(t), \bar{U}_{2,t_0}(t), \bar{U}_{3,t_0}(t)),$$

де $\bar{U}_{1,t_0}(t) = l_1 \leq n_1$, $\bar{U}_{2,t_0}(t) = l_2 \leq n_2$, $\bar{U}_{3,t_0}(t) = l_3 \leq n_3$, тобто використання l_1 короткохвильових, l_2 ультракороткохвильових радіостанцій, l_3 комплектів радіорелейного зв'язку.

Аналогічно, середовище (у цьому випадку противник) з можливих засобів

$$\bar{\xi}^0 = (\bar{\xi}_1^0, \bar{\xi}_2^0),$$

де $\bar{\xi}_1^0 = m_1$, $\bar{\xi}_2^0 = m_2$, може скористатися будь-яким поєднанням генераторів перешкод, щоб перешкодити переданню команд керування. Отже, поєднання

$$\bar{\xi}_{t_0}(t) = (\bar{\xi}_{1,t_0}(t), \bar{\xi}_{2,t_0}(t)),$$

де $\bar{\xi}_{1,t_0}(t) = p_1 \leq m_1$, $\bar{\xi}_{2,t_0}(t) = p_2 \leq m_2$, є стратегією середовища.

Оскільки організаційна система є динамічною системою, то її можна описати рівнянням стану

$$\bar{X}(t) = \tilde{F}[\bar{X}(t_0), \bar{U}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)], \quad (1.3)$$

де $\bar{U}_{t_0}(t)$ – стратегія (або керування) системи; $\bar{\xi}_{t_0}(t)$ – стратегія середовища.

Вище було зазначено, що бажаного результату операції можна досягти вибором тієї чи іншої стратегії та відповідного їй керування. З огляду на те, що при виборі стратегій існує свобода вибору, можна казати про кращу або гіршу стратегію.

Кількісно результат використання стратегії оцінюється функціоналом

$$J = \Phi[\bar{X}(t_0), \bar{X}(t), \bar{U}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)]. \quad (1.4)$$

Тут фігурують стратегії $\bar{U}_{t_0}(t)$ керувальних органів системи й $\bar{\xi}_{t_0}(t)$ середовища. Для розглянутого вище прикладу функціоналом J може бути ймовірність доведення команди до об'єкта керування.

Оскільки метою операції є досягнення кінцевого стану $\bar{X}(t)$ протягом інтервалу (t_0, t) , то можна вибрати таку стратегію, а отже, і відповідне керування, при якому мети операції буде досягнуто оптимальним чином (наприклад, забезпечено максимальну ймовірність доведення команд до об'єкта керування). Вибір стратегії здійснюється за умови

$$\begin{aligned} J_{opt} &= \text{extr}_{\bar{U}_{t_0}^*(t) \subset U} \Phi [\bar{X}(t), \bar{X}(t_0), \bar{U}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)] = \\ &= \Phi[\bar{X}(t), \bar{X}(t_0), \bar{U}_{t_0}^*(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)], \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\bar{U}_{t_0}^*(t) \leq \bar{U}^0.$$

Стратегію $\bar{U}_{t_0}^*(t)$, при якій функціонал Φ набуває екстремуму, і відповідне їй керування називають оптимальними.

Пошук екстремуму в (1.5) означає процес вироблення і прийняття рішення щодо вибору оптимальної стратегії. Право прийняття рішення при проведенні операції надається окремій людині або групі осіб, що керують проведенням операції.

Надалі під особою, яка приймає рішення (ОПР), будемо розуміти як окремого керівника, так і групу осіб.

Якщо оператор \tilde{F} і функціонал Φ мають формально-математичний опис (тобто мають вигляд аналітичних залежностей), то вирази (1.4) і (1.5) є математичними моделями операції. У цьому випадку оптимальну стратегію можна отримати шляхом розрахунків на комп'ютері. Однак слід підкреслити, що стратегія, визначена шляхом розрахунків, не є обов'язковою для ОПР при прийнятті рішення.

У конкретних умовах, виходячи з досвіду, знань, інтуїції, ОПР може вибрати стратегію, що відрізняється від $\bar{U}_{t_0}^*(t)$ і ϵ , на його думку, оптимальною.

За прийняте рішення ОПР є повністю відповідальною. Разом з тим планування операції, тобто визначення $\bar{U}_{t_0}^*(t)$ або декількох альтернативних стратегій $\bar{U}_{t_0}(t)$ математичними методами, може істотно допомогти ОПР в обґрунтуванні рішення.

Організаційна система певною мірою є самоврядною. Тому процес керування в організаційній системі, не виходячи з меж загальних закономірностей, має характерні особливості.

На рис.1.1 зображено схему циклу керування організаційною системою.

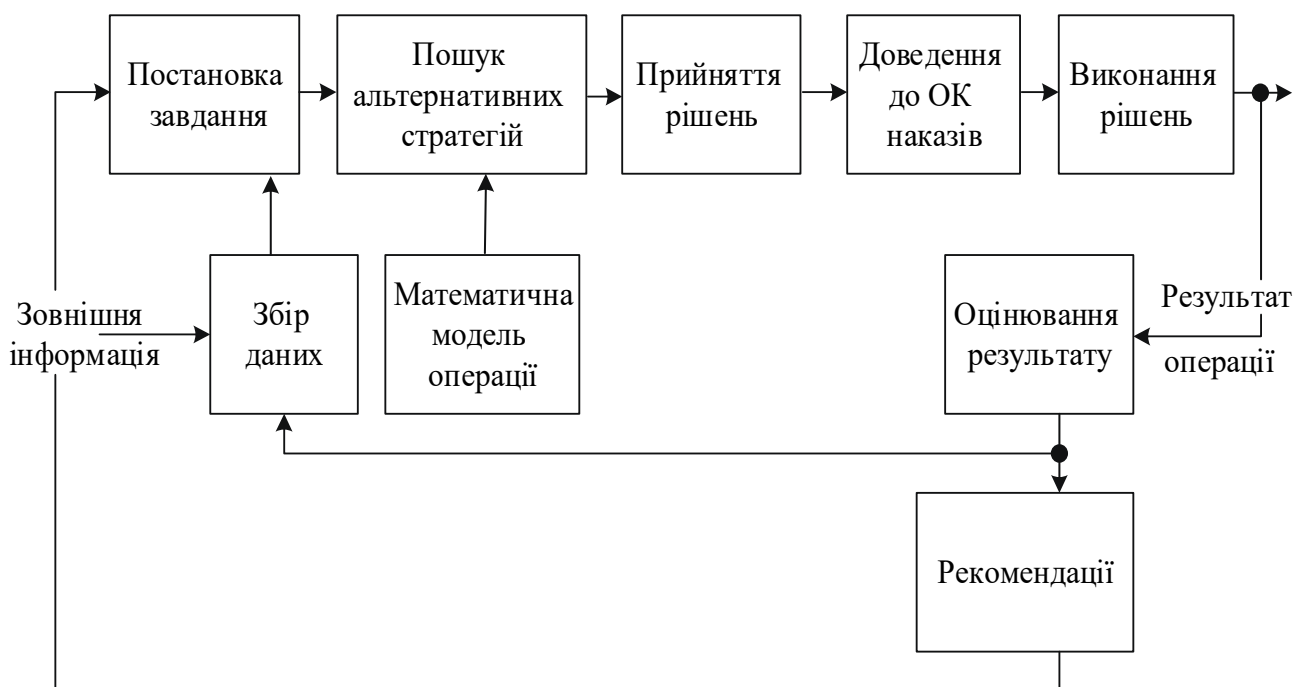


Рис. 1.1

З цього рисунка випливає, що процес керування організаційною системою складається з таких етапів:

- збір даних про стани об'єкта (або об'єктів) керування і середовища, а також отримання зовнішньої інформації;
- постановка завдання;
- аналіз завдання і пошук альтернативних стратегій;
- прийняття рішення;
- доведення наказів (команд) до об'єкта керування;
- виконання рішення об'єктом керування (проведення операції);

- аналіз і оцінювання результату проведеної операції;
- формування рекомендацій на майбутнє.

Постановка завдання на проведення операції здійснюється після збору даних про стани об'єкта керування й середовища відповідно до необхідності змінення ситуації, що склалася в потрібному напрямку.

Така необхідність виникає в разі відхилень від плану випуску продукції промисловим підприємством, від графіка проведення комплексу регламентних робіт на бойовій техніці й т. ін. У деяких випадках постановку завдання проводять організації, що мають більші повноваження, при цьому керувальний орган з'ясовує завдання.

Після постановки завдання проводиться його аналіз і пошук альтернативних стратегій. При цьому може бути використано математичну модель операції і розраховано можливі стратегії й плани проведення операції. На цьому етапі застосовуються математичні методи обґрунтування рішень.

Наступним етапом є прийняття рішення. Рішення – це завжди вибір однієї стратегії із багатьох альтернативних відповідно до вибраного критерію.

При прийнятті рішення ОПР урахує всі альтернативні стратегії, у тому числі й отримані математичними методами.

Відповідно до прийнятих рішень на проведення операції видаються накази (формується команди), які доводяться до об'єкта керування. Для передання команд (наказів) використовуються різні технічні засоби зв'язку.

Виконання об'єктом керування рішення, прийнятого керівництвом і доведеного до об'єкта керування у вигляді команд (наказів), є здійсненням операції. При цьому середовище може порушувати бажане виконання операції.

Результат операції виражається кінцевим результатом і підлягає оцінюванню, оскільки відображає новий стан об'єкта керування. Оцінка враховується під час постановки завдання на новий цикл керування.

За результатом проведення операції може бути сформовано рекомендації, які слід урахувати під час проведення наступних операцій. Ці рекомендації поповнюють знання, збагачують досвід керівництва. Тому під час керування організаційною системою відбувається самонавчання керувального органу.

Слід зазначити, що розв'язання є основним елементом всіх етапів керування і головним його чинником. І оцінювання результату, і рекомендації в кінцевому підсумку спрямовано на те, щоб знайти правильне рішення під час проведення операції. Ось чому у військових статутах указано, що основою керування частинами й підрозділами є рішення командира.

З огляду на виняткову важливість етапу прийняття рішення далі зосередимо увагу на математичних методах, що дають змогу обґрунтувати продумані необхідні рішення в різних ситуаціях і умовах, коли ОПР

допомагає потужна обчислювальна техніка й упроваджуються автоматизовані системи керування.

1.2. Математичні методи обґрунтування рішень

Прийняття рішення, як було зазначено вище, полягає у виборі однієї альтернативної стратегії $\bar{U}_{t_0}(t)$ з деякої множини допустимих стратегій, кожна з яких забезпечує бажаний результат операції. При виборі оптимальної стратегії ОПР керується, з одного боку, критерієм оптимальності, а з іншого – враховує різні фактори, що впливають на хід операції. Ці фактори можна поділити на три групи:

- ресурси, до яких належать знаряддя праці, озброєння й бойова техніка, обладнання, транспортні засоби, засоби зв'язку, час, що відводиться на операцію, і т. ін.;

- природні й технічні фактори, до яких можна віднести технічні характеристики й властивості обладнання, озброєння й бойової техніки, властивості матеріалів тощо;

- ідеологічні, морально-політичні й психологічні чинники.

При прийнятті рішень фактори першої і другої груп кількісно оцінюють. Це дає змогу використовувати різні математичні методи для обґрунтування прийнятого рішення. Математичні методи й моделі обґрунтування прийнятого рішення є предметом великого розділу прикладної математики – дослідження операцій.

Сьогодні існує багато означень дослідження операцій. Одне з них є таким [1]: «Дослідження операцій являє собою науковий метод, що дає в розпорядження військового командування або іншого виконавчого органу кількісні підстави для прийняття рішень дій військ або інших організацій, що знаходяться під його керуванням».

Це означення підкреслює, що математичні методи дослідження операцій не дають готового рішення, а лише допомагають під час його досягнення. Інакше не може й бути, оскільки фактори третьої групи кількісно не оцінюються, але істотно впливають на рішення, а отже, і на хід проведення операції.

При використанні математичних методів процес прийняття рішення можна поділити на такі етапи [9, 15]:

- будівництва математичної моделі операції;
- пошук оптимального рішення на комп'ютері;
- оцінювання рішення;
- реалізація рішення.

Процесу прийняття рішення, як уже зазначалося вище, передують формулювання мети операції (або з'ясування завдання, якщо мету встановлено вищою інстанцією).

При будіванні математичної моделі операції передбачається визначення математичного виразу критерію оптимальності й установлення обмежень. Модель будується з урахуванням факторів, що впливають на проведення операції, про які говорилося вище. Вимоги до моделі є суперечливими.

З одного боку, у моделі необхідно враховувати якомога більше факторів, що дало б змогу більш точно описати реальну операцію. З іншого боку, велика кількість таких факторів ускладнює модель, робить її незручною для практичного використання. Тому на практиці доводиться йти на компроміс між точністю і складністю моделі, ураховуючи лише найбільш істотні фактори.

Великий клас моделей дослідження операцій будується відповідно до рівнянь

$$J = \Phi \left[\bar{X}(t), \bar{X}(t_0), \bar{U}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t) \right],$$

$$\bar{U}_{t_0}(t) \leq \bar{U}^0,$$

$$\bar{\xi}_{t_0}(t) \leq \bar{\xi}^0.$$

Математичний вираз для критерію оптимальності J називають цільовою функцією, підкреслюючи цим, що прагнення набути екстремуму є математичним відображенням мети операції.

Обмеження являють собою множини допустимих стратегій керувального органу і стратегій середовища, які приводять до бажаного результату операції. Оскільки вибір керувальним органом стратегії і є рішенням, назвемо множини допустимих стратегій областю допустимих рішень (ОДР).

Другий етап полягає в пошуку оптимального рішення (оптимальної стратегії) на комп'ютері. Для цього визначається алгоритм пошуку оптимального рішення і складається програма розв'язання задачі на комп'ютері. На цьому етапі часто використовуються математичні методи оптимізації.

Унаслідок розв'язання задачі на комп'ютері визначається та стратегія з багатьох допустимих, яка перетворює на мінімум або максимум цільову функцію. Тут необхідно зауважити, що пошук максимуму цільової функції можна замінити пошуком мінімуму, якщо скористатися очевидним співвідношенням

$$\max_{\bar{U} \in U} \Phi(\bar{U}) = \min_{\bar{U} \in U} (-\Phi(\bar{U})), \quad (1.6)$$

яке для одновимірної величини показано на рис. 1.2.

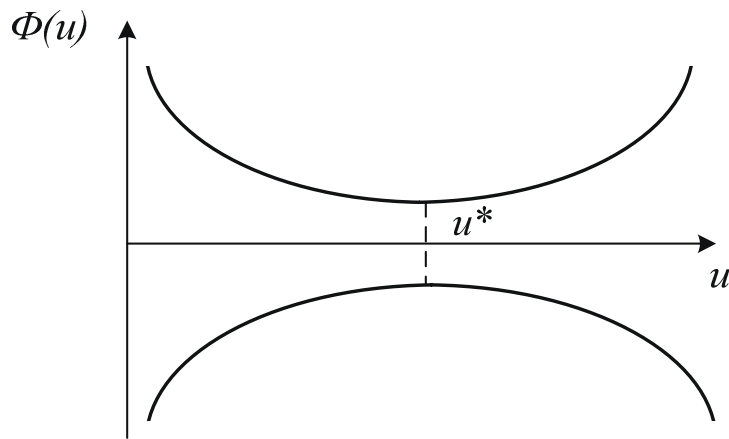


Рис. 1.2

З цього рисунка випливає, що максимум $\Phi(\bar{U})$ і мінімум $-\Phi(\bar{U})$ функції набуваються при одному й тому самому значенні \bar{U}^* .

Тому далі, не порушуючи цілісності, будемо орієнтуватися на завдання мінімізації цільової функції.

На третьому етапі оцінюється стратегія $\bar{U}_{t_0}^*(t)$, отримана внаслідок розрахунків. Тут ОПР урахує і додаткові фактори, які не ввійшли до математичної моделі, а саме фактори третьої групи. Урахувавши їх, вона може внести відповідні корективи у вибір стратегії. Важливим фактором тут є суб'єктивні якості ОПР, знання, досвід, почуття відповідальності, воля, рішучість і т. д.

Усебічне й глибоке оцінювання приводить до прийняття відповідного рішення. Останній етап полягає в реалізації рішення, тобто оформленні його у вигляді наказів, команд, розпоряджень і т. д. Після проведення операції ОПР оцінює правильність свого рішення за її результатами.

Сукупність стратегій середовища визначає ситуацію, у якій проводиться операція. Ситуація суттєво впливає на прийняття рішення. Очевидно, і математичні методи обґрунтування рішення в різних умовах ситуації будуть різними. Залежно від характеру ситуації розрізняють:

- математичні методи обґрунтування рішень у задачах керування з повною інформацією, коли стратегії середовища або є відомими, або несуттєво впливають на проведення операції, і їх можна не враховувати в моделі;

- математичні методи обґрунтування рішень в умовах невизначеності, коли стратегії середовища є випадковими впливами з відомими або невідомими законами розподілу ймовірностей;

- математичні методи обґрунтування рішень в умовах протидії (або стратегічної невизначеності), коли стратегії середовища мають активний характер протидії проведенню операції.

Перш ніж перейти до класифікації цих методів, розглянемо два основні види моделей операцій.

Однокрокова модель операції характеризується тим, що система в такій операції переходить з початкового в кінцевий стан стрибком, за один крок. Проміжні стани системи на інтервалі часу проведення операції (t_0, t) не враховуються. При цьому протягом усього часу керування системою стратегія $\bar{U}_{t_0}(t)$ керувального органу й стратегія середовища $\bar{\xi}_{t_0}(t)$ вважаються незмінними. До однокрокових операцій належить, наприклад, розглянута вище операція організації передання команд керування об'єктами керування. Унаслідок вирішення цього завдання можна визначити, які засоби і в якій кількості необхідно використовувати для передання. При цьому проміжні етапи створення комплексу засобів зв'язку (настроєння, входження у зв'язок тощо) у цій моделі не розглядаються.

Багатокрокова модель операцій відрізняється тим, що перехід системи з початкового в кінцевий стан здійснюється послідовно (за кроками), з урахуванням проміжних станів на кожному кроці. Інтервал часу (t_0, t) розбивається на послідовність підінтервалів (кроків) (t_0, t_1) , (t_1, t_2) і т. д., на кожному з яких використовується своя стратегія керування $\bar{U}_{t_0}(t_1)$, $\bar{U}_{t_1}(t_2)$ і т. д.

При цьому вибір стратегії на наступному етапі здійснюється при врахуванні стану, якого набула система в кінці попереднього кроку. Прикладом багатокрокової моделі операції є передання повідомлень по мережі зв'язку (рис.1.3).

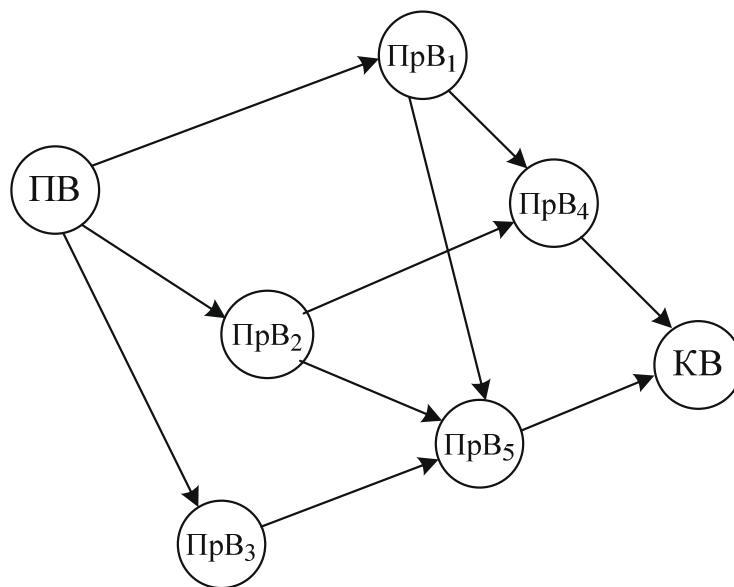


Рис.1.3

Повідомлення від початкового (ПВ) до кінцевого (КВ) вузла зв'язку передається через проміжні (ПрВ) вузли зв'язку. Тут кроком є проміжок часу або довжина каналу передання повідомлення між сусідніми вузлами (наприклад, між ПрВ₁ і ПрВ₄). На початку кожного кроку (на відповідному вузлі зв'язку) вибирається подальший маршрут передання. Звичайно, що вибір маршруту буде визначатися тим, якого стану набула система в кінці попереднього кроку (на якому вузлі зв'язку в кінці попереднього кроку виявиться передане повідомлення).

Розглянемо класифікацію математичних методів обґрунтування рішень. В однокрокових моделях рішення полягає у визначенні кінцевого стану системи. Оскільки система «стрибком» переходить у кінцевий стан, то без порушення цілісності можна записати: $\bar{X}(t_0) = 0, \bar{X}(t) = \bar{X}$. Незмінними на інтервалі (t_0, t) вважаються і стратегії середовища, тобто $\bar{\xi}_{t_0}(t) = \bar{\xi}$. Тоді цільову функцію можна подати в такому вигляді:

$$J = f(\bar{X}, \bar{\xi}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q), \quad (1.7)$$

де f – функція системи.

Оскільки змінення стану системи пов'язане з розподілом ресурсів, буде правильним таке обмеження:

$$\bar{X} \leq \bar{U}^0, \quad (1.8)$$

де \bar{U}^0 – виділені на проведення операції ресурси.

Тоді задача визначення стану \bar{X} системи формулюється так: необхідно знайти такий вектор \bar{X} , який задовольняв би обмеженню (1.8) і перетворював на мінімум цільову функцію (1.7). Математичний запис цієї задачі має вигляд

$$J_{min} = \min_{\bar{X} \subset X \leq \bar{U}^0} f(\bar{X}, \bar{\xi}). \quad (1.9)$$

У деяких випадках значення вектора \bar{X} мають бути невід'ємними. Це обмеження впливає з фізичної суті ресурсів, відведених на проведення операції (люди, засоби, машини, час і т. д.).

Сформульована задача (1.9) розв'язується методами математичного програмування. Математичне програмування (а точніше, планування) є розділом дослідження операцій, призначених для розв'язання однокрокових задач керування операціями. При цьому математичне

програмування дає алгоритмічну форму розв'язання задачі, тобто видає обчислювальну процедуру, що приводить до розв'язання задачі.

Для розв'язання конкретних задач розроблено різні методи математичного програмування. Розглянемо детерміновані задачі керування операціями.

Детерміновані задачі мають місце в тих випадках, коли стратегії середовища є відомими або їх можна врахувати. Тоді вираз для цільової функції набуде вигляду

$$J = f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.10)$$

Якщо функція f є лінійною функцією змінних x_1, x_2, \dots, x_n , обмеження (1.8) являють собою лінійні рівності або нерівності, а змінні x_1, x_2, \dots, x_n задовольняють умові невід'ємності (1.8), то задача (1.9) розв'язується методами лінійного програмування.

У всіх інших випадках (функція f є нелінійною, обмеження (1.9) – нелінійними рівностями або нерівностями) методи розв'язання задачі (1.10) визначають суть нелінійного програмування.

Серед методів нелінійного програмування часто виокремлюють методи цілочислового й дробово-лінійного програмування. Завдання цілочислового програмування відрізняються тим, що при лінійних обмеженнях і цільовій функції на змінні x_1, x_2, \dots, x_n накладаються вимоги невід'ємності й цілочисельності. Що стосується дробово-лінійного програмування, то при лінійних обмеженнях цільова функція являє собою дробово-лінійну функцію змінних.

У стохастичних задачах умови проведення операції (стратегії середовища) є невідомими. Якщо цільову функцію задано у вигляді (1.9), а обмеження у вигляді (1.8) і задано ймовірнісні характеристики стратегій середовища, то така задача розв'язується методами стохастичного програмування.

Важливим випадком стохастичної задачі є випадок, коли кількість стратегій середовища є звичайною, а величини x_i і ξ_j можуть набувати значень, що належать кінцевим множинам. Операції, що проводяться в цих умовах, називають статистичними іграми, а прийняття рішень здійснюється з допомогою методів теорії статистичних рішень [5].

В умовах протидії, коли стратегії середовища спрямовано на те, щоб перешкодити досягненню мети системою, для обґрунтування рішень застосовуються методи теорії стратегічних ігор, або просто теорії ігор.

Розглянемо класифікацію методів обґрунтування рішень при проведенні операцій, що описуються багатокроковими моделями. Якщо інтервал часу (t_0, t) проведення можна розбити (природним або штучним шляхом) на n підінтервалів (кроків), то стан системи на довільному k -му кроці можна подати у вигляді

$$\bar{x}_k = F(\bar{x}_{k-1}, \bar{U}_k, \bar{\xi}_k), \quad (1.11)$$

де $\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1}(t_k)$ – стан системи в кінці k -го кроку;

$\bar{x}_{k-1} = \bar{x}_{k-2}(t_k)$ – стан системи в кінці $(k-1)$ -го кроку;

$\bar{U}_k = \bar{x}_{k-1}(t_k)$ – керування (стратегія) на k -му кроці;

$\bar{\xi}_k = \bar{\xi}_{k-1}(t_k)$ – стратегія середовища на k -му кроці.

Керування на k -му кроці кількісно можна оцінити деяким вирахом

$$J_k = \Phi_k(\bar{x}_k, \bar{U}_k, \bar{\xi}_k). \quad (1.12)$$

Вираз (1.12) є цільовою функцією на k -му кроці. Цільову функцію при керуванні всією операцією в більшості випадків можна подати сумою J_k . Функцією може бути час передання повідомлення від початкового до кінцевого вузла зв'язку. Цей час дорівнює сумі інтервалів часу передання повідомлення між сусідніми вузлами зв'язку.

Таким чином, у загальному випадку можна записати

$$J = \sum_{k=1}^n \Phi_k(\bar{x}_k, \bar{U}_k, \bar{\xi}_k). \quad (1.13)$$

За стратегією \bar{U}_k на кожному кроці накладаються обмеження у вигляді рівностей або нерівностей.

Завдання вибору оптимального розв'язку формулюється так: знайти таке керування $\bar{U} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_n)$, яке переводить систему з початкового \bar{x}_0 у кінцевий стан \bar{x}_n , задовольняє обмеження і перетворює на мінімум цільову функцію, тобто

$$J_{min} = \min_{\bar{U}_k \in \bar{U}, \bar{U}_k \leq U_k} \sum_{k=1}^n \Phi_k(\bar{x}_k, \bar{U}_k, \bar{\xi}_k). \quad (1.14)$$

Якщо стратегія середовища є відомою, тобто задача є детермінованою, то її розв'язують методами динамічного програмування. У випадку, коли операція є комплексом робіт, наприклад з технічного обслуговування радіоелектронної апаратури, багатокрокове завдання доцільно вирішувати методами мережного планування.

В умовах невизначеності багатокрокове завдання розв'язується методами стохастичного динамічного програмування.

Математичні методи обґрунтування розв'язків для різних моделей операцій і різних умов проведення операції наведено в класифікаційній табл. 1.1.

Таблиця 1.1

| Модель | Повна інформація | Невизначеність | Протидія |
|---------------|---|--|-------------------------------|
| Однокрокова | Лінійне програмування, цілочислове програмування, нелінійне програмування | Стохастичне програмування, теорія статистичних розв'язків | Теорія ігор |
| Багатокрокова | Динамічне програмування, мережне планування | Стохастичне динамічне програмування | Теорія багатокрокових ігор |

Зазначимо, що одній ту саму задачу обґрунтування розв'язків можна розв'язати шляхом використання різних математичних методів. Так, наприклад, у деяких випадках багатокрокової моделі послідовність значень змінної на окремих кроках можна розглядати як одну багатовимірну змінну на одному кроці. Тоді багатокрокова модель перетвориться на однокрокову і замість методів динамічного програмування можна скористатися методами лінійного програмування. Вибір того чи іншого методу залежить як від самої задачі, так і від конкретних можливостей обчислювальних засобів.

Контрольні запитання

1. Наведіть означення організаційної системи.
2. Що називають операцією?
3. Наведіть означення поняття ресурсу.
4. Які фактори визначають ситуацію?
5. Наведіть означення станів системи й цільової функції.
6. Наведіть характеристику однокрокових моделей прийняття рішень.
7. Наведіть характеристику багатокрокових моделей прийняття рішень в умовах невизначеності.
8. Наведіть характеристику моделей прийняття рішень в умовах протидії.
9. Обґрунтуйте схему циклу керування організаційною системою.

2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Постановка задачі лінійного програмування

Лінійне програмування є найбільш розробленим і широко використовуваним на практиці розділом дослідження операцій. З допомогою методу лінійного програмування успішно розв'язуються задачі

планування виробничих процесів, розподілу засобів транспортних перевезень тощо.

Загальну математичну теорію лінійного програмування було розроблено 1949 року Дж. Данцігом. Подальший розвиток теорії лінійного програмування та її практичного використання пов'язано з іменами В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, Г. Куна, К.-Ф.Гаусса, О. С. Вентцель та інших учених.

Розглянемо приклад постановки задачі лінійного програмування. Для передання повідомлень в автоматизованій системі керування (АСК) використовується комплекс засобів зв'язку. У розпорядженні розробників АСК мається n типів засобів зв'язку (наприклад, коротко- та ультракороткохвильові радіостанції, засоби проводового й радіорелейного зв'язку тощо). Комплекс засобів зв'язку призначено для функціонування в різних умовах навколишнього середовища (навмисних перешкод, утворюваних противниками, і ненавмисних, утворюваних різними суб'єктивними й об'єктивними факторами). Позначимо через m кількість можливих варіантів стану навколишнього середовища.

Кожний засіб зв'язку має свою ефективність (обсяг корисної інформації, яка передається з допомогою одного комплексу певного засобу за деякий проміжок часу) у різних умовах ситуації (у деяких одиницях). Цей показник можна вимірювати кількістю повідомлень, кодових комбінацій, бітів інформації тощо. Показник ефективності задається в деяких умовних одиницях. На рис. 2.1 наведено показники ефективності одного комплексу різних засобів зв'язку, що функціонують в різних умовах навколишнього середовища.

| | 1 | 2 | ... | j | ... | n |
|-----|----------|----------|-----|----------|-----|----------|
| 1 | v_{11} | v_{12} | ... | v_{1j} | ... | v_{1n} |
| 2 | v_{21} | v_{22} | ... | v_{2j} | ... | v_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| l | v_{l1} | v_{l2} | ... | v_{lj} | ... | v_{ln} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| m | v_{m1} | v_{m2} | ... | v_{mj} | ... | v_{mn} |

Рис. 2.1

Відомо, що для виконання завдання керування в i -му варіанті ситуації, $i = \overline{1, m}$, комплект засобів має забезпечити передання повідомлень обсягом не менше V_i умовних одиниць. Витрати на експлуатацію одного

Необхідно знайти такі невід'ємні значення параметрів x_1, x_2, \dots, x_n , які задовольняють обмеження (2.2) і при яких цільова функція (2.3) є мінімальною. Обмеження – це система лінійних нерівностей, а цільова функція – лінійна функція змінних x_1, x_2, \dots, x_n . Отже, завдання організації комплексу засобів зв'язку належить до завдань лінійного програмування.

Для розв'язання задачі лінійного програмування її необхідно звести до канонічної форми (перейти від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей). Задача лінійного програмування формулюється таким чином: знайти такі невід'ємні значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , які задовольняють обмеження

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + a_{1n}x_n &= b_1; \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + a_{2n}x_n &= b_2; \\
 \dots & \\
 a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + a_{in}x_n &= b_i; \\
 \dots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_ix_i + \dots + C_nx_n.
 \tag{2.5}$$

При таких умовах задачу називають основною задачею лінійного програмування (ОЗЛП). При $n = m$ задача має єдиний розв'язок. У випадку, коли $m < n$, існує множина розв'язків і, отже, є можливість вибору найкращого (оптимального) розв'язку.

Будь-яку сукупність невід'ємних значень змінних x_1, x_2, \dots, x_n , яка задовольняє обмеження (2.4), назовемо допустимим, або опорним, розв'язком загальної задачі лінійного програмування (ЗЛП). Множина допустимих розв'язків являє собою підмножину множини невід'ємних значень x_1, x_2, \dots, x_n і утворює область допустимих рішень (ОДР).

Сукупність значень $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ змінних, що забезпечує мінімальне значення цільової функції $L(\bar{x})$, називають оптимальним розв'язком ЗЛП.

2.2. Графічний метод розв'язання загальної задачі лінійного програмування

Розглянемо випадок, коли кількість змінних x_i перевищує кількість рівнянь обмежень: $m - n = 2$. Для розв'язання задачі використовують графічний метод.

Візьмемо $x_4 = 0$, тоді $\beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 = 0$. Одна сторона півплощини $x_4 > 0$, друга $-x_4 < 0$. Заповнимо штрихуванням додатну півплощину. Аналогічно визначимо півплощини для $x_n = 0$.

Визначимо область допустимих розв'язків (ОДР), де змінні набувають додатних значень:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Знайдемо оптимальний розв'язок. Виразимо цільову функцію $L(\bar{x})$ через вільні змінні:

$$\begin{aligned} L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_3(\beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2) + \dots \\ \dots + C_n(\beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2) = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

де $\gamma_0 = C_3\beta_3 + \dots + C_n\beta_n$;

$$\gamma_1 = C_1 + C_3\alpha_{31} + \dots + C_n\alpha_{n1};$$

$$\gamma_2 = C_2 + C_3\alpha_{32} + \dots + C_n\alpha_{n2}.$$

Нехай

$$L(\bar{x}) = \Gamma_1 = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2,$$

або

$$\gamma_0 - \Gamma_1 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = 0,$$

– рівняння прямої в координатах x_1Ox_2 .

Пряма $L(\bar{x})$ перетинає координатні осі в точках $x'_1 = \frac{\Gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1}$ і $x'_2 = \frac{\Gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_2}$.
 $= \frac{\Gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1}$. Проведемо пряму $L(\bar{x}) = \Gamma_1$ (рис. 2.3).

Змінюємо значення цільової функції $L(\bar{x})$ на Γ_2 :

$$\gamma_0 - \Gamma_2 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = 0.$$

Від Γ_1 до Γ_2 переміщуємо пряму $L(\bar{x})$ паралельно самій собі. Для будування вихідної прямої із застосуванням графічного методу запишемо $L(\bar{x}) = \gamma_0$.

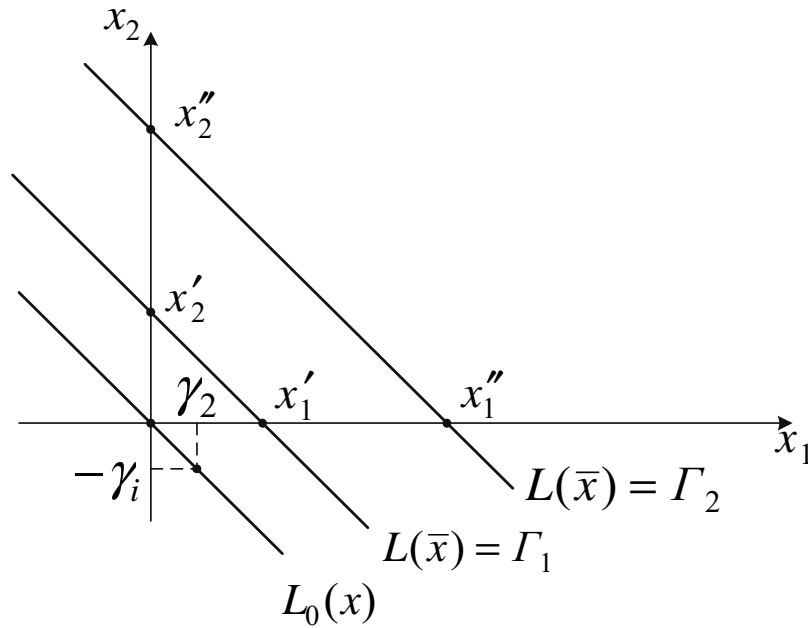


Рис. 2.3

Тоді рівняння основної прямої набуде вигляду

$$L_0(\bar{x}) = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$$

і буде проходити через початок координат $x_1 0 x_2 (0, 0)$. Друга точка, через яку буде проходити пряма $L_0(\bar{x})$, має координати $(\gamma_2, -\gamma_1)$. За координатами $(0, 0)$ і $(\gamma_2, -\gamma_1)$ будемо основну пряму. Переміщення прямої $L_0(\bar{x})$ в одному напрямку відповідає збільшенню її значення, а в протилежному напрямку – її зменшенню.

Суть розв'язання задачі лінійного програмування – знаходження мінімуму цільової функції $L(\bar{x})$. Для визначення напрямку переміщення $L(\bar{x})$ використаємо поняття антиградієнта.

Якщо $F(\bar{x})$ є диференційованою функцією, то її градієнтом називають вектор $\nabla F(\bar{x})$, проєкціями якого є часткові похідні, а напрямком збігається з напрямком найбільшого зростання функції, тобто

$$\nabla F(\bar{x}) = \left(\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_n} \right). \quad (2.9)$$

Вектор $-\nabla F(\bar{x})$ називають *антиградієнтом* функції $F(\bar{x})$, який має вигляд

$$-\nabla F(\bar{x}) = \left(-\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_1}, -\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_n} \right). \quad (2.10)$$

Величина вектора $-\nabla F(\bar{x})$ дорівнює градієнту, а напрямок, протилежний градієнту, указує напрямок найбільшого спадання функції: $-\nabla L_0(\bar{x}) = (-\gamma_1; -\gamma_2)$. Проекціями антиградієнта є координати $(-\gamma_1; -\gamma_2)$. Оскільки $\gamma_1 < 0$ і $\gamma_2 < 0$, антиградієнт $-\nabla L_0(\bar{x})$ є спрямованим у перший квадрант координат x_1, x_2 (рис. 2.4, а). Якщо γ_1 і γ_2 мають різні знаки, то антиградієнт $-\nabla L_0(\bar{x})$ є спрямованим у другий або четвертий квадрант координат x_1, x_2 (рис. 2.4, б).

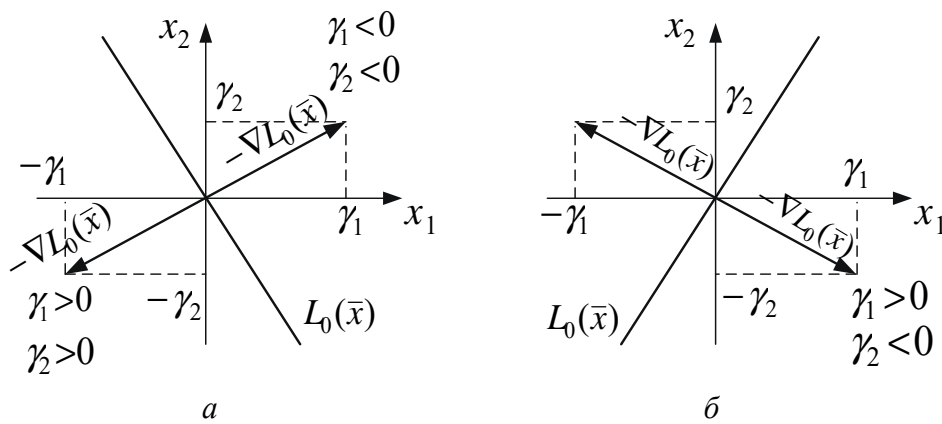


Рис. 2.4

Побудувавши багатокутник ОДР і основну пряму $L_0(\bar{x})$, переміщуємо її паралельно самій собі в напрямку зменшення значення цільової функції $L(\bar{x})$. Точка \bar{x}^* , що належить ОДР (рис. 2.5) і є найбільш віддаленою від початку координат у напрямку $-\nabla L_0(\bar{x})$, і буде оптимальним розв'язком.

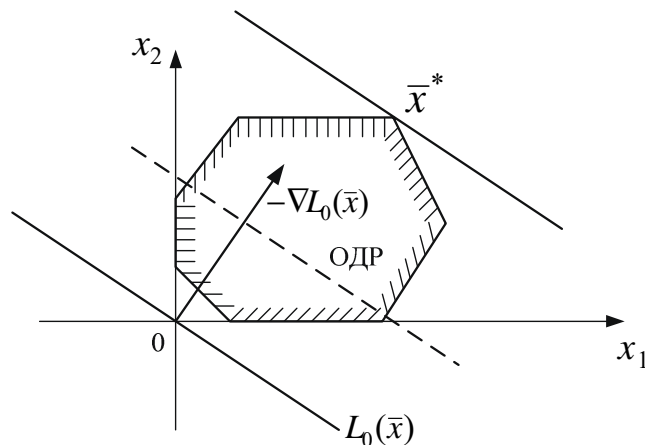


Рис. 2.5

Можливі розв'язки задачі лінійного програмування графічним методом:

1. Єдиний оптимальний розв'язок (найбільш типовий випадок), який можна отримати в одній із вершин багатокутника ОДР (див. рис. 2.5).

2. Нескінченна кількість оптимальних розв'язків (пряма $L_0(\bar{x})$ є паралельною до однієї зі сторін багатокутника ОДР, причому ця сторона є найбільш віддаленою від початку координат у напрямку $-\nabla L_0(\bar{x})$) (рис. 2.6).

3. Задача лінійного програмування не має оптимального розв'язку. У цьому випадку ОДР не обмежена знизу і цільова функція може набувати досить малих значень (рис. 2.7).

4. Задача лінійного програмування не має допустимих розв'язків (система рівнянь-обмежень є несумісною, і області допустимих розв'язків не існує) (рис. 2.8).

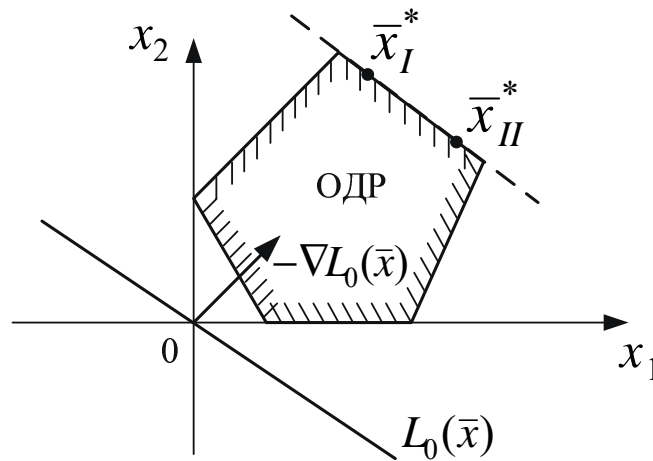


Рис. 2.6

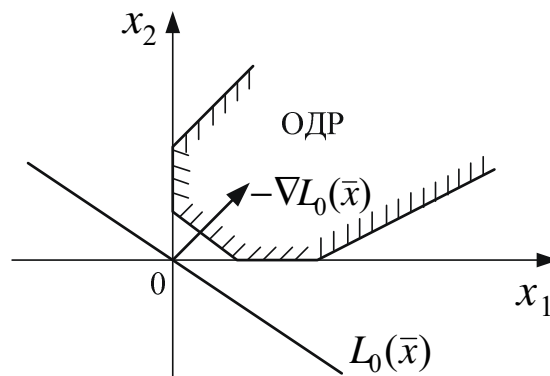


Рис. 2.7

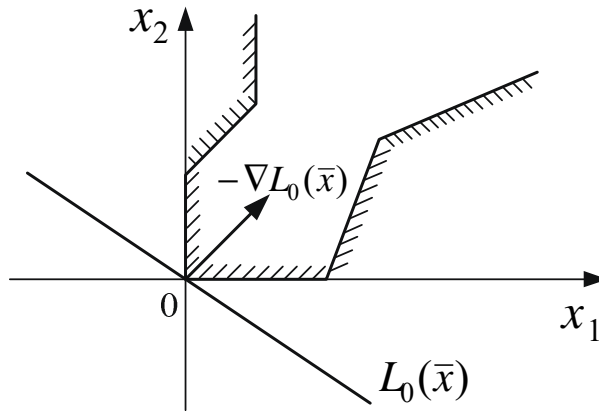


Рис. 2.8

Алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом:

- вибираємо $k = n - m = 2$ вільні змінні;
- виражаємо інші (базисні) змінні й цільову функцію через вільні змінні;
- будуємо багатокутник ОДР;
- будуємо пряму $L_0(\bar{x})$ (основну пряму цільової функції) і визначаємо вектор $-\nabla L_0(\bar{x})$;
- знаходимо точку (або множину точок ОДР, найбільш віддалених від початку координат) шляхом переміщення основної прямої $L_0(\bar{x})$ паралельно самій собі в напрямку $-\nabla L_0(\bar{x})$. Ця точка \bar{x}^* і буде оптимальним розв'язком (якщо такий існує) задачі лінійного програмування.

Висновки:

1. Оптимальний розв'язок задачі ЛП, якщо такий існує, знаходиться на межі багатокутника ОДР. При цьому задача ЛП може мати один оптимальний розв'язок або кілька.
2. Оптимальний розв'язок є єдиним у точці, де $(n - m)$ змінних перетворюються на нуль, тобто в одній із вершин багатокутника ОДР.
3. Для знаходження оптимального розв'язку необхідно перевірити на оптимальність лише ті точки, де $(n - m)$ змінних перетворюються на нуль, тобто вершини багатокутника ОДР.

2.3. Симплекс-метод

Метод поширюється на загальний випадок, коли $k = (n - m) > 2$. У цьому випадку в рівняннях-обмеженнях задають k вільних x_1, x_2, \dots, x_k і m базисних (які виражаються через вільні змінні) $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ змінних.

Зв'язки змінних виражають системою рівнянь

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \beta_{k+1} + \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \dots + \alpha_{k+1,k}x_k, \\ x_{k+2} &= \beta_{k+2} + \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \dots + \alpha_{k+2,k}x_k, \\ &\dots \\ x_{k+m} &= \beta_{k+m} + \alpha_{k+m,1}x_1 + \alpha_{k+m,2}x_2 + \dots + \alpha_{k+m,k}x_k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рівняння гіперплощин для $x_{k+1} = 0, x_{k+2} = 0, \dots, x_n = 0$ в $(n - m)$ -вимірному просторі будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} + \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \dots + \alpha_{k+1,k}x_k &= 0, \\ \beta_{k+2} + \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \dots + \alpha_{k+2,k}x_k &= 0, \\ &\dots \\ \beta_{k+m} + \alpha_{k+m,1}x_1 + \alpha_{k+m,2}x_2 + \dots + \alpha_{k+m,k}x_k &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким чином, гіперплощини $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ утворюють $(n - m)$ -вимірну систему координат. Перетин цих гіперплощин дає точку, у якій

$$x_{k+1} = \beta_{k+1}, x_{k+2} = \beta_{k+2}, \dots, x_{k+m} = \beta_{k+m}. \quad (2.13)$$

Якщо $\beta_{k+1} \geq 0, \beta_{k+2} \geq 0, \dots, \beta_{k+m} \geq 0$, то точка перетину гіперплощин є однією з вершин багатогранника ОДР (рис. 2.9).

Для знаходження однієї з вершин багатогранника ОДР необхідно прирівняти нулю вільні змінні. Тоді за умови $\beta_{k+1} \geq 0, \dots, \beta_{k+l} \geq 0, \dots, \beta_{k+m} \geq 0$

$$\bar{x} = (0, 0, \dots, 0, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_{k+m}) \quad (2.14)$$

буде допустимим розв'язком загальної задачі лінійного програмування.

Виразимо цільову функцію через вільні змінні:

$$L(\bar{x}) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k. \quad (2.15)$$

Знайдемо кілька допустимих розв'язків:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0) &\rightarrow L(\bar{x}_1) = \gamma_0^I, \\ \bar{x}_2(x_2 = x_3 = \dots = x_{k+1} = 0) &\rightarrow L(\bar{x}_2) = \gamma_0^{II}. \end{aligned}$$

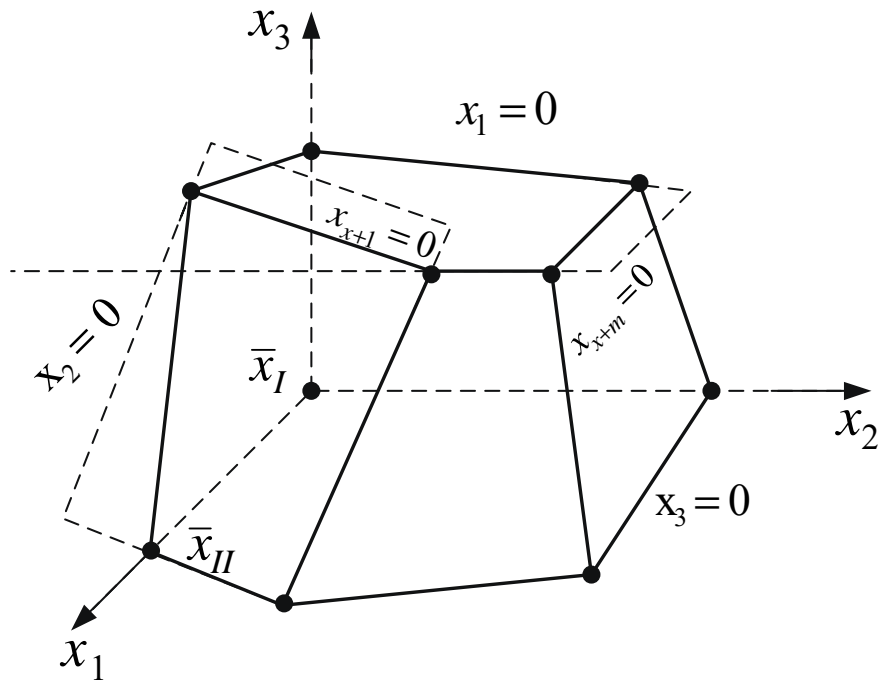


Рис. 2.9

Перебираючи сукупність вільних змінних $k = n - m$ і визначаючи $L(\bar{x})$, можна знайти оптимальний розв'язок ЗЛП. Метод простого перебирання не є ефективним через складність при обчисленні.

Для розв'язання задач ЛП при будь-яких значеннях n і m було розроблено симплекс-метод, або метод послідовного поліпшення плану.

Суть симплекс-методу полягає в тому, що перехід від однієї вершини багатогранника ОДР до іншої здійснюється не довільно, а таким чином, щоб значення цільової функції не збільшувалося. При використанні симплекс-методу розв'язок від кроку до кроку наближається до оптимального.

1. Відповідно до загальних принципів розв'язання ЗЛП вибираємо $k = (n-m)$ вільних змінних, наприклад x_1, x_2, \dots, x_k , і виражаємо базисні змінні $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ і цільову функцію $L(\bar{x})$ через вільні змінні.

2. Уважаючи вільні змінні такими, що дорівнюють нулю, отримуємо перший розв'язок. Нехай $\beta_{k+1} \geq 0, \beta_{k+2} \geq 0, \dots, \beta_{k+m} \geq 0$. Тоді розв'язок $\bar{x}_1 (x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0)$ є допустимим (опорним).

3. Перехід до іншої вершини змінює значення цільової функції $L(\bar{x})$. З іншого боку, цей перехід означає, що значення однієї з вільних змінних стає додатним, а однієї з базисних змінних – таким, що дорівнює нулю. Наприклад, при переході з вершини \bar{x}_1 у вершину \bar{x}_2 змінна x_1 збільшується, а змінна x_{k+1} зменшується до нуля.

Розглянемо вираз для цільової функції

$$L(\bar{x}) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k. \quad (2.16)$$

При $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$, тобто у вершині \bar{x}_1 значення цільової функції дорівнює γ_0 . Якщо коефіцієнти $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k > 0$, то при переході до іншої вершини (збільшення однієї з вільних змінних, наприклад x_1) збільшиться цільова функція.

У розглянутій задачі проводиться мінімізація цільової функції при додатних коефіцієнтах γ_i (окрім γ_0). Тому у виразі для $L(\bar{x})$ перехід до іншої вершини багатогранника ОДР є недоцільним і розв'язок \bar{x}_1 ($x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$) у цьому випадку буде оптимальним.

Нехай у виразі $L(\bar{x}) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k$ коефіцієнт $\gamma_1 < 0$. Це означає, що збільшуючи x_1 , тобто переходячи до іншої вершини багатогранника ОДР, можна зменшувати значення цільової функції. Такий перехід змінює сукупності вільних і базисних змінних. Тому при $\gamma_1 < 0$ вільну змінну x_1 необхідно перетворити на базисну, а одну з базисних змінних – на вільну.

Визначимо, яку з базисних змінних необхідно перетворити на вільну. Розглянемо коефіцієнти $\alpha_{k+1,1}, \alpha_{k+2,1}, \dots, \alpha_{k+l,1}, \dots, \alpha_{k+m,1}$ при змінній x_1 у виразі (2.11) і визначимо, які з них є від'ємними.

Нехай від'ємні значення мають коефіцієнти $\alpha_{k+1,1}$ і $\alpha_{k+2,1}$. Оскільки при переході до наступної вершини збільшується тільки змінна x_1 , а інші вільні змінні залишаються такими, що дорівнюють нулю, то з огляду на те, що $\alpha_{k+1,1} < 0$ і $\alpha_{k+2,1} < 0$, змінні x_{k+1} і x_{k+2} зменшуються. При цьому x_{k+1} дорівнює нулю при $x_1 = -\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}$, а x_{k+2} – при $x_1 = -\frac{\beta_{k+2}}{\alpha_{k+2,1}}$. Якщо

$$\left| \frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}} \right| < \left| \frac{\beta_{k+2}}{\alpha_{k+2,1}} \right|, \quad (2.1)$$

то x_{k+1} набуває нульового значення раніше за x_{k+2} , і при подальшому збільшенні x_1 змінна x_{k+1} може набути від'ємних значень, що суперечить обмеженням задачі лінійного програмування. Отже, при виконанні нерівності (2.17) змінну x_{k+1} необхідно перетворити з базисної на вільну, а x_1 – з вільної на базисну.

Тепер вільними змінними будуть x_2, \dots, x_k, x_{k+1} .

Виразимо базисні змінні й цільову функцію через нові вільні змінні:

$$\begin{aligned}
x_{k+2} &= \mu_{k+2} + \lambda_{k+2,2}x_2 + \dots + \lambda_{k+2,j}x_j + \lambda_{k+2,k}x_k + \\
&\quad + \lambda_{k+2,k+1}x_{k+1}, \\
&\quad \dots\dots\dots \\
x_{k+l} &= \mu_{k+l} + \lambda_{k+l,2}x_2 + \dots + \lambda_{k+l,j}x_j + \dots + \lambda_{k+l,k}x_k + \\
&\quad + \lambda_{k+l,k+1}x_{k+1}, \\
&\quad \dots\dots\dots \\
x_{k+m} &= \mu_{k+m} + \lambda_{k+m,2}x_2 + \dots + \lambda_{k+m,j}x_j + \dots \\
&\quad \dots + \lambda_{k+m,k}x_k + \lambda_{k+m,k+1}x_{k+1}, \\
&\quad \dots\dots\dots \\
x_1 &= \mu_1 + \lambda_{12}x_2 + \dots + \lambda_{1j}x_j + \dots + \lambda_{1k}x_k + \lambda_{1,k+1}x_{k+1},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$L(\bar{x}) = \delta_0 + \delta_2x_2 + \dots + \delta_jx_j + \dots + \delta_kx_k + \delta_{k+1}x_{k+1}. \tag{2.19}$$

Уважаємо, що всі вільні змінні x_2, \dots, x_k, x_{k+1} дорівнюють нулю, тоді

$$\begin{aligned}
x_{k+2} &= \mu_{k+2}, \\
&\quad \dots\dots\dots \\
x_{k+l} &= \mu_{k+l}, \\
&\quad \dots\dots\dots \\
x_{k+m} &= \mu_{k+m}, \\
x_1 &= \mu_1
\end{aligned} \tag{2.20}$$

або $\bar{x}_2 = (\mu_1, 0, 0, \dots, 0, \mu_{k+2}, \dots, \mu_{k+l}, \dots, \mu_{k+m})$.

При цьому значення цільової функції

$$L(\bar{x}_2) = \delta_0 \leq \gamma_0. \tag{2.21}$$

Якщо всі коефіцієнти δ_j , окрім δ_0 , у виразі (2.19) є додатними, то розв'язок (2.20) є оптимальним. В іншому випадку, якщо є хоча б один від'ємний коефіцієнт δ_j , пошук оптимального розв'язку триває відповідно до алгоритму.

На практиці систему рівнянь (2.11) і вираз для цільової функції зручно записати у вигляді

Наведемо приклад розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом. Оскільки симплекс-метод є універсальним для будь-яких $k = n - m$, унаведеному прикладі розглянемо випадок $k = 2$. Це дасть змогу дослідити графічне тлумачення симплекс-методу.

Приклад 2.1. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, \dots, x_5 , що задовольняють систему обмежень

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 18, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 10 \end{aligned}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію $L(\bar{x}) = -4x_1 - 2x_2$.

На рис. 2.10 зображено багатокутник ОДР, кожна вершина якого є допустимим розв'язком.

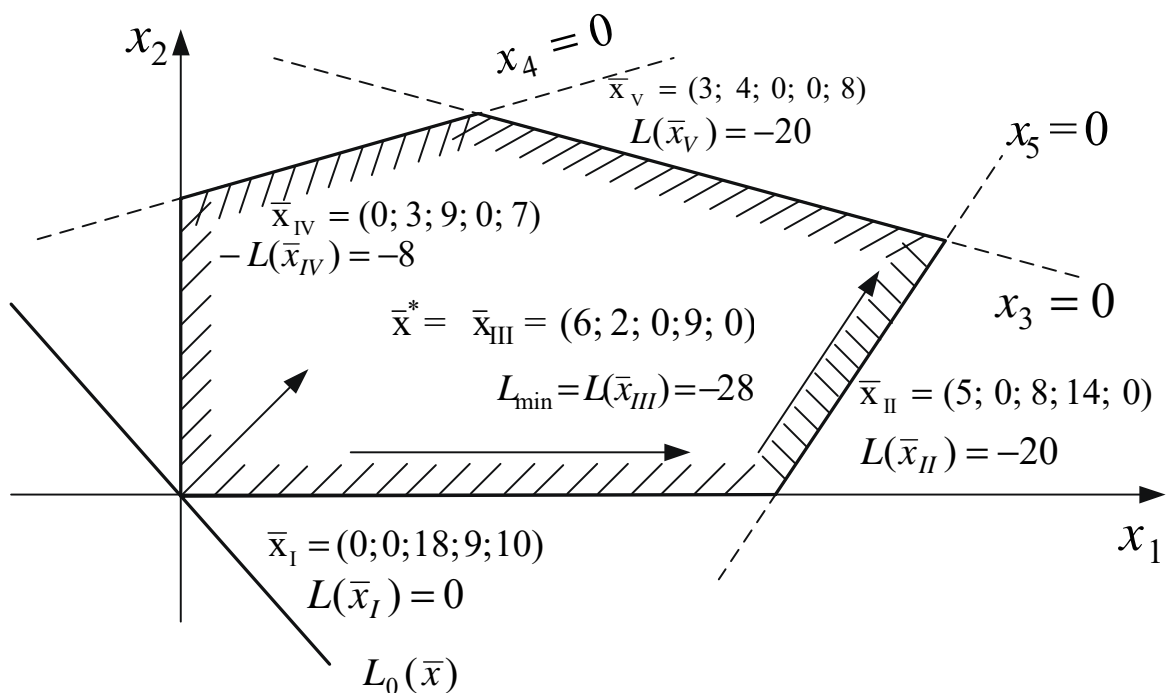


Рис. 2.10

Біля кожної вершини вказано відповідні розв'язки і значення цільової функції. З рисунка випливає, що оптимальним є такий розв'язок:

$$\bar{x}^* = \bar{x}_{III} = (6; 2; 0; 9; 0).$$

Мінімальне значення цільової функції

$$L_{min} = L(\bar{x}_{III}) = -28.$$

Розв'яжемо цю задачу симплекс-методом. Виберемо як вільні змінні x_1 і x_2 . Тоді систему рівнянь-обмежень і вираз для цільової функції запишемо таким чином:

$$x_3 = 18 - (2x_1 + 3x_2);$$

$$x_4 = 9 - (-x_1 + 3x_2);$$

$$x_5 = 10 - (2x_1 - x_2);$$

$$L(\bar{x}) = 0 - (4x_1 + 2x_2).$$

Уважаючи $x_1 = x_2 = 0$, отримаємо $x_3 = 18$, $x_4 = 9$, $x_5 = 10$. Усі значення змінних є невід'ємними і, отже, розв'язок $\bar{x}_I = (0; 0; 18; 9; 10)$ є допустимим (вершина \bar{x}_I на рис. 2.10). Цей розв'язок є допустимим, але не оптимальним, тому що коефіцієнти при x_1 і x_2 у виразі для $L(\bar{x})$ є додатними. Отже, будь-яку з цих змінних можна збільшити до деякого додатного значення, тобто перетворити з вільної змінної на базисну. Перетворимо на базисну змінну x_1 . З цього починається перший крок розв'язання задачі симплекс-методом.

З'ясуємо, яку зі змінних (x_3 , x_4 або x_5) слід перетворити з базисної на вільну. Коефіцієнти при x_1 є однаковими за знаком з вільними членами у виразах для x_3 і x_5 . Визначимо відношення вільного члена до кожного з цих коефіцієнтів. Ці відношення відповідно становлять $18/2 = 9$ і $10/2 = 5$. Оскільки відношення вільного члена до коефіцієнта при x_1 для x_5 є меншим, ніж для змінної x_3 , то змінну x_5 перетворимо з базисної на вільну.

Тепер вільними є змінні x_2 і x_5 . Виразимо базисні змінні x_1 , x_3 і x_4 і цільову функцію $L(\bar{x})$ через x_2 і x_5 . З третього рівняння системи рівнянь

$$x_1 = 5 - (0,5x_5 - 0,5x_2).$$

Підставивши це рівняння у вирази для x_3 , x_4 і $L(\bar{x})$, отримаємо

$$x_3 = 8 - (-x_5 + 4x_2),$$

$$x_4 = 14 - (0,5x_5 + 2,5x_2),$$

$$L(\bar{x}) = -20 - (-2x_5 + 4x_2).$$

Уважаючи вільні змінні $x_2 = x_5 = 0$, отримаємо $x_1 = 5$, $x_3 = 8$, $x_4 = 14$.

Усі змінні – невід'ємні, отже, розв'язок $\bar{x}_{II} = (5; 0; 8; 14; 0)$ є

допустимим і відповідає вершині \bar{x}_{II} на рис. 2.10. Таким чином, після виконання першого кроку цільова функція зменшується до $L(\bar{x}) = -20$.

Проаналізуємо, чи є розв'язок \bar{x}_{II} оптимальним. Оскільки в рівнянні для цільової функції коефіцієнт при x_2 є додатним, оптимального розв'язку ще не отримано. Очевидно, що значення змінної x_2 можна збільшити, переводячи її до базисних. Визначимо, яку змінну з базисних необхідно перетворити на вільну.

Коефіцієнти при x_2 мають однакові знаки з вільними членами у виразах для x_3 і x_4 . Оскільки відношення вільного члена до коефіцієнта при x_2 для x_3 є меншим, ніж для x_4 , тобто $8/4 < 14/2,5$, то змінну x_3 перетворимо на вільну. Таким чином, на другому етапі вільними будуть змінні x_3 і x_5 , а базисними – x_1 , x_2 і x_4 .

Виразимо базисні змінні й цільову функцію $L(\bar{x})$ через вільні змінні:

$$x_1 = 6 - (0,125x_3 + 0,375x_5);$$

$$x_2 = 2 - (0,25x_3 - 0,25x_5);$$

$$x_4 = 9 - (-0,625x_3 + 1,125x_5);$$

$$L(\bar{x}) = -28 - (-x_3 - x_5).$$

Уважаючи вільні змінні x_3 і x_5 такими, що дорівнюють нулю, отримаємо

$$x_1 = 6, x_2 = 2, x_4 = 9.$$

Розв'язок $\bar{x}_{III} = (6; 2; 0; 9; 0)$ є допустимим, оскільки всі змінні невід'ємні. Отже, після виконання другого кроку здійснено перехід з вершини \bar{x}_{II} у вершину \bar{x}_{III} багатокутника ОДР. При цьому значення цільової функції зменшилося: $L(\bar{x}_{III}) = -28$.

Перевіримо розв'язок \bar{x}_{III} на оптимальність. З огляду на те, що всі коефіцієнти при вільних змінних у виразі для $L(\bar{x})$ є від'ємними, розв'язок \bar{x}_{III} буде оптимальним для \bar{x}^* .

Таким чином, перехід від однієї вершини багатокутника ОДР до іншої відповідно до алгоритму симплекс-методу супроводжується зменшенням цільової функції доти, доки не буде знайдено вершину, у якій ця функція є мінімальною.

Якщо всі значення базисних змінних є від'ємними, то отриманий розв'язок є допустимим. Для перевірки цього розв'язку на оптимальність розглянемо перший рядок симплекс-таблиці.

Якщо всі елементи цього рядка (за винятком вільного члена) є від'ємними, то отриманий розв'язок буде оптимальним. Якщо один або кілька елементів у першому рядку є додатними, то розв'язок не буде оптимальним і його можна поліпшити. Для цього необхідно обміняти вільні й базисні змінні відповідно до правил симплекс-перетворення.

1. Серед додатних елементів першого рядка симплекс-таблиці вибираємо один з найбільшим значенням. Нехай це буде коефіцієнт ρ_1 при змінній x_1 . Це означає, що змінну x_1 необхідно перетворити з вільної на базисну. Стовець, у якому знаходиться найбільший додатний коефіцієнт, називають *розв'язувальним стовпцем*.

2. У розв'язувальному стовпці визначаємо ті елементи, які мають однаковий знак з відповідними вільними членами. Нехай це будуть коефіцієнти $\nu_{k+1,1}$ і $\nu_{k+2,1}$.

3. Розраховуємо відношення відповідних вільних членів до коефіцієнтів $\nu_{k+1,1}$ і $\nu_{k+2,1}$. Нехай виконується нерівність

$$\frac{\beta_{k+1}}{\nu_{k+1,1}} < \frac{\beta_{k+2}}{\nu_{k+2,1}}. \quad (2.26)$$

Тоді рядок, що відповідає базисній змінній x_{k+1} , для якої виконується нерівність, назвемо *розв'язувальним рядком*. Елемент $\nu_{k+1,1}$, що знаходиться на перетині *розв'язувального* рядка і *розв'язувального* стовпця, називають *розв'язальним елементом*. Базисну змінну x_{k+1} необхідно перетворити на вільну.

4. Будуємо нову симплекс-таблицю для нової системи вільних (x_{k+1}, x_2, \dots, x_k) і базисних ($x_1, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}$) змінних. Нова симплекс-таблиця заповнюється, як табл. 2.2.

5. Обчислюємо зворотну величину $\frac{1}{\nu_{k+1,k}}$ розв'язувального елемента вихідної симплекс-таблиці, і його значення записуємо у відповідній клітинці нової симплекс-таблиці.

6. Усі елементи розв'язувального стовпця вихідної симплекс-таблиці ділимо на розв'язувальний елемент. Отримані значення (частки) з протилежним знаком записуємо у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

7. Елементи розв'язувального рядка вихідної симплекс-таблиці ділимо на розв'язувальний елемент. Отримані значення записуємо у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

Таблиця 2.2

| Базисні змінні | Вільні змінні | | | | |
|----------------|---|-------------------------------|---|-----|---|
| | ВЧ | x_{k+1} | x_2 | ... | x_k |
| $L(\bar{x})$ | $\gamma_0 - \frac{\rho_1 \beta_{k+1}}{v_{k+1,1}}$ | $-\frac{\rho_1}{v_{k+1,1}}$ | $\rho_2 - \frac{\rho_1 \beta_{k+1}}{v_{k+1,1}}$ | ... | $\rho_k - \frac{\rho_1 \beta_{k+1}}{v_{k+1,1}}$ |
| x_1 | $\frac{\beta_{k+1}}{v_{k+1,1}}$ | $\frac{1}{v_{k+1,1}}$ | $\frac{v_{k+1,2}}{v_{k+1,1}}$ | ... | $\frac{v_{k+1,k}}{v_{k+1,1}}$ |
| x_{k+2} | — | $\frac{v_{k+2,1}}{v_{k+1,1}}$ | — | ... | — |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_{k+m} | — | $\frac{v_{k+m,1}}{v_{k+1,1}}$ | — | ... | — |

8. Інші елементи нової симплекс-таблиці розраховуємо відповідно до правила прямокутника, яке полягає в такому. Нехай необхідно розрахувати значення елемента нової симплекс-таблиці, що знаходяться на перетині i -го рядка і j -го стовпця, тобто v'_{ij} .

Складемо з елементів вихідної симплекс-таблиці прямокутну матрицю 2×2 :

$$\begin{pmatrix} v_{ij} & v_{ik} \\ v_{lj} & v_{lk} \end{pmatrix},$$

де v_{lk} – розв'язувальний елемент. Тоді

$$v'_{ij} = \frac{v_{ij}v_{lk} - v_{lj}v_{ik}}{v_{lk}} = v_{ij} - \frac{v_{lj}v_{ik}}{v_{lk}}. \quad (2.27)$$

Уважаючи значення вільних змінних у новій симплекс-таблиці такими, що дорівнюють нулю, з першого стовпця знаходимо значення цільової функції і базисних змінних. За елементами першого рядка перевіряємо отриманий розв'язок на оптимальність. Якщо розв'язок не є оптимальним, то необхідно побудувати наступну симплекс-таблицю і знову виконати пп. 1–8 табличного алгоритму.

Приклад 2.2. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, \dots, x_5 , що

задовольняють системі обмежень

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18,$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 10$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

Складемо вихідну симплекс-таблицю (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

| Базисні змінні | Вільні змінні | | |
|----------------|---------------|---|-------|
| | ВЧ | ← x_1 | x_2 |
| $L(\bar{x})$ | 0 | 4 | 2 |
| x_3 | 18 | 2 | 3 |
| x_4 | 9 | -1 | 3 |
| ↑ x_5 | 10 | 2 | -1 |

У розглядуваній задачі $k = 2$ вільні і $m = 3$ базисні змінні. Отже, у симплекс-таблиці буде чотири рядки і три стовпці. Крім того, у симплекс-таблиці будуть додаткові інформаційні рядок і стовпець. Заповнимо симплекс-таблицю. Уважаючи вільні змінні $x_1 = x_2 = 0$, з першого стовпця табл. 2.3 знаходимо $x_3 = 18$; $x_4 = 9$; $x_5 = 10$; $L(\bar{x}) = 0$.

Ці змінні є допустимими, але не оптимальними, тому що елементи першого рядка додатні. Оскільки коефіцієнт при x_1 у першому рядку більше за коефіцієнт при x_2 , як розв'язувальний стовпець виберемо такий, що відповідає змінній x_1 . Отже, змінну x_1 необхідно перетворити на базисну, що схематично позначено стрілкою над розв'язувальним стовпцем.

У розв'язувальному стовпці елементи другого й четвертого рядків, що відповідають базисним змінним x_3 і x_5 , мають знаки, однакові з вільними членами. Визначаємо відношення зведених членів до цих коефіцієнтів.

Оскільки $\frac{10}{2} < \frac{18}{2}$, базисна змінна x_5 перетворюється на вільну (у табл. 2.3 це позначено стрілкою зліва від змінної x_5). Розв'язувальний елемент (елемент, обведений квадратом), має в цій симплекс-таблиці значення, що дорівнює двом. Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

| Базисні змінні | Вільні змінні | | |
|----------------|---------------|-------|---|
| | ВЧ | x_5 | \leftarrow x_2 |
| $L(\bar{x})$ | -20 | -2 | 4 |
| $\uparrow x_3$ | 8 | -1 | 4 |
| x_4 | 14 | 0,5 | 2,5 |
| x_1 | 5 | 0,5 | -0,5 |

У цій симплекс-таблиці другий стовпець буде відповідати вільній змінній x_5 , а четвертий рядок – базисній змінній x_1 . Згідно з правилами симплекс-перетворення елемент нової симплекс-таблиці, що відповідає елементу вихідної симплекс-таблиці, буде дорівнювати 0,5.

Для отримання елементів стовпця при x_5 кожний елемент розв'язувального стовпця вихідної симплекс-таблиці розділимо на розв'язувальний елемент. Результат ділення з протилежним знаком запишемо у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

Для отримання елементів рядка при x_1 кожний елемент розв'язувального рядка вихідної симплекс-таблиці розділимо на розв'язувальний елемент. Результат ділення з тим самим знаком запишемо у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

Інші елементи знаходимо за правилом прямокутника. Нехай необхідно знайти значення елемента, що знаходиться на перетині першого рядка й першого стовпця нової симплекс-таблиці. Тоді, використовуючи вихідну симплекс-таблицю (табл. 2.3), будуємо матрицю 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix},$$

елементами головної діагоналі якої є розв'язувальний елемент й елемент, що знаходиться на перетині першого рядка й першого стовпця вихідної симплекс-таблиці. Елементи другої діагоналі належать до розв'язувальних рядка й стовпця. Елемент нової симплекс-таблиці

$$v'_{ij} = \frac{v_{ij}v_{lk} - v_{lj}v_{ik}}{v_{lk}} = v_{ij} - \frac{v_{li}v_{ik}}{v_{lk}} = \frac{0 \cdot 2 - 10 \cdot 4}{2} = -20.$$

Аналогічно розраховуються інші елементи нової симплекс-таблиці 2.4. Уважаючи вільні змінні $x_5 = x_2 = 0$, знаходимо: $x_3 = 8$; $x_4 = 14$; $x_1 = 5$; $L(\bar{x}) = -20$.

Оскільки значення всіх змінних є невід'ємними, отриманий розв'язок буде допустимим. Разом з тим, елемент першого рядка й третього стовпця є додатним. Отже, оптимального розв'язку задачі не отримано.

Виберемо як розв'язувальний стовпець при змінній x_2 . У ньому елементи мають той самий знак, що й вільні члени, і відповідають змінним x_3 і x_4 . Зважаючи на те, що $\frac{8}{4} < \frac{14}{2,5}$, як розв'язувальний рядок вибираємо такий, що відповідає базисній змінній x_3 .

Отже, на наступному кроці змінна x_3 стає вільною, а змінна x_2 – базисною. Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 2.5) і, користуючись правилами симплекс-перетворення, заповнюємо її.

Таблиця 2.5

| Базисні змінні | Вільні змінні | | |
|----------------|---------------|-------|---|
| | ВЧ | x_5 | x_2 |
| $L(\bar{x})$ | 28 | -1 | 0,25 |
| x_2 | 2 | -0,25 | 4 |
| x_4 | 9 | 1,125 | -0,625 |
| x_1 | 6 | 0,375 | -0,125 |

Уважаючи вільні змінні $x_3 = x_5 = 0$, отримаємо значення базисних змінних і цільової функції: $x_2 = 2$; $x_4 = 9$; $x_1 = 6$; $L(\bar{x}) = -28$. Усі змінні мають невід'ємні значення, а елементи першого рядка – від'ємні. Отже, розв'язок $\bar{x}^*_{III} = (6; 2; 0; 9; 0)$ є оптимальним, а мінімальне значення цільової функції становить -28 . Якщо провести аналогію з графічним розв'язком цієї задачі, то можна помітити, що кожна симплекс-таблиця відповідає певній вершині багатокутника ОДР.

Очевидно, симплекс-перетворення на кожному кроці є переходом від однієї вершини багатокутника ОДР до іншої.

Таблиця 2.6

| Базисні змінні | Вільні змінні | | | | |
|----------------|-----------------|---------------|---------------|-----|---------------|
| | ВЧ | X_1 | X_2 | ... | X_k |
| $L(\bar{X})$ | γ_0 | ρ_1 | ρ_2 | ... | ρ_k |
| X_{k+1} | β_{k+1} | $\nu_{k+1,1}$ | $\nu_{k+1,2}$ | | $\nu_{k+1,k}$ |
| X_{k+2} | β_{k+2} | $\nu_{k+2,1}$ | $\nu_{k+2,2}$ | ... | $\nu_{k+2,k}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| X_{k+m} | $\beta_{k+m,1}$ | $\nu_{k+m,1}$ | $\nu_{k+m,2}$ | ... | $\nu_{k+m,k}$ |

Це означає, що розв'язок $\bar{x}_I = (0, \dots, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{k+l}, \dots, \beta_{k+m})$ не є допустимим, тому його треба знайти.

Алгоритм пошуку допустимого розв'язку складається з таких кроків:

1. Серед елементів першого стовпця вибираємо будь-який від'ємний елемент. Нехай це буде елемент β_{k+2} .

2. У рядку з вибраним від'ємним елементом знаходимо елементи, однакові з ним за знаком. Нехай це будуть елементи $\nu_{k+2,1}$ і $\nu_{k+2,m}$.

3. Визначаємо відношення вільного члена до кожного від'ємного елемента рядка і знаходимо найменше з відношень. Нехай

$$\frac{\beta_{k+2}}{\nu_{k+2,1}} < \frac{\beta_{k+2}}{\nu_{k+2,m}}.$$

Тоді стовпець, у якому розташовується елемент $\nu_{k+2,1}$, вибираємо як розв'язувальний стовпець.

4. У розв'язувальному стовпці знаходимо елементи, однакові за знаком з вільними членами (це можуть бути й від'ємні елементи, якщо відповідні вільні елементи є від'ємними).

5. Визначаємо відношення кожного вільного члена до відповідного елемента розв'язувального стовпця. Той елемент розв'язувального стовпця, для якого це відношення є мінімальним, буде розв'язувальним елементом, а рядок, у якому його розташовано, – розв'язувальним рядком.

6. Використовуючи правила симплекс-перетворення, переходимо до нової симплекс-таблиці, у якій проаналізуємо елементи першого стовпця. Якщо в ньому є один або декілька від'ємних елементів, то повторюємо операції за пп. 1–5.

Процедура триває доти, доки не буде знайдено допустимий розв'язок.

Як тільки допустимий розв'язок буде знайдено, переходимо до пошуку оптимального розв'язку, використовуючи розглянутий раніше табличний алгоритм симплекс-методу.

Відмінність алгоритму пошуку допустимого розв'язку полягає в тому, що аналізується не перший рядок, а перший стовпець симплекс-таблиці. В іншому цей алгоритм і алгоритм пошуку оптимального розв'язку ідентичними.

Приклад 2.3. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, \dots, x_8 , що задовольняють системі обмежень

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 2, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_6 &= 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_7 &= 8, \\ -x_1 + 2x_2 - x_8 &= 4, \end{aligned}$$

і такі, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

Графічний розв'язок цього завдання показано на рис. 2.11.

Для розв'язання цієї задачі симплекс-методом подамо рівняння-обмеження й цільову функцію у вигляді

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - (-2x_1 + x_2), \\ x_4 &= 10 - (x_1 + x_2), \\ x_5 &= 2 - (2x_1 - x_2), \\ x_6 &= 10 - (-5x_1 - 2x_2), \\ x_7 &= -8 - (-x_1 - 2x_2), \\ x_8 &= -4 - (x_1 - 2x_2), \end{aligned}$$

$$L(\bar{x}) = 0 - (4x_1 + 2x_2),$$

де x_1, x_2 – вільні змінні;

x_3, \dots, x_8 – базисні змінні.

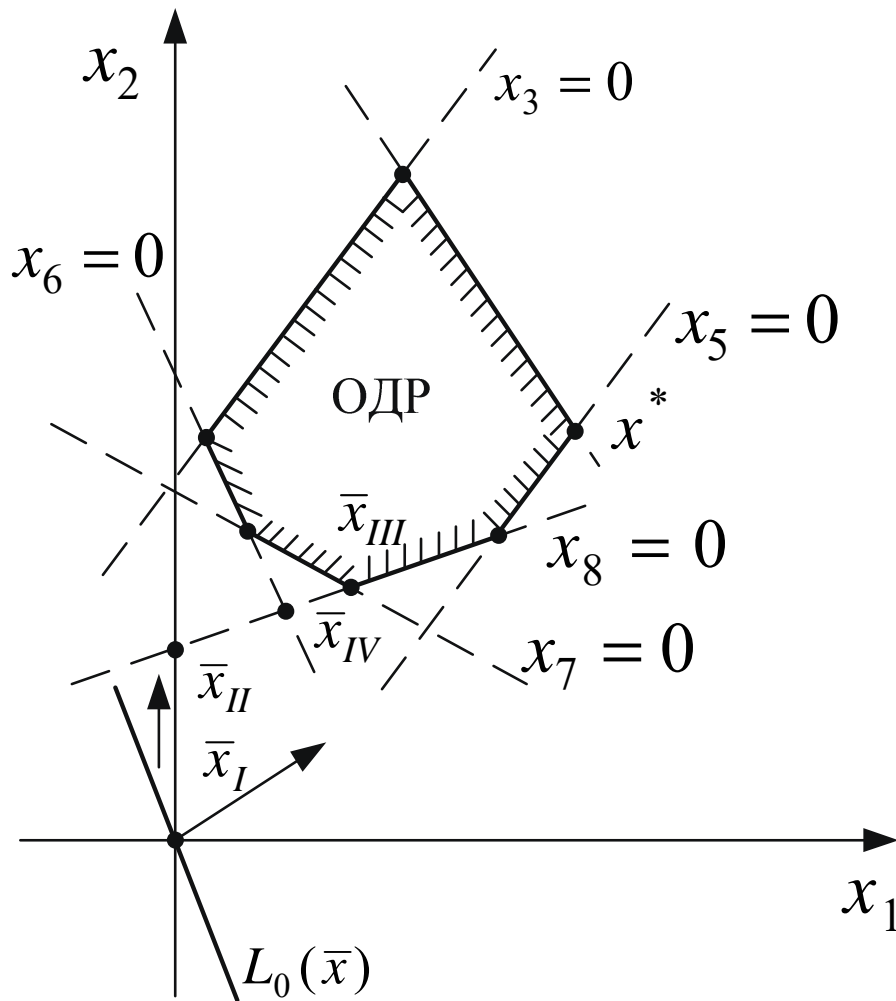


Рис. 2.11

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю 2.7. Уважаючи вільні змінні x_1, x_2 такими, що дорівнюють нулю, отримаємо $x_3 = 4; x_4 = 10; x_6 = -10; x_7 = -8; x_8 = -4$.

Оскільки серед базисних змінних є від'ємні, очевидно, розв'язок $\bar{x}_I = (0; 0; 4; 10; 2; -10; -8; -4)$ не є допустимим. Це підтверджується і графіком на рис. 2.11 (точка \bar{x}_I знаходиться поза межами ОДР). Серед елементів першого стовпця від'ємними є $x_6 = -10; x_7 = -8; x_8 = -4$. Для пошуку допустимого розв'язку можна вибрати будь-який з них. Однак з метою найшвидшого отримання допустимого розв'язку доцільно вибрати той елемент, який має найменше абсолютне значення, тобто -4 .

Розглянемо рядок змінної x_8 . Елемент, що знаходиться на перетині цього рядка й стовпця при x_2 , має однаковий знак з вільними членами. Тому стовпець змінної x_2 буде розв'язувальним стовпцем.

Таблиця 2.7

| Базисні змінні | Вільні змінні | | |
|-------------------|---------------|-------|------------------|
| | ВЧ | X_1 | $\leftarrow X_2$ |
| $L(\bar{X})$ | 0 | 4 | 2 |
| X_3 | 4 | -2 | 1 |
| X_4 | 10 | 1 | 1 |
| X_5 | 2 | 2 | -1 |
| X_6 | -10 | -5 | 12 |
| X_7 | -8 | -1 | -2 |
| $\uparrow X_8$ | -4 | 1 | $\boxed{-2}$ |

У розв'язувальному стовпці визначимо елементи, однакові за знаком з вільними членами. Такими елементами є ті, що знаходяться на перетині розв'язувального стовпця й рядків при змінних x_3, x_4, x_5, x_7, x_8 . Відношення вільного члена до елемента розв'язувального стовпця, однакового з ним за знаком, буде мінімальним для останнього рядка. Отже, рядок змінної x_8 буде розв'язувальним рядком, а елемент -2 , обведений квадратом, – розв'язувальним елементом.

Таким чином, на першому кроці змінну x_2 має бути перетворено на базисну, а змінну x_8 – на вільну.

Користуючись правилами симплекс-перетворення, заповнимо нову (другу) симплекс-таблицю (табл. 2.8).

Таблиця 2.8

| Базисні змінні | Вільні змінні | | |
|-------------------|---------------|--------------|-------|
| | ВЧ | \bar{X}_1 | X_8 |
| $L(\bar{X})$ | -4 | 5 | 1 |
| X_3 | 2 | -1,5 | 0,5 |
| X_4 | 8 | 1,5 | 0,5 |
| X_5 | 4 | 1,5 | -0,5 |
| X_6 | -6 | -6 | -1 |
| $\uparrow X_7$ | -4 | $\boxed{-2}$ | -1 |
| X_2 | 2 | -0,5 | -0,5 |

Після виконання першого кроку отримуємо розв'язок $\bar{x}_{II} = (0; 2; 2; 8; 4; -6; -4; -2)$, який також поки не є оптимальним. Серед від'ємних елементів першого стовпця вибираємо елемент, що дорівнює -4 в рядку змінної x_7 . У цьому рядку всі елементи є від'ємними. Оскільки $\frac{-4}{-2} < \frac{-4}{-1}$, то стовпець змінної x_1 буде розв'язувальним стовпцем. Відношення вільного члена до елемента розв'язувального стовпця, однакового з ним за знаком, буде мінімальним для рядка при x_7 . Отже, рядок при x_7 є розв'язувальним рядком.

На другому кроці пошуку допустимого розв'язку змінну x_1 слід перетворити на базисну, а змінну x_7 – на вільну. Після виконання симплекс-перетворень на другому кроці складаємо симплекс-таблицю 2.9.

Таблиця 2.9

| Базисні змінні | Вільні змінні | | |
|----------------|---------------|-------|-------|
| | ВЧ | x_7 | x_8 |
| $L(\bar{x})$ | -14 | 2,5 | -1,5 |
| x_3 | 5 | -0,75 | 1,25 |
| x_4 | 5 | 0,75 | -0,25 |
| x_5 | 1 | 0,75 | -1,25 |
| x_6 | -6 | -3 | 2 |
| x_1 | 2 | -0,5 | 0,5 |
| x_2 | 3 | -0,25 | -0,25 |

Розв'язок, отриманий на другому кроці, $\bar{x}_{III} = (2; 3; 5; 5; 1; 6; 0; 0)$ є допустимим. Подальший пошук оптимального розв'язку здійснюється відповідно до розглянутого раніше алгоритму табличного симплекс-методу.

Приклад 2.4. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, \dots, x_6 , що задовольняють системі обмежень

$$\begin{aligned}
 -5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10, \\
 2x_1 + x_2 - x_4 &= 8, \\
 x_1 - x_2 + x_5 &= 2, \\
 5x_1 + 2x_2 - x_5 &= 2, \\
 x_1 + x_2 + x_6 &= 10,
 \end{aligned}$$

і такі, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

Графічний розв'язок цього завдання показано на рис. 2.12. З рисунка випливає, що задача лінійного програмування не має допустимих розв'язків.

Зведемо систему рівнянь-обмежень і цільову функцію до вигляду, зручного для заповнення симплекс-таблиці 2.10:

$$\begin{aligned} x_3 &= -10 - (5x_1 + 2x_2), \\ x_4 &= -8 - (-2x_1 - x_2), \\ x_5 &= -2 - (-x_1 + x_2), \\ x_6 &= -10 - (x_1 + x_2), \\ L(\bar{x}) &= -(-4x_1 + 2x_2). \end{aligned}$$

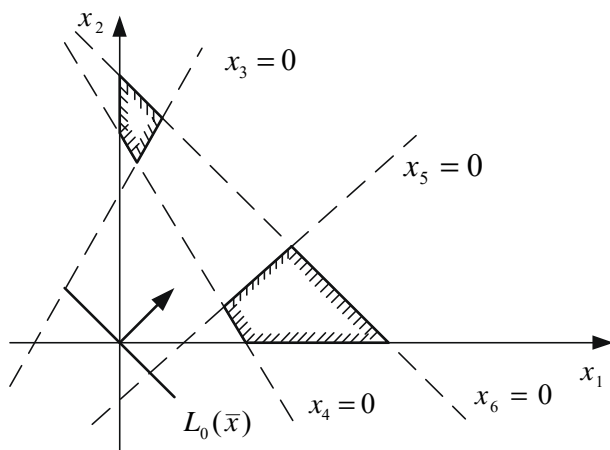


Рис. 2.12

Під час пошуку допустимого розв'язку відповідно до описаного вище алгоритму отримуємо послідовність симплекс-таблиць (табл. 2.10–2.12).

Таблиця 2.10

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|-----|-------------|-------|
| | ВЧ | \bar{x}_1 | x_2 |
| $L(\bar{x})$ | 0 | 4 | 2 |
| x_3 | -10 | 5 | -2 |
| x_4 | -8 | -2 | -1 |
| $\uparrow x_5$ | -2 | -1 | 1 |
| x_6 | 10 | 1 | 1 |

Таблиця 2.11

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|-----|-------|-------------|
| | ВЧ | x_5 | \bar{x}_2 |
| $L(\bar{x})$ | -8 | 4 | 6 |
| x_3 | -20 | 5 | 3 |
| $\uparrow x_4$ | -4 | -2 | -3 |
| x_1 | 3 | -1 | -1 |
| x_6 | 8 | 1 | 2 |

Таблиця 2.12

| БЗ | ВЗ | | |
|--------------|------|-------|-------|
| | ВЧ | x_5 | x_4 |
| $L(\bar{x})$ | -16 | 0 | 2 |
| x_3 | -24 | 3 | 1 |
| x_2 | 4/3 | 2/3 | -1/3 |
| x_1 | 10/3 | -1/3 | -1/3 |
| x_6 | 16/3 | -1/3 | 2/3 |

У рядку змінної x_3 (табл. 2.11) вільний член є від'ємним. Згідно з п.2 алгоритму пошуку допустимого розв'язку у цьому рядку необхідно знайти елементи, однакові за знаком з вільним членом.

Однак таких елементів у рядку немає. Запишемо аналітичний вираз базисної змінної:

$$x_3 = -24 - x_4 - 3x_5.$$

Очевидно, що не знайдеться таких невід'ємних значень змінних x_3 , x_4 і x_5 , при яких наведене рівняння було би правильним. Це означає, що задача лінійного програмування не має допустимих розв'язків.

Якщо в кінцевій симплекс-таблиці один або кілька елементів першого стовпця є від'ємними, і хоча б в одному рядку, що відповідає одному з цих елементів, інші елементи є додатними, то задача лінійного програмування не має допустимих розв'язків.

Висновки:

1. Розв'язання задачі лінійного програмування починається з пошуку допустимого розв'язку.

2. Після того як знайдено один із допустимих розв'язків, можна починати пошук оптимального розв'язку.

3. Під час такого пошуку необхідно ретельно проаналізувати кожну симплекс-таблицю з метою виявлення ознак, що відповідають різним випадкам задачі лінійного програмування.

4. Виявивши одну з цих ознак, процедуру пошуку слід припинити і з урахуванням кінцевої симплекс-таблиці зробити відповідні висновки.

2.6. Розв'язання задач лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями

У більшості практичних випадків обмеженнями задач лінійного програмування є лінійні нерівності. Для розв'язання задачі лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями необхідно попередньо звести записи до канонічної форми. Розглянемо порядок переходу від задач лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями до завдань з обмеженнями-рівностями.

Сформулюємо задачу лінійного програмування таким чином: знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , які задовольняють системі обмежень

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1j}x_j + \alpha_{1n}x_n &\geq b_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2j}x_j + \alpha_{2n}x_n &\geq b_2, \\ &\dots \\ \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{ij}x_j + \alpha_{in}x_n &\geq b_i, \\ &\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mj}x_j + \alpha_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \tag{2.30}$$

то до лівої частини нерівності необхідно додати невід'ємну величину x_{n+i} .
Тоді нерівність перетворюється на рівняння вигляду

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{ij}x_j + \alpha_{in}x_n + x_{n+i} = b_i.$$

Якщо система обмежень є системою нерівностей, то при переході до основної задачі ЛП змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$ автоматично виражаються через змінні x_1, x_2, \dots, x_n . Отже, для подальшого розв'язання змінні x_1, x_2, \dots, x_n можна вибрати як вільні, а змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$ – як базисні. Під час аналізу результату розв'язання задачі лінійного програмування необхідно враховувати тільки змінні x_1, x_2, \dots, x_n .

Приклад 2.5. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2 , що задовольняють системі обмежень

$$x_1 + 2x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10,$$

і такі, що перетворюють на максимум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = x_1 + x_2.$$

Зведемо цю задачу до вигляду основної задачі лінійного програмування. Для цього додамо до лівої частини першої і третьої нерівностей невід'ємні змінні x_3 і x_5 , а з лівої частини другої нерівності віднімемо невід'ємну змінну x_4 . Система обмежень задачі лінійного програмування набуде вигляду

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10;$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 2;$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 10.$$

Задачу пошуку максимуму цільової функції $L(\bar{x})$ можна замінити задачею пошуку мінімуму функції

$$L'(\bar{x}) = -L(\bar{x}) = -x_1 - x_2.$$

Тоді задача знаходження невід'ємних значень змінних x_1, x_2, \dots, x_5 , що задовольняють обмеження $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0$, і таких, що перетворюють на мінімум цільову функцію $L'(\bar{x})$, є основним завданням лінійного програмування.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте послідовність розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом.
2. Наведіть зміст симплекс-методу.
3. Назвіть області застосування табличного симплекс-методу.
4. Назвіть складові алгоритму пошуку допустимих розв'язків задач лінійного програмування.
5. Яким чином задачі лінійного програмування зводяться до канонічної форми?
6. Які властивості цільових функцій досліджують при використанні градієнтного методу?
7. Назвіть можливі розв'язки задач лінійного програмування.
8. Наведіть приклади застосування методів лінійного програмування у діяльності за фахом.

3. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Особливості задач цілочислового програмування

Задачі математичного програмування, у яких до всіх змінних або їх частини ставиться вимога цілості числових значень, належать до задач цілочислового програмування (ЦП).

При лінійній цільовій функції і лінійних обмеженнях (а саме такі задачі ЦП будуть розглядатися в подальшому) задача цілочислового програмування формулюється так: знайти такі невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$, які задовольняли би обмеження

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1j}x_j + \alpha_{1n}x_n &\geq b_1, \\
 \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2j}x_j + \alpha_{2n}x_n &\geq b_2, \\
 \dots &\dots \\
 \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{ij}x_j + \alpha_{in}x_n &\geq b_i, \\
 \dots &\dots \\
 \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mj}x_j + \alpha_{mn}x_n &\geq b_m,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

де $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ – цілі числа, і перетворювали б на мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_ix_i + \dots + C_nx_n. \quad (3.2)$$

У такій постановці (усі змінні мають задовольняти вимоги цілочисельності) задача (3.1)–(3.2) належить до повністю цілочислових задач. Якщо ці вимоги ставляться не до всіх змінних, а тільки до їх частини, то задача є частково цілочисловою. Строго кажучи, вимога щодо цілочислових змінних призводить до того, що, незважаючи на лінійний характер обмежень і цільової функції, задача переходить до класу нелінійних задач. На рис. 3.1 показано область допустимих розв'язків задачі лінійного програмування (заштрихований багатокутник).

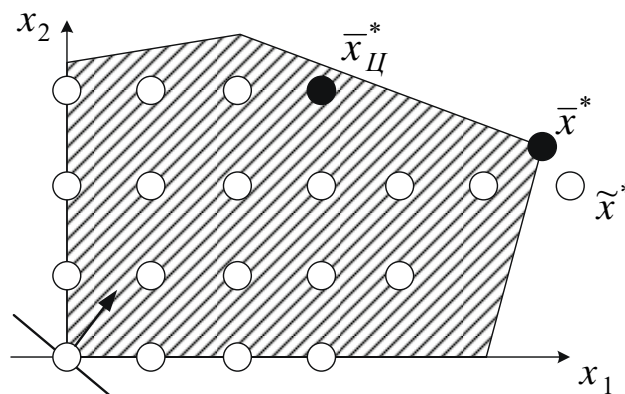


Рис. 3.1

Якщо поставити вимогу цілочисельності змінних, то область допустимих розв'язків перетвориться на систему точок.

Здавалося б, задачу цілочислового програмування можна розв'язати досить просто. Для цього, не звертаючи уваги на вимогу цілочисельності змінних, необхідно знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, а потім дробові значення змінних округлити до найближчих цілих чисел. Однак, незважаючи на певну логіку наведених міркувань, такий шлях розв'язання задачі цілочислового програмування може призвести до неоптимального розв'язку. На рис. 3.1 показано оптимальний розв'язок \bar{x}^* , округлене значення \tilde{x}^* оптимального розв'язку \bar{x}^* задачі лінійного програмування й оптимальний розв'язок \bar{x}^* з підкресленою Ц задачі цілочислового програмування. З рисунка видно, що округлені значення оптимального розв'язку задачі лінійного й цілочислового програмування істотно відрізняються один від одного.

Таким чином, для розв'язання задачі ЦП необхідно застосувати специфічні методи, у яких ураховано вимоги цілочисельності змінних. До таких методів належать метод відсічних площин і метод гілок і меж.

яке перетворимо таким чином:

$$\alpha_{k+l,1}x_1^* + \alpha_{k+l,2}x_2^* + \dots + \alpha_{k+l,k}x_k^* + x_{k+l}^* = \beta_{k+l}. \quad (3.4)$$

Позначимо через $[\alpha_{ij}]$ найбільше ціле число, яке не перевищує α_{ij} . Оскільки $[\alpha_{ij}] \leq \alpha_{ij}$, можна записати

$$[\alpha_{k+l,1}]x_1^* + [\alpha_{k+l,2}]x_2^* + \dots + [\alpha_{k+l,k}]x_k^* + x_{k+l}^* \leq \beta_{k+l}. \quad (3.5)$$

Якщо до змінних поставити вимогу цілочисельності, то в лівій частині виразу (3.5) буде записано ціле число. Тоді справджується така нерівність:

$$[\alpha_{k+l,1}]x_1^* + [\alpha_{k+l,2}]x_2^* + \dots + [\alpha_{k+l,k}]x_k^* + x_{k+l}^* \leq [\beta_{k+l}]. \quad (3.6)$$

Віднімемо з виразу (3.6) вираз (3.4). Позначаючи

$$[\alpha_{ij}] - \alpha_{ij} = \gamma_{ij}; \quad [\beta_i] - \beta_i = \rho_i, \quad (3.7)$$

отримаємо

$$\gamma_{k+l,1}x_1^* + \gamma_{k+l,2}x_2^* + \dots + \gamma_{k+l,k}x_k^* \leq \rho_{k+l}. \quad (3.8)$$

Нерівність (3.8) є додатковим обмеженням, у якому враховано цілочисельність хоча би змінної x_{k+l} . Перейдемо в (3.8) від нерівності до рівняння. Для цього до лівої частини (3.8) додамо невід'ємну змінну y_1 :

$$\gamma_{k+l,1}x_1^* + \gamma_{k+l,2}x_2^* + \dots + \gamma_{k+l,k}x_k^* + y_1 = \rho_{k+l}. \quad (3.9)$$

Якщо (3.9) подати у вигляді

$$y_1 = \rho_{k+l} - (\gamma_{k+l,1}x_1^* + \gamma_{k+l,2}x_2^* + \dots + \gamma_{k+l,k}x_k^*), \quad (3.10)$$

то вирази (3.3) і (3.10) становитимуть систему обмежень нової задачі ЛП, у якій уже враховано вимогу цілочисельності змінної x_{k+l} . Для розв'язання нової задачі ЛП до кінцевої симплекс-таблиці задачі (3.1)–(3.2) додамо рядок, у якому запишемо значення коефіцієнтів при змінних $x_{k+l,i}$ і вільного члена ρ_{k+l} у виразі (3.10). Отримана симплекс-таблиця вже містить $(m + 1)$ базисних змінних.

Застосовуючи симплекс-перетворення, знайдемо оптимальний розв'язок нової задачі ЛП. Якщо змінні, що становлять оптимальний розв'язок нової задачі ЛП, є цілочисловими, то процес обчислення завершується. Якщо є хоча б одна дробова змінна, то вводиться ще одне обмеження, і т. д. Процедура повторюється доти, доки не буде знайдено оптимальний цілочисловий розв'язок.

Розглянемо приклад розв'язання задачі цілочислового програмування методом відсічних площин. Для наочності супроводимо розв'язання графіками.

Приклад 3.1. Знайти невід'ємні значення змінних, що задовольняють обмеження

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де x_1, x_2 – цілі числа, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = -x_1 + 4x_2. \quad (3.12)$$

Знайдемо розв'язок задачі ЛП без урахування вимоги цілочисельності змінних. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Задача (3.12)–(3.13) є основною задачею лінійного програмування. Виберемо x_1 і x_2 як вільні змінні. Тоді базисні змінні й цільову функцію запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - (-x_1 + 2x_2), \\ x_4 &= 6 - (-3x_1 + 2x_2), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$L(\bar{x}) = 0 - (x_1 + 2x_2). \quad (3.15)$$

На рис. 3.2 показано область допустимих розв'язків цієї задачі (багатокутник, утворений осями координат і прямими $x_3 = 0$ і $x_4 = 0$). Тут же світлими кружками показано цілочислові розв'язки, що задовольняють обмеження (3.11).

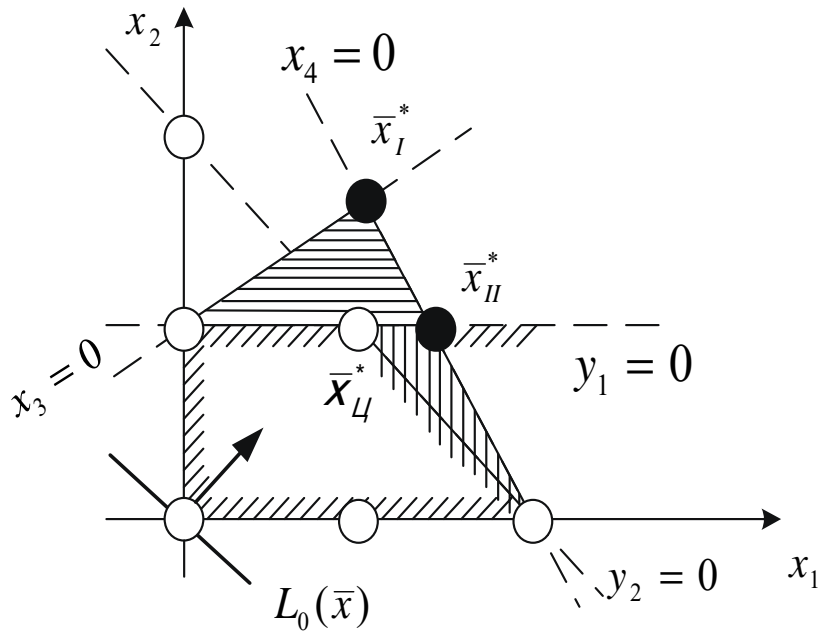


Рис. 3.2

Оптимальний розв'язок задачі ЛП (вершина \bar{x}_I^* , позначена темним кружком) містить, як це впливає з рисунка, змінну x_2 , що набуває дробового значення. Переконаємося в цьому, розв'язавши задачу симплекс-методом (табл. 3.1–3.3).

Таблиця 3.1

Таблиця 3.2

Таблиця 3.3

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|----|-------|-------------|
| | ВЧ | x_1 | \bar{x}_2 |
| $L(\bar{x})$ | 0 | 1 | 4 |
| $\uparrow x_3$ | 2 | -1 | $\boxed{2}$ |
| x_4 | 6 | 3 | 2 |

→

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|----|-------------|-------|
| | ВЧ | \bar{x}_1 | x_3 |
| $L(\bar{x})$ | -4 | 3 | -2 |
| x_2 | 1 | -1/2 | 1/2 |
| $\uparrow x_4$ | 4 | $\boxed{4}$ | -1 |

→

| БЗ | ВЗ | | |
|--------------|-----|-------|-------|
| | ВЧ | x_4 | x_3 |
| $L(\bar{x})$ | -7 | -3/4 | -5/4 |
| x_3 | 3/2 | 1/8 | 3/8 |
| x_1 | 1 | 1/4 | -1/4 |

Справді, $x_2^* = 3/2$, тому $\bar{x}_I^* = (1; 3/2; 0; 0)$ не є оптимальним розв'язком задачі цілочислового програмування.

Запишемо вираз:

$$x_2^* = 3/2 - (1/8x_4^* + 3/8x_3^*) \quad (3.16)$$

і відповідно до (3.4) перетворимо його на такий:

$$1/8x_4^* + 3/8x_3^* + x_2^* = 3/2. \quad (3.17)$$

Визначимо цілі частини коефіцієнтів при змінних x_3^* і x_4^* і вільного члена у виразі (3.17):

$$[1/8] = 0; [3/8] = 0; [3/2] = 1.$$

Тоді відповідно до (3.6) можна записати:

$$0x_4^* + 0x_3^* + x_2^* \leq 1. \quad (3.18)$$

$$0x_4^* + 0x_3^* + x_2^* \leq 1.$$

Віднімемо з виразу (3.18) вираз (3.17):

$$-1/8x_4^* - 3/8x_3^* \leq -1/2. \quad (3.19)$$

Перетворимо (3.19) на рівняння

$$-1/8x_4^* - 3/8x_3^* + y_1 \leq -1/2,$$

виразимо змінну y_1 таким чином:

$$y_1 = -1/2 - (-1/8x_4^* - 3/8x_3^*). \quad (3.20)$$

Додамо до кінцевої симплекс-таблиці 3.3 задачі лінійного програмування ще один рядок і розв'яжемо її з додатковим обмеженням (3.20). Розв'язок задачі з додатковим обмеженням наведено симплекс-таблицями 3.4–3.5. Розв'язок $\bar{x}_{II}^* = (4/3; 1; 4/9; 0)$ уже містить цілочислову змінну x_2^* . Для того щоб з'ясувати, яким чином додаткове обмеження забезпечує цілочислове значення змінної x_2^* , проаналізуємо вираз (3.20).

Таблиця 3.4

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|------|-------|--|
| | ВЧ | x_4 | \bar{x}_3 |
| $L(\bar{x})$ | -7 | -3/4 | -5/4 |
| x_2 | 3/2 | 1/8 | 3/8 |
| x_1 | 1 | 1/4 | -1/4 |
| $\uparrow y_1$ | -1/2 | -1/8 | -3/8 |

→

Таблиця 3.5

| БЗ | ВЗ | | |
|--------------|-------|-------|-------|
| | ВЧ | x_4 | y_1 |
| $L(\bar{x})$ | -16/3 | -1/3 | -10/3 |
| x_2 | 1 | 0 | 1 |
| x_1 | 4/3 | 1/5 | -2/3 |
| x_5 | 4/3 | 1/3 | -8/3 |

Підставимо в (3.20) вирази змінних x_3 і x_4 з (3.14). Після нескладних перетворень отримаємо

$$y_1 = 1 - x_2. \quad (3.21)$$

Якщо взяти $y_1 = 0$, то $y_1 = 1 - x_2 = 0$ є рівнянням прямої, паралельної до осі Ox_1 , що перетинає вісь Ox_2 у точці $x_2 = 1$. Пряма $y_1 = 1 - x_2 = 0$ відсікає ту частину багатокутника ОДР разом із розв'язком \bar{x}_I^* вихідної задачі лінійного програмування, яка не містить цілочислових значень змінної x_2 (на рис. 3.2 цю частину ОДР помічено горизонтальним штрихуванням). Таким чином, будь-яка точка $y_1 = 1 - x_2 = 0$ нової ОДР відповідає цілочислому значенню змінної x_2 .

Повернемося до табл. 3.5. Оскільки змінна x_1^* у розв'язку \bar{x}_{II}^* є нецілочисловою, продовжимо процедуру відсікання.

Запишемо вираз для x_1^* :

$$x_1^* = 4/3 - (1/3x_4^* - 2/3y_1^*)$$

або відповідно до виразу (3.4):

$$1/3x_4^* - 2/3y_1^* + x_1^* = 4/3. \quad (3.22)$$

Цілі частини коефіцієнтів при змінних і вільного члена у виразі (3.22) будуть однаковими:

$$[1/3] = 0; [-2/3] = -1; [4/3] = 1.$$

Тоді відповідно до рівняння (3.6) запишемо

$$0x_4^* - 1y_1^* + x_1^* \leq 1. \quad (3.23)$$

Віднявши з виразу (3.23) вираз (3.22), отримаємо

$$-1/3x_4^* - 1/3y_1^* \leq -1/3.$$

Увівши додаткову змінну y_2 , отримаємо таке обмеження:

$$y_2 = -1/3 - (-1/3x_4^* - 1/3y_1^*). \quad (3.24)$$

Додамо в табл. 3.5 додатковий рядок, який заповнимо коефіцієнтами з виразу (3.24), і розв'яжемо задачу лінійного програмування (табл. 3.6, 3.7).

Таблиця 3.6

| Базові змінні | Вільні змінні | | |
|----------------|---------------|-------------|-------|
| | ВЧ | \bar{x}_4 | y_1 |
| $L(\bar{x})$ | -16/3 | -1/3 | -10/3 |
| x_2 | 12 | 0 | 1 |
| x_1 | 4/3 | 1/3 | -23 |
| x_3 | 4/3 | 1/3 | -8/3 |
| $\uparrow y_2$ | -1/3 | -1/3 | -1/3 |

→

Таблиця 3.7

| Базові змінні | Вільні змінні | | |
|---------------|---------------|-------|-------|
| | ВЧ | y_1 | y_2 |
| $L(\bar{x})$ | -5 | -1 | -3 |
| x_2 | 1 | 0 | 1 |
| x_1 | 1 | 1 | -1 |
| x_3 | 1 | 1 | -3 |
| x_4 | 1 | -5 | 1 |

Оптимальний розв'язок цієї задачі лінійного програмування $\bar{x}_{III}^* = (1; 1; 1; 1; 0)$ містить цілочислові значення змінних x_1 і x_2 , отже, є оптимальним розв'язком \bar{x}_{II}^* задачі лінійного програмування.

Підставивши в рівняння (3.24) вирази для x_4 і y_1 , отримаємо

$$y_2 = 2 - x_1 - x_2.$$

Пряма $y_2 = 0$ відсікає ще одну частину ОДР, що не містить цілочислових розв'язків, у тому числі й розв'язку \bar{x}_{II}^* (на рис. 3.2 помічено вертикальним штрихуванням). Нова ОДР, утворена осями $0x_1$ і $0x_2$ з прямими $y_1 = 0$ і $y_2 = 0$, має межі, що проходять через цілочислові точки, і будь-яка вершина області відповідає одному з цілочислових розв'язків. Як випливає з рис. 3.2, вершина \bar{x}_{II}^* є найбільш віддаленою від початку координат у напрямку збування цільової функції. Оскільки вершина \bar{x}_{II}^* відповідає цілочисловому розв'язку, вона і є оптимальним розв'язком задачі ЦП.

Наведемо загальний алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування методом відсічних площин.

1. Без урахування вимоги цілочисельності розв'язується задача лінійного програмування з обмеженнями (3.1). Якщо всі змінні отриманого оптимального розв'язку є цілочисловими, то цей розв'язок буде оптимальним і для задачі ЦП.

2. Якщо кілька базисних змінних є нецілочисловими, то вибирається та з них, яка має найбільше значення. Для вибраної змінної складається додаткове обмеження вигляду (3.10).

3. Розв'язується нова задача лінійного програмування з додатковими обмеженнями. Якщо одна або кілька базисних змінних оптимального розв'язку нової задачі є нецілочисловими, то слід перейти до п.2. Процедура обчислень триває доти, доки не буде знайдено цілочисловий розв'язок або не буде доведено, що задача ЦП не має розв'язку.

3.3. Метод гілок і меж

Розглянутий вище метод відсічних площин дає змогу розв'язувати цілочислові задачі як повністю, так і частково. Однак зі збільшенням розмірності задачі ЦП швидко збільшується й обсяг обчислень. Зменшити його в деяких випадках допомагає метод гілок і меж.

Розглянемо суть методу. Нехай необхідно знайти оптимальний розв'язок задачі цілочислового програмування (3.1)–(3.2).

Позначимо через X множину невід'ємних чисел x_j , які відповідають обмеженням (3.1). Припустимо, що множину X можна розбити на підмножини $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_\eta$ і з урахуванням цілочисельності будь-якої змінної і для кожної підмножини знайти розв'язок $\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_k^*, \dots, \bar{x}_\eta^*$. Кожному розв'язку буде відповідати своє мінімальне значення цільової функції $L_{min_1}, L_{min_2}, \dots, L_{min_k}, \dots, L_{min_\eta}$. Виберемо серед підмножин X_k , де $k = \overline{1, \eta}$, таку підмножину X_l , для якої L_{min_l} буде найменшим, тобто

$$L_{min_l} = \min_k L_{min_k}. \quad (3.25)$$

Інші підмножини $X_k, k \neq l$, виключаємо з подальшого розгляду як неперспективні.

З урахуванням цілочисельності іншої змінної розіб'ємо підмножину на більш дрібні підмножини $X_{l_1}, X_{l_2}, X_{l_3}, \dots, X_{l_\rho}, \dots, X_{l_\mu}$, і для кожної з них знайдемо розв'язок $\bar{x}_{l_1}^*, \bar{x}_{l_2}^*, \dots, \bar{x}_{l_\rho}^*, \dots, \bar{x}_{l_\mu}^*$ і значення цільової функції $L_{min_{l_1}}, L_{min_{l_2}}, \dots, L_{min_{l_\rho}}, \dots, L_{min_{l_\mu}}$. Для подальшого обчислення виберемо ту підмножину X_{l_q} , для якої

$$L_{min_{l_q}} = \min_\rho L_{l_\rho}. \quad (3.26)$$

Процес розбиття множини X на все більш дрібні підмножини триває доти, доки не буде знайдено оптимального розв'язку задачі цілочислового програмування або доведено, що розв'язку не існує.

Описаний процес є розгалуженням множини X на дерево підмножин (рис. 3.3). Ідея розгалуження множини X на дерево підмножин з подальшим вибором на основі оцінювання L_{min} для кожної підмножини перспективних гілок і є основою методу гілок і меж. Слід зазначити, що цей метод застосовується для розв'язання не тільки задач цілочислового програмування, а й багатьох інших задач.

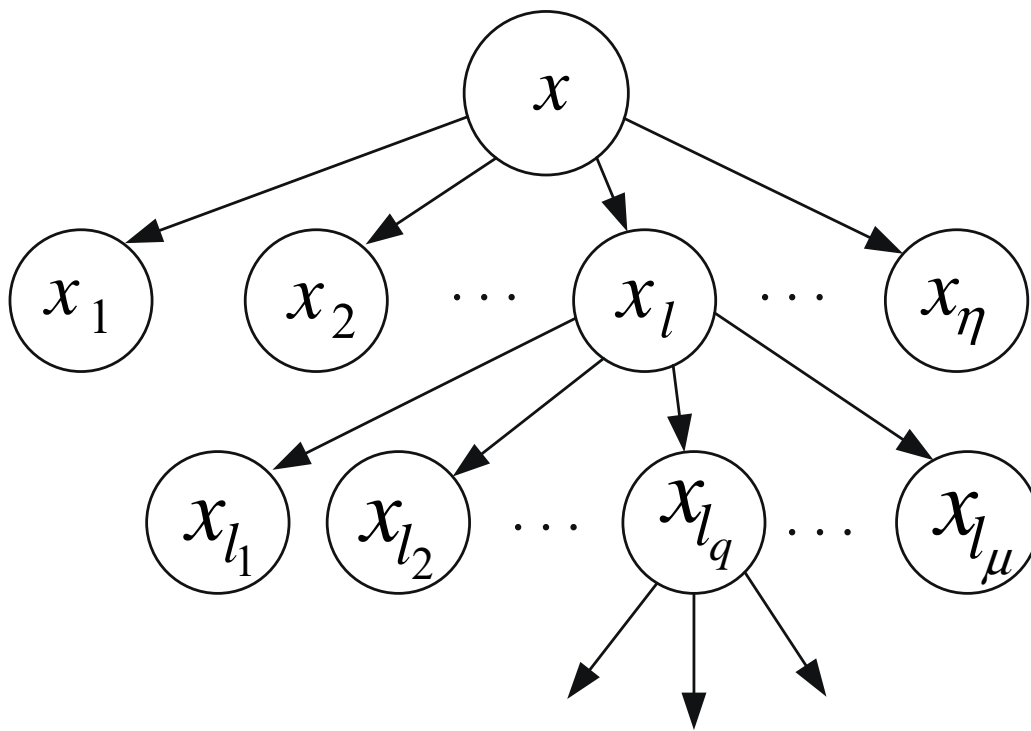


Рис. 3.3

Основним ускладненням під час практичного використання методу є визначення способу розбиття множин на підмножини й обчислення оцінки для кожної з підмножини. Проте для задач цілочислового програмування спосіб розбиття визначається порівняно легко, що й дає змогу ефективно використовувати метод гілок і меж при розв'язанні такого класу задач.

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі цілочислового програмування методом гілок і меж. Як і при використанні методу відсічних площин, спочатку розв'язуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями (3.1) без урахування вимоги цілочисельності змінних. Припустимо, що в розв'язку \bar{x}^* задачі лінійного програмування змінні $\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_k^*$ є вільними, а $\bar{x}_{k+1}^*, \bar{x}_{k+2}^*, \dots, \bar{x}_{k+l}^*, \dots, \bar{x}_{k+m}^*$ – базисними, при цьому базисні змінні обчислюються за виразами (3.3).

Якщо всі змінні $\bar{x}_{k+1}^*, \bar{x}_{k+2}^*, \dots, \bar{x}_{k+l}^*, \dots, \bar{x}_{k+m}^*$ (або задана їх частина) є цілочисловими, то розв'язок є оптимальним для задачі цілочислового програмування.

Припустимо, що змінна $\bar{x}_{k+l}^* = \beta_{k+l}$ набуває дробового значення. Відповідно до методу гілок і меж розіб'ємо область допустимих розв'язків на дві підобласті, кожна з яких містила б на своїй межі тільки цілочислові значення x_{k+l} . Очевидно, межі підобластей з урахуванням цілочисельності змінної x_{k+l} будуть визначатися з допомогою додаткових обмежень:

– для першої підобласті

$$x_{k+l} \leq \lfloor \beta_{k+l} \rfloor; \quad (3.27)$$

– для другої підобласті

$$x_{k+l} \geq \lfloor \beta_{k+l} \rfloor. \quad (3.28)$$

Увівши обмеження (3.27) і (3.28), отримаємо перше розгалуження множини допустимих розв'язків на підмножини.

Розв'яжемо задачу ЦП з обмеженнями (3.1) і (3.27), унаслідок чого отримаємо оптимальний розв'язок \bar{x}_1^* і значення цільової функції L_{min_1} . Розв'яжемо задачу ЛП з обмеженнями (3.1) і (3.28) для другої підобласті й отримаємо значення \bar{x}_2^* і L_{min_2} .

Порівняємо між собою оцінки L_{min_1} і L_{min_2} . Нехай $L_{min_2} > L_{min_1}$. Отже, друга підобласть виключається з подальшого обчислення.

Проаналізуємо розв'язок \bar{x}_1^* . Якщо всі змінні в \bar{x}_1^* є цілочисловими, то цей розв'язок є оптимальним для задачі ЦП.

Нехай $x_{1_j}^* = \gamma_{1_j}$ у розв'язку \bar{x}_1^* має дробове значення. Зробимо друге розгалуження. Увівши додаткові обмеження

$$x_{1_j} \leq \lfloor \gamma_{1_j} \rfloor, \quad (3.29)$$

$$x_{1_j} \geq \lfloor \gamma_{1_j} \rfloor + 1, \quad (3.30)$$

розіб'ємо першу підобласть на більш дрібні підобласті. Знову розв'язуємо дві задачі лінійного програмування: першу – з обмеженнями (3.1), (3.27), (3.29) і другу – з обмеженнями (3.1), (3.28) і (3.30). Унаслідок цього отримаємо оптимальний розв'язок $x_{1_1}^*$ і $x_{1_2}^*$ і значення $L_{min_{1_1}}$ і $L_{min_{1_2}}$. Порівнявши між собою значення $L_{min_{1_1}}$ і $L_{min_{1_2}}$, виключаємо з подальшого розгляду одну з підобластей, наприклад першу, якщо

$$L_{min_{1_1}} > L_{min_{1_2}}.$$

Проаналізувавши розв'язки $\bar{x}_{1_1}^*$ та $\bar{x}_{1_2}^*$, приходимо або до оптимального розв'язку задачі ЦП, або до необхідності продовження подальшого розгалуження.

Розглянемо обчислювальну процедуру методу гілок і меж і її геометричну інтерпретацію на прикладі.

Приклад 3.2. Знайти розв'язок задач (3.11) і (3.12) методом гілок і меж.

Використовуючи цей метод, спочатку розв'яжемо задачу ЦП без урахування вимоги цілочисельності змінних. Таку задачу з обмеженнями (3.11) розв'язано в попередньому прикладі, а результат наведено кінцевою симплекс-таблицею 3.3. З огляду на те, що змінна x_2 у розв'язку $\bar{x}^* = (1; 3/2; 0; 0)$ набуває дробового значення, проведемо перше розбиття області допустимих розв'язків на дві підобласті. Для цього відповідно до (3.27) і (3.28) уведемо додаткові обмеження:

$$x_2 \leq 1 \text{ і } x_2 \geq 2.$$

Розв'яжемо задачу лінійного програмування для першої підобласті, межі якої визначаються нерівностями

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6, \\ x_2 + y_1 &= 1. \end{aligned}$$

Подаючи обмеження й цільову функцію у вигляді

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - (-x_1 + 2x_2), \\ x_4 &= 6 - (3x_1 + 2x_2), \\ y_1 &= 1 - x_2, \end{aligned}$$

$$L(\bar{x}) = 0 - (x_1 + 4x_2),$$

проведемо послідовність симплекс-перетворень (табл. 3.8–3.10).

Таблиця 3.8

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|----|-------|-------------|
| | ВЧ | x_1 | \bar{x}_2 |
| $L(\bar{x})$ | 0 | 1 | 4 |
| x_3 | 2 | -1 | 2 |
| x_4 | 6 | 3 | 2 |
| $\uparrow y_1$ | 2 | 0 | <u>1</u> |

Таблиця 3.9

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|----|-----------|-------------|
| | ВЧ | x_1 | \bar{y}_1 |
| $L(\bar{x})$ | -4 | 1 | -4 |
| x_3 | 0 | -1 | -2 |
| $\uparrow x_4$ | 4 | <u>-3</u> | -2 |
| x_2 | 1 | 0 | 1 |

Таблиця 3.10

| БЗ | ВЗ | | |
|--------------|-------|-------|-------|
| | ВЧ | x_5 | x_4 |
| $L(\bar{x})$ | -16/3 | -1/8 | -10/3 |
| x_3 | 4/3 | 1/3 | -8/3 |
| x_1 | 4/3 | 1/3 | -2/3 |
| x_2 | 1 | 0 | 1 |

Оптимальний розв'язок для першої підобласті

$$\bar{x}_I^* = (4/3; 1; 4/3; 0; 0)$$

містить цілочислове значення змінної x_2 . При цьому цільова функція $L_{min_1} = -16/3$.

Для другої підобласті, яка визначається обмеженнями

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_2 &\geq 2, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 6, \\ x_2 - y_2 &= 2, \end{aligned}$$

розв'язок задачі лінійного програмування наведено симплекс-таблицями 3.11, 3.12.

Таблиця 3.11

Таблиця 3.12

| Базові змінні | Вільні змінні | | |
|----------------|---------------|-------|-------------|
| | ВЧ | x_1 | \bar{x}_2 |
| $L(\bar{x})$ | 0 | 1 | 4 |
| $\uparrow x_3$ | 22 | -1 | 2 |
| x_4 | 6 | 3 | 2 |
| y_2 | -2 | 0 | -1 |

→

| Базові змінні | Вільні змінні | | |
|---------------|---------------|---------|-------|
| | ВЧ | x_1 | x_3 |
| $L(\bar{x})$ | -4 | 3 | -2 |
| x_2 | 1 | -1/2 | 1/2 |
| x_4 | 4 | 4 | -1 |
| y_2 | -1 | 1/2 1/2 | 1/2 |

Оскільки в останньому рядку кінцевої симплекс-таблиці 3.12 вільний член є від'ємним, а інші елементи – додатними, задача лінійного програмування не має допустимих розв'язків і можна формально взяти $L_{min_2} = \infty$.

Через те, що

$$L_{min_1} < L_{min_2},$$

другу підобласть з подальшого обчислення виключаємо.

На рис. 3.4 показано розбиття області допустимих розв'язків на дві під області X_1 і X_2 прямими $y_1 = 0$ і $y_2 = 0$.

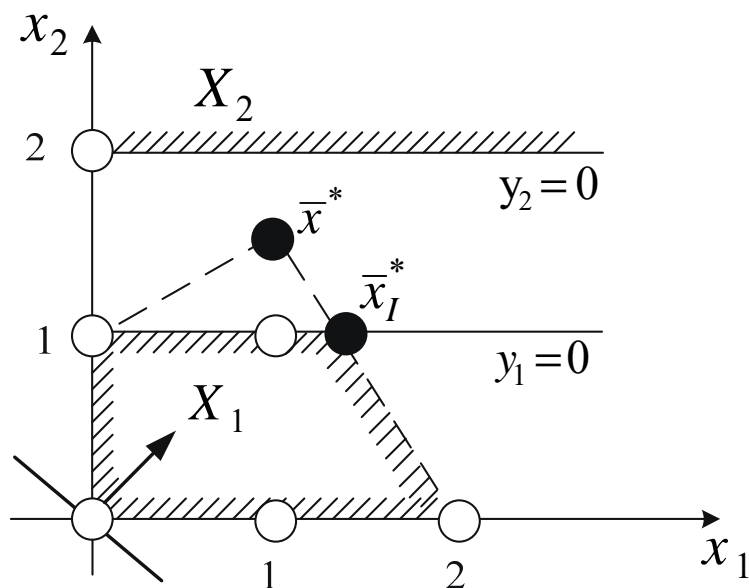


Рис. 3.4

Повернемося до першої підобласті. В оптимальному розв'язку \bar{x}_1^* її змінна $x_1^* = 4/3$ – дробове число. Тому підобласть X_1 розіб'ємо на підобласті X_{11} і X_{12} .

Оскільки $\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = 1$, то відповідно до виразів (3.29) і (3.30) уведемо додаткові обмеження:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 \text{ – для підобласті } X_{11}; \\ x_1 &\geq 2 \text{ – для підобласті } X_{12}. \end{aligned}$$

Розв'яжемо задачу лінійного програмування для підобласті X_{11} із застосуванням обмежень

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_2 &\leq 1, \\ x_1 &\leq 1. \end{aligned}$$

Переходячи від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь

$$\begin{aligned}
 -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\
 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6, \\
 x_2 + y_1 &= 1, \\
 x_1 + y_3 &= 1
 \end{aligned}$$

і застосовуючи табличний симплекс-метод, отримаємо послідовність симплекс-таблиць 3.13–3.15.

Таблиця 3.13

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|----|-------|-------------|
| | ВЧ | x_1 | \bar{x}_2 |
| $L(\bar{x})$ | 0 | 1 | 4 |
| x_3 | 2 | -1 | 2 |
| x_4 | 6 | 3 | 2 |
| $\uparrow y_1$ | 1 | 0 | <u>1</u> |
| y_3 | 1 | 1 | 0 |

Таблиця 3.14

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|----|-------------|-------|
| | ВЧ | \bar{x}_1 | y_1 |
| $L(\bar{x})$ | -4 | 1 | -4 |
| x_3 | 4 | -1 | -2 |
| x_4 | 4 | 3 | -2 |
| x_2 | 1 | 0 | 1 |
| $\uparrow y_3$ | 1 | <u>1</u> | 0 |

Таблиця 3.15

| БЗ | ВЗ | | |
|--------------|----|-------|-------|
| | ВЧ | y_3 | y_1 |
| $L(\bar{x})$ | -5 | -1 | -4 |
| x_3 | 1 | 1 | -2 |
| x_4 | 1 | -3 | -2 |
| x_2 | 1 | 0 | 1 |
| x_1 | 1 | 1 | 0 |

Розв'язок $\bar{x}_{1_1}^* = (1; 1; 1; 0; 0)$ є цілочисловим, при цьому $L_{min1_1} = -5$.

Для під області X_{1_2} система обмежень має вигляд

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\
 3x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\
 x_2 &\leq 1, \\
 x_1 &\geq 2,
 \end{aligned}$$

або в канонічній формі

$$\begin{aligned}
 -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\
 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6, \\
 x_2 + y_1 &= 1, \\
 x_1 - y_4 &= 2.
 \end{aligned}$$

Розв'язуючи задачу лінійного програмування табличним симплекс-методом, отримаємо послідовність симплекс-таблиць (табл. 3.16–3.18).

Таблиця 3.16

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|----|-------------|-------|
| | ВЧ | \bar{x}_1 | x_2 |
| $L(\bar{x})$ | 0 | 1 | 4 |
| x_3 | 2 | -1 | 2 |
| x_4 | 6 | 3 | 2 |
| y_1 | 1 | 0 | 1 |
| $\uparrow y_4$ | -2 | -1 | 0 |

Таблиця 3.17

| БЗ | ВЗ | | |
|----------------|----|-------|-------------|
| | ВЧ | y_4 | \bar{x}_2 |
| $L(\bar{x})$ | -2 | 1 | 4 |
| x_3 | 4 | -1 | -2 |
| $\uparrow x_4$ | 0 | 3 | 2 |
| y_1 | 1 | 0 | 1 |
| x_1 | 2 | -1 | 0 |

Таблиця 3.18

| БЗ | ВЗ | | |
|--------------|----|-------|-------|
| | ВЧ | y_3 | y_1 |
| $L(\bar{x})$ | -2 | -5 | -2 |
| x_3 | 4 | -4 | -1 |
| x_2 | 0 | 3/2 | 1/2 |
| x_2 | 1 | -3/2 | -1/2 |
| x_1 | 1 | -1 | 0 |

Розв'язок $\bar{x}_{1_2}^* = (1; 0; 4; 0; 1; 0)$ також є цілочисловим, проте $L_{min 1_2} = -2$. Оскільки

$$L_{min 1_1} < L_{min 1_2},$$

оптимальним розв'язком задачі цілочислового програмування буде $\bar{x}_{1_1}^* = (1; 0; 4; 0; 1; 0)$, що збігається з результатом, отриманим методом відсічних площин. На рис. 3.5 показано під області X_{1_1} і X_{1_2} , отримані розбиттям області X прямими $y_3 = 0$ і $y_4 = 0$.

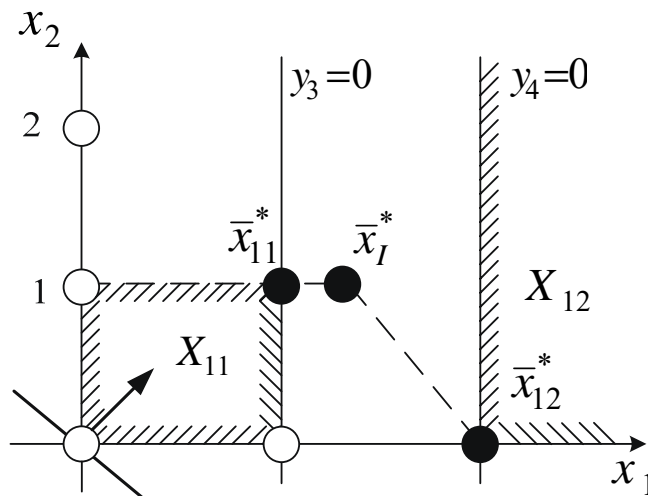


Рис. 3.5

Характерно, що під область X_{1_2} містить тільки одну точку $\bar{x}_{1_2}^*$, що належить до області допустимих розв'язків задачі цілочислового програмування.

Таким чином, в обчислюваному відношенні алгоритм розв'язання задачі цілочислового програмування методом гілок і меж є послідовністю задач лінійного програмування. При цьому на кожному кроці розгалуження кількість обмежень відповідної задачі збільшується на одиницю.

Дерево підмножин для розглядуваної задачі зображено на рис.3.6.

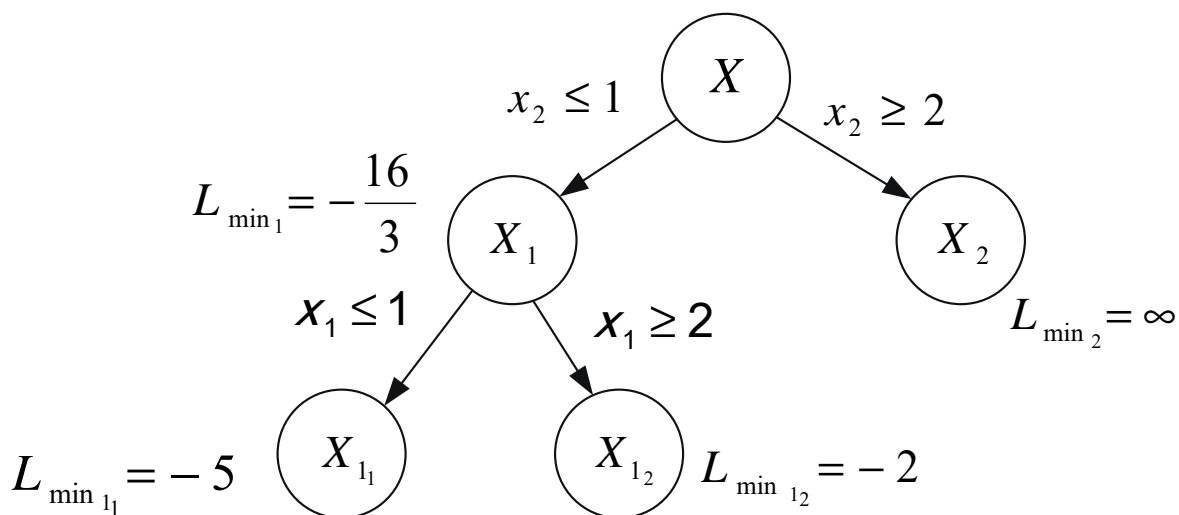


Рис. 3.6

Для задач цілочислового програмування кількість розгалужень є звичайною, якщо область допустимих розв'язків є скінченною. Отже, якщо область допустимих розв'язків є обмеженою, то завжди можна знайти цілочисловий розв'язок задачі за скінченну кількість кроків.

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади задач професійного спрямування, для розв'язання яких доцільно скористатися методами цілочислового програмування.
2. Назвіть вимоги до допустимих розв'язків задач цілочислового програмування.
3. Обґрунтуйте зміст методу відсічних площин.
4. Наведіть алгоритм розв'язку задач лінійного програмування методом відсічних площин.
5. Назвіть переваги використання методу гілок і меж для розв'язання задач цілочислового програмування
6. Яким чином поділяють множини на підмножини під час розв'язання задач цілочислового програмування?

4. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Класифікація задач нелінійного програмування

Розглянуті вище методи розв'язання задач програмування охоплюють порівняно невеликий клас задач оптимального керування. Задачі, у яких або обмеження, або цільова функція, або і обмеження, і цільова функція одночасно є нелінійними функціями змінних x_j , належать до задач нелінійного програмування (НЛП).

Побудуємо в координатах x_1 та x_2 область допустимих значень розв'язків розглядуваної задачі. Оскільки обмеженнями тут є лінійні нерівності, ОДР задачі буде опуклий багатокутник (рис. 4.1).

Задамо деяке значення цільової функції $f(\bar{x}) = F_1$. Тоді вираз

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = F_1$$

є рівнянням кола з радіусом $\sqrt{F_1}$ і центром у точці $M(3, 3)$. Будь-яка точка цього кола в координатах x_1 та x_2 відповідає значенню F_1 цільової функції. Зменшимо значення цільової функції до $f(\bar{x}) = F_2$. Її новому значенню буде відповідати коло з меншим радіусом $\sqrt{F_2}$ і центром у точці $M(3, 3)$.

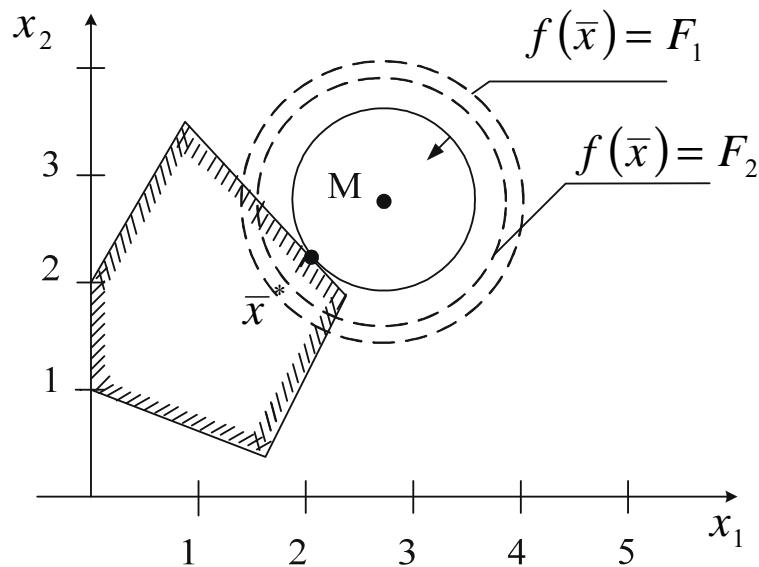


Рис. 4.1

Продовжуючи зменшувати цільову функцію (зменшуючи радіус кола), знайдемо таке коло, яке дотикатиметься межі ОДР у точці \bar{x}^* . Ця точка й буде оптимальним розв'язком цієї задачі.

З рис. 4.1 видно, що хоча оптимальний розв'язок буде в точці на межі ОДР, він не збігається ні з однією з вершин багатокутника ОДР. Таким чином, для пошуку оптимального розв'язку тут уже не можна використовувати процедуру перебирання вершин, як це мало місце при розв'язанні задач лінійного програмування.

Приклад 4.2. Знайти значення змінних x_1 і x_2 , що задовольняють обмеження прикладу 4.1 і забезпечують мінімум цільової функції

$$f(\bar{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2.$$

Оскільки обмеження в розглядуваній задачі залишаються ті самі, що і в прикладі 4.1, областю допустимих розв'язків є все той же опуклий трикутник (рис. 4.2), а центр сім'ї кіл, що характеризують значення цільової функції, знаходиться всередині багатокутника ОДР. Стрілкою позначено напрямок зменшення цільової функції. Мінімальне значення цільової функції дорівнює нулю, тобто набувається в точці з координатами (1, 2).

Таким чином, з розглянутого прикладу випливає, що в нелінійних задачах оптимальний розв'язок може бути й усередині області допустимих розв'язків.

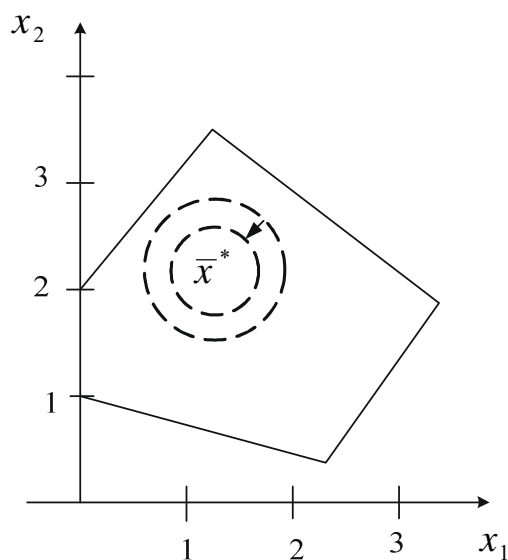


Рис. 4.2

Приклад 4.3. Знайти додатні значення змінних, що задовольняють обмеження

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 6, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\ x_1 + x_2 &\geq 7, \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 &\geq 4 \end{aligned}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = -2x_1 - x_2.$$

Тут цільова функція є лінійною функцією змінних x_1 і x_2 , але серед обмежень остання нерівність є суто нелінійною, що й дає змогу віднести цю задачу до класу нелінійних задач. На рис. 4.3 зображено область допустимих розв'язків цієї задачі.

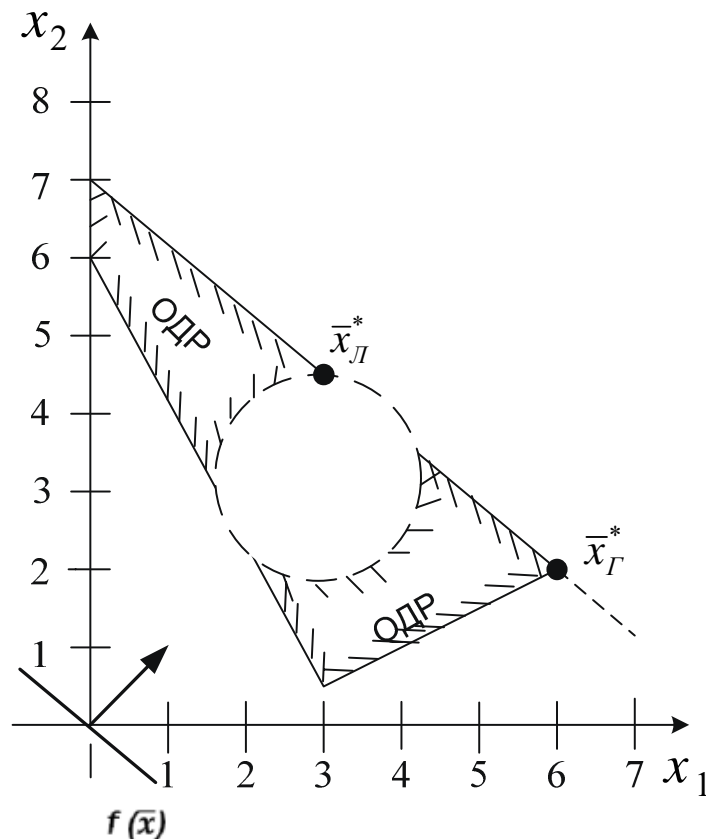


Рис. 4.3

З рисунка випливає, що ОДР складається з двох незв'язаних підобластей. У задачах лінійного програмування така конфігурація ОДР означала б відсутність допустимих розв'язків. У розглядуваній же задачі допустимі розв'язки є. Більш того, цільова функція набуває мінімуму не в одній, а в двох точках і області допустимих розв'язків, причому один із мінімумів є локальним, а другий – глобальним.

Наведені приклади дають змогу виокремити такі особливості задач нелінійного програмування:

– область допустимих розв'язків задач нелінійного програмування не завжди є опуклою і може складатися з декількох незв'язаних підобластей;

– цільова функція задачі нелінійного програмування може мати кілька екстремумів (мінімумів і максимумів);

– оптимальний розв'язок задачі нелінійного програмування може знаходитися як на межі, так і всередині області допустимих розв'язків.

Розглянемо такі поняття, як опукла область, опукла функція, локальний і глобальний екстремуми, які мають важливе значення при розв'язанні задач нелінійного програмування.

Нехай у n -вимірному просторі задано множину X точок $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$. Виберемо з цієї множини дві довільні точки $\bar{x}^{(1)}$ і $\bar{x}^{(2)}$ і з'єднаємо їх відрізком прямої.

Множину точок X називають опуклою, якщо кожна точка відрізка, проведеного через дві точки $\bar{x}^{(1)}$ і $\bar{x}^{(2)}$, які належать множині X , належить цій множині.

На рис.4.4, а зображено приклади опуклих множин точок на площині, а на рис. 4.4, б – неопуклих.

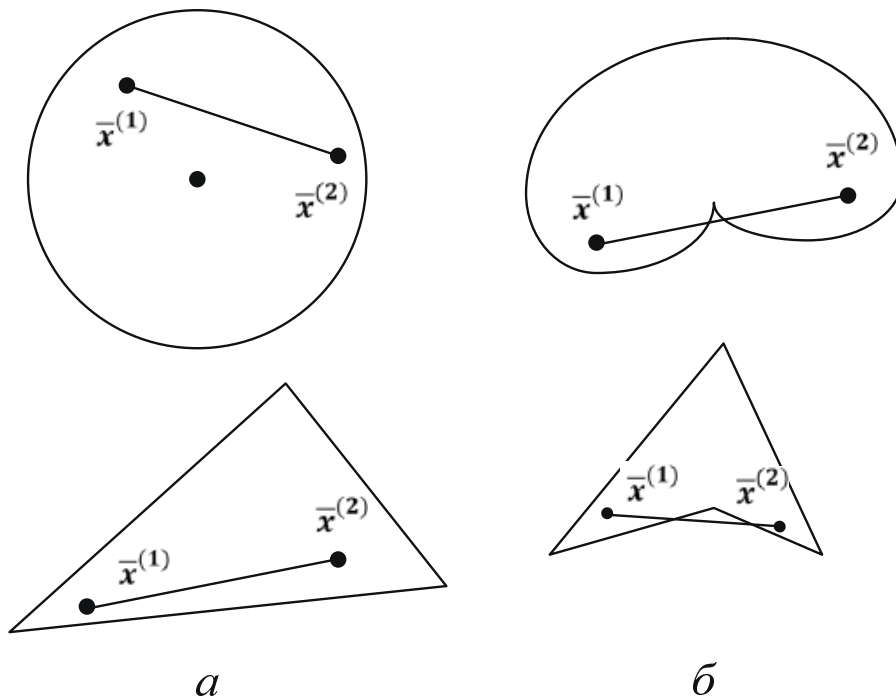


Рис. 4.4

Прикладами опуклих множин у тривимірному просторі є області, обмежені сферою, призмою, пірамідою і т. ін. Зазначимо, що області допустимих розв'язків у задачах лінійного програмування переважно мають форму опуклих множин.

Розглянемо функцію

$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

У загальному випадку ця функція описує гіперповерхню в n -вимірному просторі. З'єднаємо дві точки $f(\bar{x}^{(1)})$ і $f(\bar{x}^{(2)})$, які належать гіперповерхні, відрізком прямої.

Функцію $f(\bar{x})$ називають опуклою, якщо відрізок, що з'єднує дві будь-які точки, лежить на поверхні, що описується функцією, або вище від неї.

Математичний вираз опуклості функції запишемо таким чином:

$$\lambda f(\bar{x}^{(1)}) + (1 - \lambda)f(\bar{x}^{(2)}) \geq f[\lambda \bar{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\bar{x}^{(2)}], \quad (4.3)$$

де $0 \leq \lambda \leq 1$.

На рис. 4.5 суцільною лінією показано опуклу функцію $f(\bar{x})$ однієї змінної x .

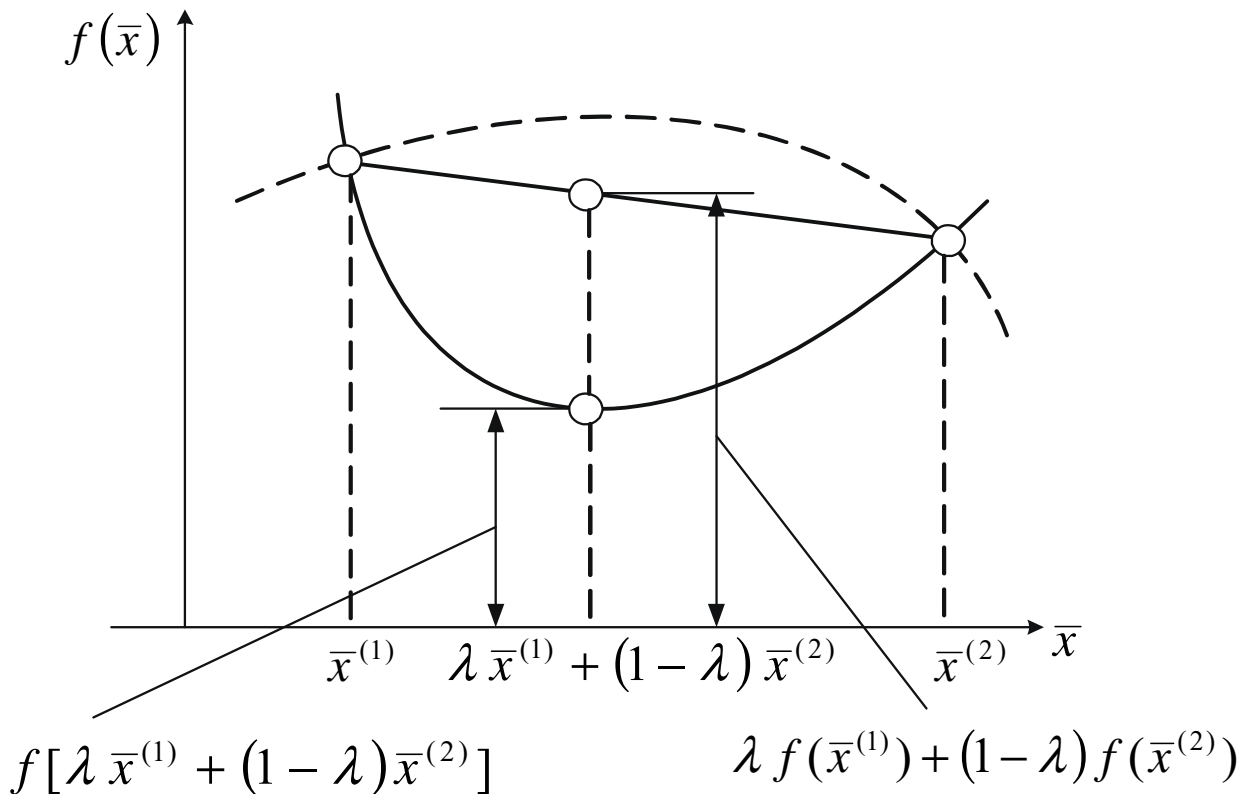


Рис. 4.5

З цього рисунка випливає, що відрізок, який з'єднує точки $f(\bar{x}^{(1)})$ і $f(\bar{x}^{(2)})$, проходить вище від функції $f(\bar{x})$. Якщо відрізок, який з'єднує дві будь-які точки функції $f(\bar{x})$, лежить на поверхні, що описується цією функцією, або нижче від неї, то таку функцію називають увігнутою.

Математично умовувгнутості запишемо таким чином:

$$\lambda f(\bar{x}^{(1)}) + (1 - \lambda)f(\bar{x}^{(2)}) \leq f[\lambda\bar{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\bar{x}^{(2)}], \quad (4.4)$$

де $0 \leq \lambda \leq 1$.

Увігнуту функцію змінної X показано пунктирною лінією на рис.4.5. Функція $f(\bar{x})$, визначена на замкнутій множині X , у точці $\bar{x}_{Lmin} \subseteq X$ набуває локального мінімуму, якщо знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що для всіх \bar{x} , які задовольняють нерівність $|\bar{x} - \bar{x}_{Lmin}| < \varepsilon$, виконується нерівність $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_{Lmin})$. У точці \bar{x}_{Lmax} функція $f(\bar{x})$ набуває свого локального максимуму.

На рис. 4.6 показано функцію однієї змінної \bar{x} . Множина X є сукупністю точок відрізка осі OX , що знаходиться між \bar{x}_{min} і \bar{x}_{max} . Очевидно, біля точки \bar{x}_{Lmin} виконується нерівність $f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_{Lmin})$.

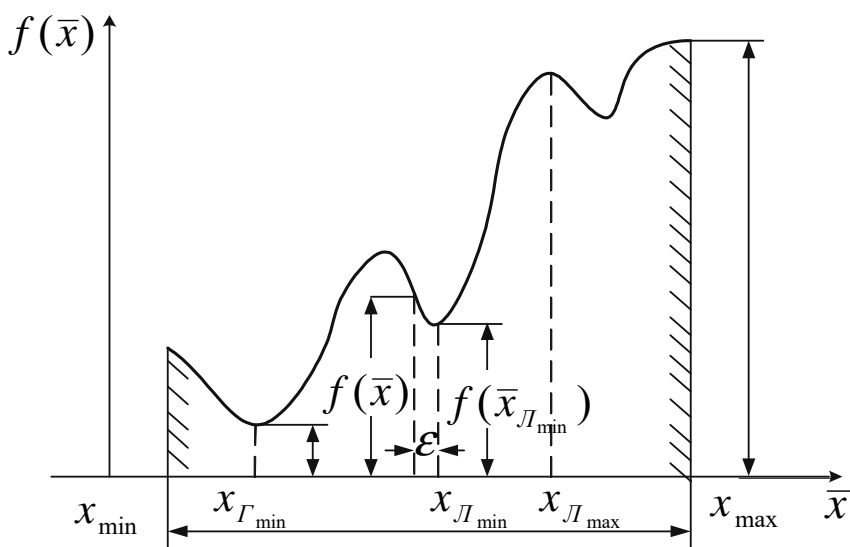


Рис. 4.6

Таким чином, у точці \bar{x}_{Lmin} функція набуває локального мінімуму. З рисунка також випливає, що функція $f(\bar{x})$ має ще два локальні мінімуми й чотири локальні максимуми. При цьому функція набуває двох максимумів усередині множини X , а ОДР – на її межах у точках \bar{x}_{min} і \bar{x}_{max} .

Функція, зображена на рис. 4.6, не є ані опуклою, ані вгнутою.

Якщо для будь-якого $\bar{x} \in X$ виконується нерівність $f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_{\Gamma_{min}})$, то в точці $\bar{x}_{\Gamma_{min}}$ функція $f(\bar{x})$ набуває глобального мінімуму. При виконанні нерівності $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_{\Gamma_{max}})$ для любого $\bar{x} \in X$ у точці $\bar{x}_{\Gamma_{max}}$ функція $f(\bar{x})$ набуває глобального максимуму.

Функція, зображена на рис. 4.6, набуває глобального мінімуму в точці $\bar{x}_{\Gamma_{min}}$. Очевидно, глобальний мінімум є найменшим з усіх локальних мінімумів. Функція $f(\bar{x})$ набуває глобального максимуму на межі множини X , тобто в точці $\bar{x}_{\Gamma_{max}} = \bar{x}_{max}$.

Розглянемо властивості опуклих функцій.

1. Для опуклої функції локальний мінімум $f(\bar{x}_{L_{min}})$ є її глобальним мінімумом $f(\bar{x}_{\Gamma_{min}})$. Цю властивість наочно пояснено на рис. 4.7, а, де зображено опуклу функцію однієї змінної X .

2. Опукла функція набуває глобального максимуму в одній з декількох точок на межі множини X .

3. Для опуклої функції не може бути двох і більше різних локальних мінімумів.

4. Якщо функція набуває глобального мінімуму в двох різних точках множини X , то вона набуває глобального мінімуму і на нескінченній множині точок множини X . Цю властивість показано на рис. 4.7, б. Справді, якщо функція набуває глобального мінімуму в точках $\bar{x}_{1\Gamma_{min}}$ і $\bar{x}_{2\Gamma_{min}}$, то, очевидно, вона набуває глобального мінімуму і в будь-якій точці відрізка $(\bar{x}_{1\Gamma_{min}}, \bar{x}_{2\Gamma_{min}})$.

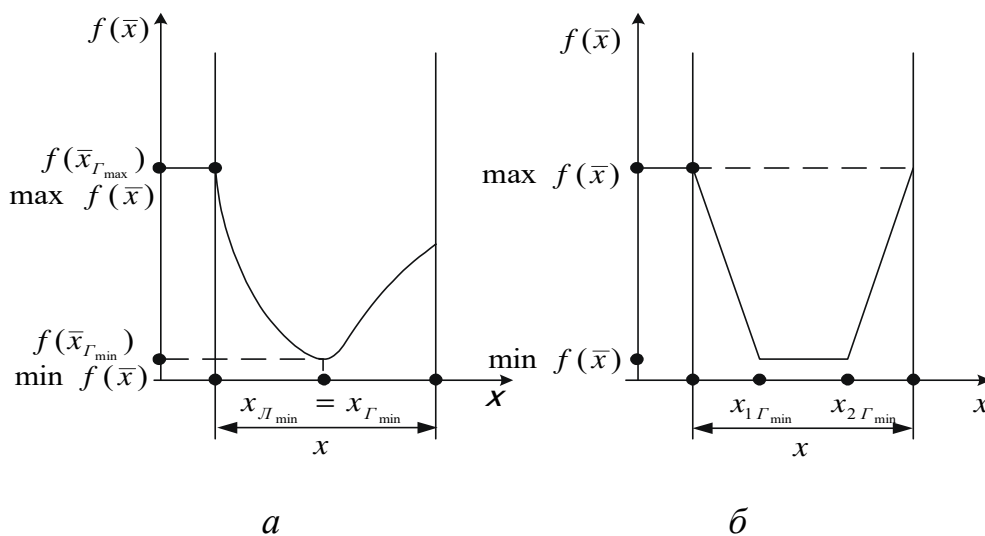


Рис. 4.7

Перелічені властивості є правильними й для вгнутих функцій. Відмінність полягає в тому, що для вгнутих функцій мінімуми замінюють на максимуми і навпаки.

Спробуємо тепер класифікувати задачі нелінійного програмування [11]. Серед усієї безлічі задач нелінійного програмування можна виокремити класичні й некласичні задачі.

Класичні задачі НЛП можна розв'язувати з допомогою класичних методів оптимізації, у яких використовується диференціальне обчислення. Ці задачі мають такі особливості:

- обмеження в загальному випадку є нелінійними рівняннями;
- змінні можуть набувати будь-яких, у тому числі й від'ємних, значень;
- цільова функція й обмеження є неперервними диференційованими (щонайменше двічі) функціями.

Якщо ці особливості не виконуються, то задачі НЛП належать до некласичних задач.

Задачі нелінійного програмування, у яких обмеження й цільова функція є опуклими функціями, належать до задач опуклого нелінійного програмування. Якщо обмеження й цільова функція описуються вгнутими функціями, то такі задачі належать до задач увігнутого нелінійного програмування. Для цих задач глобальним буде будь-який знайдений локальний мінімум або максимум. Це впливає з властивостей опуклих (увігнутих) функцій. Тому процедуру пошуку глобального екстремуму в задачах опуклого (увігнутого) нелінійного програмування можна істотно спростити порівняно з задачами, які мають обмеження й цільову функцію загального вигляду. Зауважимо, що задачі випуклого й увігнутого програмування можуть належати як до класичних, так і до некласичних задач.

Зазначимо, що функцію вигляду

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (4.5)$$

називають сепарабельною функцією.

За цією ознакою розрізняють задачі НЛП:

- із сепарабельною цільовою функцією вигляду (4.5);
- із сепарабельними обмеженнями вигляду

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) \geq b_i \quad (4.6)$$

- із сепарабельними цільовою функцією й обмеженнями.

Зауважимо, якщо $f_j(x_j)$ і $g_{ij}(x_j)$ є лінійними функціями, то задача НЛП із сепарабельними цільовою функцією й обмеженнями стає задачею або лінійного, або цілочислового програмування.

Серед задач НЛП із сепарабельними обмеженнями й цільовою функцією важливими є задачі квадратичного програмування, для яких цільову функцію можна подати як суму лінійної й квадратичної функцій:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \dots \\ &\quad \dots + d_{kj}x_kx_j + \dots + d_{nn}x_n^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj}x_kx_j, \end{aligned} \quad (4.7)$$

а обмеження – лінійними рівняннями або нерівностями вигляду

$$a_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \geq b_i. \quad (4.8)$$

Наведемо ще один клас задач із сепарабельними обмеженнями, для яких цільова функція має вигляд

$$f(\bar{x}) = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n}{d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n}, \quad (4.9)$$

а обмеженнями є лінійні рівняння або нерівності. Такі задачі називають задачами дробово-лінійного програмування.

4.2. Методи розв'язання класичних задач нелінійного програмування

Найпростіша класична задача нелінійного програмування формулюється таким чином: знайти такі значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$, які претворюють на мінімум (або на максимум) цільову функцію

$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), \quad (4.10)$$

де $f(\bar{x})$ – неперервна диференційована функція.

Наведена задача характеризується тим, що обмеженна змінні $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ немає. Відомо [11], що необхідною умовою існування мінімуму (або максимуму) цільової функції (4.10) є рівність нулю часткових похідних першого порядку. Якщо продиференціюємо (4.10) за $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ і прирівняємо часткові похідні до нуля, то отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} &= 0, \\ &\dots \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} &= 0, \\ &\dots \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} &= 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо значення $x_1^*, x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*$ змінних, при яких цільова функція $f(\bar{x})$ може набувати мінімуму або максимуму.

Однак рівність нулю часткових похідних першого порядку є необхідною, але недостатньою умовою існування екстремуму. Часткові похідні функції $f(\bar{x})$ перетворюються на нуль і в сідлових точках. Одну з таких точок для функції двох змінних x_1 і x_2 зображено на рис. 4.8.

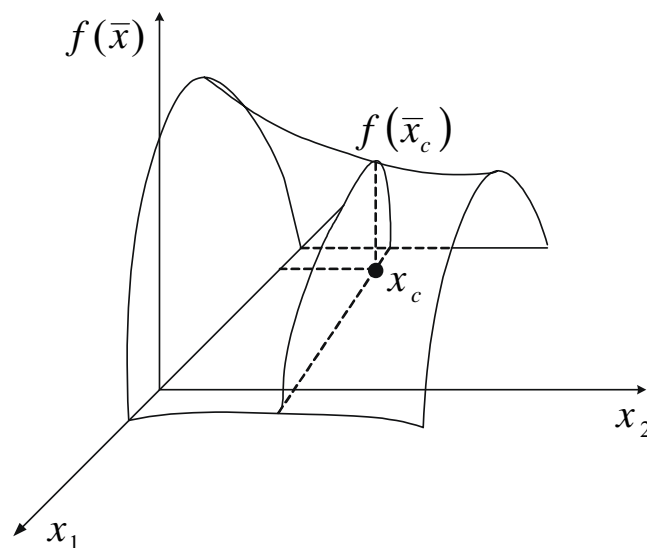


Рис. 4.8

Для розуміння того, чи є точка $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$, у якій часткові похідні перетворюються на нуль, точкою екстремуму або сідловою точкою, необхідно розрахувати визначник матриці других часткових похідних у цій точці, тобто

$$\left\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\bar{x} = \bar{x}^*} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}_{\bar{x} = \bar{x}^*}. \quad (4.12)$$

Якщо $\left\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \neq 0$, то в точці $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$ функція $f(\bar{x})$ набуває екстремуму (мінімуму або максимуму). Якщо $\left\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\| = 0$, то точка \bar{x}^* є сідловою точкою.

Для визначення характеру екстремуму введемо поняття головного мінора k -го порядку. Головним мінором k -го порядку Δ_k називають визначник матриці, яка утворюється шляхом викреслювання перших $(n-k)$ рядків і $(n-k)$ стовпців матриці $(n \times n)$. Наприклад, для матриці (3×3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{pmatrix}$$

головними мінорами будуть

$$\Delta_1 = | a_{33} |; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} & a_{22} \\ a_{22} & a_{22} & a_{22} \\ a_{22} & a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, якщо всі головні мінори матриці $\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \|$ є додатними (матриця є додатно визначеною), то функція $f(\bar{x})$ у точці \bar{x}^* набуває мінімуму. Якщо ж головний мінор першого порядку матриці $\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \|$ є від'ємним, а знаки інших головних мінорів чергуються (матриця є від'ємно визначеною), то в точці \bar{x}^* функція $f(\bar{x})$ набуває максимуму.

Приклад 4.4. Знайти додатне значення змінних x_1 і x_2 , які перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2.$$

Диференціюючи $f(\bar{x})$ за x_1 і x_2 і прирівнюючи часткові похідні до нуля, отримуємо

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = 2x_1^* = 0,$$

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} = 2x_2^* = 0.$$

Унаслідок розв'язання цієї системи рівнянь отримаємо

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad \text{або } \bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 0).$$

Побудуємо матрицю других часткових похідних:

$$\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \|_{\bar{x}=\bar{x}^*} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори цієї матриці

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

є додатними.

Таким чином, у точці $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ функція $f(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2$ набуває мінімуму. На рис. 4.9 зображено параболоїд, який

описується функцією $f(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2$. У точці $\bar{x}_6^* = (0, 0)$ значення $f(\bar{x}_6^*) = f_{min}^{(6)} = 0$.

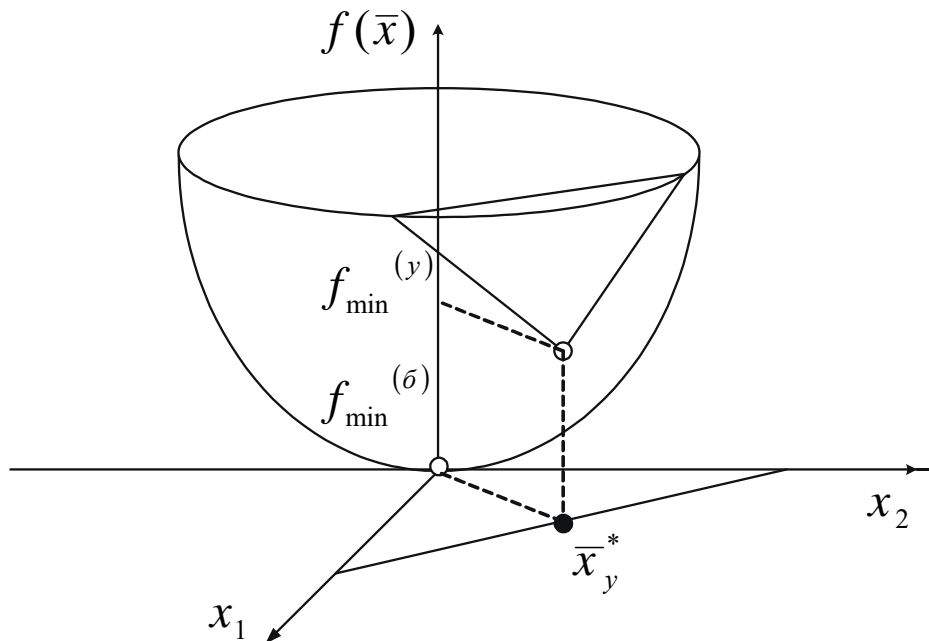


Рис. 4.9

Приклад 4.5. Знайти додатні значення змінних x_1 і x_2 , які задовольняють обмеження

$$3x_1 + x_2 = 6$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2.$$

Рівняння-обмеження

$$3x_1 + x_2 - 6 = 0$$

є рівнянням прямої в координатах x_1 і x_2 . Таким чином, у цій задачі точки \bar{x} є точками, які належать прямій. Уведення цього обмеження, як впливає з рис. 4.9, суттєво змінює положення мінімуму цільової функції $f(\bar{x})$.

Екстремум цільової функції за відсутності обмежень називають безумовним екстремумом, а за наявності обмежень – умовним екстремумом. На рис.4.9 показано, що безумовний мінімум функції $f(\bar{x})$ характеризується значенням $f_{min}^{(6)}$, а умовний – $f_{min}^{(y)}$.

Тут n – кількість змінних, а m – кількість рівнянь-обмежень у задачах (4.13) – (4.14).

Підставимо вирази для $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+l}, \dots, x_{k+m}$ з (4.15) у вираз для цільової функції:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = f[x_1, x_2, \dots, x_k, h_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, x_{k+m}] &= \\ &= f[h_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, h_{k+m}(x_1, x_2, \dots, x_k)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Тепер задачі (4.13) і (4.14) будуть формулюватися таким чином: знайти такі значення змінних x_1, x_2, \dots, x_k , які перетворюють на мінімум (або на максимум) цільову функцію (4.16). Така задача вже є задачею безумовної оптимізації. Оскільки обмежень немає, для її розв'язання можна використати розглянуту вище процедуру. Кількість змінних у цільовій функції (4.16) зменшилося до $k = n - m$. Це й дало назву методу.

Розв'яжемо останню задачу методом виключення змінних. Для цього, використавши рівняння-обмеження

$$3x_1 + x_2 = 6,$$

виразимо змінну x_2 через x_1 :

$$x_2 = 6 - 3x_1.$$

Підставивши x_2 у вираз для $f(\bar{x})$, отримаємо

$$f(\bar{x}) = f(x_1) = x_1^2 + (6 - 3x_1)^2.$$

Здиференціюємо $f(\bar{x})$ за x_1 і прирівняємо похідну до нуля:

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = 2x_1^* - 6(6 - 3x_1^*) = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо $x_1^* = 1,8$. Підставивши значення x_1^* у вираз для x_2 , знайдемо $x_2^* = 0,6$. Таким чином, оптимальним розв'язком задачі буде $\bar{x}_y^* = (1,8; 0,6)$. Упевнимися в тому, що в точці $\bar{x}_y^* = (1,8; 0,6)$ цільова функція $f(\bar{x})$ набуває мінімуму.

Складемо матрицю других часткових похідних у точці \bar{x}_y^* :

$$\left\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\bar{x} = \bar{x}_y^*} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори цієї матриці $\Delta_1 = 2$; $\Delta_2 = 4$ є додатними. Таким чином, $\bar{x}_y^* = (1,8; 0,6)$ обумовлює мінімум цільової функції. При цьому умовний мінімум

$$f(\bar{x}^*) = f_{min}^y = 3,6.$$

Метод виключення змінних є ефективним для розв'язання тих задач, де рівняння-обмеження дають змогу досить просто виразити одні змінні через інші. Однак у деяких випадках цього зробити не вдається. Для розв'язання таких задач використовують інші методи, зокрема метод невизначених множників Лагранжа.

Метод невизначених множників Лагранжа. Цей метод розв'язання класичних задач НЛП розглянемо для випадку двох змінних, а отримані результати застосуємо для загального випадку n змінних.

Нехай необхідно знайти значення змінних x_1 та x_2 , які задовольняють обмеження

$$g(x_1, x_2) = b \quad (4.17)$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2). \quad (4.18)$$

Відомо [14], що неявною функцією x_2 незалежної змінної x_1 називають функцію, значення якої знаходять з рівняння зв'язку між x_1 і x_2 , не розв'язаного відносно x_2 . Виходячи з цього означення, можна вважати, що рівняння (4.17) визначає x_2 як функцію від x_1 у неявному вигляді.

Згідно з правилом диференціювання неявної функції отримаємо:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{g'_{x_1}(x_1, x_2)}{g'_{x_2}(x_1, x_2)}, \quad (4.19)$$

$$\text{де } g'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad g'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Знайдемо повну похідну за x_1 цільової функції $f(\bar{x})$. Оскільки $f(\bar{x})$ є складною функцією (з огляду на те, що x_2 залежить від x_1) повна похідна буде визначатися виразом

$$\frac{df(\bar{x})}{dx_1} = f'_{x_1}(x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1, x_2) \frac{dx_2}{dx_1}, \quad (4.20)$$

$$\text{де } f'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Підставивши (4.19) у (4.20), отримаємо

$$\frac{df(\bar{x})}{dx_1} = f'_{x_1}(x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1, x_2) \frac{g_{x_1}(x_1, x_2)'}{g'_{x_2}(x_1, x_2)}. \quad (4.21)$$

Якщо в точці екстремуму

$$\frac{df(\bar{x})}{dx_1} = 0,$$

то з урахуванням (4.21) можна записати

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1, x_2) \frac{g_{x_1}(x_1, x_2)'}{g'_{x_2}(x_1, x_2)} = 0,$$

або

$$\frac{f'_{x_1}(x_1, x_2)}{g'_{x_1}(x_1, x_2)} = \frac{f'_{x_2}(x_1, x_2)}{g'_{x_2}(x_1, x_2)}. \quad (4.22)$$

Позначимо кожне з цих відношень через $-\lambda$:

$$\frac{f'_{x_1}(x_1, x_2)}{g'_{x_1}(x_1, x_2)} = -\lambda, \quad (4.23)$$

$$\frac{f'_{x_2}(x_1, x_2)}{g'_{x_2}(x_1, x_2)} = -\lambda. \quad (4.24)$$

Тоді з (4.23) і (4.24) отримаємо рівняння

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) + \lambda g'_{x_1}(x_1, x_2) = 0, \quad (4.25)$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) + \lambda g'_{x_2}(x_1, x_2) = 0, \quad (4.26)$$

які разом з рівнянням $g(x_1, x_2) = b$ дають змогу знайти значення змінних x_1, x_2 і λ .

Рівняння (4.25) і (4.26) можна отримати таким чином. Уведемо допоміжну функцію

$$G(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[g(x_1, x_2) - b], \quad (4.27)$$

що має назву функції Лагранжа.

Знаходимо часткові похідні від $G(x_1, x_2, \lambda)$ і прирівнюємо їх до нуля, отримаємо шукані рівняння для визначення x_1, x_2, λ у точках можливих екстремумів

$$\frac{\partial G(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = f'_{x_1}(x_1, x_2) + \lambda g'_{x_1}(x_1, x_2) = 0,$$

$$\frac{\partial G(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = f'_{x_2}(x_1, x_2) + \lambda g'_{x_2}(x_1, x_2) = 0,$$

$$\frac{\partial G(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2) - b = 0.$$

Неважко переконатися, що введення допоміжної змінної λ (невизначеного множника Лагранжа) дає змогу від задачі умовної оптимізації перейти до задачі безумовної оптимізації. Узагальнимо отримані результати на завдання (4.13), (4.14). Складемо функцію Лагранжа:

$$G(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \lambda_1[g_1(\bar{x}) - b_1] + \lambda_2[g_2(\bar{x}) - b_2] + \dots \quad (4.28)$$

$$\dots + \lambda_i[g_i(\bar{x}) - b_i] + \dots + \lambda_m[g_m(\bar{x}) - b_m],$$

де $g_i(\bar{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$.

Очевидно, кількість невизначених множників λ_i у функції Лагранжа буде дорівнювати кількості рівнянь-обмежень задачі нелінійного програмування. Диференціюючи цю функцію і прирівнюючи часткові похідні до нуля, отримаємо систему $(n + m)$ рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_1} &= 0, \\
 \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_2} &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_i} &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_n} &= 0, \\
 \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_1} &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_m} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

Розв'язок системи (4.29) дає координати точок $\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_j^*, \dots, \bar{x}_n^*)$ можливих умовних екстремумів цільової функції $f(\bar{x})$.

Проілюструємо метод невизначених множників Лагранжа на прикладі.

Приклад 4.6. Знайти умовний екстремум функції

$$f(\bar{x}) = e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}$$

з обмеженням

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3.$$

Перш за все зазначимо, що метод виключення змінних для розв'язання цієї задачі застосувати не можна. Скористаємося методом невизначених множників Лагранжа.

Згідно з (4.28) складемо допоміжну функцію Лагранжа. Оскільки задача має одне рівняння-обмеження, у функції Лагранжа буде один невизначений множник:

$$G(x_1, x_2, x_3, \lambda) = e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \lambda[x_1 + x_2 + x_3 - 3].$$

Диференціюючи $G(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ і прирівнюючи часткові похідні до нуля, отримуємо таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial G(x_1, x_2, x_3, \lambda)}{\partial x_1} = e^{x_1^*} + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial G(x_1, x_2, x_3, \lambda)}{\partial x_2} = e^{x_2^*} + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial G(x_1, x_2, x_3, \lambda)}{\partial x_3} = e^{x_3^*} + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial G(x_1, x_2, x_3, \lambda)}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$

З перших трьох рівнянь системи випливає, що

$$\lambda = -e^{x_1^*}, \lambda = -e^{x_2^*}, \lambda = -e^{x_3^*}.$$

Це означає, що

$$e^{x_1^*} = e^{x_2^*} = e^{x_3^*}$$

або

$$x_1^* = x_2^* = x_3^*.$$

Тоді з останнього рівняння системи знаходимо

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1.$$

Таким чином, у точці $\bar{x}^* = (1, 1, 1)$ цільова функція набуває екстремуму. Визначимо характер екстремуму. Для цього створимо матрицю других часткових похідних функції $f(\bar{x})$:

4.3. Основна теорема математичного програмування

Розглянуті вище класичні задачі не містять обмежень на змінні $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$. Однак у деяких задачах НЛП такі обмеження існують, зокрема, накладається вимога невід'ємності змінних. Виявляється, і на такі задачі можна поширити метод невизначених множників Лагранжа. Як було підкреслено вище, розв'язання задачі НЛП істотно спрощується, якщо обмеження й цільова функція мають форму опуклих (увігнутих) функцій. У цьому випадку локальний мінімум (для опуклої функції) або максимум (для увгнутої функції) є одночасно й глобальним. Тому в подальшому будемо розглядати задачі опукло-увігнутого програмування.

У загальному випадку задачу опуклого програмування сформулюємо таким чином: знайти значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$, які задовольняють обмеження

$$\begin{aligned} g_1(\bar{x}) &\leq b_1, \\ g_2(\bar{x}) &\leq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ g_i(\bar{x}) &\leq b_i, \\ &\dots\dots\dots \\ g_m(\bar{x}) &\leq b_m, \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \tag{4.32}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n),$$

де $f(\bar{x})$ і $g_i(\bar{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, – опуклі функції змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$.

Якщо необхідно знайти значення змінних x_1, x_2, \dots, x_j , які задовольняють обмеження

$$\begin{aligned}
g_1(\bar{x}) &\geq b_1, \\
g_2(\bar{x}) &\geq b_2, \\
&\dots\dots\dots \\
g_i(\bar{x}) &\geq b_i, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$g_m(\bar{x}) \geq b_m,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \tag{4.34}$$

і перетворюють на максимум цільову функцію (4.33), де $f(\bar{x})$ і $g_i(\bar{x})$, $i = \overline{1, m}$, – увігнуті функції змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$, то така задача належить до задач увігнутого програмування.

Зазначимо, що множини допустимих розв'язків у задачах опуклого й увігнутого програмування є опуклими.

Розглянемо задачу опуклого програмування. Спочатку розглянемо її найпростіший варіант, коли обмеження є системою лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}
g_1(\bar{x}) &= b_1, \\
g_2(\bar{x}) &= b_2, \\
&\dots\dots\dots \\
g_i(\bar{x}) &= b_i, \\
&\dots\dots\dots \\
g_m(\bar{x}) &= b_m.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Утворимо допоміжну функцію Лагранжа:

$$\begin{aligned}
G(\bar{x}, \bar{\lambda}) &= f(\bar{x}) + \lambda_1[g_1(\bar{x}) - b_1] + \lambda_2[g_2(\bar{x}) - b_2] + \dots \\
&\dots + \lambda_i[g_i(\bar{x}) - b_i] + \dots + \lambda_m[g_m(\bar{x}) - b_m] = \\
&= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i[g_i(\bar{x}) - b_i],
\end{aligned} \tag{4.36}$$

де $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_j \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$.

Геометрично функцію $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ можна подати гіперповерхнею в $(n+m)$ -вимірному просторі. Двовимірну функцію $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ графічно показано на рис. 4.10.

Нехай цільова функція $f(\bar{x})$ набуває локального мінімуму в точці $\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_j^*, \dots, \bar{x}_n^*)$, яка знаходиться не на межі, а в середині

$$\mathbf{G}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) = \mathbf{f}(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(\bar{x}^*) - b_i]. \quad (4.38)$$

У точці $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$

$$\mathbf{G}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) = \mathbf{f}(\bar{x}^*). \quad (4.39)$$

З урахуванням (4.31) і (4.34) можна записати, що

$$g_i(\bar{x}^*) - b_i \leq 0. \quad (4.40)$$

Тоді, порівнюючи (4.38) і (4.39), можна впевнитися, що в точці $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* [g_i(\bar{x}^*) - b_i] = 0. \quad (4.41)$$

Таким чином, із (4.41) з урахуванням (4.40) випливає, що, коли \bar{x}^* – внутрішня точка області допустимих розв'язків, $\bar{\lambda}^* = 0$. Збільшення значення λ_i призводить до того, що значення функції $\mathbf{G}(\bar{x}^*, \bar{\lambda})$ зменшується порівняно з $\mathbf{G}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$, оскільки друга складова в (4.38), яка має від'ємний знак, збільшується за абсолютною величиною. Тому в точці $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$ функція $\mathbf{G}(\bar{x}, \bar{\lambda})$ має максимальне значення за змінною $\bar{\lambda}$, тобто

$$\mathbf{G}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) \leq \mathbf{G}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*). \quad (4.42)$$

Об'єднавши (4.37) і (4.42), отримаємо

$$\mathbf{G}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) \leq \mathbf{G}(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \leq \mathbf{G}(\bar{x}, \bar{\lambda}^*). \quad (4.43)$$

Точка $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$, у якій виконується нерівність (4.43), є сідловою (рис. 4.10). У цій точці функція $\mathbf{G}(\bar{x}, \bar{\lambda})$ набуває мінімуму за змінною \bar{x} і максимуму за змінною $\bar{\lambda}$. Зауважимо, що в цьому випадку $\bar{x}^* > 0$ і $\bar{\lambda}^* > 0$. На рис. 4.11 показано вид функції Лагранжа для задачі опуклого програмування, коли функція $\mathbf{f}(\bar{x})$ набуває мінімуму на межі області допустимих розв'язків, і тут точка $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$ є сідловою.

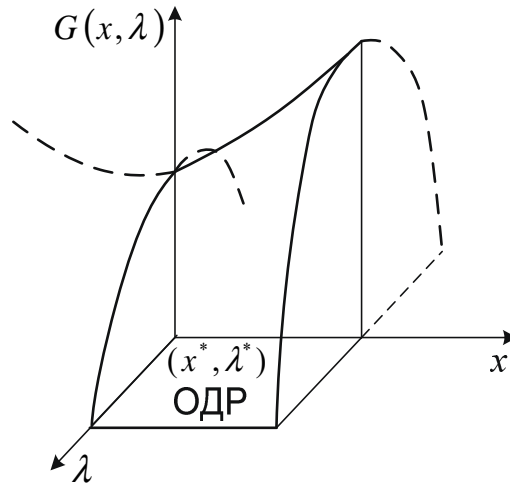


Рис. 4.11

Таким чином, щоб знайти розв'язок задачі опуклого програмування, необхідно знайти сідлову точку функції Лагранжа, $\mathbf{G}(\bar{x}, \bar{\lambda})$, що відповідає цільовій функції $\mathbf{f}(\bar{x})$ та обмеженню (4.31) або (4.34).

Отриманий результат є висновком зосновної теореми математичного програмування, або теореми Куна–Таккера[7]. За цією теоремою, якщо $\mathbf{f}(\bar{x})$ і $g_i(\bar{x}^*)$, $i = \overline{1, m}$, – опуклі диференційовані функції, то для того щоб точка $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$ була сідловою точкою функції $\mathbf{G}(\bar{x}, \bar{\lambda})$, необхідним є виконання таких умов:

$$\left. \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}^*} \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.44)$$

$$x_j \left. \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}^*} = 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.45)$$

$$\left. \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} \right|_{\bar{\lambda}=\bar{\lambda}^*} \leq 0, i = \overline{1, m}, \quad (4.46)$$

$$\lambda_i \left. \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} \right|_{\bar{\lambda}=\bar{\lambda}^*} = 0, i = \overline{1, m}, \quad (4.47)$$

де $x_j \geq 0, \lambda_i \geq 0$.

Зміст цих умов стає зрозумілим, якщо розглянути перетини функції $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ за $\bar{\lambda}$ і за \bar{x} . Нагадаємо, що перетин $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ за $\bar{\lambda} = \lambda^*$ дає функцію $f(\bar{x})$. Оскільки на значення змінних \bar{x} накладається вимога невід'ємності, розглянемо два випадки: $\bar{x}_j^* > 0$ і $\bar{x}_j^* = 0$. На рис. 4.12, а показано залежність $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ як функції від x_j за умови, що $\bar{x}_j^* > 0$ (для наочності на рис. 4.12, б показано залежність $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ від x_j за умови, що $\bar{x}_j^* = 0$).

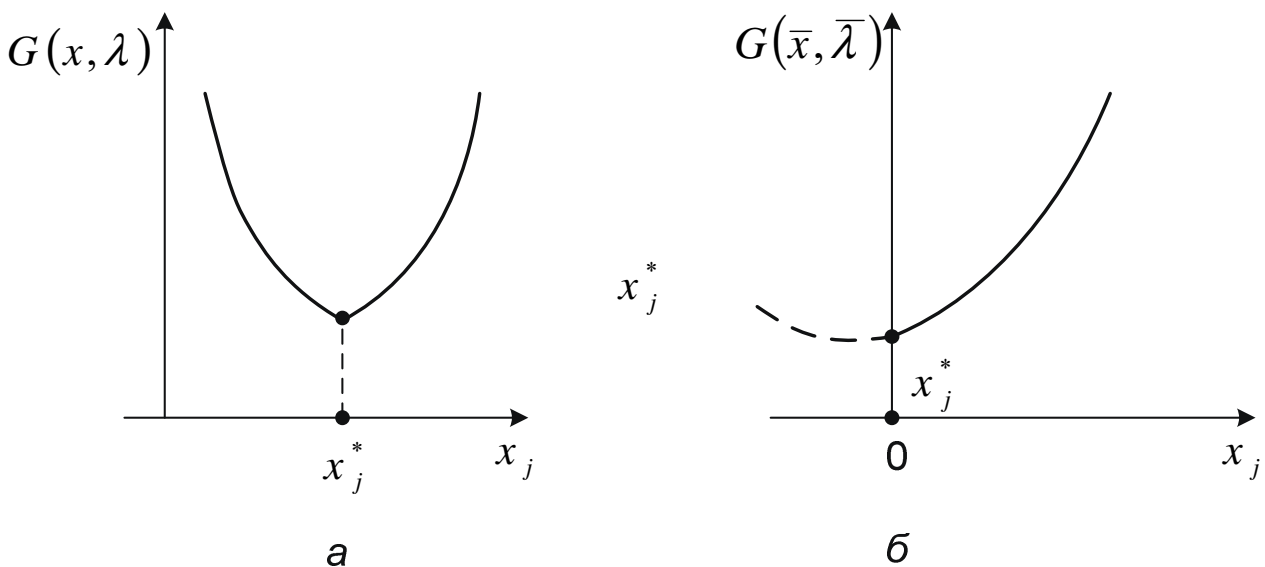


Рис. 4.12

Іншими словами, функція $f(\bar{x})$ набуває мінімуму у внутрішній точці множини невід'ємних значень \bar{x} . Очевидно, що в цій точці

$$\left. \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} \right|_{x = \bar{x}^*} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.48)$$

З рис. 4.12, б випливає, що

$$\left. \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} \right|_{x = \bar{x}^*} > 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.49)$$

Об'єднуючи (4.48) і (4.49), отримаємо умову (4.44). Оскільки (4.48) справджується для $\bar{x}^* > 0$, а (4.49) – для $\bar{x}^* = 0$, їх добуток

$$x_j \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}^*} = 0$$

для всіх $\bar{x}^* \geq 0$.

На рис. 4.13 показано залежності $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ як функції від змінної $\bar{\lambda}$.

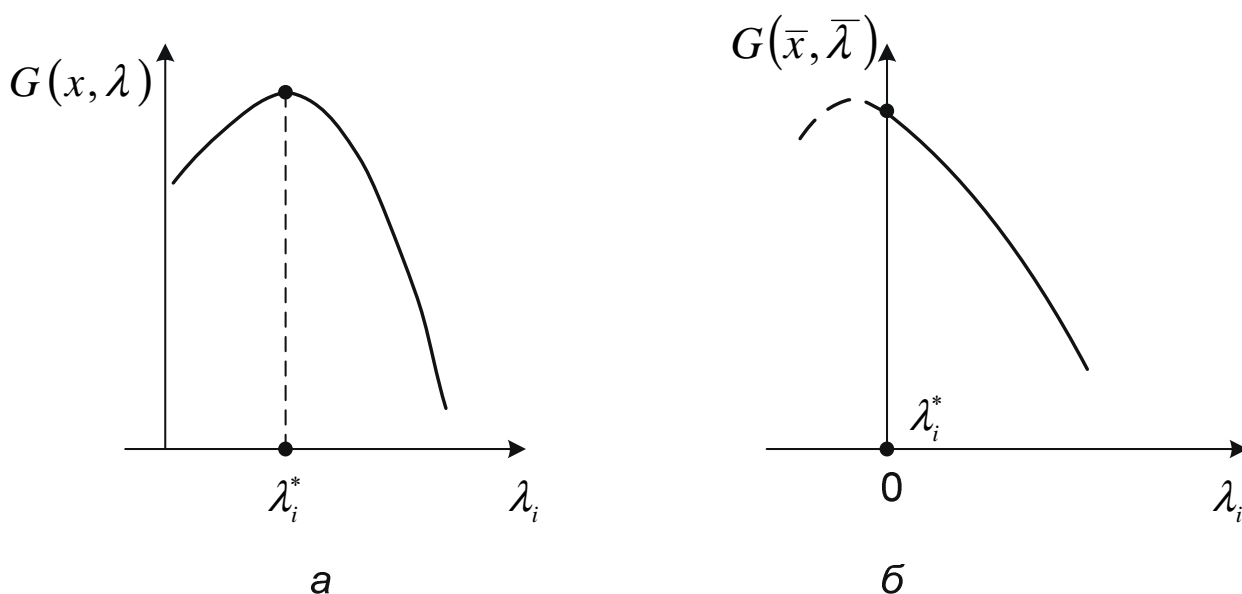


Рис. 4.13

Скориставшись цими рисунками, можна аналогічно показати справджуваність виразів (4.46) і (4.47).

Для задачі вгнутого програмування умову існування сідлової точки запишемо так:

$$\frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}^*} \leq 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.50)$$

$$x_j \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}^*} = 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} \Big|_{\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^*} \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.52)$$

$$\lambda_i \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} \Big|_{\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^*} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.53)$$

$$x_j \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Ці умови випливають з такого: якщо $f(\bar{x})$ і $g_i(\bar{x})$ – увігнуті функції, то допоміжна функція Лагранжа $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ в точці $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$ набуває максимуму за \bar{x} і мінімуму за $\bar{\lambda}$.

Результати основної теореми математичного програмування, наведені вище, дають змогу знайти обчислювальні процедури для досить великого класу задач нелінійного програмування. Деякі з них буде розглянуто нижче.

4.4. Квадратичне програмування

У задачах квадратичного програмування обмеженнями є лінійні рівності або нерівності вигляду

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{ij}x_j + \dots + \alpha_{in}x_n \geq b_i, \quad (4.54)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

а цільовою функцією – сума лінійної і квадратичної функцій:

$$f(\bar{x}) = L(\bar{x}) + \varphi(\bar{x}), \quad (4.55)$$

де

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j; \quad (4.56)$$

$$\varphi(\bar{x}) = d_{11}x_{11}^2 + \dots + d_{12}x_1x_2 + \dots + d_{kj}x_kx_j + \dots$$

$$\dots + d_{nn}x_{nn}^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj}x_kx_j. \quad (4.57)$$

Лінійні функції (4.56) і (4.57) можуть бути опуклими або вгнутими, тому належність задачі (4.54)–(4.55) до задач опуклого або вгнутого програмування повною мірою визначається властивостями квадратичної функції (квадратичної форми) $\varphi(\bar{x})$.

Квадратична форма $\varphi(\bar{x})$ є опуклою, якщо вона є додатно визначеною або додатно напіввизначеною, і вгнутою, якщо від'ємно визначеною або від'ємно напіввизначеною. Таким чином, для опуклої $\varphi(\bar{x})$ задача (4.54)–(4.55) належить до задач опуклого програмування, а при вгнутій $\varphi(\bar{x})$ – до задач увігнутого програмування.

Властивості квадратичної форми легко визначаються з матриці $\|d_{kj}\|$ коефіцієнтів d_{kj} за виразом (4.57) шляхом обчислення головних мінорів. Матриця $\|d_{kj}\|$ є симетричною з розмірністю $n \times n$. Діагональними елементами цієї матриці є коефіцієнти при x_j^2 , а недіагональними – $d_{kj} = d_{jk}$, що дорівнюють половині від коефіцієнта при $x_k x_j$. Наприклад, квадратичну форму

$$\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

можна подати таким чином:

$$\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2,$$

і тоді їй буде відповідати матриця

$$\|d_{kj}\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

За результатами обчислення головних мінорів матриці $\|d_{kj}\|$ можливими є такі випадки:

1. Усі головні мінори матриці є додатними, квадратична форма $\varphi(\bar{x})$ є додатно визначеною.

2. Головні мінори $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$, де r – ранг матриці $\|d_{kj}\|$, є додатними, а інші дорівнюють нулю, квадратична форма $\varphi(\bar{x})$ є додатно напіввизначеною.

3. Головний мінор першого порядку є від'ємним, а знаки інших мінорів чергуються, квадратична форма $\varphi(\bar{x})$ є від'ємно визначеною.

4. Головний мінор першого порядку є від'ємним, а знаки мінорів $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$, де $r < n$ – ранг матриці, чергуються, а інші мінори дорівнюють нулю, квадратична форма $\varphi(\bar{x})$ є від'ємно напіввизначеною.

5. Серед головних мінорів $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ немає чергування знаків, серед мінорів є від'ємні, квадратична форма $\varphi(\bar{x})$ є невизначеною.

Приклад 4.7. Дослідити властивості функції

$$\varphi(\bar{x}) = x_1 x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Досліджувана функція є квадратичною. Запишемо вираз для $\varphi(\bar{x})$ у вигляді

$$\varphi(\bar{x}) = -x_1^2 + 0,5x_1x_3 - x_2^2 - x_3^2 + 0,5x_1x_3$$

і складемо матрицю:

$$\|d_{kj}\| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0,5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо головні мінори матриці $\|d_{kj}\|$:

$$\Delta_1 = -1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0,5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -0,75.$$

Головний мінор першого порядку є від'ємним, знаки інших мінорів чергуються. Таким чином, відповідно до п. 3 квадратична форма $\varphi(\bar{x})$ є від'ємно визначеною.

Приклад 4.8. Дослідити властивості функції

$$\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2.$$

Складемо матрицю квадратичної форми $\varphi(\bar{x})$:

$$\|d_{kj}\| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0,5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори матриці є такими:

$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг матриці $r = 2$, а мінори є такими: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 0$, тобто відповідно до п. 2 функція $\varphi(\bar{x})$ є додатно напіввизначеною.

Приклад 4.9. Дослідити властивості функції

$$\varphi(\bar{x}) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Складемо матрицю квадратичної форми $\varphi(\bar{x})$:

$$\|d_{kj}\| = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори матриці є такими:

$$\frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{k=1}^n d_{kj}x_k + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i. \quad (4.60)$$

Позначимо

$$\frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} = p_j; \quad \frac{\partial G(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} = -q_i. \quad (4.61)$$

Тоді з (4.59) і (4.60) з урахуванням (4.61) визначимо:

$$2\sum_{k=1}^n d_{kj}x_k + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - p_j = -c_j; \quad (4.62)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + q_i = b_i. \quad (4.63)$$

Значення координат сідлової точки функції $G(\bar{x}, \bar{\lambda})$ $\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_j^*, \dots, \bar{x}_n^*)$ і $\bar{\lambda}^* = (\bar{\lambda}_1^*, \bar{\lambda}_2^*, \dots, \bar{\lambda}_j^*, \dots, \bar{\lambda}_m^*)$, очевидно, є розв'язком системи рівнянь (4.62) і (4.63) з обмеженнями (4.44)–(4.47), які для розглядуваної задачі набувають такого вигляду:

$$p_j \geq 0; \quad x_j p_j = 0; \quad q_i \geq 0; \quad q_i \lambda_i = 0; \quad x_j \geq 0; \quad \lambda_i \geq 0. \quad (4.64)$$

Таким чином, розв'язання задачі квадратичного програмування звелось до пошуку допустимого розв'язку системи $(n + m)$ лінійних рівнянь (4.62)–(4.63) при обмеженнях (4.64). Зазначимо, що в цій задачі міститься $2(n + m)$ змінних, якими є x_j, p_j, q_i, λ_i .

Оскільки (4.62)–(4.63) є лінійними рівняннями, для пошуку допустимого розв'язку можна скористатися алгоритмом, викладеним у підрозд. 2.5. Основою цього алгоритму, як відомо, є симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування. Однак при пошуку розв'язку рівнянь (4.62)–(4.63) необхідно приділити увагу виконанню вимог $x_j p_j = 0$ та $q_i \lambda_i = 0$.

Це є істотною відмінністю розглянутого алгоритму від наведеного в підрозд. 2.5. Розглянемо процедуру розв'язку задачі квадратичного програмування на такому прикладі.

Приклад 4.10. Знайти невід'ємні значення змінних x_1 і x_2 , які задовольняють вимоги

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20,$$

$$2x_1 - x_2 \leq 8$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = 4x_1^2 + 15x_2^2 - 32x_1 - 120x_2.$$

Насамперед проведемо дослідження квадратичної форми

$$\varphi(\bar{x}) = 4x_1^2 + 15x_2^2.$$

Матриця коефіцієнтів d_{kj} квадратичної форми має такий вигляд:

$$\|d_{kj}\| = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори матриці

$$\Delta_1 = 1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 60$$

є додатними, квадратична форма $\varphi(\bar{x})$ – додатно визначеною й опуклою функцією. Таким чином, задача належить до задач опуклого програмування.

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей:

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 20,$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 8.$$

Запишемо допоміжну функцію Лагранжа:

$$G(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 4x_1^2 + 15x_2^2 - 32x_1 - 120x_2 \lambda_1 (2x_1 - x_2 + x_3 - 20) + \\ + \lambda_2 (2x_1 - x_2 + x_4) = 8.$$

Згідно з (4.62) і (4.63) складемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}8x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - p_1 &= 32; \\30x_1 + 5\lambda_1 + \lambda_2 - p_2 &= 120; \\2x_1 + 5x_2 + x_3 + q_1 &= 20; \\2x_1 - x_2 + x_4 + q_2 &= 8.\end{aligned}$$

Знайдемо додаткові значення змінних $x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2$, які задовольняють системі рівнянь з урахуванням додаткових обмежень

$$p_1x_1 = 0; p_2x_2 = 0; q_1\lambda_1 = 0; q_2\lambda_2 = 0.$$

У системі є 10 змінних і чотири рівняння, виберемо $k = 10 - 4$ вільних змінних, через які виразимо інші (базисні) змінні.

Вільними змінними доцільно вибрати $x_1, x_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2$. Тоді базисні змінні можна виразити таким чином:

$$\begin{aligned}p_1 &= -32 + 8x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2; \\p_2 &= -120 + 30x_2 + 5\lambda_1 - \lambda_2; \\x_3 &= 20 - 2x_1 - 5x_2 - q_1; \\x_4 &= 8 - 2x_1 + x_2 - q_2.\end{aligned}$$

Запишемо цю систему рівнянь у формі, зручній для заповнення симплекс-таблиці:

$$\begin{aligned}p_1 &= -32 - (-8x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2); \\p_2 &= -120 - (-30x_2 - 5\lambda_1 - \lambda_2); \\x_3 &= 20 - (2x_1 - 5x_2 + q_1); \\x_4 &= 8 - (2x_1 - x_2 + q_2).\end{aligned}$$

Заповнимо першу симплекс-таблицю (табл. 4.1). Прирівнюючи вільні змінні $x_1, x_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2$ до нуля, отримуємо перший розв'язок: $x_1 = x_2 = q_1 = q_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0, p_1 = -32, p_2 = -120, x_3 = 20, x_4 = 8$.

Таблиця 4.1

| Базові змінні | Вільні змінні | | | | | | |
|----------------|---------------|-------------|-------|-------------|-------------|-------|-------|
| | ВЧ | \bar{x}_1 | x_2 | λ_1 | λ_2 | q_1 | q_2 |
| $\uparrow p_1$ | -32 | -8 | 0 | -2 | -2 | 0 | 0 |
| p_2 | -120 | 0 | -30 | -5 | 1 | 0 | 0 |
| x_3 | 20 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x_4 | 8 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Цей розв'язок системи рівнянь не є допустимим, оскільки p_1 і p_2 – від'ємні. Пошук допустимого розв'язку і становить суть процедури розв'язання задачі квадратичного програмування.

Відповідно до алгоритму пошуку допустимого розв'язку виберемо в першому стовпці від'ємний елемент, що дорівнює -32 .

У рядку з вибраним від'ємним елементом знайдемо елементи, однакові з ним за знаком. У розглядуваній задачі це будуть елементи, розташовані на перетині першого рядка і стовпців при x_1 , λ_1 , λ_2 , тобто -8 , -2 і -2 .

Знайдемо відношення від'ємного вільного члена до кожного із зазначених від'ємних елементів. Очевидно,

$$\frac{-32}{28} < \frac{-32}{-2},$$

тому стовець при x_1 буде розв'язувальним. Це означає, що змінну x_1 необхідно перевести до складу базисних змінних.

У розв'язувальному стовпці елементи рядків при p_1 , x_3 і x_4 мають знаки, однакові зі знаком відповідного вільного члена. Визначимо відношення кожного вільного члена до відповідного елемента розв'язувального стовпця. Ці відношення будуть такими:

$$\frac{-32}{-8} = 4; \quad \frac{20}{2} = 10; \quad \frac{8}{2} = 4.$$

Оскільки $4 < 10$, то як розв'язувальний рядок можна було б вибрати рядок або при p_1 , або при x_4 . Однак якщо розв'язувальним рядком вибрати рядок при x_4 , то до складу базисних змінних потраплять і x_1 , і x_4 . Оскільки базисні змінні відмінні від нуля, у цьому випадку добуток $p_1 x_1$ також буде відмінним від нуля, що суперечить обмеженню $p_1 x_1 = 0$. Тому, як розв'язувальний рядок доцільно вибрати рядок при x_1 , тому що тільки при цьому вимога $p_1 x_1 = 0$ буде справджуватися.

Таким чином, для того щоб виконувалися обмеження

$$p_j x_j = 0; \quad q_i \lambda_i = 0,$$

необхідно, щоб серед базисних змінних одночасно не було p_j і x_j або q_i і λ_i з однаковим індексом.

Виконавши симплекс-перетворення, перейдемо до симплекс-таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

| Базові змінні | Вільні змінні | | | | | | |
|----------------|---------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------|-------|
| | ВЧ | p_1 | \bar{x}_2 | λ_1 | λ_2 | q_1 | q_2 |
| x_1 | 4 | -1/8 | 0 | 1/4 | 1/4 | 0 | 0 |
| $\uparrow p_2$ | -120 | 0 | -30 | -5 | 1 | 0 | 0 |
| x_3 | 12 | 1/4 | 5 | -1/2 | -1/2 | 1 | 0 |
| x_4 | 8 | 1/4 | -1 | -1/2 | -1/2 | 0 | 1 |

Розв'язок $p_1 = x_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = q_1 = q_2 = 0$; $x_1 = 4$; $p_2 = -120$; $x_3 = 12$; $x_4 = 0$ не є допустимим, тому продовжимо його пошук. Для цього розглянемо рядок при p_2 . Очевидно, як розв'язувальний стовпець необхідно вибрати стовпець при x_2 . Тоді для виконання вимоги $p_2 x_2 = 0$ необхідно, щоб розв'язувальним був рядок при p_2 . Після виконання симплекс-перетворень отримаємо симплекс-таблицю 4.3.

Таблиця 4.3

| Базові змінні | Вільні змінні | | | | | | |
|----------------|---------------|-------|-------|-------------------|-------------|-------|-------|
| | ВЧ | p_1 | p_2 | $\bar{\lambda}_1$ | λ_2 | q_1 | q_2 |
| x_1 | 4 | -1/8 | 0 | 1/4 | 1/4 | 0 | 0 |
| x_2 | 4 | 0 | -1/30 | 1/6 | -1/30 | 0 | 0 |
| $\uparrow x_3$ | -8 | 1/4 | 1/6 | -4/3 | -1/3 | 1 | 6 |
| x_4 | 4 | 1/4 | -1/30 | -1/3 | 16/30 | 0 | 1 |

Розв'язок $p_1 = p_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = q_1 = q_2 = 0$; $x_1 = 4$; $x_2 = 4$; $x_3 = -8$; $x_4 = 4$ знову не є допустимим. Розглянемо рядок при x_3 . Тут елементи стовпців при λ_1 і λ_2 мають однаковий знак з вільним членом.

Оскільки

$$\frac{-8}{-4/3} < \frac{-8}{-1/3},$$

як розв'язувальний виберемо стовпець при λ_1 . Тоді розв'язувальним буде рядок при x_3 .

Виконавши симплекс-перетворення, отримаємо табл. 4.4.

Таблиця 4.4

| Базові змінні | Вільні змінні | | | | | | |
|---------------|---------------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|
| | ВЧ | p_1 | p_2 | x_3 | λ_2 | q_1 | q_2 |
| x_1 | 5/2 | -5/64 | 1/32 | 3/16 | 3/16 | 3/16 | 0 |
| x_2 | 3 | 1/32 | -1/80 | 1/8 | -3/40 | 1/8 | 0 |
| λ_1 | 6 | -3/16 | -1/8 | -3/4 | 1/4 | -3/4 | 0 |
| x_4 | 6 | 3/16 | -3/40 | -1/4 | 37/60 | 1/4 | 1 |

Розв'язок $p_1^* = p_2^* = x_3^* = \lambda_2^* = q_1^* = q_2^* = 0$; $x_1^* = \frac{5}{2}$; $x_2^* = 3$; $x_4^* = 6$; $\lambda_1^* = 6$ уже є допустимим розв'язком системи рівнянь. Таким чином, розв'язок

$$(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (5/2, 3, 0, 6, 6, 0)$$

є сідловою точкою функції Лагранжа, а $\bar{x}^* = (5/2, 3)$ – оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування. При цьому значення цільової функції $f(\bar{x}^*) = f_{min} = -280$.

У тому випадку, коли цільова функція (4.57) є вгнутою, розв'язок задачі квадратичного програмування є допустимим розв'язком системи рівнянь

$$2\sum_{k=1}^n d_{kj} \lambda_1^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} + p_j = -c_j; \quad (4.65)$$

$$\sum_{j=1}^n x_i a_{ij} - q_i = -b_i$$

при обмеженнях

$$p_j \geq 0; p_j x_j = 0; q_i \geq 0; \lambda_i q_i = 0; x_j \geq 0; \lambda_i \geq 0.$$

Очевидно, допустимий розв'язок системи (4.65) можна знайти так само, як і допустимий розв'язок рівнянь (4.62) і (4.63).

Описаний вище алгоритм пошуку допустимих розв'язків не є єдиним. Досить поширеним на практиці є метод штучних змінних, описаний, наприклад, у роботі [7]. Однак основою й цього методу є симплекс-метод, що дає змогу порівняно легко розв'язувати задачі квадратичного програмування на комп'ютері.

4.5. Дробово-лінійне програмування

Розглянемо таку задачу. На обчислювальний центр (ОЦ) колективного користування надходять задачі двох типів: науково-технічні й управлінські. Середній час розв'язання однієї задачі першого типу становить t_1 годин, а другого – t_2 годин.

Загальна кількість задач першого типу, що надходять на ОЦ протягом доби, не може перевищувати b_1 , а другого типу – b_2 . Визначити оптимальну кількість задач першого й другого типів, що надходять на ОЦ протягом доби, при якій пропускна здатність обчислювального центру була би максимальною.

Позначимо через x_1 кількість задач першого типу, а через x_2 – другого типу, що надходять на ОЦ. Тоді середній час розв'язання задач першого типу становитиме $t_1 x_1$ годин, другого типу – $t_2 x_2$ годин, а загальний час

$$t_{\text{заг}} = t_1 x_1 + t_2 x_2.$$

Пропускна здатність ОЦ визначається як середня кількість задач, що розв'язуються обчислювальним центром за одиницю часу, у цьому випадку – протягом години. Оскільки загальна кількість задач, що розв'язує обчислювальний центр,

$$x_{\text{заг}} = x_1 + x_2,$$

пропускна здатність буде визначатися виразом

$$Q(X) = \frac{x_{\text{заг}}}{t_{\text{заг}}} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 x_1 + t_2 x_2}. \quad (4.66)$$

Тоді розглядувану задачу можна сформулювати таким чином: знайти такі невід'ємні значення змінних x_1 і x_2 , які задовольняють вимоги

$$\begin{aligned} x_1 &\leq b_1, \\ x_2 &\leq b_2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

і перетворюють на максимум цільову функцію (4.66). Оскільки цільова функція є дробово-лінійною, а обмеження є лінійними нерівностями,

задача визначення пропускну́ї здатності належить до класу задач дробово-лінійного програмування (ДЛП).

Обернена до пропускну́ї здатності величина

$$q(x) = \frac{t_{\text{заг}}}{x_{\text{заг}}} = \frac{t_1 x_1 + t_2 x_2}{x_1 + x_2} \quad (4.68)$$

характеризує середній час обслуговування (розв'язання) однієї задачі на ОЦ. У цьому випадку задача полягає в мінімізації виразу (4.68) при обмеженнях (4.67).

Сформулюємо тепер задачу дробово-лінійного програмування (ДЛП) у загальному вигляді. Потрібно знайти такі невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$, які задовольняють обмеження

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + a_{1n}x_n &\geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + a_{2n}x_n &\geq b_2, \\ \dots &\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + a_{in}x_n &\geq b_i, \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \quad (4.69)$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_j x_j + \dots + d_n x_n}. \quad (4.70)$$

Ця задача схожа на задачу лінійного програмування, проте цільова функція тут є нелінійною функцією змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$. Припустимо, що обмеження являють собою систему m лінійних рівнянь (порядок переходу від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей було описано вище). Тоді так само, як і в задачі лінійного програмування, у розглядуваній задачі ДЛП при $n - m = 2$ допускається проста геометрична інтерпретація.

Виберемо $n - m = 2$ змінні, наприклад, x_1 і x_2 , і виразимо через них інші змінні:

$$x_2 = \frac{\gamma_0 - \Gamma \delta_0}{\Gamma \delta_2 - \gamma_2} + \frac{\gamma_1 - \Gamma \delta_1}{\Gamma \delta_2 - \gamma_2} x_1. \quad (4.74)$$

Очевидно, вираз (4.74) є рівнянням прямої в координатах x_1 і x_2 :

$$x_2 = kx_1 + b, \quad (4.75)$$

де k – кутовий коефіцієнт,

$$k = \frac{\gamma_1 - \Gamma \delta_1}{\Gamma \delta_2 - \gamma_2}, \quad (4.76)$$

b – початкова ордината,

$$b = \frac{\gamma_0 - \Gamma \delta_0}{\Gamma \delta_2 - \gamma_2}. \quad (4.77)$$

При зміненні константи Γ будуть змінюватися k і b . Однак це відповідає обертанню прямої (4.75) навколо деякої точки $\bar{x}^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Для знаходження координат $x_1^{(0)}$ і $x_2^{(0)}$ точки \bar{x}^0 задамо два значення цільової функції $f(\bar{x})$ (наприклад Γ_1 і Γ_2). Цим значенням відповідають прямі

$$x_2 = k_1 x_1 + b_1,$$

$$x_2 = k_2 x_1 + b_2,$$

де

$$k_1 = \frac{\gamma_1 - \Gamma_1 \delta_1}{\Gamma_1 \delta_2 - \gamma_2}, \quad b_1 = \frac{\gamma_0 - \Gamma_1 \delta_0}{\Gamma_1 \delta_2 - \gamma_2}, \quad (4.78)$$

$$k_2 = \frac{\gamma_1 - \Gamma_2 \delta_1}{\Gamma_2 \delta_2 - \gamma_2}, \quad b_2 = \frac{\gamma_0 - \Gamma_2 \delta_0}{\Gamma_2 \delta_2 - \gamma_2}. \quad (4.79)$$

Очевидно, точка \bar{x}^0 належить як до однієї, так і до другої прямої. Тоді можна записати

$$x_2^{(0)} = k_1 x_1^{(0)} + b_1; \quad x_2^{(0)} = k_2 x_1^{(0)} + b_2. \quad (4.80)$$

Звідси випливає, що

$$k_1 x_1^{(0)} + b_1 = k_2 x_1^{(0)} + b_2.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно $x_1^{(0)}$:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}. \quad (4.81)$$

Після підставлення (4.78) і (4.79) в (4.81) і нескладних перетворень отримаємо

$$x_1^{(0)} = \frac{\gamma_0 \delta_2 - \gamma_2 \delta_0}{\gamma_2 \delta_1 - \gamma_1 \delta_2}. \quad (4.82)$$

Для визначення координати $x_1^{(0)}$ точки \bar{x}^0 підставимо (4.82) в одне з рівнянь, наприклад у перше (4.80). Тоді з урахуванням (4.78) отримаємо

$$x_2^{(0)} = \frac{\gamma_1 \delta_0 - \gamma_0 \delta_1}{\gamma_2 \delta_1 - \gamma_1 \delta_2}. \quad (4.83)$$

Якщо припустити, що $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 = 0$, то, як випливає з (4.77), ордината $b = 0$, а пряма

$$x_2 = kx_1 \quad (4.84)$$

буде проходити як через точку \bar{x}^0 , так і через початок координат, при цьому

$$f_0(\bar{x}) = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{x_1 \delta_1 - x_2 \delta_2}. \quad (4.85)$$

За аналогією із задачами лінійного програмування назвемо пряму (4.84) основною.

Обертання основної прямої навколо точки \bar{x}^0 в один бік відповідає збільшенню значення цільової функції, а в інший – її зменшенню.

Визначимо напрямок обертання основної прямої, при якому значення цільової функції зменшується. Для цього здиференціюємо (4.76) за Γ :

$$\frac{dk}{d\Gamma} = \frac{-\delta_1 (\Gamma\delta_2 - \gamma_2) - \delta_2 (\gamma_1 - \Gamma\delta_1)}{(\Gamma\delta_2 - \gamma_2)^2} = \frac{\delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{(\Gamma\delta_2 - \gamma_2)^2}. \quad (4.86)$$

Неважко показати, що при повороті основної прямої проти ходу часової стрілки цільова функція буде зростати, якщо $\frac{dk}{d\Gamma} > 0$, і спадати, якщо $\frac{dk}{d\Gamma} < 0$. Оскільки розраховуємо напрямок тільки спадання цільової функції, то при $\frac{dk}{d\Gamma} > 0$ основну пряму необхідно повертати за ходом годинникової стрілки, а при $\frac{dk}{d\Gamma} < 0$ – проти її ходу.

Знаменник у (4.86) є додатним при будь-яких значеннях δ_2 і γ_2 , отже, знак $\frac{dk}{d\Gamma}$ залежить від знака чисельника. З цього можна зробити висновок, що цільова функція спадає при повороті основної прямої за ходом годинникової стрілки, якщо $(\delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_1) > 0$, і проти її ходу, якщо $(\delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_1) < 0$.

Установивши напрям повороту основної прямої, повертаємо її навколо точки \bar{x}^0 доти, доки не буде знайдено вершину \bar{x}^* ОДР, найбільш віддалену в цьому напрямку від початку координат (див. рис. 4.14). Знайдена вершина і буде оптимальним розв'язком задачі дробово-лінійного програмування.

Приклад 4.11. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4 , які задовольняють системі обмежень

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2 + 1}.$$

Обмеження являють собою систему з двох лінійних рівнянь. Оскільки кількість рівнянь є меншою за кількість змінних на 2, цю задачу можна розв'язати графічним методом.

Побудуємо в координатах x_1 і x_2 область допустимих розв'язків, як це було зроблено в задачах лінійного програмування. ОДР для цієї задачі зображено на рис. 4.15.

Для будівництва основної прямої визначимо координати точки \bar{x}^0 . З виразу для цільової функції випливає, що $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = -2$, $\gamma_2 = 1$, $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$. Тоді відповідно до (4.82) і (4.83)

$$x_1^{(0)} = -\frac{1}{5}; x_2^{(0)} = -\frac{4}{5}.$$

Через точку \bar{x}^0 і початок координат проведемо основну пряму $f_0(\bar{x})$. Визначимо напрямок обертання основної прямої.

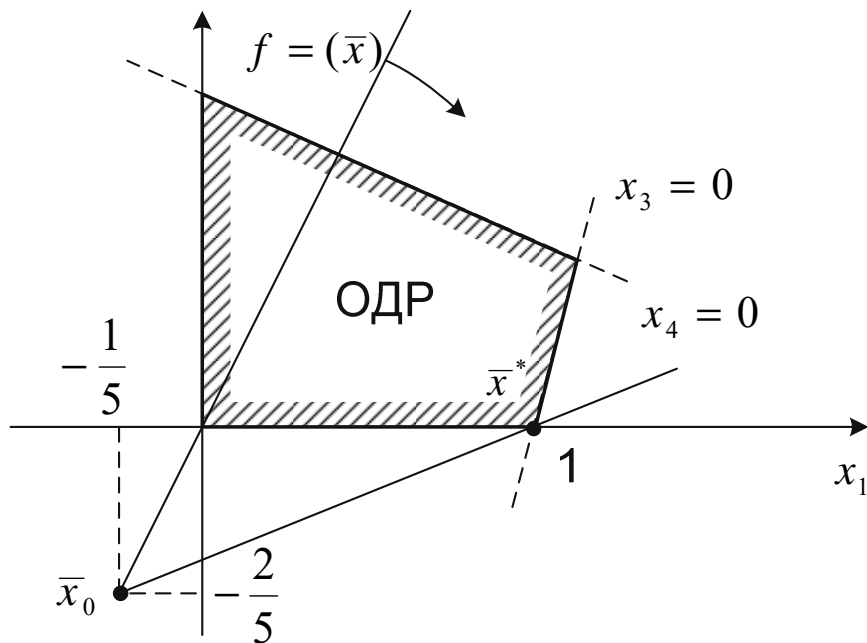


Рис. 4.15

Оскільки

$$\delta_1 \gamma_2 - \delta_2 \gamma_1 = 5 > 0,$$

при повороті основної прямої за ходом годинникової стрілки цільова функція буде спадати. Очевидно, точка \bar{x}^* , що є точкою перетину прямих $x_2 = 0$ і $x_3 = 0$, і буде оптимальним розв'язком цієї задачі. З першого рівняння системи обмежень випливає, що $x_1^* = 1$, а з другого $-x_4^* = 1$. Таким чином, оптимальний розв'язок задачі $\bar{x}^* = (1, 0, 0, 1)$, при цьому $L_{min} = -1$.

Розглядуваний графічний метод розв'язання задачі ДЛП, як і задач лінійного програмування, має обмежене застосування (при $n - m = 2$).

Позначимо

$$x_1 y_0 = y_1; x_2 y_0 = y_2; x_3 y_0 = y_3; x_4 y_0 = y_4.$$

Тепер знайдемо такі невід'ємні значення змінних y_1, y_2, y_3, y_4 , які задовольняють вимоги

$$2y_1 - y_2 + y_3 - 2y_0 = 0,$$

$$y_1 - 2y_2 + y_4 - 2y_0 = 0,$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_0 - 1 = 0$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\bar{y}) = -2y_1 + y_2.$$

Візьмемо y_1 і y_2 за вільні змінні. Базові змінні й цільову функцію виразимо через вільні змінні:

$$y_0 = 1 - (y_1 + 2y_2);$$

$$y_3 = 2 - (4y_1 + 3y_2);$$

$$y_4 = 2 - (3y_1 + 6y_2);$$

$$L(\bar{y}) = 0 - (2y_1 - y_2).$$

Процес розв'язання задачі симплекс-методом характеризується послідовністю симплекс-таблиць 4.5 і 4.6.

Таблиця 4.5

| Базові змінні | Вільні змінні | | |
|---------------|---------------|-------|-------|
| | ВЧ | y_1 | y_2 |
| $L(\bar{y})$ | 0 | 2 | -1 |
| y_0 | 1 | 1 | 2 |
| y_3 | 2 | 4 | 3 |
| y_4 | 2 | 3 | 6 |

→

Таблиця 4.6

| Базові змінні | Вільні змінні | | |
|---------------|---------------|-------|-------|
| | ВЧ | y_3 | y_2 |
| $L(\bar{y})$ | -1 | -2/4 | -10/4 |
| y_0 | 2/4 | -1/4 | 5/4 |
| y_1 | 2/4 | 1/4 | 3/4 |
| y_4 | 2/4 | -3/4 | 15/4 |

Оптимальним розв'язком задачі ДЛП є $y_0^* = 2/4; y_1^* = 2/4; y_3^* = 0; y_4^* = 2/4$.

Оскільки $y_1^* = x_1^* y_0^*$, то $x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = \frac{2/4}{2/4} = 1$. Аналогічно

$$x_2^* = \frac{y_2^*}{y_0^*} = 0; x_3^* = \frac{y_3^*}{y_0^*} = 0; x_4^* = \frac{y_4^*}{y_0^*} = 1.$$

Отже, оптимальним розв'язком задачі ДЛП є вектор $\bar{x}^* = (1; 0; 0; 1)$, який збігається з результатом, отриманим у попередньому прикладі графічним методом.

4.6. Пошукові методи розв'язання задач нелінійного програмування

Складність завдань нелінійного програмування призводить до того, що в деяких випадках точного розв'язання задачі отримати не вдається. Це викликало необхідність розвитку наближених методів, які дають змогу отримати розв'язок задачі з деякою наперед заданою точністю. До таких наближених методів належать пошукові методи розв'язання задач нелінійного програмування.

Перш ніж розглядати пошукові методи, зазначимо, що будь-яку функцію $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ можна задати сукупністю ліній постійного рівня [14]. На рис.4.16 зображено функцію двох змінних $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2)$, яка описує деяку поверхню в просторі. Нехай функція $f(x_1, x_2)$ набуває деякого значення F . Побудуємо площину $f(x_1, x_2) = F$, паралельну до площини $x_1 O x_2$. Спроектуємо лінію перетину площини з поверхнею $f(x_1, x_2)$ на площину $x_1 O x_2$.

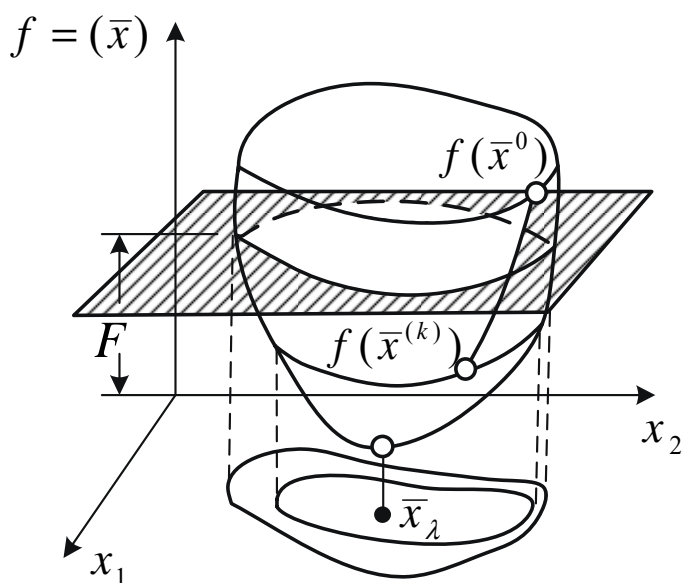


Рис. 4.16

Отримана лінія має назву лінії постійного рівня. Очевидно, будь-яка точка цієї лінії відповідає значенню F функції $f(x_1, x_2)$. Підставляючи інші значення функції $f(x_1, x_2)$ і проводячи площини, що відповідають цим значенням, отримаємо множину ліній постійного рівня, яка визначає функцію $f(x_1, x_2)$. Якщо функція $f(x_1, x_2)$ має локальний мінімум (або максимум) у точці \bar{x}_l , то ця точка буде центром ліній постійного рівня.

Переміщення на поверхні з точки $f(\bar{x}^0)$ у точку $f(\bar{x}^k)$ є еквівалентним переміщенню на площині x_1Ox_2 між точками \bar{x}^0 і \bar{x}^k (рис. 4.17).

Якщо це переміщення здійснювати в напрямку спадання функції $f(x_1, x_2)$, то через певну кількість кроків (ітерацій) можна досягти околу точки локального мінімуму. Це є основою пошукових методів розв'язання задач математичного програмування.

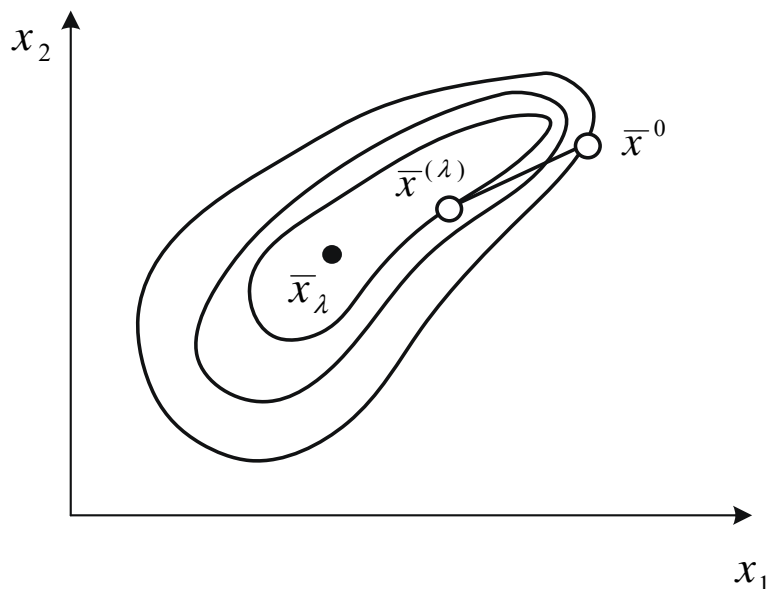


Рис. 4.17

Усе наведене вище легко узагальнюється для функції n змінних, однак у цьому випадку геометричне трактування задачі втрачає свою наочність. Тому в подальшому з метою надання задачам більшої наочності, розглянемо функцію двох змінних $f(x_1, x_2)$.

Візьмемо найпростішу пошукову задачу нелінійного програмування, у якій обмеження на змінні x_1 і x_2 не накладаються. Нехай функція $f(x_1, x_2)$ диференційована щонайменше двічі в точці $\bar{x}^0 = (\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0)$. Починаючи переміщення (ітераційний процес) з точки \bar{x}^0 , необхідно знайти такі значення змінних x_1 і x_2 , які перетворювали б цільову функцію на мінімум.

На рис. 4.18 зображено лінії постійного рівня функції $f(x_1, x_2)$ і точка \bar{x}^0 . Проведемо з точки \bar{x}^0 до точки $\bar{x}^{(1)} = (\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)})$ у напрямку вектора \bar{e}_1 відрізок завдовжки γ_1 .

Напрямок, при переміщенні уздовж якого від точки \bar{x}^0 до точки $\bar{x}^{(1)}$ значення змінних знаходяться у межах області допустимих розв'язків, назвемо можливим напрямком. Якщо ж при переміщенні уздовж можливого напрямку цільова функція спадає, його називають відповідним напрямком. На рис.4.18 відповідним напрямком є такий, що задається вектором \bar{e}_1 . З рисунка також випливає, що

$$\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} = \gamma_1 \bar{e}_1,$$

звідки

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \gamma_1 \bar{e}_1. \quad (4.93)$$

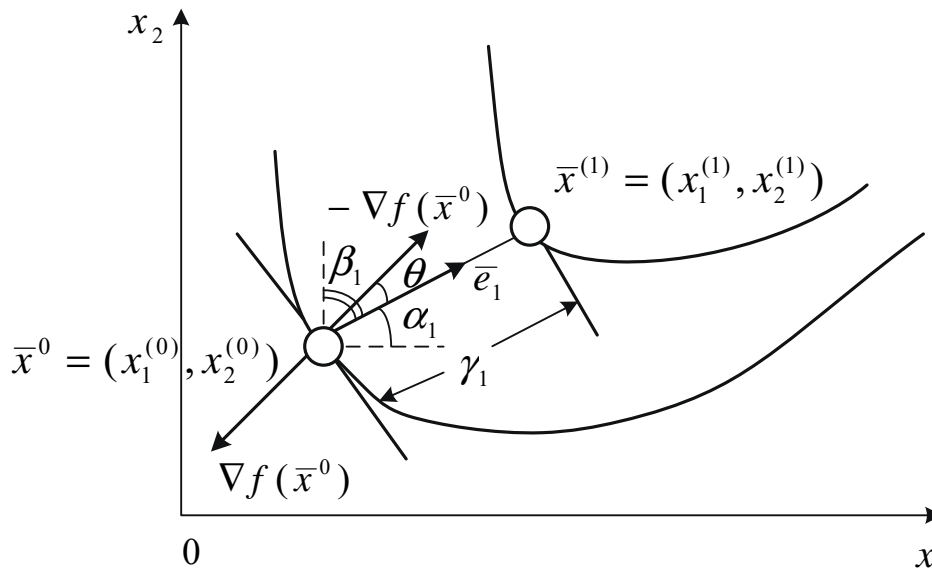


Рис.4.18

Якщо в точці $\bar{x}^{(1)}$ вибрати новий відповідний напрямок, наприклад, заданий вектором \bar{e}_2 , то процес наближення до мінімуму цільової функції можна продовжити. Для довільного k -го кроку аналогічного до (4.93) можна записати

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{x}^{(k-1)} + \gamma_k \bar{e}_k. \quad (4.94)$$

За виразом (4.94), який є суттю методу можливих напрямків, визначимо процедуру пошуку мінімуму функції $f(x_1, x_2)$. Ця процедура являє собою послідовність кроків, причому кожен крок містить дві операції:

- визначення напрямку пошуку і величини кроку γ_k ;
- переміщення вздовж вибраного напрямку на задану величину.

Розглянемо, як виборати напрямок. Одиничний вектор \bar{e}_k задається своїми напрямними косинусами:

$$\bar{e}_k = (\cos\alpha_k, \cos\beta_k).$$

Тоді з виразу (4.94) випливає, що

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= x_1^{(k-1)} + \gamma_k \cos\alpha_k; \\ x_2^{(k)} &= x_2^{(k-1)} + \gamma_k \cos\beta_k, \end{aligned} \tag{4.95}$$

де $x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}$ – координати точки $\bar{x}^{(k-1)}$ початку k -го кроку;

$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ – координати точки закінчення k -го кроку.

На рис. 4.18 усе наведене вище ілюструється для першого кроку. Відомо [14], що величина

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \gamma_k} = \\ & = \lim_{\gamma_k \rightarrow 0} \frac{f[x_1^{(k-1)} + \gamma_k \cos\alpha_k, x_2^{(k-1)} + \gamma_k \cos\beta_k] - f[x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}]}{\gamma_k} \end{aligned} \tag{4.96}$$

визначає швидкість змінення функції $f(\bar{x})$ уздовж напрямку \bar{e}_k і має назву похідної за напрямком у точці $\bar{x}^{(k-1)}$, тобто на початку k -го кроку.

З іншого боку,

$$f[x_1^{(k-1)} + \gamma_k \cos \alpha_k, x_2^{(k-1)} + \gamma_k \cos \beta_k] f[x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}] =$$

$$= \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x} = \bar{x}^{(k-1)}} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x} = \bar{x}^{(k-1)}} \Delta x_2^{(k)},$$
(4.97)

де

$$\Delta x_1^{(k)} = x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} = \gamma_k \cos \alpha_k,$$

$$\Delta x_2^{(k)} = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} = \gamma_k \cos \beta_k.$$
(4.98)

Вирази $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x} = \bar{x}^{(k-1)}}$ і $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x} = \bar{x}^{(k-1)}}$ означають, що відповідні похідні обчислюються в точці $\bar{x}^{(k-1)}$. Підставивши вирази (4.97) і (4.98) у вираз (4.96), отримуємо

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \gamma_k} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x} = \bar{x}^{(k-1)}} \cos \alpha_k + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x} = \bar{x}^{(k-1)}} \cos \beta_k =$$

$$= \nabla f(\bar{x}^{(k-1)}) \bar{e}_k.$$
(4.99)

Вираз (4.99) є відображенням того, що похідна в напрямку функції $f(\bar{x})$ у точці $\bar{x}^{(k-1)}$ на початку k -го кроку дорівнює скалярному добутку градієнта функції в цій точці на одиничний вектор відповідного напрямку в цій точці. Таким чином, задаючись необхідною швидкістю змінення функції, з формули (4.99) можна отримати напрямок пошуку на кожному кроці.

Усі наведені вище міркування можна поширити й для задач лінійного програмування, у яких на змінні x_1 і x_2 накладено обмеження. Нехай обмеження мають вигляд лінійних нерівностей:

$$\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 \geq b_1;$$

$$\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \geq b_2;$$

.....

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 \geq b_i;$$

.....

$$\alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 \geq b_m.$$

Тоді в координатах x_1, x_2 можна побудувати область допустимих розв'язків (рис. 4.19).

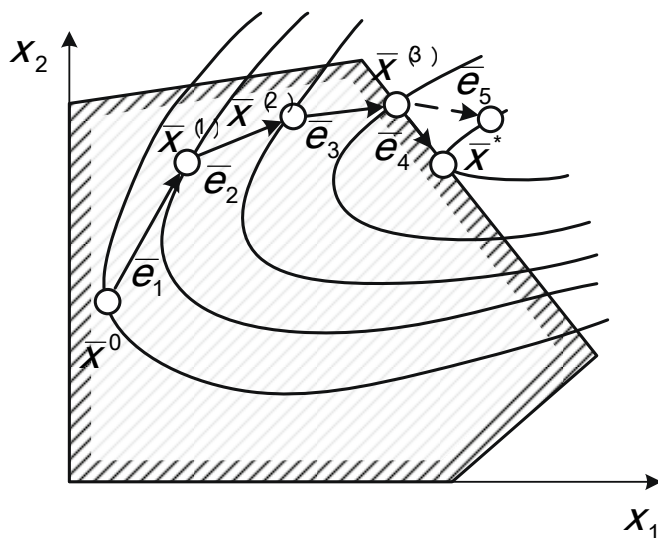


Рис. 4.19

Якщо початкова точка k -го кроку $\bar{x}^{(k-1)}$ знаходиться всередині області допустимих розв'язків (наприклад, точка $\bar{x}^{(1)}$ на рис. 4.19), то можливим напрямком у цій точці є будь-який напрямок, а відповідний напрямок вибирається виходячи тільки із заданої швидкості змінення функції. Якщо ж точка $\bar{x}^{(k-1)}$ є граничною точкою (наприклад, точка $\bar{x}^{(3)}$ на рис. 4.19), то можливі напрямки орієнтовано або всередину області допустимих розв'язків, або вздовж її межі. Звичайно, свобода вибору кращого напрямку, тобто напрямку зменшення значення цільової функції, тут є обмеженою. Так, напрямок, що задається вектором \bar{e}_5 , не можна брати як відповідний, тому що переміщення вздовж нього з точки $\bar{x}^{(3)}$ призведе до виходу з області допустимих розв'язків. Правила вибору придатного напрямку за наявності обмежень на змінні детально описано в [15].

Продовжимо розгляд найпростіших задач без обмежень. Отже, процедуру пошуку мінімуму цільової функції визначено. Постає питання, на якому етапі зупинити пошук. Очевидно, при наближенні до мінімуму цільової функції величина

$$|\nabla f(\bar{x}^{(k-1)}) \bar{e}_k| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(k-1)}} \cos \alpha_k\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(k-1)}} \cos \beta_k\right)^2}$$

буде зменшуватись. Якщо задатись умовою

$$|\nabla f(\bar{x}^{(k-1)})\bar{e}_k| \leq \varepsilon, \quad (4.100)$$

де $\varepsilon \geq 0$, то при її виконанні процедура пошуку мінімуму цільової функції призупиняється. Величина ε характеризує необхідну точність визначення мінімуму.

Залишається визначити, якою має бути величина кроку γ_k . У найпростішому випадку величину γ_k вибирають постійною на кожному кроці, тоді

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{x}^{(k-1)} + \gamma_k \bar{e}_k.$$

При всій своїй простоті така процедура пошуку має й суттєві недоліки. При великій величині кроку час пошуку зменшується, але завжди є небезпека «проскочити» ε -окил мінімуму. Мала величина кроку дає змогу більш точно наблизитися до мінімуму, але процедура пошуку при цьому буде тривалішою.

Ці недоліки усуваються при виборі змінної величини кроку. При цьому на початку пошукової процедури величина кроку вибирається великою, яка в міру наближення до мінімуму зменшується. Один із можливих законів змінення кроку пошукової процедури задається виразом

$$\gamma_k = \frac{1}{k+1} \gamma_1,$$

де γ_1 – величина першого кроку.

З виразу (4.99) випливає, що похідна за напрямком має значення

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \gamma_k} = \nabla f(\bar{x}^{(k-1)})\bar{e}_k = |\nabla f(\bar{x}^{(k-1)})| |\bar{e}_k| \cos \theta_k, \quad (4.101)$$

де θ_k – кут між векторами $\nabla f(\bar{x}^{(k-1)})$ і \bar{e}_k .

Значення похідної набуває максимуму при $\theta_k = 0$, тобто коли напрямок пошуку збігається з напрямком градієнта. Це ще раз підтверджує той факт, що напрямок градієнта збігається з напрямком найбільшого зростання функції, а напрямок антиградієнта – з напрямком найбільшого спаду функції.

Якщо максимум цільової функції шукати в напрямку градієнта, то вираз (4.94) можна записати таким чином:

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{x}^{(k-1)} + \gamma_k \nabla f(\bar{x}^{(k-1)}). \quad (4.102)$$

При пошуку в напрямку антиградієнта (при пошуку мінімуму цільової функції) вираз (4.94) перетворюється на такий:

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{x}^{(k-1)} - \gamma_k \nabla f(\bar{x}^{(k-1)}). \quad (4.103)$$

Процедури пошуку, які визначаються виразами (4.102) і (4.103), є суттю градієнтних методів, що є частковим випадком методу можливих напрямків.

Серед градієнтних методів на практиці набули поширення методи найшвидшого зростання (при пошуку максимуму $f(\bar{x})$) і найшвидшого спаду (при пошуку мінімуму $f(\bar{x})$), які забезпечують досягнення максимуму (мінімуму) за меншу кількість кроків порівняно з іншими методами.

Оскільки основну увагу було приділено задачі мінімізації, для ясності розглянемо метод найшвидшого спаду, суть якого можна пояснити, користуючись рис. 4.20.

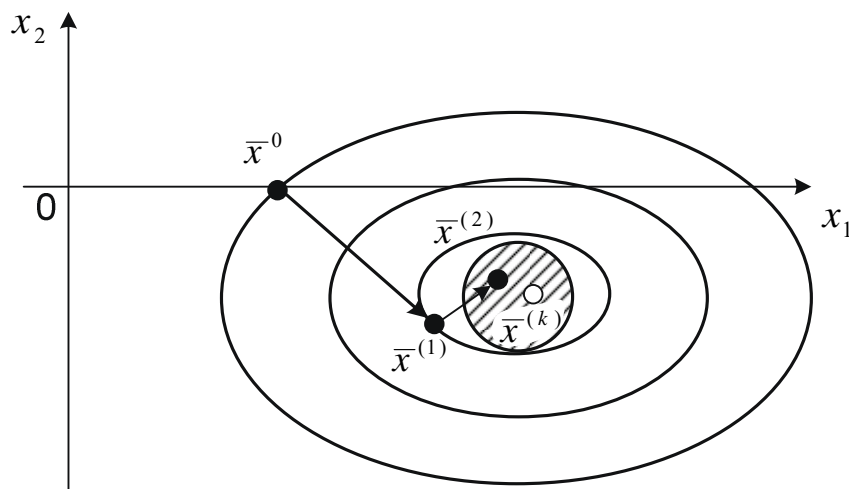


Рис. 4.20

На рисунку зображено лінії постійного рівня функції $f(x_1, x_2)$, а також початкова точка \bar{x}^0 . Визначимо в точці \bar{x}^0 напрямок антиградієнта функції і проведемо з точки \bar{x}^0 у цьому напрямку промінь. Під час руху по цьому променю значення цільової функції буде зменшуватися. У точці $\bar{x}^{(1)}$ промінь стане дотичним до деякої лінії постійного рівня, і подальше

переміщення за променем буде приводити вже до зростання цільової функції.

Отже, точка $\bar{x}^{(1)}$ є точкою локального мінімуму за напрямком $-\nabla f(\bar{x}^0)$ і в цій точці напрямок переміщення необхідно змінити. Для цього визначимо напрямок антиградієнта в точці $\bar{x}^{(1)}$, далі знайдемо точку локального мінімуму за новим напрямком. Цю процедуру повторюємо доти, доки із заданою точністю не знайдемо координати точки мінімуму цільової функції (рис. 4.20).

На рис. 4.21 зображено геометричне трактування довільного k -го кроку процедури методу найшвидшого спаду. Відомо, що градієнт (а отже, і антиградієнт) у точці $\bar{x}^{(k-1)}$ є перпендикулярним до дотичної лінії постійного рівня в цій же точці.

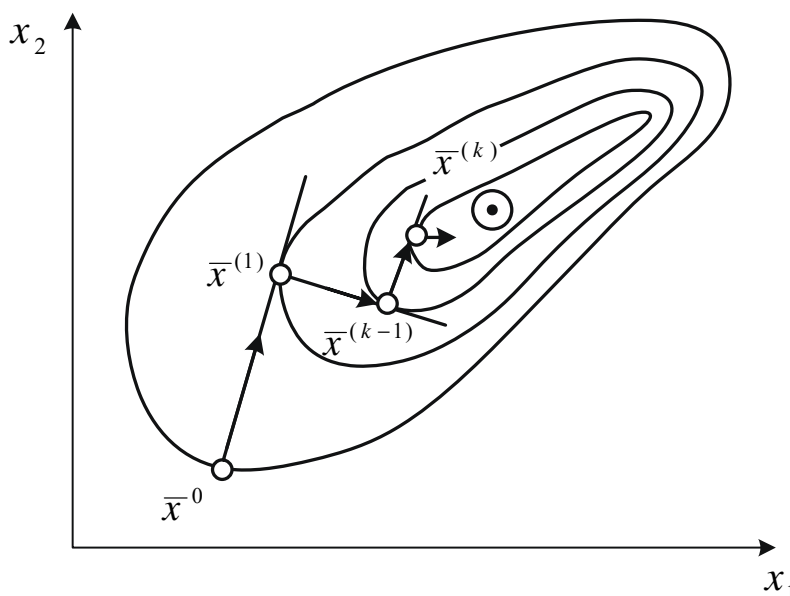


Рис. 4.21

Вище було підкреслено, що рух уздовж променя, проведеного в напрямку $-\nabla f(\bar{x}^{(k)})$, є можливим до точки локального мінімуму $\bar{x}^{(k-1)}$, у якій промінь дотикається до нової лінії постійного рівня. Однак антиградієнт $-\nabla f(\bar{x}^{(k)})$ у точці $\bar{x}^{(k)}$ буде перпендикулярним до променя, а отже, і до антиградієнта $-\nabla f(\bar{x}^{(k-1)})$. Очевидно, оскільки антиградієнти в точках $\bar{x}^{(k-1)}$ і $\bar{x}^{(k)}$ є перпендикулярними, їх скалярний добуток дорівнюватиме нулю. Таким чином, необхідною умовою того, що в точці $\bar{x}^{(k)}$ функція $f(\bar{x})$ набуває локального мінімуму у напрямку $-\nabla f(\bar{x}^{(k-1)})$, є рівність

$$[-\nabla f(\bar{x}^{(k-1)})][-\nabla f(\bar{x}^{(k)})] = 0,$$

або

$$\nabla f(\bar{x}^{(k-1)}) \nabla f(\bar{x}^{(k)}) = 0. \quad (4.104)$$

Ураховуючи, що

$$\nabla f(\bar{x}^{(k-1)}) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(k-1)}}; \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(k-1)}} \right), \quad (4.105)$$

$$\nabla f(\bar{x}^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(k)}}; \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(k)}} \right), \quad (4.106)$$

замість (4.104) отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(k-1)}} \right) \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(k)}} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(k-1)}} \right) \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(k)}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.107)$$

З рівняння (4.103) аналогічно до (4.95) можна отримати вирази для обчислення координат точки $\bar{x}^{(k)}$:

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} - \gamma_k \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(k-1)}}, \quad (4.108)$$

$$x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} - \gamma_k \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(k-1)}}. \quad (4.109)$$

Для визначення величини k -го кроку γ_k необхідно знайти розв'язок рівняння (4.107) з урахуванням (4.108) і (4.109). Зі свого боку, підстановка

значення γ_k в (4.108) і (4.109) дає змогу знайти $x_1^{(k)}$ і $x_2^{(k)}$. Процес пошуку мінімуму відповідно до (4.108) і (4.109) буде тривати доти, доки не буде виконано умову

$$|\nabla f(\bar{x}^{(k)}) \bar{e}_k| \leq \varepsilon. \quad (4.110)$$

Величина ε визначає розміри околу точки мінімуму цільової функції, що задовольняє задану точність. З урахуванням (4.106) умову (4.110) можна записати таким чином:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(k)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(k)}}\right)^2} \leq \varepsilon. \quad (4.111)$$

Вирази (4.107)–(4.109) і (4.111) є робочими розрахунковими співвідношеннями при використанні методу найшвидшого спаду.

Розглянемо приклад розв'язання задачі нелінійного програмування методом найшвидшого спаду.

Приклад 4.13. Знайти значення змінних, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2.$$

Початкова точка пошуку $\bar{x}^{(0)} = (1; 0)$, допустима точність $\varepsilon = 0,5$. Перш ніж розпочати розв'язання задачі, зобразимо на площині $x_1 O x_2$ лінії постійного рівня функції $f(\bar{x})$ (рис. 4.22). Для цього, виокремивши у виразі для $f(\bar{x})$ повні квадрати

$$f(\bar{x}) = (x_1^2 - 2 \cdot 2x_1 + 4) + 2(x_2^2 + 2 \cdot 0,5x_2 + 0,25) - 4 - 0,5,$$

отримаємо

$$f(\bar{x}) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 + 0,5)^2 - 4,5.$$

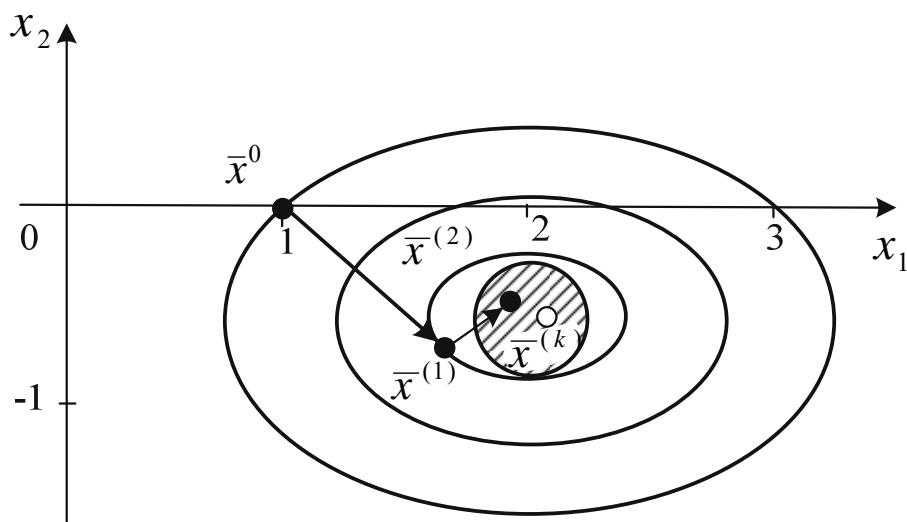


Рис. 4.22

Задамо цільовій функції значення F . Тоді лінію перетину цільової функції з площиною $f(\bar{x}) = F$ можна описати таким виразом:

$$(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 + 0,5)^2 - 4,5 = F.$$

Після нескладних перетворень останнє рівняння набуде вигляду

$\frac{(x_1 - 2)^2}{F + 4.5} + \frac{(x_2 + 0,5)^2}{0,5F + 2.25} = 1$. Таким чином, сім'єю ліній постійного рівня досліджуваної функції є сім'я еліпсів з центром у точці $x_{л} = (2; -0,5)$, у якій функція $f(\bar{x})$ набуває мінімуму, що легко перевірити, дослідивши матрицю других часткових похідних $f(\bar{x})$. Штрихуванням на рисунку показано область, яка визначає задану точність $\varepsilon \leq 0,5$.

Знайдемо часткові похідні цільової функції:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = 2x_1 - 4, \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} = 4x_2 + 2. \quad (4.113)$$

Складові градієнта цільової функції в точці $\bar{x}^{(0)}$ визначаються підста-

новкою в (4.112) і (4.113) відповідних значень $x_1^{(0)} = 1$ і $x_2^{(0)} = 0$:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(0)}} = 2 \cdot 1 - 4 = -2, \quad (4.114)$$

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(0)}} = 4 \cdot 0 + 2 = 2. \quad (4.115)$$

Відповідно до формул (4.108) і (4.109) координати точки $\bar{x}^{(1)}$, у якій функція набуває мінімуму в кінці першого кроку, визначаються з рівнянь

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \gamma_1 \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(0)}},$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - \gamma_1 \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(0)}}.$$

Підставивши значення $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(0)}}$ і $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(0)}}$ у ці рівняння, отримаємо

$$x_1^{(1)} = 1 - \gamma_1(-2) = 1 + 2\gamma_1, \quad (4.116)$$

$$x_2^{(1)} = 0 - 2\gamma_1 = -2\gamma_1. \quad (4.117)$$

Знайдемо складові градієнта цільової функції в точці $\bar{x}^{(1)}$. Для цього у формулу (4.112) підставимо вираз (4.116), а в (4.113) – вираз (4.117). Тоді

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1 | \bar{x}=\bar{x}^{(1)}} = 2(1 + 2\gamma_1) - 4 = -2 + 4\gamma_1; \quad (4.118)$$

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2 | \bar{x}=\bar{x}^{(1)}} = 4(-2\gamma_1) + 2 = 2 - 8\gamma_1. \quad (4.119)$$

Відповідно до формули (4.107)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(0)}} \right) \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(1)}} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(0)}} \right) \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(1)}} \right) = 0. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Підставивши в це рівняння значення часткових похідних з формул (4.114), (4.115), (4.118) і (4.119), після нескладних перетворень отримаємо

$$8 - 24\gamma_1 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо величину першого кроку $\gamma_1 = \frac{1}{3}$.

Підстановка γ_1 в (4.116) і (4.117) дає змогу знайти координати точки $\bar{x}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1 + 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3}; \\ x_2^{(1)} &= -2\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

На рис. 4.22 зображено точку $\bar{x}^{(1)} = \left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3} \right)$, яка не належить заштрихованій області. Таким чином, заданої точності після першого кроку не одержано. Переконаємося в цьому. Підставивши γ_1 в (4.118) і (4.119), знайдемо складові градієнта в точці $\bar{x}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(1)}} &= -2 + 4\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}, \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(1)}} &= 2 - 8\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Модуль градієнта функції $f(\bar{x})$ у точці $\bar{x}^{(1)}$

$$|\nabla f(\bar{x}^{(k)})| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(1)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{(1)}}\right)^2} = 2\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Оскільки $|\nabla f(\bar{x}^{(k)})| = 2\frac{\sqrt{2}}{3} > 0,5$, заданої точності не досягнуто. Перейдемо до другого кроку. Вихідною точкою другого кроку є точка $\bar{x}^{(1)} = \left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. Усі розрахунки для другого кроку проводимо аналогічно.

Кінцева точка другого кроку $\bar{x}^{(2)}$ має координати $x_2^{(1)} = \frac{17}{9}$ і $x_2^{(1)} = \frac{4}{9}$.

Оскільки модуль градієнта функції $f(\bar{x})$ у цій точці

$$|\nabla f(\bar{x}^{(k)})| = \frac{2\sqrt{2}}{9} < 0,5,$$

задана точність забезпечується. Це підтверджується і рис. 4.22, з якого видно, що точка $\bar{x}^{(2)}$ знаходиться в межах заштрихованої області.

Таким чином, розв'язком розглянутої задачі нелінійного програмування є вектор

$$\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}}^{(2)} = \left(\frac{17}{9}; -\frac{2}{3}\right).$$

Для проведення розрахунків під час пошуку мінімуму цільової функції зручно користуватися таблицями. Під час розрахунку чергового кроку значення координат початкової $\bar{\mathbf{x}}^{(k-1)}$ і кінцевої $\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$ точок, а також складових градієнта функції $f(\bar{\mathbf{x}})$ у цих точках запишемо у відповідних рядках таблиці. У рядку $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}^{(k-1)}) \nabla f(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) = 0$ запишемо рівняння, розв'язком якого є значення γ_2 чергового кроку. Результати перевірки одержання заданої точності занесемо в останній рядок табл. 4.7.

Переходячи до чергового кроку, додамо відповідний стовпець. Розрахунки закінчуються при виконанні умови (4.111). Зазначимо, що метод найшвидшого спаду не є єдиним серед градієнтних методів. Для розв'язання задач нелінійного програмування залежно від конкретних умов також можна використовувати метод покоординатного спуску, метод проективних градієнтів та ін. Обчислювальні процедури цих методів детально описано в спеціальній літературі [15].

Задачі нелінійного програмування є дуже різноманітними, тому для

різних класів задач розробляються відповідні обчислювальні методи. Немає сумніву, що під час практики будуть поставати нові завдання і це, у свою чергу, стимулюватиме розвиток теорії й обчислювальних методів нелінійного програмування.

Таблиця 4.7

| | | | | |
|--|-----------------------|----------------|--------------------------------------|----------------|
| Номер кроку, k | 1 | | 2 | |
| $x_1^{(k-1)}$ | 1 | | $\frac{5}{3}$ | |
| $x_2^{(k-1)}$ | 0 | | $-\frac{2}{3}$ | |
| $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \Big _{\bar{x} = \bar{x}^{(k-1)}}$ | -2 | | $-\frac{2}{3}$ | |
| $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} \Big _{\bar{x} = \bar{x}^{(k-1)}}$ | 2 | | $-\frac{2}{3}$ | |
| $x_1^{(k)}$ | $1 + 2\gamma_1$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\gamma_2$ | $\frac{17}{9}$ |
| $x_2^{(k)}$ | $-2\gamma_1$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\gamma_2$ | $-\frac{4}{9}$ |
| $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \Big _{\bar{x} = \bar{x}^{(k)}}$ | $-2 + 4\gamma_1$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{-3} + \frac{4}{3}\gamma_2$ | $-\frac{2}{9}$ |
| $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} \Big _{\bar{x} = \bar{x}^{(k)}}$ | $2 - 4\gamma_1$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3} + \frac{8}{3}\gamma_2$ | $-\frac{2}{9}$ |
| $\nabla f(\bar{x}^{(k-1)}) \nabla f(\bar{x}^{(k)}) = 0$ | $8 - 24\gamma_1 = 0$ | | $8 - 24\gamma_2 = 0$ | |
| γ_k | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{3}$ | |
| $\nabla f(\bar{x}^{(k)})$ | $2\frac{\sqrt{2}}{3}$ | | $2\frac{\sqrt{2}}{9}$ | |

Контрольні запитання

1. Назвіть методи розв'язання задач нелінійного програмування.
2. Сформулюйте основну теорему математичного програмування.
3. Назвіть основні особливості задач нелінійного програмування.
4. Які множини є опуклими й увігнутими?
5. Наведіть властивості опуклих функцій.

6. Яким чином розв'язують задачі нелінійного програмування із сепарабельними цільовими функціями?

7. Яким чином розв'язують задачі нелінійного програмування із сепарабельними обмеженнями?

8. Яким чином розв'язують задачі нелінійного програмування із сепарабельними цільовими функціями й обмеженнями?

5. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Основні поняття й означення

Динамічне програмування – це інструмент вирішення багатокрокових завдань (завдання управління запасами, бойові дії і т. ін.). Нариклад, для передання повідомлень в автоматизованій системі керування організується мережа зв'язку. Вузли зв'язку, призначені для передання, приймання, зберігання й розподілу інформації, з'єднані між собою лініями зв'язку. Мережа зв'язку зображується у вигляді графа (рис. 5.1). Вершини графа – вузли, ребра графа – лінії зв'язку. Початковий вузол – місце, звідки передано повідомлення (джерело повідомлення), кінцевий вузол – отримувач повідомлення (якому адресовано повідомлення), проміжні вузли – транзитні, 1-ша група – вузли, безпосередньо зв'язані з вузлом нульової групи; y_{li} – i -й вузол l -ї групи; y_{01} – початковий вузол; y_{11} , y_{12} , ..., – вузли, які належать до 1-ї групи.

Повідомлення між початковим і кінцевим вузлами можна передати різними маршрутами, наприклад:

$$y_{01} \rightarrow y_{11} \rightarrow y_{21} \rightarrow \dots \rightarrow y_{l-1,1} \rightarrow y_{l2} \rightarrow \dots \rightarrow y_{n-1,1} \rightarrow y_{n1},$$

$$y_{01} \rightarrow y_{12} \rightarrow y_{21} \rightarrow \dots \rightarrow y_{l-1,3} \rightarrow y_{l2} \rightarrow \dots \rightarrow y_{n-1,2} \rightarrow y_{n1}.$$

$$y_{01} \rightarrow y_{13} \rightarrow y_{23} \rightarrow \dots \rightarrow y_{l-1,3} \rightarrow y_{l2} \rightarrow \dots \rightarrow y_{n-1,2} \rightarrow y_{n1}.$$

Вибір конкретного маршруту – це керування процесом передання повідомлень у мережі зв'язку. Кращим буде найкоротший шлях (маршрут) передання повідомлень. Важливим завданням є вибір оптимального маршруту, що задовольняє задані вимоги.

Процес передання повідомлень – багатокроковий процес, вибір оптимального маршруту – задача динамічного програмування.

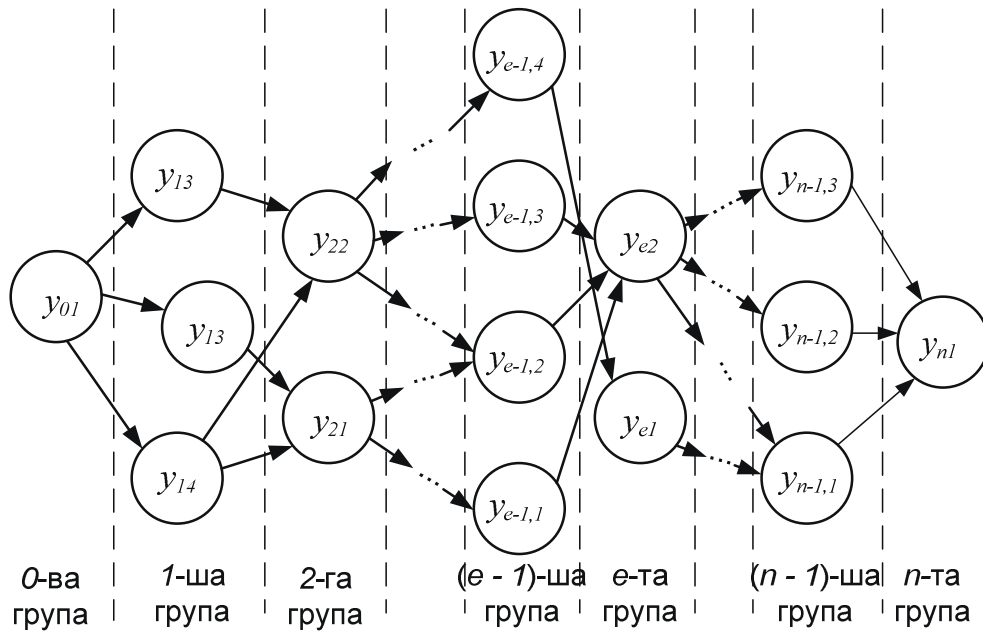


Рис. 5.1

Формальна постановка задачі. Стан $x_j^{(l)}$ мережі – повідомлення знаходиться у вузлі y_{li} , $j = \overline{1, r_l}$, тобто в l -й групі міститься r_l вузлів. Керуванням називають вибір послідовності вузлів зв'язку (маршруту) передання повідомлення від початкового до кінцевого вузла. Крок – передання повідомлення з вузла $y_{l-1,i}$ до вузла y_{li} сусідньої групи. Передання повідомлення з y_{01} до y_{n1} здійснюється за n кроків.

Керування U_{kj}^l на l -му кроці: вибір вузла y_{li} для передання повідомлення із вузла $y_{l-1,k}$ в кінці $(l - 1)$ -го кроку $y_{l-1,k} \rightarrow y_{li}$. Наприклад, керування станом – це дія з переведення мережі зв'язку зі стану $x_k^{(l-1)}$ у стан

$$x_j^{(l)} = f_l(x_{kj}^{(l-1)}, U_{kj}^l). \quad (5.1)$$

Кожному варіанту керування U_{kj}^l відповідає шлях, за яким передається повідомлення на l -му кроці. Довжина шляху $L_{kj}^{(l)}$ залежить від стану $x_k^{(l-1)}$ і керування U_{kj}^l . Довжина шляху визначається з виразу

$$L_{kj}^{(l)} = f_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^l). \quad (5.2)$$

За n кроків керування довжина шляху визначається таким чином:

$$L = L_{ik}^{(1)} + L_{ik}^{(2)} + \dots + L_{ik}^{(l)} + \dots + L_{ik}^{(n)}.$$

З урахуванням (5.1)

$$L = \sum_{l=1}^n f_l \left(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)} \right), \quad (5.3)$$

де $k = \overline{1, r_{l-1}}, j = \overline{1, r_l}, i = \overline{1, n}$,

r_{l-1} – кількість вузлів в $(l-1)$ -й групі (кількість станів мережі в кінці $(l-1)$ -го кроку).

Сукупність усіх крокових керувань

$$U = (U_{1i}^{*(1)}, U_{ik}^{*(2)}, \dots, U_{j1}^{*(n)}) \quad (5.4)$$

утворює керування процесом передання повідомлень мережею зв'язку в цілому.

Задача динамічного програмування полягає в тому, щоб вибрати таке керування U^* , яке забезпечувало б передання повідомлень найкоротшим шляхом завдовжки L_{min} :

$$U^* = (U_{1i}^{*(1)}, U_{ik}^{*(2)}, \dots, U_{j1}^{*(n)}) = \{U_{kj}^{*(l)}\}; \quad (5.5)$$

$$L_{min} = \min_{U_{kj}^{*(l)} \in U} \sum_{l=1}^n f_l \left(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)} \right). \quad (5.6)$$

Керування

$$U^* = (U_{1i}^{*(1)}, U_{ik}^{*(2)}, \dots, U_{j1}^{*(n)}),$$

при якому набувається мінімальне значення L_{min} , називають *оптимальним керуванням*.

Керування має кількісний характер (характеризує дії, що переводять систему з одного стану в інший). Вирази (5.1) і (5.2) є символічними (визначають наявність зв'язку між станами), але не дають змоги проводити обчислення. Якщо це є необхідним, то керування можна записати й кількісно: $U_{kj}^{(l)} = 0(1)$.

Обмеження задачі. Довжина шляху не може бути від'ємною величиною ($L_{kj}^{(l)} \geq 0$). Якщо керування виражається кількісно, то обмеженням буде

нерівність $U_{kj}^{(l)} \geq 0$. Обмеження можуть накладатися на загальну кількість вузлів у мережі або довжину маршруту:

$$\sum_{l=1}^n \alpha_l U_{kj}^{(l)} \leq c, \quad U_{kj}^{(l)} = (0,1).$$

Властивості задачі динамічного програмування:

– багатокроковий характер передання;
 – незалежність процесу передання від передісторії (передання повідомлення між вузлами $y_{lj} \rightarrow y_{n1}$ не залежить від того, яким чином повідомлення потрапило у вузол y_{lj});

– адитивність цільової функції L ;

– можливість вибирати найкоротший шлях за результатами керування.

Можливою є також мультиплікативність цільової функції. Наприклад, завади в каналах зв'язку спричиняють спотворення й помилки в повідомленнях. Якість передання інформації між вузлами мережі будемо оцінювати ймовірністю правильного приймання (ймовірністю відсутності помилки під час приймання повідомлення)

$$P_{\text{пр}l} = \psi_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}).$$

Якщо в транзитних вузлах не було виправлень помилок, то

$$P_{\text{пр}} = \prod_{l=1}^n P_{\text{пр}l} = \prod_{l=1}^n \psi_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}). \quad (5.7)$$

У системах передання повідомлень забезпечується максимальне значення $P_{\text{пр}}$ ($P_{\text{пр}max}$). Функція $P_{\text{пр}}$ є мультиплікативною цільовою функцією.

Задача. Вибрати таке керування

$$U^* = (U_{1i}^{*(1)}, U_{ik}^{*(2)}, \dots, U_{j1}^{*(n)}), \quad (5.8)$$

яке забезпечить максимальну ймовірність правильного приймання повідомлення, тобто

$$\begin{aligned} P_{\text{пр}max} &= \\ &= \max_{U_{kj}^{*(l)} \in U} \prod_{l=1}^n \psi_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}) = \prod_{l=1}^n \psi_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{*(l)}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Деякі задачі потребують знання передісторії процесу. Усі задачі є багатокроковими, що й визначає суть методів динамічного програмування, у яких застосовується багатокроковий процес поводження складних систем. Відомими є:

– кількість кроків n процесу;

– множина станів системи $\{x_k^{(l-1)}\}$, $k = \overline{1, r_{l-1}}$, $l = \overline{1, n+1}$, на початку кожного l -го кроку керування;

– множина можливих керувань $\{U_{kj}^{(l)}\}$, на кожному l -му кроці керування, $j = \overline{1, r_l}$;

– результати керування на l -му кроці, тобто стани, у які переходить система після відповідного керування,

$$x_j^{(l)} = \psi_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)});$$

– цільова функція з властивістю адитивності

$$W = \sum_{l=1}^n \omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)});$$

– початковий $x_1^{(0)}$ і кінцевий $x_1^{(n)}$ стани системи;

– обмеження, які накладаються на керування й цільову функцію.

Розв'язання задачі. З множини U допустимих виберемо таке керування

$$U^* = (U_{1i}^{*(1)}, U_{ik}^{*(2)}, \dots, U_{j1}^{*(n)}), \quad (5.10)$$

яке переводить систему зі стану $x_1^{(0)}$ у стан $x_1^{(n)}$ і перетворює на мінімум (максимум) цільову функцію, тобто

$$\begin{aligned} W_{min} &= \min_{U_{kj}^{*(l)} \in U} \sum_{l=1}^n \omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}) = \\ &= \sum_{l=1}^n \omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{*(l)}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Множини початкових $x_1^{(0)}$ і кінцевих $x_1^{(n)}$ станів системи є заданими.

На рис. 5.2 наведено граф станів системи з невідомими початковими і кінцевими станами. Множина початкових станів $X^{(0)}$ утворюється станами $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$, тобто має потужність $r_0 = 3$. Множина кінцевих станів $X^{(n)}$

утворюється станами $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_2^{(n)}, x_4^{(n)}$, тобто її потужність становить $r_n = 4$.

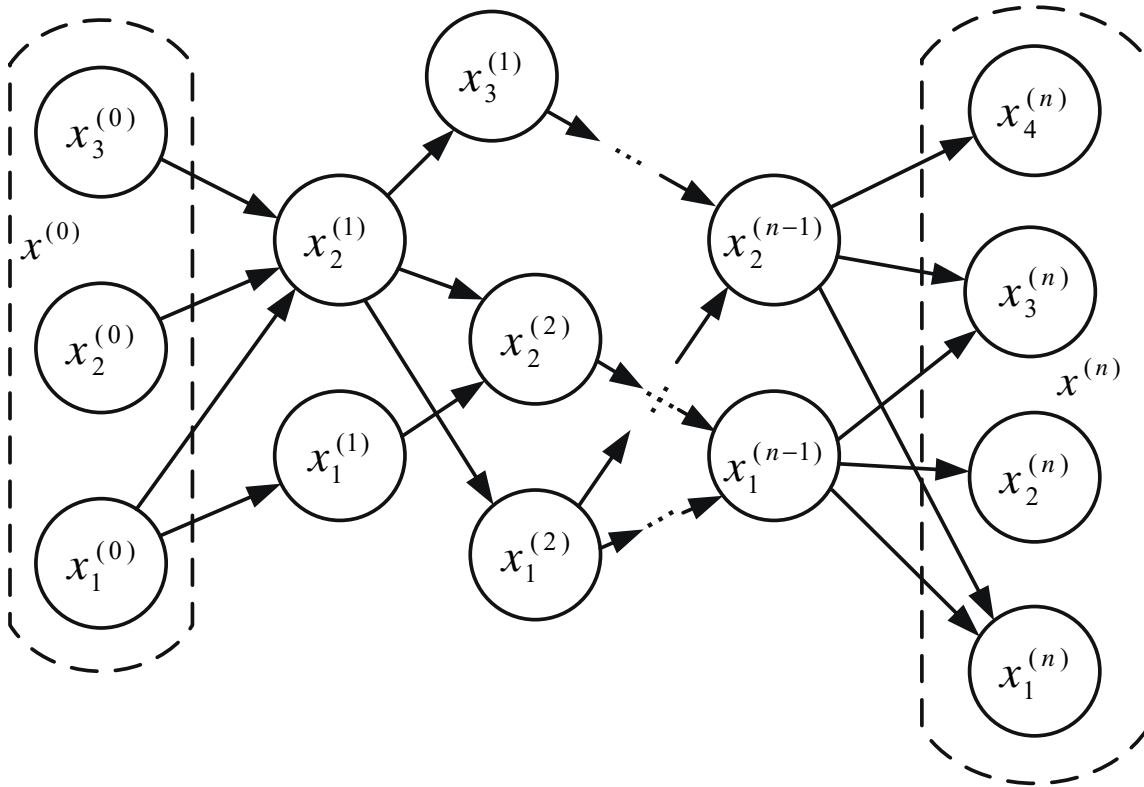


Рис. 5.2

У загальному вигляді задачу можна сформулюватитаким чином: із множини U допустимих керувань вибрати таке керування U^* , яке переводило б систему зі стану $x_\alpha^{(0)} \in X^{(0)}$ у стан $x_\beta^{(n)} \in X^{(n)}$, де $\alpha = \overline{1, r_0}, \beta = \overline{1, r_n}$. Наприклад, перша задачає такою: $x_1^{(0)} \rightarrow U^* \rightarrow x_1^{(n)}$, друга – $x_\alpha^{(0)} \rightarrow U^* \rightarrow x_\beta^{(n)}$.

На рис. 5.3 наведено геометричне трактування процесу керування. Будь-який стан $x_\alpha^{(i)}$ можна описати числовими параметрами (фазовими координатами): номером вузла зв'язку і номером групи. Будь-який стан системи буде точкою фазового простору. Змінення стану системи під впливом керування – переміщення точки за деякою траєкторією в нову область фазового простору. Фазовий простір може бути двовимірним (площина), тривимірним (простір), n -вимірним (гіперпростір).

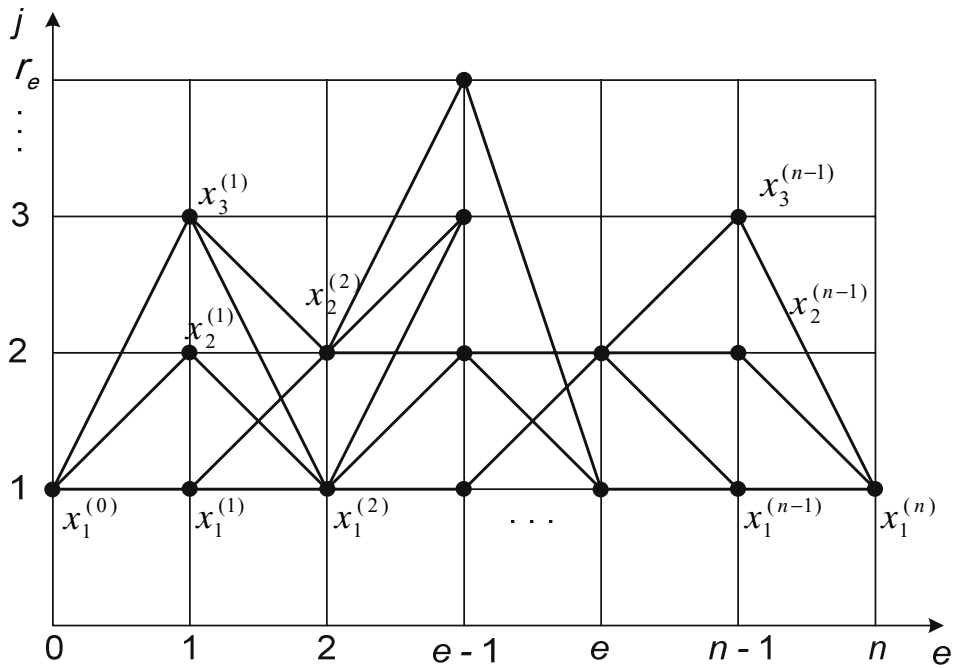


Рис. 5.3

Мережу зв'язку можна описати таким чином:

- перша фазова координата – номер вузла зв'язку (j);
- друга фазова координата – номер групи (l -й крок).

Передання повідомлення з одного вузла зв'язку до іншого є еквівалентним переміщенню точки фазового простору за деякою траєкторією $x_1^{(1)} \rightarrow x_2^{(2)}$. Перехід з $x_1^{(0)}$ в $x_1^{(n)}$ здійснюється по одній із траєкторій, довжина якої дорівнює сумі окремих ділянок.

Геометричне трактування задачі ДП: серед допустимих траєкторій вибрати таку, переміщення по якій з початкового в кінцевий стан системи забезпечувало б мінімальне значення цільової функції. Вибір фазових координат може бути різним. Основний критерій – зручність обчислювальної процедури.

Перший підхід. Значення цільової функції W залежить від керувань $U_{kj}^{(l)}$ на кожному кроці. Цільову функцію можна розглядати як функцію багатьох змінних. Тоді розв'язання задачі буде полягати у знаходженні сукупності значень керувань (аргументів) $U_{kj}^{(l)}$, при яких значення цільової функції набуває мінімуму (перший підхід). Розв'язуючи систему рівнянь

$$\frac{\partial W}{\partial U_{kj}^{(1)}} = 0, \dots, \frac{\partial W}{\partial U_{kj}^{(l)}} = 0, \dots, \frac{\partial W}{\partial U_{kj}^{(n)}} = 0,$$

можна знайти розв'язок

$$U^* = (U_{1i}^{*(1)}, U_{kj}^{*(2)}, \dots, U_{kj}^{*(n)}),$$

який перетворює цільову функцію W на мінімум. Прикладами таких задач є задачі нелінійного програмування, розглянуті в попередньому розділі.

Недоліки цього підходу:

- у більшості випадків визначається не глобальний, а локальний екстремум;
- при великому значенні n розв'язання задачі виявляється громіздким;
- якщо величини $U_{kj}^{(l)}$ є дискретними, що є властивим для більшості завдань динамічного програмування, то часткові похідні взагалі не обчислюються.

Другий підхід – використання простого перебирання. Шляхом перебирання визначаються всі керування U , які переводять систему зі стану $x_1^{(0)}$ у стан $x_1^{(n)}$ і значення W , які відповідають цим керуванням. З усієї сукупності U допустимих керувань вибирається те, яке забезпечує мінімальне значення W_{min} (перебираються всі траєкторії).

Основна складність використання такого підходу пов'язана з розмірністю завдання. Збільшення значень r_l і n зумовлює збільшення обсягу обчислень, і пошук розв'язання завдання ускладнюється.

Суть методу динамічного програмування – поступова покрокова оптимізація. Задача розв'язується за кроками (n разів розв'язуються прості задачі).

Приклад 5.1. Нехай необхідно вибрати найкоротший шлях передання повідомлення з вихідного в кінцевий вузол мережі зв'язку, граф якої показано на рис. 5.4. Цифри на цьому рисунку означають відстань між вузлами зв'язку в кілометрах.

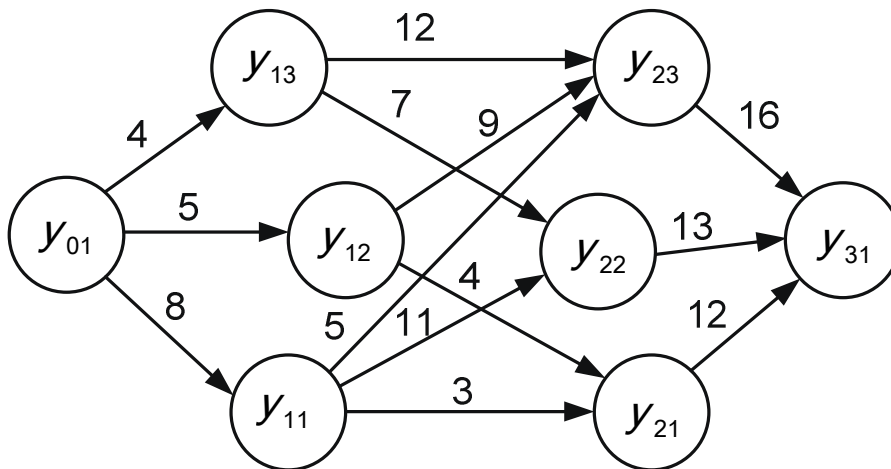


Рис. 5.4

Проведемо покрокову оптимізацію розв'язання задачі:

1-й крок: передання повідомлення з вузла y_{01} у вузол y_{13} ; довжина шляху становитиме 4 км ($y_{01} \rightarrow y_{13} = 4$ км);

2-й крок: $y_{13} \rightarrow y_{22} = 7$ км;

3-й крок: $y_{22} \rightarrow y_{31} = 13$ км.

Разом: $4 + 7 + 13 = 24$ км.

Коротшим є такий маршрут

$$y_{01} \rightarrow y_{11} \rightarrow y_{21} \rightarrow y_{31} = 8 + 3 + 12 = 23 \text{ км.}$$

Крокове керування вибирають з визначення оптимального результату (найкоротшого шляху) на певному кроці, при цьому ігнорується подальший процес.

Керування на кожному кроці слід вибирати з урахуванням усіх його наслідків у майбутньому. Далекоглядне прийняття рішень на кожному кроці з урахуванням перспективи розвитку процесу – суть принципу оптимальності. Яким би не був стан системи на початку l -го кроку, керування на l -му кроці необхідно вибрати таким, щоб сукупності з керуваннями на наступних $(l+1)$, ..., n -му кроках забезпечувало одержання оптимального результату, включаючи й l -й крок.

Принцип оптимальності сформулював Р. Беллман. Ідея застосовувалася інтуїтивно для розв'язання задач планування й керування. Приклад – гра в шахи. Керування на поточному кроці є кращим не тільки для цього кроку, але й для всього процесу.

5.2. Метод спрямованого перебирання

Зміст методу: при виборі керування на кожному кроці необхідно враховувати майбутнє. Перебирання проводиться від останнього кроку до першого. Оскільки стан системи на початку кожного кроку є невідомим, оптимальне керування визначається для кожного можливого стану. Таке керування називають умовним оптимальним керуванням. Рухаємося до початкового стану, який є одним. За відомим початковим станом (на початку першого кроку) можна знайти безумовне оптимальне керування або оптимальне керування на першому кроці, яке приведе до відомого стану на другому кроці, і т. д. Тепер задача розв'язується від початку до кінця.

Останній крок (n -й). Керування не залежить від майбутнього. На цьому кроці вибирають керування з найбільшим ефектом ($\min W$). Потім переходять до оптимізації передостаннього кроку з урахуванням того, що на останньому кроці оптимальне керування вже є відомим, і т. д. Унаслідок

цього визначається оптимальне керування для всього багатокрокового процесу:

$$U^* : x_1^{(0)} \rightarrow x_i^{(n)} \rightarrow \min W.$$

Послідовність умовних оптимальних розв'язків (від кінця до початку) (зворотний етап) полягає в будіванні безумовних оптимальних керувань, рухаючись у звичайному порядку (прямий етап розв'язання задачі динамічного програмування).

Виведемо формальне співвідношення:

$$w_l(x_k^{(l-1)}) = \sum_{i=l}^n \omega_i(x_k^{(i-1)}, U_{kj}^{*(i)}), \quad (5.12)$$

де $w_l(x_k^{(l-1)})$ – мінімальне значення цільової функції з l -го кроку до n -го, якщо на всіх цих кроках здійснюється оптимальне керування $U_{kj}^{*(i)}$, $i = \overline{1, n}$.

Назвемо величину $w_l(x_k^{(l-1)})$ умовним оптимальним виграшем на l -му кроці. Нехай відомими є $x_1^{(0)}$ і $x_1^{(n)}$. Розглянемо два останні кроки керування. На рис. 5.5 зображено граф станів системи, що містить два останніх кроки керування.

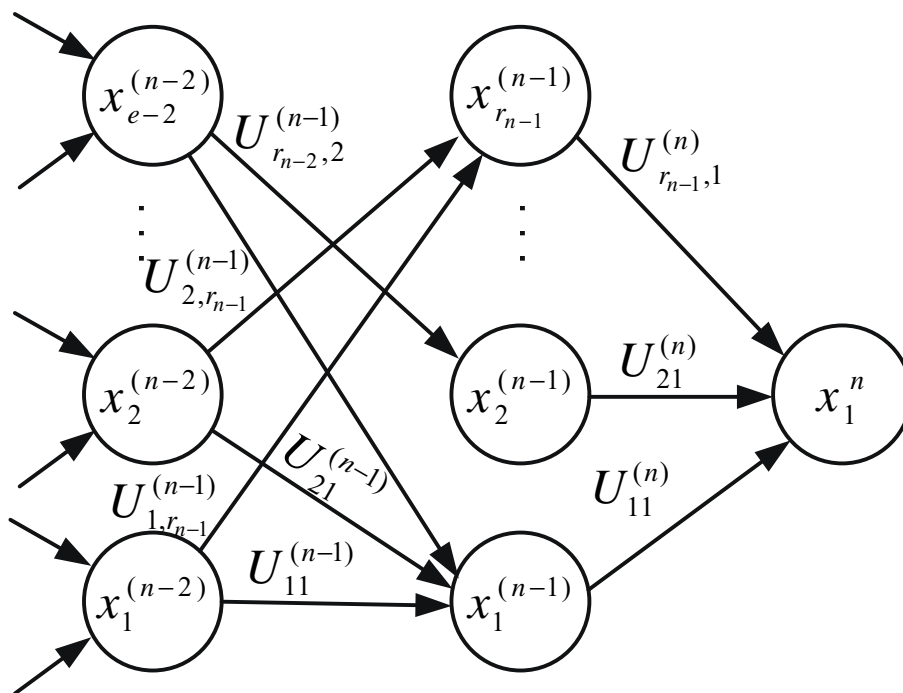


Рис. 5.5

У кінці $(n - 1)$ -го кроку система перейде в один із можливих станів $x_1^{(n-1)}$, $x_2^{(n-1)}$, ..., $x_{r_{n-1}}^{(n-1)}$, де r_{n-1} – кількість можливих станів у кінці $(n - 1)$ -го кроку, $x_j^{(n-1)}$ – довільний стан на $(n - 1)$ -му кроці, $j = \overline{1, r_{n-1}}$. Стан $x_1^{(n-1)}$ є відомим, тому для кожного стану $x_j^{(n-1)}$ існує єдине керування $U_{j1}^{(n)}$, яке переводить систему зі стану $x_j^{(n-1)}$ у стан $x_1^{(n)}$:

$$U_{j1}^{(n)}: x_j^{(n-1)} \rightarrow x_1^{(n)}. \quad (5.13)$$

Кожному керуванню $U_{j1}^{(n)}$ відповідає певне значення цільової функції на n -му кроці:

$$\omega_n = \omega_n(x_j^{(n-1)}, U_{j1}^{(n)}). \quad (5.14)$$

Інших варіантів керування, окрім $U_{j1}^{(n)}$, немає. Керування $U_{j1}^{(n)}$ будемо називати умовним оптимальним керуванням на n -му кроці $U_{j1}^{(n)} = U_{j1}^{*(n)}$, а значення цільової функції – *умовним оптимальним виграшем*

$$W_n(x_k^{(n-1)}) = \omega_n(x_k^{(n-1)}, U_{j1}^{(n)}). \quad (5.15)$$

На цьому оптимізація n -го кроку закінчується. Унаслідок оптимізації встановлено, що якого би стану $x_j^{(n-1)}$ не набувала система в кінці $(n - 1)$ -го кроку, для нього відомим є оптимальне керування $U_{j1}^{*(n)}$ на n -му кроці.

Оптимізація передостаннього $(n - 1)$ -го кроку. У кінці $(n - 2)$ -го кроку можливими станами системи є $x_1^{(n-1)}$, $x_2^{(n-1)}$, ..., $x_{r_{n-2}}^{(n-1)}$. Для кожного стану $x_k^{(n-1)}$, $k = \overline{1, r_{n-1}}$, визначимо керування $U_{kj}^{(n-1)}$, яке переводить систему зі стану $x_k^{(n-2)}$ у стан $x_k^{(n-1)}$. На рис. 5.5 для стану $x_1^{(n-2)}$ таких керувань два: $U_{11}^{(n-1)}$, $U_{1,r_{n-1}}^{(n-1)}$.

Відповідно до принципу оптимальності серед можливих керувань $U_{kj}^{(n-1)}$, що переводять систему зі стану $x_k^{(n-2)}$ у стан $x_j^{(n-1)}$, необхідно вибрати таке, яке забезпечувало б мінімум суми $\omega_{n-1}(x_k^{(n-2)}, U_{kj}^{(n-1)}) + \omega_n(x_k^{(n-1)}, U_{j1}^{(n)})$. Однак унаслідок оптимізації n -го кроку для $x_j^{(n-1)}$ знайдено оптимальне керування $U_{j1}^{*(n)}$, якому відповідає умовний оптимальний виграш на n -му кроці

$$W_n(x_k^{(n-2)}, U_{kj}^{(n-1)}) = w_n(x_k^{(n-1)}). \quad (5.16)$$

Тоді умовне оптимальне керування $U_{kj}^{*(n-1)}$ для стану $x_k^{(n-2)}$ необхідно шукати з умови мінімізації суми

$$\omega_{n-1}(x_k^{(n-2)}, U_{kj}^{(n-1)}) + w_n(x_k^{(n-1)}). \quad (5.17)$$

Однак мінімальне значення суми – умовний оптимальний виграш на $(n-1)$ -му кроці

$$\begin{aligned} w_{n-1}(x_k^{(n-2)}) = \\ = \min_{U_{kj}^{(n-1)} \in U} \left(\omega_{n-1}(x_k^{(n-2)}, U_{kj}^{(n-1)}) + w_n(x_k^{(n-1)}) \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Визначивши умовне оптимальне керування відповідно до формули (5.18) для кожного стану $x_k^{(n-2)}$, $k = 1, r_{n-1}$, завершимо оптимізацію $(n-1)$ -го кроку. Унаслідок оптимізації стане відомою послідовність оптимальних керувань $(U_{kj}^{*(n-1)}, U_{j1}^{*(n)})$ для всіх $x_k^{(n-2)}$ станів на двох останніх кроках.

Продовжуючи аналогічні міркування для оптимізації $(n-2), \dots, l$ -го кроків, можна зробити висновок, що умовне оптимальне керування $U_{kj}^{*(l)}$ на l -му кроці слід визначати з рівняння

$$w_l(x_k^{(l-1)}) = \min_{U_{kj}^{(l-1)} \in U} [\omega_l(x_k^{(l)}, U_{kj}^{(l)}) + w_{l+1}(x_j^{(l)})], \quad (5.19)$$

яке є основним функціональним рівнянням динамічного програмування. Це рівняння є рекурентним $w_l = f(w_{l+1})$. Для першого кроку оптимізації отримаємо

$$w_l(x_1^{(0)}) = \min_{U_{1j}^{(1)} \in U} [\omega_1(x_1^{(0)}, U_{1j}^{(1)}) + w_2(x_j^{(1)})]. \quad (5.20)$$

На цьому зворотний етап розв'язання задачі закінчується. Оскільки $x_1^{(0)}$ є відомим, то знаходимо на першому етапі керування $U_{1j}^{*(1)}$. Знаючи керування $U_{1j}^{*(1)}$ і користуючись рівнянням

$$x_i^{(1)} = \varphi_1(x_1^{(0)}, U_{1j}^{*(1)}),$$

знаходимо стан $x_i^{(1)}$. Аналогічно визначаємо оптимальне керування $U_{ik}^{*(2)}$ при $l = 2$ (стан $x_i^{(1)}$ і значення w_3 є відомими). Проходячи таким чином послідовно від першого кроку до останнього, отримуємо множину керувань

$$U^* = (U_{1i}^{*(1)}, U_{ik}^{*(2)}, \dots, U_{kj}^{*(k)}, \dots, U_{j1}^{*(n)}), \quad (5.21)$$

яка є шуканим розв'язком задачі

$$W_{min} = W_1(x_1^{(0)}).$$

З викладеного можна зробити такі висновки:

- більш складним і трудомістким є зворотний етап;
- прямий етап не є складним;
- вирази для $w_l(x_k^{(l)})$ і $w_l = f(w_{l+1})$ є символічними; конкретний вид функції є невизначеним; разом з тим ці вирази є корисними при організації обчислень.

5.3. Табличний алгоритм методу спрямованого перебирання

Розв'язок задачі ДП методом спрямованого перебирання зручно проводити шляхом заповнення таблиць, кожна з яких відповідає умовній оптимізації одного кроку. Форма таблиці визначається структурою основного функціонального рівняння динамічного програмування.

Для умовної оптимізації l -го кроку необхідно знати:

- можливі стани системи $x_k^{(l-1)}$ на початку l -го кроку;
- можливі керування $U_{kj}^{(l)}$, що переводять систему зі стану $x_k^{(l-1)}$ у стан $x_k^{(l)}$;
- значення цільової функції $\omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)})$, що відповідають керуванню $U_{kj}^{(l)}$;
- значення умовного оптимального виграшу $w_{l+1}(x_j^{(l)})$ на $(l + 1)$ -му кроці.

Умовну оптимізацію l -го кроку проводимо відповідно до табл. 5.1.

Таблиця 5.1

| | | | | | | | |
|---|---------------------------------------|-----|---------------------|-----|--|-----|-----------------------|
| $x_k^{(l-1)}$ | $x_1^{(l-1)}$ | | | ... | $x_{r_{l-1}}^{(l-1)}$ | | |
| $U_{kj}^{(l)}$ | $U_{1j}^{(l)}$ | ... | $U_{1g}^{(l)}$ | ... | $U_{r_{l-1},p}^{(l)}$ | ... | $U_{r_{l-1},s}^{(l)}$ |
| $\omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)})$ | $\omega_l(\cdot)$ | ... | $\omega_l(\cdot)$ | ... | $\omega_l(\cdot)$ | ... | $\omega_l(\cdot)$ |
| $\omega_l^*(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)})$ | $\omega_l^*(\cdot)$ | ... | $\omega_l^*(\cdot)$ | ... | $\omega_l^*(\cdot)$ | ... | $\omega_l^*(\cdot)$ |
| $W_l(x_k^{(l-1)})$ | $W_l(x_1^{(l-1)})$ | | | ... | $W_l(x_{r_{l-1}}^{(l-1)})$ | | |
| $U^{*(l)}(x_k^{(l-1)})$ | $U_{ij}^{*(l)}, \dots, U_{k1}^{*(n)}$ | | | ... | $U_{r_{l-1},j}^{*(l)}, \dots, U_{rp,1}^{*(n)}$ | | |

У першому рядку записуємо можливі стани системи $x_k^{(l-1)}$ на початку l -го кроку, у другому – можливі керування $U_{kj}^{(l)}$ на l -му кроці; у третьому – значення цільової функції на l -му кроці, що відповідають кожному керуванню; у четвертому – значення суми $\omega_l^* = \omega_l + W_{l+1}$; у п'ятому – порівняння величин ω_l^* і знаходження мінімуму W_l ; у шостому – послідовність $U^{*(l)}(x_k^{(l-1)})$ оптимальних керувань з l -го кроку по n -й крок для кожного можливого стану $x_k^{(l-1)}$.

Приклад 5.2. Розв'язати задачу оптимізації системи зв'язку, заданої графом на рис. 5.6.

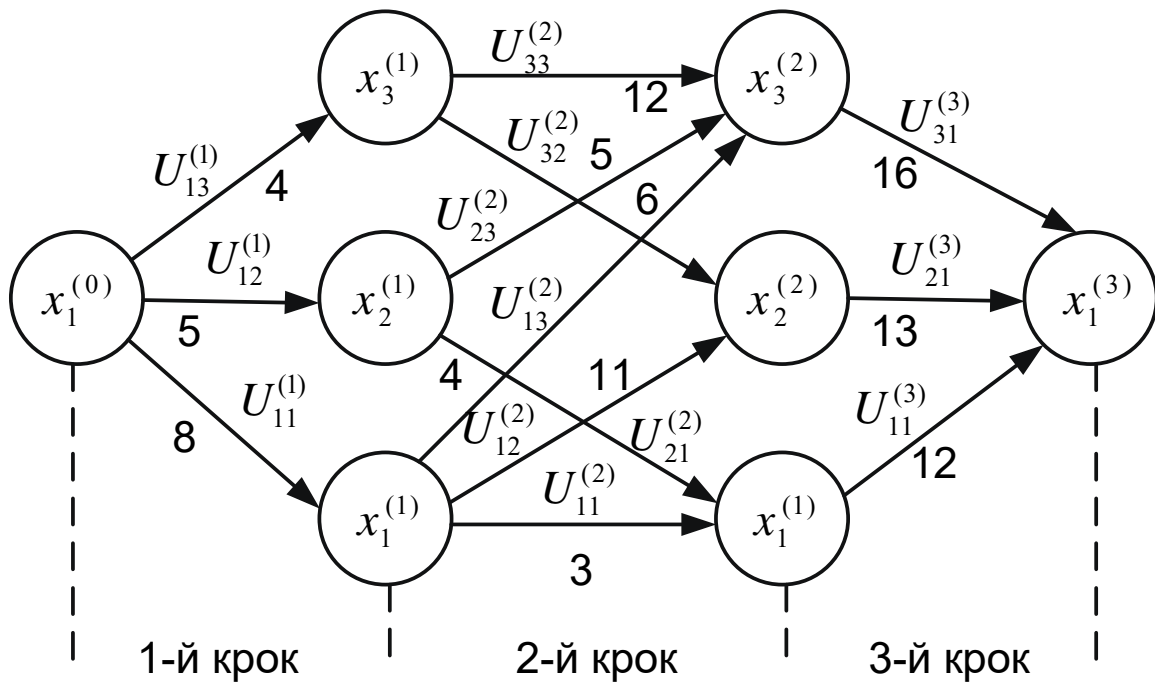


Рис. 5.6

Розв'язання розпочнемо з кінця, тобто з умовної оптимізації третього кроку ($n = 3$). Занесемо до табл. 5.2 значення $x_k^{(2)}$, $U_{kj}^{(3)}$, $\omega_3(x_k^{(2)})$, $\omega_3^*(x_k^{(2)}, U_{kj}^{(3)})$, $w_3(x_k^{(2)})$, $U^{*(3)}(x_k^{(2)})$.

Таблиця 5.2

| $x_k^{(2)}$ | $x_1^{(2)}$ | $x_2^{(2)}$ | $x_3^{(2)}$ |
|---------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $U_{kj}^{(3)}$ | $U_{11}^{(3)}$ | $U_{21}^{(3)}$ | $U_{31}^{(3)}$ |
| $\omega_3(x_k^{(2)}, U_{kj}^{(3)})$ | 12 | 13 | 16 |
| $\omega_3^*(x_k^{(2)}, U_{kj}^{(3)})$ | 12 | 13 | 16 |
| $w_3(x_k^{(2)})$ | 12 | 13 | 16 |
| $U^{*(3)}(x_k^{(2)})$ | $U_{11}^{*(3)}$ | $U_{21}^{*(3)}$ | $U_{31}^{*(3)}$ |

Далі виконаємо умовну оптимізацію другого кроку. Для цього запишемо в першому рядку табл. 5.3 можливі стани $x_k^{(1)}$: $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ на початку другого кроку. У наступних рядках табл. 5.3 запишемо значення $U_{kj}^{(2)}$, $\omega_2(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)})$, $\omega_2^*(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)})$, $w_2(x_k^{(1)})$, $U^{*(2)}(x_k^{(1)})$.

Таблиця 5.3

| $x_k^{(2)}$ | $x_1^{(1)}$ | | | $x_2^{(1)}$ | | $x_3^{(1)}$ | |
|---------------------------------------|--------------------------------|----------------|----------------|--------------------------------|----------------|--------------------------------|----------------|
| $U_{kj}^{(2)}$ | $U_{11}^{(2)}$ | $U_{12}^{(2)}$ | $U_{13}^{(2)}$ | $U_{21}^{(2)}$ | $U_{22}^{(2)}$ | $U_{32}^{(2)}$ | $U_{33}^{(2)}$ |
| $\omega_2(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)})$ | 3 | 11 | 6 | 4 | 9 | 7 | 12 |
| $\omega_2^*(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)})$ | 15 | 24 | 22 | 16 | 25 | 20 | 28 |
| $w_2(x_k^{(2)})$ | 15 | | | 16 | | 20 | |
| $U^{*(2)}(x_k^{(2)})$ | $U_{11}^{*(2)}, U_{11}^{*(3)}$ | | | $U_{21}^{*(2)}, U_{11}^{*(3)}$ | | $U_{32}^{*(2)}, U_{21}^{*(3)}$ | |

До $\omega_2(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)}) = 3$ необхідно додати умовний оптимальний виграш на третьому кроці $w_3(x_k^{(2)}) = 12$. Значення $w_3(x_k^{(2)})$ умовного оптимального виграшу на третьому кроці запишемо в останньому рядку табл. 5.2 (12, 13, 16).

Знайдемо стовпець, який відповідає керуванню $U_{11}^{(2)}$:

$$\omega_2^*(x_1^{(1)}, U_{11}^{(2)}) = 3 + 12 = 15.$$

Аналогічно розрахуємо й занесемо в четвертий рядок інші значення $\omega_2(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)})$.

Знайдемо умовні оптимальні виграші на другому кроці. Серед усіх можливих значень $\omega_2(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)})$ для кожного стану $x_k^{(2)}$ знайдемо мінімальне, це й буде умовним оптимальним виграшем:

$$x_1^{(1)} \rightarrow (15, 24, 22) \rightarrow 15 = w_2(x_1^{(1)}),$$

$$x_2^{(1)} \rightarrow (16, 25) \rightarrow 16 = w_2(x_2^{(1)}),$$

$$x_3^{(1)} \rightarrow (20, 28) \rightarrow 20 = w_2(x_3^{(1)}).$$

Умовний оптимальний виграш для $x_1^{(1)}$ одержується керуванням $U_{11}^{*(2)}$. В останній рядок запишемо $U_{11}^{*(2)}$ і $U_{11}^{*(3)}$ (з попередньої табл. 5.2).

Проведемо умовну оптимізацію першого кроку. Мережа зв'язку перед першим кроком перебуває у стані $x_1^{(0)}$. Табл. 5.4 для першого кроку керування буде мати всього один стовець станів.

Таблиця 5.4

| $x_k^{(0)}$ | $x_1^{(0)}$ | | |
|---------------------------------------|---|--|----------------|
| | $U_{11}^{(1)}$ | $U_{12}^{(1)}$ | $U_{12}^{(1)}$ |
| $\omega_1(x_k^{(0)}, U_{kj}^{(1)})$ | 8 | 5 | 4 |
| $\omega_1^*(x_k^{(0)}, U_{kj}^{(1)})$ | 23 | 21 | 24 |
| $w_1(x_k^{(0)})$ | 21 | | |
| $U^{*(1)}(x_k^{(0)})$ | $U_{11}^{*(1)}, U_{21}^{*(2)}, U_{11}^{*(3)}$ | | |

Зі стану $x_1^{(0)}$ мережа перейде в такі стани:

$$U_{12}^{(1)} : x_1^{(1)}, U_{12}^{(1)} : x_2^{(1)}, U_{12}^{(1)} : x_3^{(1)}.$$

Оптимальном на першому кроці є керування $U_{12}^{(1)}$. З попередніх таблиць знаходимо оптимальні керування на другому й третьому етапах. Заповнення табл. 5.4 є завершенням зворотного етапу виконання завдання.

Прямий етап розв'язання задачі динамічного програмування – знаходження оптимального керування мережею:

$$U^*(x_k^{(0)}) = (U_{11}^{*(1)}, U_{21}^{*(2)}, U_{11}^{*(3)}).$$

Це і є оптимальне керуванням, яке переводить систему з початкового в кінцевий стан.

Переваги методу спрямованого перебирання:

1. Розв'язання задачі зводиться до заповнення таблиць.
2. Для оптимізації l -го кроку застосовуються дані попередньої таблиці.
3. Таблиці легко ввести в комп'ютер, що дає змогу автоматизувати процедуру розв'язання задачі динамічного програмування.

5.4. Графічне розв'язання задачі динамічного програмування

Якщо задача динамічного програмування характеризується порівняно невеликою кількістю кроків і можливих станів на кожному кроці, то для її розв'язання можна безпосередньо скористатися графом станів. Ідея способу полягає в графічному розв'язанні основного функціонального рівняння динамічного програмування

$$w_l(x_k^{(l-1)}) = \min_{U_{kj}^{(l-1)} \in U} [w_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}) + w_{l+1}(x_l^{(l)})]. \quad (5.22)$$

Розглянемо на прикладі процедуру графічного розв'язання задачі динамічного програмування. Візьмемо, що формалізацію задачі проведено, за її результатами побудовано граф станів системи.

Приклад 5.3. Задано граф станів, зображений на рис. 5.7. Значення цільової функції для кожного кроку керування проставлено біля відповідних ребер. Необхідно знайти керування $U^* \in U$, яке переводить систему з початкового стану в кінцевий стан і перетворює на мінімум цільову функцію. Процес переходу системи з початкового в кінцевий стан є п'ятикроковим процесом. Початковий стан $x_1^{(0)}$ є лише одним і відомим, кінцеві стани $\{x_1^{(5)}, x_5^{(2)}\}$ утворюють множину. Кількість кроків і станів системи – відносно невелика, тому спробуємо розв'язати задачу графічно.

Проведемо умовну оптимізацію останнього 5-го кроку. Вихідні стани 5-го кроку: $\{x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}, x_4^{(4)}\}$.

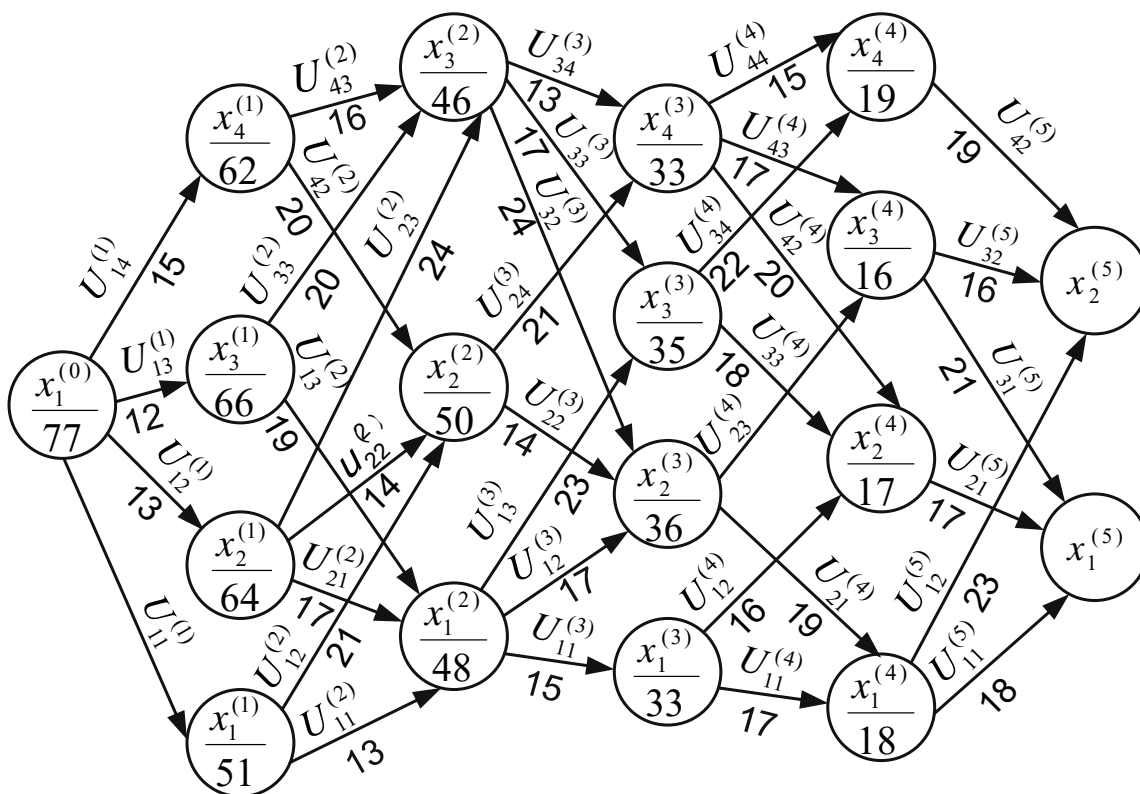


Рис. 5.7

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $x_1^{(4)}$:

$$U_{11}^{(5)}: x_1^{(4)} \rightarrow x_1^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 18;$$

$$U_{12}^{(5)}: x_1^{(4)} \rightarrow x_2^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 23;$$

$$\mathbf{Min}(18, 23) = 18.$$

Запишемо число 18 у вершині $x_1^{(4)}$. Ребро $x_1^{(4)} \rightarrow x_1^{(5)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 5-му кроці є $U_{11}^{(5)}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $x_2^{(4)}$:

$$U_{21}^{(5)}: x_2^{(4)} \rightarrow x_1^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 17.$$

Запишемо число 17 у вершині $x_2^{(4)}$. Ребро $x_2^{(4)} \rightarrow x_1^{(5)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 5-му кроці є $U_{21}^{(5)}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $x_3^{(4)}$:

$$U_{32}^{(5)}: x_3^{(4)} \rightarrow x_2^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 16;$$

$$U_{31}^{(5)}: x_3^{(4)} \rightarrow x_1^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 24;$$

$$\mathbf{Min}(16, 24) = 16.$$

Запишемо число 16 у вершині $x_3^{(4)}$. Ребро $x_3^{(4)} \rightarrow x_2^{(5)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 5-му кроці є $U_{32}^{(5)}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $x_4^{(4)}$:

$$U_{42}^{(5)}: x_4^{(4)} \rightarrow x_2^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 19.$$

Запишемо число 19 у вершині $x_4^{(4)}$. Ребро $x_4^{(4)} \rightarrow x_2^{(5)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 5-му кроці є $U_{42}^{(5)}$.

Проведемо умовну оптимізацію четвертого кроку. Вихідні стани четвертого кроку: $\{x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, x_4^{(3)}\}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $x_1^{(3)}$:

$$U_{11}^{(4)}: x_1^{(3)} \rightarrow x_2^{(4)} \rightarrow \text{ЦФ (на двох кроках)} = 17 + 18 = 35;$$

$$U_{12}^{(4)}: x_1^{(3)} \rightarrow x_2^{(4)} \rightarrow \text{ЦФ (на двох кроках)} = 16 + 17 = 33;$$

$$\mathbf{Min}(35, 33) = 33.$$

Запишемо число 33 у вершині $x_1^{(3)}$. Ребро $x_1^{(3)} \rightarrow x_2^{(4)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 4-му кроці є $U_{12}^{(4)}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $x_2^{(3)}$:

$$U_{21}^{(4)}: x_2^{(3)} \rightarrow x_1^{(4)} \rightarrow \text{ЦФ (на двох кроках)} = 18 + 19 = 37;$$

$$U_{23}^{(4)}: x_2^{(3)} \rightarrow x_3^{(4)} \rightarrow \text{ЦФ (на двох кроках)} = 20 + 16 = 36;$$

$$\mathbf{Min}(36, 37) = 36.$$

Запишемо число 36 у вершині $x_2^{(3)}$. Ребро $x_2^{(3)} \rightarrow x_3^{(4)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 4-му кроці є $U_{23}^{(4)}$.

Проведемо умовну оптимізацію третього кроку. Вихідні стани другого кроку: $\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\}$. Визначимо оптимальне умовне керування для стану $x_1^{(2)}$:

$$U_{11}^{(3)}: x_1^{(2)} \rightarrow x_1^{(3)} \rightarrow ЦФ = 53.$$

$$U_{12}^{(3)}: x_1^{(2)} \rightarrow x_2^{(3)} \rightarrow ЦФ = 48.$$

$$\mathbf{Min} (48, 53) = 48.$$

Запишемо число 48 у вершині $x_1^{(2)}$. Ребро $x_1^{(2)} \rightarrow x_2^{(3)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 3-му кроці є $U_{12}^{(3)}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $x_2^{(2)}$:

$$U_{22}^{(3)}: x_2^{(2)} \rightarrow x_2^{(3)} \rightarrow ЦФ = 50.$$

Запишемо число 50 у вершині $x_2^{(2)}$. Ребро $x_2^{(2)} \rightarrow x_2^{(3)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 3-му кроці є $U_{22}^{(3)}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $x_3^{(2)}$:

$$U_{34}^{(3)}: x_3^{(2)} \rightarrow x_4^{(3)} \rightarrow ЦФ = 46;$$

$$U_{33}^{(3)}: x_3^{(2)} \rightarrow x_3^{(3)} \rightarrow ЦФ = 52;$$

$$U_{32}^{(3)}: x_3^{(2)} \rightarrow x_2^{(3)} \rightarrow ЦФ = 60.$$

$$\mathbf{Min}(46, 52, 60) = 46.$$

Запишемо число 46 у вершині $x_3^{(2)}$. Ребро $x_3^{(2)} \rightarrow x_4^{(3)}$ стовщується.

Умовним оптимальним керуванням на 3-му кроці є $U_{34}^{(3)}$.

Проведемо умовну оптимізацію другого кроку. Вихідні стани другого кроку: $\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}\}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $x_1^{(1)}$:

$$U_{12}^{(2)}: x_1^{(1)} \rightarrow x_2^{(2)} \rightarrow ЦФ = 71;$$

$$U_{11}^{(2)}: x_1^{(1)} \rightarrow x_1^{(2)} \rightarrow ЦФ = 61;$$

$$\mathbf{Min}(61, 71) = 61.$$

Запишемо число 61 у вершині $x_1^{(1)}$. Ребро $x_1^{(1)} \rightarrow x_1^{(2)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 2-му кроці є $U_{11}^{(2)}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $x_2^{(1)}$:

$$U_{21}^{(2)}: x_2^{(1)} \rightarrow x_1^{(2)} \rightarrow \text{ЦФ} = 65;$$

$$U_{12}^{(2)}: x_2^{(1)} \rightarrow x_2^{(2)} \rightarrow \text{ЦФ} = 64;$$

$$U_{12}^{(2)}: x_2^{(1)} \rightarrow x_2^{(2)} \rightarrow \text{ЦФ} = 70;$$

$$\mathbf{Min} (65, 64, 70) = 64.$$

Запишемо число 64 у вершині $x_2^{(1)}$. Ребро $x_2^{(1)} \rightarrow x_2^{(2)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 2-му кроці є $U_{12}^{(2)}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $x_3^{(1)}$:

$$U_{33}^{(2)}: x_3^{(1)} \rightarrow x_3^{(2)} \rightarrow \text{ЦФ} = 66.$$

Запишемо число 64 у вершині $x_3^{(1)}$. Ребро $x_3^{(1)} \rightarrow x_3^{(2)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 2-му кроці є $U_{33}^{(2)}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $x_4^{(1)}$:

$$U_{43}^{(2)}: x_4^{(1)} \rightarrow x_3^{(2)} \rightarrow \text{ЦФ} = 62;$$

$$U_{42}^{(2)}: x_4^{(1)} \rightarrow x_2^{(2)} \rightarrow \text{ЦФ} = 70;$$

$$\mathbf{Min} (62, 70) = 62.$$

Запишемо число 62 у вершині $x_4^{(1)}$. Ребро $x_4^{(1)} \rightarrow x_3^{(2)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 2-му кроці є $U_{43}^{(2)}$.

Проведемо умовну оптимізацію першого кроку. Вихідний стан першого кроку – $x_1^{(0)}$. Визначимо умовне оптимальне керування для стану $x_1^{(0)}$:

$$U_{11}^{(1)}: x_1^{(0)} \rightarrow x_1^{(1)} \rightarrow \text{ЦФ} = 80;$$

$$U_{12}^{(1)}: x_1^{(0)} \rightarrow x_2^{(1)} \rightarrow \text{ЦФ} = 77;$$

$$U_{13}^{(1)}: x_1^{(0)} \rightarrow x_3^{(1)} \rightarrow \text{ЦФ} = 78;$$

$$U_{14}^{(2)}: x_1^{(0)} \rightarrow x_4^{(1)} \rightarrow \text{ЦФ} = 78;$$

$$\mathbf{Min}(80, 77, 78, 78) = 77.$$

Запишемо число 77 у вершині $x_1^{(0)}$. Ребро $x_1^{(0)} \rightarrow x_2^{(1)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 1-му кроці є $U_{12}^{(1)}$.

Таким чином, $W_{min} = 77$.

Далі проводимо етап безумовної оптимізації і знаходимо оптимальне керування:

$$U^* = (U_{12}^{*(1)}, U_{22}^{*(2)}, U_{22}^{*(3)}, U_{23}^{*(4)}, U_{32}^{*(5)}).$$

5.5. Задача динамічного програмування з мультиплікативною цільовою функцією

У багатьох прикладних випадках цільова функція має такий вигляд:

$$Z = \prod_{l=1}^n z_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}). \quad (5.23)$$

Це – мультиплікативна цільова функція. Для розв'язання задач динамічного програмування з мультиплікативною цільовою функцією можна використати метод спрямованого перебирання.

Формулювання завдання. Розглянемо n -кроковий процес поведження системи:

- множина станів системи $\{x_k^{(l-1)}\}$ на початку l -го кроку керування;
- множина можливих керувань $\{U_{kj}^{(l)}\}$ на кожному l -му кроці;
- результат керування $U_{kj}^{(l)}$, тобто стан, у який перейде система під впливом цього керування:

$$x_k^{(l)} = \varphi_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)});$$

– цільова функція вигляду (5.22);

– початковий і кінцевий стани системи (або множини початкових і кінцевих станів) задано.

Необхідно з множини допустимих керувань U вибрати таке

$$U^* = (U_{kj}^{*(1)}, U_{ji}^{*(2)}, \dots, U_{mr}^{*(n)}),$$

яке б переводило систему з початкового в кінцевий стан і перетворювало на мінімум цільову функцію

$$Z_{min} = \min_{U_{kj}^{(l)} \in U} \prod_{l=1}^n z_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}). \quad (5.24)$$

Злогарифмуємо обидві частини виразу для Z_{min} :

$$\log Z_{min} = \sum_{l=1}^n \log z_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}). \quad (5.25)$$

Уведемо такі позначення:

$$v = \log Z_{min}; \quad v_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}) = \log z_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}).$$

З урахуванням цих позначень вираз для цільової функції набуде вигляду

$$v = \sum_{l=1}^n v_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}). \quad (5.26)$$

Функція v також є цільовою функцією, але вже адитивною. З огляду на те, що v монотонно залежить від Z_{min} , екстремуми v і Z_{min} будуть збігатися. Тоді оптимальне керування можна вибрати з умови

$$V_{min} = \min_{U_{kj}^{(l)} \in U} \sum_{l=1}^n v_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}), \quad (5.27)$$

що повністю збігається з постановкою раніше розглянутих задач, а отже, дає змогу скористатися розглянутими вище процедурами. Після завершення виконання завдання необхідно перейти від V_{min} до Z_{min} шляхом потенціювання V_{min} .

Зміст описаного прийому полягає у зведенні задачі динамічного програмування з мультиплікативною цільовою функцією до задачі динамічного програмування з адитивною цільовою функцією.

Другий шлях розв'язання задачі динамічного програмування з мультиплікативною цільовою функцією полягає в безпосередньому використанні основного функціонального рівняння динамічного програмування, яке для цього випадку дещо відрізняється.

Нехай поводження системи описується графом, фрагмент якого зображено рис. 5.5. Будемо вважати цільову функцію мультиплікативною. Відомо, що розв'язання задачі динамічного програмування починається з кінця, з умовної оптимізації n -го кроку. Для наведеного графа процес умовної оптимізації n -го кроку докладно описано вище. Єдиною відмінністю є те, що на n -му кроці цієї задачі для кожного стану $x_k^{(n-1)}$ умовний оптимальний виграш

$$Z_n(x_k^{(n-1)}) = Z_n(x_k^{(n-1)}, U_{j1}^{(n)}). \quad (5.28)$$

Розглянемо один із можливих станів системи $x_k^{(n-2)}$ на початку $(l-1)$ -го кроку. З цього стану система може перейти у стан $x_j^{(n-1)}$ під впливом керування $U_{kj}^{(n-1)}$.

Відповідно до принципу оптимальності серед можливих керувань $U_{kj}^{(n-1)}$ необхідно вибрати таке, яке забезпечувало б оптимальний виграш (максимальне значення цільової функції) не тільки на $(n-1)$ -му, але й на n -му кроці. Однак, по-перше, умовний оптимальний виграш на n -му кроці $Z_n(x_j^{(n-1)})$ вже є відомим, а по-друге, для розглядуваної задачі сукупний виграш на двох кроках є добутком (а не сумою як у раніше розглянутих задачах) виграшів на окремих кроках. Отже, умовне оптимальне керування на $(n-1)$ -му кроці необхідно вибирати з умови

$$Z_{n-1}(x_k^{(n-2)}) = \min_{U_{kj}^{(n-1)} \in U} [Z_{n-1}(x_k^{(n-2)}, U_{kj}^{(n-1)}) \times Z_n(x_j^{(n-1)})]. \quad (5.29)$$

Умовна оптимізація l -го кроку здійснюється згідно з виразом

$$Z_l(x_k^{(l-1)}) = \min_{U_{kj}^{(l)} \in U} [Z_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)}) Z_{l+1}(x_j^{(l)})]. \quad (5.30)$$

Цей вираз є основним функціональним рівнянням задачі динамічного програмування з мультиплікативною цільовою функцією, яке дає змогу побудувати процедуру розв'язання задачі, наприклад, з використанням табличного алгоритму, що майже не відрізняється від розглянутої задачі. Єдина відмінність – при розрахунках оперують не сумами, а добутками виграшів на окремих кроках.

5.6. Задача оптимального розподілу ресурсів

Задачі оптимального розподілу ресурсів набули поширення при плануванні наукових розробок, військових операцій, діяльності промислових підприємств та ін. Ресурси – це засоби зв'язку, грошові кошти, сировина, робоча сила, озброєння і т. ін.

Ці ресурси має бути розподілено серед підприємств на всі етапи різних робіт таким чином, щоб забезпечити найбільшу ефективність від вибраного способу розподілу. Показники ефективності: сумарні витрати й час виконання робіт (задача-мінімум) або сумарний збиток, нанесений противнику (задача-максимум).

Конкретизація ресурсів – постановка конкретних задач, які можна розв'язати різними методами математичного програмування. Більшість задач характеризується багатокроковим процесом розподілу ресурсів та адитивною цільовою функцією. Отже, для їх розв'язання можна скористатися методами динамічного програмування.

Задача: є m вогневих засобів (ракет) для нанесення ударів по n цілях. Застосування вогневого засобу обов'язково приводить до ураження цілі й завдає шкоди, розмір якої є заздалегідь відомим. Більше засобів ураження – більший збиток. Необхідно так розподілити m вогневих засобів по n об'єктах, щоб сумарний матеріальний збиток був максимальним.

Формалізація задачі. Позначимо цілі через C_1, C_2, \dots, C_n . Розподіл засобів ураження – багатокроковий процес. 1-й крок – виокремлення із загальної кількості вогневих засобів певної кількості засобів для ураження цілі C_1 , 2-й крок – виокремлення з тих засобів, що залишився після 1-го кроку, певної кількості вогневих засобів для ураження цілі C_2 , n -й крок – використання засобів, що залишилися після $(n-1)$ -го етапу, для ураження цілі C_n .

Можливі варіанти розподілу засобів ураження за цілями становлять систему розподілу.

Початкова кількість вогневих засобів характеризує початковий стан системи $x_m^{(0)} = m$. Тут нижній індекс означає кількість вогневих засобів перед початком розподілу. Нехай для застосування по цілі C_1 виокремлюються i вогневих засобів. Тоді залишок $k = m - i$ – новий

стан системи $x_k^{(1)} = x_{m-i}^{(1)} = m - i$, $U_{m,m-i}^{(1)}$ – керування, що переводить систему зі стану $x_m^{(0)}$ у стан $x_{m-i}^{(1)}$. Керування може бути визначено кількісно:

$$U_{m,m-i}^{(1)} = m - (m - i) = i, \quad (5.31)$$

$$x_{m-i}^{(1)} = x_m^{(0)} - U_{m,m-i}^{(1)}. \quad (5.32)$$

Для довільного l -го кроку

$$x_{m-i}^{(l)} = x_{m-i}^{(l-1)} - U_{k,k-j}^{(l)}, \quad (5.33)$$

де j – кількість вогневих засобів, виокремлених для нанесення удару по l -й цілі;

k – кількість вогневих засобів, які залишилися після розподілу, для нанесення удару по $(l-1)$ -й цілі.

Вираз (5.33) визначає стан $x_{m-i}^{(l)}$ у кінці $(l-1)$ -го кроку процесу розподілу вогневих засобів. У кінці $(n-1)$ -го кроку залишається q вогневих засобів (стан $x_{m-i}^{(n)}$), які буде розподілено на ураження цілі C_n .

Кінцевий стан $x_0^{(n)}$, $U_{q,0}^{(n)}$: $x_q^{(n-1)} \rightarrow x_0^{(n)}$ (залишок вогневих засобів після здійснення останнього кроку розподілу дорівнює нулю).

Розглянемо обмеження. Загальна кількість вогневих засобів не повинна перевищувати m , тому має місце таке відношення:

$$U_{m,m-i}^{(1)} + \dots + U_{k,k-j}^{(l)} + \dots + U_{q,0}^{(n)} = m, \quad (5.34)$$

тобто сума засобів ураження, які виокремлюються на ураження кожної цілі, має дорівнювати загальній кількості вогневих засобів.

Вираз (5.34) утворює перше обмеження задачі. За фізичною суттю керування $U_{k,k-j}^{(l)}$ не може бути від'ємною величиною і має задовольняти обмеження

$$U_{k,k-j}^{(l)} \geq 0. \quad (5.35)$$

Таким чином, керування $U_{k,k-j}^{(l)}$ виражається цілим числом. Цільовою функцією є матеріальний збиток:

– збиток за l -ю ціллю не залежить від завданої шкоди іншим цілям;

– збиток, що наноситься різним цілям, виражається в однакових одиницях;

– загальна шкода дорівнює сумі збитків, завданих кожній цілі.

Застосування по l -й цілі $U_{k,k-j}^{(l)}$ вогневих засобів завдає збитку $\omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{k,k-j}^{(l)})$. Тоді збиток, завданий противнику, буде таким:

$$\omega = \sum_{l=1}^n \omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{k,k-j}^{(l)}). \quad (5.36)$$

Задачу розподілу вогневих засобів за цілями противника можна сформулювати таким чином: серед допустимих керувань U необхідно знайти таке керування

$$U^* = (U_{m,m-1}^{*(1)}, \dots, U_{k,k-j}^{*(l)}, \dots, U_{q,0}^{*(n)}), \quad (5.37)$$

яке переводить систему з початкового стану $x_m^{(0)}$ у стан $x_0^{(n)}$, задовольняє обмеження (5.34)–(5.35), вимоги цілочисельності й перетворює на максимум цільову функцію (5.36).

Побудуємо граф системи розподілу (рис. 5.8). Вершини графа відповідають станам системи (залишок вогневих засобів на початку чергового кроку), ребра – керування (виокремлені засоби для ураження чергової цілі). На цьому рисунку наведено такі позначення: $x_m^{(0)}$ – початковий стан (початкова кількість вогневих засобів); $U_{m,m}^{*(1)} = 0$, $U_{m,m-1}^{*(1)} = 1$ і т. д. – можливі керування на першому кроці (для застосування по першій цілі може бути виділено нуль, один, два або всі m вогневих засобів). Залишок засобів ураження після першого кроку керування розраховується так:

$$x_m^{(1)} = x_m^{(0)} - U_{m,m}^{*(1)} = m \text{ (керування } U_{m,m-1}^{*(1)});$$

$$x_{m-1}^{(1)} = x_m^{(0)} - U_{m,0}^{*(1)} = m - 1 \text{ (керування } U_{m,m-1}^{*(1)});$$

.....

$$x_0^{(1)} = x_m^{(0)} - U_{m,m-1}^{*(1)} = 0 \text{ (керування } U_{m,0}^{*(1)}).$$

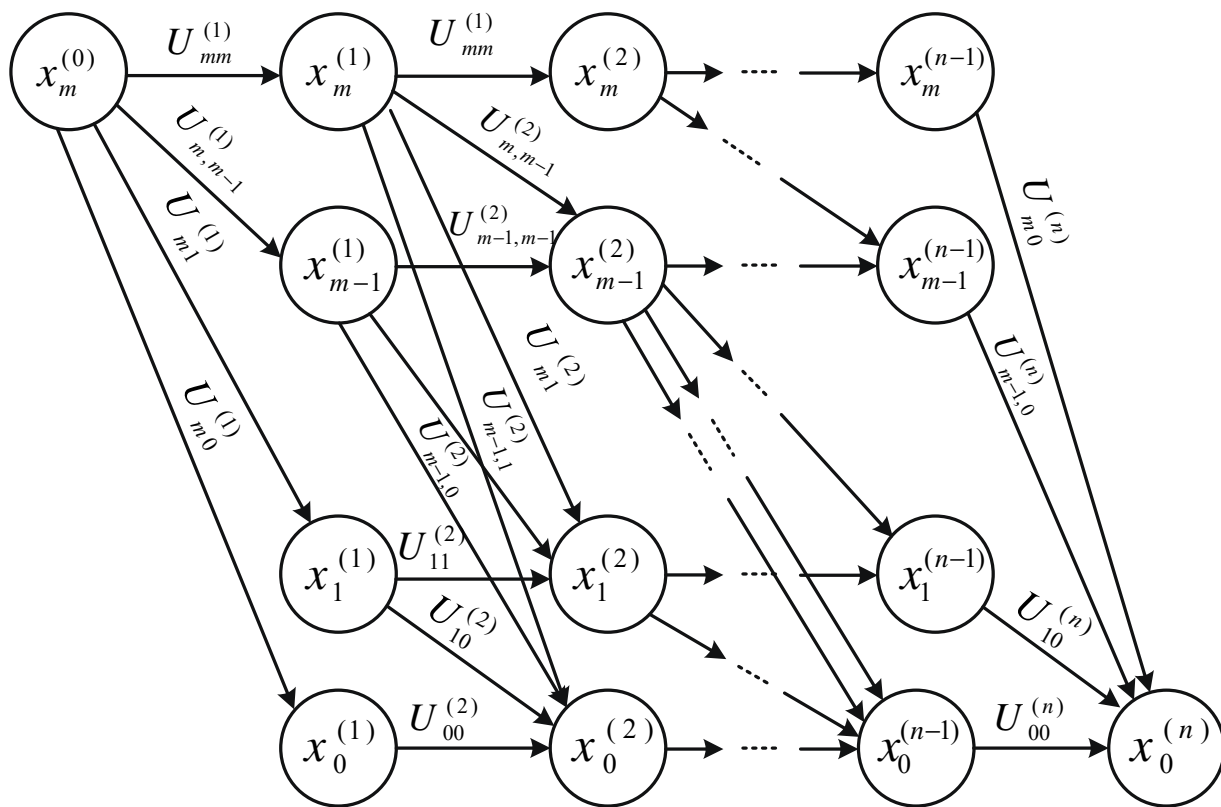


Рис. 5.8

Цей залишок і визначає можливі стани на початку другого кроку. Для застосування вогневих засобів по другій цілі може бути виокремлено 0, 1, 2, ..., m засобів (відповідно керування $U_{m,m-1}^{*(2)}, \dots, U_{m,0}^{*(2)}$).

Аналіз графа дає змогу зробити такі висновки:

- система розподілу характеризується одним початковим і одним кінцевим станами (які є відомими);
- множини можливих станів і можливих керувань для $(2 - (n - 1))$ -го кроків є ідентичними (це спрощує розв'язання задачі, тому що таблиці умовної оптимізації є однаковими).

Задачі розподілу інших ресурсів (грошових коштів, сировини, робочої сили) не мають принципів відмінностей. Це дає змогу звести постановку задачі розподілу ресурсів до загального вигляду.

Планується розподіл початкової кількості $x_m^{(0)} = m$ між n об'єктами $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. Виокремлення об'єкта Π_1 ресурсів у кількості $U_{k,k-j}^{*(l)} = j$ з $x_k^{(l-1)}$ дає дохід $\omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{k,k-j}^{(l)})$.

Передбачено такі умови:

- дохід, отриманий від ресурсів, виділених об'єкту Π_i , не залежить від

ресурсів, виділених іншим об'єктам;

– дохід виражається в однакових одиницях;

– загальний дохід визначається сумою доходів від кожного об'єкта.

Яку кількість ресурсів необхідно виділити кожному об'єкту, щоб сумарний дохід був максимальним?

Ця задача є одновимірною задачею оптимального розподілу ресурсів, і для її розв'язання доцільно скористатися методом спрямованого перебирання. Основа розв'язання задачі – функціональне рівняння динамічного програмування

$$w_l(x_k^{(l-1)}) = \max_{U_{kj}^{(l)} \in U} [\omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{k,k-j}^{(l)}) + w_{l+1}(x_k^{(l)})]. \quad (5.38)$$

Розв'язання задачі почнемо з умовної оптимізації останнього n -го кроку. На початку кроку можливими станами є $x_0^{(n-1)}$, $x_1^{(n-1)}$, ..., $x_{m-1}^{(n-1)}$, $x_m^{(n-1)}$. Для кожного з них існує тільки одне керування, що переводить систему в стан $x_0^{(n-1)}$. Дані умовної оптимізації для n -го кроку можна подати у вигляді табл. 5.5.

Таблиця 5.5

| | | | | | |
|---|-------------------------|-------------------------|-----|--------------------------------|--------------------------|
| $x_q^{(n-1)}$ | $x_0^{(n-1)}$ | $x_1^{(n-1)}$ | | $x_{m-1}^{(n-1)}$ | $x_m^{(n-1)}$ |
| $U_{q0}^{(n)}$ | $U_{00}^{(n)}$ | $U_{10}^{(n)}$ | ... | $U_{m-1,0}^{(n)}$ | $U_{m0}^{(n)}$ |
| $\omega_n(x_q^{(n-1)}, U_{q0}^{(n)})$ | $\omega_n(\cdot)$ | $\omega_n(\cdot)$ | ... | $\omega_n(\cdot)$ | $\omega_n(\cdot)$ |
| $\omega_n^*(x_q^{(n-1)}, U_{q0}^{(n)})$ | $\omega_n^*(\cdot)$ | $\omega_n^*(\cdot)$ | ... | $\omega_n^*(\cdot)$ | $\omega_n^*(\cdot)$ |
| $w_n(x_q^{(n-1)})$ | $w_n(x_0^{(n-1)})$ | $w_n(x_1^{(n-1)})$ | ... | $w_n(x_{m-1}^{(n-1)})$ | $w_n(x_m^{(n-1)})$ |
| $U_n^*(x_q^{(n-1)})$ | $U_{00}^*(x_0^{(n-1)})$ | $U_{10}^*(x_1^{(n-1)})$ | | $U_{m-1,0}^*(x_{m-1}^{(n-1)})$ | $U_{m,0}^*(x_m^{(n-1)})$ |

Таблиці умовної оптимізації з $(n-1)$ -го по другий крок мають однакову форму. Розглянемо таблицю для кроку l , $l = 2, n - 1$. На початку l -го кроку система може виявитися в станах $x_0^{(l-1)}, x_1^{(l-1)}, \dots, x_{m-1}^{(l-1)}, x_m^{(l-1)}$. Відповідно таблиця умовної оптимізації матиме $(m + 1)$ стовпців. Для стану $x_0^{(l-1)}$ існує одне керування, що переводить систему в наступний стан. Для стану $x_1^{(l-1)}$ – два керування і т. д. Для довільного k -го стану $x_k^{(l-1)}$ таких керувань буде $(k + 1)$, а для стану $x_m^{(l-1)}$ – $(m + 1)$ керувань. Тому кожен стовець, що відповідає k -му стану, необхідно поділити на $(k + 1)$ стовпців. Тоді таблицю умовної оптимізації l -го кроку можна подати у вигляді табл. 5.6.

Таблиця 5.6

| | | | | | | | |
|--|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------|-----|---------------------------------------|-----|---------------------|
| $x_q^{(l-1)}$ | $x_0^{(l-1)}$ | $x_1^{(l-1)}$ | | ... | $x_m^{(l-1)}$ | | |
| $U_{k,k-1}^{(l)}$ | $U_{00}^{(l)}$ | $U_{10}^{(l)}$ | $U_{11}^{(l)}$ | ... | $U_{m0}^{(l)}$ | ... | $U_{m,m}^{(l)}$ |
| $\omega_n(x_q^{(l-1)}, U_{k,k}^{(l)})$ | $\omega_l(\cdot)$ | $\omega_l(\cdot)$ | $\omega_l(\cdot)$ | ... | $\omega_l(\cdot)$ | ... | $\omega_l(\cdot)$ |
| $\omega_n^*(x_k^{(l-1)}, U_{k,k}^{(l)})$ | $\omega_l^*(\cdot)$ | $\omega_l^*(\cdot)$ | $\omega_l^*(\cdot)$ | ... | $\omega_l^*(\cdot)$ | ... | $\omega_l^*(\cdot)$ |
| $w_l(x_q^{(n-1)})$ | $l(x_0^{(l-1)})$ | $w_l(x_1^{(l-1)})$ | | ... | $w_l(x_m^{(l-1)})$ | | |
| $U_n^*(x_q^{(l-1)})$ | $U_{00}^{*(l)}, \dots, U_{00}^{*(n)}$ | $U_{1j}^{*(l)}, \dots, U_{q0}^{*(n)}$ | | ... | $U_{mj}^{*(l)}, \dots, U_{q0}^{*(n)}$ | | |

Оптимізація першого кроку. На початку першого кроку можливим є тільки один стан – $x_m^{(0)}$, а можливих керувань з переводу системи в наступні стани – $(m + 1)$. Таблиця оптимізації першого кроку буде мати один стовець, але поділений на $(m + 1)$ стовпців (табл. 5.7). У 3–5-й рядки табл. 5.7 запишемо числові значення цільової функції, або умовний оптимальний виграш. При визначенні умовного оптимального виграшу в деяких задачах знаходиться максимальне значення, а в деяких – мінімальне. Незважаючи на припустиму громіздкість, розв'язання задачі оптимального розподілу ресурсів не є особливо складним. Задачі великого розміру можна розв'язувати навіть вручну.

Таблиця 5.7

| | | | | | |
|---------------------------------------|---|---------------------|-----|---------------------|---------------------|
| $x_m^{(0)}$ | $x_m^{(0)}$ | | | | |
| $U_{mi}^{(1)}$ | $U_{m0}^{(1)}$ | $U_{m1}^{(1)}$ | ... | $U_{m,m-1}^{(1)}$ | $U_{m,m}^{(1)}$ |
| $\omega_1(x_m^{(0)}, U_{mi}^{(1)})$ | $\omega_1(\cdot)$ | $\omega_1(\cdot)$ | ... | $\omega_1(\cdot)$ | $\omega_1(\cdot)$ |
| $\omega_1^*(x_m^{(0)}, U_{mi}^{(1)})$ | $\omega_1^*(\cdot)$ | $\omega_1^*(\cdot)$ | ... | $\omega_1^*(\cdot)$ | $\omega_1^*(\cdot)$ |
| $w_l(x_m^{(0)})$ | $w_1(x_m^{(0)})$ | | | | |
| $U_n^{*(1)}(x_m^{(0)})$ | $U_{1i}^{*(1)}, \dots, U_{1i}^{*(l)}, \dots, U_{q0}^{*(n)}$ | | | | |

Приклад 5.4. Чотири будівельні бригади ($m = 4$) буде задіяно на будівництві трьох об'єктів ($n = 3$). Ефективність задіяння будівельних бригад у будівництві кожного з об'єктів за фіксований проміжок часу задано в табл. 5.8. Необхідно розподілити будівельні бригади по об'єктах таким чином, щоб за фіксований проміжок часу обсяг виконаних робіт був максимальним.

Таблиця 5.8

| Кількість будівельних бригад | Номер об'єкта l | | |
|------------------------------|-------------------|----|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 5 | 4 | 3 |
| 2 | 6 | 5 | 4 |
| 3 | 7 | 9 | 6 |
| 4 | 9 | 10 | 9 |

Процес розподілу будівельних бригад по об'єктах подамо у вигляді трикрокового процесу, у якому на першому кроці задаються бригади для будівництва першого об'єкта, на другому – для будівництва другого об'єкта, на третьому – для будівництва третього об'єкта. Граф, що характеризує систему розподілу будівельних бригад за об'єктами,

показано на рис. 5.9, де $x_q^{(i)}$ – кількість будівельних бригад, які задіюються для будівництва i -го об'єкта ($i = 1, 2, 3; q = 0, 1, 2, 3, 4$); $U_{k,k-j}^{(j)}$ – керування розподілом будівельних бригад за об'єктами на j -му кроці.

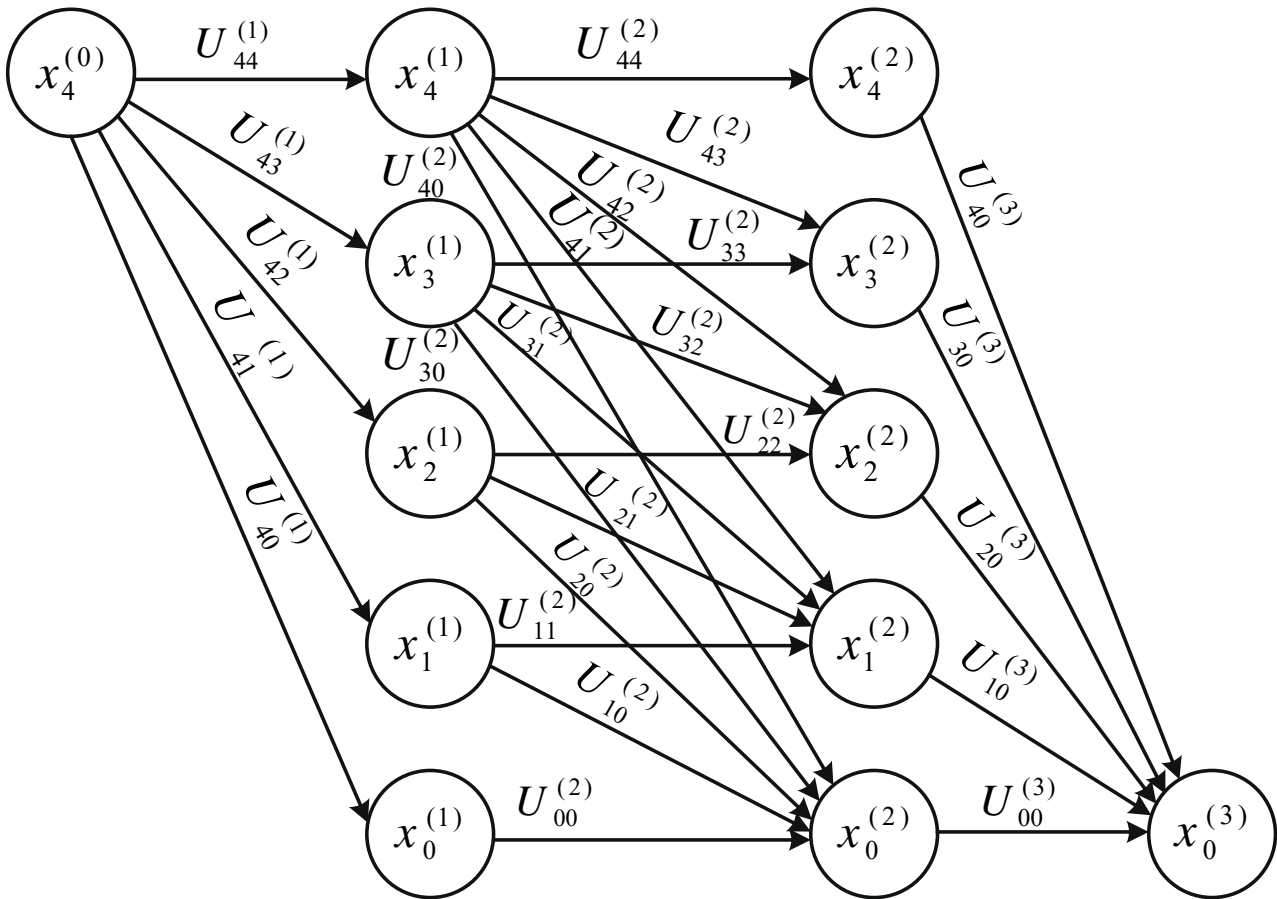


Рис. 5.9

Будемо розв'язувати задачу табличним методом. Вихідні дані для керування розподілом будівельних бригад на 3-му (останньому) кроці наведені в табл. 5.9. Для кожного стану $x_q^{(2)}$ існує тільки одне керування $U_{q0}^{(3)}$, використання якого переводить систему на третьому кроці у стан $x_0^{(3)}$. Ці керування запишемо в другий рядок табл. 5.9.

Таблиця 5.9

| | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $x_q^{(2)}$ | $x_0^{(2)}$ | $x_1^{(2)}$ | $x_2^{(2)}$ | $x_3^{(2)}$ | $x_4^{(2)}$ |
| $u_{q0}^{(3)}$ | $u_{00}^{(3)}$ | $u_{10}^{(3)}$ | $u_{20}^{(3)}$ | $u_{30}^{(3)}$ | $u_{40}^{(3)}$ |
| $\omega_3(x_q^{(2)}, u_{q0}^{(3)})$ | 0 | 3 | 4 | 6 | 9 |
| $\omega'_3(x_q^{(2)}, u_{q0}^{(3)})$ | 0 | 3 | 4 | 6 | 9 |
| $W_3(x_q^{(2)})$ | 0 | 3 | 4 | 6 | 9 |
| $U^{*(3)}(x_q^{(2)})$ | $U_{00}^{*(3)}$ | $U_{10}^{*(3)}$ | $U_{20}^{*(3)}$ | $U_{30}^{*(3)}$ | $U_{40}^{*(3)}$ |

Кожному керуванню $U_{q0}^{(3)}$ відповідає своє значення цільової функції (значення ефективності виконання робіт). Так, наприклад, керування $U_{10}^{(3)}$ означає, що на третьому об'єкті буде задіяно одну будівельну бригаду. Ефективність такого керування буде становити три умовні одиниці (згідно з умовами табл. 5.8). Аналогічно керуванню $U_{20}^{(3)}$ (здіяння на третьому об'єкті двох будівельних бригад) відповідає ефективність, що становить чотири умовні одиниці, і т. ін. Керування $U_{00}^{(3)}$ відповідає випадку, коли жодну з будівельних бригад на третьому об'єкті не задіяно, тоді ефективність будівництва буде дорівнювати нулю. Користуючись таблицею вихідних даних щодо ефективності задіяних будівельних бригад заповнимо четвертий рядок табл. 5.9 відповідно до виразу

$$\omega'_3(x_q^{(2)}, U_{q0}^{(3)}) = \omega_3(x_q^{(2)}, U_{q0}^{(3)}) + W_4(x_0^{(4)}).$$

Однак умовний оптимальний виграш $W_4(x_0^{(4)}) = 0$, оскільки четвертого кроку не існує, тому

$$\omega'_3(x_q^{(2)}, U_{q0}^{(3)}) = \omega_3(x_q^{(2)}, U_{q0}^{(3)}).$$

Перепишемо дані третього рядка табл. 5.9 в четвертий рядок. Тоді умовний оптимальний виграш $W_3(x_q^{(2)})$ на третьому кроці керування розподілом будівельних бригад за об'єктами знайдемо з виразу

$$W_3(x_q^{(2)}) = \max_{U_{q0}^{(3)} \in U} \omega'_3(x_q^{(2)}, U_{q0}^{(3)}), \quad (5.39)$$

де U – множина можливих керувань.

Оскільки для кожного стану $x_q^{(2)}$ існує тільки одне керування $U_{q0}^{(3)}$, то

$$W_3(x_q^{(2)}) = \omega'_3(x_q^{(2)}, U_{q0}^{(3)}), \quad (5.40)$$

і відповідно дані четвертого рядка табл. 5.9 необхідно переписати в п'ятий рядок. Таким чином, одиничне для кожного стану $x_q^{(2)}$ керування $U_{q0}^{(3)}$ буде умовним оптимальним керуванням на третьому кроці.

Проведемо умовну оптимізацію другого кроку. Можливими станами в кінці першого кроку є стани $x_0^{(1)}$, $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, $x_4^{(1)}$. Отже, у табл. 5.10 умовної оптимізації другого кроку буде п'ять стовпців (за кількістю можливих станів $x_q^{(1)}$). Стовпець для $x_0^{(1)}$ буде складатися з однієї колонки, стовпець для $x_0^{(1)}$ – з двох колонок і т. д. Результати умовної оптимізації другого кроку зведемо в табл. 5.10.

Керуванням $U_{00}^{(2)}$, $U_{11}^{(2)}$, $U_{22}^{(2)}$, $U_{33}^{(2)}$, $U_{44}^{(2)}$ (на другий об'єкт будівельні бригади не призначаються) відповідає нульовий рівень ефективності.

Керування $U_{10}^{(2)}$, $U_{21}^{(2)}$, $U_{32}^{(2)}$, $U_{43}^{(2)}$ означають задіяння на другому об'єкті однієї будівельної бригади. З вихідних даних (другий стовпець) знаходимо, що ефективність такого розв'язання становить чотири умовні одиниці.

Запишемо ці значення у відповідні клітинки табл. 5.10. Аналогічно заповнимо інші клітинки третьогорядка. Для заповнення четвертого рядка скористаємося виразом

$$\omega'_2(x_k^{(1)}, U_{k,k-1}^{(2)}) = \omega_2(x_k^{(1)}, U_{k,k-j}^{(2)}) + W_3(x_{k-j}^{(2)}). \quad (5.41)$$

Умовний оптимальний виграш W_3 знайдемо з табл. 5.10 за правилами, наведеними вище. Наприклад, нехай потрібно знайти $\omega'_2(x_2^{(1)}, U_{2,1}^{(2)})$.

Таблиця 5.10

| $x_k^{(1)}$ | $x_0^{(1)}$ | $x_1^{(1)}$ | | $x_2^{(1)}$ | | $x_3^{(1)}$ | | | $x_4^{(1)}$ | | | | | | | |
|--|--------------------------------|--------------------------------|----------------|--------------------------------|----------------|--------------------------------|----------------|----------------|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| | | $U_{10}^{(2)}$ | $U_{11}^{(2)}$ | $U_{20}^{(2)}$ | $U_{21}^{(2)}$ | $U_{22}^{(2)}$ | $U_{30}^{(2)}$ | $U_{31}^{(2)}$ | $U_{32}^{(2)}$ | $U_{33}^{(2)}$ | $U_{40}^{(2)}$ | $U_{41}^{(2)}$ | $U_{42}^{(2)}$ | $U_{43}^{(2)}$ | $U_{44}^{(2)}$ | |
| $U_{k,k-j}^{(2)}$ | $U_{00}^{(2)}$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\omega_2(x_k^{(1)}, U_{k,k-j}^{(3)})$ | 0 | 4 | 0 | 5 | 4 | 0 | 9 | 5 | 4 | 0 | 10 | 9 | 5 | 4 | 0 | 0 |
| $\omega_2(x_k^{(2)}, U_{k,k-j}^{(3)})$ | 0 | 4 | 3 | 5 | 7 | 4 | 9 | 8 | 8 | 6 | 10 | 12 | 9 | 10 | 9 | 9 |
| $W_2(x_k^{(1)})$ | 0 | 4 | | 7 | | 9 | | | 12 | | | | | | | |
| $U^{*(2)}(x_k^{(2)})$ | $U_{00}^{*(2)}, U_{00}^{*(3)}$ | $U_{10}^{*(2)}, U_{00}^{*(3)}$ | | $U_{21}^{*(2)}, U_{10}^{*(3)}$ | | $U_{30}^{*(2)}, U_{00}^{*(3)}$ | | | $U_{41}^{*(2)}, U_{10}^{*(3)}$ | | | | | | | |

Для цього до $\omega_2(x_2^{(1)}, U_{21}^{(2)}) = 4$ необхідно додати $W_3(x_1^{(2)})$. Знайдемо в табл. 5.10 стан, номер якого дорівнює останній цифрі керування $U_{21}^{(2)}$. Це буде стан $x_1^{(2)}$, якому відповідає умовний оптимальний виграш $W_3(x_1^{(2)}) = 3$. Підставивши ці значення у (5.40), отримаємо $\omega_2'(x_2^{(1)}, U_{21}^{(2)}) = 4 + 3 = 7$. Аналогічно розрахуємо інші значення $\omega_2'(x_k^{(1)}, U_{k,k-1}^{(2)})$, які занесемо у відповідні клітинки четвертого рядка табл. 5.10. Умовний оптимальний виграш $W_2(x_k^{(1)})$ на другому кроці знайдемо відповідно до виразу (5.38) як максимальний серед усіх значень $\omega_2'(x_k^{(1)}, U_{k,k-1}^{(2)})$. Наприклад, для стану $x_1^{(1)}$ умовний оптимальний виграш дорівнюватиме чотирьом умовним одиницям ($W_2(x_1^{(1)}) = 4$), для стану $x_2^{(1)}$ – семи умовним одиницям ($W_2(x_2^{(1)}) = 7$) і т. д. Для стану $x_1^{(1)}$ буде умовним оптимальним керуванням $U_{10}^{*(2)}$, для стану $x_2^{(1)}$ – керування $U_{21}^{*(2)}$ і т. д.

Однак відповідно до процедури спрямованого перебирання в останньому рядку табл. 5.10 для кожного стану наводяться послідовності керувань на другому й третьому кроках. Тому в табл. 5.9 знаходимо стан, номер якого дорівнює останній цифрі нижнього індексу умовного оптимального керування на другому кроці.

Умовне оптимальне керування на третьому кроці, що відповідає цьому стану, дописуємо до умовного оптимального керування на другому кроці, отримуючи таким чином послідовність керувань. Наприклад, для стану $x_4^{(1)}$ умовним оптимальним керуванням є керування $U_{41}^{*(2)}$. Знаходимо в табл. 5.10 стан $x_1^{(2)}$. Цьому стану відповідає умовне оптимальне керування на третьому кроці $U_{10}^{*(3)}$. Тоді послідовністю умовних оптимальних керувань на другому та третьому кроках для стану $x_1^{(2)}$ буде послідовність

$$U_{10}^{*(2)} = (U_{41}^{*(2)}, U_{10}^{*(3)}),$$

яку запишемо у відповідній клітинці останнього рядка табл. 5.10. Так само знайдемо й запишемо усі послідовності умовних оптимальних керувань на другому й третьому кроках.

Аналогічно проведемо умовну оптимізацію першого кроку. Результати умовної оптимізації першого кроку наведено в табл. 5.11.

Таблиця 5.11

| | | | | | |
|-------------------------------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x_m^{(0)}$ | $x_4^{(0)}$ | | | | |
| $U_{m,i}^{(1)}$ | $U_{40}^{(1)}$ | $U_{41}^{(1)}$ | $U_{42}^{(1)}$ | $U_{43}^{(1)}$ | $U_{44}^{(1)}$ |
| $\omega_1(x_m^{(0)}, U_{mi}^{(1)})$ | 9 | 7 | 6 | 5 | 0 |
| $\omega_1(x_m^{(0)}, U_{mi}^{(3)})$ | 9 | 11 | 13 | 14 | 12 |
| $W_1(x_m^{(0)})$ | 14 | | | | |
| $U^{*(1)}(x_m^{(0)})$ | $U_{43}^{*(1)}, U_{30}^{*(2)}, U_{00}^{*(3)}$ | | | | |

Таким чином, етап умовної оптимізації задачі завершено. За результатами оптимізації отримано оптимальне керування

$$U^* = U^{*(1)}(x_m^{(0)}) = (U_{43}^{*(1)}, U_{30}^{*(2)}, U_{00}^{*(3)}),$$

яке забезпечує максимальне значення цільової функції.

Прямий етап розв'язання задачі полягає в розподілі будівельних бригад по об'єктах. На першому об'єкті (керування $U_{43}^{*(1)}$) необхідно задіяти $i = 4 - 3 = 1$ будівельну бригаду, на другий об'єкт (керування $U_{30}^{*(2)}$) – $j = 3 - 0 = 3$ будівельні бригади, а на третій об'єкт ($U_{00}^{*(3)}$) будівельні бригади задіювати недоцільно. Ефективність виконання робіт на будівництві при такому розподілі будівельних бригад набуде максимальної величини, тобто 14 умовних одиниць. На рис. 5.9 умовні оптимальні керування показано більш товстими лініями.

Контрольні запитання

1. Дайте означення керування $U_{m,i}^{(l)}$ на l -му кроці.
2. Назвіть основні властивості задач динамічного програмування.
3. Розкрийте зміст принципу оптимальності.
4. Наведіть зміст методів простого й спрямованого перебирання.
5. Які фактори впливають на цільову функцію?
6. Поясніть зміст табличного алгоритму методу спрямованого перебирання.
7. Назвіть особливості розв'язання задач динамічного програмування з мультиплікативною цільовою функцією.
8. Наведіть граф оптимального розподілу ресурсів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища шк., 1995. – 319 с.
2. Медиченко, М. П. Методы оптимального планирования и управления / М. П. Медиченко. – М. : МО СССР, 1986. – 192 с.
3. Дедков, В. К. Основные вопросы эксплуатации сложных систем / В. К. Дедков, Н. А. Северцев. — М. : Высш. шк., 1976. – 405 с.
4. Поспелов, Г. С. Программно-целевое планирование и управление / Г. С. Поспелов, В. Л. Ириков. – М. : Сов. радио, 1976. – 440 с.
5. Калинин, В. Н. Теория систем и управления / В. Н. Калинин, Б. А. Резников. – Л. : ВИКИ им. Можайского, 1978. – 417 с.
6. Крайзмер, Л. П. Кибернетика / Л. П. Крайзмер. – М. : Экономика, 1977. – 279 с.
7. Денисов, Л. А. Теория больших систем управления / Л. А. Денисов, Д. Н. Колесников. – Л. : Энергоиздат, 1992. – 287 с.
8. Бир, Ст. Кибернетика и управление производством : пер. с англ. / Ст. Бир. – М. : Наука, 1985. – 391 с.
9. Бусленко, Н. П. Лекции по теории сложных систем / Н. П. Бусленко и др. – М. : Радио и связь, 1993. – 439 с.
10. Снапелев, Ю. М. Моделирование и управление в сложных системах / Ю. М. Снапелев, В. А. Старосельских. – М. : Сов. радио, 1984. – 264 с.
11. Городецкий, В. И. Математическое программирование и массовое обслуживание / В. И. Городецкий, Ю. И. Рыжиков. – Л. : ВИКИ им. Можайского, 1985. – 182 с.
12. Синяк, В. А. Электронная автоматика в военном деле / В. А. Синяк. – М. : Радио и связь. – 1989. – 42 с.
13. Машинные методы оптимизации в технике связи / Р. Н. Пашкеев и др. – М. : Связь, 1986. – 272 с.
14. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М. : Сов. радио, 1982. – 552 с.
15. Дегтярев, Ю. Л. Методы оптимизации / Ю. Л. Дегтярев. – М. : Радио и связь, 1990. – 270 с.
16. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1986. – 352 с.
17. Монахов, В. М. Методы оптимизации / В. М. Монахов. – М. : Просвещение, 1988. – 176 с.
18. Ермольев, Ю. М. Математические методы исследования операций / Ю. М. Ермольев. – Киев : Вища шк., 1999. – 308 с.
19. Благодарний, М. П. Сучасні методи управління та оптимізації / М. П. Благодарний, Ю. В. Білоконська. – Харків : ХАІ, 2018. – 128 с.

20. Антонов, А. В. Системный анализ : учеб. для студентов вузов / А. В. Антонов, В. М. Колодяжный. – М. : Высш. шк., 2008. – 454 с.
21. Кулян, В. Р. Математическое программирование с элементами информационной технологии : учеб. пособие для студентов нематемат. специальностей вузов / В. Р. Кулян, Е. А. Юнишева, А. Б. Жильцов. – Киев : МАУП, 2000. – 124 с.
22. Колодяжный, В. М. Математическое программирование и элементы теории исследования операций / В. М. Колодяжный. – Харьков : ХАИ, 2001. – 230 с.
23. Сирота, А. А. Компьютерные модели и оценка эффективности сложных систем : учеб. пособие для студентов вузов / А. А. Сирота. – М. : Техносфера, 2006. – 280 с.

ЗМІСТ

| | |
|--|-----|
| Передмова..... | 3 |
| 1. Моделі обґрунтування управлінських рішень в організаційних системах..... | 4 |
| 1.1. Загальні положення..... | 4 |
| 1.2. Математичні методи обґрунтування рішень..... | 10 |
| 2. Лінійне програмування..... | 17 |
| 2.1. Постановка задачі лінійного програмування..... | 17 |
| 2.2. Графічний метод розв'язання загальної задачі лінійного програмування..... | 20 |
| 2.3. Симплекс-метод..... | 26 |
| 2.4. Табличний алгоритм симплекс-методу..... | 35 |
| 2.5. Алгоритм пошуку допустимих розв'язків задачі лінійного програмування..... | 41 |
| 2.6. Розв'язання задач лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями..... | 48 |
| 3. Цілочислове програмування..... | 51 |
| 3.1. Особливості задач цілочислового програмування..... | 51 |
| 3.2. Метод відсічних площин..... | 53 |
| 3.3. Метод гілок і меж..... | 60 |
| 4. Нелінійне програмування..... | 68 |
| 4.1. Класифікація задач нелінійного програмування..... | 68 |
| 4.2. Методи розв'язання класичних задач нелінійного програмування..... | 78 |
| 4.3. Основна теорема математичного програмування..... | 91 |
| 4.4. Квадратичне програмування..... | 98 |
| 4.5. Дробово-лінійне програмування..... | 109 |
| 4.6. Пошукові методи розв'язання задач нелінійного програмування..... | 119 |
| 5. Динамічне програмування..... | 135 |
| 5.1. Основні поняття й означення..... | 135 |
| 5.2. Метод спрямованого перебирання..... | 143 |
| 5.3. Табличний алгоритм методу спрямованого перебирання..... | 147 |
| 5.4. Графічне розв'язання задачі динамічного програмування..... | 152 |
| 5.5. Задача динамічного програмування з мультиплікативною цільовою функцією..... | 157 |
| 5.6. Задача оптимального розподілу ресурсів..... | 160 |
| Бібліографічний список..... | 173 |

Навчальне видання

Благодарний Микола Петрович

СПЕЦІАЛЬНІ ПИТАННЯ СУЧАСНОГО КЕРУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Частина 1

МЕТОДИ ОБҐРУНТУВАННЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ В УМОВАХ ПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Редактор О. Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2019

Підписано до друку 04.10.2019

Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 9,8. Обл.-вид. арк. 11. Наклад 50 пр.

Замовлення 302.. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001