

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О. Г. Дібір

**БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА
АВІАЦІЙНИХ КОНСТРУКЦІЙ**

Частина 2

РОЗРАХУНОК ТОНКОСТІННИХ СТРИЖНІВ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК 629.735.33.023.4.001.24
Д44

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Б. В. Лупкін,
д-р техн. наук, проф. О. В. Мамлюк

Дібір, О. Г.

Д44 Будівельна механіка авіаційних конструкцій [Текст] : навч. посіб.
В 2 ч. Ч. 2 : Розрахунок тонкостінних стрижнів / О. Г. Дібір. – Харків :
Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. –
280 с.

ISBN 978-966-662-760-8

Розглянуто методи розв'язання задач, які пов'язані з визначенням нормальних і дотичних напружень, а також положення центра жорсткості в поперечних перерізах тонкостінних агрегатів авіаційних конструкцій. Наведено відповідні довідкові матеріали, приклади розв'язання задач та варіанти вихідних даних для самостійної роботи студентів.

Для студентів, які вивчають курс будівельної механіки літальних апаратів.

Іл. 329. Табл. 21. Бібліогр.: 8 назв

УДК 629.735.33.023.4.001.24

© Дібір О. Г., 2020
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2020

ISBN 978-966-662-760-8

ВСТУП

Цей посібник є другою частиною практикуму з будівельної механіки для студентів Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Коло розглянутих завдань обмежене діючими навчальними програмами. На відміну від першої частини, присвяченої в основному стрижневим системам, друга частина орієнтована на розгляд тонкостінних несучих конструкцій літальних апаратів. Зміст завдань відповідає навчальним програмам авіаційних спеціальностей.

Наведені методи розрахунків базуються на балковій теорії тонкостінного стрижня, що містить гіпотезу про плоский (безмоментний) напружений стан стінок (кручення відкритих профілів не розглядається). Необхідною умовою безмоментного стану стінок і поздовжніх елементів тонкостінного стрижня є безперервне розподілення жорстких діафрагм. Наявність таких діафрагм є однією з гіпотез розглядуваної розрахункової схеми. Слід пам'ятати, що в реальних тонкостінних конструкціях діафрагми (нервюри, шпангоути) розподілено дискретно, що призводить до появи додаткових напружень згинання в обшивці і стрингерах. В посібнику ці додаткові напруження не розглядаються.

Як відомо, в таких розрахунках геометричні характеристики перерізів визначають як криволінійні інтеграли, в яких декартові координати точок задають в параметричній формі, причому параметром є криволінійна координата поточної точки на контурній лінії профілю. Наведено приклад обчислень геометричних характеристик тонкостінного перерізу і побудови епюри поточних статичних моментів уздовж контурної лінії профілю.

Для профілів складної форми рекомендується використовувати прийом дискретизації стінок. Для розв'язання задачі пошуку нормальних напружень застосовується метод редуційних коефіцієнтів для обліку неоднорідності перерізу при лінійному деформуванні.

Для визначення положення центра згинання відкритого профілю запропоновано використовувати метод фіктивної сили, а для знаходження положення центра жорсткості замкнутого профілю – як метод фіктивної сили, так і метод фіктивного моменту.

Розрахунок двозамкнутого профілю проводять модифікованим методом сил.

У додатках подано приклади розв'язання задач з визначення дотичних напружень, центрів згинання і жорсткості.

У тексті наведено допоміжний довідковий матеріал, а в додатках – індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів.

1. НОРМАЛЬНІ НАПРУЖЕННЯ В ПЕРЕРІЗІ КРИЛА

Мета дослідження – ознайомитися з методикою урахування неоднорідності механічних характеристик матеріалів при розрахунку дискретної моделі перерізу крила.

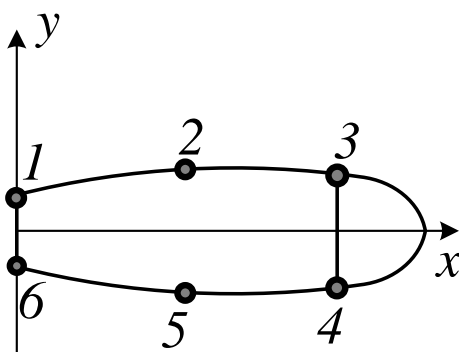


Рис. 1.1. Схема перерізу крила

Розглядаємо спрощену модель перерізу крила (рис. 1.1): зосереджені елементи 1, 3, 4, 6 імітують пояси лонжеронів з приєднаними площами обшивки і стінок; зосереджені елементи 2 і 5 імітують сукупність стрингерів з приєднаною до них обшивкою на верхній і нижній панелях крила. Координати елементів наведені в системі координат, пов'язаній з геометричною (будівельною) хордою аеродинамічного профілю перерізу. Згинальний момент віднесено до горизонтальної осі цієї системи. Розрахунок проводимо методом редуційних коефіцієнтів.

Дослідженню підлягають такі положення:

- 1) положення центра ваги редукованого перерізу не залежить від величини фіктивного модуля;
- 2) кут, на який слід повернути центральні осі до положення головних, не залежить від величини фіктивного модуля;
- 3) нормальні напруження в зосереджених елементах розтину не залежать від величини фіктивного модуля;
- 4) знайдена система нормальних напружень статично еквівалентна згинальному моменту у вихідній системі координат.

Розрахункова процедура записана далі у вигляді робочої таблиці (табл. 1.1). У стовпці 3 цієї таблиці вказано, в яких рядках розташовані числові значення операндів для обчислення величини, зазначеної в стовпці 2. Останній стовпець табл. 1.1 призначено для запису значень геометричних параметрів редукованого перерізу в цілому, наприклад, площа перерізу дорівнює сумі площ елементів та ін.

Таблиця 1.1

Робоча таблиця розрахунку нормальних напружень згинання в пружному неоднорідному дискретному перерізі

Номер рядка	Параметр	Рядки операндів	Числове значення параметра за номером зосередженого елемента (див. рис. 1.1)						Значення для перерізу в цілому
			1	2	3	4	5	6	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	Внутрішні силові фактори в перерізі: (див. вихідні дані): $M_x^0 =$; $M_y^0 = 0$; $N_z^0 = 0$								
2	x_i^0 , см								
3	y_i^0 , см								
4	f_i , см ²								
5	E_i , ГПа								
6	σ_{Ti} , МПа								
7	Фіктивний модуль перерізу (за вказівкою викладача) $E_\Phi =$								
8	$\varphi_i = E_i / E_\Phi$	(5), (7)							
9	$f_{ip} = f_i \cdot \varphi_i$	(4), (8)							$F_p =$
10	$x_i^0 \cdot f_{ip}$	(2), (9)							$S_{yp} =$
11	$y_i^0 \cdot f_{ip}$	(3), (9)							$S_{xp} =$
12	Центр перерізу: $x_c^0 = S_{yp} / F_p =$; $y_c^0 = S_{xp} / F_p =$								
13	$\bar{x}_i = x_i^0 - x_c^0$	(2), (12)							
14	$\bar{y}_i = y_i^0 - y_c^0$	(3), (12)							

Номер рядка	Параметр	Рядки операндів	Числове значення параметра за номером зосередженого елемента (див. рис. 1.1)						Значення для пере-різу в ці-лому
			1	2	3	4	5	6	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
15	$f_{ip} \cdot \bar{x}_i^2$	(9), (13)							$J_{\bar{y}} =$
16	$f_{ip} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i$	(9), (13), (14)							$J_{\bar{x}\bar{y}} =$
17	$f_{ip} \cdot \bar{y}_i^2$	(9), (14)							$J_{\bar{x}} =$
18	$tg 2\beta = -\frac{2J_{\bar{x}\bar{y}}}{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}$	$\beta^0 =$	(вказувати в градусах) $\cos \beta =$; $\sin \beta =$						
19	$M_x = M_x^0 \cos \beta =$	$;$ (19, a)	$M_y = -M_x^0 \sin \beta =$ (19, б)						
20	$x_i = \bar{x}_i \cos \beta + \bar{y}_i \sin \beta$	(13), (14), (18)							
21	$y_i = \bar{y}_i \cos \beta - \bar{x}_i \sin \beta$	(13), (14), (18)							
22	$f_{ip} \cdot x_i$	(9), (20)							$S_y =$
23	$f_{ip} \cdot y_i$	(9), (21)							$S_x =$
24	$f_{ip} \cdot x_i \cdot y_i$	(9), (20), (21)							$J_{xy} =$
25	$f_{ip} \cdot x_i^2$	(9), (20)							$J_y =$
26	$f_{ip} \cdot y_i^2$	(9), (21)							$J_x =$
27			$J_x = J_{\bar{x}} \cdot \cos^2 \beta + J_{\bar{y}} \sin^2 \beta - J_{\bar{x}\bar{y}} \cdot \sin 2\beta =$; (27, a)						
			$J_y = J_{\bar{y}} \cdot \cos^2 \beta + J_{\bar{x}} \sin^2 \beta + J_{\bar{x}\bar{y}} \cdot \sin 2\beta =$. (27, б)						

Закінчення табл. 1.1

Номер рядка	Параметр	Рядки операндів	Числове значення параметра за номером зосередженого елемента (див. рис. 1.1)						Значення для перерізу в цілому (10)
			1	2	3	4	5	6	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
28	$\sigma'_{i\phi} = -\frac{M_y}{J_y} x_i$, МПа	(19,б), (20), (27,б)							
29	$\sigma''_{i\phi} = +\frac{M_x}{J_x} y_i$, МПа	(19,а), (21), (27,а)							
30	$\sigma_{i\phi} = \sigma'_{i\phi} + \sigma''_{i\phi}$, МПа	(28), (29)							
31	$\sigma_i = \varphi_i \cdot \sigma_{i\phi}$, МПа	(8), (30)							
Перевірка обчислень (повернення до вихідних осей і обчислення рівнодіючих)									
32	$\sigma_i \cdot f_i$	(31), (4)							$N_x =$
33	$\sigma_i \cdot f_i \cdot x_i^0$	(32), (2)							$M_y =$
34	$\sigma_i \cdot f_i \cdot y_i^0$	(32), (3)							$M_x =$
Оцінка міцності перерізу									
35	$\eta_i = \frac{\sigma_{Ti}}{ \sigma_i }$	(6), (31)							

Вихідні дані для розрахунку містяться в табл. Д.1.1 – Д.1.13.

Зауваження. При використанні відомостей з табл. Д.1.13 слід врахувати, що схема перерізу крила, показана на рис. Д.1.1, і табл. 1.1 мають бути змінені. До робочої таблиці необхідно додати два стовпці для описання зосереджених елементів № 7 і 8.

Процедура розрахунку складається з таких етапів (див. табл. 1.1):

1. Запис вихідних даних (рядки 1 – 6).

2. Перехід за допомогою коефіцієнтів редукції φ_i від зосереджених площ реального неоднорідного перерізу f_i до зосереджених площ f_{ip} фіктивного однорідного перерізу (рядки 7 – 9).

3. Перехід від початкових осей до головних осей перерізу:

а) визначення положень центра ваги перерізу x_c, y_c у вихідній системі координат (рядки 10 – 12);

б) перенесення осей в центр ваги перерізу і отримання «центральных» координат зосереджених елементів x_{ic}, y_{ic} (рядки 13 – 14);

в) поворот центральних осей до збігу з головними і отримання координат x_i, y_i в головних осях інерції (рядки 15–21);

г) перевірка обчислень: в рядках 22 – 23 розраховують статичні моменти перерізу в головних осях S_y, S_x (суми записують в останній стовпець 10); якщо обчислення правильні, то ці суми мають дорівнювати нулю; похибки не мають перевищувати 3 % від величин, одержаних в рядках 10 і 11;

д) моменти інерції фіктивного перерізу в головних осях J_{xy}, J_y, J_x (суми величин у рядках 24 – 26; при цьому слід очікувати, що відцентровий момент інерції дорівнює нулю);

е) перевірка обчислень: в рядку 27 ті ж моменти інерції J_x , J_y розраховують за формулами повороту осей; різниця не має перевищувати 3 % напівсуми двох значень кожного з моментів інерції.

4. Обчислення фіктивних нормальних напружень $\sigma'_{i\phi}$, $\sigma''_{i\phi}$, $\sigma_{i\phi}$ (рядки 28 – 30).

Зауваження щодо розмірності. Якщо не вводити дещимальних множників, що погоджують розмірності операндів у формулах рядків 28 – 31, то в результаті обчислень отримаємо напруження в мегапаскалях. Однак далі в рядок 32 необхідно ввести узгоджувальний множник 100, щоб отримати силу в ньютонях.

5. Зворотний перехід від фіктивного перерізу до реального: визначення дійсних напружень в дійсних зосереджених елементах σ_i (рядок 31).

6. Перевірка результатів: обчислення внутрішніх силових факторів (ВСФ) в дійсному перерізі за вихідними (не головними і не редукованими) геометричними характеристиками (суми величин у рядках 32 – 34 слід порівняти із заданими в рядку 1 значеннями M_x^0 , M_y^0 , N_z^0). Якщо розбіжності значень ВСФ перевищують похибки заокруглень, це свідчить про наявність помилок в обчисленнях.

7. Висновок про міцність перерізу. В рядку 35 знайти елемент, коефіцієнт η якого має найменше значення (за модулем); ця величина є коефіцієнтом надлишку міцності всього перерізу: $\eta_{\text{пер}} = \min|\eta_i|$.

Висновок про міцність може бути сформульовано так:

при $\eta_{\text{пер}} < 1$ – переріз неміцний, коефіцієнт $\eta_{\text{пер}} = \dots$;

при $\eta_{\text{пер}} > 1$ – переріз міцний, коефіцієнт $\eta_{\text{пер}} = \dots$.

2. ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ ЗСУВУ У ВІДКРИТОМУ ПРОФІЛІ

Для заданих параметрів перерізу тонкостінного стрижня відкритого профілю побудувати епюру дотичних напружень, спричинених дією заданої перерізуєчої сили. Передбачено, що лінія дії цієї сили проходить через центр згинання. Індивідуальні завдання розміщено в дод. 2. Приклади розв'язання задач такого типу наведено в дод. 3.

2.1. Балочна теорія зсуву відкритого профілю

Дотичні напруження в тонкостінному стрижні постійні за товщиною стінок, і в кожній точці контуру їх визначають за формулою

$$\tau(t) = \frac{q(t)}{\delta(t)}, \quad (2.1)$$

де t – координата точки на контурній лінії профілю, $q(t)$ – потік дотичних напружень у даній точці, $\delta(t)$ – товщина стінки.

Згідно з балковою теорією тонкостінного стрижня потік дотичних напружень

$$q(t) = q_0 + q_P(t), \quad (2.2)$$

де q_0 – потік в початковій точці (при $t = 0$). У разі відкритого профілю початкову точку слід вибирати на одному з вільних кінців контурної лінії. При цьому $q_0 \equiv 0$, а другий доданок формули (2.2)

$$q_P(t) = -\frac{Q_y}{J_x} \cdot S_x(t) - \frac{Q_x}{J_y} \cdot S_y(t). \quad (2.3)$$

Тут Q_x, Q_y – проекції перерізуєчої сили на головні осі перерізу; J_x, J_y – головні моменти інерції перерізу; $S_x(t), S_y(t)$ – значення поточних статичних моментів відносно головних осей x, y відповідно (в точці t на контурі профілю).

Із цих теоретичних міркувань виходить, що перед використанням формул (2.1) – (2.3) необхідно визначити положення головних осей розглянутого перерізу.

2.2. Головні осі перерізу

2.2.1. Класифікація перерізів

Для класифікації перерізів використовують відомі загальні принципи і алгоритми знаходження головних осей перерізу. Однак конкретний зміст і трудомісткість відповідних процедур істотно залежать від особливостей заданого перерізу і навантаження. Слід, наприклад, враховувати, що у всіх варіантах завдань (див. дод. № 2) перерізуюча сила спрямована вертикально вгору. При цьому можлива така класифікація:

1. *Переріз з горизонтальною симетрією* (рис. Д.2.2, Д.2.3, Д.2.4, Д.2.10). Наявність або відсутність вертикальної симетрії є несуттєвою. Горизонтальну вісь симетрії перерізу слід вважати віссю Ox і спрямувати горизонтально вправо, а відповідну вісь Oy – вертикально вгору. Оскільки сила Q вертикальна, то $Q_y = Q$, $Q_x = 0$ і другий доданок у формулі (2.3) зникає, також зникає необхідність обчислювати J_y і $S_y(t)$. Необхідно знайти координати y_i у характерних точках контурної лінії перерізу і головний момент J_x . При цьому фактичне положення центра ваги на осі є несуттєвим.

2. *Переріз з вертикальною симетрією* (рис. Д.2.1 або Д.2.15). Горизонтальна симетрія відсутня. У цьому випадку також $Q_x = 0$ і для розрахунку необхідні лише J_x і $S_x(t)$. Але на відміну від попереднього випадку необхідно спочатку знайти точне положення центра ваги на осі Oy . Тільки після цього можна знайти координати y_i в характерних точках перерізу і головний момент J_x .

3. *Несиметричний переріз* (рис. Д.2.9 або Д.2.21). У цьому випадку обидві проекції перерізуючої сили на головні осі можуть не дорівнювати нулю. Необхідно не тільки знайти точне положення центра ваги, але й потім повернути центральні осі на кут β до збігу з головними. Після цього слід визначити головні координати x_i і y_i у всіх характерних точках перерізу, а потім обчислити головні моменти інерції J_x , J_y і побудувати епюри поточних статичних моментів $S_x(t)$, $S_y(t)$. У формулі (2.3) слід враховувати обидва доданки. При цьому в процесі побудови обох епюр – $S_x(t)$ і $S_y(t)$ – необхідно використовувати одну і ту ж початкову точку дугової координати ($t = 0$).

2.2.2. Стандартні елементи тонкостінних перерізів

Перерізи суцільних балок, що розглядаються при вивченні дисципліни «Опір матеріалів», у більшості випадків є найпростішими фігурами (прямокутником, колом, кільцем і т.п.) або профілями сортаменту, геометричні характеристики яких є відомими.

Перерізи тонкостінних стрижнів у більшості випадків є комбінацією найпростіших фігур. Основні геометричні характеристики таких складених перерізів визначають підсумовуванням внесків кожної з найпростіших фігур за формулами (номер елемента позначаємо буквою i):

$$F = \sum_{i=1}^n \Delta F_i; \quad S_x = \sum_{i=1}^n \Delta S_{xi}; \quad S_y = \sum_{i=1}^n \Delta S_{yi}; \quad (2.4)$$

$$J_x = \sum_{i=1}^n \Delta J_{xi}; \quad J_y = \sum_{i=1}^n \Delta J_{yi}; \quad J_{xy} = \sum_{i=1}^n \Delta J_{xyi}, \quad (2.5)$$

де n – кількість елементів у перерізі.

Усі перерізи, наведені в дод. 2, є комбінаціями найпростіших елементів трьох типів: зосередженого елемента, витягнутого прямокутника (тонкої смужки), сектора тонкого кільця.

На відміну від суцільних перерізів у тонкостінних перерізах не враховують моменти інерції щодо контурної лінії профілю і всі розміри віднесені до контурної лінії.

Для того, щоб скористатися довідковими матеріалами, слід знайти і пронумерувати всі елементи, що утворюють заданий переріз.

У процесі переходу до визначення головних осей перерізу використовують додаткові системи координат: початкову і центральну. Іноді для спрощення обчислень моменту інерції застосовують допоміжну систему координат. Наведені далі довідкові формули справедливі в будь-якій з цих систем координат. Ту систему координат, яку будуть використовувати на даному етапі розрахунку, називатимемо робочою.

Зосереджена площа поперечного перерізу поздовжнього елемента має площу f_i і координати x_i і y_i в робочій системі координат. Її внесок у геометричні характеристики перерізу описується формулами:

$$\Delta F_i = f_i; \quad \Delta S_{xi} = y_i \cdot f_i; \quad \Delta S_{yi} = x_i \cdot f_i; \quad (2.6)$$

$$\Delta J_{xi} = y_i^2 \cdot f_i; \quad \Delta J_{yi} = x_i^2 \cdot f_i; \quad \Delta J_{xyi} = x_i \cdot y_i \cdot f_i. \quad (2.7)$$

Витягнутий прямокутник розміром $b \times \delta$, центр ваги якого має координати x_i і y_i в робочій системі координат, а середня лінія нахилена до осі Ox під кутом γ_i , має площу $\Delta F_i = b \cdot \delta$; статичні моменти щодо осей Ox і Oy становлять відповідно: $\Delta S_{xi} = y_i \cdot \Delta F_i$ і $\Delta S_{yi} = x_i \cdot \Delta F_i$. Згідно з гіпотезою про безмоментний стан стінок тонкостінного стрижня власний момент інерції витягнутого прямокутника щодо поздовжньої осі симетрії не враховують (вважають, що він дорівнює нулю). Тому осьовий момент інерції щодо осі Ox

$$\Delta J_{xi} = \frac{b^3 \cdot \delta}{12} \cdot \sin^2 \gamma_i + y_i^2 \cdot b \cdot \delta; \quad (2.8)$$

осьовий момент інерції щодо осі Oy

$$\Delta J_{yi} = \frac{b^3 \cdot \delta}{12} \cdot \cos^2 \gamma_i + x_i^2 \cdot b \cdot \delta; \quad (2.9)$$

відцентровий момент інерції

$$\Delta J_{xyi} = \frac{b^3 \cdot \delta}{12} \cdot \sin \gamma_i \cdot \cos \gamma_i + x_i \cdot y_i \cdot b \cdot \delta. \quad (2.10)$$

Кільцевий сектор товщиною δ будують на дузі окружності радіусом R з центральним кутом 2θ (тобто θ – половина центрального кута дуги). Площа сектора $\Delta F_i = 2\theta \cdot R \cdot \delta$.

Будь-яка дуга окружності є симетричною фігурою. Вісь симетрії дуги проходить через центр базової окружності і середину хорди розглянутої дуги. Центр ваги сектора лежить на осі симетрії. Відстань уздовж осі симетрії від центра окружності до центра ваги сектора

$$c = R \cdot \frac{\sin \theta}{\theta}; \quad (2.11)$$

відстань уздовж осі симетрії від стягуючої хорди до центра ваги сектора

$$d = R \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \cos \theta \right). \quad (2.12)$$

Момент інерції сектора щодо осі симетрії

$$J_{max} = R^3 \delta(\theta - \sin \theta \cdot \cos \theta), \quad (2.13)$$

момент інерції відносно центральної осі сектора, яка є перпендикулярною до осі симетрії:

$$J_{min} = R^3 \delta \left(\frac{\theta^2 - 2 \sin^2 \theta}{\theta} + \sin \theta \cdot \cos \theta \right). \quad (2.14)$$

Якщо центр ваги сектора з вертикальною віссю симетрії має координату y_i , то момент інерції щодо осі Ox

$$\Delta J_{xi} = J_{min} + y_i^2 \cdot \Delta F_i. \quad (2.15)$$

При використанні формул (2.11) – (2.15) слід враховувати фактичну орієнтацію осі симетрії сектора щодо розглядуваних на даному етапі осей координат перерізу; зазвичай вісь симетрії сектора паралельна або перпендикулярна таким осям, при цьому $J_{xyi} \equiv 0$.

2.2.3. Центр ваги перерізу

Розрахунок центра ваги перерізу є необхідним тільки для тих варіантів, в яких перерізи не мають горизонтальної осі симетрії.

Перш за все слід вибрати початкову систему координат. Для перерізів з вертикальною симетрією початкову горизонтальну вісь рекомендується вибирати так, щоб вона проходила або через центр кільцевого сектора, або через центр горизонтального прямокутного елемента. Для несиметричних перерізів (наприклад, нерівнобічного кутника) початкові осі слід проводити через центри ваги елементів уздовж їх поздовжніх осей.

У вибраній початковій системі координат потрібно визначити координати центрів ваги x_i^0 і y_i^0 кожного з елементів перерізу і обчислити площу і статичні моменти перерізу в цілому:

$$F = \sum_{i=1}^n \Delta F_i, \quad S_x^0 = \sum_{i=1}^n \Delta F_i \cdot y_i^0, \quad S_y^0 = \sum_{i=1}^n \Delta F_i \cdot x_i^0. \quad (2.16)$$

Центр ваги перерізу визначається як точка, координати якої в початковій системі координат мають такі значення:

$$x_c = \frac{S_y^0}{F}, \quad y_c = \frac{S_x^0}{F}. \quad (2.17)$$

Координатні осі \bar{x} і \bar{y} , що проходять через центр ваги перерізу паралельно початковим осям, називаються центральними осями. Координати центрів ваги елементів (та інших точок) в центральних осях визначають за формулами

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i^0 - x_c; \quad \bar{y}_i = \bar{y}_i^0 - y_c. \quad (2.18)$$

2.2.4. Поворот центральних осей

Для перерізів, що мають горизонтальну або вертикальну симетрію, знайдені центральні осі є головними. Визначивши за формулами (2.18) координати центрів ваги кожного з елементів, слід обчислити за виразами (2.6) – (2.9), (2.13) та (2.14) внески окремих елементів, а потім за формулами (2.5) – головні моменти інерції перерізу в цілому. Підтвердженням правильності обчислень буде нульове значення відцентрового моменту. Після цього можна відразу перейти до підрозд. 2.3.

Якщо переріз не має осей симетрії і, отже, центральні осі не є головними, слід обчислити моменти інерції перерізу щодо центральних осей, підставляючи у формули (2.5) координати точок в центральній системі координат:

$$J_{\bar{x}i} = \sum_{i=1}^n \Delta J_{\bar{x}i}; \quad J_{\bar{y}i} = \sum_{i=1}^n \Delta J_{\bar{y}i}; \quad J_{\bar{x}\bar{y}i} = \sum_{i=1}^n \Delta J_{\bar{x}\bar{y}i}, \quad (2.19)$$

а потім скористатися формулою повороту осей

$$\operatorname{tg} 2\beta = -\frac{2 \cdot J_{\bar{x}\bar{y}}}{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}. \quad (2.20)$$

Додатний кут слід відкладати проти годинникової стрілки. Головні моменти інерції перерізу визначають за формулами

$$\begin{aligned} J_x &= J_{\bar{x}} \cdot \cos^2 \beta + J_{\bar{y}} \cdot \sin^2 \beta - J_{\bar{x}\bar{y}} \cdot \sin 2\beta, \\ J_y &= J_{\bar{y}} \cdot \cos^2 \beta + J_{\bar{x}} \cdot \sin^2 \beta + J_{\bar{x}\bar{y}} \cdot \sin 2\beta. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Крім того, слід знайти головні координати характерних точок перерізу за формулами

$$x = \bar{x} \cdot \cos \beta + \bar{y} \cdot \sin \beta; \quad y = \bar{y} \cdot \cos \beta - \bar{x} \cdot \sin \beta. \quad (2.22)$$

Ці координати будуть потрібними в подальшому при побудові епюр поточних статичних моментів.

У разі, коли $\beta \neq 0$, існує косе згинання і слід розглядати дію на переріз кожної з двох сил:

$$Q_x = Q \cdot \sin \beta; \quad Q_y = Q \cdot \cos \beta \quad (2.23)$$

і застосовувати повну формулу (2.3). При цьому дуже важливо для побудови обох епюр поточних статичних моментів $S_x(t)$ і $S_y(t)$ використовувати одну й ту ж початкову точку відліку дугової координати.

2.3. Епюра поточних статичних моментів

2.3.1. Контурна координата

Початкову точку контурної координати профілів, які не мають розгалужень, вибирають в одній з двох вільних їх точок, причому так, щоб рух уздовж контурної координати було спрямовано проти годинникової стрілки.

Профілі з розгалуженнями (рис. Д.2.1, Д.2.3, Д.2.13 та ін.) мають більше двох вільних точок і неможливо охопити всі точки профілю однією контурною координатою. Тому необхідно ввести дві або більше контурні координати і, відповідно, дві або більше початкові точки.

Перша, або основна контурна координата має охоплювати найбільшу кількість ділянок заданого профілю. Як і в разі профілів без розгалужень, вона має бути спрямована проти годинникової стрілки. Якщо профіль симетричний, то кінцева точка контурної координати має бути симетричною початковій точці.

Ділянки профілю, не охоплені першою (основною) координатою, називаються відгалуженнями. Точки, в яких контурні лінії відгалужень перетинаються з головною контурною координатою, називаються вузлами. Ділянки контурної лінії профілю між вузлами називаються загальними ділянками. Всі додаткові контурні координати обов'язково повинні мати загальні ділянки з основною контурною координатою.

Початкову точку додаткової контурної координати вибирають на вільній точці відгалуження. Якщо профіль симетричний, то кінцева точка додаткової контурної координати має бути симетричною початковій точці. Якщо є два симетричних відгалуження, то початковою вибирають ту з двох вільних точок, яка забезпечує збіг напрямку нової дугової координати з вибраними раніше напрямками на спільних ділянках.

Слід зафіксувати на ескізі напрямок контурної координати на кожному з відгалужень і на загальному відрізку контурної лінії заданого профілю. Цей напрямок не тільки використовується в процесі побудови епюри поточних статичних моментів, але й дозволяє однозначно визначити напрямки дотичних напружень в кожній точці контурної лінії профілю. Напрямки дотичних напружень необхідно знати при знаходженні центра згинання, а також при розрахунку замкнутих профілів, коли розрахунок відкритого профілю є складовою частиною процедури.

2.3.2. Розбиття контурної лінії на ділянки

Поточний статичний момент в точці з дуговою координатою t визначається як контурний інтеграл із змінною верхньою межею:

$$S_x(t) = \int_0^t y(\xi) \delta(\xi) d\xi \quad (2.24)$$

або

$$S_y(t) = \int_0^t x(\xi) \delta(\xi) d\xi. \quad (2.25)$$

Верхня межа інтеграла є аргументом шуканої функції $S_x(t)$ або $S_y(t)$. Інтегрування проводять не вздовж осі Ox , як у звичайних інтегралах, а вздовж контурної лінії профілю від початкової точки $t = 0$ до точки з поточною координатою t . Змінна інтегрування ξ визначає проміжну точку всередині цього інтервалу, тобто змінюється в межах $0 \leq \xi \leq t$. У підінтегральному вираженні знаходиться добуток параметричної залежності головної координати (тобто координати цієї точки в системі головних осей перерізу) від змінної інтегрування ($y(\xi)$ або $x(\xi)$) на місцеву товщину стінки профілю $\delta(\xi)$. У більшості випадків не вдається описати цей добуток однією формулою на всій контурній лінії профілю, тому доводиться розбивати область інтегрування на ділянки.

Ділянкою називається частина контурної лінії профілю, в межах якої підінтегральна функція в правій частині виразу поточного статичного моменту описується однією формулою з постійними значеннями параметрів. Межами ділянок є:

- вільні точки профілю;
- зосереджені площі;
- злами і розгалуження контурної лінії;
- стрибки функції $\delta(t)$.

Ділянки рекомендується нумерувати цифрами в порядку збільшення контурної координати, а межі ділянок позначати великими латинськими літерами в тому ж порядку.

2.3.3. Правила побудови епюр поточних статичних моментів

Побудова епюри поточних статичних моментів проводиться за такими правилами:

1. *Правило початкового нуля:* в початковій точці контуру поточний статичний момент дорівнює нулю або статичному моменту зосередженої площі повздовжнього елемента (наприклад, стрингери), розташованого в цій точці контуру.
2. *Правило стикування ділянок:* поточний статичний момент в початковій точці даної ділянки визначають як суму таких компонентів:
 - поточного статичного моменту в останній точці попередньої ділянки,
 - статичного моменту зосередженої площі, розташованої на межі ділянок,
 - повного статичного моменту відгалуження, що прилягає до межі двох ділянок (як повздовжній елемент, так і відгалуження можуть бути відсутніми).
3. *Правило автономності:* на кожній ділянці вибирають свою місцеву дугову (або кутову) координату з нулем в місцевій початковій точці; напрямок цієї координати має збігатися з напрямком загальної дугової координати профілю. Можливість цього спрощення забезпечується виконанням правил 1 і 2.
4. *Правило накопичення:* в межах k -ї ділянки поточні статичні моменти визначаються сумою поточного статичного моменту в початковій точці ділянки (S_k^0 – постійна складова) і збільшення, відповідного розглядуваній точці ділянки (ΔS_k – змінна складова, яку знаходять за формулою (2.24)):

$$S_k(t) = S_k^0 + \Delta S_k(t). \quad (2.26)$$

5. *Правило кінцевого нуля (нульової суми)*: в кінцевій точці останньої ділянки поточний статичний момент завжди дорівнює нулю або статичному моменту зосередженого елемента, розташованого в цій точці.

2.3.4. Послідовний розгляд ділянок

Починаючи з першої ділянки, слід послідовно розглянути всі ділянки вздовж основної контурної координати. Якщо розглядуваний профіль є розгалуженим, то після аналізу ділянок на основному контурі потрібно перейти до ділянок на додаткових контурах. Необхідно мати на увазі, що епюри поточних статичних моментів на спільних ділянках збігаються, але їх не слід підсумовувати.

Нижче докладно наведемо процедуру обчислень на ділянці. При розгляді останньої ділянки перевіримо правило кінцевого нуля.

Початковий статичний момент на першій ділянці визначають за правилом початкового нуля, а на інших – за правилом стикування ділянок, тобто через кінцеве значення на попередній ділянці (S_{k-1}^*) і, можливо, кінцеве збільшення на межі ділянок: статичний момент зосередженого елемента ($y_i \cdot f_i$) і/або повний статичний момент відгалуження ($\Delta S_{\text{відгал}}$):

$$S_k^0 = S_{k-1}^* + y_i \cdot f_i + \Delta S_{\text{відгал}}. \quad (2.27)$$

Товщину стінок профілів у межах кожної з ділянок інтегралів (2.24) вважають постійною.

Параметричні залежності $y(\xi)$ і $x(\xi)$ на кожній з ділянок визначаються формою контурної кривої. Розглядають контури з прямих і дуг окружностей.

На прямолінійних ділянках:

$$y(\xi) = y_0 + \xi \cdot \sin \gamma, \quad (2.28)$$

де y_0 – координата початкової точки ділянки; γ – кут між векторами (напрямками) ξ і Ox . Цей кут є додатним, якщо поворот від вектора ξ до вектора Ox найкоротшим шляхом здійснюється за годинниковою стрілкою, і від'ємним в іншому випадку (вектор Ox завжди спрямований горизонтально вправо).

Якщо розглядати дію сили Q_x , то зручно повернути рисунок перерізу на 90° проти годинникової стрілки. При цьому вісь Oy буде спрямована горизонтально вліво і для лінійних ділянок справедлива залежність

$$x(\xi) = x_0 + \xi \cdot \sin \gamma_1, \quad (2.29)$$

де x_0 – координата початкової точки ділянки; γ_1 – кут між векторами (напрямками) ξ_1 і Oy . Цей кут є додатним, якщо поворот від вектора ξ_1 до вектора Oy найкоротшим шляхом здійснюється проти годинникової стрілки, і від'ємним – в іншому випадку.

Якщо розглянута ділянка являє собою дугу окружності радіусом R , то слід виконати заміну змінних: замість лінійної координати ξ ввести кутову координату α – кут між віссю симетрії дугової ділянки і радіусом-вектором – в точку, відповідну координаті ξ . Справедливим є співвідношення $\xi = R(\alpha - \alpha_0)$, де α_0 – кутова координата початкової точки кільцевої ділянки.

Аналогічну заміну проводять і для координати кінцевої точки інтегрування: $t = R(\beta - \alpha_0)$, де β – кутова координата, яка є відповідною t і стає змінною верхньою межею інтегрування у формулі (2.21). Відповідно до такої заміни змінних замість диференціала $d\xi$ слід використовувати $R \cdot d\alpha$. Вираз прирощення поточного статичного моменту, наприклад S_x , на кільцевій ділянці має вигляд

$$\Delta S_x(\beta) = \int_{\alpha_0}^{\beta} y(\alpha) \delta \cdot R \cdot d\alpha. \quad (2.30)$$

Якщо вісь симетрії кільцевої ділянки розташована горизонтально і обхід починається з верхнього кінця дуги, то

$$y(\alpha) = R \sin \alpha. \quad (2.31)$$

Якщо вісь симетрії кільцевої ділянки розташована вертикально, то

$$y(\alpha) = y_0 \pm R \cos \alpha, \quad (2.32)$$

де знак «+» застосовується при опуклості вниз, а знак «-» – при опуклості вгору; Y_0 – ордината центра відповідної окружності в головній системі координат. При будь-якому розташуванні осі симетрії кільцевої ділянки інтегрування слід починати з α_0 .

Як видно з формул (2.24) та (2.30), поточний статичний момент є функцією, аргументом якої є контурна (або кутова) координата поточної точки. Для побудови цієї функції слід підставити в інтеграл (2.24) параметричне зображення (2.28), (2.29), (2.31) або (2.32), виконати інтегрування і підставити в первісну верхню (змінну) і нижню (постійну) межі.

У результаті отримаємо деяку функцію $S_k(t)$ або $S_k(\beta)$. Для побудови епюри дотичних напружень за контуром перерізу необхідно дослідити отриману функцію.

Метою дослідження функції є пошук екстремуму і визначення напрямку опуклості. Якщо функція, отримана в п.2.3.3, лінійна, то дослідження не проводять. Графік будують за двома точками. Для цього обчислюють величину поточного статичного моменту в кінцевій точці даної ділянки.

Якщо функція нелінійна, то слід знайти таке значення аргументу, при якому перша похідна функції дорівнює нулю. Якщо це значення аргументу лежить в межах розглянутої ділянки, то на цій ділянці існує екстремум, значення якого слід обчислити. Відповідно до правил диференціювання інтеграла із змінною верхньою межею

$$S'_x(t) = y(t) \cdot \delta(t). \quad (2.33)$$

Оскільки в межах ділянки положення точки, в якій існує екстремум, знаходять прирівнянням до нуля правої частини виразу (2.28) або для кільцевих ділянок – виразів (2.31), (2.32), то екстремальне значення поточного статичного моменту визначається підстановкою отриманого значення аргументу в формулу для знаходження $S_x(t)$.

Знак другої похідної S'' вказує напрямок опуклості і, отже, характер екстремуму: якщо ця похідна додатна, то функція увігнута і екстремум є мінімумом; якщо ця похідна від'ємна, то функція опукла і екстремум є максимумом.

Епюрою називається графічне зображення залежності деякого параметра, що характеризує певну точку на лінії, від положення цієї точки. Значення функції поточного статичного моменту в даній точці контурної лінії відкладають за перпендикуляром до цієї лінії у вибраному масштабі. Вибір правила «правої руки» або «лівої руки» визначається міркуваннями наочності; зокрема, не рекомендується будувати епюри всередині кільцевих секторів. Щоб уникнути накладен-

ня епюр на суміжних ділянках, рекомендується виконувати «розосередження» цих ділянок на деяку відстань одну від одної.

Побудована епюра має відповідати такій теоремі про симетрію:

- якщо переріз симетричний відносно осі Ox , то епюра поточних статичних моментів $S_x(t)$ прямосиметрична відносно осі Ox , а епюра $S_y(t)$ – оберненосиметрична відносно осі Ox ;
- якщо переріз симетричний відносно осі Oy , то епюра поточних статичних моментів $S_x(t)$ оберненосиметрична відносно осі Oy , а епюра $S_y(t)$ – прямосиметрична відносно осі Oy .

2.4. Дотичні напруження

Дотичні напруження в тонкостінному стрижні визначають за формулою (2.1). Якщо тонкостінний стрижень має відкритий профіль, то чисельник цієї формули (потік дотичних напружень) знаходять за формулою (2.3). Найбільші значення потік має в тих точках, де контурна лінія профілю перетинає головну вісь, перпендикулярну діючій перерізуєчій силі. Однак слід враховувати, що дотичне напруження в цій точці залежить від місцевої товщини стінки. Оскільки на різних ділянках значення найбільших потоків і значення товщини різні, слід перевірити кілька небезпечних місць.

Система правил знаків, прийнята в теорії тонкостінних стрижнів (для t , Q , x , y , q), забезпечує такі співвідношення між напрямками t і q :

- якщо потік дотичних сил зберігає знак в межах деякої ділянки контуру, то зберігається і його напрямок відносно напрямку дугової координати (збігається або є протилежним);
- напрямок додатних потоків дотичних сил збігається з напрямком дугової координати, а напрямок від'ємних потоків дотичних сил є протилежним напрямку дугової координати.

Остаточним результатом розв'язання цієї задачі є епюра дотичних напружень із зазначенням їх напрямків (на кожній з ділянок) і величин, МПа, в характерних точках, а також величина найбільшого дотичного напруження і зазначення точки, в якій діє це напруження.

3. ЦЕНТР ЗГИНАННЯ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

3.1. Дискретизація стінок

У тонкостінних авіаційних несучих конструкціях обшивка і стінки призначені в основному для опору зсуву. Сприйняття нормальних напружень є функцією поздовжніх елементів каркаса. Однак нормальні напруження неминуче виникають і в обшивці, і в стінках.

Врахування нормальних напружень в обшивці і стінках приводить до необхідності вводити ці елементи в усі інтеграли, якими визначаються геометричні характеристики перерізу в цілому і поточні статичні моменти. При цьому збільшується трудомісткість обчислень, причому тим більше, чим більше ділянок містить контур перерізу.

Дискретизація – це заміна реального перерізу тонкостінного стрижня, в якому обшивка і стінки працюють як на дотичні, так і нормальні напруження (модель « $\delta_\sigma \neq 0$ »), дискретним перерізом, в якому обшивка і стінки працюють тільки на дотичні напруження (модель « $\delta_\sigma \neq 0$ », модель Вагнера). При цьому для врахування фактичної несучої здатності обшивки і стінок за нормальними напруженнями вводять фіктивні поздовжні зосереджені елементи, площі яких обчислюють згідно з умовами статичної еквівалентності. Дискретизація істотно спрощує розрахунок нормальних і дотичних напружень в тонкостінному стрижні. Розрахунок тонкостінних стрижнів зі складними контурами поперечних перерізів є практично неможливим без проведення дискретизації. Реальні тонкостінні агрегати авіаційних конструкцій розраховують за дискретною моделлю.

Якщо у вихідних даних навчальних завдань немає вимоги проведення дискретизації перерізу, то даний підрозділ слід пропустити і перейти до розгляду підрозд. 3.2.

Тут розглядають дискретизацію тільки таких перерізів, контури яких складаються з прямолінійних відрізків. Можна довести, що не тільки площа, але й моменти інерції прямолінійної ділянки $b \times \delta$ відносно будь-якої осі не зміняться, якщо замінити витягнутий прямокутник трьома дискретними елементами на контурній лінії: двома кінцевими f_a , f_b і одним центральним f_0 , причому

$$f_a = f_b = \frac{1}{6} b \cdot \delta; \quad f_0 = \frac{2}{3} b \cdot \delta. \quad (3.1)$$

У точках стику двох ділянок площі кінцевих елементів підсумовують. Якщо в цих точках є поздовжній елемент, то його площа додається до суми.

Приклад. Початковий переріз (рис. 3.1) складається з прямолінійних стінок, довжина яких дорівнює b , c ; товщина – δ . Є пара поздовжніх елементів f .

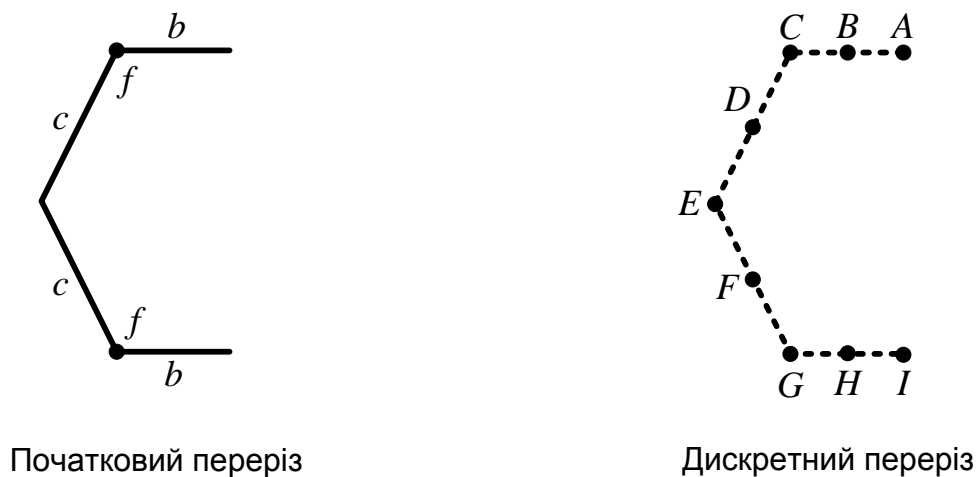


Рис. 3.1. Приклад дискретизації перерізу

Точками розташування дискретних елементів (реальних і фіктивних) є кінцеві і центральні точки ділянок A , B , C , D , E , F , G , H , I на рис. 3.1. Формули (3.1) застосовують для визначення f_i на кожній з ділянок; при цьому враховують наявність горизонтальної симетрії перерізу (площі симетричних елементів однакові):

$$f_A = f_I = \frac{1}{6}b \cdot \delta; \quad f_B = f_H = \frac{2}{3}b \cdot \delta;$$

$$f_C = f_G = f + \frac{1}{6}b \cdot \delta + \frac{1}{6}c \cdot \delta;$$

$$f_D = f_F = \frac{2}{3}c \cdot \delta; \quad f_E = \frac{2}{3}c \cdot \delta.$$

Перевірка. Площа вихідного перерізу $F_0 = 2f + 2b \cdot \delta + 2c \cdot \delta$ має дорівнювати сумарній площі дискретного перерізу:

$$F^* = 2(f_A + f_B + f_C + f_D) + f_E =$$

$$= 2\left(\frac{b\delta}{6} + \frac{2b\delta}{3} + f + \frac{b\delta}{6} + \frac{c\delta}{6} + \frac{2c\delta}{3}\right) + \frac{c\delta}{3} = F_0.$$

Якщо в задачі розглядають тільки згинання, яке існує у вертикальній площині, то горизонтальні ділянки можна замінити не трьома, а тільки двома кінцевими дискретними елементами:

$$f_a = f_b = \frac{1}{2}b \cdot \delta; \quad f_0 = 0. \quad (3.2)$$

Ці площі підсумовують з площами стрингерів, розташованих на межах ділянки обшивки (звідси термін «приєднана обшивка»).

3.2. Метод фіктивної сили

Важливою геометричною характеристикою перерізів тонкостінних стрижнів відкритого профілю, крім центра ваги, є центр згинання.

Центр згинання – це така точка поперечного перерізу, через яку проходять рівнодіючі балкових потоків дотичних сил при будь-яких напрямках перерізуючої сили. В межах балкової теорії тонкостінний стрижень відкритого профілю не може чинити опір деформації, якщо лінія дії перерізуючої сили не проходить через центр згинання.

Відкритий профіль (тонкостінний стрижень з відкритим контуром поперечного перерізу) дуже слабо чинить опір крутінню. Розрахункова схема тонкостінного стрижня містить гіпотезу про безмоментний стан стінок, яка виключає можливість кручення відкритого профілю, так що формально відкритий профіль є змінною системою.

Насправді відкриті профілі (наприклад, профілі сортаменту) мають незначний опір крученню, і цей опір розглядається або в теорії Сен-Венана (вільне крутіння), або в спеціальній теорії В. З. Власова (стиснуте кручення).

Крутний момент створюється або парою сил, що лежать в площині перерізу, або моментом внутрішньої перерізуючої сили відносно центра крутіння. Отже, для того, щоб усунути крутіння, необхідно так розташувати зовнішні навантаження (або перерізи стрижня), щоб були відсутні внутрішні пари сил, а лінії дії внутрішніх перерізуючих згинальних сил проходили б через центр крутіння – інакше крім згинання буде і кручення. Тому у відкритому профілі центр кручення називається центром згинання.

Рівнодіюча балкових дотичних напружень, спричинених дією сили Q_y , дорівнює цій силі за величиною, і її лінія дії збігається з лінією дії сили Q_y , тобто проходить через центр згинання. Аналогічне твердження є справедливим і відносно сили Q_x .

Ідея методу фіктивної сили полягає в тому, що для визначення горизонтальної координати центра згинання до заданого перерізу подумки прикладають «фіктивну» вертикальну перерізуючу силу $Q_{y.ф}$. Величину цієї сили вибирають довільно, її напрямок збігається з напрямком відповідної осі, а фактичне положення є невідомим. Передбачають, що вона проходить через центр згинання і, отже, спричиняє тільки дотичні напруження згинання. За відомою методикою (див. розд. 2) визначають відповідні цій силі дотичні напруження. Рівнодіюча знайдених дотичних напружень збігається з $Q_{y.ф}$. Для визначення положення цієї сили довільно вибирають положення моментної точки P (полюса). Умова статичної еквівалентності моментів має вигляд

$$M_P(q) = a_P \cdot Q_{y.ф}, \quad (3.3)$$

де $M_P(q)$ – момент дотичних напружень, спричинених дією сили $Q_{y.ф}$, відносно полюса;

a_P – невідоме плече сили $Q_{y.ф}$ відносно вибраного полюса.

Користуючись умовою статичної еквівалентності моментів, обчислюємо відстань a_P – довжину перпендикуляра, опущеного з полюса на вертикальну лінію дії сили Q_y .

Якщо переріз є симетричним відносно горизонтальної осі, то центр згинання лежить на цій осі в точці її перерізу з вертикаллю, яка відступає від полюса на відстань a_P .

Аналогічна процедура може бути застосована до сили Q_x і визначення положення її лінії дії.

3.3. Процедура обчислень

1. *Вибір полюса.* Для реалізації умови еквівалентності моментів необхідно вибрати конкретне положення моментної точки (полюса). Не існує ніяких обмежень щодо цього вибору, тому слід керуватися тільки трудоміс-

ткістю розрахунків. Виходячи з цього, рекомендується моментну точку вибирати в точці перетину максимального числа лінійних ділянок контурної лінії, бажано в нижній половині перерізу. Якщо в перерізі є кільцевий сектор, моментну точку слід вибирати в центрі утворювальної окружності.

Зафіксуйте номери лінійних ділянок контуру, в яких дорівнюють нулю плечі відносно вибраного полюса.

2. *Еюра потоків дотичних сил.* Керуючись вказівками підрозд. 2.3 і 2.4, побудуйте еюри дотичних напружень на тих ділянках профілю, в яких не дорівнюють нулю плечі відносно вибраного полюса. Визначте напрямки потоків для кожної з цих ділянок. У ході обчислень як одиницю довжини рекомендується використовувати сантиметр.

3. *Момент дотичних напружень.* Цей пункт процедури є найбільш трудомістким. Момент, створюваний потоками дотичних напружень відносно моментної точки P , визначається як криволінійний інтеграл за всією довжиною ℓ контурної лінії перерізу:

$$M_P(q) = \int_0^{\ell} q(t) \cdot \rho(t) dt. \quad (3.4)$$

Тут $\rho(t)$ – плече диференціала сили $q(t)dt$ в даній точці контуру, тобто довжина перпендикуляра, опущеного з полюса на дотичну до контуру в даній точці з координатою t .

Оскільки зазвичай контур перерізу не є гладкою кривою, то інтеграл (3.4) обчислюють підсумовуванням за ділянками, причому у випадках розглядуваних перерізів уздовж кожної з ділянок $\rho(t) = \rho_i = const$:

$$M_P(q) = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot F_i. \quad (3.5)$$

Тут F_i – деякий силовий фактор, який визначають за такими формулами:

– для прямолінійних ділянок контуру, де ρ_i – довжина перпендикуляра, опущеного з полюса на прямолінійну ділянку контуру:

$$F_i = \int_0^{b_i} q(t) dt, \quad (3.6)$$

де b_i – довжина ділянки, причому для дискретної ділянки формула (3.6) спрощується: $F_i = q_i \cdot b_i$;

– для дугових ділянок, де $\rho_i = R$ і $dt = R \cdot d\beta$:

$$F_i = \int_{\alpha}^{\gamma} q(\beta) d\beta, \quad (3.7)$$

де α і γ – кутові координати початкової і кінцевої точок ділянки відповідно.

Момент ($\rho_i \cdot F_i$) на i -й ділянці вважається додатним, якщо спрямований проти годинникової стрілки.

4. Центр згинання. З рівності (3.3)

$$a_P = \frac{M_P(q)}{Q_{y,\phi}}. \quad (3.8)$$

Індекс « P » при a_P вказує, що знайдену відстань слід відкладати від вибраної моментної точки P до центра згинання, причому якщо $a_P > 0$, то центр згинання лежить справа від точки P , якщо $a_P < 0$ – зліва.

За результатами розрахунків, проведених за викладеними алгоритмами, слід зобразити ескіз перерізу, на якому вказати положення центра згинання і полюса, а також величину відстані від полюса до центра згинання в сантиметрах.

Зазвичай центр згинання розташовано поза відкритим контуром.

Завдання для індивідуального розв'язання розміщені в дод. 4.

У дод. 5 наведено приклади знаходження положення центра згинання в різних перерізах тонкостінного стрижня.

4. ЗСУВ І КРУЧЕННЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФІЛЮ

4.1. Вихідні дані

Розглянемо спрощену схему (рис. 4.1) міжлонжеронної частини крила, що складається з двох лонжеронів (лівого і правого) і двох обшивок (верхньої і нижньої).

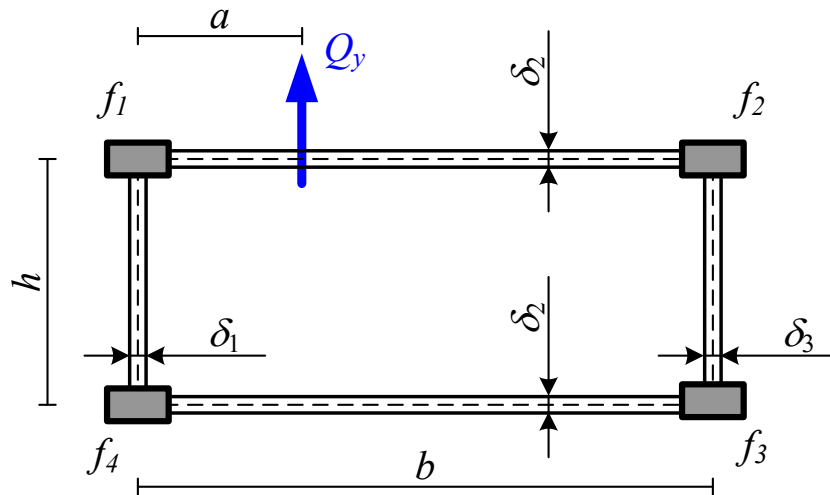


Рис. 4.1. Геометрія перерізу

Контурна лінія перерізу є прямокутником розмірами $h = 20$ см і $b = 80$ см. Переріз є симетричним горизонтальній осі – нижні і верхні пояси однакові: $f_4 = f_1$, $f_3 = f_2$. Числові значення параметрів перерізу наведені в таблиці варіантів (дод. 6).

Пояси лонжеронів (f_1, f_2, f_3, f_4) і стінки (δ_1, δ_3) – сталеві: ($E_{ст} = 200$ ГПа ; $G_{ст} = 80$ ГПа), обшивка (δ_2) – алюмінієва: ($E_{д} = 70$ ГПа ; $G_{ст} = 27$ ГПа).

У перерізі діє спрямована вертикально вгору перерізуюча сила Q_y , лінія дії якої проходить на відстані a праворуч від стінки лівого лонжерона. Величина сили і параметр a задаються викладачем.

4.2. Дискретизація і редукція перерізу

Дискретизація перерізу проводиться для спрощення обчислювальних процедур і являє собою заміну суцільних стінок (вертикальних і горизонтальних) зосередженими (дискретними) елементами.

Застосовується стандартний прийом дискретизації: заміна кожної стінки лонжеронів і обшивок трьома зосередженими елементами. Для врахування відмінності в модулях пружності лонжеронів і обшивки вводять редукційний коефіцієнт $\frac{E_{\text{д}}}{E_{\text{ст}}}$.

Середню ділянку верхньої обшивки (рис. 4.2) замінюють самостійним зосередженим елементом площею

$$\Delta F_5 = \frac{2}{3} b \delta_2 \frac{E_{\text{д}}}{E_{\text{ст}}}. \quad (4.1)$$

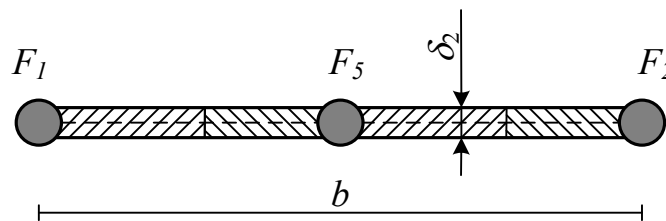


Рис. 4.2. Дискретизація верхньої обшивки

Симетричний фіктивний елемент такої ж площі на нижній обшивці позначимо F_6 .

Крайні ділянки обшивок приєднаємо до всіх чотирьох поясів:

$$\Delta F_{\text{обш}} = \frac{1}{6} \cdot b \cdot \delta_2 \cdot \frac{E_{\text{д}}}{E_{\text{ст}}}. \quad (4.2)$$

Крім того, до поясів приєднаємо частково площі стінок:

$$\Delta F_{\text{ст1}} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot \delta_1; \quad \Delta F_{\text{ст3}} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot \delta_3, \quad (4.3)$$

де індекс «1» належить до лівого лонжерона, а індекс «3» – до правого.

Таким чином, нові площі дискретних елементів в центрах поясів лонжеронів з урахуванням приєднаних площ обшивок і стінок визначаємо як суми:

$$F_1 = F_4 = f_1 + \Delta F_{\text{обш}} + \Delta F_{\text{ст1}}; \quad (4.4)$$

$$F_2 = F_3 = f_2 + \Delta F_{\text{обш}} + \Delta F_{\text{ст3}}. \quad (4.5)$$

У дискретному перерізі (рис. 4.3) обшивка і стінки не беруть участі в роботі на нормальні напруження ($\delta_{\sigma} = 0$) і їх не враховують у визначенні геометричних характеристик перерізу.

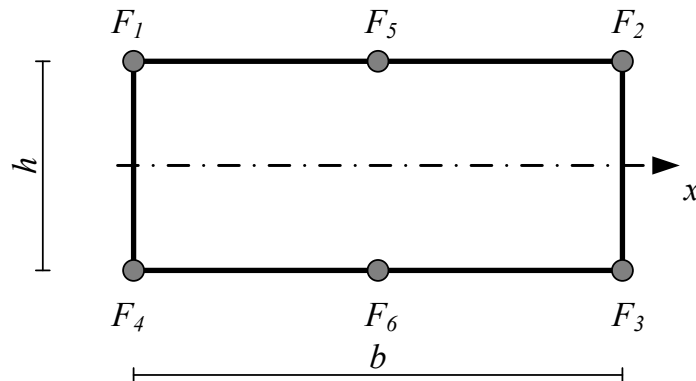


Рис. 4.3. Дискретний редукований переріз

Зокрема, момент інерції відносно горизонтальної осі симетрії, яка є головною віссю Ox , обчислюємо за формулою

$$J_x = \sum_{i=1}^6 F_i \cdot y_i^2 = (F_1 + F_2 + F_5) \cdot \frac{h^2}{2}; \quad (4.6)$$

оскільки переріз складається з двох однакових половин і всі поздовжні елементи знаходяться на одній висоті $y_i = \pm \frac{h}{2}$.

4.3. Епюра змінної частини потоку дотичних сил

Значення поточного статичного моменту в точці контуру, положення якої визначається контурною координатою t , у цьому окремому випадку обчислюємо за формулою

$$S_x = \sum_{i=0}^{m(t)} y_i \cdot f_i, \quad (4.7)$$

де $m(t)$ – кількість зосереджених поздовжніх елементів, розташованих на ділянці контуру від початку відліку до розглянутої точки на контурі.

Рекомендується початок відліку контурної координати t вибирати в середині висоти правого лонжерона (точка A), а напрямок – проти стрілки годинника (рис. 4.4).

У разі дискретного перерізу поточний статичний момент на кожній ділянці є постійним: $S_x(t) = S_{xi}$.

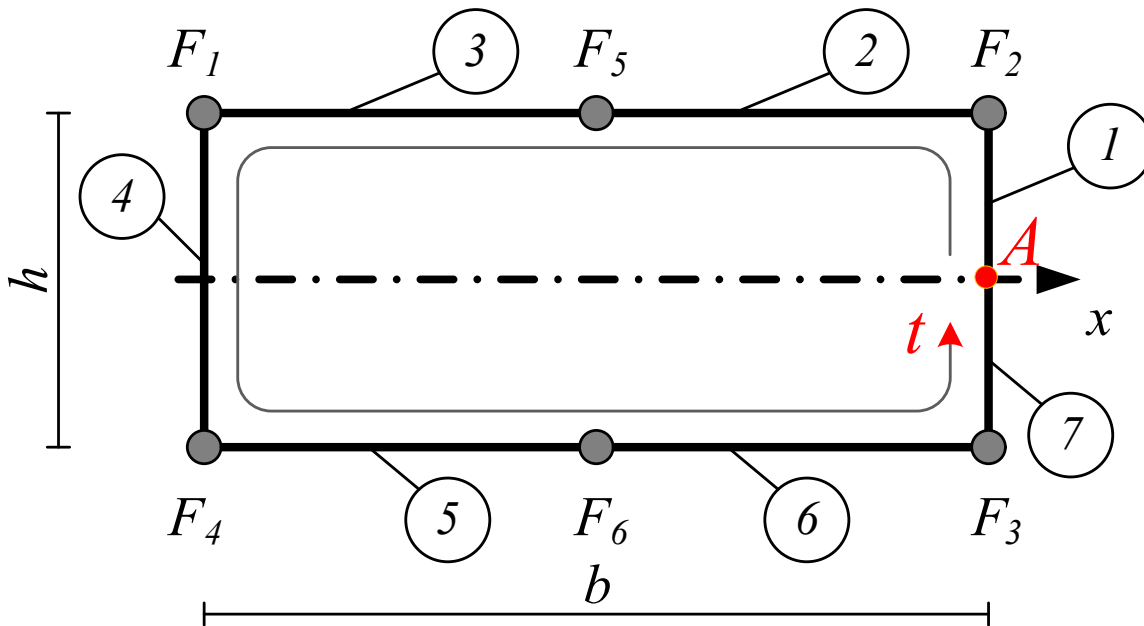


Рис. 4.4. Початок відліку контурної координати t і її напрямок

На першій ділянці від точки A до елемента F_2 (рис. 4.4) статичний момент дорівнює нулю, оскільки тут немає поздовжніх елементів, а $\delta_\sigma = 0$; $S_{x1} = 0$.

На другій ділянці $S_{x2} = F_2 \cdot y_2 = +F_2 \cdot \frac{h}{2}$.

На третій ділянці $S_{x3} = F_2 \cdot \frac{h}{2} + F_5 \cdot \frac{h}{2}$.

На четвертій ділянці $S_{x4} = F_2 \cdot \frac{h}{2} + F_5 \cdot \frac{h}{2} + F_2 \cdot \frac{h}{2}$.

Поточні статичні моменти на нижній половині перерізу (ділянки 5 – 7) симетричні знайденим: $S_{x5} = S_{x3}$; $S_{x6} = S_{x2}$; $S_{x7} = S_{x1}$ (рис. 4.5).

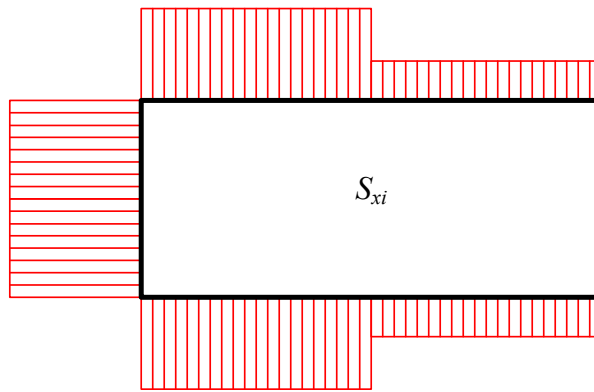


Рис. 4.5. Характер епюри поточних статичних моментів

Значення змінної частини потоку дотичних сил на i -й ділянці контуру дискретного перерізу визначаємо за формулою

$$q_{pi} = \frac{Q_y \cdot S_{xi}}{J_x}. \quad (4.8)$$

При додатних S_{xi} напрямки потоків q_{pi} протилежні напрямкам координатної осі t на кожній з ділянок. У розглянутому прикладі координата спрямована проти годинникової стрілки, а потоки – за годинниковою стрілкою (рис. 4.6).

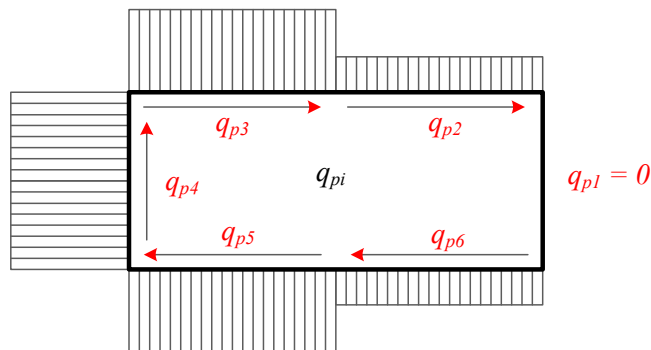


Рис. 4.6. Характер епюри потоків q_{pi}

Для перевірки отриманої епюри використовуємо умову статичної еквівалентності: рівнодіюча потоку по стінці на четвертій ділянці повинна мати силу, що дорівнює силі Q_y , тобто необхідно перевірити виконання рівності

$$q_{p4} \cdot h = Q_y. \quad (4.9)$$

Якщо похибка перевищує 1%, то розрахунки q_{pi} виконано неправильно.

4.4. Потік дотичних сил в початковій точці контуру

Постійну частину потоків дотичних сил q_0 визначаємо з умови статичної еквівалентності моментів: момент сумарних потоків дотичних сил ($q_0 + q_{pi}$) має дорівнювати моменту сили Q_y щодо будь-якої точки. Наприклад, якщо як моментну точку прийняти центр поясу 4, а моменти, спрямовані проти годинникової стрілки, вважати додатними, то

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (a \cdot Q_y - \oint q_p \cdot \rho \cdot dt), \quad (4.10)$$

причому $\Omega = 2bh$, а інтеграл $\oint q_p \cdot \rho \cdot dt = \frac{1}{2}bh(q_{p2} + q_{p3})$. При цьому слід враховувати, що потоки q_{pi} , як і сам інтеграл, є від'ємними.

4.5. Сумарні потоки дотичних сил

Сумарні потоки дотичних сил визначають за основною формулою розрахунку дотичних напружень у тонкостінних стрижнях:

$$q(t) = q_0 + q_p(t), \quad (4.11)$$

яка в даному випадку, коли $\delta_\sigma = 0$, буде мати вигляд

$$q_{\Sigma i} = q_0 + q_{pi}. \quad (4.12)$$

Дуже важливо на даному етапі для знаходження центра жорсткості (див. підрозд. 4.7) правильно визначити напрямки потоків дотичних сил на кожній з ділянок профілю.

Для перевірки правильності проведених обчислень можна використати умову еквівалентності моментів, вибравши моментну точку, відмінну від тієї, яка була використана при розрахунку потоку q_0 . Наприклад, можна вибрати центр площі F_2 . В цьому випадку має виконуватися рівність

$$(a-b)Q_y = bh \left[q_{\Sigma 4} + \frac{1}{2}(q_{\Sigma 5} + q_{\Sigma 6}) \right]. \quad (4.13)$$

Якщо похибка перевищує 3 %, то обчислення містять помилку.

4.6. Дотичні напруження

Дотичне напруження на i -й ділянці контуру визначають за формулою

$$\tau_i = \frac{q_{\Sigma i}}{\delta_i}, \quad (4.14)$$

де δ_i – дійсна товщина стінки на i -й ділянці контуру.

Слід обчислити τ_i для $i = 1, 2, 3, 4$ і порівняти їх значення з межами текучості при зсуві для сталі (500 МПа) і дюралю (180 МПа).

У висновку щодо міцності стінок при зсуві слід вказати стінку, в якій досягається найбільше відношення діючого дотичного напруження до межі текучості і величину цього відношення.

4.7. Центр жорсткості замкнутого профілю

Знайдені в розд. 4 потоки дотичних зусиль у замкнутому профілі, спричинені дією сили, можна використовувати для визначення положення центра жорсткості методом фіктивного моменту. Розрахунок зручно вести у вигляді таблиці (табл. 4.1). Алгоритм розрахунку можна розбити на такі етапи:

1. Крутильна жорсткість однозамкнутого профілю

$$GJ_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}}, \quad (4.15)$$

де $\Omega = 2bh$, а інтеграл в знаменнику для дискретного перерізу обчислюють як суму елементів четвертого рядка:

$$\oint \frac{dt}{G\delta} = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta t_i}{(G\delta)_i} = \sum_{i=1}^m p_i. \quad (4.16)$$

Тут m – кількість ділянок на контурі; i – номер ділянки (на даному етапі розрахунку першою ділянкою вважається вся стінка правого лонжерона; $m = 6$); Δt_i – довжина i -ї ділянки. У табл. 4.1 використовують скорочене позначення (рядок 4):

$$p_i = \frac{\Delta t_i}{(G\delta)_i}. \quad (4.17)$$

2. Відносний кут закручування в перерізі

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \int \frac{q(t) \cdot dt}{G\delta}, \quad (4.18)$$

причому інтеграл у дискретному перерізі обчислюють як суму:

$$\int \frac{q(t) \cdot dt}{G\delta} = \sum_{i=1}^m \frac{q_{\Sigma i} \cdot \Delta t_i}{(G\delta)_i}. \quad (4.19)$$

При розрахунку суми (4.19) в рядку 6 табл. 4.1 слід враховувати знаки потоків $q_{\Sigma i}$.

Таблиця 4.1

Зведення обчислень при визначенні центра жорсткості

Номер рядка	Параметр	Значення параметра на ділянці					
		Номер ділянки					
		1	2	3	4	5	6
1	$\Delta t_i, \text{ м}$						
2	$\delta_i, \text{ м}$						
3	$G_i, \text{ Н/м}^2$						
4	$p_i, \text{ м}^2/\text{Н}$						
5	$q_{\Sigma i}, \text{ Н/м}$						
6	$q_{\Sigma i} \cdot p_i, \text{ м}$						

3. Крутний момент. Визначають за формулою, відомою з курсу «Опір матеріалів» («Механіка матеріалів і конструкцій»):

$$M_{\text{кр}} = \theta \cdot GJ_{\text{кр}}. \quad (4.20)$$

4. Відстань від лінії дії сили Q_y до центра жорсткості. Розраховують з умови, що крутний момент в перерізі створюється заданою перерізуючою силою Q_y :

$$c = \frac{M_{кр}}{Q_y}. \quad (4.21)$$

Цю відстань відкладають вліво від Q_y , якщо $M_{кр} > 0$ (рис. 4.7), або вправо, якщо $M_{кр} < 0$ (рис. 4.8).

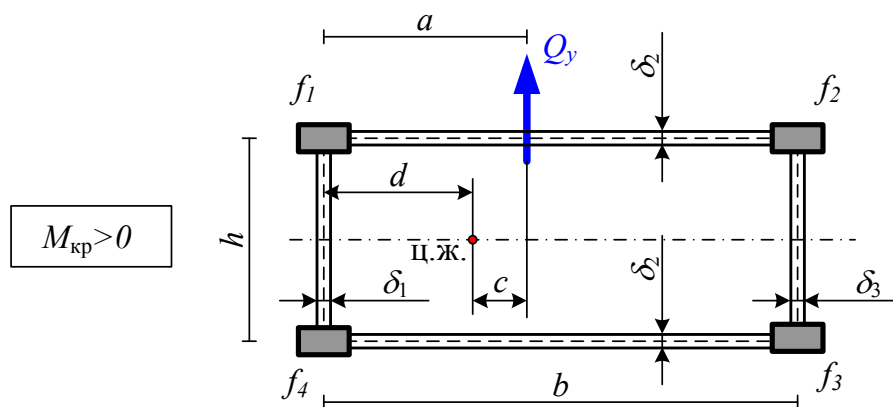


Рис. 4.7. Перший варіант розташування центра жорсткості

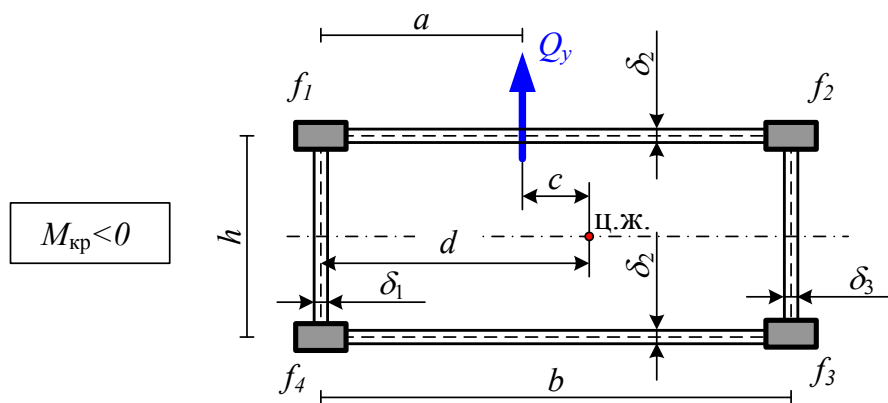


Рис. 4.8. Другий варіант розташування центра жорсткості

Центр жорсткості є геометричною характеристикою перерізу і не залежить від навантаження, тому його положення слід поєднати з геометрією перерізу. Наприклад, на рис. 4.7 відстань до центра жорсткості $d = a - c$.

Приклади розв'язання задач з розрахунку однозамкнутого профілю наведені в дод. 7.

5. РОЗРАХУНОК ДВОЗАМКНУТОГО ПРОФІЛЮ

5.1. Підготовка вихідних даних

Вихідні дані наведені в дод. 8. Усі запропоновані перерізи симетричні відносно горизонтальної осі. Додатково слід визначити необхідні параметри перерізу: $2\Omega_1$, $2\Omega_2$, J_x . Для цього використовують методику розрахунку дискретного перерізу, тобто обшивка і стінки не працюють на нормальні напруги ($\delta_\sigma = 0$) і, отже, їх не враховують при розрахунку J_x й S_{xi} . Крім того необхідно розбити двозамкнутий контур на ділянки, пронумерувати їх, знайти довжину Δt_i кожної з них (рис. 5.1) і податливість p_i за формулою

$$p_i = \frac{\Delta t_i}{G_i \delta_i}. \quad (5.1)$$

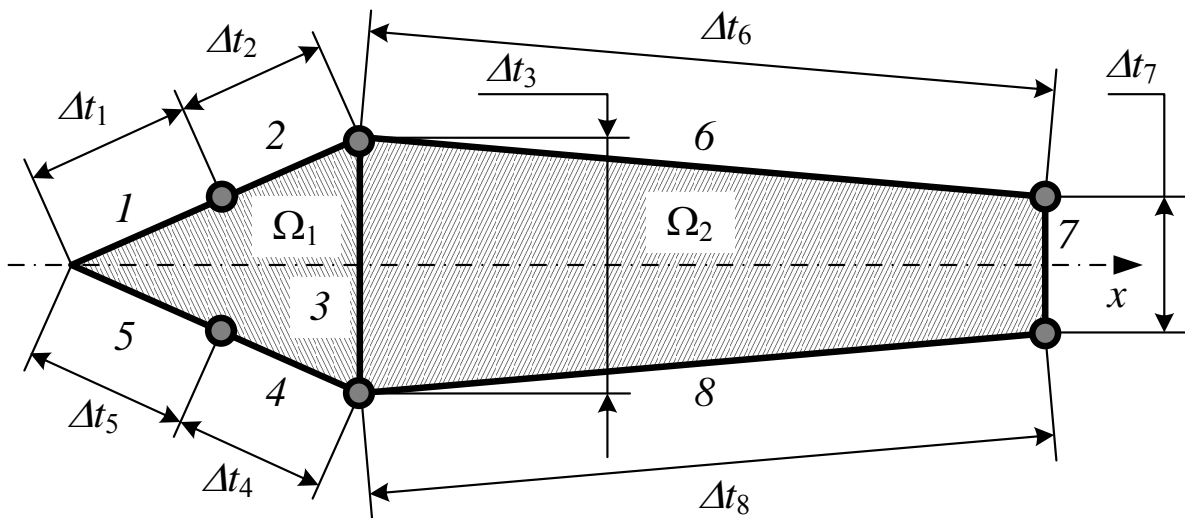


Рис. 5.1. Приклад розбиття двозамкнутого контуру на ділянки

5.2. Вибір основної системи

Використовують модифіковану процедуру методу сил, тому як основну систему вибирають відкритий контур. Необхідно ввести точкові розрізи в двох стінках на осі симетрії, вибравши таким чином початкові точки в обох контурах. Напрямки контурних координат (обходів) слід вибрати так, щоб на початкових ділянках обходу координата y була додатною, а на спільній ділянці напрямки обходів збігалися (рис. 5.2).

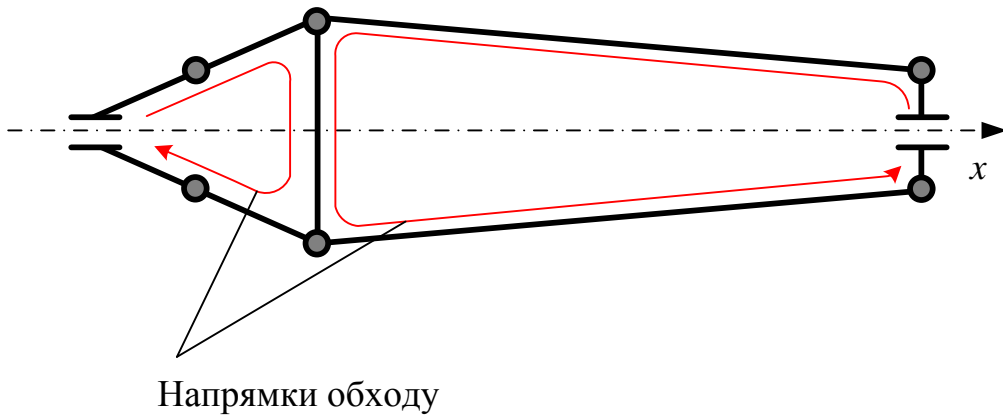


Рис. 5.2. Основна система і напрямки обходу

Зайвими невідомими є крутні моменти в контурах X_1 і X_2 (рис. 5.3).

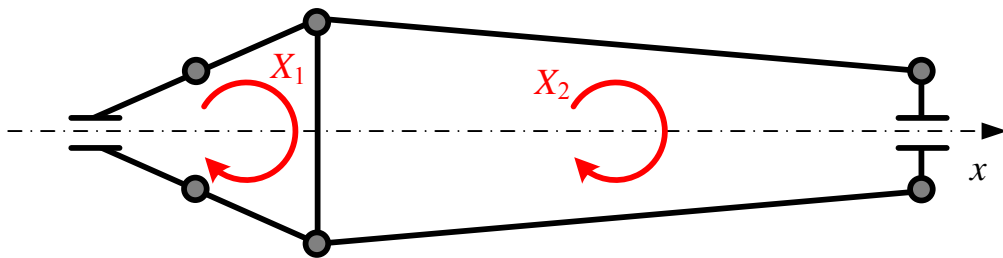


Рис. 5.3. Крутні моменти в контурах

5.3. Вантажний стан основної системи

Епюру S_{xi} обчислюють для кожної ділянки контуру (враховують тільки зосереджені поздовжні елементи). Детально ця процедура розглянута в розд. 2. Побудуємо епюру S_{xi} (рис. 5.4).

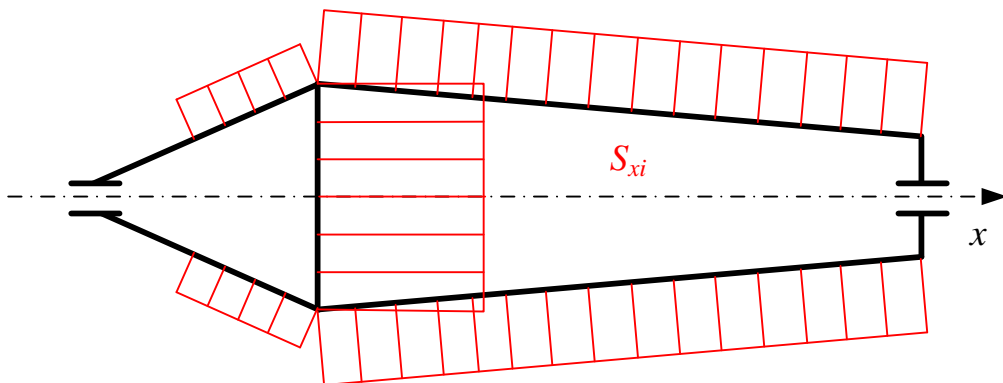


Рис. 5.4. Вигляд епюри S_{xi}

Знайдемо відповідні значення потоків дотичних сил на ділянках:

$$q_{pi} = -\frac{Q_y}{J_x} S_{xi} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.2)$$

Напрямки додатних потоків q_{pi} збігаються з напрямками обходу, напрямки від'ємних потоків протилежні напрямкам обходу (див. розд. 2).

Побудуємо епюру q_{pi} ($i = \overline{1, n}$) (рис. 5.5).

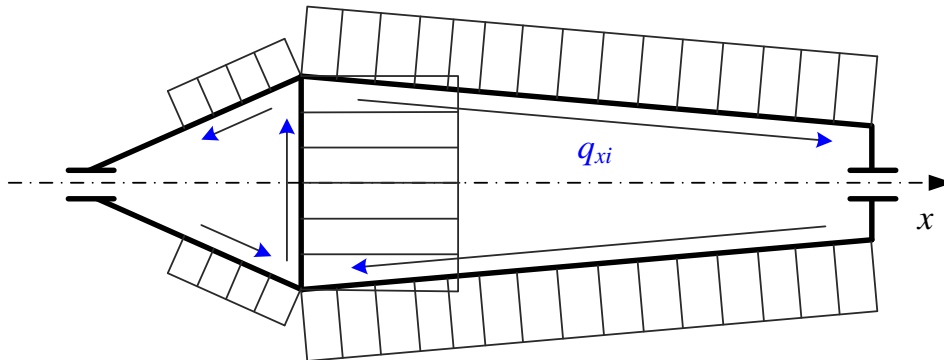


Рис. 5.5. Приклад епюри потоків q_{pi}

Перевіримо виконання першої умови статичної еквівалентності між системою дотичних напружень у перерізі і силою Q_y , що спричиняє їх:

$$\sum_{i=1}^n q_{pi} \cdot \Delta y_i = Q_y. \quad (5.3)$$

Тут Δy_i – проекція Δt_i на вісь y (рис. 5.6).

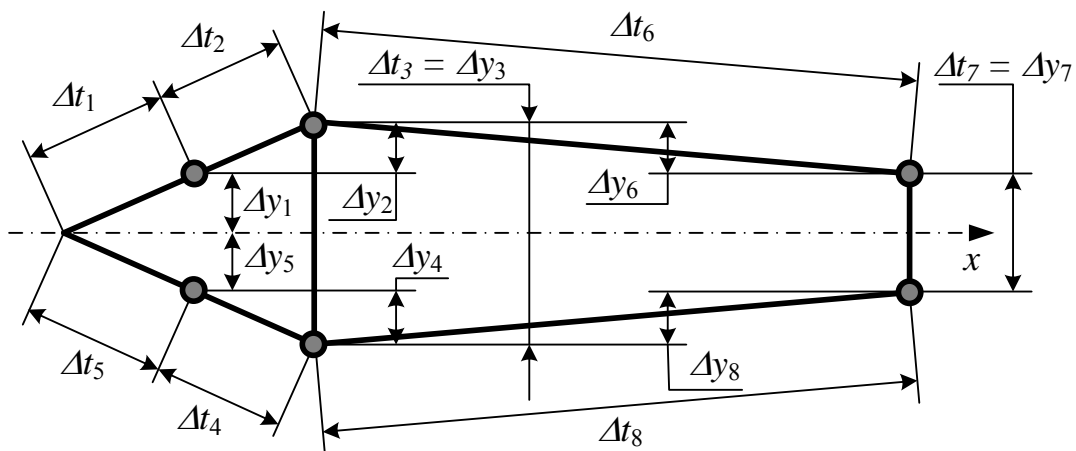


Рис. 5.6. Визначення Δy_i на ділянках контуру

5.4. Перший одиничний стан

Крутний момент $\bar{X}_1 = 1$ прикладемо в першому контурі (лівому) за годинниковою стрілкою (рис. 5.7). Визначимо величину потоку в замкнутому контурі (формула Бредта):

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{2\Omega_1}. \quad (5.4)$$

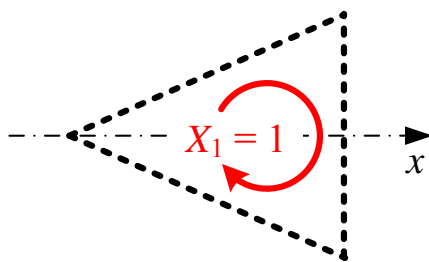


Рис. 5.7. Перший одиничний стан

Побудуємо епюру потоків \bar{q}_1 з вказівкою напрямку (рис. 5.8).

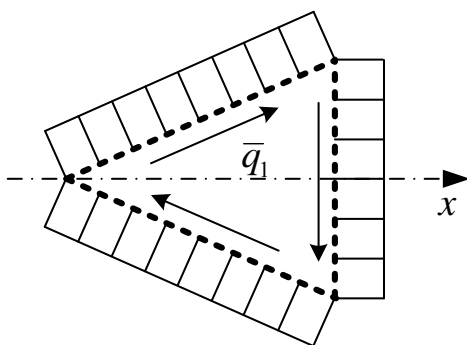


Рис. 5.8. Вигляд епюри потоків \bar{q}_1

Обчислимо два коефіцієнти системи канонічних рівнянь:

$$\delta_{11} = \bar{q}_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n_1} p_i \quad (5.5)$$

(тут n_1 – кількість ділянок першого контуру);

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^{n_1} \bar{q}_1 \cdot q_{pi} \cdot p_i \quad (5.6)$$

(при незбігу напрямків потоків \bar{q}_1 і q_{pi} їх добуток є від'ємним).

5.5. Другий одиничний стан

Крутний момент прикладаємо в другому контурі (правому) за годинниковою стрілкою (рис. 5.9).

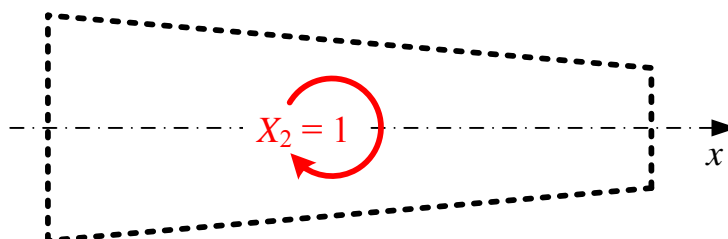


Рис. 5.9. Другий одиничний стан

Визначимо величину потоку дотичних сил

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{2\Omega_2}. \quad (5.7)$$

Побудуємо епюру потоків \bar{q}_2 із зазначенням напрямків у всіх ділянках другого контуру (рис. 5.10).

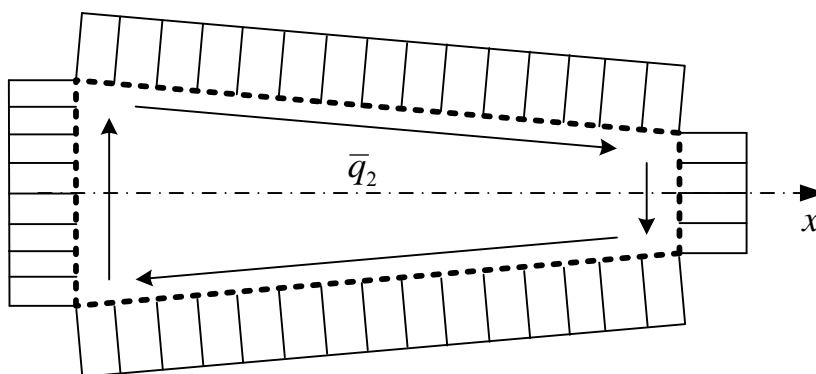


Рис. 5.10. Вигляд епюри потоків \bar{q}_2

Обчислимо коефіцієнти канонічних рівнянь:

$$\delta_{22} = \bar{q}_2^2 \cdot \sum_{i=1}^{n_2} p_i \quad (5.8)$$

(тут n_2 – кількість ділянок другого контуру);

$$\Delta_{2P} = \sum_{i=1}^{n_2} \bar{q}_2 \cdot q_{pi} \cdot p_i; \quad (5.9)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot p_i = \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot p_{ст}, \quad (5.10)$$

де $p_{ст}$ – податливість стінки середнього лонжерона (знак «–» враховує незбіг напрямків потоків на загальній стінці двох контурів).

Підсумовування результатів в рівняннях (5.8) і (5.9) поширюється на всі ділянки другого контуру. При незбігу напрямків потоків \bar{q}_2 і q_{pi} у формулі (5.9) їх добутки є від'ємними. Отримані результати зручно подати у вигляді таблиці (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Результати розрахунку вантажного і одиничних станів

$\delta_{11} =$	$\delta_{12} =$	$\Delta_{1P} =$
$\delta_{21} =$	$\delta_{22} =$	$\Delta_{2P} =$

5.6. Рівняння для отримання розв'язку

Запишемо закон спільності деформацій як рівності відносних кутів закручування обох контурів і відносного кута закручування перерізу в цілому:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = \varphi'_0; \quad (5.11)$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = \varphi'_0. \quad (5.12)$$

Для виключення з системи рівнянь невідомої величини віднімемо перше рівняння з другого:

$$(\delta_{21} - \delta_{11})X_1 + (\delta_{22} - \delta_{12})X_2 + (\Delta_{2P} - \Delta_{1P}) = 0. \quad (5.13)$$

Рівняння (5.13) є першим з двох необхідних рівнянь.

Другим є рівняння статичної еквівалентності моментів. Моментну точку вибираємо в нижньому поясі середнього лонжерона. Приймаємо правило знаків для моментів від сил: додатними вважаємо моменти, спрямовані за годинниковою стрілкою, тоді умова статичної еквівалентності моментів має вигляд

$$X_1 + X_2 + M_T(q_{pi}) = M_T(Q_y). \quad (5.14)$$

Момент від потоків відкритого профілю q_{pi} визначимо за формулою

$$M_T(q_{pi}) = \sum_{i=1}^n q_{pi} \cdot r_i \cdot \Delta t_i, \quad (5.15)$$

в якій r_i – довжина перпендикуляра, опущеного з полюса на i -ту ділянку контуру; для визначення величини r_i можна, наприклад, використати відношення

$$r_i = \frac{1}{\Delta t_i} \cdot \text{abs}[(y_T - y_1)(x_2 - x_1) - (x_T - x_1)(y_2 - y_1)], \quad (5.16)$$

де пари координат (x_T, y_T) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) визначають положення полюса і кінцевих точок ділянки. Після обчислення значень $M_T(Q_y)$ і $M_T(q_{pi})$ рівняння статички будуть мати вигляд

$$X_1 + X_2 = M_T(Q_y) - M_T(q_{pi}). \quad (5.17)$$

Розглянута система рівнянь (5.13) і (5.14) відрізняється від канонічної системи методу сил. Це обумовлено тим, що як основна система вибраний відкритий профіль, який формально є змінною системою, не може чинити опір крученню. Однак порівняння результатів розрахунків, одержаних за обома методами (канонічним і модифікованим), свідчить про те, що остаточні епюри дотичних напружень збігаються, але модифікований метод менш трудомісткий.

5.7. Обчислення зайвих невідомих

Розв'язувальні рівняння розглянутої задачі утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) другого порядку. Ця система може бути

розв'язана простим методом виключення невідомих, проте рекомендується застосувати більш формалізований прийом Крамера. В цьому випадку СЛАР наведено в такому вигляді:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 &= B_1; \\ a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 &= B_2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

де коефіцієнти a_{jk} і B_j визначають з використанням відповідних коефіцієнтів розв'язувальних рівнянь (5.13) і (5.17).

Для розв'язання СЛАР (5.18) – визначення зайвих невідомих моментів в обох контурах – можна використовувати формули Крамера

$$X_1 = \frac{D_1}{D}; \quad X_2 = \frac{D_2}{D}, \quad (5.19)$$

операндами яких є три визначники:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} B_1 & a_{12} \\ B_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & B_1 \\ a_{21} & B_2 \end{vmatrix}. \quad (5.20)$$

Для перевірки отриманого розв'язку обчислені значення X_j підставимо в обидва рівняння системи (5.18). Відносні похибки

$$d_1 = \left| \frac{B_1 - a_{11} \cdot X_1 - a_{12} \cdot X_2}{B_1} \right| 100\%, \quad (5.21)$$

$$d_2 = \left| \frac{B_2 - a_{21} \cdot X_1 - a_{22} \cdot X_2}{B_2} \right| 100\% \quad (5.22)$$

не мають перевищувати 3 %. В іншому випадку перевіримо обчислення визначників.

Слід звернути увагу на знаки отриманих величин X_1 і X_2 : знак «+» підтверджує правильність початкового припущення про напрямки моментів X_j (за годинниковою стрілкою), знак «-» відхиляє це припущення, і

в цьому випадку момент X_j слід спрямувати проти годинникової стрілки. У подальших розрахунках слід враховувати фактичні напрямки моментів і вважати їх додатними.

5.8. Відносний кут закручування перерізу

Відносний кут закручування першого контуру визначимо підстановкою одержаних значень X_j у формулі (5.11):

$$\varphi'_1 = \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P};$$

аналогічно для знаходження кута закручування другого контуру використаємо формулу (5.12):

$$\varphi'_2 = \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P}.$$

Теоретично ці значення мають бути рівними, але через похибки округлення повний збіг значень є неможливим. Похибка характеризується величиною відносної різниці

$$\delta = \left| 2 \frac{\varphi'_1 - \varphi'_2}{\varphi'_1 + \varphi'_2} \right| 100 \%, \quad (5.23)$$

яка не має перевищувати 3 %; в іншому випадку слід перевірити обчислення коефіцієнтів δ_{jk} , Δ_{jP} і моменту.

При визначенні положення центра жорсткості розглянутого перерізу методом фіктивного моменту використаємо середнє значення

$$\varphi'_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} (\varphi'_1 + \varphi'_2). \quad (5.24)$$

5.9. Сумарні потоки дотичних сил

У багатозамкнутих контурах, що мають одну або кілька загальних стінок, неможливо застосовувати загальне правило відповідності знаків і напрямків потоків дотичних сил (як це було у відкритому або однозамкнутому контурі). Тому для кожної ділянки контуру підсумовування або віднімання складових сумарного потоку проводять відповідно до їх фактичних напрямків.

Хоча процедура складання потоків не є складною, вона часто є причиною помилок, тому її виконання потребує уваги і акуратності. Рекомендується схематично зобразити всі чотири розглянуті стани в такому масштабі, щоб для кожної з ділянок можна було вказати напрямок і величину потоку дотичних сил. Цими станами є:

а) вантажний стан основної системи (потоки q_{pi} у відкритому контурі);

б) дія моменту X_1 в першому контурі

$$q_{1i} = \bar{q}_{1i} \cdot X_1; \quad (5.25)$$

в) дія моменту X_2 в другому контурі

$$q_{2i} = \bar{q}_{2i} \cdot X_2; \quad (5.26)$$

г) сумарні потоки дотичних сил

$$q_i^\Sigma = \oplus q_p \oplus \bar{q}_{1i} \oplus \bar{q}_{2i}, \quad (5.27)$$

де знак \oplus означає векторне складання потоків. На кожній ділянці контуру кожний з доданків формули (6.26) може позначати тільки один з двох можливих напрямків залежно від орієнтації ділянки: для горизонтальних ділянок – вправо або вліво, для вертикальних – вгору або вниз, для похилих – знизу зліва вгору направо або навпаки (або зверху зліва вниз направо або навпаки). Відповідно до цих напрямків можна ввести *місьцеве* правило знаків для кожної ділянки і провести підсумовування результатів за формулою (6.26) згідно з вибраним довільно місцевим правилом знаків.

Виконати перевірку. Якщо сумарні потоки знайдені вірно, то має виконуватися умова статичної еквівалентності моментів не тільки відносно першої моментної точки T (див. підрозд. 5.8), а й будь-якої іншої моментної точки T_1 (наприклад, нижнього поясу заднього лонжерона):

$$M_{T_1}(q_i^\Sigma) = M_{T_1}(Q_y). \quad (5.28)$$

Якщо ліва частина виразу (5.28) відрізняється від правої не більше, ніж на 3%, то отриманий розв'язок слід визнати правильним. Одержання такого результату після проведення всіх чотирьох перевірок підтверджує

виконання як закону рівноваги, так і закону суцільності, що є гарантією правильного розв'язання задачі.

5.10. Оцінювання міцності стінок і обшивок

Перевірку стійкості не проводять, оскільки розрахункова схема тонкостінного стрижня передбачає наявність жорстких діафрагм, що безперервно розподіляються по довжині стрижня.

Оскільки всі ділянки обшивки мають однакову товщину і зроблені з одного матеріалу, для визначення максимальних дотичних напружень в обшивці досить знайти максимальний потік $q_{max}^{обш}$ і поділити на товщину:

$$\tau_{max}^{обш} = \frac{q_{max}^{обш}}{\delta_1} . \quad (5.29)$$

Коефіцієнт запасу міцності обшивки при зсуві

$$n_{max}^{обш} = \frac{\tau_{гран}}{\tau_{max}^{обш}} , \quad (5.30)$$

де $\tau_{гран}$ – границя текучості при зсуві матеріалу Д16Т (близько 180 МПа).

Для оцінювання міцності стінок лонжеронів слід обчислити величину дотичного напруження в кожній з них за формулою

$$\tau_i^{ст} = \frac{q_i^{ст}}{\delta_i^{ст}} , \quad (5.31)$$

де i – номер стінки, а потім із одержаних значень слід вибрати найбільше за абсолютною величиною і визначити запас міцності при зсуві матеріалу стінок

$$n_{ст} = \frac{\tau_{гран}^{ст}}{\tau_{max}^{ст}} , \quad (5.32)$$

де $\tau_{гран}^{ст}$ – границя текучості при зсуві матеріалу стінок сталі 30ХГСНА (прийняти 700 МПа).

5.11. Визначення центра жорсткості (метод фіктивного моменту)

Метод фіктивного моменту базується на використанні двох підходів до визначення крутного моменту:

– геометричного підходу

$$M_{\text{кр}} = Q_y \cdot a_{\text{ц.ж}}, \quad (5.33)$$

де $a_{\text{ц.ж}}$ – відстань від центра жорсткості до лінії дії сили Q_y ;

– фізичного підходу

$$M_{\text{кр}} = \varphi' \cdot GJ_{\text{кр}}, \quad (5.34)$$

де $GJ_{\text{кр}}$ – крутильна жорсткість перерізу; φ' – дійсне значення відносного кута закручування перерізу залежно від заданого навантаження.

Метод фіктивного моменту застосовують в тих випадках, коли з попередніх розрахунків вже відома величина φ' . Однак в разі багатозамкнутих контурів (на відміну від однозамкнутого) не існує простої формули крутильної жорсткості, і цю величину доводиться визначати за допомогою методу фіктивного моменту.

Відповідно до цього методу до розглянутого перерізу подумки прикладають безрозмірний крутний момент $M_{\phi} = 1$, спрямований, наприклад, за годинниковою стрілкою, і знаходять відносний кут закручування, спричинений цим моментом.

При цьому розв'язувальна система рівнянь походить із системи (5.13), (5.17) з урахуванням таких особливостей кручення без згинання:

– потоки $q_{pi} \equiv 0$;

– момент $M_T(q_{pi}) \equiv 0$;

– коефіцієнти $\Delta_{jP} \equiv 0$;

– замість моменту, що залежить від сили Q_y , за умови статичної еквівалентності моментів враховують фіктивний момент $M_{\phi} = 1$.

Крім того, слід враховувати, що одиничні стани $\bar{X}'_{1\phi} = 1$ і $\bar{X}'_{2\phi} = 1$ нічим не відрізняються від розглянутих раніше в підрозд. 5.4 і 5.5. Отже, коефіцієнти δ_{jk} вже відомі. Вони обчислені раніше за формулами (5.5), (5.8) і (5.10); розмірність цих коефіцієнтів – $\text{м}^2/\text{Н}$.

Таким чином, система рівнянь для пошуку розв'язку набуває вигляду

$$\begin{cases} (\delta_{21} - \delta_{11})X'_{1\phi} + (\delta_{22} - \delta_{12})X'_{2\phi} = 0, \\ X'_{1\phi} + X'_{2\phi} = 1. \end{cases} \quad (5.35)$$

Розв'язок системи (5.35) приводить до безрозмірних моментів в контурах $X'_{1\phi}$ і $X'_{2\phi}$. Якщо $X'_{j\phi} > 0$, то момент спрямовано за годинниковою стрілкою.

Відносний кут закручування, спричинений дією фіктивного моменту, визначають за формулою

$$\varphi'_{\text{сер.}\phi} = \frac{1}{2}(\varphi'_{1\phi} + \varphi'_{2\phi}), \quad (5.36)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi'_{1\phi} &= \delta_{11}X'_{1\phi} + \delta_{12}X'_{2\phi}; \\ \varphi'_{2\phi} &= \delta_{21}X'_{1\phi} + \delta_{22}X'_{2\phi}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Слід переконатися, що різниця між цими двома значеннями не перевищує 3 %; інакше величини $X'_{j\phi}$ визначені неправильно. Розмірність φ'_{ϕ} – $(\text{Н}\cdot\text{м}^2)^{-1}$.

Проведений розрахунок профілю залежно від дії фіктивного моменту дозволяє визначити крутильну жорсткість перерізу

$$GJ_{\text{кр}} = \frac{M_{\phi}}{\varphi'_{\text{сер.}\phi}} = (\varphi'_{\text{сер.}\phi})^{-1}. \quad (5.38)$$

Далі проводять виділення крутного моменту із заданого навантаження (розкладання системи внутрішніх силових факторів на згинання і кручення):

$$M_{\text{кр}} = GJ_{\text{кр}} \cdot \varphi'_{\text{сер}}, \quad (5.39)$$

причому відносний кут закручування був обчислений раніше в підрозд. 5.8 за формулою (5.23). Момент $M_{\text{кр}}$ спрямований так само, як і кут $\varphi'_{\text{сер}}$. Будемо вважати $M_{\text{кр}}$ додатним, якщо він спрямований за годинниковою стрілкою, і від'ємним в іншому випадку.

Використовуючи геометричне визначення крутного моменту $M_{\text{кр}}$, знаходимо відстань від лінії дії заданої сили Q_y до центра жорсткості:

$$a_1 = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y}. \quad (5.40)$$

Додатне значення a_1 відкладають вправо від лінії дії сили Q_y . Для прив'язки положення центра жорсткості до геометрії перерізу визначають відстань від носика перерізу до центра жорсткості:

$$x'_{\text{ц.ж}} = c + a_1. \quad (5.41)$$

При додаванні слід враховувати знак a_1 .

5.12. Визначення центра жорсткості (метод фіктивної сили)

Метод фіктивної сили засновано на тому, що дія поперечної сили не спричиняє крутіння ($\varphi' = 0$), якщо лінія дії цієї сили проходить через центр жорсткості. Відповідно до цієї властивості центр жорсткості визначається як точка, через яку проходить рівнодіюча потоків дотичних сил (згинання без кручення).

У симетричних перерізах центр жорсткості лежить на осі симетрії, отже, в даному випадку – на осі Ox . Залишається визначити точку на осі Ox . Для цього потрібно дослідити дію сили Q_y . Щоб визначити місце розташування сили Q_y , слід обчислити момент відповідних потоків дотичних сил відносно довільної моментної точки і розділити цей момент на величину рівнодіючої сили Q_y .

При використанні методу фіктивної сили до розглянутого перерізу подумки прикладають фіктивну силу, причому вважають, що лінія її дії проходить через центр жорсткості.

Рекомендують як фіктивну силу використати діючу силу, подумки змістивши її до центра жорсткості. Далі слід розглянути три стани основної системи.

У вантажному стані виникають потоки q_{pi} , які збігаються зі знайденими раніше (див. підрозд. 5.3). Зайві невідомі – контурні моменти, які можна позначити в даному випадку $X''_{1\phi}$ і $X''_{2\phi}$ – спочатку вважають спрямованими за годинниковою стрілкою. Перший і другий одиничні стани, а також коефіцієнти δ_{jk} і Δ_{jP} не відрізняються від знайдених в підрозд. 5.4, 5.5.

Складають систему рівнянь для визначення зайвих невідомих $X''_{1\phi}$ і $X''_{2\phi}$. У даному випадку, коли $\varphi' = 0$, досить двох рівнянь сумісності деформацій (без умови статички):

$$\begin{aligned} \delta_{11}X''_{1\phi} + \delta_{12}X''_{2\phi} + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X''_{1\phi} + \delta_{22}X''_{2\phi} + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Зайві невідомі $X''_{1\phi}$ і $X''_{2\phi}$ визначаються розв'язком системи (5.42). У разі використання формул Крамера вільні члени слід перенести в праву частину з протилежними знаками. За знаками отриманих величин моментів слід уточнити їх напрямки: якщо $X''_j > 0$, то він спрямований за годинниковою стрілкою. Для обчислення моменту, залежного від потоку дотичних сил, моментну точку рекомендується вибрати нижній пояс середнього лонжерона, як і в підрозд. 5.8. Тоді можна скористатися вже знайденим моментом $M_T(q_{pi})$. Якщо момент спрямовано за годинниковою стрілкою, приписуємо йому знак «+».

Сумарний момент, залежний від потоків дотичних сил:

$$M_T(q) = X''_{1\phi} + X''_{2\phi} + M(q_{pi}). \quad (5.43)$$

Якщо отримана величина $M_T(q)$ є додатною, то момент спрямовано за годинниковою стрілкою.

Відстань від моментної точки до лінії дії фіктивної сили Q_y , що проходить через центр жорсткості, визначається виразом

$$a_2 = \frac{M_{кр}(q)}{Q_y}. \quad (5.44)$$

При додатних $M_T(q)$ і Q_y центр жорсткості розташовано зліва від моментної точки.

Відстань від носика перерізу до центра жорсткості визначається формулою

$$x''_{ц.ж} = a + a_2, \quad (5.45)$$

де a – відстань від носика перерізу до стінки середнього лонжерона.

Знайдене положення центра жорсткості має збігатися (з точністю до похибки округлення) з положенням центра жорсткості, знайденим в підрозд. 5.11 ($x'_{ц.ж}$). Для перевірки обчислень визначають відносну похибку

$$\frac{|x''_{ц.ж} - x'_{ц.ж}|}{a + b} 100 \%. \quad (5.46)$$

Якщо ця величина не перевищує 3 %, то положення центра жорсткості знайдено правильно (з точністю до 3 % хорди перерізу).

Наявність двозамкнутого контуру в поперечному перерізі характерна для крил і оперення літаків. Положення центра жорсткості є необхідним для поділу напруженого стану цих агрегатів на згинання і кручення при аналізі коливань і аеропружності.

Приклади розрахунку двозамкнутого контуру наведено в дод. 9.

**ВАРІАНТИ ВИХІДНИХ ДАНИХ ДО ЗАДАЧІ
«ДОСЛІДЖЕННЯ НОРМАЛЬНИХ ЗГИНАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ
В ДИСКРЕТНОМУ НЕОДНОРІДНОМУ ПЕРЕРІЗІ КРИЛА»**

Таблиця Д.1.1

Параметр	Числове значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	11	13	9	- 8	- 12	- 10
f_i , см ²	11	21	7	6	20	10
E_i , ГПа	200	70	200	70	200	70
σ_{Ti} , МПа	1100	350	1100	350	1100	350
$M_x = - 800\ 000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.2

Параметр	Числове значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	12	14	10	- 8	- 12	- 10
f_i , см ²	12	22	8	6	20	10
E_i , ГПа	70	200	70	200	70	200
σ_{Ti} , МПа	350	1100	350	1100	350	1100
$M_x = - 450\ 000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.3

Параметр	Числове значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	13	15	11	- 8	- 12	- 10
f_i , см ²	15	23	9	16	20	10
E_i , ГПа	200	70	200	200	70	200
σ_{Ti} , МПа	1100	350	1100	1100	350	1100
$M_x = - 600\ 000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.4

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	14	16	12	- 8	- 12	- 10
f_i , см ²	14	24	10	6	20	10
E_i , ГПа	200	70	200	200	70	200
σ_{Ti} , МПа	1100	350	1100	1100	350	1100
$M_x = - 550\,000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.5

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	15	17	13	- 8	- 12	- 10
f_i , см ²	15	35	11	16	20	10
E_i , ГПа	200	70	200	70	200	70
σ_{Ti} , МПа	1100	350	1100	350	1100	350
$M_x = - 650\,000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.6

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	16	18	14	- 8	- 12	- 10
f_i , см ²	16	26	12	16	20	20
E_i , ГПа	200	70	200	200	70	200
σ_{Ti} , МПа	1100	350	1100	1100	350	1100
$M_x = - 1\,450\,000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.7

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	17	19	15	- 9	- 13	- 11
f_i , см ²	16	36	6	16	30	10
E_i , ГПа	200	70	200	200	70	200
σ_{Ti} , МПа	1100	350	1100	1100	350	1100
$M_x = - 1\,500\,000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.8

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	18	20	15	- 10	- 14	- 12
f_i , см ²	15	25	11	10	20	10
E_i , ГПа	200	70	200	200	70	70
σ_{Ti} , МПа	1100	350	1100	1100	350	350
$M_x = - 1\,600\,000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.9

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	18	20	16	- 11	- 15	- 13
f_i , см ²	14	25	12	9	15	11
E_i , ГПа	100	200	100	200	100	200
σ_{Ti} , МПа	750	1100	750	1100	750	1100
$M_x = - 1\,700\,000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)						

Таблиця Д.1.10

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	6	10	5	- 4	- 10	- 5
f_i , см ²	16	20	14	10	20	10
E_i , ГПа	200	100	100	200	100	100
σ_{Ti} , МПа	1100	750	750	1100	750	750
$M_x = - 360\ 000\ \text{Нм}; (M_y = N_z = 0)$						

Таблиця Д.1.11

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	100	200	200	100	0
y_i^0 , см	10	15	12	- 8	- 12	- 8
f_i , см ²	16	18	20	22	24	26
E_i , ГПа	70	200	70	200	70	200
σ_{Ti} , МПа	350	1100	350	1100	350	1100
$M_x = - 650\ 000\ \text{Нм}; (M_y = N_z = 0)$						

Таблиця Д.1.12

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. 1.1					
	1	2	3	4	5	6
x_i^0 , см	0	50	100	100	50	0
y_i^0 , см	20	22	20	- 10	- 15	- 10
f_i , см ²	20	30	10	30	20	10
E_i , ГПа	200	70	200	200	70	200
σ_{Ti} , МПа	1100	350	1100	1100	350	1100
$M_x = - 1\ 600\ 000\ \text{Нм}; (M_y = N_z = 0)$						

Таблиця Д.1.13

Параметр	Числові значення параметра за номером зосередженого елемента на рис. Д.1.1							
	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i^0 , см	0	35	70	100	100	70	35	0
y_i^0 , см	10	15	20	8	- 10	- 20	- 15	- 8
f_i , см ²	4	6	8	10	11	9	7	5
E_i , ГПа	200	70	70	200	100	70	70	100
σ_{Ti} , МПа	1100	350	350	1100	750	350	350	750
$M_x = - 1\,500\,000$ Нм; ($M_y = N_z = 0$)								

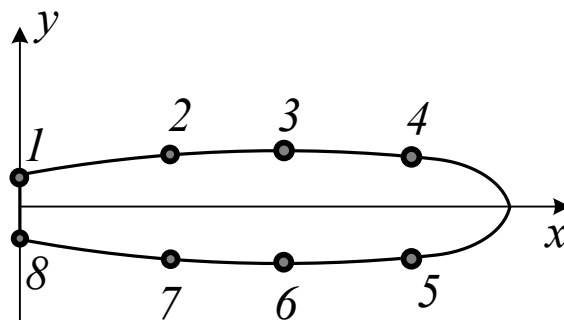


Рис. Д.1.1. Схема перерізу крила

Таблиця Д.1.14

Значення фіктивного модуля
пружності

Варіант	E_ϕ , ГПа
1	200
2	100
3	50
4	160
5	80
6	64
7	128

ВАРІАНТИ ВИХІДНИХ ДАНИХ ДО ЗАДАЧІ «ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ У ВІДКРИТОМУ ПРОФІЛІ»

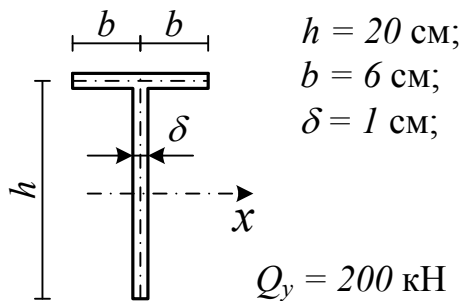


Рис. Д.2.1

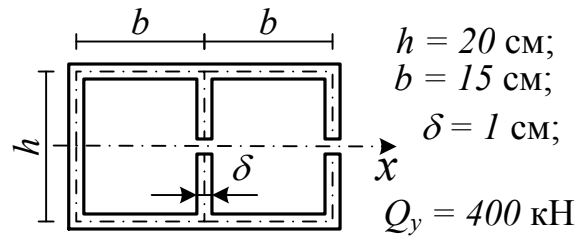


Рис. Д.2.2

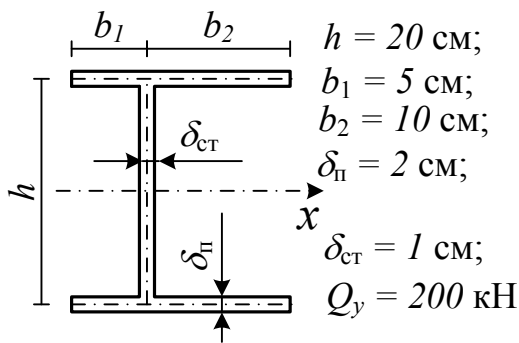


Рис. Д.2.3

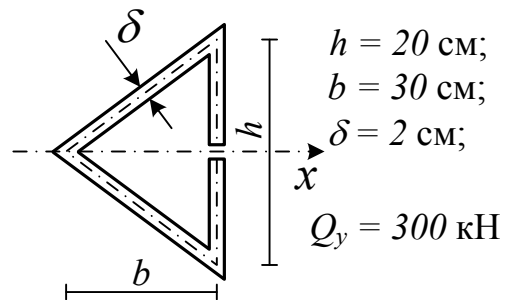


Рис. Д.2.4

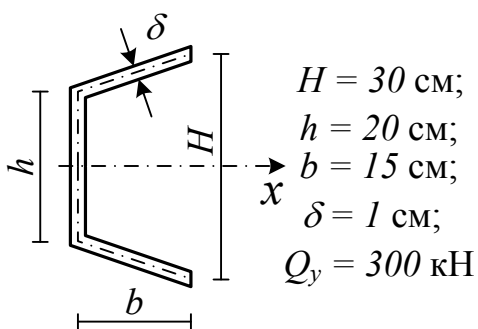


Рис. Д.2.5

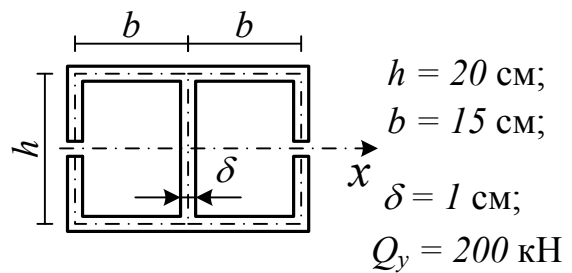


Рис. Д.2.6

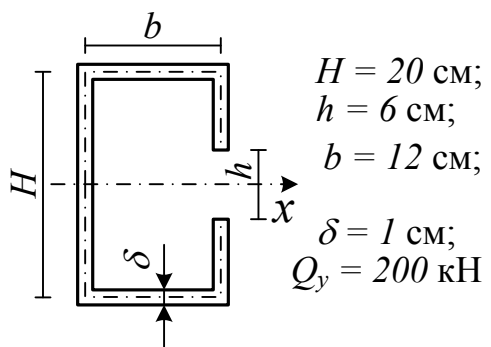


Рис. Д.2.7

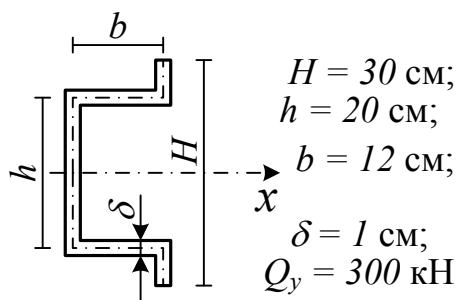


Рис. Д.2.8

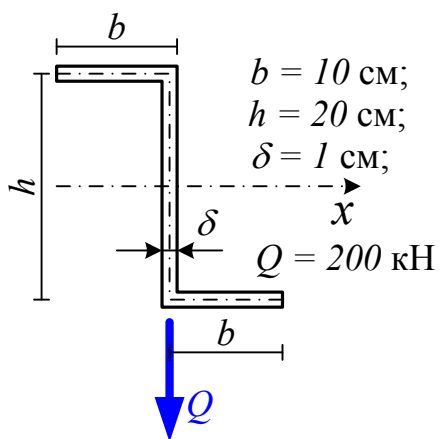


Рис. Д.2.9

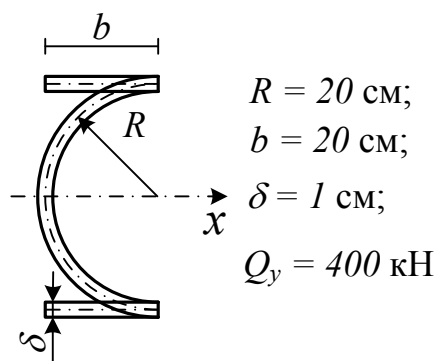


Рис. Д.2.10

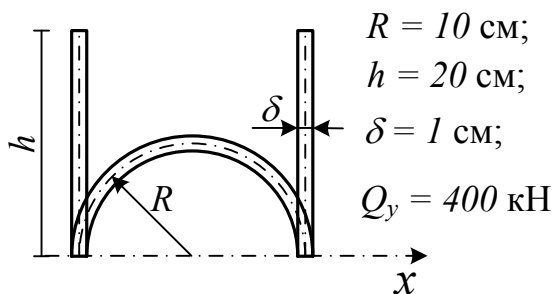


Рис. Д.2.11

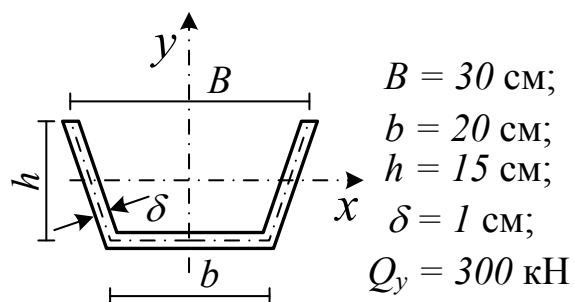


Рис. Д.2.12

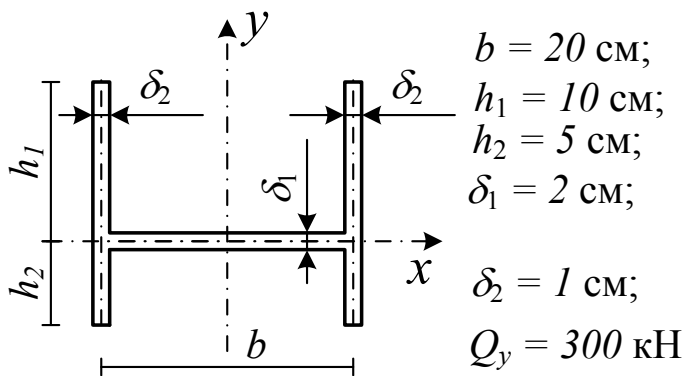


Рис. Д.2.13

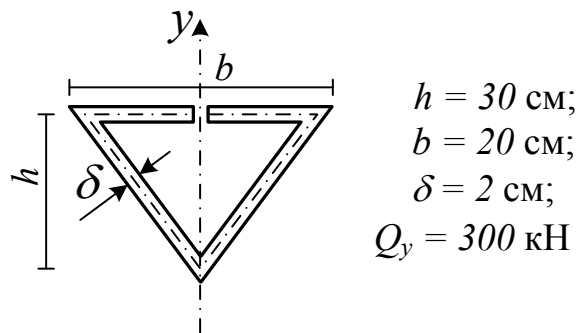


Рис. Д.2.14

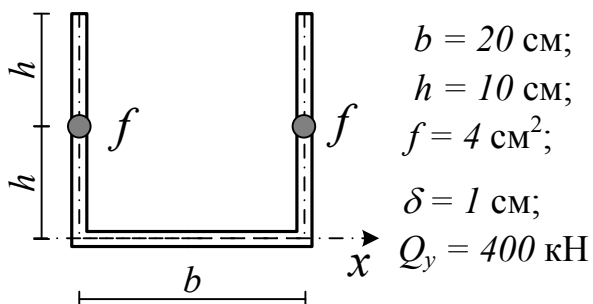


Рис. Д.2.15

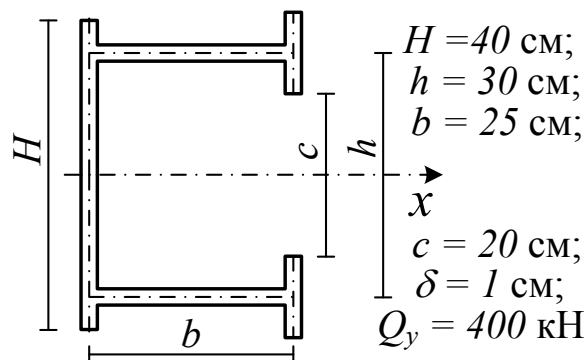


Рис. Д.2.16

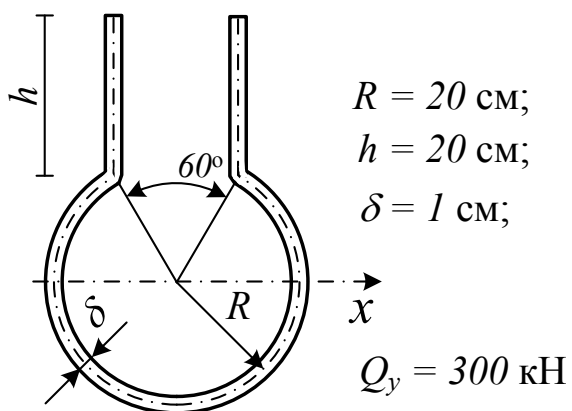


Рис. Д.2.17

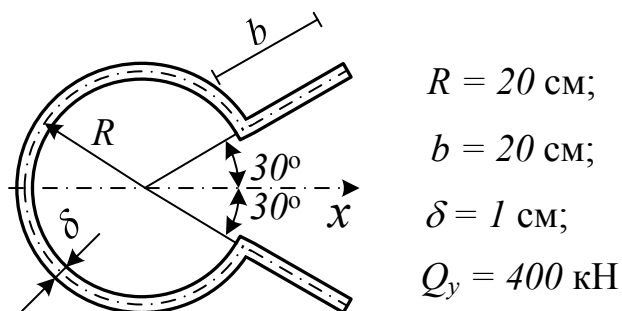


Рис. Д.2.18

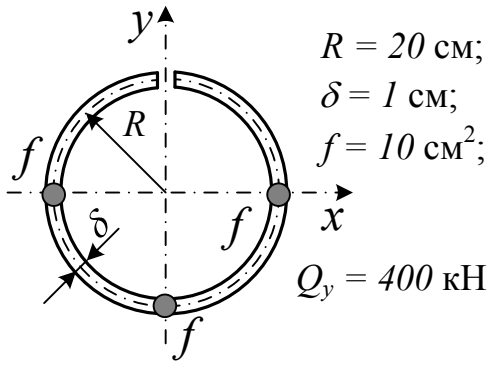


Рис. Д.2.19

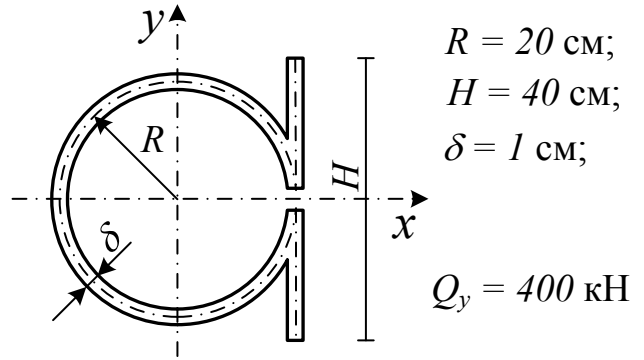


Рис. Д.2.20

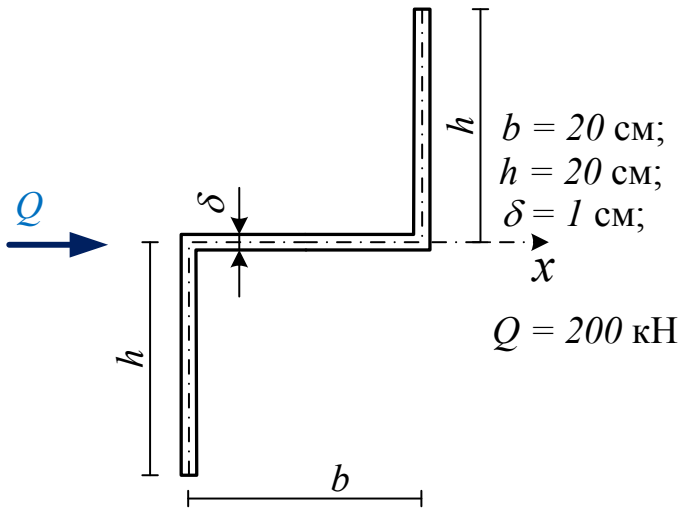


Рис. Д.2.21

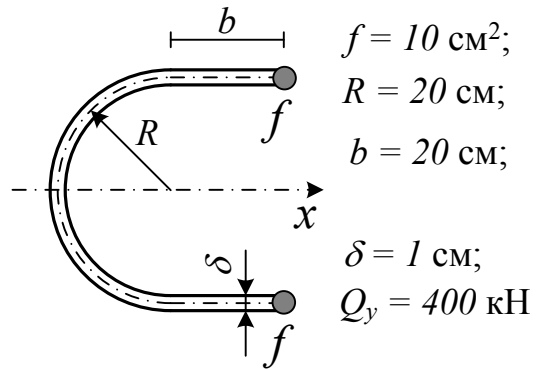


Рис. Д.2.22

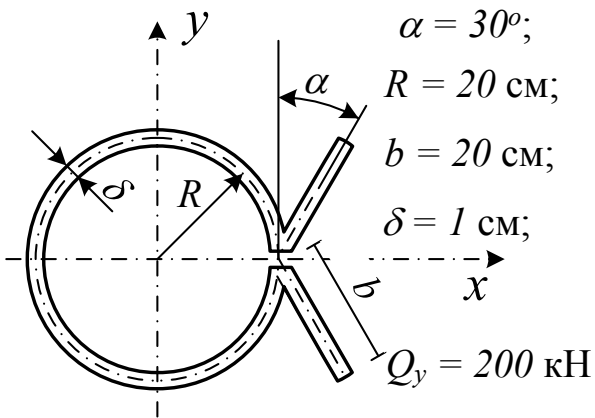


Рис. Д.2.23

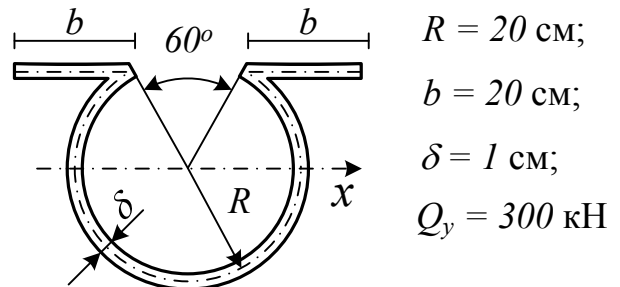


Рис. Д.2.24

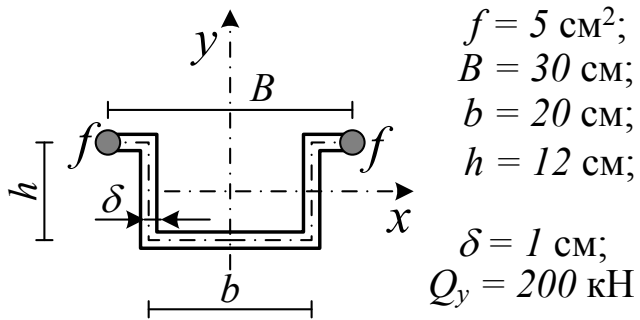


Рис. Д.2.25

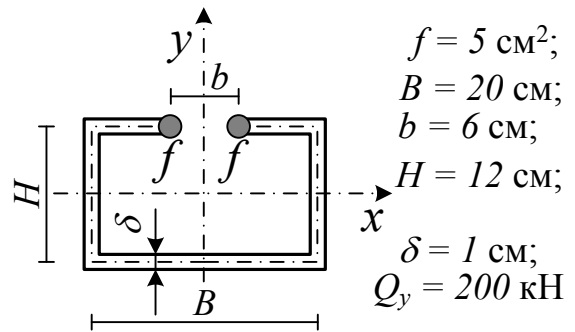


Рис. Д.2.26

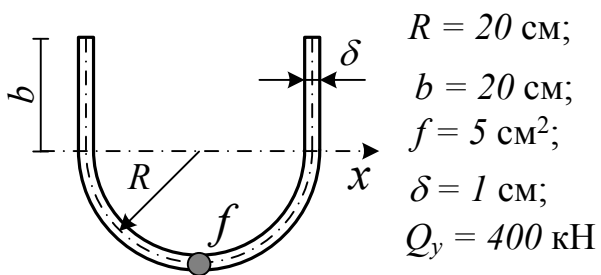


Рис. Д.2.27

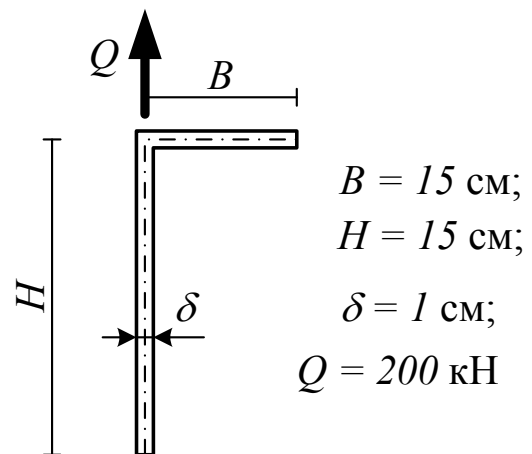


Рис. Д.2.28

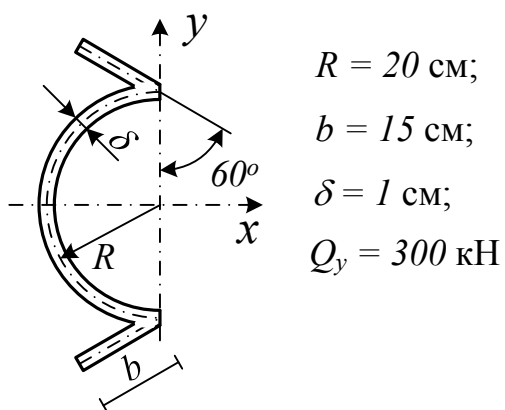


Рис. Д.2.29

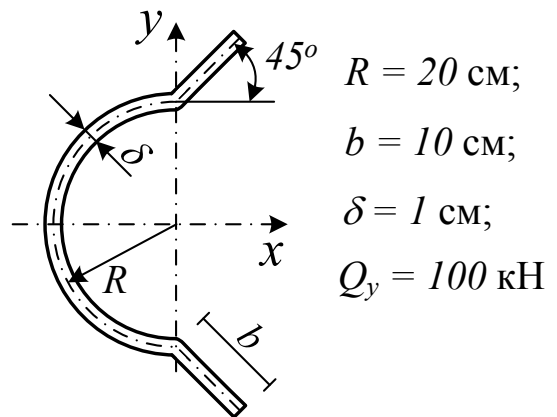


Рис. Д.2.30

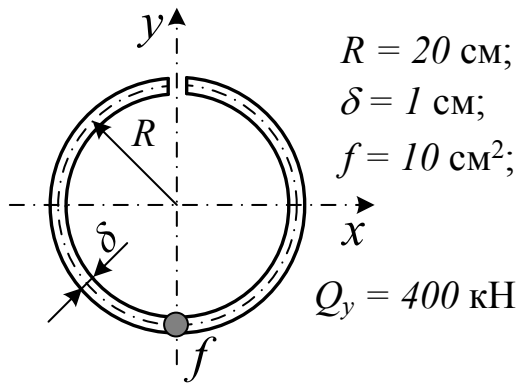


Рис. Д.2.31

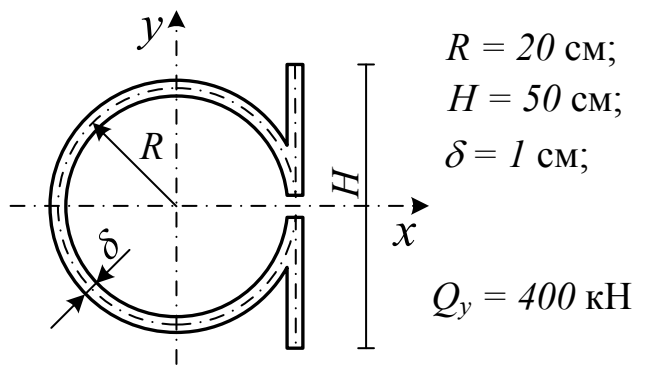


Рис. Д.2.32

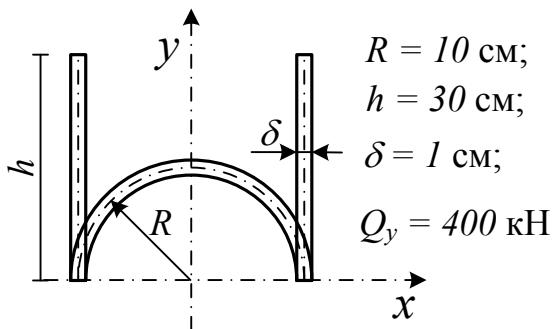


Рис. Д.2.33

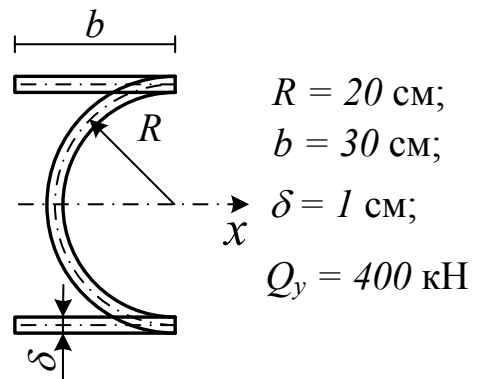


Рис. Д.2.34

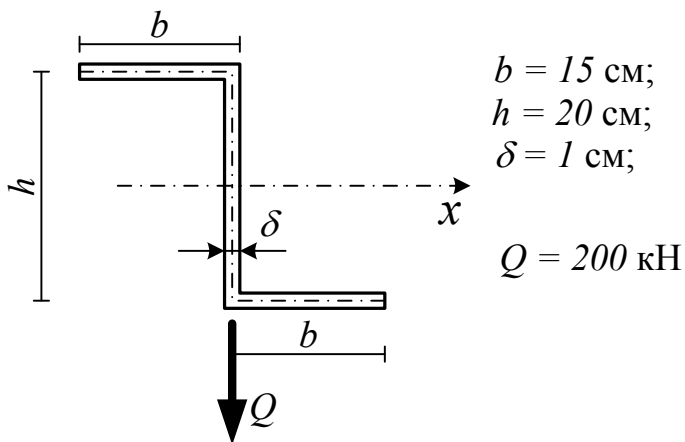


Рис. Д.2.35

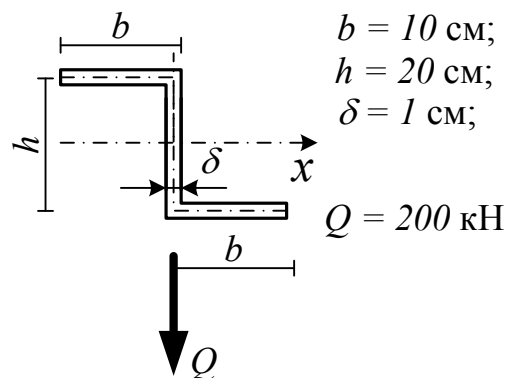


Рис. Д.2.36

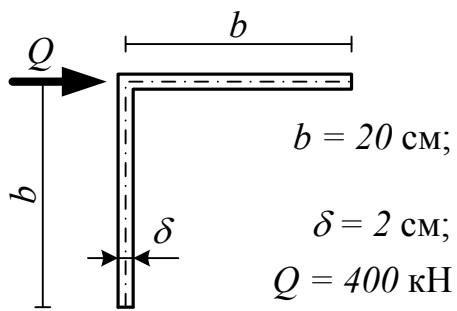


Рис. Д.2.37

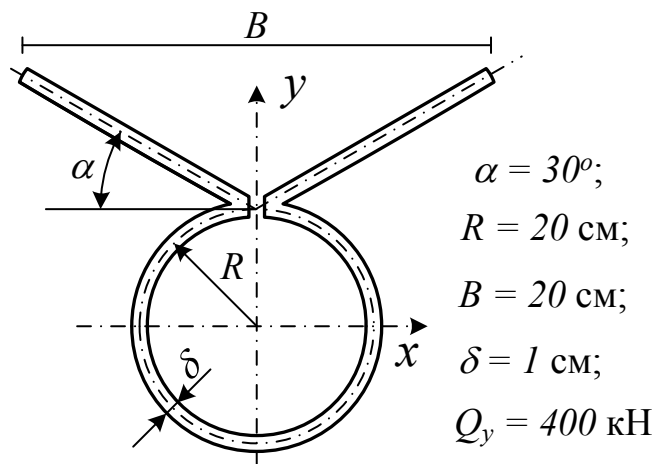


Рис. Д.2.38

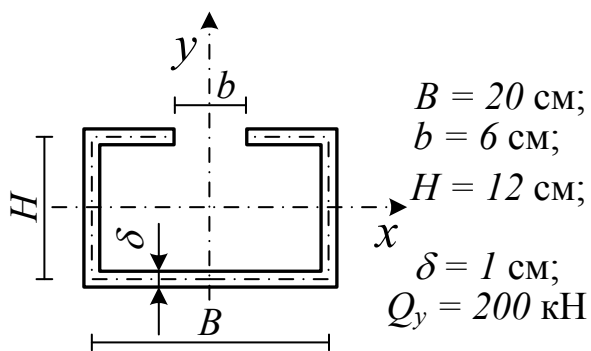


Рис. Д.2.39

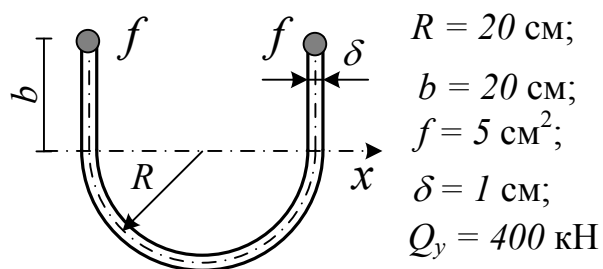


Рис. Д.2.40

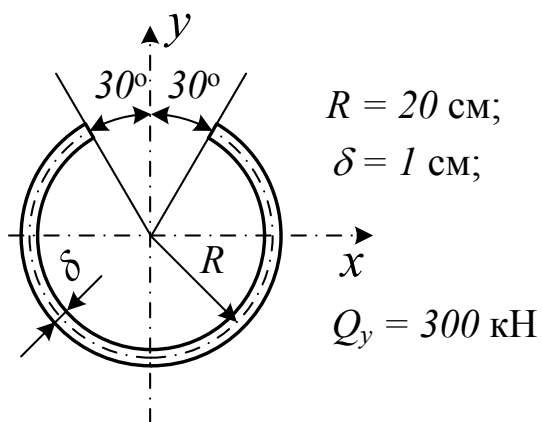


Рис. Д.2.41

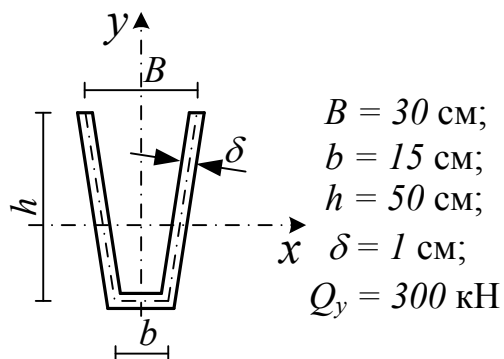


Рис. Д.2.42

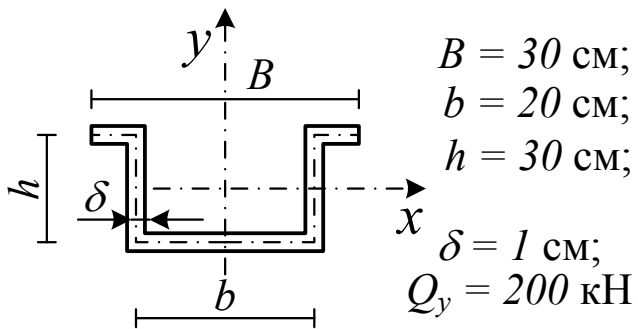


Рис. Д.2.43

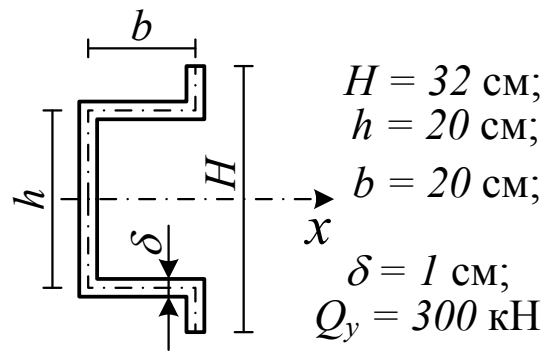


Рис. Д.2.44

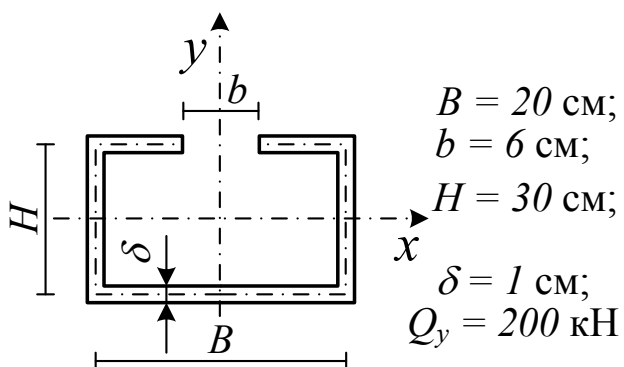


Рис. Д.2.45

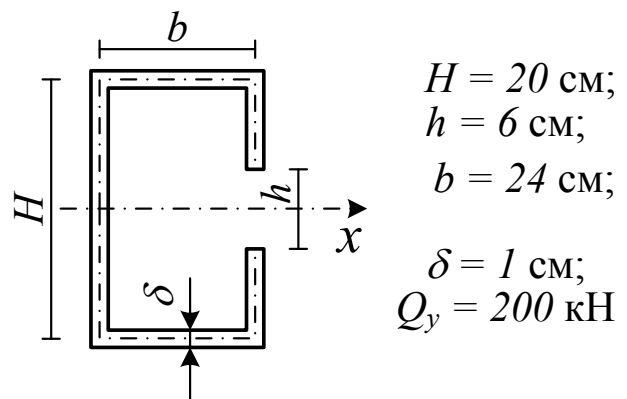


Рис. Д.2.46

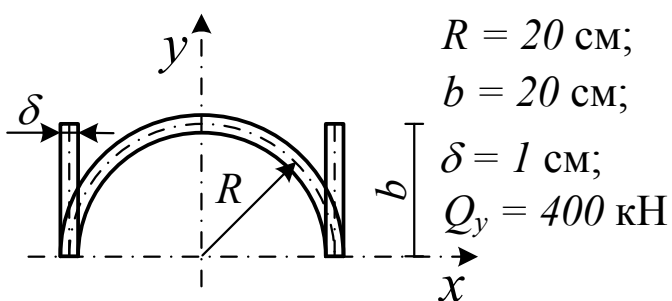


Рис. Д.2.47

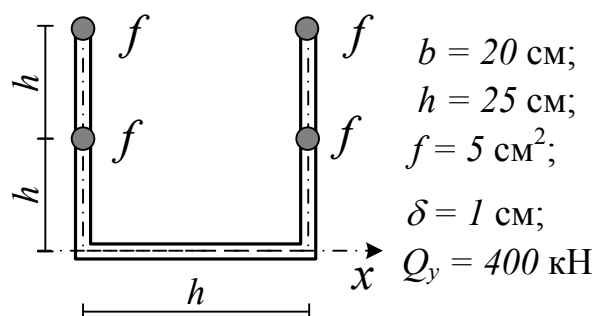


Рис. Д.2.48

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ТЕМОЮ «ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ У ВІДКРИТОМУ ПРОФІЛІ»

Задача № 1

Розглянути відкритий простий профіль без розгалужень (рис. Д.3.1.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль є симетричним відносно осі x .

Дано: $\delta = 1$ см; $a_1 = 6$ см;
 $a_2 = 10$ см; $a_3 = 8$ см; $R = 16$ см;
 $\alpha = 30^\circ$.

Товщина стінок δ постійна на всьому контурі перерізу. Прикладена вгору сила $Q_y = 200$ кН. У кінцевих точках A і H розташовані зосереджені площі $f = 4$ см².

Знайти розподіл дотичних напружень на контурній лінії перерізу.

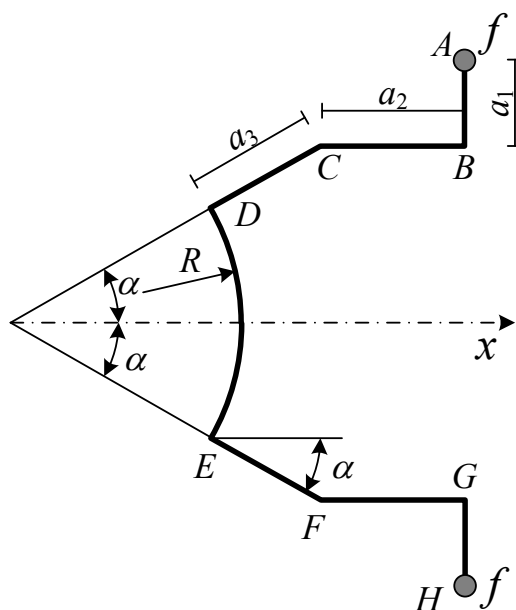


Рис. Д.3.1.1. Простий відкритий профіль

Розв'язання

Головні осі. Вісь x є віссю симетрії, отже, однією з двох взаємно перпендикулярних головних осей. Положення другої головної осі Oy в цій задачі визначати не потрібно. Координати y_i будь-якої точки на контурній лінії можна обчислити за заданими геометричними параметрами.

Момент інерції перерізу J_x . Загальна компактна формула для визначення J_x в тонкостінному профілі має вигляд (інтеграл Стілтєса)

$$J_x = \int_{\ell} y^2 dF \quad (\text{Д.3.1.1})$$

або в розгорнутому вигляді

$$J_x = \sum_{i=1}^{n_y} \int_{\ell_i} (y(t))^2 \delta \cdot dt + \sum_{j=1}^{n_c} y_j^2 \cdot f_j, \quad (\text{Д.3.1.2})$$

де n_y – кількість ділянок, на які розбивають контурну лінію; ділянкою називають частину контуру, в межах якої функція $y \cdot \delta = f(t)$ описується однією формулою; в даному випадку $n_y = 7$; n_c – кількість зосереджених елементів в перерізі (в даному випадку $n_c = 2$).

Подальші обчислення реалізують формулу (Д.3.1.2).

1. Зосереджений елемент в точці A дає момент інерції

$$y_A = a_1 + a_3 \cdot \sin \alpha + R \cdot \sin \alpha = 6 + 8 \cdot 0,5 + 16 \cdot 0,5 = 18 \text{ см.}$$

Звідси $\Delta J_f = 4 \cdot 18^2 = 1296 \text{ см}^4$. Такий же внесок в момент інерції перерізу робить елемент в точці H .

2. Ділянка AB являє собою вертикально витягнутий прямокутник. Момент інерції ділянки AB відносно власної центральної осі, паралельної Ox :

$$J_{AB}^0 = \frac{\delta \cdot a_1^3}{12} = \frac{1 \cdot 6^3}{12} = 18 \text{ см}^4.$$

Координата центра ділянки AB (див. рис. Д.3.1.1)

$$y_{AB} = y_A - \frac{a_1}{2} = 18 - 3 = 15 \text{ см.}$$

Площа ділянки $F_{AB} = \delta \cdot a_1 = 1 \cdot 6 = 6 \text{ см}^2$. Момент інерції ділянки AB відносно осі Ox :

$$\Delta J_{AB} = J_{AB}^0 + y_{AB}^2 \cdot F_{AB} = 18 + 15^2 \cdot 6 = 1368 \text{ см}^4.$$

Такий же внесок в момент перерізу робить і ділянка GH .

3. Ділянка BC є горизонтально витягнутим прямокутником. Власний момент інерції ділянки BC відносно горизонтальної осі, що проходить через центр ділянки, до уваги береться, що $J_{BC}^0 = 0$. Залишається тільки переносний момент. Координата центра ділянки BC $y_{BC} = y_A - a_1 = 18 - 6 = 12 \text{ см}$.

Отже, $\Delta J_{BC} = y_{BC}^2 \cdot F_{BC} = 12^2 \cdot 10 \cdot 1 = 1440 \text{ см}^4$. Такий же внесок в момент інерції перерізу робить і ділянка FG .

4. Ділянка CD є горизонтально витягнутим прямокутником, вісь якого нахилена під кутом α до осі Ox . Момент інерції ділянки CD відносно власної головної осі, перпендикулярної контуру: $J_{\eta}^0 = \frac{\delta \cdot a_3^3}{12} = \frac{1 \cdot 8^3}{12} \cong 42,67 \text{ см}^4$.

Власний момент інерції ділянки CD відносно горизонтальної осі визначаємо за формулою повороту осей: $J_{CD}^0 = J_{\eta}^0 \cdot \sin^2 \alpha \cong 10,67 \text{ см}^4$.

Координата центра ділянки

$$y_{CD} = y_{BC} - \frac{a_3}{2} \cdot \sin \alpha = 12 - \frac{8}{2} \cdot 0,5 = 10 \text{ см.}$$

Отже, момент інерції ділянки CD відносно осі Ox

$$\Delta J_{CD} = J_{CD}^0 + y_{CD}^2 \cdot F_{CD} = 10,67 + 10^2 \cdot 8 = 810,67 \text{ см}^4.$$

Такий же внесок в момент інерції перерізу робить і ділянка EF .

5. Ділянка DE являє собою кільцевий сектор, вісь симетрії якого збігається з головною віссю перерізу. Використовуємо формулу (3.1.2) для визначення криволінійних стінок:

$$J_{DE} = \int_l y^2 \cdot \delta \cdot dt.$$

Оскільки контур ділянки є дугою кола, замість дугової координати t вводимо кутову координату ψ , причому $-\alpha < \psi < \alpha$, тобто відлічуємо від осі Ox вгору (проти годинникової стрілки). В результаті отримуємо вирази $y = R \cdot \sin \psi$; $dt = R \cdot d\psi$, які підставляємо в підінтегральний вираз:

$$\begin{aligned} \Delta J_{DE} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cdot \sin^2 \psi \cdot \delta \cdot R \cdot d\psi = R^3 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \psi \cdot d\psi = R^3 \cdot \delta \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \\ &= 16^3 \cdot 1 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cong 371 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

6. Повний момент інерції перерізу визначаємо підсумовуванням вкладів ділянок:

$$\begin{aligned} J_x &= \Delta J_{DE} + 2(\Delta J_f + \Delta J_{AB} + \Delta J_{BC} + \Delta J_{CD}) = \\ &= 371 + 2(1296 + 1368 + 1440 + 810,67) \cong 10200 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Еюра поточних статичних моментів. Формула поточного статичного моменту в контурній точці з координатою t має вигляд

$$S_x(t) = \int_0^t y(\xi) \cdot dF(\xi). \quad (\text{Д.3.1.3})$$

На відміну від формули (Д.3.1.1) в даному випадку маємо змінну верхню межу інтегрування. У розгорнутому вигляді формула (3.1.3) також має змінні верхні межі:

$$S_x(t) = \int_0^t y(\xi) \cdot \delta(\xi) \cdot d\xi + \sum_{j=1}^{m_c(t)} y_j \cdot f_j, \quad (\text{Д.3.1.4})$$

де $m_c(t)$ – кількість зосереджених елементів, розташованих в інтервалі $[0; t]$, ξ – допоміжна змінна інтегрування ($0 < \xi < t$).

Ураховуючи правило стикування ділянок, епюру поточного статичного моменту будуємо незалежно на кожній з ділянок контурної лінії за формулою

$$S_i(t) = S_i^0 + \int_0^{t_i} y(\xi) \cdot \delta(\xi) \cdot d\xi,$$

де S_i^0 – статичний момент в початковій точці i -ї ділянки контурної лінії.

Початком відліку дугової координати слід вибрати ту з двох вільних точок контурної лінії, яка знаходиться в зоні додатних значень y . Оскільки в початковій точці розглянутого профілю (точка A) знаходиться зосереджена площа f , а згідно з правилом початкового нуля поточний статичний момент на початку відліку має дорівнювати нулю, вводимо додаткову фіктивну ділянку нульової довжини так, щоб початок і кінець цієї ділянки (точка A_0) розташовувалися перед зосередженим елементом f . Ясно, що на цій ділянці статичний момент дорівнює нулю. Аналогічну фіктивну додаткову ділянку створюємо подумки і за зосередженим елементом f в точці H . Початкова точка цієї ділянки (точка H_0) розташована за зосередженим елементом f .

Таким чином, дугова координата t обходить точки контурної лінії профілю в послідовності $A_0ABCDEF GHH_0$, причому в точках A_0 і H_0 статичний момент дорівнює нулю.

Для оцінювання напруженого стану в перерізі тонкостінного профілю при зсуві слід використовувати графічні зображення досліджуваних функцій, аргументом яких є контурна координата t . Значення досліджуваної функції відкладаємо від точки на контурній лінії за перпендикуляром до дотичної в цій точці.

Такі графіки називаються епюрами. Щоб не визначати значення функції у всіх точках контурної лінії, використовують математичні методи аналізу поведінки функції, зокрема пошук екстремуму і характер опуклості в інтервалі.

Ділянка AB. Початкове значення S_1^0 на ділянці AB визначаємо за правилом стикування ділянок, а саме: початкове значення поточного статичного моменту на даній ділянці дорівнює кінцевому значенню поточного статичного моменту на попередній ділянці плюс статичний момент зосередженої площі на межі цих ділянок. У даному випадку

$$S_1^0 = y_A \cdot f = 18 \cdot 4 = 72 \text{ см}^3.$$

Використання правила стикування ділянок дозволяє на кожній новій ділянці вводити нову дугову координату з початковим значенням $t = 0$ в початковій точці розглянутої ділянки. Цю можливість використовуємо в подальшому для всіх ділянок контуру.

Параметрична залежність підінтегрального вираження

$$y(\xi) \cdot \delta(\xi) = (y_A - \xi) \cdot \delta.$$

Інтегрування прирощення дає можливість одержати функцію від верхньої межі t

$$\Delta S_1(t) = \int_0^t (y_A - \xi) \cdot \delta \cdot d\xi = 18t - \frac{t^2}{2}.$$

Отримана функція є квадратною параболою, тому потрібно провести її аналіз на екстремум і опуклість. Умовою екстремуму є

$$\frac{d}{dt}(\Delta S_1) = 18 - t.$$

На ділянці AB координата t змінюється в межах $[0; 6]$. Отже, екстремум відсутній, похідна всюди є додатною, тобто функція монотонно зростає. Друга похідна

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta S_1) = -1$$

всюди є від'ємною. Отже, перегинів немає, і функція всюди опукла.

При побудові графіка функції $S_x(t)$ як нульову лінію будемо використовувати контурну лінію профілю. Додатні значення функції будемо відкладати вліво, якщо дивитися в напрямку додатних t (правило «лівої руки»). В цьому випадку опуклість означає, що всі точки кривої лежать лівіше дотичної до неї в будь-якій точці (рис. Д.3.1.2).

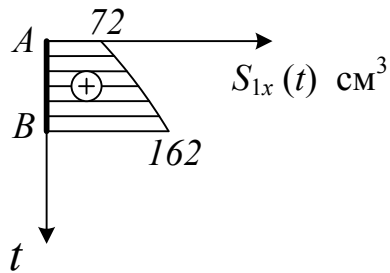


Рис. Д.3.1.2. Епюра $S_{1x}(t)$

Скінченне значення приросту ($t = 6$ см)

$$\Delta S_1^* = 18 \cdot 6 - \frac{6^2}{2} = 90 \text{ см}^3.$$

Скінченне значення функції S_1^* на першій ділянці

$$S_1^* = S_1^0 + \Delta S_1^* = 72 + 90 = 162 \text{ см}^3.$$

Ділянка BC (рис. Д.3.1.3). Початкове значення $S_2^0 = S_1^* = 162 \text{ см}^3$.

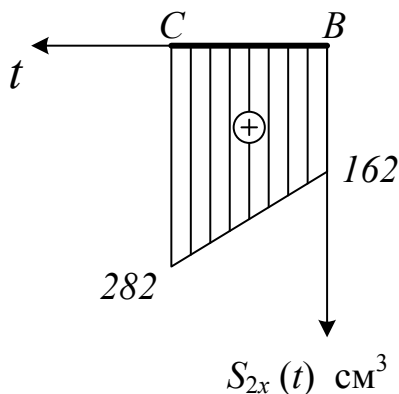


Рис. Д.3.1.3. Епюра $S_{2x}(t)$

Параметрична залежність $y_2(\xi) = y_B = +12 \text{ см} = \text{const}$.

$$\text{Інтеграл приросту } \Delta S_2(t) = \int_0^t 12 \cdot 1 \cdot d\xi = 12 \cdot t.$$

Отримана функція є лінійною, в цьому випадку не потрібно проводити аналіз.

Скінченне значення приросту (при $t = 10$ см) $\Delta S_2^* = 12 \cdot 10 = 120 \text{ см}^3$.

Повний поточний статичний момент в кінці ділянки

$$S_2^* = S_2^0 + \Delta S_2^* = 162 + 120 = 282 \text{ см}^3.$$

Ділянка CD (рис. Д.3.1.4). Початкове значення $S_3^0 = S_2^* = 282 \text{ см}^3$.

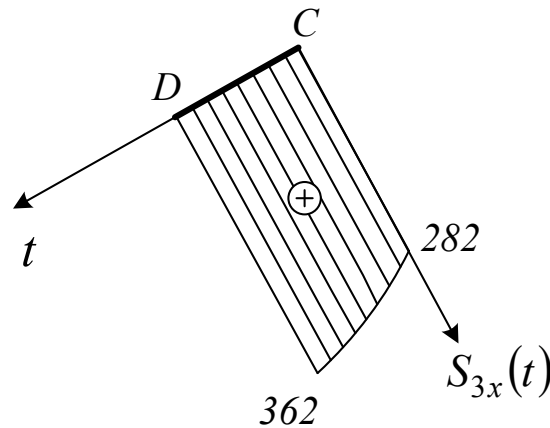


Рис. Д.3.1.4. Епюра $S_{3x}(t)$

Параметрична залежність $y_3(\xi) \cdot \delta(\xi) = (y_C - \xi \cdot \sin \alpha) \delta = 12 - \frac{1}{2} \xi$.

Інтеграл приросту $\Delta S_3(t) = \int_0^t \left(12 - \frac{\xi}{2} \right) d\xi = 12 \cdot t - \frac{t^2}{4}$.

Аналіз функції: перша похідна $f' = 12 - \frac{t}{2}$, при $0 < t < 8$ похідна всюди є додатною, тобто функція монотонно зростає, екстремуму не має. Друга похідна $f'' = -\frac{1}{2}$ всюди є додатною, тобто перегинів немає, функція опукла вправо і вниз (див. рис. Д.3.1.4).

Скінченне значення приросту $\Delta S_3^* = 12 \cdot 8 - \frac{8^2}{4} = 80 \text{ см}^3$.

Поточний статичний момент в кінці ділянки $S_3^* = 282 + 80 = 362 \text{ см}^3$.

Ділянка DE (рис. Д.3.1.5). Початкове значення в початковій точці четвертої ділянки $S_4^0 = S_3^* = 362 \text{ см}^3$.

Для побудови параметричної залежності $y(\xi)$ на дуговій ділянці замість контурної координати ξ (див. формулу (Д.3.1.4)) вводимо кутову координату φ так, що $\xi = \varphi R$, $d\xi = R d\varphi$. У результаті отримуємо $y(\xi) = y(\varphi) = R \cdot \sin(\alpha - \varphi)$.

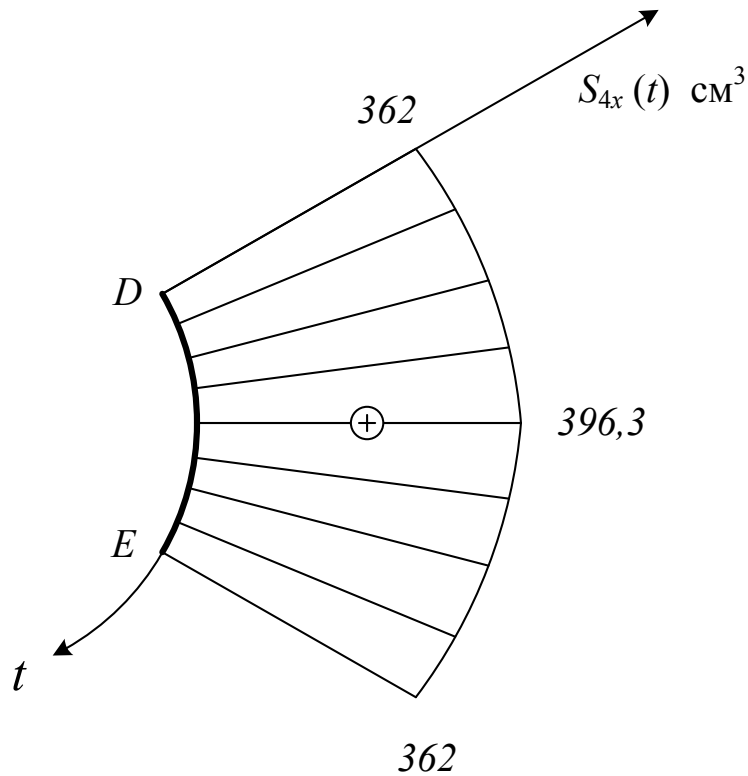


Рис. Д.3.1.5. Епюра $S_{4x}(t)$

$$\text{Інтеграл приросту } \Delta S_4(\beta) = \int_0^{\beta} R \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \delta \cdot R \cdot d\varphi.$$

Використовуючи стандартні тригонометричні співвідношення і таблицю інтегралів, знаходимо

$$\Delta S_4(\beta) = R^2 \cdot \delta \cdot [\cos(\beta - \alpha) - \cos \alpha] = R^2 \cdot \delta \cdot f(\beta).$$

Аналіз функції починаємо з перевірки наявності екстремуму. Перша похідна $f'(\beta) = \sin(\alpha - \beta)$ дорівнює нулю при $\beta = \alpha$. Ця точка лежить на горизонтальній осі симетрії перерізу. Тут є екстремум.

Друга похідна $f''(\beta) = -\cos(\alpha - \beta)$ є від'ємною у всьому діапазоні можливих значень $\beta: [-\alpha; +\alpha]$. Отже, екстремум є максимумом. Числове значення максимуму приросту

$$\Delta S_{4\max} = R^2 \cdot \delta \cdot (1 - \cos \alpha) = 16^2 \cdot 1 \cdot 0,1340 \cong 34,3 \text{ см}^3.$$

Відповідне максимальне значення повного поточного статичного моменту

$$S_{4\max} = S_4^0 + \Delta S_{4\max} = 362 + 34,3 = 396,3 \text{ см}^3.$$

Скінченне значення приросту в точці E ($\beta = 2\alpha$)

$$\Delta S_4^* = R^2 \cdot \delta \cdot [\cos(2\alpha - \alpha) - \cos \alpha] = 0.$$

Отже, поточний статичний момент в точці E

$$S_4^* = S_4^0 = 362 \text{ см}^3.$$

Ділянка EF (рис. Д.3.1.6). Початкове значення $S_5^0 = S_4^* = 362 \text{ см}^3$.

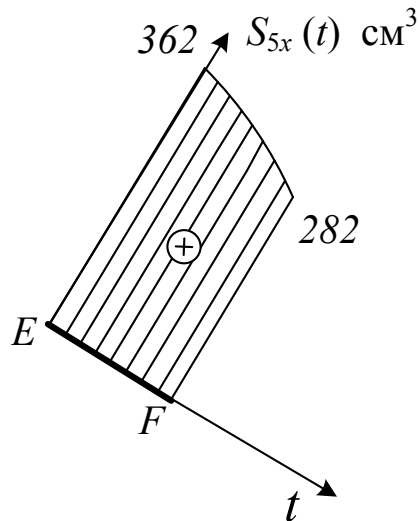


Рис. Д.3.1.6. Еюра $S_{5x}(t)$

Параметрична залежність (прямолинійна ділянка)

$$y_2(\xi) = y_E - \xi \cdot \sin \alpha = -8 - \frac{1}{2} \xi.$$

Інтеграл приросту

$$\Delta S_5(t) = -\int_0^t \left(8 + \frac{1}{2} \xi\right) \cdot \delta \cdot d\xi = -8 \cdot t - \frac{t^2}{4}.$$

Аналіз функції починаємо з пошуку екстремуму $\frac{d}{dt}(\Delta S_5) = -8 - \frac{t}{2}$.

У діапазоні ($0 < t < 8$) перша похідна всюди є від'ємною, отже, екстремуму немає, функція монотонно убуває. Друга похідна $\frac{d^2}{dt^2}(\Delta S_5) = -\frac{1}{2}$ всюди є негативною, отже, перегинів немає, функція опукла. Скінченне значення приросту є від'ємним ($t = 10$ см):

$$\Delta S_5^* = -8 \cdot 8 - \frac{8^2}{4} = -80 \text{ см}^3.$$

Повний поточний статичний момент в кінці ділянки

$$S_5^* = S_5^0 + \Delta S_5^* = 362 - 80 = 282 \text{ см}^3.$$

Ділянка FG (рис. Д.3.1.7). Початкове значення $S_6^0 = S_5^* = 282 \text{ см}^3$.

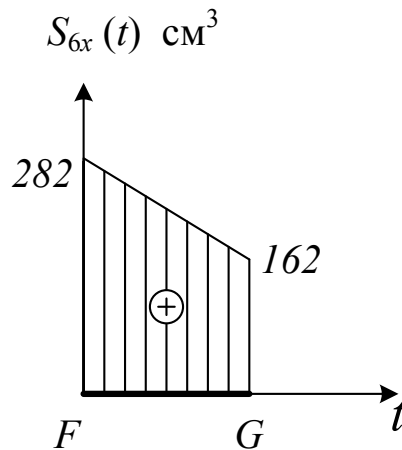


Рис. Д.3.1.7. Епюра $S_{6x}(t)$

Параметрична залежність

$$y_6(\xi) = y_F = -12 \text{ см}.$$

Інтеграл приросту

$$\Delta S_6(t) = \int_0^t (-12) \cdot \delta \cdot d\xi = -12 \cdot t.$$

Аналіз функції не потрібен (функція лінійна).

Скінченне значення приросту є від'ємним ($t = 10 \text{ см}$):

$$\Delta S_6^* = -120 \text{ см}^3.$$

Повний поточний статичний момент в кінці ділянки FG

$$S_6^* = S_6^0 + \Delta S_6^* = 282 - 120 = 162 \text{ см}^3.$$

Ділянка GH (рис. Д.3.1.8). Початкове значення $S_7^0 = S_6^* = 162 \text{ см}^3$.

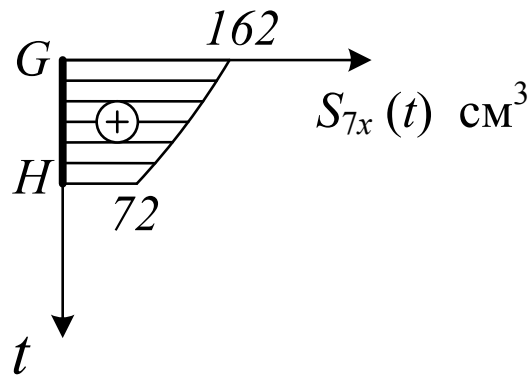


Рис. Д.3.1.8. Епюра $S_{7x}(t)$

Параметрична залежність

$$y_7(\xi) = y_G - \xi = -12 - \xi.$$

Інтеграл приросту

$$\Delta S_7(t) = \int_0^t (-12 - \xi) \cdot 1 \cdot d\xi = -12 \cdot t - \frac{t^2}{2}.$$

Аналіз функції: перша похідна – функція $\frac{d}{dt}(\Delta S_7) = -12 - t$ є від'ємною на всій ділянці GH . Екстремум відсутній, функція монотонно убуває. Друга похідна $\frac{d^2}{dt^2}(\Delta S_7) = -1$ всюди є від'ємною: перегинів немає, функція опукла.

Скінченне значення приросту ($t = 6$ см) поточного статичного моменту

$$\Delta S_7^* = -12 \cdot 6 - \frac{36}{2} = -90 \text{ см}^3.$$

Повний поточний статичний момент в кінці ділянки GH

$$S_7^* = S_7^0 + \Delta S_7^* = 162 - 90 = 72 \text{ см}^3.$$

Ділянка HH_0 (додаткова). Початкове значення $S_8^0 = S_7^* + y_H \cdot f = 72 + (-18) \cdot 4 = 0 \text{ см}^3$.

Оскільки додаткова дільниця не має ні довжини, ні товщини, приріст відсутній. Отже, отримано нульове значення в кінцевій точці контурної лінії, що відповідає правилу «кінцевого нуля».

Зведена епюра поточних статичних моментів показана на рис. Д.3.1.9. Видно, що епюра поточних статичних моментів вийшла симетричною відносно осі симетрії перерізу. Цей факт відповідає загальній теоремі про симетрію: якщо переріз є симетричним осі Ox , то епюра поточних статичних моментів $S_x(t)$ також симетрична осі Ox .

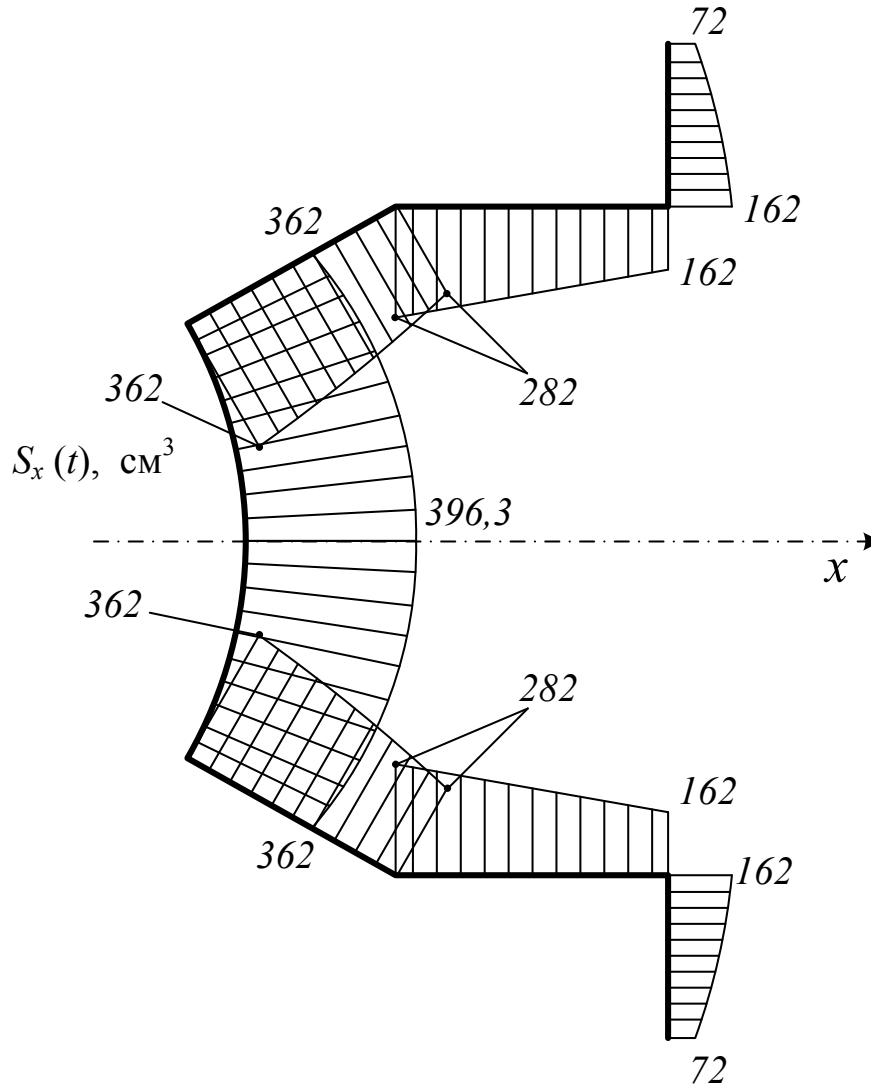


Рис. Д.3.1.9. Епюра $S_x(t)$

Найбільше значення функції $S_x(t)$ (рис. Д.3.1.9), а отже, і максимум дотичного напруження досягаються в точці перетину контуру з віссю симетрії.

Розглянемо визначення напрямків дотичних сил і їх величин в характерних точках.

Епюра потоків дотичних сил подібна епюрі поточних статичних моментів на рис. Д.3.1.9. Слід знайти значення потоку в характерних точках. Характерними точками в цьому прикладі є точки, позначені на рис. Д.3.1.1.

Точка A – крайня верхня точка

$$q(t) = - \frac{Q_y}{J_x} \cdot S_x^A = - \frac{200}{10200} \cdot 72 = -0,01961 \cdot 72 = -1,41 \text{ кН/см.}$$

Коефіцієнт $\frac{Q_y}{J_x} = 0,01961$ є загальним для всіх точок перерізу. Для

визначення величини дотичного напруження необхідно величину потоку поділити на товщину стінки в даній точці контуру. У розглянутому прикладі $\delta = 1$ см. Отже,

$$\tau_A = \frac{q_A}{\delta} = - \frac{1,41 \cdot 10^5}{0,01} = -14,1 \text{ МПа.}$$

Аналогічно обчислюємо дотичні напруження в інших характерних точках. Еюра $\tau(t)$ показана на рис. Д.3.1.10.

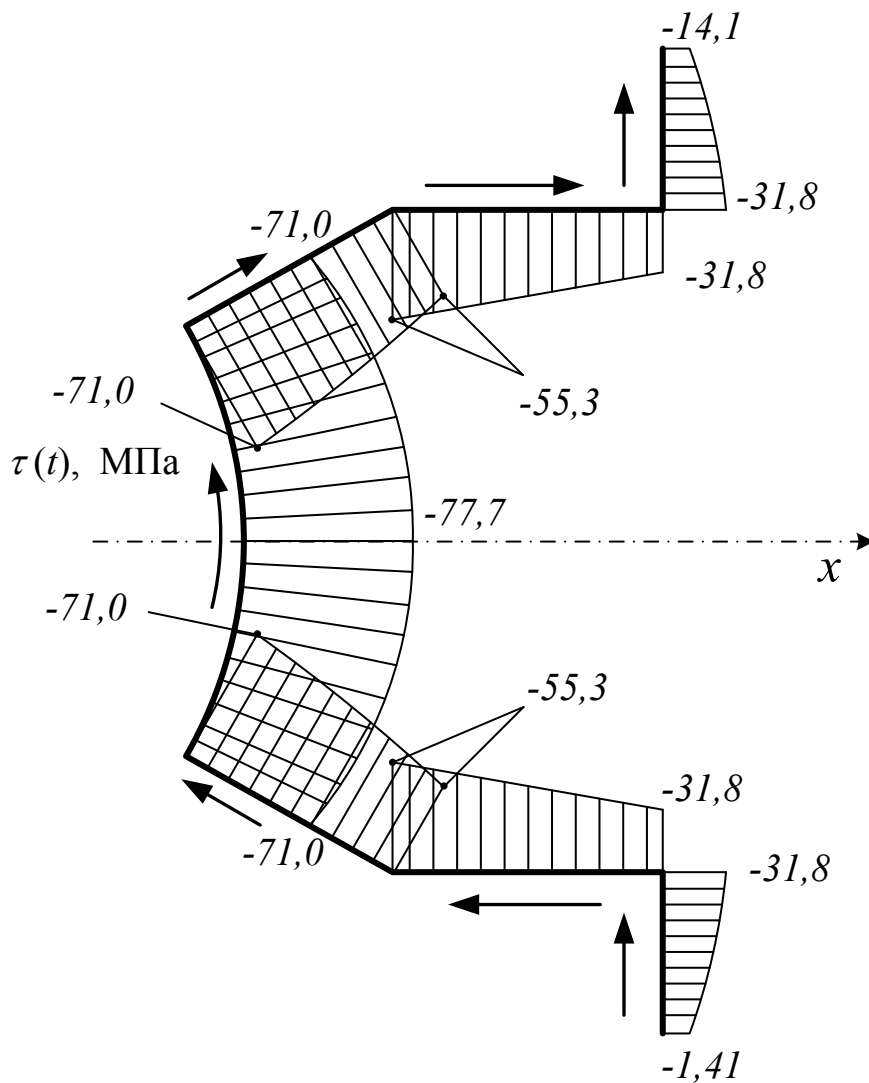


Рис. Д.3.1.10. Еюра $\tau(t)$

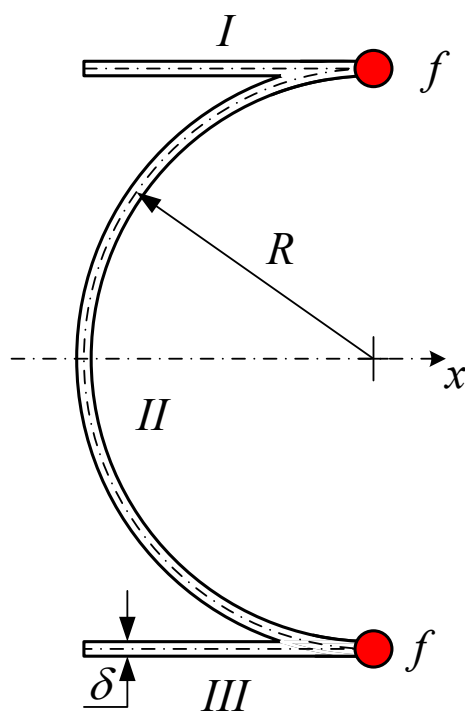
Для визначення напрямку потоків дотичних сил і дотичних напружень застосовуємо правило, загальне для профілів з відкритим контуром: якщо дотичне напруження є додатним, то його напрямок збігається з напрямком контурної координати; від'ємні дотичні напруження спрямовані проти контурної координати.

У всіх точках контуру значення $\sigma(t)$ і $\tau(t)$ – від'ємні; значить, у всіх точках контуру зберігається один і той самий напрямок потоків дотичних сил: проти напрямку контурної координати, тобто за годинниковою стрілкою.

Відповідно до цих правил побудовано епюру на рис. Д.3.1.10, де видно, що рівнодіюча дотичних напружень в перерізі спрямована вгору, як і задана сила Q_y .

Задача № 2

Розглянути відкритий простий профіль без розгалужень (рис. Д.3.2.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі x .



Дано: товщина стінок δ постійна по всьому контуру перерізу ($\delta = 1$ см). Прикладена вгору сила $Q_y = 400$ кН. $R = 20$ см. Зосереджені площі $f = 5$ см².

Знайти розподіл потоків дотичних сил на контурній лінії перерізу.

Рис. Д.3.2.1. Відкритий профіль

Центр ваги перерізу шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x . Визначаємо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2f \cdot R^2 + 2\delta R \cdot R^2 + \frac{\pi R^3 \delta}{2} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 20^2 + 2 \cdot 1 \cdot 20^3 + \frac{3,14 \cdot 20^3 \cdot 1}{2} = 32560 \text{ см}^4.$$

Визначаємо функцію поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x . Розбиваємо переріз на три ділянки (див. рис. Д.3.2.1).

Перша ділянка (рис. Д.3.2.2). Контурна координата $t - 0 \leq t \leq R$. Допоміжна координата $\xi - 0 \leq \xi \leq t$;

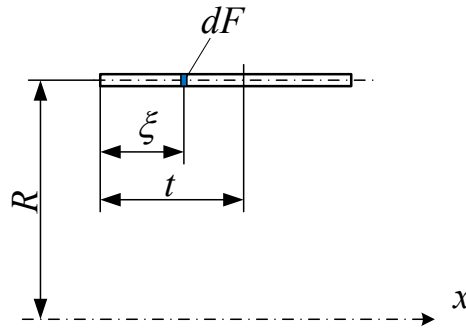


Рис. Д.3.2.2. Перша ділянка

$$y_1(\xi) = R; S_{x1}^0 = 0;$$

$$S_{x1}(t) = S_{x1}^0 + \Delta S_{x1}(t) = \int_0^t \delta R d\xi = \delta R \xi \Big|_0^t = \delta R t \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=R} =$$

$$= \delta R^2 = 1 \cdot 20^2 = 400 \text{ см}^3.$$

Друга ділянка (рис. Д.3.2.3). Контурна координата $\varphi - 0 \leq \varphi \leq \pi$. Допоміжна координата $\psi - 0 \leq \psi \leq \varphi$;

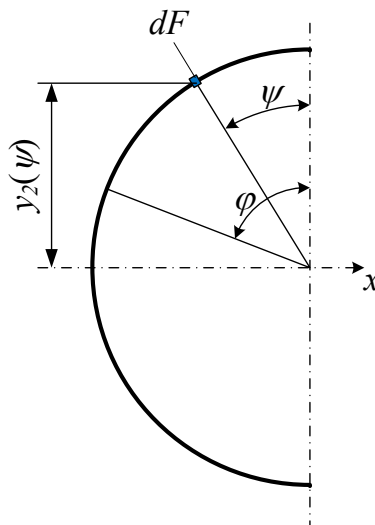


Рис. Д.3.2.3. Друга ділянка

$$y_2(\psi) = R \cos \psi; S_{x1}^* = 400 \text{ см}^3; dF = \delta d\zeta = \delta R d\psi;$$

$$\begin{aligned} S_{x2}(\varphi) &= S_{x1}^* + fR + \Delta S_{x2}(\varphi) = 400 + 5 \cdot 20 + \int_0^\varphi R \cos \psi \delta R d\psi = \\ &= 500 + \delta R^2 \sin \psi \Big|_0^\varphi = 500 + \delta R^2 \sin \varphi = 500 + 1 \cdot 20^2 \sin \varphi = \\ &= 500 + 400 \sin \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 500 \text{ см}^3 \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 900 \text{ см}^3 \Big|_{\varphi=\pi} = 500 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Третя ділянка (рис. Д.3.2.4). Контурна координата $t - 0 \leq t \leq R$. Допоміжна координата $\xi - 0 \leq \xi \leq t$;

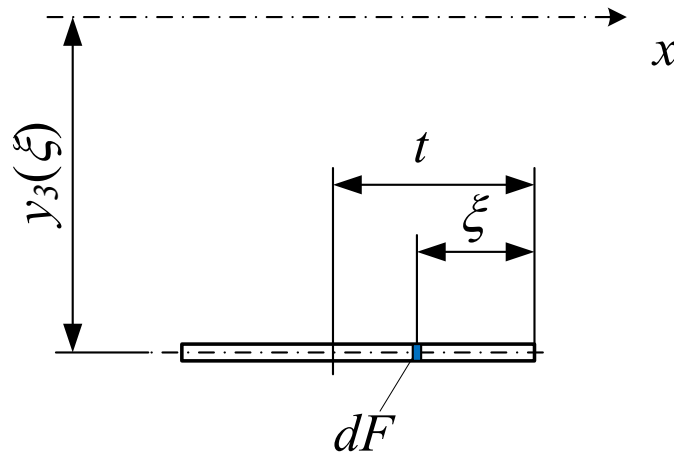


Рис. Д.3.2.4. Третя ділянка

$$y_3(\xi) = -R; S_{x3}^0 = S_{x2}^*;$$

$$\begin{aligned} S_{x3}(t) &= S_{x3}^0 + f \cdot (-R) + \Delta S_{x3}(t) = 500 - 5 \cdot 20 + \int_0^t \delta(-R) d\xi = \\ &= 400 - \delta R \xi \Big|_0^t = 400 - \delta R t = 400 - 1 \cdot 20 t = \\ &= 400 - 20 t \Big|_{t=0}^t = 400 \text{ см}^3 \Big|_{t=R} = 400 - 400 = 0. \end{aligned}$$

Побудуємо епюру поточного статичного моменту S_x (рис. Д.3.2.5).

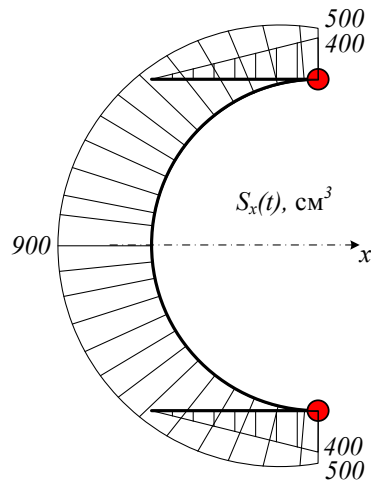


Рис. Д.3.2.5. Епюра $S_x(t)$

Визначимо функцію потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{400}{3,256 \cdot 10^4} S_x(t) = -1,229 \cdot 10^{-2} S_x(t) \Big|_{S=400 \text{ см}^3} =$$

$$= -4,914 \text{ кН/см} \Big|_{S=500 \text{ см}^3} = -6,142 \text{ кН/см} \Big|_{S=900 \text{ см}^3} = -11,06 \text{ кН/см}.$$

Побудуємо епюру потоків дотичних сил $q_p(t)$ (рис. Д.3.2.6).

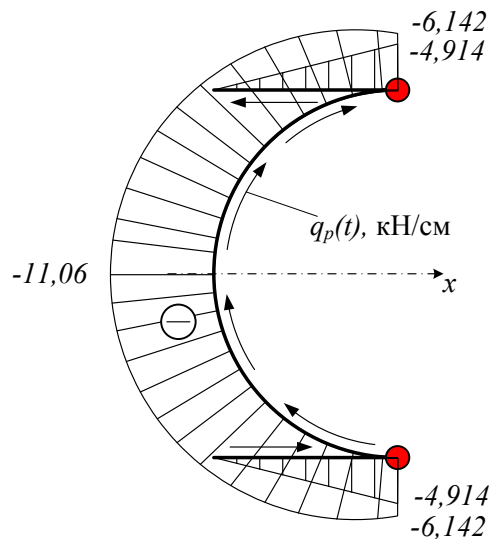


Рис. Д.3.2.6. Епюра $q_p(t)$

Визначимо найбільше діюче дотичне напруження

$$\tau = \frac{|q_p|}{\delta} = \frac{11,06 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}} = 110,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 110,6 \text{ МПа}.$$

Задача № 3

Розглянути відкритий простий профіль без розгалужень (рис. Д.3.3.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі y .

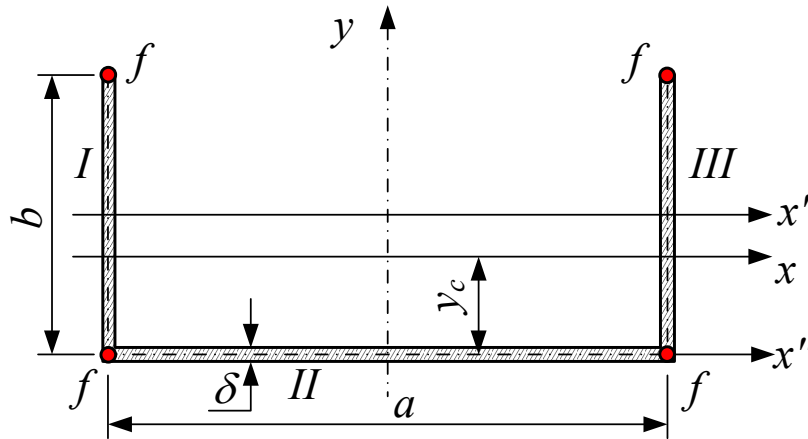


Рис. Д.3.3.1. Відкритий профіль

Дано: товщина стінок δ постійна по всьому контуру перерізу ($\delta=1$ см). Прикладена вгору сила $Q_y = 400$ кН; $a=40$ см; $b=20$ см; $f=5$ см². *Знайти* розподіл потоків дотичних сил на контурній лінії перерізу.

Переріз несиметричний відносно осі x . Знаходимо центр ваги перерізу на осі y (переріз симетричний відносно осі y). Визначаємо положення центра ваги перерізу відносно осі x'' :

$$F_\Sigma = \delta(2b + a) + 4f = 1 \cdot (2 \cdot 20 + 40) + 4 \cdot 5 = 100 \text{ см}^2;$$

$$S_{x''} = 2fb + 2\delta b \frac{b}{2} = 2 \cdot 5 \cdot 20 + 2 \cdot 1 \cdot 20 \cdot \frac{20}{2} = 600 \text{ см}^3; \quad y_c = \frac{S_{x''}}{F_\Sigma} = \frac{600}{100} = 6 \text{ см}.$$

Розраховуємо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2f \cdot (b - y_c)^2 + 2f \cdot (-y_c)^2 + 2b\delta \left(\frac{b}{2} - y_c \right)^2 + 2 \frac{b^3 \delta}{12} + a\delta \cdot (-y_c)^2 =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot (20 - 6)^2 + 2 \cdot 5 \cdot (-6)^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \left(\frac{20}{2} - 6 \right)^2 +$$

$$+ 2 \frac{20^3 \cdot 1}{12} + 40 \cdot 1 \cdot (-6)^2 = 5733 \text{ см}^4.$$

Визначаємо функцію поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x . Розбиваємо переріз на три ділянки (див. рис. Д.3.3.1).

Перша ділянка (рис. Д.3.3.2). Контурна координата $t - 0 \leq t \leq b$. Допоміжна координата $\xi - 0 \leq \xi \leq t$;

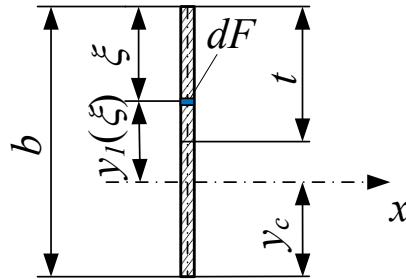


Рис. Д.3.3.2. Перша ділянка

$$y_1(\xi) = (b - y_c) - \xi; S_{x1}^0 = 0;$$

$$\begin{aligned} S_{x1}(t) &= S_{x1}^0 + f \cdot (b - y_c) + \Delta S_{x1}(t) = f \cdot (b - y_c) + \int_0^t (b - y_c - \xi) \delta d\xi = \\ &= 5 \cdot 14 + \int_0^t (b - y_c - \xi) \delta d\xi = 70 + \int_0^t (20 - 6 - \xi) \delta d\xi = 70 + 14\xi - \frac{\xi^2}{2} \Big|_0^t = \\ &= 70 + 14t - \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0} = 70 \text{ см}^3 \Big|_{t=b} = 150 \text{ см}^3 \Big|_{t=b-y_c} = 168 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Друга ділянка (рис. Д.3.3.3). Контурна координата $t - 0 \leq t \leq a$. Допоміжна координата $\xi - 0 \leq \xi \leq t$;

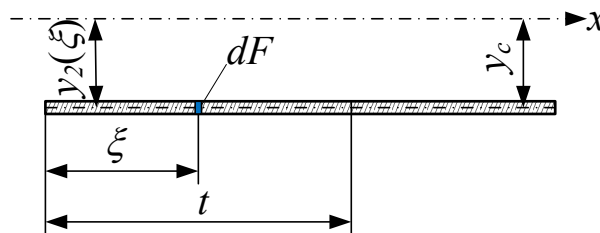


Рис. Д.3.3.3. Друга ділянка

$$y_2(\xi) = -y_c; S_{x1}^* = 150 \text{ см}^3; dF = \delta d\xi;$$

$$\begin{aligned} S_{x2}(t) &= S_{x1}^* + f(-y_c) + \Delta S_{x2}(t) = 150 + 5 \cdot (-6) + \Delta S_{x2}(t) = \\ &= 120 + \int_0^t (-y_c) \delta d\xi = 120 - \delta y_c \xi \Big|_0^t = 120 - 6t \Big|_{t=0} = 120 \text{ см}^3 \Big|_{t=a} = -120 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Третя ділянка (рис. Д.3.3.4). Контурна координата $t: 0 \leq t \leq b$. Допоміжна координата $\xi: -0 \leq \xi \leq t$;

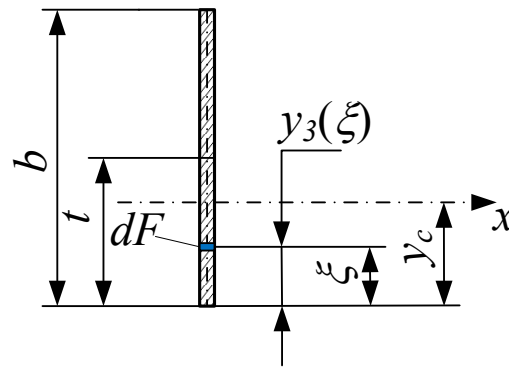


Рис. Д.3.3.4. Третя ділянка

$$y_3(\xi) = -y_c + \xi; S_{x3}^0 = S_{x2}^*;$$

$$\begin{aligned} S_{x3}(t) &= S_{x3}^0 + f \cdot (-y_c) + \Delta S_{x3}(t) = -120 - 5 \cdot 6 + \int_0^t \delta(-y_c + \xi) d\xi = \\ &= -150 + \delta(\xi - y_c) \Big|_0^t = -150 + \delta\left(\frac{t^2}{2} - y_c t\right) \Big|_{t=0} = -150 + 1 \cdot \left(\frac{t^2}{2} - 6t\right) \Big|_{t=0} = \\ &= -150 \text{ см}^3 \Big|_{t=b} = -70 \text{ см}^3 \Big|_{t=y_c} = -168 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Побудуємо епюру поточного статичного моменту S_x (рис. Д.3.3.5).

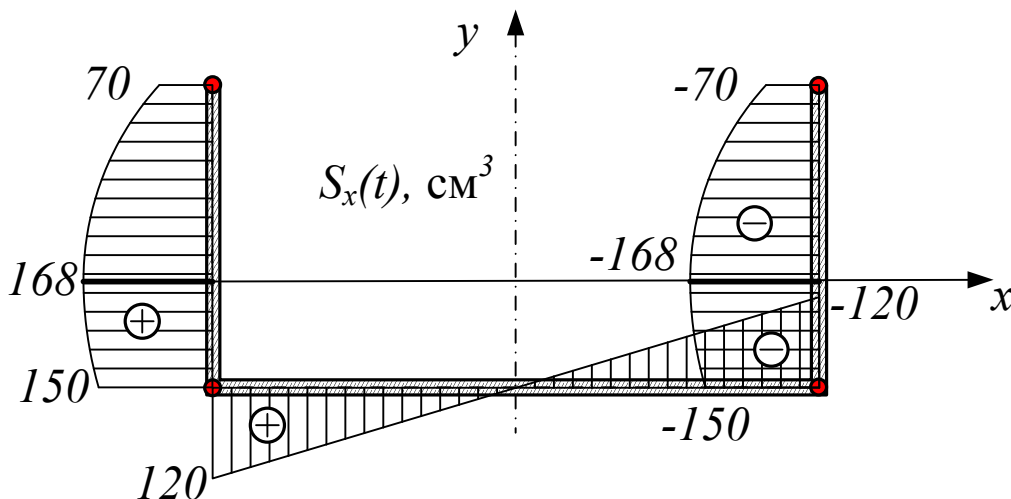


Рис. Д.3.3.5. Епюра $S_x(t)$

Визначаємо функцію потоків дотичних сил $q_p(t)$:

$$\begin{aligned}
 q_p(t) &= -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{400}{5734} S_x(t) = -0,0698 S_x(t) \Big|_{s=70\text{см}^3} = \\
 &= -4,86 \text{ кН/см} \Big|_{s=168\text{см}^3} = -11,67 \text{ кН/см} \Big|_{s=150\text{см}^3} = \\
 &= -10,42 \text{ кН/см} \Big|_{s=120\text{см}^3} = -8,34 \text{ кН/см}.
 \end{aligned}$$

Побудуємо епюру потоків дотичних сил $q_p(t)$ (рис. Д.3.3.6).

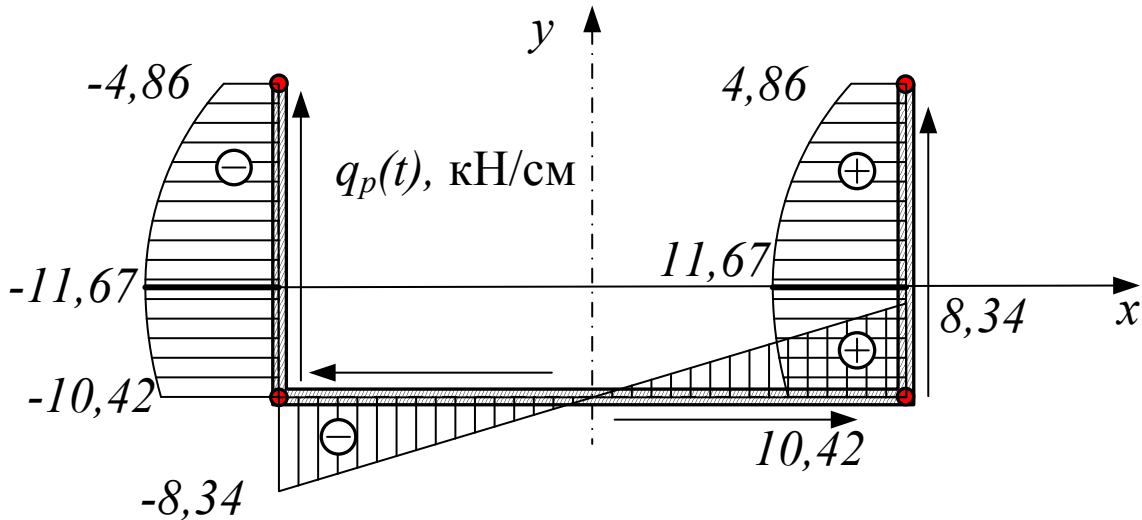


Рис. Д.3.3.6. Епюра $q_p(t)$

Визначаємо найбільше діюче дотичне напруження:

$$\tau = \frac{|q_p|}{\delta} = \frac{11,67 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}} = 116,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 116,7 \text{ МПа}.$$

Задача № 4

Розглянути профіль з розгалуженнями (рис. Д.3.4.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

Дано: товщина стінок δ постійна на всьому контурі перерізу ($\delta=1$ см). Прикладена вгору сила $Q_y = 200$ кН; $R = a$; $a = 10$ см; $f = 5$ см².

Знайти розподіл потоків дотичних сил на контурній лінії перерізу і перевірити правильність визначення функцій потоків дотичних сил, тобто виконання умови статичної еквівалентності цих потоків поперечної сили, що діє в перерізі.

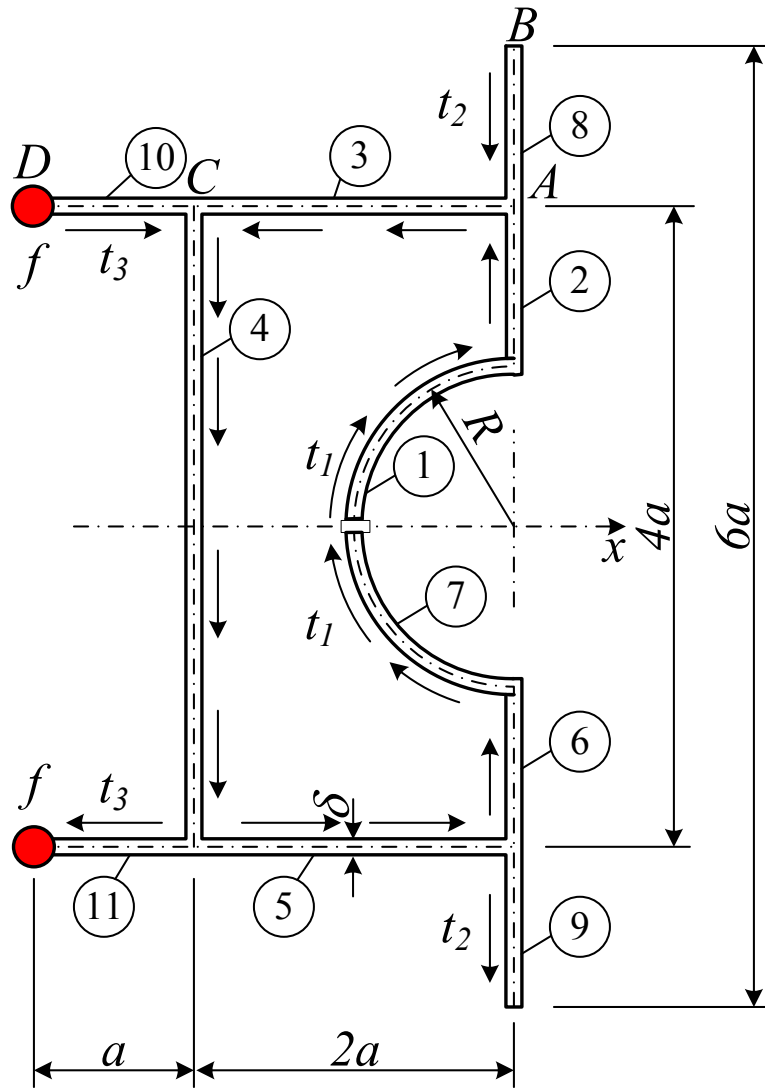


Рис. Д.3.4.1. Відкритий профіль з розгалуженнями

Центр ваги перерізу шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x .
Визначаємо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{(4a)^3 \delta}{12} + \frac{(6a)^3 \delta}{12} - \frac{(2a)^3 \delta}{12} + 2 \cdot (3a\delta) \cdot (2a)^2 + \frac{\pi R^3 \delta}{2} + 2f \cdot (2a)^2 = \\
 &= a^3 \delta \left(\frac{4^3 + 6^3 - 2^3}{12} + 2 \cdot 3 \cdot 2^2 + \frac{\pi}{2} \right) + 2f \cdot (2a)^2 = 48,24a^3 \delta + 8fa^2 = \\
 &= 48,24 \cdot (10)^3 \cdot 1 + 8 \cdot 5 \cdot (10)^2 = 52240 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Визначаємо функцію поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі. В перерізі є шість вільних точок, для кожної пари яких вводимо свою контурну координату (t_1, t_2, t_3) (див. рис. Д.3.4.1).

Розбиваємо переріз на одинадцять ділянок. Через наявність симетрії перерізу досить розглянути ділянки, які знаходяться вище осі x .

За контурною координатою t_1 .

Перша ділянка (рис. Д.3.4.2). Контурна координата $t = t_1$ ($t = \varphi R = \varphi a$),

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Допоміжною є координата ψ : $0 \leq \psi \leq \varphi$; $dF = R\delta d\psi = a\delta d\psi$;

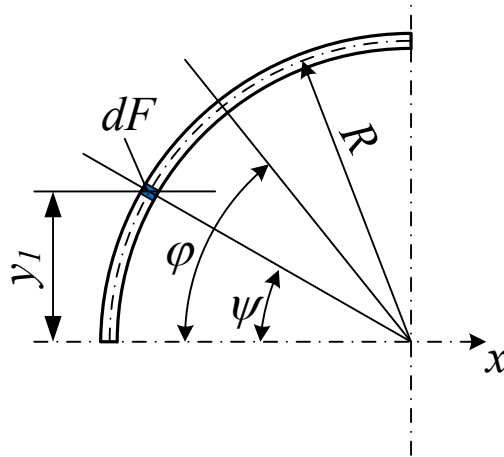


Рис. Д.3.4.2. Перша ділянка на контурній координаті t_1

$$y_1(\psi) = a \cdot \sin \psi; S_{x1}^0 = 0;$$

$$S_{x1}(\varphi) = S_{x1}^0 + \Delta S_{x1}(\varphi) = 0 + \int_0^{\varphi} y dF = \int_0^{\varphi} a \cdot \sin \psi \delta a d\psi =$$

$$= (1 - \cos \varphi) a^2 \delta \Big|_{\varphi=0} = 0 \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = a^2 \delta = 10^2 \cdot 1 = 100 \text{ см}^3 = S_{x1}^*.$$

Друга ділянка (рис. Д.3.4.3). Контурна координата $t = t_1$ ($0 \leq t \leq a$).

Допоміжною є координата ξ ($0 \leq \xi \leq t$); $dF = \delta d\xi$;

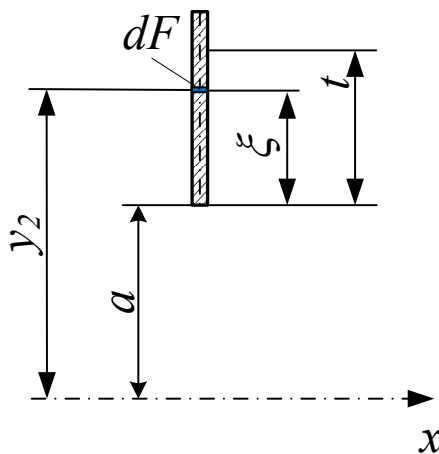


Рис. Д.3.4.3. Друга ділянка на контурній координаті t_1

$$y_2(\xi) = a + \xi; S_{x_2}(t) = S_{x_2}^0 + \Delta S_{x_2}(t); S_{x_2}^0 = S_{x_1}^* = 100 \text{ см}^2;$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{x_2}(t) &= \int_0^t y dF = \int_0^t (a + \xi) \cdot \delta d\xi = a\delta\xi + \frac{\delta\xi^2}{2} \Big|_0^t = a\delta t - \frac{\delta t^2}{2} = \\ &= 10 \cdot 1t - \frac{1 \cdot t^2}{2} = 10t - \frac{t^2}{2}; \end{aligned}$$

$$S_{x_2}(t) = 100 + 10t + \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0} = 100 \text{ см}^2 \Big|_{t=a} = 250 \text{ см}^2 = \Delta S_{x_2}^*(t).$$

Перша похідна $S'_{x_2}(t) = 10 + t$ наростає зі збільшенням t , що свідчить про характер функції на епюрі.

Третя ділянка (рис. Д.3.4.4). Контурна координата $t = t_1$ ($0 \leq t \leq 2a$). Допоміжна координата ξ $0 \leq \xi \leq t$; $dF = \delta d\xi$; $y_3(\xi) = 2a$;

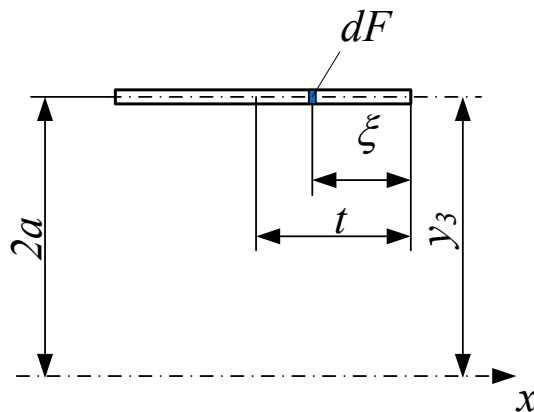


Рис. Д.3.4.4. Третя ділянка на контурній координаті t_1

$$\begin{aligned} S_{x_3}(t) &= S_{x_3}^0 + \Delta S_{x_3}(t); \\ S_{x_3}^0 &= S_{x_2}^* + S_x^{AB} = 250 + a\delta \cdot \left(2a + \frac{a}{2} \right) = 250 + 2,5a^2\delta = \\ &= 250 + 2,5 \cdot 10^2 \cdot 1 = 500 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Тут S_x^{AB} – повний статичний момент площі відгалуження AB ;

$$\Delta S_{x_3}(t) = \int_0^t y dF = \int_0^t 2a \cdot \delta d\xi = 2a\delta\xi \Big|_0^t = 2a\delta t = 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot t = 20t;$$

$$S_{x3}(t) = 500 + 20t \Big|_{t=0} = 500 \text{ см}^2 \Big|_{t=2a} = 500 + 20 \cdot 20 = 950 \text{ см}^2 = \Delta S_{x3}^*(t).$$

Четверта ділянка (рис. Д.3.4.5). Контурна координата $t = t_1$ ($0 \leq t \leq 4a$). Допоміжна координата ξ ($0 \leq \xi \leq t$); $dF = \delta d\xi$; $y_4(\xi) = 2a - \xi$;

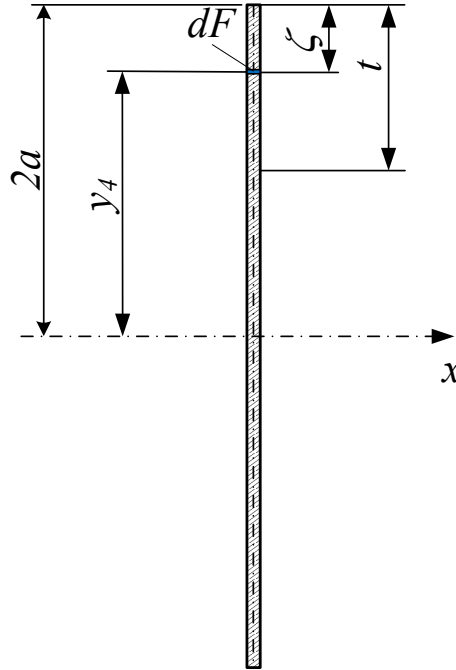


Рис. Д.3.4.5. Четверта ділянка на контурній координаті t_1

$$S_{x4}(t) = S_{x4}^0 + \Delta S_{x4}(t);$$

$$\begin{aligned} S_{x4}^0 &= S_{x3}^* + S_x^{DC} = 900 + a\delta \cdot (2a) = 900 + 2a^2\delta + f \cdot 2a = \\ &= 900 + 2 \cdot 10^2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 10 = 1200 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Тут S_x^{DC} – повний статичний момент площі відгалуження DC ;

$$\begin{aligned} \Delta S_{x4}(t) &= \int_0^t y dF = \int_0^t (2a - \xi) \cdot \delta d\xi = 2a\delta\xi - \frac{\delta\xi^2}{2} \Big|_0^t = 2a\delta t - \frac{\delta t^2}{2} = \\ &= 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot t - \frac{1 \cdot t^2}{2} = 20t - 0,5t^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{x4}(t) &= 1200 + 20t - 0,5t^2 \Big|_{t=0} = 1200 \text{ см}^2 \Big|_{t=2a} = 1200 + 20 \cdot 20 - 0,5 \cdot 20^2 = \\ &= 1400 \text{ см}^2 \Big|_{t=4a} = 1200 \text{ см}^2 = \Delta S_{x2}^*(t). \end{aligned}$$

Перша похідна $S'_{x4}(t) = 20 - t$ зменшується зі збільшенням t , що свідчить про характер функції на епюрі.

За контурною координатою t_2 .

Восьма ділянка (рис. 3.4.6). Контурна координата $t = t_2$ ($0 \leq t \leq a$). Допоміжна координата ξ ($0 \leq \xi \leq t$); $dF = \delta d\xi$; $y_8(\xi) = 3a - \xi$;

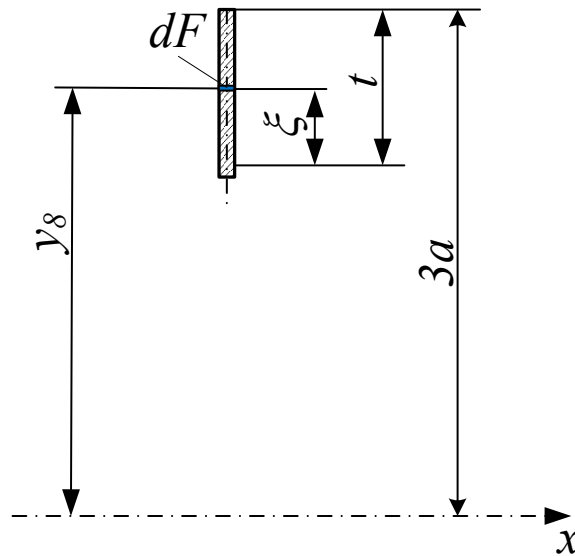


Рис. Д.3.4.6. Восьма ділянка на контурній координаті t_2

$$S_{x8}(t) = S_{x8}^0 + \Delta S_{x8}(t); S_{x8}^0 = 0;$$

$$\Delta S_{x8}(t) = \int_0^t y dF = \int_0^t (3a - \xi) \cdot \delta d\xi = 3a \delta \xi - \frac{\delta \xi^2}{2} \Big|_0^t = 3a \delta t - \frac{\delta t^2}{2} =$$

$$= 3 \cdot 10 \cdot 1 \cdot t - \frac{1 \cdot t^2}{2} = 30t - 0,5t^2;$$

$$S_{x8}(t) = 30t - 0,5t^2 \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=a} = 30 \cdot 10 - 0,5 \cdot 10^2 = 250 \text{ см}^2.$$

Перша похідна $S'_{x8}(t) = 30 - t$ зменшується зі збільшенням t , що свідчить про характер функції на епюрі.

За контурною координатою t_3 .

Десята ділянка (рис. Д.3.4.7). Контурна координата $t = t_3$ ($0 \leq t \leq a$). Допоміжна координата ξ ($0 \leq \xi \leq t$); $dF = \delta d\xi$; $y_{10}(\xi) = 2a - \xi$;

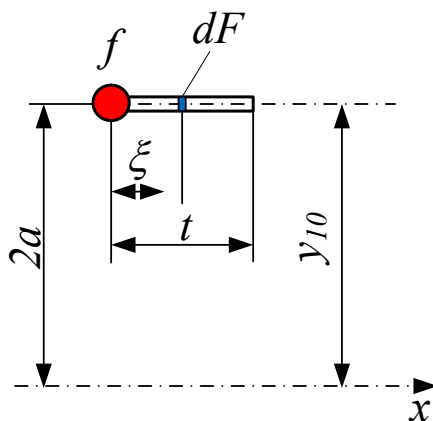


Рис. Д.3.4.7. Десята ділянка на контурній координаті t_3

$$S_{x10}(t) = S_{x10}^0 + \Delta S_{x8}(t); \quad S_{x4}^0 = f \cdot 2a = 5 \cdot 2 \cdot 10 = 100 \text{ см}^2;$$

$$\Delta S_{x10}(t) = \int_0^t y dF = \int_0^t 2a \cdot \delta d\xi = 2a \delta \xi \Big|_0^t = 2a \delta t = 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot t = 20t;$$

$$S_{x10}(t) = 100 + 20t \Big|_{t=0} = 100 \text{ см}^2 \Big|_{t=a} = 100 + 20 \cdot 10 = 300 \text{ см}^2.$$

Побудуємо епюру поточних статичних моментів площі $S_x(t)$ (рис. Д.3.4.8).

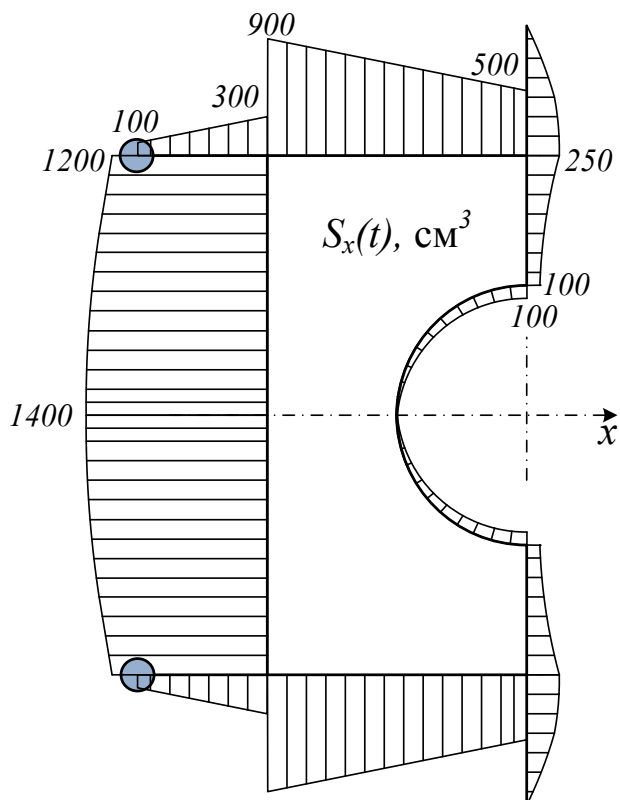


Рис. Д.3.4.80. Епюра $S_x(t)$

Визначаємо функцію потоків дотичних сил

$$\begin{aligned}
 q_p(t) &= -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{200}{52240} S_x(t) = -0,003828 S_x(t) \Big|_{s=100\text{см}^3} = \\
 &= -0,3828 \text{ кН/см} \Big|_{s=250\text{см}^3} = -0,9571 \text{ кН/см} \Big|_{s=500\text{см}^3} = \\
 &= -1,914 \text{ кН/см} \Big|_{s=900\text{см}^3} = -3,446 \text{ кН/см} \Big|_{s=300\text{см}^3} = -1,149 \text{ кН/см} \Big|_{s=1200\text{см}^3} = \\
 &= -4,594 \text{ кН/см} \Big|_{s=1400\text{см}^3} = -5,360 \text{ кН/см}.
 \end{aligned}$$

Побудуємо епюру потоків дотичних сил $q_p(t)$ (рис. Д.3.4.9).

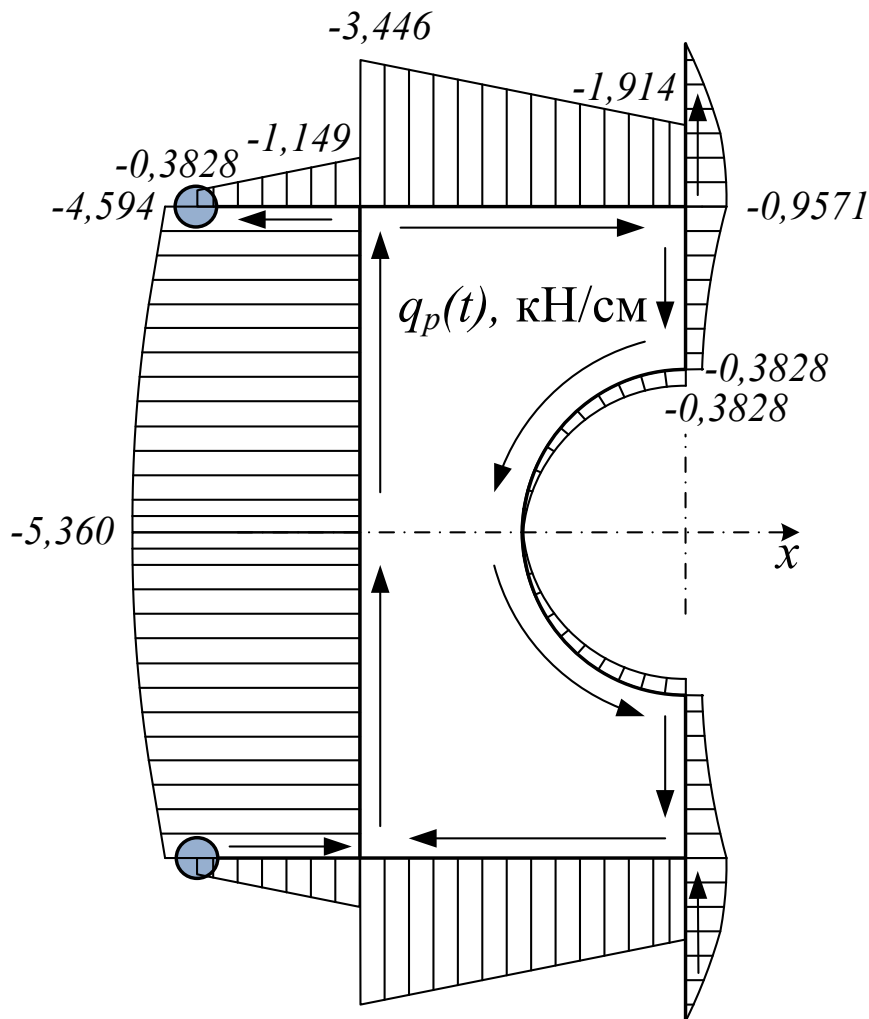


Рис. Д.3.4.9. Епюра $q_p(t)$

Розраховуємо найбільше діюче дотичне напруження

$$\tau = \frac{\max(|q_p|)}{\delta} = \frac{5,360 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = 53,60 \cdot 10^6 \text{ Па} = 53,60 \text{ МПа} .$$

Виконаємо перевірку правильності розв'язання. Перевіримо чи виконується умова $\sum_p \int q dy = Q_y$.

Підсумуємо інтеграли на всіх ділянках. Додатний напрямок при підрахунку спрямовано вгору. Природно, що горизонтальні ділянки матимуть нульові інтеграли. Для зручності підсумовуємо функції $S_x(t)$.

На першій ділянці

$$\begin{aligned} -\frac{Q_y}{I_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_{x1}(\varphi) dy &= -\frac{Q_y}{I_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \varphi) a^2 \delta a \cos \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{Q_y}{I_x} a^3 \delta \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 20^3 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = -215 \frac{Q_y}{I_x}. \end{aligned}$$

На другій ділянці

$$\begin{aligned} -\frac{Q_y}{I_x} \int_0^a S_{x2}(t) dy &= -\frac{Q_y}{I_x} \int_0^{10} (100 + 10t + 0,5t^2) dt = -\frac{Q_y}{I_x} \left(100t + 5t^2 + \frac{t^3}{6}\right) \Big|_0^{10} = \\ &= -1666,7 \frac{Q_y}{I_x}. \end{aligned}$$

На четвертій ділянці (половині)

$$\begin{aligned} \frac{Q_y}{I_x} \int_0^{2a} S_{x4}(t) dy &= \frac{Q_y}{I_x} \int_0^{20} (1200 + 20t - 0,5t^2) dt = \frac{Q_y}{I_x} \left(1200t + 10t^2 - \frac{t^3}{6}\right) \Big|_0^{20} = \\ &= 26666,7 \frac{Q_y}{I_x}. \end{aligned}$$

На восьмій ділянці

$$\frac{Q_y}{I_x} \int_0^a S_{x8}(t) dy = \frac{Q_y}{I_x} \int_0^{10} (30t - 0,5t^2) dt = \frac{Q_y}{I_x} \left(15t^2 - \frac{t^3}{6}\right) \Big|_0^{10} = 1333,3 \frac{Q_y}{I_x}.$$

Підсумуємо результати на ділянках і подвоїмо отриману величину з урахуванням симетрії

$$Q_y = 2 \frac{Q_y}{I_x} (26666,7 + 1333,3 - 1666,7 - 215) = 52236,6 \frac{Q_y}{I_x}.$$

Згадаймо, що $I_x = 52240 \text{ см}^4$, очевидно, що похибка дуже мала.

Задача № 5

Розглянути профіль (рис. Д.3.5.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma = 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

Дано: прикладена вгору сила $Q_y = 20 \text{ кН}$; $h_1 = h_3 = 20 \text{ см}$; $h_2 = 40 \text{ см}$; $f_1 = 5 \text{ см}^2$; $f_2 = f_3 = 10 \text{ см}^2$; $f_4 = 15 \text{ см}^2$.

Знайти розподіл потоків дотичних сил на контурній лінії перерізу і перевірити правильність визначення функцій потоків дотичних сил, тобто виконання умови статичної еквівалентності цих потоків поперечної сили, що діє в перерізі.

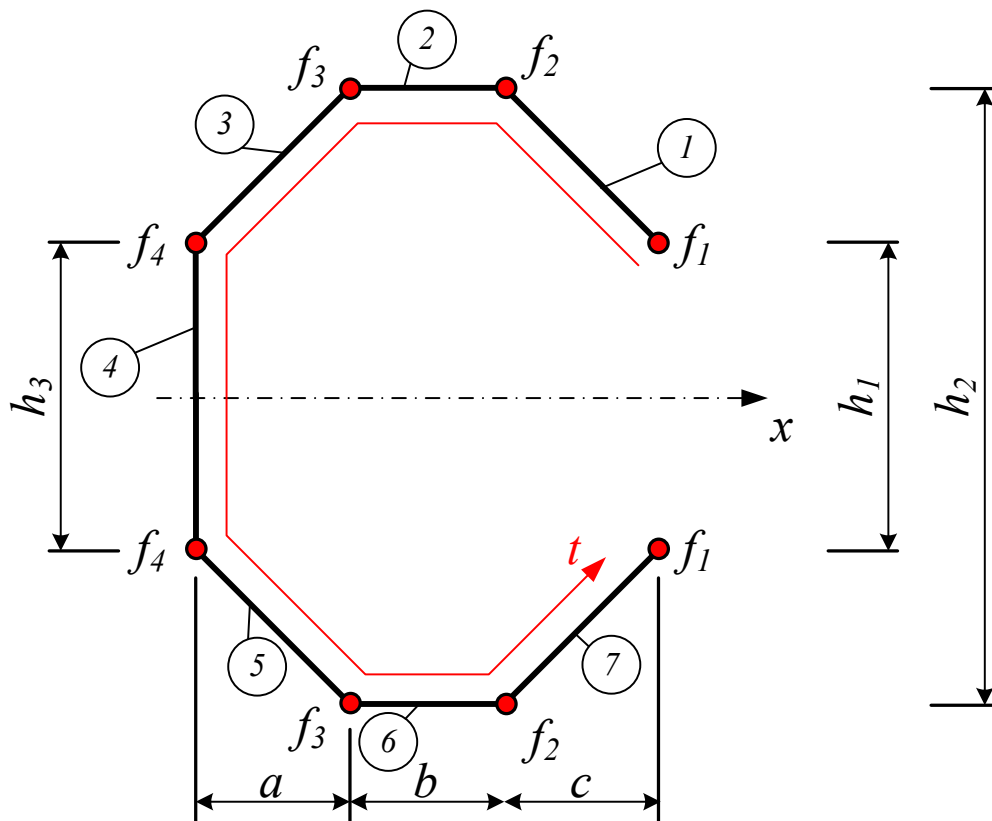


Рис. Д.3.5.1. Відкритий профіль $\delta_\sigma = 0$

Центр ваги перерізу шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x .
Визначаємо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$\begin{aligned}
I_x &= 2f_1\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + 2f_2\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 + 2f_3\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 + 2f_4\left(\frac{h_3}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{2}(f_1 \cdot h_1^2 + f_2 \cdot h_2^2 + f_3 \cdot h_2^2 + f_4 \cdot h_3^2) = \\
&= \frac{1}{2}(5 \cdot 10^2 + 10 \cdot 40^2 + 10 \cdot 40^2 + 15 \cdot 20^2) = 20000 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Знаходимо функцію поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі. Спрямовуємо контурну координату t від однієї вільної точки перерізу до іншої (див. рис. Д.3.5.1).

Розбиваємо переріз на сім ділянок. Через наявність симетрії перерізу досить розглянути ділянки, які знаходяться вище осі x .

Перша ділянка (див. рис. Д.3.5.1). Контурна координата t ($0 \leq t \leq \ell_1$). Допоміжна координата ξ ($0 \leq \xi \leq t$); $dF = \delta d\xi = 0$. Оскільки переріз дискретний, то на кожній ділянці $\Delta S_{xi}(t) = 0$. Тому величини a , b , c і ℓ_i на розрахунок $S_{xi}(t)$ впливу не мають. Тоді

$$S_{x1}^0 = 0, S_{x1}(t) = S_{x1}^0 + f_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right) = 0 + 5 \cdot \frac{20}{2} = 50 \text{ см}^3 = S_{x1}^*.$$

Друга ділянка (див. рис. Д.3.5.1). Контурна координата t ($0 \leq t \leq \ell_2$). Допоміжна координата ξ ($0 \leq \xi \leq t$);

$$S_{x2}(t) = S_{x1}^* + f_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right) = 50 + 10 \cdot \frac{40}{2} = 250 \text{ см}^3 = S_{x2}^*.$$

Третя ділянка (див. рис. Д.3.5.1). Контурна координата t ($0 \leq t \leq \ell_3$). Допоміжна координата ξ ($0 \leq \xi \leq t$);

$$S_{x3}(t) = S_{x2}^* + f_3 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right) = 250 + 10 \cdot \frac{40}{2} = 450 \text{ см}^3 = S_{x3}^*.$$

Четверта ділянка (див. рис. Д.3.5.1). Контурна координата t ($0 \leq t \leq \ell_4$). Допоміжна координата ξ ($0 \leq \xi \leq t$);

$$S_{x4}(t) = S_{x3}^* + f_4 \cdot \left(\frac{h_3}{2}\right) = 450 + 15 \cdot \frac{20}{2} = 650 \text{ см}^3.$$

Побудуємо епюру поточних статичних моментів площі $S_x(t)$ (рис. Д.3.5.2).

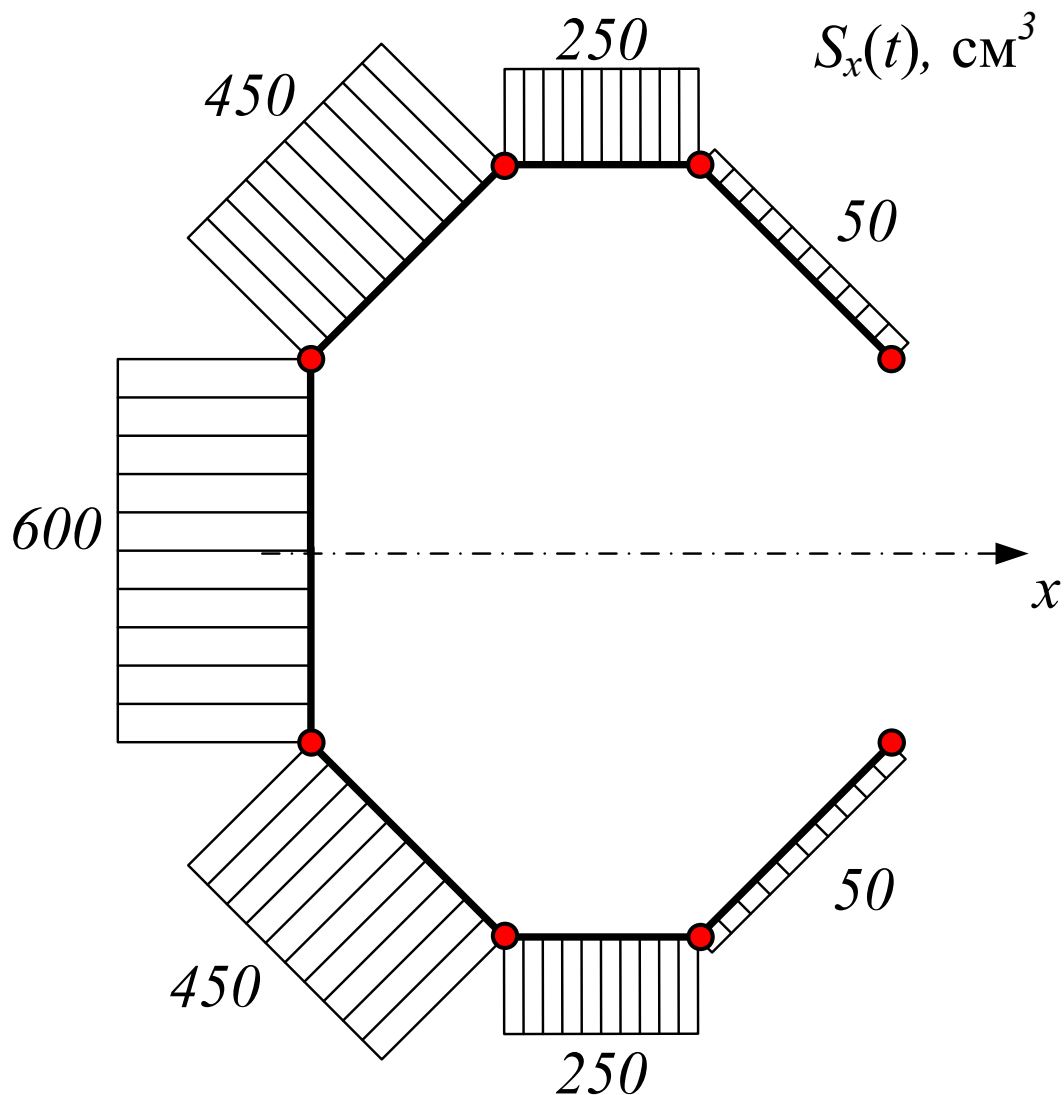


Рис. Д.3.5.2. Епюра $S_x(t)$

Визначаємо функцію потоків дотичних сил

$$\begin{aligned}
 q_p(t) &= -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{20000}{20000} S_x(t) = -1 \cdot S_x(t) \Big|_{s=50 \text{ cm}^3} = \\
 &= -50 \text{ Н/см} \Big|_{s=250 \text{ cm}^3} = -250 \text{ Н/см} \Big|_{s=450 \text{ cm}^3} = \\
 &= -450 \text{ кН/см} \Big|_{s=600 \text{ cm}^3} = -600 \text{ Н/см.}
 \end{aligned}$$

Побудуємо епюру потоків дотичних сил $q_p(t)$ (рис. Д.3.5.3).

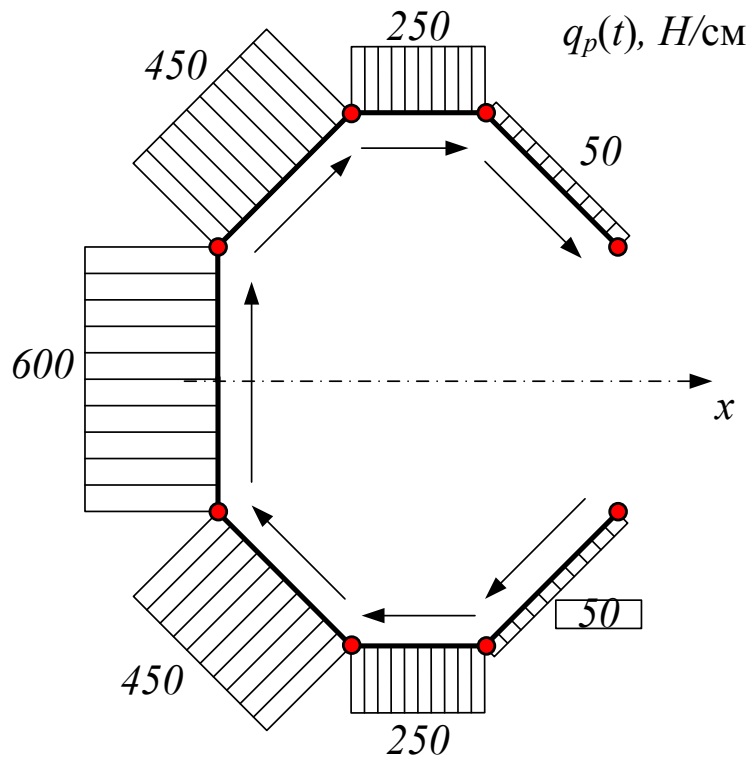


Рис. Д.3.5.3. Епюра $q_p(t)$

Виконаємо перевірку правильності розв'язання. Перевіримо чи виконується умова $\sum_p \int q dy = Q_y$.

Підсумуємо інтеграли на всіх ділянках. Додатний напрямок при розрахунку спрямовано вгору. Горизонтальні ділянки мають нульові інтеграли.

На першій ділянці (отримана величина має знак мінус, оскільки потік спрямовано вниз):

$$\sum_p \int q dy = -q_{p1} \Delta y_1 = -q_{p1} \left(\frac{h_2 - h_1}{2} \right) = -50 \left(\frac{40 - 20}{2} \right) = -500 \text{ Н.}$$

На третій ділянці

$$\sum_p \int q dy = q_{p3} \Delta y_3 = q_{p3} \left(\frac{h_2 - h_1}{2} \right) = 450 \left(\frac{40 - 20}{2} \right) = 4500 \text{ Н.}$$

На четвертій ділянці

$$\sum_p \int q dy = q_{p4} \Delta y_4 = q_{p4} \cdot h_3 = 6000 \cdot 20 = 12000 \text{ Н.}$$

Враховуємо симетрію і, підсумовуючи, отримуємо

$$\sum \int_p q dy = 2(-500 + 4500) + 12000 = 20000 \text{ Н.}$$

Результати перевірки підтвердили правильність розрахунків.

Задача № 6

Розглянути профіль (рис. Д.3.6.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma = 0$). Профіль несиметричний відносно осі x .

Дано: прикладена вгору сила $Q = 10 \text{ кН}$; $a = 18 \text{ см}$; $\delta = 1 \text{ см}$; $f = 6 \text{ см}^2$.

Знайти розподіл потоків дотичних сил на контурній лінії.

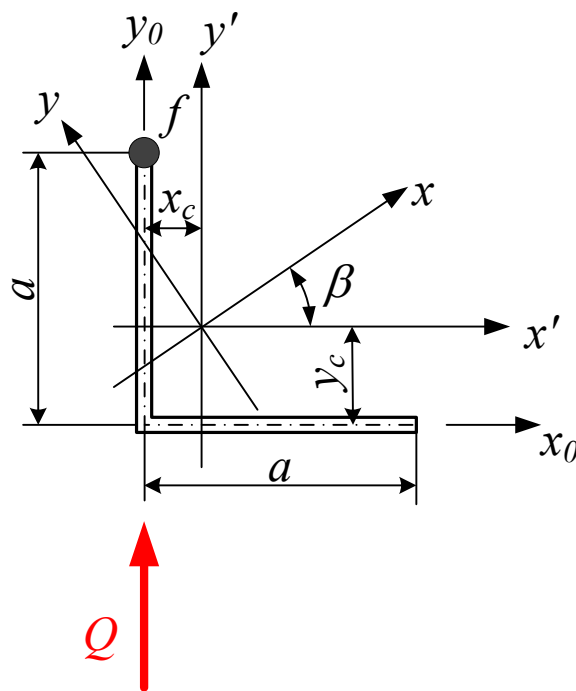


Рис. Д.3.6.1. Відкритий несиметричний профіль

У цьому випадку слід скористатися формулою (2.3) для визначення потоків дотичних сил, спочатку необхідно знайти розташування головних центральних осей в перерізі.

Знайдемо розташування центра ваги перерізу відносно осей x_0 і y_0 :

$$x_c = \frac{a \cdot \delta \cdot \frac{a}{2}}{2a \cdot \delta + f} = \frac{18 \cdot 1 \cdot \frac{18}{2}}{2 \cdot 18 \cdot 1 + 6} = 3,857 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{a \cdot \delta \cdot \frac{a}{2} + f \cdot a}{2a \cdot \delta + f} = \frac{18 \cdot 1 \cdot \frac{18}{2} + 6 \cdot 18}{2 \cdot 18 \cdot 1 + 6} = 6,429 \text{ см.}$$

Через центр ваги проведемо центральні осі x' і y' паралельно осям x_0 і y_0 (див. рис. Д.3.6.1). Обчислимо моменти інерції перерізу щодо центральних осей x' і y' :

$$\begin{aligned} I_{x'} &= a \cdot \delta (-y_c)^2 + \frac{a^3 \cdot \delta}{12} + a \cdot \delta \left(\frac{a}{2} - y_c \right)^2 + f(a - y_c)^2 = \\ &= 18 \cdot 1 \cdot (-6,429)^2 + \frac{18^3 \cdot 1}{12} + 18 \cdot 1 \cdot \left(\frac{18}{2} - 6,429 \right)^2 + 6 \cdot (18 - 6,429)^2 = \\ &= 2152,29 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y'} &= a \cdot \delta (-x_c)^2 + \frac{a^3 \cdot \delta}{12} + a \cdot \delta \left(\frac{a}{2} - x_c \right)^2 + f(-x_c)^2 = \\ &= 18 \cdot 1 \cdot (-3,857)^2 + \frac{18^3 \cdot 1}{12} + 18 \cdot 1 \cdot \left(\frac{18}{2} - 3,857 \right)^2 + 6 \cdot (-3,857)^2 = \\ &= 1319,14 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= a \cdot \delta \cdot (-x_c) \left(\frac{a}{2} - y_c \right) + a \cdot \delta \left(\frac{a}{2} - x_c \right) (-y_c) + f(-x_c)(a - y_c) = \\ &= 18 \cdot 1 \cdot (-3,857) \left(\frac{18}{2} - 6,429 \right) + 18 \cdot 1 \cdot \left(\frac{18}{2} - 3,857 \right) (-6,429) + \\ &+ 6 \cdot (-3,857)(18 - 6,429) = -1041,43 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Визначимо кут повороту центральних x' і y' осей до положення головних осей x і y :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\beta &= -\frac{2I_{x'y'}}{I_{x'} - I_{y'}} = \frac{2 \cdot (-1041,43)}{2152,29 - 1319,14} = 1,1903; \\ \beta &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1,1903) = 34,099^\circ. \end{aligned}$$

Покажемо головні осі на рис. Д.3.6.1.

Розрахуємо моменти інерції перерізу в головних осях:

$$\begin{aligned}
 I_x &= I_{x'} \cdot \cos^2 \beta + I_{y'} \sin^2 \beta - I_{x'y'} \cdot \sin 2\beta = \\
 &= 2152,29 \cdot \cos^2 34,099^\circ + 1319,14 \cdot \sin^2 34,099^\circ - \\
 &\quad - (-1041,43) \cdot \sin(2 \cdot 34,099^\circ) = 2857,37 \text{ см}^4; \\
 I_y &= I_{y'} \cdot \cos^2 \beta + I_{x'} \sin^2 \beta + I_{x'y'} \cdot \sin 2\beta = \\
 &= 1319,14 \cdot \cos^2 34,099^\circ + 2152,29 \cdot \sin^2 34,099^\circ + \\
 &\quad + (-1041,43) \cdot \sin(2 \cdot 34,099^\circ) = 614,06 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Зазначимо ділянки для розрахунку поточного статичного моменту, напрямком контурної координати (див. рис. Д.3.6.2) і обчислимо проекції сили на головні осі:

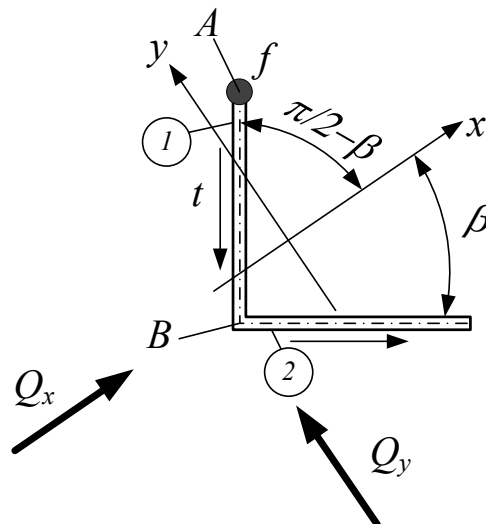


Рис. Д.3.6.2. Головні осі інерції несиметричного перерізу

$$\begin{aligned}
 Q_x &= Q \cdot \sin \beta = 10000 \cdot \sin 34,099^\circ = 5606,29 \text{ Н}; \\
 Q_y &= Q \cdot \cos \beta = 10000 \cdot \cos 34,099^\circ = 8286,67 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

За наведеними формулами

$$\begin{aligned}
 x_i &= (x_{0i} - x_c) \cos \beta + (y_{0i} - y_c) \sin \beta; \\
 y_i &= (y_{0i} - y_c) \cos \beta + (x_{0i} - x_c) \sin \beta
 \end{aligned}$$

визначимо необхідні в подальшому координати точок A і B :

$$x_A = 3,293 \text{ см}; \quad y_A = 11,744 \text{ см}; \quad x_B = -6,798 \text{ см}; \quad y_B = -3,161 \text{ см}.$$

Запишемо вирази поточних статичних моментів S_{xi} й S_{yi} на першій і другій ділянках:

$$S_{x1} = f \cdot y_A + y_A \cdot t - \frac{t^2}{2} \cos \beta; \quad S_{y1} = f \cdot x_A + x_A \cdot t - \frac{t^2}{2} \sin \beta;$$

$$S_{x2} = S_{x1}^* + y_B \cdot t - \frac{t^2}{2} \sin \beta; \quad S_{y2} = S_{y1}^* + x_B \cdot t - \frac{t^2}{2} \cos \beta.$$

Тепер можна скористатися формулою (2.3) для розрахунку потоків дотичних сил на двох ділянках:

$$q_{Pi}(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_{xi}(t) - \frac{Q_x}{I_y} S_{yi}(t).$$

Отримані числові значення наведемо в табл. Д.3.6.1

Таблица Д.3.6.1

Числові значення потоку дотичних сил в різних точках контуру перерізу

t , см	q_{P1} , Н/см	q_{P2} , Н/см
0	-384,6	-320,5
1	-445,0	-252,3
2	-497,8	-189,9
3	-543,1	-133,5
4	-580,9	-83,1
5	-611,2	-38,6
6	-633,9	-0,0048
7	-649,1	32,6
8	-656,9	59,4
9	-657,1	80,1
10	-649,7	95,0
11	-634,9	103,9
12	-612,5	106,8
13	-582,7	103,9
14	-545,3	95,0
15	-500,4	80,1
16	-447,9	59,4
17	-388,0	32,5
18	-320,5	0,0004

Як видно з табл. Д.3.6.1, у кінці другої ділянки значення потоку приблизно дорівнює нулю (вільна точка). Це свідчить про правильність обчислень.

Побудуємо епюру потоку дотичних сил на контурі перерізу (рис. Д.3.6.3).

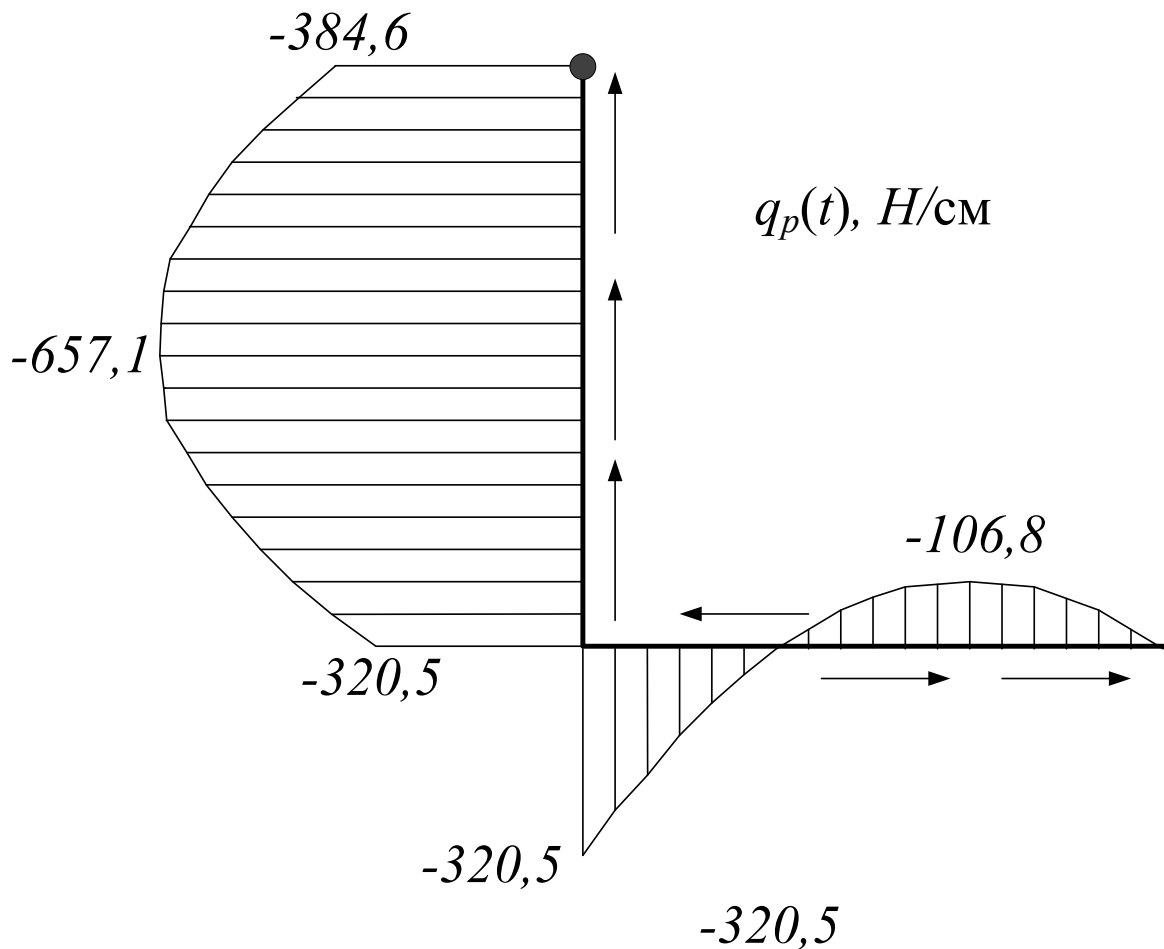


Рис. Д.3.6.3. Епюра $q_p(t)$

Природно, що рівнодіюча потоків дотичних сил на ділянці, яка починається зосередженою площею, дорівнює заданій величині поперечної сили Q . Крім того, рівнодіюча цих потоків на другій ділянці дорівнює нулю. Це підтверджується проведеною перевіркою: інтеграцією потоків дотичних сил в межах кожної ділянки.

Зауваження: для проведення розрахунків потоків дотичних сил в несиметричних перерізах (рис. Д.3.6.4) може бути застосована й інша методика, в якій як робочі осі використовують центральні осі поперечного перерізу.

Розрахунки виконують в такій послідовності:

- 1) визначають положення центра ваги перерізу;
- 2) обчислюють центральні моменти інерції перерізу $I_{x'}$, $I_{y'}$ і $I_{x'y'}$;

3) встановлюють функції поточних статичних моментів площі $S_{x'}$ і $S_{y'}$;

4) розраховують потоки дотичних сил за формулами:

$$q_{y'}(t) = -\frac{Q_{y'}}{I_{x'} \cdot I_{y'} - I_{x'y'}^2} (I_{y'} \cdot S_{x'}(t) - I_{x'y'} S_{y'}(t));$$

$$q_{x'}(t) = -\frac{Q_{x'}}{I_{x'} \cdot I_{y'} - I_{x'y'}^2} (I_{x'} \cdot S_{y'}(t) - I_{x'y'} S_{x'}(t));$$

$$q_P(t) = q_{x'}(t) + q_{y'}(t).$$

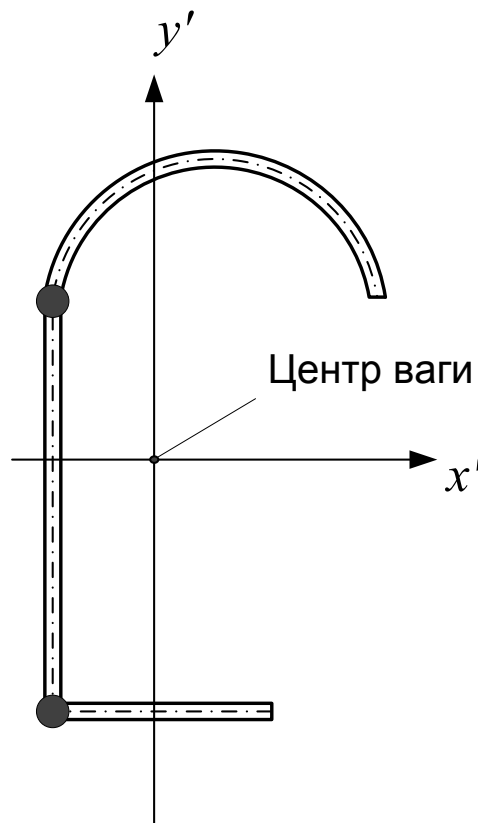


Рис. Д.3.6.4. Несиметричний переріз

Для визначення потоків дотичних сил в несиметричному перерізі можна застосовувати будь-яку з двох методик.

**ВАРІАНТИ ВИХІДНИХ ДАНИХ ДО ЗАДАЧІ «ЦЕНТР ЗГИНАННЯ
ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ»**

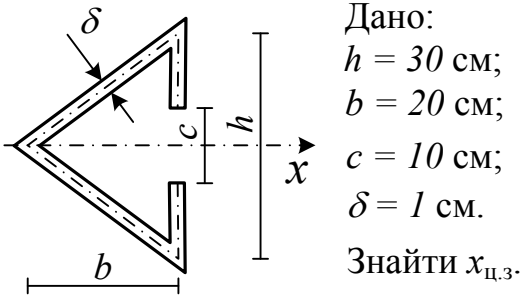


Рис. Д.4.1

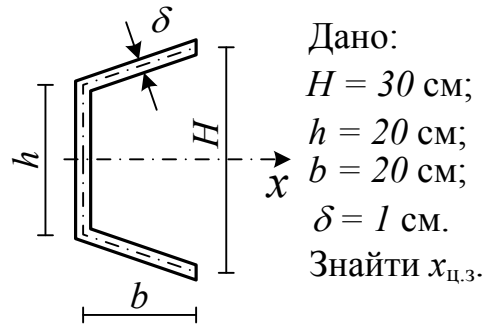


Рис. Д.4.2

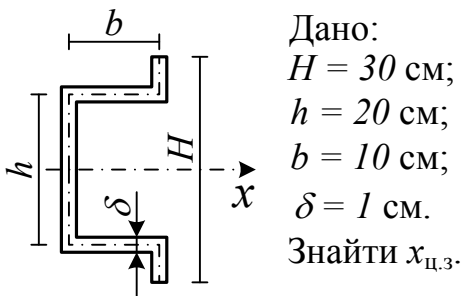


Рис. Д.4.3

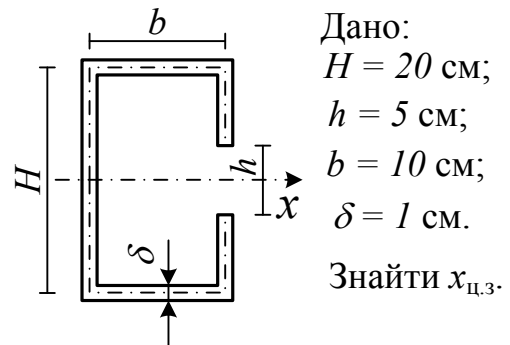


Рис. Д.4.4

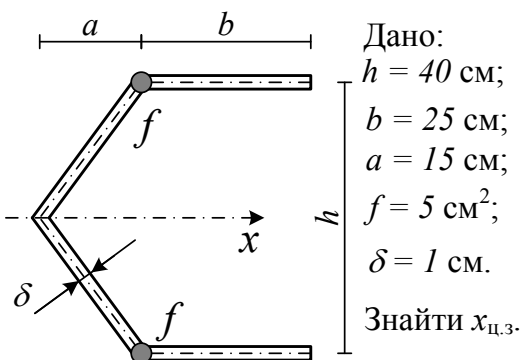


Рис. Д.4.5

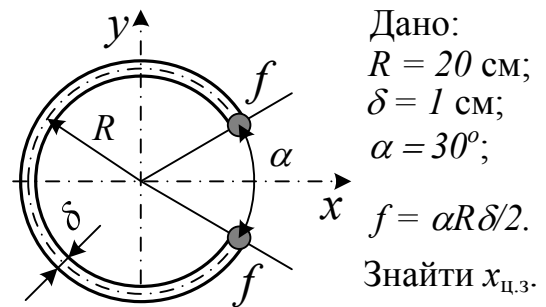


Рис. Д.4.6

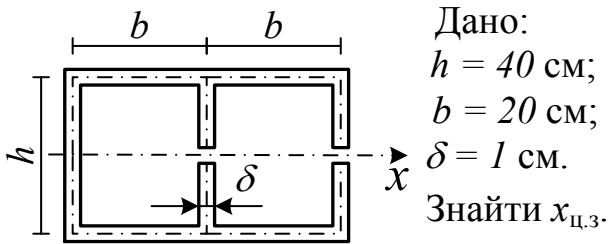


Рис. Д.4.7

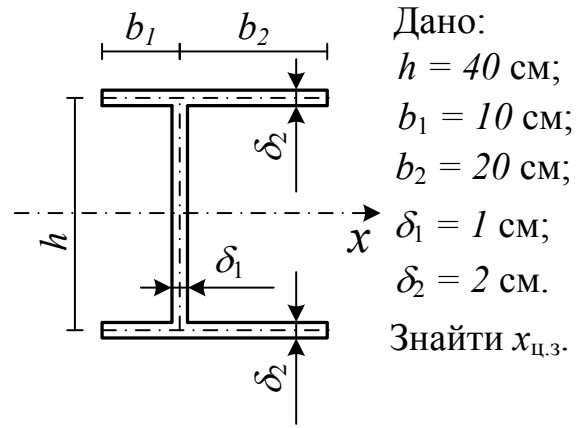


Рис. Д.4.8

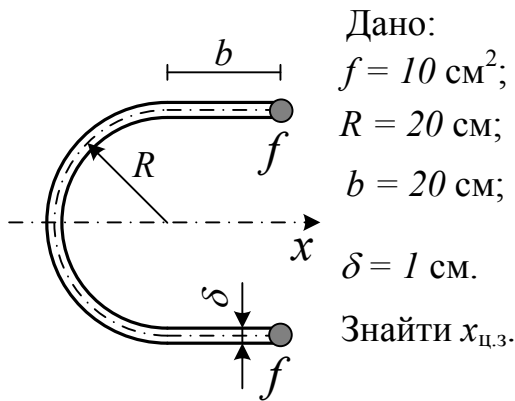


Рис. Д.4.9

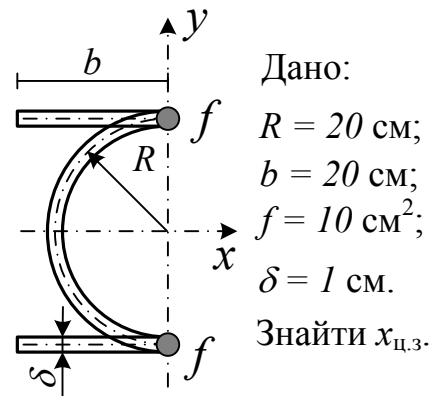


Рис. Д.4.10

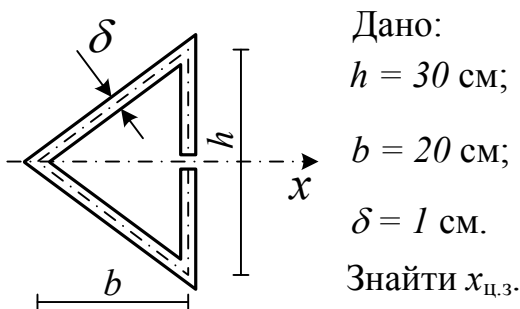


Рис. Д.4.11

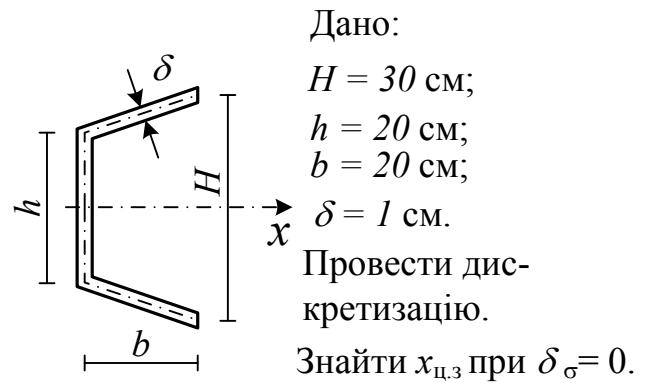
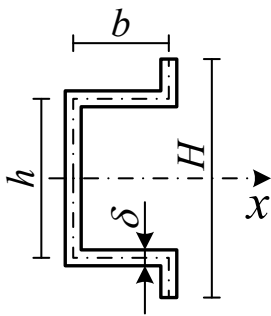
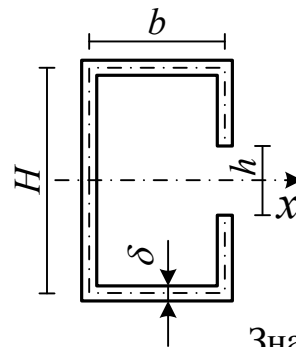


Рис. Д.4.12



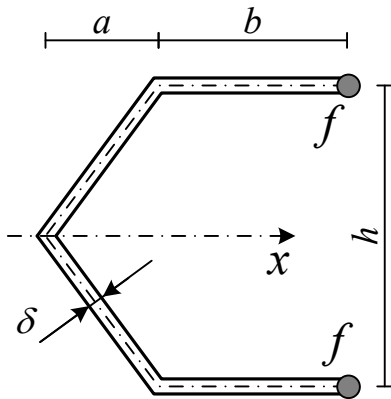
Дано:
 $H = 30$ см;
 $h = 20$ см;
 $b = 10$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Провести дискретизацію.
 Знайти $x_{ц.з}$ при $\delta_{\sigma} = 0$.

Рис. Д.4.13



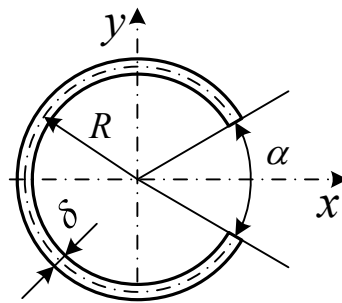
Дано:
 $H = 20$ см;
 $h = 5$ см;
 $b = 10$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Провести дискретизацію.
 Знайти $x_{ц.з}$ при $\delta_{\sigma} = 0$.

Рис. Д.4.14



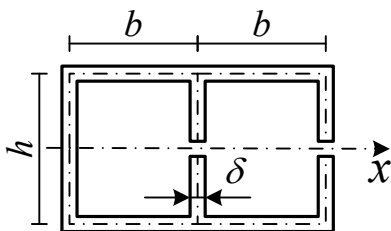
Дано:
 $h = 40$ см;
 $b = 25$ см;
 $a = 15$ см;
 $f = 5$ см²;
 $\delta = 1$ см.
 Знайти $x_{ц.з}$.

Рис. Д.4.15



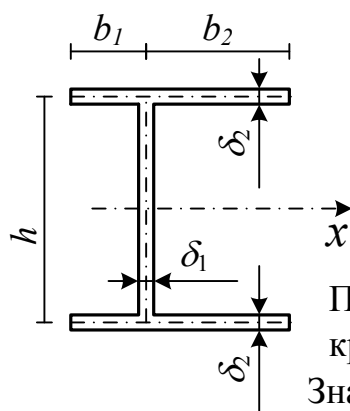
Дано:
 $R = 20$ см;
 $\delta = 1$ см;
 $\alpha = 20^\circ$.
 Знайти $x_{ц.з}$.

Рис. Д.4.16



Дано:
 $h = 40$ см;
 $b = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Провести дискретизацію.
 Знайти $x_{ц.з}$ при $\delta_{\sigma} = 0$.

Рис. Д.4.17



Дано:
 $h = 40$ см;
 $b_1 = 10$ см;
 $b_2 = 20$ см;
 $\delta_1 = 1$ см;
 $\delta_2 = 2$ см.
 Провести дискретизацію.
 Знайти $x_{ц.з}$ при $\delta_{\sigma} = 0$.

Рис. Д.4.18

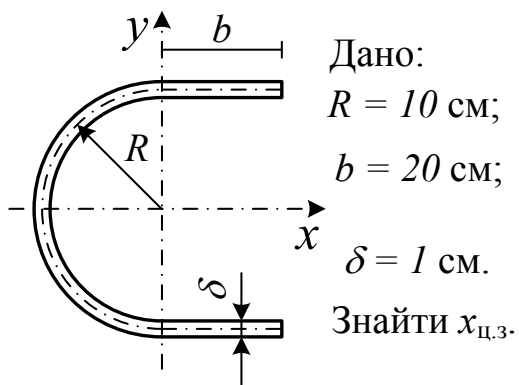


Рис. Д.4.19

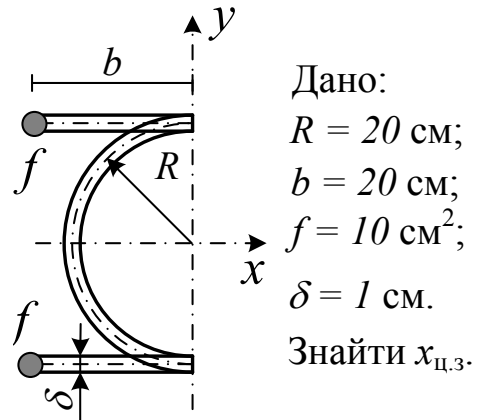


Рис. Д.4.20

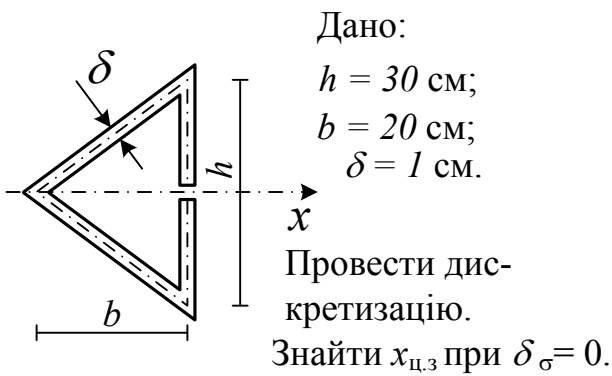


Рис. Д.4.21

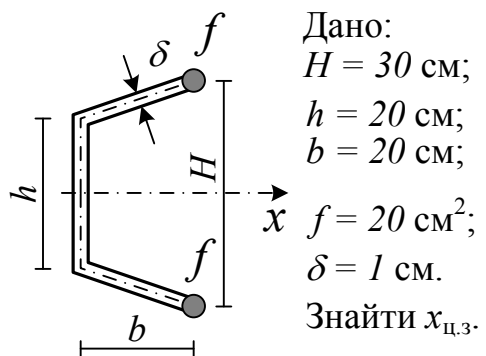


Рис. Д.4.22

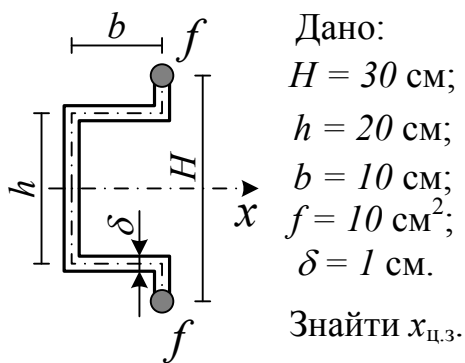


Рис. Д.4.23

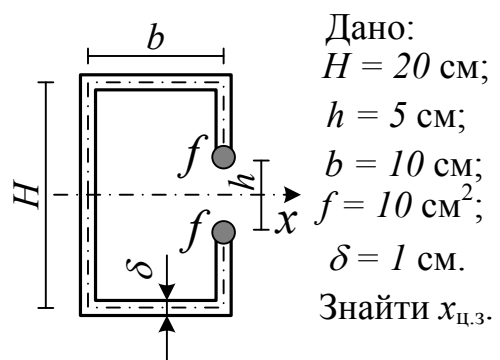
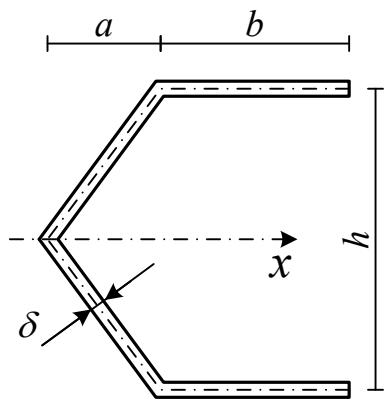
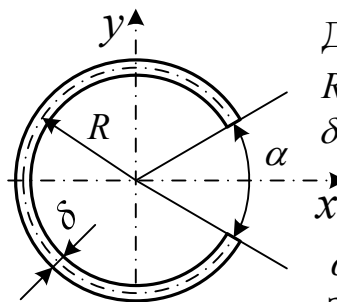


Рис. Д.4.24



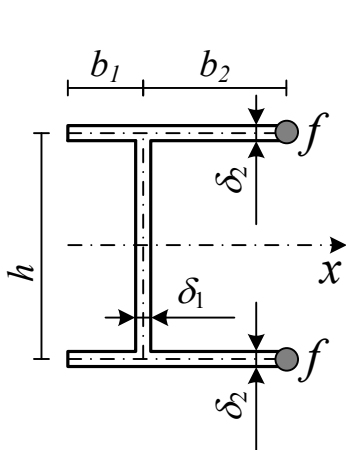
Дано:
 $h = 40$ см;
 $b = 25$ см;
 $a = 15$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Провести дискретизацию.
 Знайти $x_{ц.з.}$
 при $\delta_{\sigma} = 0$.

Рис. Д.4.25



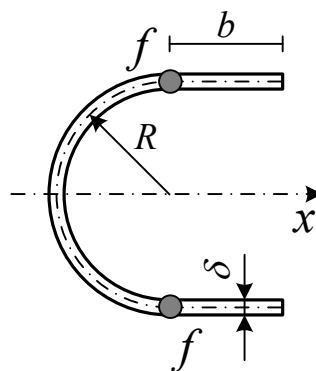
Дано:
 $R = 20$ см;
 $\delta = 1$ см;
 $\alpha = 60^\circ$.
 Знайти $x_{ц.з.}$.

Рис. Д.4.26



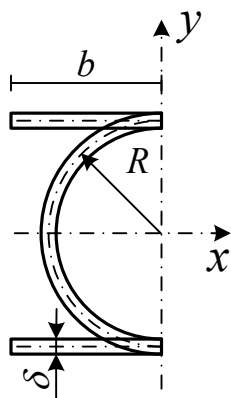
Дано:
 $h = 40$ см;
 $b_1 = 10$ см;
 $b_2 = 20$ см;
 $f = 10$ см²;
 $\delta_1 = 1$ см;
 $\delta_2 = 2$ см.
 Знайти $x_{ц.з.}$.

Рис. Д.4.27



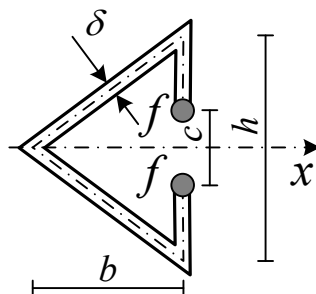
Дано:
 $f = 10$ см²;
 $R = 20$ см;
 $b = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Знайти $x_{ц.з.}$.

Рис. Д.4.28



Дано:
 $R = 10$ см;
 $b = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Знайти $x_{ц.з.}$.

Рис. Д.4.29



Дано:
 $h = 30$ см;
 $b = 20$ см;
 $c = 10$ см;
 $f = 10$ см²;
 $\delta = 1$ см.
 Знайти $x_{ц.з.}$.

Рис. Д.4.30

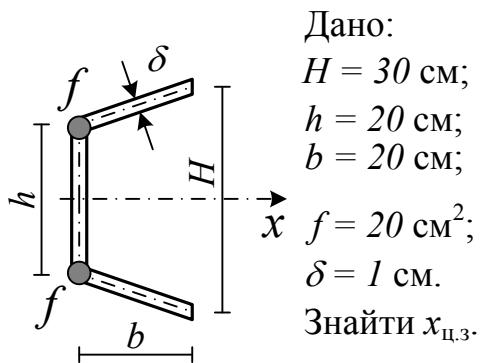


Рис. Д.4.31

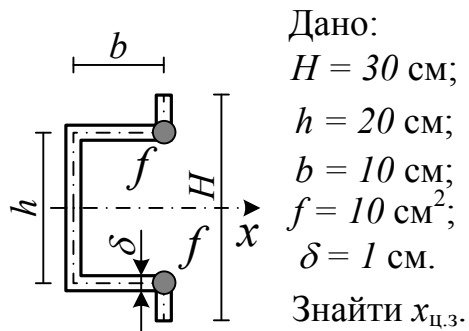


Рис. Д.4.32

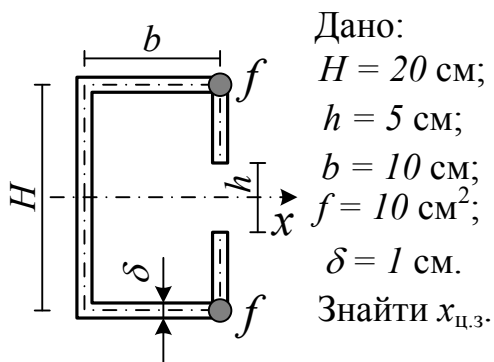


Рис. Д.4.33

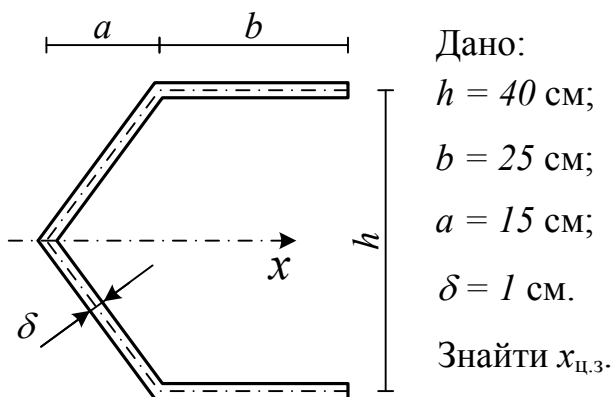


Рис. Д.4.34

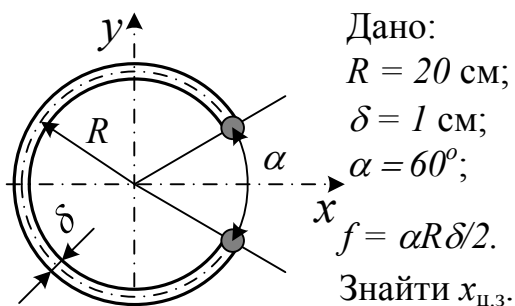
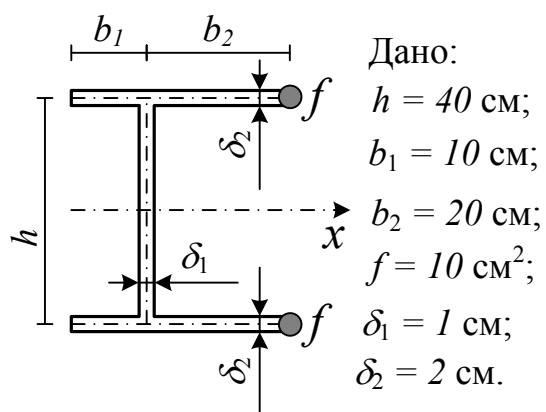


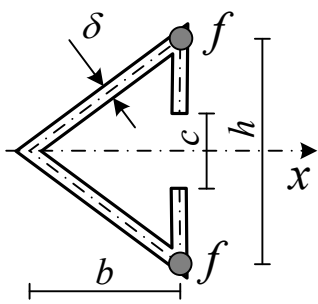
Рис. Д.4.35



Провести дискретизацию.

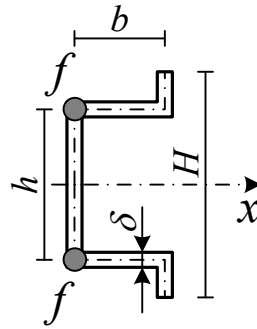
Найти $x_{ц.з}$ при $\delta_\sigma = 0.$

Рис. Д.4.36



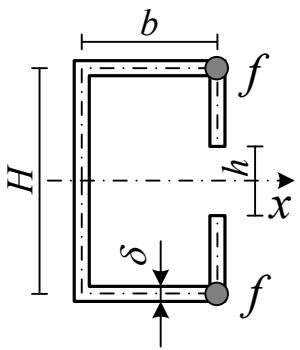
Дано:
 $h = 30 \text{ см};$
 $b = 20 \text{ см};$
 $c = 10 \text{ см};$
 $f = 10 \text{ см}^2;$
 $\delta = 1 \text{ см}.$
 Знайти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.37



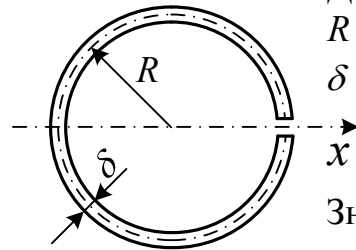
Дано:
 $H = 30 \text{ см};$
 $h = 20 \text{ см};$
 $b = 10 \text{ см};$
 $f = 10 \text{ см}^2;$
 $\delta = 1 \text{ см}.$
 Знайти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.38



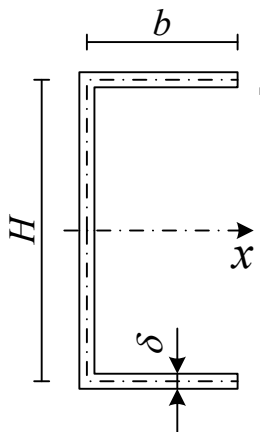
Дано:
 $H = 20 \text{ см};$
 $h = 5 \text{ см};$
 $b = 10 \text{ см};$
 $f = 10 \text{ см}^2;$
 $\delta = 1 \text{ см}.$
 Знайти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.39



Дано:
 $R = 20 \text{ см};$
 $\delta = 1 \text{ см}.$
 Знайти $x_{ц.з.}$

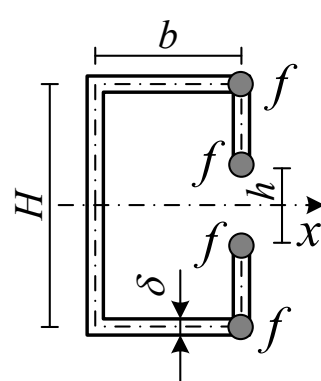
Рис. Д.4.40



Дано:
 $H = 40 \text{ см};$
 $b = 20 \text{ см};$
 $\delta = 1 \text{ см}.$

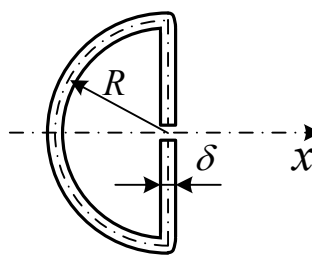
1. Знайти $x_{ц.з.}$ при $\delta_{\sigma} \neq 0$.
2. Провести дискретизацію та знайти $x_{ц.з.}$ при $\delta_{\sigma} = 0$.

Рис. Д.4.41



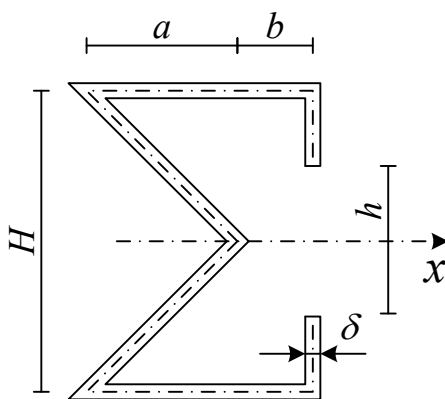
Дано:
 $H = 20 \text{ см};$
 $h = 5 \text{ см};$
 $b = 10 \text{ см};$
 $f = 10 \text{ см}^2;$
 $\delta = 1 \text{ см}.$
 Знайти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.42



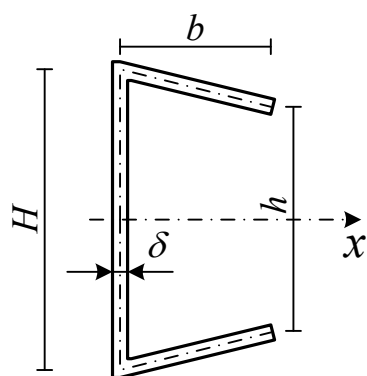
Дано:
 $R = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.43



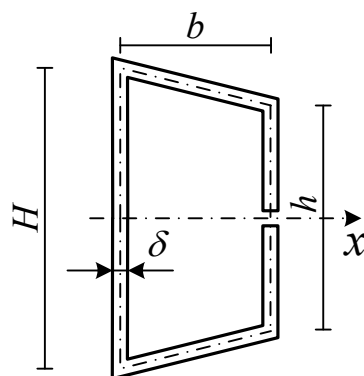
Дано:
 $H = 40$ см;
 $h = 20$ см;
 $a = 20$ см;
 $b = 10$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.44



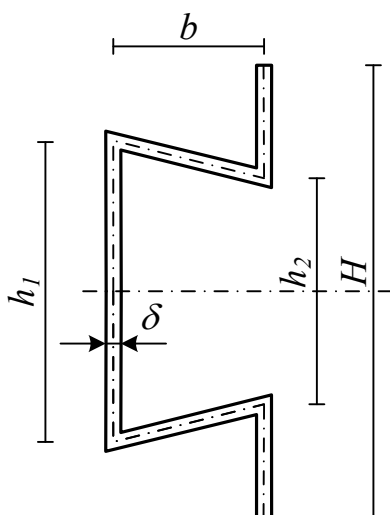
Дано:
 $H = 40$ см;
 $h = 30$ см;
 $b = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.45



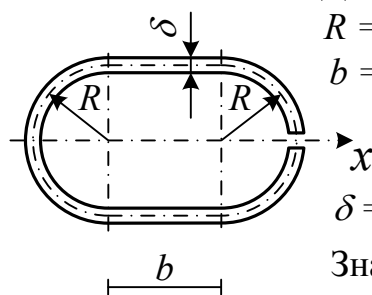
Дано:
 $H = 40$ см;
 $h = 30$ см;
 $b = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.46



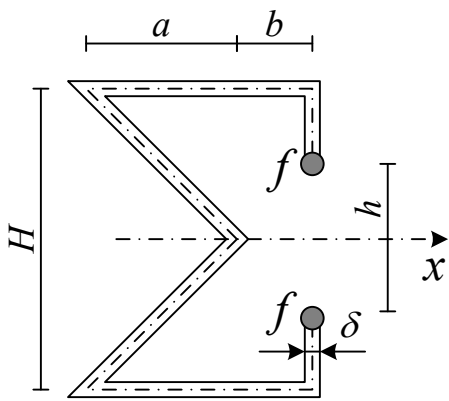
Дано:
 $H = 60$ см;
 $h_1 = 40$ см;
 $h_2 = 30$ см;
 $b = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.47



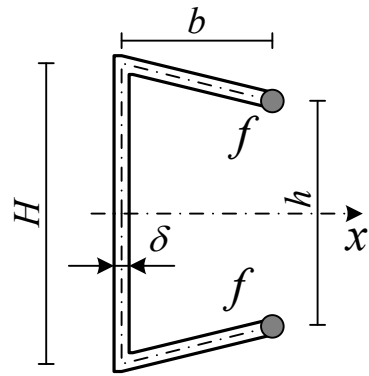
Дано:
 $R = 20$ см;
 $b = 30$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.48



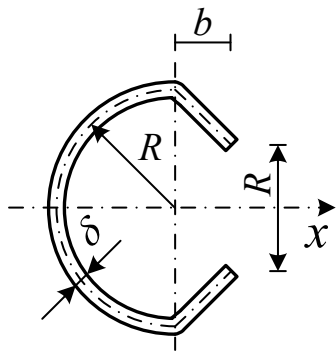
Дано:
 $H = 40$ см;
 $h = 20$ см;
 $a = 20$ см;
 $b = 10$ см;
 $f = 5$ см²;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.49



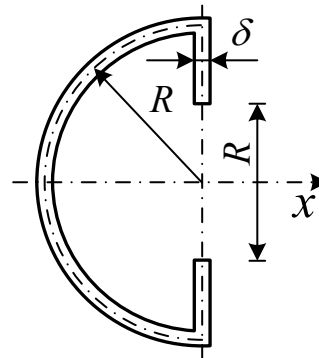
Дано:
 $H = 40$ см;
 $h = 30$ см;
 $b = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.50



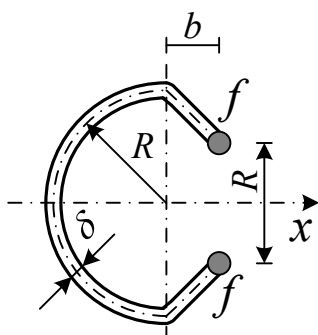
Дано:
 $R = 20$ см;
 $b = 10$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.51



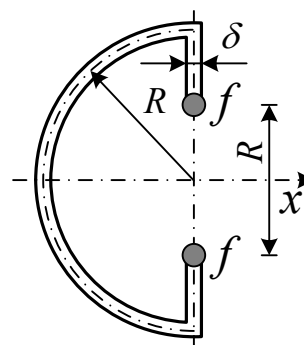
Дано:
 $R = 20$ см;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.52



Дано:
 $R = 20$ см;
 $b = 10$ см;
 $f = 5$ см²;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.53



Дано:
 $R = 20$ см;
 $f = 5$ см²;
 $\delta = 1$ см.
 Найти $x_{ц.з.}$

Рис. Д.4.54

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ТЕМОЮ «ЦЕНТР ЗГИНАННЯ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ»

Задача № 1

Розглянути відкритий простий профіль без розгалужень (рис. Д.5.1.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

Дано: товщина стінок δ постійна на всьому контурі перерізу; $\delta=1$ см; $a=20$ см; $b=10$ см; $R=20$ см; в кінцевих точках розташовані зосереджені площі $f=5$ см².

Знайти положення центра згинання.

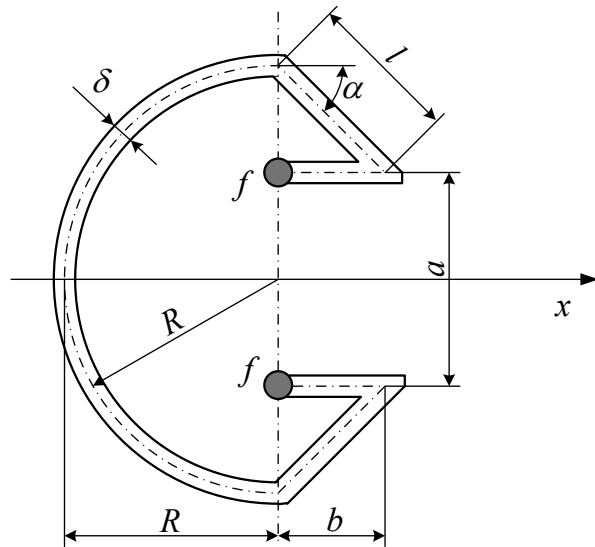


Рис. Д.5.1.1. Простий відкритий профіль

Розв'язання

Положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. Він внаслідок симетрії знаходиться на осі x . На цій же осі знаходиться і центр згинання.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x .

Позначимо відстань від осі x до центра ваги похилої ділянки контуру c .

Обчислимо деякі геометричні параметри:

$$c = \frac{R - \frac{a}{2}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{R + \frac{a}{2}}{2} = \frac{20 + \frac{20}{2}}{2} = 15 \text{ см};$$

$$l = \sqrt{\left(R - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\left(20 - \frac{20}{2}\right)^2 + 10^2} = 14,14 \text{ см};$$

$$\sin \alpha = \frac{R - \frac{a}{2}}{\ell} = \frac{20 - \frac{20}{2}}{14,14} = 0,7071; \quad \sin^2 \alpha = 0,5.$$

Симетричний переріз складається з двох зосереджених площ, двох похилих смужок, двох горизонтальних смужок і півкільця. Обчислимо момент інерції

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{\pi R^3 \delta}{2} + 2f \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b\delta \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\ell^3 \delta}{12} \sin^2 + \ell \delta \cdot c^2\right) = \\ &= \frac{3,14 \cdot 20^3 \cdot 1}{2} + 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 + \\ &+ 2\left(\frac{14,14^3 \cdot 1}{12} \cdot 0,5 + 14,14 \cdot 1 \cdot \left(\frac{20 + \frac{20}{2}}{2}\right)^2\right) = 21165 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Визначимо функцію $S_x(t)$ поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x . Напрямок контурної координати t , що з'єднує вільні точки в перерізі, показано на рис. Д.5.1.2.

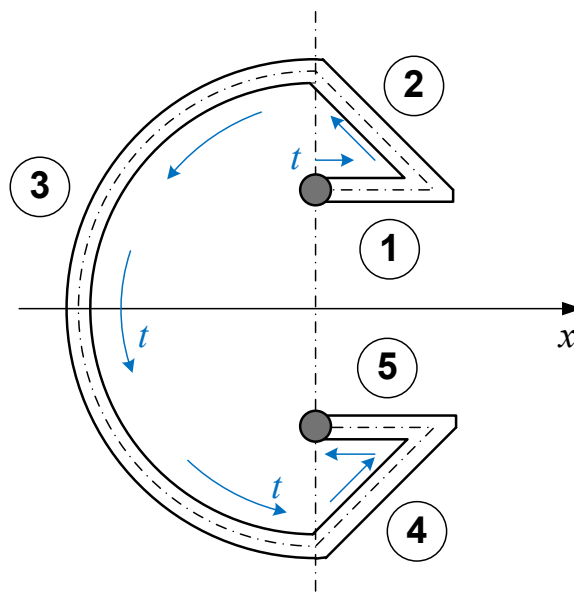


Рис. Д.5.1.2. Напрямок контурної координати і номери ділянок в перерізі

Розіб'ємо переріз на п'ять ділянок. В цьому випадку кожна ділянка обмежена двома зламами контурної лінії.

Розглянемо ділянку 1 (рис. Д.5.1.3): $0 \leq t \leq b$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$;
 $S_{x1}^0 = 0$.

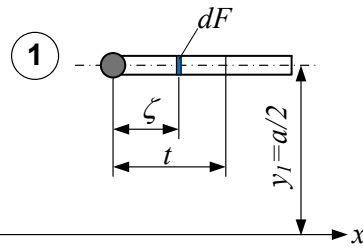


Рис. Д.5.1.3. Перша ділянка

$$S_{x1}(t) = S_{x1}^0 + f \frac{a}{2} + \int_0^t y_1 dF = f \frac{a}{2} + \int_0^t \frac{a}{2} \delta d\zeta = 5 \cdot \frac{20}{2} + \int_0^t \frac{20}{2} 1 d\zeta =$$

$$= 50 + \int_0^t 10 d\zeta = 50 + 10\zeta \Big|_0^t = 50 + 10t \Big|_{t=0}^{t=10 \text{ см}} = 50 \text{ см}^2 \Big|_{t=10 \text{ см}} = 150 \text{ см}^2 = S_{x1}^*.$$

Розглянемо ділянку 2 (рис. Д.5.1.4): $0 \leq t \leq \ell$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$;
 $S_{x2}^0 = S_{x1}^*$;

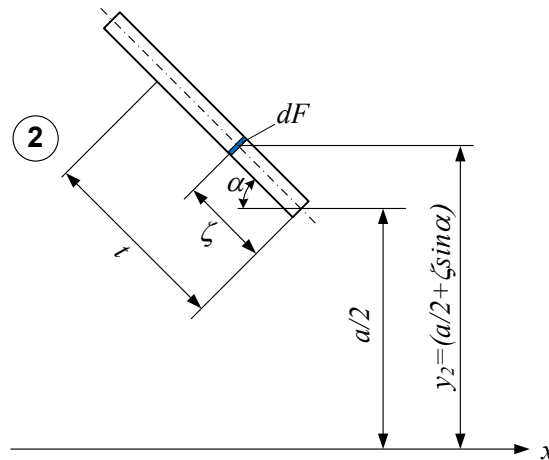


Рис. Д.5.1.4. Друга ділянка

$$S_{x2}(t) = S_{x2}^0 + \int_0^t y_2 dF = S_{x1}^* + \int_0^t \left(\frac{a}{2} + \zeta \sin \alpha \right) \delta d\zeta = 150 + \int_0^t \left(\frac{20}{2} + \zeta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) 1 d\zeta =$$

$$= 150 + \int_0^t 10 d\zeta + \int_0^t 0,7071 \zeta d\zeta = 150 + \left(10\zeta + 0,7071 \frac{\zeta^2}{2} \right) \Big|_0^t =$$

$$= 150 + \left(10t + 0,3536 t^2 \right) \Big|_{t=0}^{t=14,14 \text{ см}} = 150 \text{ см}^2 \Big|_{t=14,14 \text{ см}} = 362,1 \text{ см}^2 = S_{x2}^*.$$

Розглянемо ділянку 3 (рис. Д.5.1.5): $t = R\varphi$; $0 \leq \varphi \leq \pi$; $0 \leq \psi \leq \varphi$;
 $dF = \delta R d\psi$; $S_{x3}^0 = S_{x2}^*$;

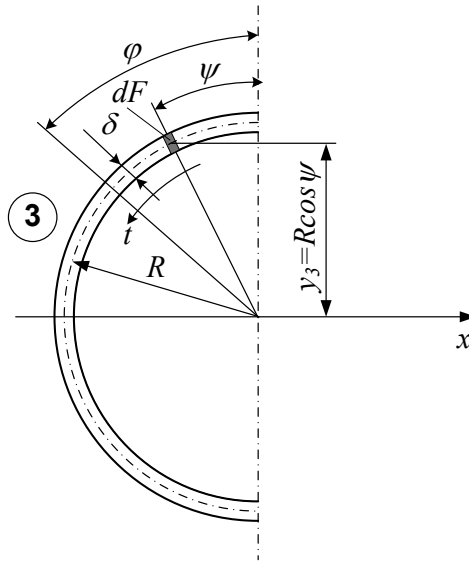


Рис. Д.5.1.5. Третя ділянка

$$\begin{aligned}
 S_{x3}(t) &= S_{x3}^0 + \int_0^\varphi y_3 dF = S_{x2}^* + \int_0^\varphi R \cos \psi \delta R d\psi = 362,1 + \int_0^\varphi 20^2 \cdot 1 \cos \psi d\psi = \\
 &= 362,1 + \int_0^\varphi 400 \cos \psi d\psi = 362,1 + (400 \sin \psi) \Big|_0^\varphi = 362,1 + (400 \sin \varphi) \Big|_{\varphi=0} = \\
 &= 362,1 \text{ см}^2 \Big|_{\varphi=\pi} = 362,1 \text{ см}^2 \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 762,1 \text{ см}^2.
 \end{aligned}$$

Далі симетрично.

Побудуємо епюру поточного статичного моменту (рис. Д.5.1.6).

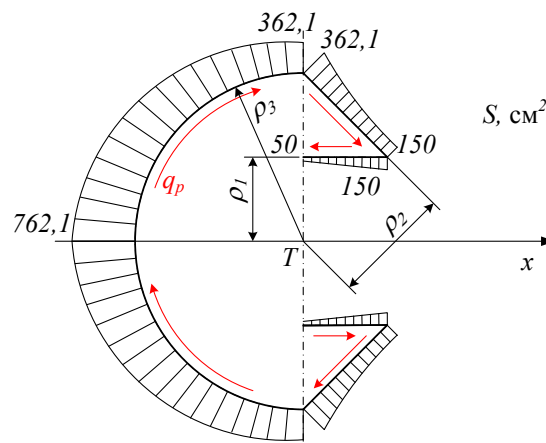


Рис. Д.5.1.6. Епюра $S_x(t)$

Для спрощення розрахунків положення центра згинання приймаємо чисельно $Q_y = I_x$. Визначимо функцію потоків дотичних сил $q_p(t)$. Тоді

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -S_x(t).$$

Тепер еюра потоків дотичних сил буде збігатися з епюрою поточно-го статичного моменту (рис. Д.5.1.6). Покажемо напрямок потоків на рис. Д.5.1.6.

Визначимо положення центра згинання на осі x . Для цього знайдемо момент, створюваний потоком $q_p(t)$ відносно точки T (такий же момент відносно цієї точки створюватиме і фіктивна сила Q_y , що проходить через центр згинання).

Спочатку обчислимо плечі ρ_i , на яких під впливом потоку дотичних сил $q_p(t)$ сформовується момент на кожній ділянці:

$$\rho_1 = \frac{a}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см}; \quad \rho_2 = R \cos \alpha = 20 \cdot 0,7071 = 14,14 \text{ см};$$

$$\rho_3 = R = 20 \text{ см}.$$

Обчислення моменту на третій ділянці внаслідок симетрії проведемо тільки на верхній її половині.

На кожному диференціальному елементі першої ділянки сила діє в одному напрямку, тому для обчислення моменту можна скористатися площею еюри потоків (рівнодіючою потоку на ділянці):

$$M_1 = \left(\frac{S_{x1}^0 + S_{x2}^*}{2} \right) \cdot b \cdot \rho_1 = \left(\frac{50 + 150}{2} \right) \cdot 10 \cdot 10 = 10000 \text{ см}^5.$$

На другій ділянці для отримання рівнодіючої потоку дотичних сил необхідно вибрати інтеграл

$$M_2 = \left(\int_0^{\ell} S_{x2}(t) dt \right) \rho_2 = \left(\int_0^{14,14} (150 + t + 0,3536t^2) dt \right) \rho_2 =$$

$$= \left(150t + 10 \cdot \frac{t^2}{2} + 0,3536 \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{14,14} \cdot 14,14 =$$

$$= \left(150 \cdot 14,14 + 10 \cdot \frac{14,14^2}{2} + 0,3536 \frac{14,14^3}{3} \right) \cdot 14,14 = 48855 \text{ см}^5.$$

На третій ділянці для отримання рівнодіючої потоку дотичних сил необхідно вибрати інтеграл

$$M_3 = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} S_{x3}(\varphi) R d\varphi \right) \rho_3 = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (362,1 + 400 \sin \varphi) R d\varphi \right) \rho_3 =$$

$$= \left((362,1\varphi - 400 \cos \varphi) \cdot 20 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 20 = (362,1 \cdot 1,57 + 400) \cdot 20^2 = 387399 \text{ см}^5.$$

Сумарний момент з урахуванням симетрії

$$M_\Sigma = 2(M_1 + M_2 + M_3) = 2(10000 - 48855 - 387399) = -832508 \text{ см}^5.$$

Знайдемо відстань від моментної точки до центра згинання

$$d = \frac{M_\Sigma}{Q_y} = \frac{M_\Sigma}{I_x} = -\frac{832508}{21165} = -39,33 \text{ см}.$$

Покажемо на рис. Д.5.1.7 положення центра згинання (відкладаємо вліво, оскільки $d < 0$).

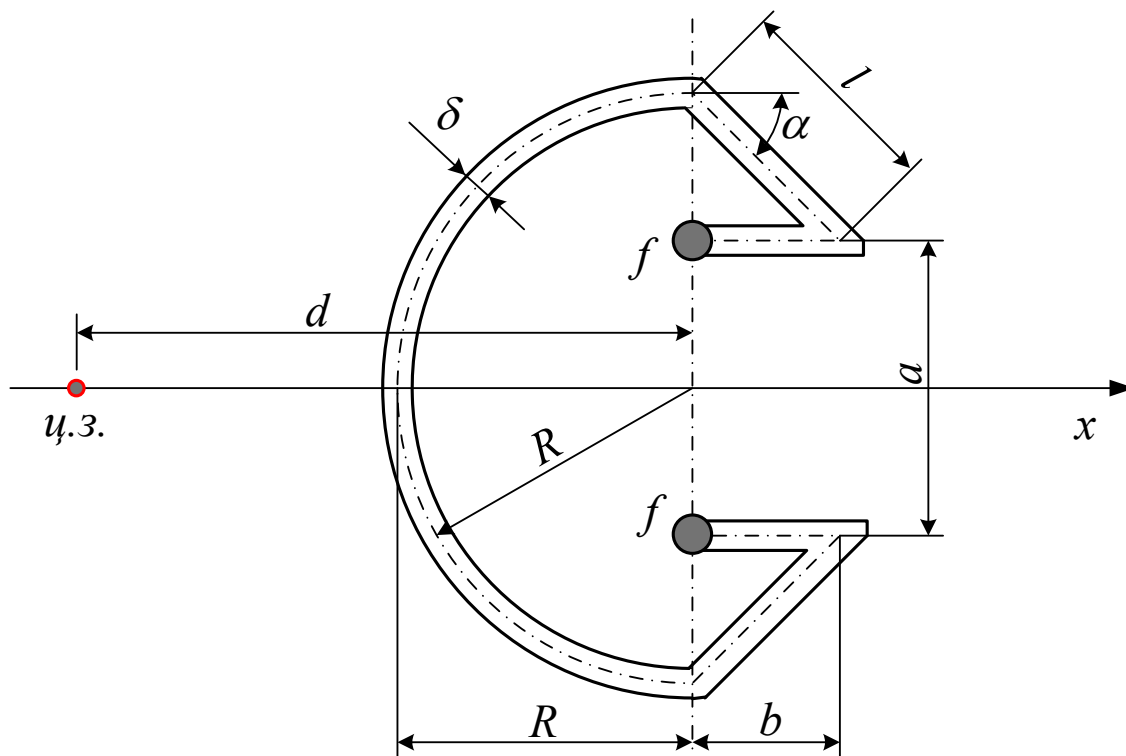


Рис. Д.5.1.7. Положення центра згинання

Задача № 2

Розглянути відкритий профіль з розгалуженнями (рис. Д.5.2.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

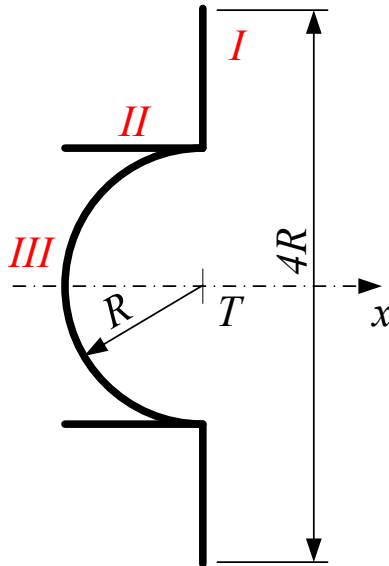


Рис. Д.5.2.1. Відкритий профіль з розгалуженнями

Дано: товщина стінок δ постійна на всьому контуру перерізу.
Знайти положення центра згинання.

Розв'язання

Положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. Він внаслідок симетрії знаходиться на осі x . На цій же осі розташовано і центр згинання.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{[(4R)^3 - (2R)^3] \delta^2}{12} + 2R\delta \cdot R^2 + \frac{\pi R^3 \delta}{2} = \\ &= R^3 \delta \left[\frac{64 - 8}{12} + 2 + \frac{\pi}{2} \right] = R^3 \delta \frac{40 + 3\pi}{6}. \end{aligned}$$

Виберемо моментну точку T (див. рис. Д.5.2.1). Визначимо $S_x(t)$ – функцію поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x . Розіб'ємо переріз на три ділянки (рис. Д.5.2.1). Причому з урахуванням зробленого вибору моментної точки на першій ділянці зазначену функцію не слід і шукати.

Друга ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ ;

$$0 \leq t \leq R; 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$y_2(\zeta) = R; S_{x2}^0 = 0;$$

$$S_{x2}(t) = S_{x2}^0 + \Delta S_{x2}(t) = \int_0^t \delta R d\zeta = \delta R \zeta \Big|_0^t = \delta R t \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=R} = \delta R^2.$$

Третя ділянка. Внаслідок наявності симетрії розглянемо половину цієї ділянки. Контурна координата φ . Допоміжна координата ψ ;

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \psi \leq \varphi;$$

$$y_2(\psi) = R \cos \psi; dF = \delta d\zeta = \delta R d\psi;$$

$$\begin{aligned} S_{x3}(\varphi) &= S_{x1}^{\text{відросток}} + S_{x2}^* + \Delta S_{x3}(\varphi) = \\ &= \delta R \frac{3}{2} R + \delta R + \int_0^{\varphi} R \cos \psi \delta R d\psi = \frac{5}{2} \delta R^2 + \delta R^2 \sin \psi \Big|_0^{\varphi} = \\ &= \frac{5}{2} \delta R + \delta R^2 \sin \varphi \Big|_{\varphi=0} = \frac{5}{2} \delta R \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{2} \delta R. \end{aligned}$$

Побудуємо епюру $S_x(t)$ поточного статичного моменту (рис. Д.5.2.2).

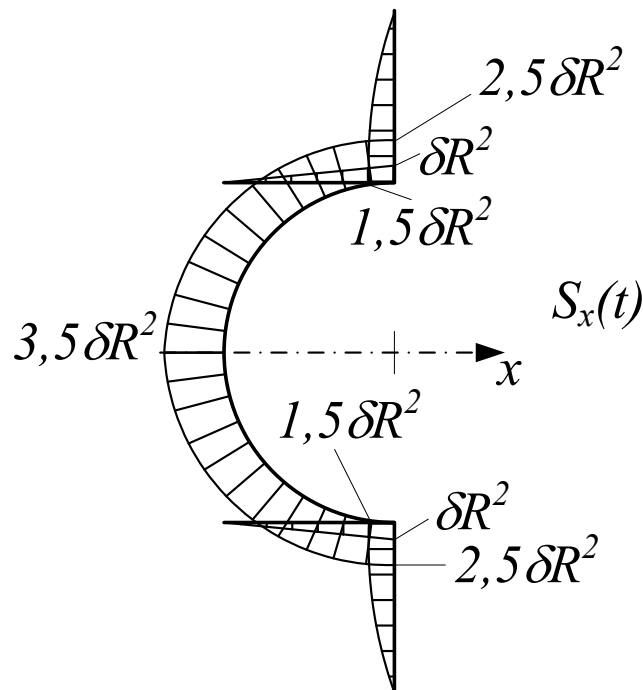


Рис. Д.5.2.2. Епюра $S_x(t)$

Визначимо функцію потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t).$$

Прийmemo, що чисельно $Q_{y\phi} = Q_y \equiv I_x$. Тепер маемо $q_p(t) = -S_x(t)$. Покажемо напрямок потоків дотичних сил $q_p(t)$ (рис. Д.5.2.3).

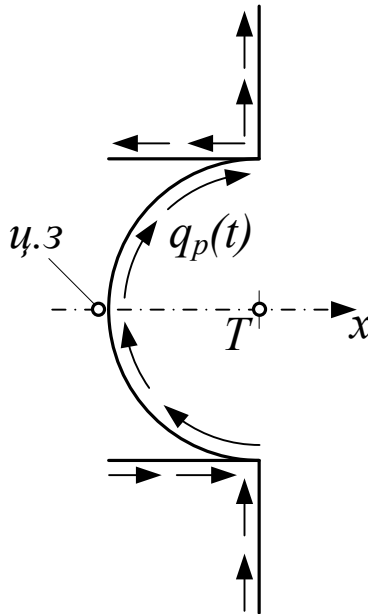


Рис. Д.5.2.3. Напрямок потоків дотичних сил

Визначимо величину моменту відносно моментної точки T :

$$\begin{aligned} M_T &= \Sigma \int_0^{\ell} q_{pi}(t) \rho_i dt; \\ M_T &= -2 \int_0^R q_{p2}(t) R dt + 2 \int_0^{\pi/2} q_{p3}(\varphi) R d\varphi = \\ &= -2 \int_0^R \delta R^2 t dt + 2 \int_0^{\pi/2} \delta R^2 \left(\frac{5}{2} + \sin \varphi \right) R^2 d\varphi = \\ &= -\delta R^4 + 2\delta R^4 \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 1 \right) = \delta R^4 \frac{5\pi + 2}{2}. \end{aligned}$$

Знайдемо відстань від моментної точки T до лінії дії поперечної сили (до центра згинання):

$$a_T = \frac{M_T}{Q_{y\phi}} = \frac{\delta R^4 \frac{5\pi + 2}{2}}{\delta R^3 \frac{40 + 3\pi}{6}} = 3R \frac{5\pi + 2}{40 + 3\pi} = 1,075R.$$

Цю відстань відкладаємо вліво від моментної точки T (рис. Д.5.2.3).

Задача № 3

Розглянути відкритий профіль з розгалуженнями (рис. Д.5.3.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль є симетричним осі x .

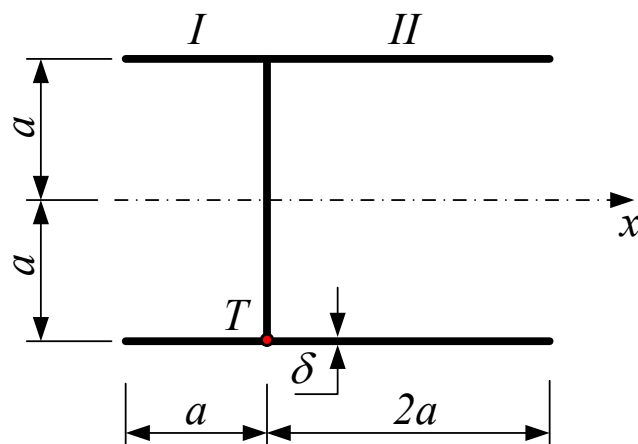


Рис. Д.5.3.1. Відкритий профіль з розгалуженнями

Дано: товщина стінок δ постійна на всьому контурі перерізу.

Знайти положення центра згинання.

Розв'язання

Положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. Він унаслідок наявної симетрії знаходиться на осі x . На цій же осі знаходиться і центр згинання.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2a \cdot 3a \cdot \delta \cdot a^2 + \frac{(2a)^3 \delta}{12} = \frac{20}{3} a^3 \delta.$$

Виберемо моментну точку T . Визначимо функцію $S_x(t)$ поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x тільки на двох ділянках верхньої полиці (на інших ділянках потоки дотичних сил проходять через моментну точку).

Перша ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ .

$$0 \leq t \leq 2a; 0 \leq \zeta \leq t.$$

$$y_1(\zeta) = a; S_{x1}^0 = 0;$$

$$S_{x1}(t) = S_{x1}^0 + \Delta S_{x1}(t) = \int_0^t a \delta d\zeta = a \delta \zeta \Big|_0^t = \delta R t \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=2a} = 2a^2 \delta.$$

Друга ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq a; 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$y_2(\zeta) = a; S_{x1}^0 = 0;$$

$$S_{x2}(t) = S_{x2}^0 + \Delta S_{x2}(t) = \int_0^t a \delta d\zeta = a \delta \zeta \Big|_0^t = a \delta t \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=a} = a^2 \delta.$$

Визначимо функцію потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t).$$

Прийmemo, що чисельно $Q_{y\phi} = Q_y \equiv I_x$. Тепер маємо $q_p(t) = -S_x(t)$.

Покажемо напрямок потоків дотичних сил $q_p(t)$ (рис. Д.5.3.2).

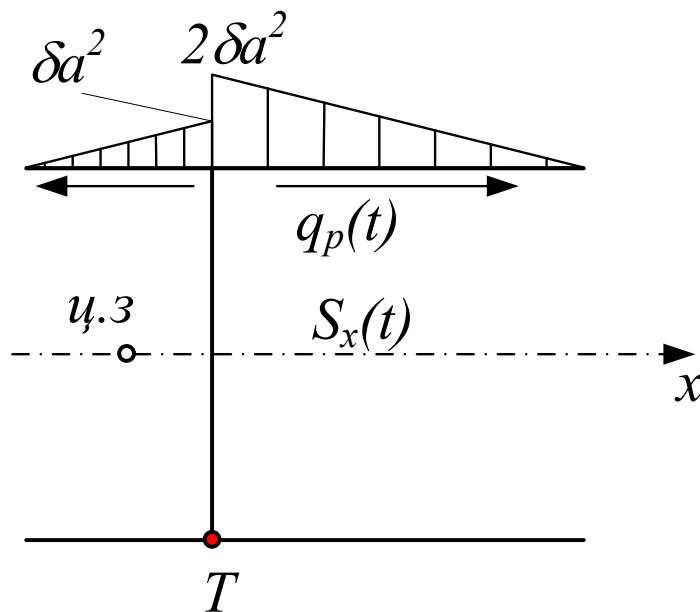


Рис. Д.5.3.2. Поток дотичних сил

Визначимо величину моменту відносно моментної точки T :

$$M_T = \Sigma \int_0^{\ell} q_{pi}(t) \rho_i dt ;$$

$$M_T = 2a \left(2a^2 \delta \frac{1}{2} 2a - a^2 \delta \frac{1}{2} a \right) = 3a^4 \delta .$$

Тут було використано ту обставину, що рівнодіюча дотичних сил на ділянці чисельно дорівнює площі епюри потоків дотичних сил.

Визначимо відстань від моментної точки T до лінії дії поперечної сили (до центра згинання)

$$a_T = \frac{M_T}{Q_{y\phi}} = \frac{3a^4 \delta}{\frac{20}{3} a^3 \delta} = \frac{9}{20} a .$$

Цю відстань відкладемо вліво (момент M_T діє за годинниковою стрілкою) від моментної точки T (див. рис. Д.5.3.2).

Задача № 4

Ця задача аналогічна попередній. Розглянемо відкритий простий профіль з розгалуженнями (рис. Д.5.4.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

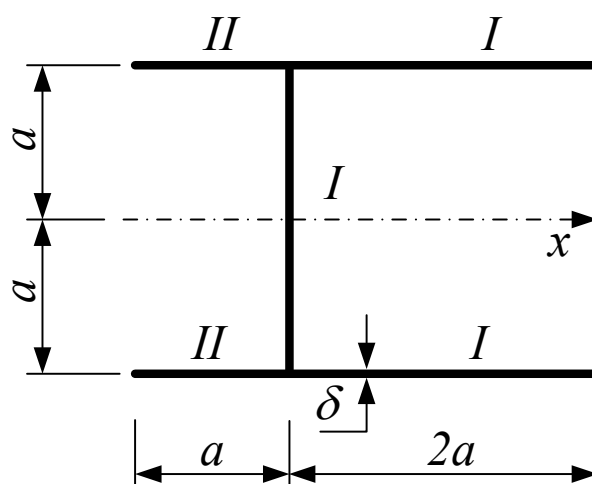


Рис. Д.5.4.1. Відкритий профіль з розгалуженнями

Дано: товщина стінок δ постійна на всьому контурі перерізу.

Необхідно провести дискретизацію і визначити місце розташування центра згинання перерізу.

Розв'язання

При дискретизації перерізу здатність обшивки сприймати нормальні напруги передається зосередженим поздовжнім елементам. Однак зберігається здатність обшивки сприймати дотичні напруження ($\delta_\sigma = 0, \delta_\tau \neq 0$ – модель Вагнера). При цьому кожна зі складових перерізу смужок ($\ell \times \delta$) замінюється трьома зосередженими площами (рис. Д.5.4.2) – двома кінцевими та серединною.

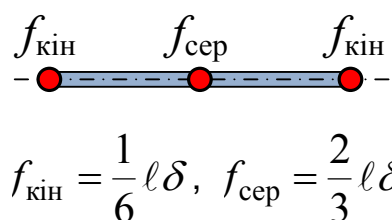


Рис. Д.5.4.2. Переріз смужки

Проведемо дискретизацію. Виділимо в перерізі два типи смужок (всього п'ять смужок) і кожену смужку подамо у вигляді трьох зосереджених площ. Типи смужок позначено на рис. Д.5.4.1 римськими цифрами.

Перший тип смужок: $f_{\text{кін}}^I = \frac{1}{6} 2a\delta = \frac{1}{3} a\delta, \quad f_{\text{сеп}}^I = \frac{2}{3} 2a\delta = \frac{4}{3} a\delta.$

Другий тип смужок: $f_{\text{кін}}^{II} = \frac{1}{6} a\delta, \quad f_{\text{сеп}}^{II} = \frac{2}{3} a\delta.$

Покажемо дискретний переріз (рис. Д.5.4.3). Позначимо зосереджені площі (поздовжні елементи). Елемент № 3 (F_3) містить суму внесків трьох смужок. Нижче осі симетрії знаходяться симетричні елементи:

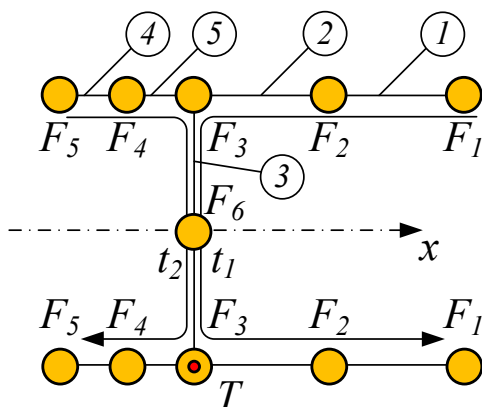


Рис. Д.5.4.3. Дискретний переріз

$$F_1 = \frac{1}{3}a\delta; \quad F_2 = \frac{4}{3}a\delta; \quad F_3 = 2f_{\text{кр}}^I + f_{\text{кр}}^{II} = \left(2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)a\delta = \frac{5}{6}a\delta;$$

$$F_4 = \frac{2}{3}a\delta; \quad F_5 = \frac{1}{6}a\delta; \quad F_6 = \frac{4}{3}a\delta.$$

Положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. Він унаслідок симетрії знаходиться на осі x . На цій же осі розташовано і центр згинання.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x . Зауважимо, що $y_i = a$ при $i = \overline{1, 5}$.

$$I_x = 2 \left(\sum_{i=1}^5 F_i \right) a^2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) a\delta \cdot a^2 = \frac{20}{3} a^3 \delta.$$

Зауважимо, що результат одержимо такий ж, як і в попередній задачі.

Виберемо моментну точку T (рис. Д.5.4.3). Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі перерізу щодо осі x тільки на чотирьох ділянках верхньої полиці.

Перша ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq a; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$y_1(\zeta) = a; \quad S_{x1}^0 = 0;$$

$$S_{x1}(t) = F_1 \cdot y = \frac{1}{3} a \delta a = \frac{1}{3} a^2 \delta = \text{const} = S_{x1}^*.$$

Друга ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq a; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$y_2(\zeta) = a; \quad S_{x2}^0 = S_{x1}^* = \frac{1}{3} a^3 \delta;$$

$$S_{x2} = S_{x2}^0 + F_2 \cdot y = \frac{1}{3} a^3 \delta + \frac{4}{3} a \delta a = \frac{5}{3} a^3 \delta = S_{x2}^*.$$

Четверта ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq \frac{a}{2}; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$y_4(\zeta) = a; \quad S_{x4}^0 = 0;$$

$$S_{x4} = S_{x4}^0 + F_5 \cdot y = \frac{1}{6} a \delta a = \frac{1}{6} a^3 \delta = S_{x4}^*.$$

П'ята ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq \frac{a}{2}; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$y_5(\zeta) = a; \quad S_{x5}^0 = S_{x4}^*;$$

$$S_{x5} = S_{x5}^0 + F_4 \cdot y = \frac{1}{6} a^2 \delta + \frac{2}{3} a^2 \delta = \frac{5}{6} a^3 \delta = S_{x5}^*.$$

Покажемо епюру поточного статичного моменту $S_x(t)$ (рис. Д.5.4.4).

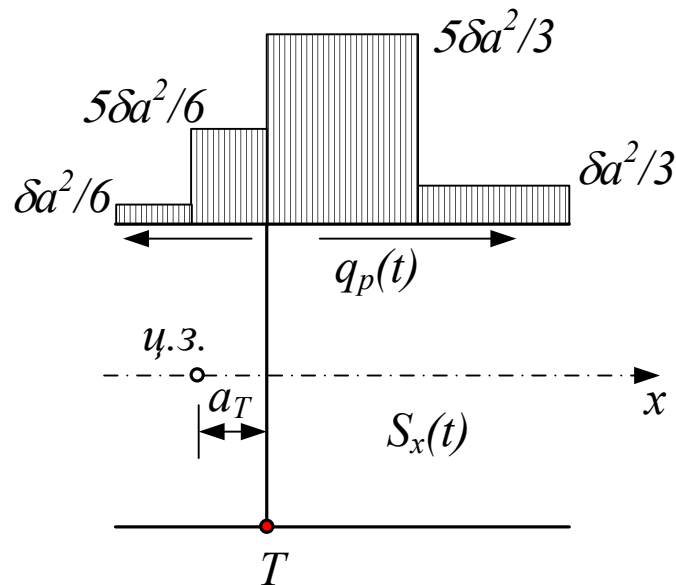


Рис. Д.5.4.4. Епюра $S_x(t)$

Визначимо функцію потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t).$$

Прийmemo, що чисельно $Q_{y\phi} = Q_y \equiv I_x$. Тепер маемо $q_p(t) = -S_x(t)$.

Напрямок потоків дотичних сил $q_p(t)$ показано на рис. Д.5.4.4.

Визначимо величину моменту відносно моментної точки T :

$$M_T = \Sigma \int_0^{\ell} q_{pi}(t) \rho_i dt;$$

$$M_T = 2a \left(\frac{1}{3} a^2 \delta \cdot a + \frac{5}{3} a^2 \delta \cdot a - \frac{1}{6} a^2 \delta \frac{a}{2} - \frac{5}{6} a^2 \delta \frac{a}{2} \right) = 3a^4 \delta.$$

Тут було використано ту обставину, що рівнодіюча дотичних сил на ділянці чисельно дорівнює площі епюри потоків дотичних сил.

Зауважимо, що результат одержуємо такий же, як і в попередній задачі.

Визначимо відстань від моментної точки T до лінії дії поперечної сили (до центра згинання):

$$a_T = \frac{M_T}{Q_{yф}} = \frac{3a^4 \delta}{\frac{20}{3} a^3 \delta} = \frac{9}{20} a.$$

Цю відстань відкладаємо вліво (момент M_T спрямовано за годинниковою стрілкою) від моментної точки T (див. рис. Д.5.4.4).

Зауважимо, що результат одержуємо такий же, як і в попередній задачі.

Висновок: положення центра згинання після проведеної дискретизації не змінилося.

Задача № 5

Розглянемо відкритий простий профіль (рис. Д.5.5.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

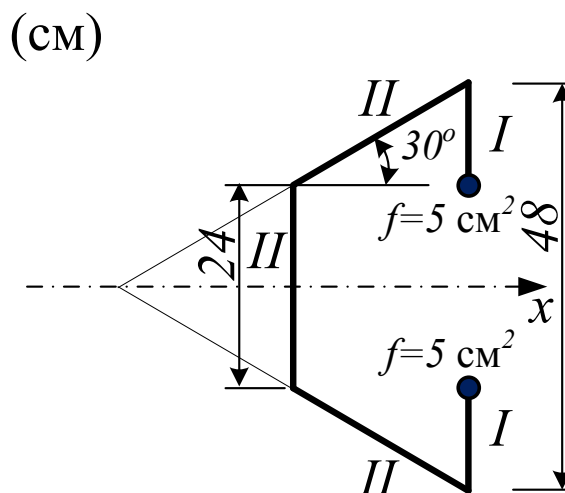


Рис. Д.5.5.1. Відкритий профіль

Дано: товщина стінок $\delta = 1$ см постійна на всьому контурі перерізу.

Необхідно провести дискретизацію і визначити місце розташування центра згинання перерізу.

Розв'язання

При дискретизації перерізу здатність обшивки сприймати нормальні напруги передається зосередженим поздовжнім елементам. Однак зберігається здатність обшивки сприймати дотичні напруження ($\delta_\sigma = 0, \delta_\tau \neq 0$ – модель Вагнера). При цьому кожен зі складових перерізу смужок можна зобразити трьома зосередженими площами (див. рис. Д.5.4.2).

Проведемо дискретизацію. Виділимо в перерізі два типи смужок (всього п'ять смужок) і кожен смужку зобразимо трьома зосередженими площами. Типи смужок позначені на рис. Д.5.5.1 римськими цифрами.

$$\text{Перший тип смужок: } f_{\text{кін}}^I = \frac{1}{6}12 \cdot 1 = 2 \text{ см}^2, \quad f_{\text{сеп}}^I = \frac{2}{3}12 \cdot 1 = 8 \text{ см}^2.$$

$$\text{Другий тип смужок: } f_{\text{кін}}^{II} = \frac{1}{6}24 \cdot 1 = 4 \text{ см}^2, \quad f_{\text{сеп}}^{II} = \frac{2}{3}24 \cdot 1 = 16 \text{ см}^2.$$

Покажемо дискретний переріз (рис. Д.5.5.2). Позначимо зосереджені площі (поздовжні елементи). Елементи № 3 (F_3) та № 5 (F_5) містять суму від внесків трьох смужок. В елементі № 1 (F_1) врахована наявна в перерізі площа (f). Нижче осі симетрії знаходяться симетричні елементи.

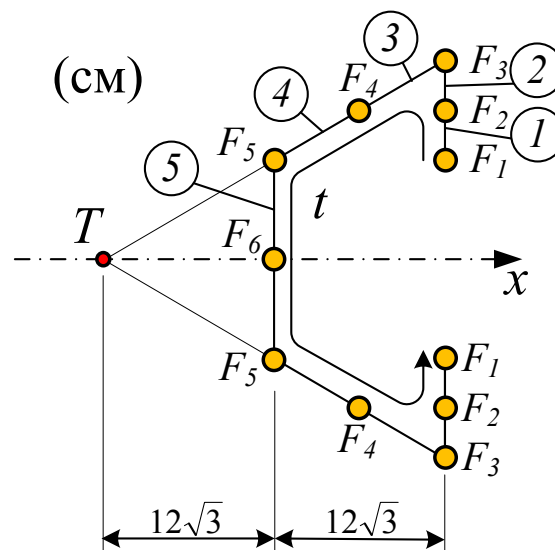


Рис. Д.5.5.2. Дискретний переріз

$$F_1 = f + f_{\text{кін}}^I = 5 + 2 = 7 \text{ см}^2; \quad F_2 = f_{\text{сеп}}^I = 8 \text{ см}^2;$$

$$F_3 = f_{\text{кін}}^{II} + f_{\text{кін}}^I = 4 + 2 = 6 \text{ см}^2; \quad F_4 = f_{\text{сеп}}^{II} = 16 \text{ см}^2;$$

$$F_5 = f_{\text{кін}}^{\text{II}} + f_{\text{кін}}^{\text{II}} = 4 + 4 = 8 \text{ см}^2; \quad F_6 = f_{\text{сеп}}^{\text{II}} = 16 \text{ см}^2.$$

Положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. Він унаслідок симетрії знаходиться на осі x . На цій же осі розташовано і центр згинання.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x . Зауважимо, що $y_1 = y_5 = 12 \text{ см}$; $y_2 = y_4 = \frac{24+12}{2} = 18 \text{ см}$; $y_3 = 24 \text{ см}$;

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \left(\sum_{i=1}^5 F_i \cdot y_i^2 \right) = 2 \left((F_1 + F_5) \cdot 12^2 + (F_2 + F_4) \cdot 18^2 + F_3 \cdot 24^2 \right) = \\ &= 2 \left((7 + 8) \cdot 12^2 + (8 + 16) \cdot 18^2 + 6 \cdot 24^2 \right) = 26784 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Виберемо моментну точку T (див. рис. Д.5.5.2). Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x на п'яти ділянках перерізу (далі симетрично).

Перша ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq a; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$S_{x1}^0 = 0;$$

$$S_{x1}(t) = F_1 \cdot 12 = 7 \cdot 12 = 84 \text{ см}^2 = \text{const} = S_{x1}^*.$$

Друга ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq a; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$S_{x2}^0 = S_{x1}^* = 84 \text{ см}^2;$$

$$S_{x2} = S_{x2}^0 + F_2 \cdot 18 = 84 + 8 \cdot 18 = 228 \text{ см}^2 = S_{x2}^*.$$

Третя ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq a; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$S_{x3}^0 = S_{x2}^* = 228 \text{ см}^2;$$

$$S_{x3} = S_{x3}^0 + F_3 \cdot 24 = 228 + 6 \cdot 24 = 372 \text{ см}^2 = S_{x3}^*.$$

Четверта ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq a; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$S_{x4}^0 = S_{x3}^* = 372 \text{ см}^2;$$

$$S_{x4} = S_{x4}^0 + F_4 \cdot 18 = 372 + 16 \cdot 18 = 660 \text{ см}^2 = S_{x4}^*.$$

П'ята ділянка. Контурна координата t . Допоміжна координата ζ :

$$0 \leq t \leq a; \quad 0 \leq \zeta \leq t;$$

$$S_{x5}^0 = S_{x4}^* = 660 \text{ см}^2;$$

$$S_{x5} = S_{x5}^0 + F_5 \cdot 12 = 660 + 8 \cdot 12 = 756 \text{ см}^2 = S_{x5}^*.$$

Покажемо епюру поточного статичного моменту $S_x(t)$ (рис. Д.5.5.3).

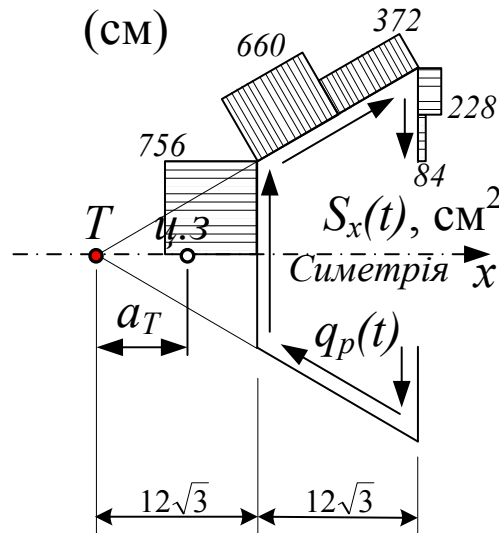


Рис. Д.5.5.3. Епюра $S_x(t)$

Визначимо функцію потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t).$$

Приймемо, що чисельно $Q_{y\phi} = Q_y \equiv I_x$. Тепер маємо $q_p(t) = -S_x(t)$.

Покажемо напрямок потоків дотичних сил $q_p(t)$ (див. рис. Д.5.5.3).

Визначимо величину моменту відносно моментної точки T :

$$M_T = \Sigma \int_0^{\ell} q_{pi}(t) \rho_i dt;$$

$$M_T = 2(84 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 12\sqrt{3}) + 228 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 12\sqrt{3}) - 756 \cdot 12 \cdot (12\sqrt{3})) = -299298,3 \text{ см}^5.$$

Тут було використано ту обставину, що рівнодіюча дотичних сил на ділянці чисельно дорівнює площі епюри потоків дотичних сил.

Відстань від моментної точки T до лінії дії поперечної сили (до центра згинання)

$$a_T = \frac{M_T}{Q_{yф}} = -\frac{299298,3}{26784} = -11,17 \text{ см.}$$

Цю відстань відкладемо вліво (момент M_T спрямовано проти годинникової стрілки) від моментної точки T ($12\sqrt{3} = 20,78$ см) (див. рис. Д.5.5.3).

Задача № 6

Розглянути відкритий простий профіль (рис. Д.5.6.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Його отримано із замкнутого введенням розрізу. Профіль симетричний відносно осі x .

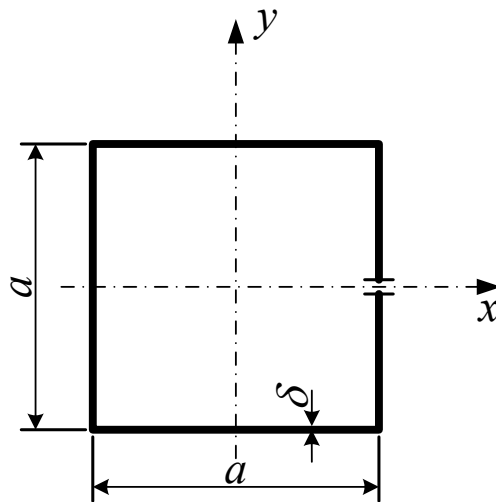


Рис. Д.5.6.1. Відкритий профіль, отриманий розрізом перерізу із замкнутого контуру

Дано: товщина стінок δ постійна на всьому контурі перерізу.

Необхідно провести дискретизацію і визначити місце розташування центра згинання перерізу.

Розв'язання

При дискретизації перерізу здатність обшивки сприймати нормальні напруги передається зосередженим поздовжнім елементам. Однак зберігається здатність обшивки сприймати дотичні напруження ($\delta_\sigma = 0, \delta_\tau \neq 0$ – модель Вагнера). При цьому кожен зі складових перерізу смужок подамо трьома зосередженими площами.

Проведемо дискретизацію. Покажемо дискретний переріз (рис. Д.5.6.2). Позначимо зосереджені площі (поздовжні елементи).

Елементи № 3 (F_3) та № 5 (F_5) містять суму від внесків трьох смужок. Нижче осі симетрії знаходяться симетричні елементи:

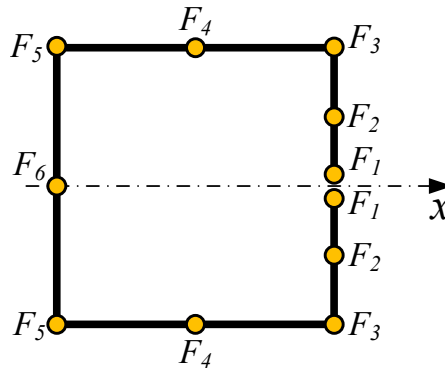


Рис. Д.5.6.2. Дискретний переріз

$$F_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} a \delta = \frac{1}{12} a \delta; \quad F_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a \delta = \frac{1}{3} a \delta;$$

$$F_3 = \frac{1}{12} a \delta + \frac{1}{6} a \delta = \frac{1}{4} a \delta; \quad F_4 = \frac{2}{3} a \delta = \frac{2}{3} a \delta;$$

$$F_5 = 2 \cdot \frac{1}{6} a \delta = \frac{1}{3} a \delta; \quad F_6 = \frac{2}{3} a \delta = \frac{2}{3} a \delta.$$

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2 \left(\sum_{i=2}^5 F_i \cdot y_i^2 \right) = 2 \left(F_2 \left(\frac{a}{4} \right)^2 + (F_3 + F_4 + F_5) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{a \delta}{3} \left(\frac{a}{4} \right)^2 + a^3 \delta \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) = \frac{2}{3} a^3 \delta.$$

Виберемо моментну точку T (нижній лівий кут). Визначимо функцію поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x тільки на чотирьох перших ділянках.

Перша ділянка

$$S_{x1}^0 = 0.$$

Друга ділянка

$$S_{x2} = S_{x1} + F_2 \cdot \frac{a}{4} = 0 + \frac{a \delta}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2 \delta}{12}.$$

Третя ділянка

$$S_{x3} = S_{x2} + F_3 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 \delta}{12} + \frac{a \delta a}{4 \cdot 2} = \frac{5a^2 \delta}{24}.$$

Четверта ділянка

$$S_{x4} = S_{x3} + F_4 \cdot \frac{a}{2} = \frac{5a^2 \delta}{24} + \frac{2a \delta a}{3 \cdot 2} = \frac{13a^2 \delta}{24}.$$

Покажемо епюру поточного статичного моменту $S_x(t)$ (рис. Д.5.6.3).

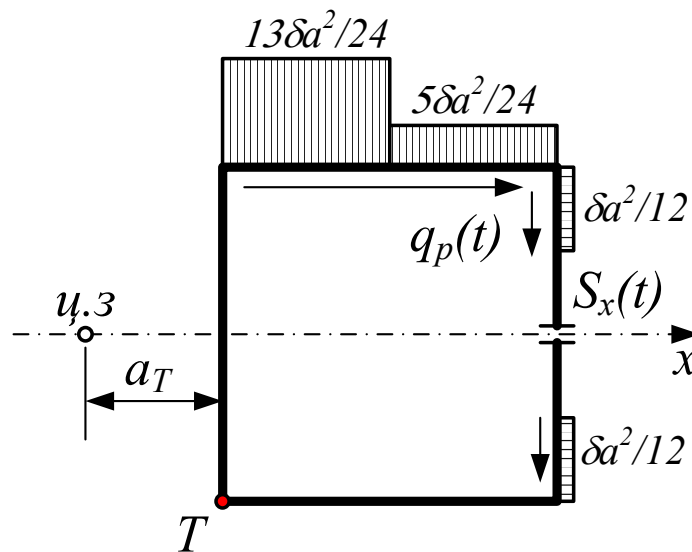


Рис. Д.5.6.3. Епюра $S_x(t)$

Функція потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t).$$

Приймемо, що чисельно $Q_{y\phi} = Q_y \equiv I_x$. Тепер маємо $q_p(t) = -S_x(t)$.

Покажемо напрямок потоків дотичних сил $q_p(t)$ (див. рис. Д.5.6.3).

Визначимо величину моменту відносно моментної точки T :

$$M_T = \Sigma \int_0^{\ell} q_{pi}(t) \rho_i dt;$$

$$M_T = a \left(2 \cdot \frac{a^2 \delta a}{12 \cdot 4} + \frac{(13+5)a^2 \delta a}{24 \cdot 2} \right) = \frac{5a^4 \delta}{12}.$$

Тут було використано ту обставину, що рівнодіюча дотичних сил на ділянці чисельно дорівнює площі епюри потоків дотичних сил.

Визначимо відстань від моментної точки T до лінії дії поперечної сили (до центра згинання):

$$a_T = \frac{M_T}{Q_{y\phi}} = -\frac{\frac{5a^4\delta}{12}}{\frac{2a^3\delta}{3}} = \frac{5}{8}a.$$

Цю відстань відкладаємо вліво на рис. Д.5.6.3.

Зауваження. Такий же результат одержимо і в разі розрахунку без проведення дискретизації.

Наведемо результати для підтвердження цього зауваження.

Зобразимо епюру поточного статичного моменту $S_x(t)$ (рис. Д.5.6.4) і запишемо вираз для визначення моменту потоку дотичних сил M_T відносно тієї ж точки T :

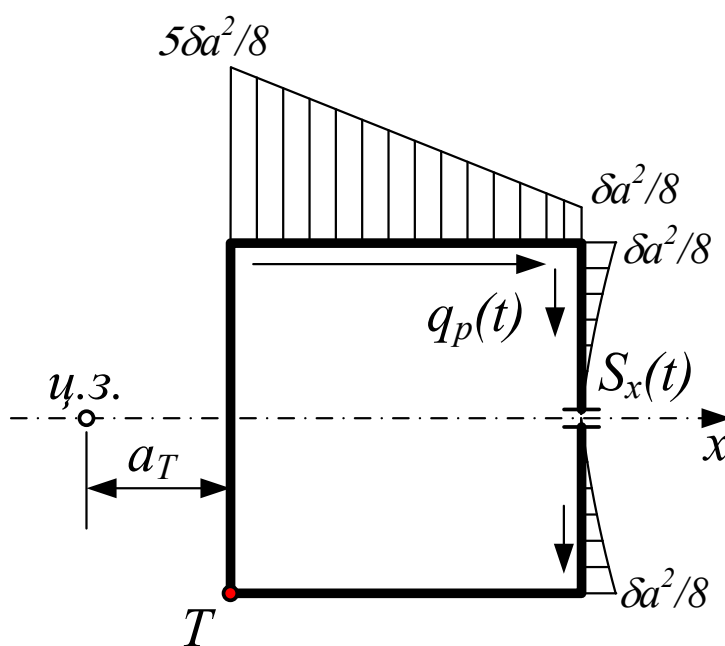


Рис. Д.5.6.4. Епюра $S_x(t)$

$$M_T = a \left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \right) a^4 \delta = \frac{5a^4\delta}{12}.$$

Величина моменту збіглася з отриманим значенням моменту дискретного перерізу, а значить, одержано таке ж положення центра згинання.

Задача № 7

Розглянути відкритий простий профіль (рис. Д.5.7.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Його отримано із замкнутого введенням розрізу. Профіль симетричний відносно осі x .

Необхідно в заданому перерізі отримати загальну формулу для визначення положення центра згинання.

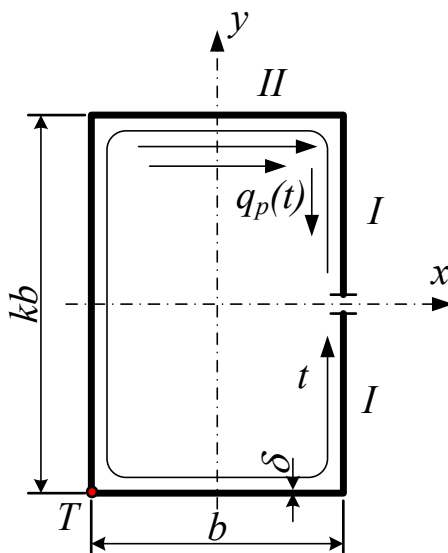


Рис. Д.5.7.1. Відкритий профіль, отриманий розрізом перерізу із замкнутого контуру

Розв'язання

Переріз симетричний відносно осі x , на ній і буде знаходитись центр згинання. Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2b\delta \left(\frac{kb}{2} \right)^2 + 2 \frac{(kb)^2 \delta}{12} = \frac{k^2(k+3)b^3 \delta}{6}.$$

Виберемо моментну точку T (нижній лівий кут). Визначимо функцію $S_x(t)$ поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x тільки на двох ділянках.

Перша ділянка (від розрізу до верхньої кутової точки)

$$S_{x1}(t) = \int_0^t \delta q d\zeta = \frac{\delta \zeta^2}{2} \Big|_0^t = \frac{\delta t^2}{2} \Big|_{t=0}^{t=\frac{kb}{2}} = 0 \Big|_{t=0}^{t=\frac{kb}{2}} = \frac{k^2 b^2 \delta}{8}.$$

Друга ділянка (між двома верхніми кутовими точками)

$$S_{x2}(t) = \frac{k^2 b^2 \delta}{8} + \int_0^t \delta \frac{kb}{2} d\zeta = \frac{k^2 b^2 \delta}{8} + \frac{kb \delta \zeta}{2} \Big|_0^t = \frac{k^2 b^2 \delta}{8} + \frac{kb \delta t}{2} \Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{kb^2 \delta}{8} \Big|_{t=b} = \frac{k^2 b^2 \delta}{8} + \frac{kb^2 \delta}{2}.$$

Функція потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t).$$

Прийmemo, що чисельно $Q_{y\phi} = Q_y \equiv I_x$. Тепер маємо $q_p(t) = -S_x(t)$.

Покажемо напрямок потоків дотичних сил $q_p(t)$ на рис. Д.5.7.1.

Визначимо величину моменту відносно моментної точки T :

$$M_T = \Sigma \int_0^{\ell} q_{pi}(t) \rho_i dt;$$

$$M_T = 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{k^2 b^2}{8} \frac{kb}{2} b + \frac{\left(2 \frac{k^2 b^2 \delta}{8} + \frac{kb^2 \delta}{2} \right)}{2} b \cdot kb = \frac{k^2 b^4 \delta (4k + 6)}{24}.$$

Розрахуємо відстань від моментної точки T до лінії дії поперечної сили (до центра згинання)

$$a_T = \frac{M_T}{Q_{y\phi}} = -\frac{299298,3}{26784} = -11,17 \text{ см.}$$

Цю відстань відкладемо вліво від моментної точки T (див. рис. Д.5.7.1).

Задача № 8

Розглянути відкритий профіль (рис. Д.5.8.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

Дано: R ; δ , $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Товщина стінок δ постійна на всьому контурі перерізу.

Знайти положення центра згинання.

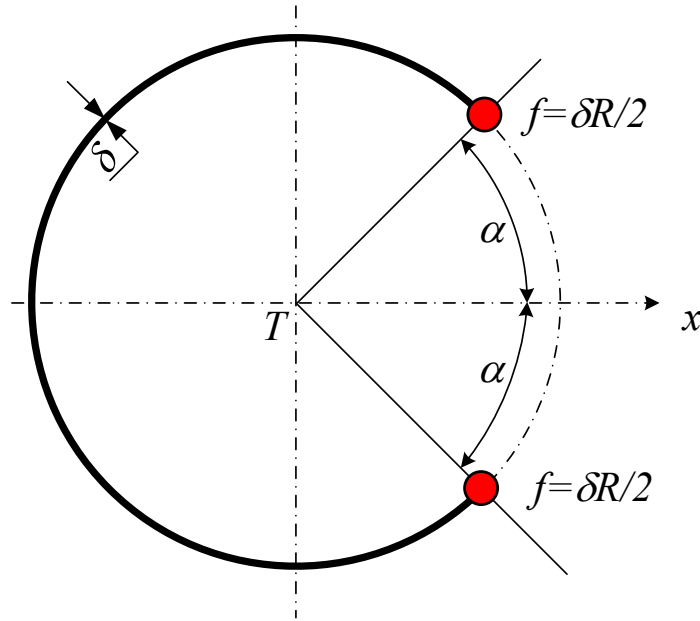


Рис. Д.5.8.1. Відкритий профіль

Розв'язання

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2f \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 + R^3 \delta \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3,356 R^3 \delta.$$

Знайдемо функцію $S_x(t)$ поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x (маємо тільки одну ділянку).

Контурна координата φ . Допоміжна координата ψ :

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi - 2\alpha; \quad 0 \leq \psi \leq \varphi;$$

$$y(\psi) = R \sin \left(\frac{\pi}{4} + \psi \right); \quad S_x^0 = f \frac{\sqrt{2}}{2} R;$$

$$\begin{aligned} S_x(\varphi) &= S_x^0 + \Delta S_x(\varphi) = f \frac{\sqrt{2}}{2} R + \int_0^\varphi y dF = f \frac{\sqrt{2}}{2} R + \int_0^\varphi R \sin \left(\frac{\pi}{4} + \psi \right) R \delta d\psi = \\ &= f \frac{\sqrt{2}}{2} R + R^2 \delta \int_0^\varphi \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \psi + \sin \psi) d\psi = f \frac{\sqrt{2}}{2} R + R^2 \delta \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \varphi + 1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Функція потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t).$$

Приймемо, що чисельно $Q_{y\phi} = Q_y \equiv I_x$. Тепер маємо $q_p(t) = -S_x(t)$.

Напрямок потоків дотичних сил $q_p(t)$ – проти годинникової стрілки.

Визначимо величину моменту відносно моментної точки T :

$$M_T = \Sigma \int_0^{2\pi-2\alpha} q_p(\varphi) R \cdot R d\varphi;$$

$$\begin{aligned} M_T &= 2 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} (fR + R^2\delta + R^2\delta(\sin\varphi - \cos\varphi)) R^2 d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \cdot R^2 \left((fR + R^2\delta) \frac{3\pi}{4} + R^2\delta \left(1 - \cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot R^2 (fR + R^2\delta + R^2\delta) = 6,997 R^4 \delta. \end{aligned}$$

Розрахуємо відстань від моментної точки T до лінії дії поперечної сили (до центра згинання):

$$x_{ц.з} = \frac{M_T}{Q_{y\phi}} = \frac{6,997 R^4 \delta}{3,356 R^3 \delta} = 2,085 R.$$

Цю відстань відкладемо вліво від моментної точки T .

Зауваження: з метою дослідження були проведені розрахунки при інших значеннях зосередженої площі f .

При $f = 0$ одержуємо $I_x = 2,856 R^3 \delta$, $M_T = 4,80 R^4 \delta$, $x_{ц.з} = 1,44 R$.

При $f = \delta R$ одержуємо $I_x = 3,856 R^3 \delta$, $M_T = 8,15 R^4 \delta$, $x_{ц.з} = 2,44 R$.

Якщо переріз, що розглянуто в задачі, являє собою переріз фюзеляжу літака при відкритому люці, важливо, щоб рівнодіюча аеродинамічних сил, діючих на кермо напрямку, проходила через центр згинання перерізу. Цього можна домогтися варіюванням геометричних характеристик жорсткості параметрів, у тому числі величини зосереджених площ. З розрахунків, проведених в даній задачі, випливає, що збільшення зосереджених площ видаляє центр згинання від центра кола перерізу (рис. Д.5.8.2).

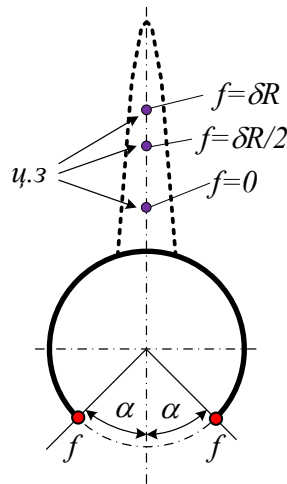


Рис. Д.5.8.2. Переріз фюзеляжу

Додатково в табл. Д.5.8.1 наведемо довідкові дані щодо розташування центра згинання в поперечному перерізі тонкостінного стрижня.

Таблиця Д.5.8.1

Довідкові дані з розташування центра згинання

Схема перерізу	Довідкові дані
$\delta_\sigma \neq 0$ 	$I_x = \pi R^3 \delta; x_{ц.з.} = 2R$
$\delta_\sigma \neq 0$ 	$I_x = 0,5R^3 \delta; x_{ц.з.} = \frac{4R}{\pi} = 1,27R$
$\delta_\sigma = 0$ 	$I_x = 0,5R^3 \delta; x_{ц.з.} = \frac{\pi R}{2} = 1,57R$

Зауваження. З табл. П.5.8.1 видно, що в двох півкільцях з однаковим осьовим моментом інерції перерізу, але різною здатністю до сприйняття нормальних напружень положення центра згинання є різним. Це означає, що за наявності в тонкостінному перетині контурної лінії з криволінійними ділянками після проведення його дискретизації можна очікувати зміщення положення центра згинання.

Задача № 9

Розглянути відкритий профіль (рис. Д.5.9.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$).

Дано: $\delta = 1$ см; $a = 24$ см. Товщина стінок δ постійна на всьому контурі перерізу.

Знайти положення центра згинання.

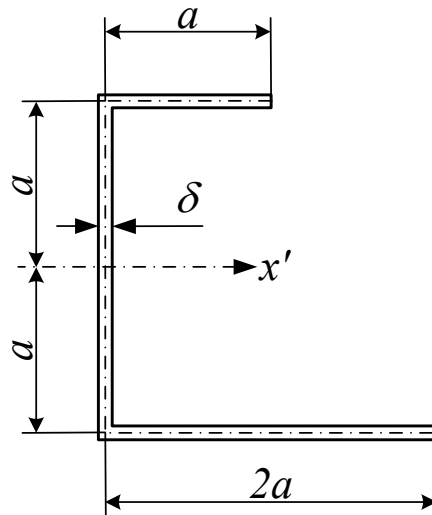


Рис. Д.5.9.1. Відкритий несиметричний профіль

Розв'язання

Для спрощення розрахунків застосуємо дискретизацію поперечного перерізу. Замінімо кожну зі смужок трьома зосередженими площами (на стиках смужок зосереджені площі підсумовуємо). Дискретний переріз ($\delta_\sigma = 0$) складається з семи зосереджених площ (рис. Д.5.9.2):

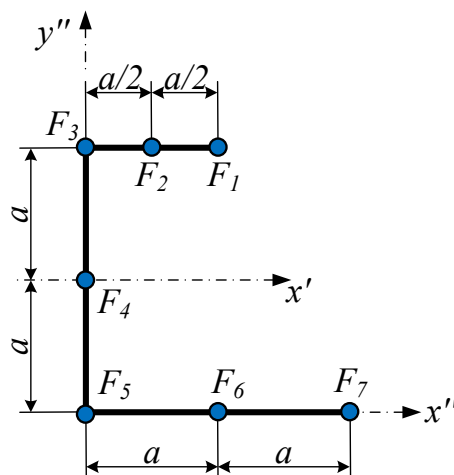


Рис. Д.5.9.2. Переріз після дискретизації

$$F_1 = \frac{1}{6}a\delta; \quad F_2 = \frac{2}{3}a\delta; \quad F_3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)a\delta = \frac{1}{2}a\delta;$$

$$F_4 = \frac{4}{3}a\delta; \quad F_5 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)a\delta = \frac{2}{3}a\delta; \quad F_6 = \frac{4}{3}a\delta; \quad F_7 = \frac{1}{3}a\delta.$$

Знайдемо положення центра ваги перерізу відносно осей x'' і y'' (рис. Д.5.9.2):

$$x_c = \frac{(F_1 + F_2 + F_3)2a + F_4a}{\sum_{i=1}^7 F_i} = \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)a^2\delta + \frac{4}{3}a^2\delta}{\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)a\delta} =$$

$$= \frac{1}{2}a = \frac{24}{2} = 12 \text{ см,}$$

$$y_c = \frac{(F_1 + F_6)a + F_7 \cdot 2a + F_2 \frac{a}{2}}{\sum_{i=1}^7 F_i} = \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\right)a^2\delta + \frac{1}{3} \cdot 2a^2\delta + \frac{2}{3} \frac{1}{2}a^2\delta}{\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)a\delta} =$$

$$= \frac{4}{5}a = \frac{4 \cdot 24}{5} = 19,2 \text{ см.}$$

Покажемо центральні осі x і y в перерізі (рис. Д.5.9.3).

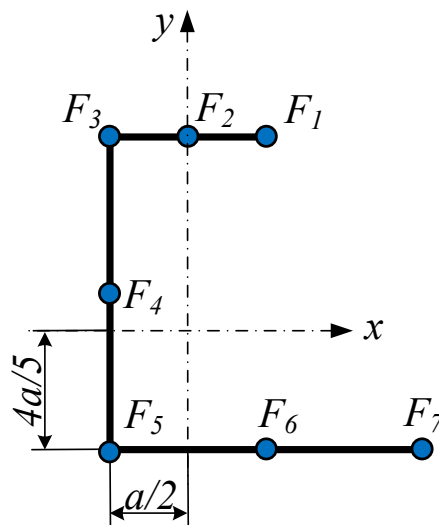


Рис. Д.5.9.3. Центральні осі x і y в перерізі

Визначимо положення головних центральних осей інерції перерізу \bar{x} і \bar{y} . Для цього розрахуємо моменти інерції перерізу відносно центральних осей інерції перерізу x і y :

$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum_{i=2}^7 F_i \cdot y_i^2 = (F_1 + F_2 + F_3) \left(2a - \frac{4a}{5}\right)^2 + F_4 \left(a - \frac{4a}{5}\right)^2 + \\
 &+ (F_5 + F_6 + F_7) \left(-\frac{4a}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) a \delta \left(2a - \frac{4a}{5}\right)^2 + \\
 &+ \frac{4}{3} a \delta \left(a - \frac{4a}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right) a \delta \left(-\frac{4a}{5}\right)^2 = \\
 &= \frac{52}{15} a^3 \delta = \frac{52}{15} \cdot 24^3 \cdot 1 = 47923,2 \text{ см}^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \sum_{i=2}^7 F_i \cdot x_i^2 = (F_1 + F_6) \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + F_2 \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \\
 &+ (F_3 + F_4 + F_5) \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + F_7 \left(2a - \frac{a}{2}\right)^2 = \\
 &= \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\right) a \delta \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} a \delta (0)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \\
 &+ \frac{1}{3} a \delta \left(2a - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} a^3 \delta = \frac{7}{4} \cdot 24^3 \cdot 1 = 24192 \text{ см}^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \sum_{i=2}^7 F_i \cdot x_i \cdot y_i = F_1 \left(a - \frac{a}{2}\right) \left(2a - \frac{4a}{5}\right) + F_2 (0) \left(2a - \frac{4a}{5}\right) + \\
 &+ F_3 \left(-\frac{a}{2}\right) \left(2a - \frac{4a}{5}\right) + F_4 \left(-\frac{a}{2}\right) \left(a - \frac{4a}{5}\right) + F_5 \left(-\frac{a}{2}\right) \left(-\frac{4a}{5}\right) + \\
 &+ F_6 \left(a - \frac{a}{2}\right) \left(-\frac{4a}{5}\right) + F_7 \left(2a - \frac{a}{2}\right) \left(-\frac{4a}{5}\right) = \frac{1}{6} a \delta \frac{a}{2} \frac{6a}{5} + 0 - \\
 &- \frac{1}{2} a \delta \frac{a}{2} \frac{6a}{5} - \frac{4}{3} a \delta \frac{a}{2} \frac{6a}{5} + \frac{2}{3} a \delta \frac{a}{2} \frac{4a}{5} - \frac{4}{3} a \delta \frac{a}{2} \frac{4a}{5} - \frac{1}{3} a \delta \frac{3a}{2} \frac{4a}{5} = \\
 &= -a^3 \delta = -24^3 \cdot 1 = -13824 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Знайдемо кут повороту β центральних осей інерції перерізу, при якому ці осі стають головними:

$$\operatorname{tg} 2\beta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-a^3\delta)}{\frac{52}{15}a^3\delta - \frac{7}{4}a^3\delta} = \frac{120}{103} = 1,165;$$

$$2\beta = \operatorname{arctg} 1,165 = 49,359^\circ; \beta = 24,68^\circ.$$

Запишемо моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей інерції перерізу \bar{x} і \bar{y} :

$$I_{\bar{x}} = I_x \cos^2 \beta + I_y \sin^2 \beta - I_{xy} \sin 2\beta = 47923,2 \cdot \cos^2 24,68^\circ +$$

$$+ 24192 \cdot \sin^2 24,68^\circ - (-13824) \sin(2 \cdot 24,68^\circ) = 54275,6 \text{ см}^4;$$

$$I_{\bar{y}} = I_x \sin^2 \beta + I_y \cos^2 \beta + I_{xy} \sin 2\beta = 47923,2 \sin^2 24,68^\circ +$$

$$+ 24192 \cos^2 24,68^\circ + (-13824) \sin(2 \cdot 24,68^\circ) = 17839,6 \text{ см}^4.$$

Покажемо на рис. Д.5.9.4 переріз із зазначеними головними центральними осями інерції.

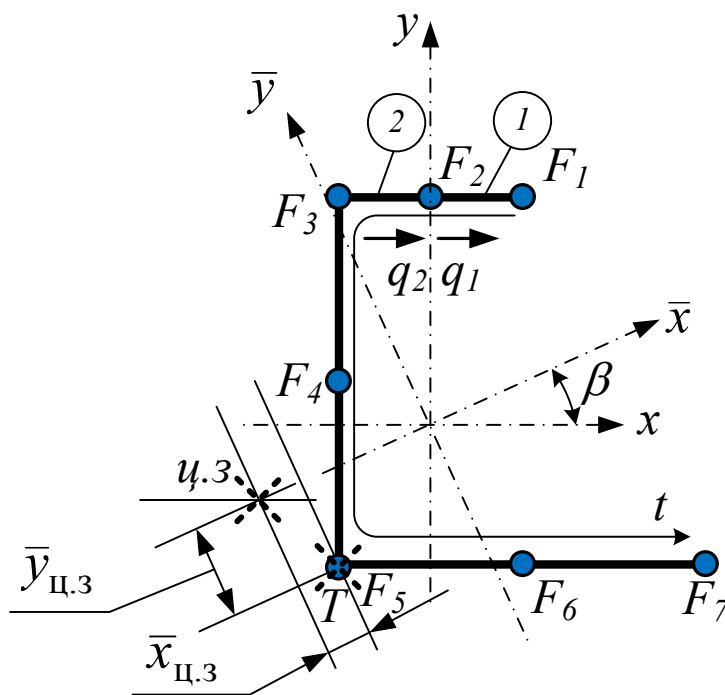


Рис. Д.5.9.4. Головні центральні осі \bar{x} та \bar{y} в перерізі

Головні центральні координати точок розташування зосереджених площ визначаємо таким чином:

$$\bar{x}_i = x_i \cos \beta + y_i \sin \beta, \quad \bar{y}_i = y_i \cos \beta - x_i \sin \beta.$$

Виберемо моментну точку T (див. рис. Д.5.9.4). Внаслідок цього вибору положення моментної точки функції $S_{\bar{x}}(t)$ та $S_{\bar{y}}(t)$ поточного статичного моменту площі перерізу щодо осей \bar{x} та \bar{y} треба визначати тільки на першій и другій ділянках:

$$S_{\bar{x}1} = F_1 \bar{y}_1; \quad S_{\bar{x}2} = F_1 \bar{y}_1 + F_2 \bar{y}_2; \quad S_{\bar{y}1} = F_1 \bar{x}_1; \quad S_{\bar{y}2} = F_1 \bar{x}_1 + F_2 \bar{x}_2.$$

Визначимо функцію потоків дотичних сил $q_p(t)$ окремо від поперечних сил $Q_{\bar{x}}$ і $Q_{\bar{y}}$:

$$q_{p\bar{x}}(t) = -\frac{Q_{\bar{x}}}{I_{\bar{y}}} S_{\bar{y}}(t); \quad q_{p\bar{y}}(t) = -\frac{Q_{\bar{y}}}{I_{\bar{x}}} S_{\bar{x}}(t).$$

Приймемо, що чисельно $Q_{\bar{x}\phi} = Q_{\bar{x}} \equiv I_{\bar{y}}$ та $Q_{\bar{y}\phi} = Q_{\bar{y}} \equiv I_{\bar{x}}$. Тепер маємо $q_{p\bar{x}}(t) = -S_{\bar{y}}(t)$ та $q_{p\bar{y}}(t) = -S_{\bar{x}}(t)$.

Покажемо єдиний напрямок для двох потоків дотичних сил $q_{p\bar{x}}(t)$ та $q_{p\bar{y}}(t)$ на рис. Д.5.9.4.

Визначимо величину моментів відносно моментної точки T залежно від двох потоків дотичних сил $q_{p\bar{x}}(t)$ та $q_{p\bar{y}}(t)$:

$$M_T(q_{p\bar{x}}(t)) = \left(S_{\bar{y}1} \frac{a}{2} + S_{\bar{y}2} \frac{a}{2} \right) 2a; \quad M_T(q_{p\bar{y}}(t)) = \left(S_{\bar{x}1} \frac{a}{2} + S_{\bar{x}2} \frac{a}{2} \right) 2a.$$

Знайдемо відстані від моментної точки T до лінії дії кожної поперечної сили (до центра згинання):

$$\bar{x}_{ц.з} = \frac{M_T(q_{p\bar{y}}(t))}{Q_{\bar{y}\phi}}, \quad \bar{y}_{ц.з} = \frac{M_T(q_{p\bar{x}}(t))}{Q_{\bar{x}\phi}}.$$

Обидві ці відстані відкладемо вліво від моментної точки T (див. рис. Д.5.9.4). Наведемо результати розрахунків:

$$\bar{x}_1 = 22,93 \text{ см}; \quad \bar{y}_1 = 21,16 \text{ см}; \quad \bar{x}_2 = 12,03 \text{ см}; \quad \bar{y}_2 = 26,17 \text{ см};$$

$$S_{\bar{x}1} = 84,64 \text{ см}^3, \quad S_{\bar{y}1} = 91,72 \text{ см}^3; \quad S_{\bar{x}2} = 503,34 \text{ см}^3; \quad S_{\bar{y}2} = 284,12 \text{ см}^3;$$

$$\bar{x}_{ц.з} = 6,24 \text{ см}, \quad \bar{y}_{ц.з} = 12,13 \text{ см}.$$

Положення центра згинання показано на рис. Д.5.9.4.

По-іншому положення центра згинання можна знайти за методикою визначення потоків дотичних сил, яка розглянута в задачі 6 дод. 3.

При цьому слід використати тільки центральні осі перерізу (рис. Д.5.9.5).

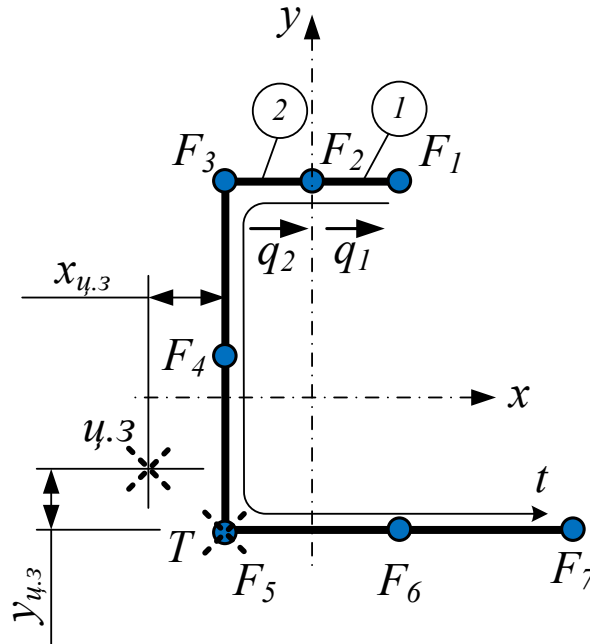


Рис. Д.5.9.5. Центральні осі x і y

Як і раніше виберемо моментну точку T (див. рис. Д.5.3.1). Тоді функції $S_x(t)$ та $S_y(t)$ поточного статичного моменту площі перерізу відносно осей \bar{x} і \bar{y} треба визначити тільки на першій і другій ділянках:

$$S_{x1} = F_1 y_1; \quad S_{x2} = F_1 y_1 + F_2 y_2; \quad S_{y1} = F_1 x_1; \quad S_{y2} = F_1 x_1 + F_2 x_2.$$

Знайдемо функцію потоків дотичних сил $q_p(t)$ окремо від поперечних сил Q_x та Q_y :

$$q_{px}(t) = \frac{Q_x}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} (I_x \cdot S_y(t) - I_{xy} \cdot S_x(t));$$

$$q_{py}(t) = \frac{Q_y}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} (I_y \cdot S_x(t) - I_{xy} \cdot S_y(t)).$$

Покажемо єдиний напрямок для двох потоків дотичних сил $q_{px}(t)$ та $q_{py}(t)$ (див. рис. Д.5.9.5).

Визначимо величину моментів відносно моментної точки T залежно від двох потоків дотичних сил $q_{px}(t)$ та $q_{py}(t)$:

$$M_{xT} = \left(q_{y1} \frac{a}{2} + q_{y2} \frac{a}{2} \right) 2a;$$

$$M_{yT} = \left(q_{x1} \frac{a}{2} + q_{x2} \frac{a}{2} \right) 2a.$$

Знайдемо відстані від моментної точки T до лінії дії кожної поперечної сили (до центра згинання):

$$x_{ц.з} = \frac{M_{xT}}{Q_y}; \quad y_{ц.з} = \frac{M_{yT}}{Q_x}.$$

Обидві ці відстані відкладемо вліво від моментної точки T (див. рис. Д.5.9.4). Наведемо числові результати розрахунків:

$$x_1 = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}, \quad y_1 = 2a - \frac{4a}{5} = \frac{6a}{5}; \quad x_2 = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 0, \quad y_2 = 2a - \frac{4a}{5} = \frac{6a}{5};$$

$$S_{x1} = F_1 \cdot y_1 = \frac{1}{6} a \delta \frac{6a}{5} = \frac{a^2 \delta}{5};$$

$$S_{x2} = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 = \frac{a^2 \delta}{5} + \frac{2}{3} a \delta \frac{6a}{5} = a^3 \delta;$$

$$S_{y1} = F_1 \cdot x_1 = \frac{1}{6} a \delta \frac{a}{2} = \frac{a^2 \delta}{12};$$

$$S_{y2} = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 = \frac{a^2 \delta}{12} + \frac{2}{3} a \delta \cdot 0 = \frac{a^2 \delta}{12};$$

$$\frac{1}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} = \frac{1}{a^6 \delta^2 \left(\frac{52}{15} \cdot \frac{7}{4} - (-1)^2 \right)} = \frac{15}{76 a^6 \delta^2};$$

$$\begin{aligned} q_{px1}(t) &= \frac{Q_x}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} (I_x \cdot S_{y1} - I_{xy} \cdot S_{x1}) = \\ &= \frac{15 Q_x}{76 a^6 \delta^2} \left(\frac{52 a^3 \delta}{15} \frac{a^2 \delta}{12} - (-a^3 \delta) \frac{a^2 \delta}{5} \right) = \frac{11 Q_x}{114 a}; \end{aligned}$$

$$q_{px2}(t) = \frac{Q_x}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} (I_x \cdot S_{y2} - I_{xy} \cdot S_{x2}) =$$

$$= \frac{15Q_x}{76a^6 \delta^2} \left(\frac{52a^3 \delta}{15} \frac{a^2 \delta}{12} - (-a^3 \delta) a^2 \delta \right) = \frac{29Q_x}{114a};$$

$$q_{py1}(t) = \frac{Q_y}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} (I_y \cdot S_{x1} - I_{xy} \cdot S_{y1}) =$$

$$= \frac{15Q_y}{76a^6 \delta^2} \left(\frac{7a^3 \delta}{4} \frac{a^2 \delta}{5} - (-a^3 \delta) \frac{a^2 \delta}{12} \right) = \frac{13Q_y}{152a},$$

$$q_{py2}(t) = \frac{Q_y}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} (I_y \cdot S_{x2} - I_{xy} \cdot S_{y2}) =$$

$$= \frac{15Q_y}{76a^6 \delta^2} \left(\frac{7a^3 \delta}{4} a^2 \delta - (-a^3 \delta) \frac{a^2 \delta}{12} \right) = \frac{55Q_y}{152a};$$

$$M_{xT} = \left(q_{y1} \frac{a}{2} + q_{y2} \frac{a}{2} \right) 2a = \left(\frac{13Q_y}{152a} \frac{a}{2} + \frac{55Q_y}{152a} \frac{a}{2} \right) 2a = \frac{17Q_y \cdot a}{38},$$

$$M_{yT} = \left(q_{x1} \frac{a}{2} + q_{x2} \frac{a}{2} \right) 2a = \left(\frac{11Q_x}{114a} \frac{a}{2} + \frac{29Q_x}{114a} \frac{a}{2} \right) 2a = \frac{20Q_x \cdot a}{57};$$

$$x_{ц.з} = \frac{M_{xT}}{Q_y} = \frac{17Q_y \cdot a}{38 \cdot Q_y} = \frac{17a}{38} = \frac{17 \cdot 24}{38} = 10,74 \text{ см},$$

$$y_{ц.з} = \frac{M_{yT}}{Q_x} = \frac{20Q_x \cdot a}{57 \cdot Q_x} = \frac{20a}{57} = \frac{20 \cdot 24}{57} = 8,421 \text{ см}.$$

Положення центра згинання показано на рис. Д.5.9.5. Це місце розташування збігається з отриманим місцем за першим наведеним способом. Досить врахувати поворот координатних осей, щоб переконатися в цьому.

Слід зазначити, що при розв'язанні цієї задачі другий спосіб є менш трудомістким.

**ВАРІАНТИ ВИХІДНИХ ДАНИХ ДО ЗАДАЧІ «ЗСУВ І КРУЧЕННЯ
ЗАМКНУТОГО ПРОФІЛЮ»**

Таблиця Д.6.1

Геометричні параметри перерізу, що розраховують

Номер варіанта	$f_1, \text{см}^2$	$f_2, \text{см}^2$	$\delta_1, \text{мм}$	$\delta_3, \text{мм}$	$\delta_2, \text{мм}$
1	10	40	1	5	2
2	15	35	2	4	4
3	20	30	3	3	6
4	25	25	4	2	8
5	30	20	5	1	2
6	35	15	1	5	4
7	40	10	2	4	6
8	10	40	3	3	8
9	15	35	4	2	2
10	20	30	5	1	4
11	25	25	1	5	6
12	30	20	2	4	8
13	35	15	3	3	2
14	40	10	4	2	4
15	10	40	5	1	6
16	15	35	1	5	8
17	20	30	2	4	2
18	25	25	3	3	4
19	30	20	4	2	6
20	35	15	5	1	8
21	40	10	1	5	2
22	10	40	2	4	4
23	15	35	3	3	6
24	20	30	4	2	8
25	40	10	2	4	4
26	35	15	2	4	6
27	25	25	4	6	2
28	30	20	3	2	3
29	35	15	3	4	2
30	20	30	4	6	2

Продовження табл. 6.1

Номер варіанта	$f_1, \text{см}^2$	$f_2, \text{см}^2$	$\delta_1, \text{мм}$	$\delta_3, \text{мм}$	$\delta_1, \text{мм}$
31	12	38	1	5	2
32	17	33	2	4	4
33	22	28	3	3	6
34	27	23	4	2	8
35	32	18	5	1	2
36	37	13	1	5	4
37	42	8	2	4	6
38	12	38	3	3	8
39	17	33	4	2	2
40	22	28	5	1	4
41	27	23	1	5	6
42	32	18	2	4	8
43	37	13	3	3	2
44	42	8	4	2	4
45	12	38	5	1	6
46	17	33	1	5	8
47	22	28	2	4	2
48	27	23	3	3	4
49	32	18	4	2	6
50	37	13	5	1	8
51	42	8	1	5	2
52	12	38	2	4	4
53	17	33	3	3	6
54	22	28	4	2	8
55	42	8	2	4	4
56	37	13	2	4	6
57	27	23	4	6	2
58	32	18	3	2	3
59	37	13	3	4	2
60	22	28	4	6	2
61	13	37	1	5	2
62	18	32	2	4	4
63	23	27	3	3	6
64	28	22	4	2	8
65	33	17	5	1	2
66	38	12	1	5	4
67	43	7	2	4	6

Закінчення табл. 6.1

Номер варіанта	$f_1, \text{см}^2$	$f_2, \text{см}^2$	$\delta_1, \text{мм}$	$\delta_3, \text{мм}$	$\delta_1, \text{мм}$
68	11	39	1	5	2
69	16	34	2	4	4
70	21	29	3	3	6
71	26	24	4	2	8
72	31	19	5	1	2
73	36	14	1	5	4
74	41	9	2	4	6
75	11	39	3	3	8
76	16	34	4	2	2
77	21	29	5	1	4
78	26	24	1	5	6
79	31	19	2	4	8
80	36	14	3	3	2
81	41	9	4	2	4
82	11	39	5	1	6
83	16	34	1	5	8
84	21	29	2	4	2
85	26	24	3	3	4
86	31	19	4	2	6
87	36	14	5	1	8
88	41	9	1	5	2
89	11	39	2	4	4
90	16	34	3	3	6
91	21	29	4	2	8
92	41	9	2	4	4
93	36	14	2	4	6
94	26	24	4	6	2
95	31	19	3	2	3
96	36	14	3	4	2
97	21	29	4	6	2
98	6	44	1	5	2
99	14	36	2	4	4
100	19	31	3	3	6
101	24	26	4	2	8
102	29	21	5	1	2
103	34	16	1	5	4
104	39	11	2	4	6

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ТЕМОЮ «ЗСУВ І КРУЧЕННЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФІЛЮ»

Задача № 1

Розглянути замкнутий профіль прямокутної форми (рис. Д.7.1.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

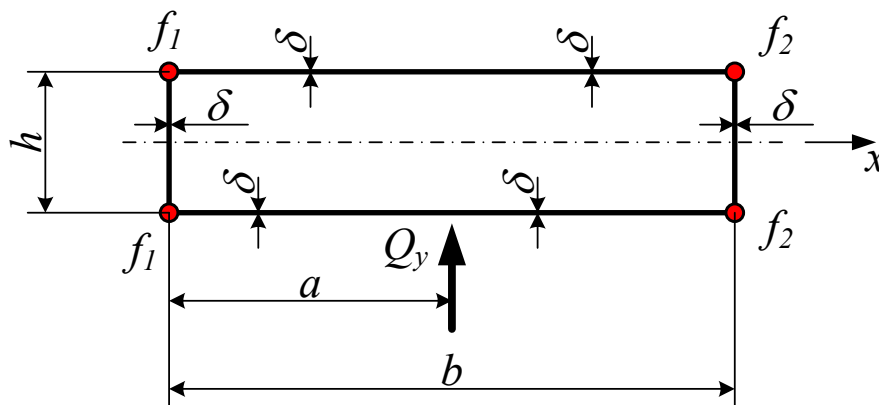


Рис. Д.7.1.1. Замкнутий профіль прямокутної форми

Дано: $Q = Q_y = 11,2$ кН; $h = 0,2$ м; $b = 0,8$ м; $\delta = 0,003$ м; $a = 0,4$ м;
 $f_1 = 20 \cdot 10^{-4}$ м²; $f_2 = 10 \cdot 10^{-4}$ м²; матеріал в перерізі однаковий.

Знайти положення центра жорсткості перерізу і відносний кут закручування тонкостінного стрижня.

Розв'язання

Положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. В силу симетрії центр ваги знаходиться на осі x . На цій же осі розташовано і центр жорсткості.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$\begin{aligned}
 I_x &= 2(f_1 + f_2) \left(\frac{h}{2} \right)^2 + 2 \frac{h^3 \delta}{12} + 2b\delta \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \\
 &= 2(20 + 10) \left(\frac{20}{2} \right)^2 + 2 \frac{20^3 \cdot 0,3}{12} + 2 \cdot 80 \cdot 0,3 \left(\frac{20}{2} \right)^2 = 11200 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Знайдемо функцію $S_x(t)$ поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x . Зробимо в перерізі розріз. З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t . Пронумеруємо ділянки (рис. Д.7.1.2). Епюра симетрична відносно осі x .

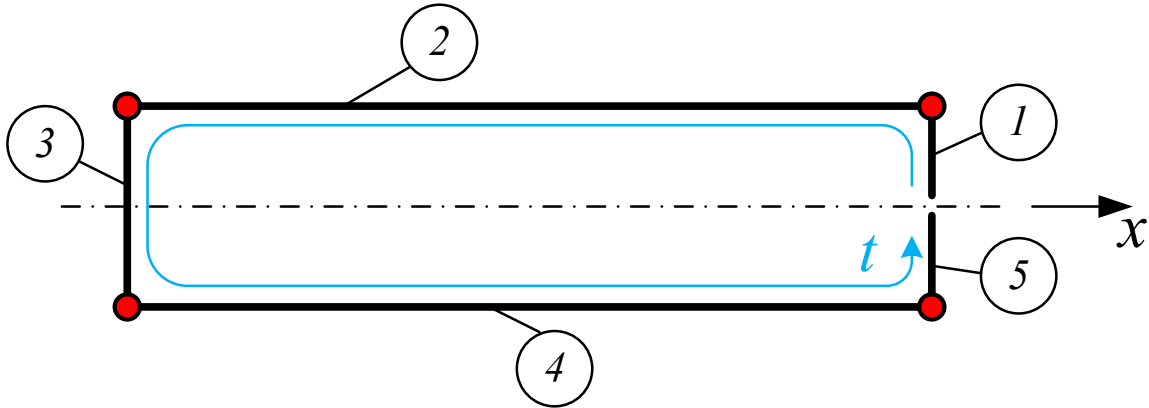


Рис. Д.7.1.2. Напрямок контурної координати і номери ділянок в перерізі

Поділимо переріз на п'ять ділянок. Кожна ділянка обмежена двома зламами контурної лінії, які збігаються з розташуванням зосереджених площ. Обчислення для зручності проведемо в сантиметрах.

Ділянка 1: $0 \leq t \leq \frac{h}{2}$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$; $y_1 = \zeta$; $S_{x1}^0 = 0$;

$$S_{x1}(t) = \int_0^t y_1 \delta d\zeta = \frac{\delta \zeta^2}{2} \Big|_0^t = \frac{\delta t^2}{2} = \frac{0,3t^2}{2} = 0,15t^2 \Big|_{t=0} = 0 \quad \Big|_{t=\frac{h}{2}} = 15 \text{ см}^3.$$

Ділянка 2: $0 \leq t \leq b$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$; $y_2 = \frac{h}{2}$; $S_{x1}^* = 15 \text{ см}^3$;

$$\begin{aligned} S_{x2}(t) &= S_{x1}^* + f_2 \frac{h}{2} + \int_0^t y_2 \delta d\zeta = S_{x1}^* + f_2 \frac{h}{2} + \frac{h\delta\zeta}{2} \Big|_0^t = \\ &= S_{x1}^* + f_2 \frac{h}{2} + \frac{h\delta t}{2} = 15 + 10 \frac{20}{2} + \frac{20 \cdot 0,3t}{2} = 115 + 3t \Big|_{t=0} = \\ &= 115 \text{ см}^3 \Big|_{t=b} = 355 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Ділянка 3: $0 \leq t \leq h$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$; $y_3 = \frac{h}{2} - \zeta$; $S_{x3}^* = 355 \text{ см}^3$;

$$\begin{aligned}
S_{x3}(t) &= S_{x2}^* + f_1 \frac{h}{2} + \int_0^t y_3 \delta d\zeta = S_{x2}^* + f_1 \frac{h}{2} + (3\zeta - 0,3\zeta^2) \Big|_0^t = \\
&= S_{x2}^* + f_1 \frac{h}{2} + \left(3t - \frac{0,3}{2} t^2 \right) = 355 + 20 \frac{20}{2} + \left(3t - 0,15t^2 \right) \Big|_{t=0} = \\
&= 555 + 3t - 0,15t^2 \Big|_{t=0} = 555 \text{ см}^3 \quad \Big|_{t=h} = 555 \text{ см}^3 \quad \Big|_{t=\frac{h}{2}} = 570 \text{ см}^3.
\end{aligned}$$

Ділянка 4: $0 \leq t \leq b$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$; $y_4 = -\frac{h}{2}$; $S_{x3}^* = 555 \text{ см}^3$;

$$\begin{aligned}
S_{x4}(t) &= S_{x3}^* + f_1 \left(-\frac{h}{2} \right) + \int_0^t y_4 \delta d\zeta = S_{x3}^* - f_1 \frac{h}{2} - \frac{h\delta\zeta}{2} \Big|_0^t = \\
&= S_{x1}^* - f_1 \frac{h}{2} - \frac{h\delta t}{2} = 555 - 20 \frac{20}{2} - \frac{20 \cdot 0,3t}{2} = \\
&= 355 - 3t \Big|_{t=0} = 355 \text{ см}^3 \quad \Big|_{t=b} = 115 \text{ см}^3.
\end{aligned}$$

Ділянка 5: $0 \leq t \leq \frac{h}{2}$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$; $y_5 = -\frac{h}{2} + \zeta$; $S_{x3}^* = 115 \text{ см}^3$;

$$\begin{aligned}
S_{x5}(t) &= S_{x4}^* + f_2 \left(-\frac{h}{2} \right) + \int_0^t y_5 \delta d\zeta = S_{x4}^* - f_2 \frac{h}{2} - \frac{h\delta\zeta}{2} + \frac{\delta\zeta^2}{2} \Big|_0^t = \\
&= S_{x1}^* - f_2 \frac{h}{2} - \frac{h\delta t}{2} + \frac{\delta t^2}{2} = 115 - 10 \frac{20}{2} - \frac{20 \cdot 0,3t}{2} + \frac{0,3t^2}{2} = \\
&= 15 - 3t + 0,15t^2 \Big|_{t=0} = 15 \text{ см}^3 \quad \Big|_{t=\frac{h}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

Побудуємо епюру поточного статичного моменту (рис. Д.7.1.3).

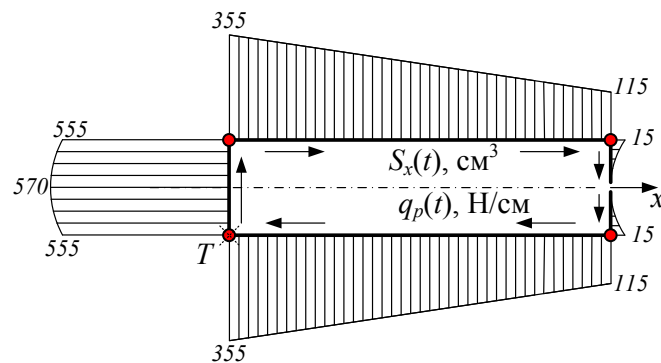


Рис. Д.7.1.3. Епюри $S_x(t)$ та $q_p(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил:

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{11200}{11200} S_x(t) = -S_x(t) \text{ Н/см}.$$

Таким чином, еюра $q_p(t)$ (див. рис. Д.7.1.3) збігається з функцією $S_x(t)$ і має напрямок, протилежний контурній координаті t .

Перевіряємо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова

$$\int q_p(t) dy = Q_y;$$

$$\begin{aligned} & \int_0^h (555 + 3t - 0,15t^2) dt - 2 \int_0^{\frac{h}{2}} 0,3 \frac{t^2}{2} dt = \\ & = 555t + \frac{3}{2}t^2 - 0,15 \frac{t^3}{3} \Big|_0^h - 2 \cdot 0,3 \cdot \frac{t^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^{\frac{h}{2}} = \\ & = 555 \cdot 20 + \frac{3}{2} \cdot 20^2 - 0,05 \cdot 20^3 - 0,1 \cdot 10^3 = 11200 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Умова виконана.

Визначаємо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну вибираємо точку T (див. рис. Д.7.1.3). Скористаємося формулою

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a - \int q_p \rho dt),$$

де $\Omega = 2bh = 2 \cdot 80 \cdot 20 = 3200 \text{ см}^2$.

Величина a збігається з наведеною у вихідних даних. Скориставшись даними еюри $q_p(t)$, отримаємо значення для розрахунку інтеграла:

$$\begin{aligned} \int q_p \rho dt &= -\frac{355 + 115}{2} 80 \cdot 20 - 2 \int_0^{h/2} 0,15t^2 b dt = -\frac{470}{2} 80 \cdot 20 - \\ & - 2 \cdot 0,15 \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} 80 \Big|_{h=20 \text{ см}} = -(4700 + 100) 80 = -384000 \text{ Н} \cdot \text{см}, \end{aligned}$$

тоді

$$q_0 = \frac{1}{3200}(11200 \cdot 40 + 384000) = 260 \text{ Н/см.}$$

Покажемо епюру q_0 на рис. Д.7.1.4.

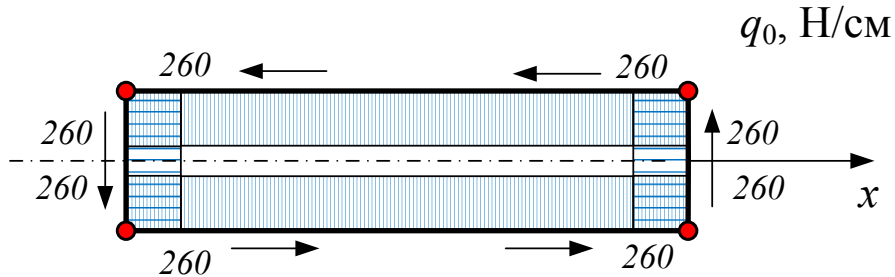


Рис. Д.7.1.4. Епюра q_0

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t)$ на ділянках:

$$q_{\Sigma 1}(t) = 260 - 0,15t^2;$$

$$q_{\Sigma 2}(t) = 260 - 115 - 3t = 145 - 3t;$$

$$q_{\Sigma 3}(t) = 260 - 555 - 3t + 0,15t^2 = -295 - 3t + 0,15t^2;$$

$$q_{\Sigma 4}(t) = 260 - 355 + 3t = -95 + 3t;$$

$$q_{\Sigma 5}(t) = 260 - 15 + 3t - 0,15t^2 = 245 + 3t - 0,15t^2.$$

Покажемо епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначивши напрямки потоків (рис. Д.7.1.5).

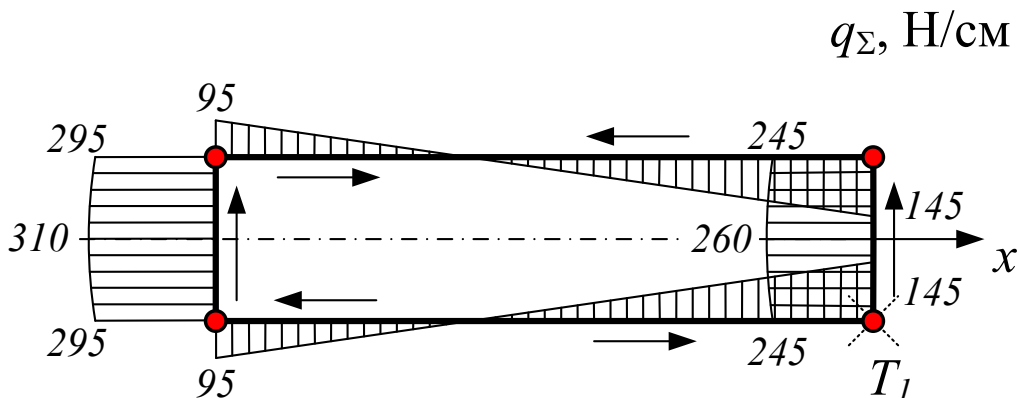


Рис. Д.7.1.5. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Перевіримо правильність розрахунку потоків дотичних сил $q_{\Sigma}(t)$. Переконаємося, що момент, який створюють потоки $q_{\Sigma}(t)$ відносно точки T_1 (див. рис. Д.7.1.5), дорівнює моменту, який створює сила Q_y в перерізі відносно тієї ж точки:

$$\begin{aligned} M_{T_1}[q_{\Sigma}(t)] &= \int_0^b (145 - 3t) h dt + \int_0^h (-295 - 3t + 0,15t^2) b dt = \\ &= 20 \left(145 \cdot 80 - \frac{3 \cdot 80^2}{2} \right) - 80 \left(295 \cdot 20 + \frac{3 \cdot 20^2}{2} - \frac{0,15 \cdot 20^3}{3} \right) = \\ &= 448000 \text{ Н} \cdot \text{см}; \\ M_{T_1}(Q_y) &= Q_y \cdot (b - a) = 11200(80 - 40) = 448000 \text{ Н} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

Якщо зазначені моменти збігаються за величиною, то потоки $q_{\Sigma}(t)$ визначені правильно.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Визначимо крутильну жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = \frac{\Omega^2 G \delta}{\int dt} = \frac{\Omega^2 G \delta}{2b + 2h} = \frac{3200^2 G \cdot 0,3}{2 \cdot 80 + 2 \cdot 20} = 15360 \cdot G \text{ см}^4.$$

Для обчислення погонного кута закручування перерізу проведемо попередньо розрахунок такого інтеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{q_{\Sigma}(t) dt}{G\delta} &= \frac{1}{G\delta} \left[2 \int_0^{\frac{h}{2}} (260 - 0,15t^2) dt + 2 \int_0^b (145 - 3t) dt + \right. \\ &+ \left. \int_0^h (-295 - 3t + 0,15t^2) dt \right] = \frac{1}{G \cdot 0,3} \left[2 \left(260t - \frac{0,15t^3}{3} \right) \Big|_0^{10} + \right. \\ &+ \left. 2 \left(145t - \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^{80} + \left(-295t - \frac{3t^2}{2} + \frac{0,15t^3}{3} \right) \Big|_0^{20} \right] = \frac{10000}{G} \text{ Н/см}. \end{aligned}$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_{\Sigma}(t) dt}{G\delta} = \frac{10000}{3200 \cdot G} = \frac{3,125}{G} \text{ Н/см}^3.$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{\text{кр}} = \theta G I_{\text{кр}} = \frac{3,125}{G} \cdot 15360 \cdot G = 48000 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Розрахуємо величину відстані, яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = \frac{48000}{11200} = 4,286 \text{ см}.$$

Цю відстань відкладаємо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{\text{кр}}$ (рис. Д.7.1.6). Від носка профілю центр жорсткості видалено на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = a - c = 40 - 4,286 = 35,714 \text{ см}.$$

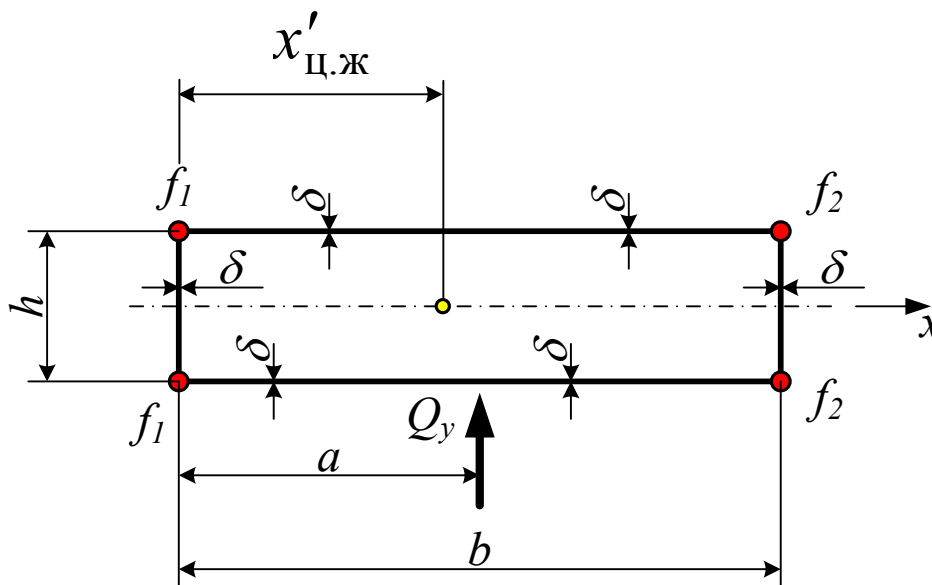


Рис. Д.7.1.6. Положення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, застосовуючи метод фіктивної сили. Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості. Для скорочення розрахунків залишимо колишню величину цієї сили.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбудеться і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо постійну частину потоку дотичних сил, величину якої визначимо за формулою:

$$q_0 = -\frac{\int \frac{q_p(t)dt}{G\delta}}{\int \frac{dt}{G\delta}} = |G\delta = const| = -\frac{\int q_p(t)dt}{\int dt} = -\frac{\int q_p(t)dt}{L},$$

де L – периметр контуру;

$$L = 2b + 2h = 2 \cdot 80 + 2 \cdot 20 = 200 \text{ см.}$$

Розрахуємо верхній інтеграл

$$\begin{aligned} -\int q_p(t)dt &= 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\delta t^2}{2} dt + 2 \int_0^b (115 + 3t)dt + \int_0^h (555 + 3t - 0,15t^2)dt = \\ &= \frac{\delta t^3}{3} \Big|_0^{10} + 2 \left(115t + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^{80} + \left(555t + \frac{3t^2}{2} - \frac{0,15t^3}{3} \right) \Big|_0^{20} = 49000 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Цей інтеграл являє собою площу епюри q_p (див. рис. Д.7.1.3).

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = -\frac{\int q_p(t)dt}{L} = \frac{49000}{200} = 245 \text{ Н/см.}$$

Зобразимо епюру q_0 потоку дотичних сил, який діє в перерізі, коли сила проходить через центр жорсткості (рис. Д.7.1.7).

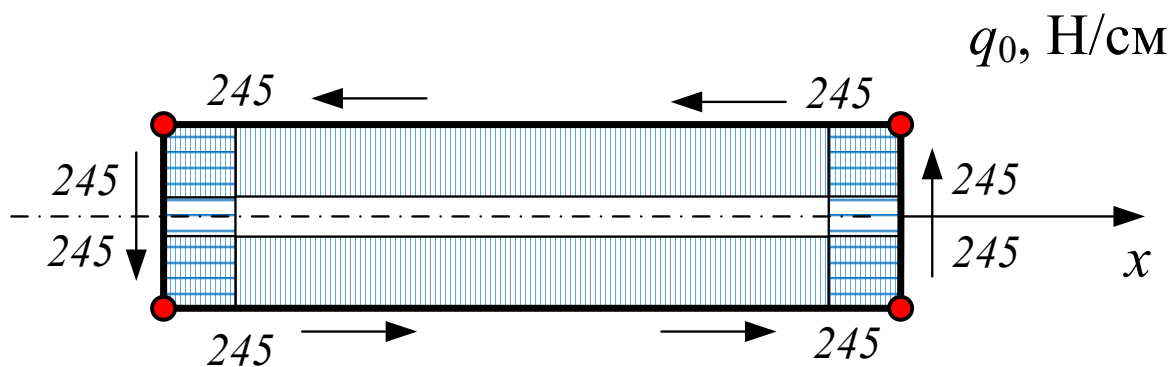


Рис. Д.7.1.7. Епюра q_0

Підрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t)$ по ділянках:

$$q_{\Sigma 1}(t) = 245 - 0,15t^2;$$

$$q_{\Sigma 2}(t) = 245 - 115 - 3t = 130 - 3t;$$

$$q_{\Sigma 3}(t) = 245 - 555 - 3t + 0,15t^2 = -310 - 3t + 0,15t^2;$$

$$q_{\Sigma 4}(t) = 245 - 355 + 3t = -110 + 3t;$$

$$q_{\Sigma 5}(t) = 245 - 15 + 3t - 0,15t^2 = 230 + 3t - 0,15t^2.$$

Покажемо на рис. Д.7.1.8 епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

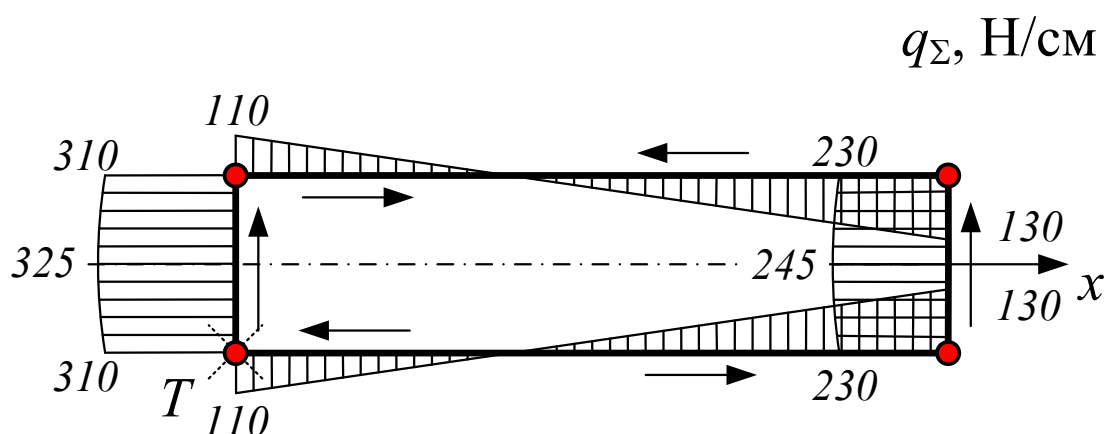


Рис. Д.7.1.8. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Розрахуємо момент відносно точки T , створюваний сумарним потоком дотичних сил:

$$\begin{aligned} M_T(q_{\Sigma}) &= \int q_{\Sigma} \rho dt = \int (q_p + q_0) \rho dt = \int q_p \rho dt + \int q_0 \rho dt = \\ &= \int q_p \rho dt + q_0 2hb. \end{aligned}$$

Перший інтеграл було знайдено раніше:

$$M_T(q_{\Sigma}) = -384000 + q_0 2hb = -384000 + 245 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 80 = 400000 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Визначимо положення центра жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки T (носки профілю) на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = \frac{M_T(q_{\Sigma})}{Q} = \frac{400000}{11200} = 35,714 \text{ см}.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів.

Задача № 2

Умови залишаються такими, як в попередній задачі, але тепер розрахунки необхідно виконати після дискретизації перерізу.

Розв'язання

Використаємо модель Вагнера $\delta_\sigma = 0$. Початковий переріз містить чотири зосереджені площі і чотири полоси: верхню і нижню обшивки і праву і ліву стінки. Кожна зі смужок передає здатність сприймати нормальні напруження на три зосереджені площі, розташовані по її краях і в середині. Площі в середині стінок можна не враховувати, оскільки вони розташовані на осі, яка є нейтральною віссю (в цих площах нормальні напруження дорівнюють нулю). Переріз після дискретизації буде містити шість зосереджених площ і мати вигляд, показаний на рис. Д.7.2.1.

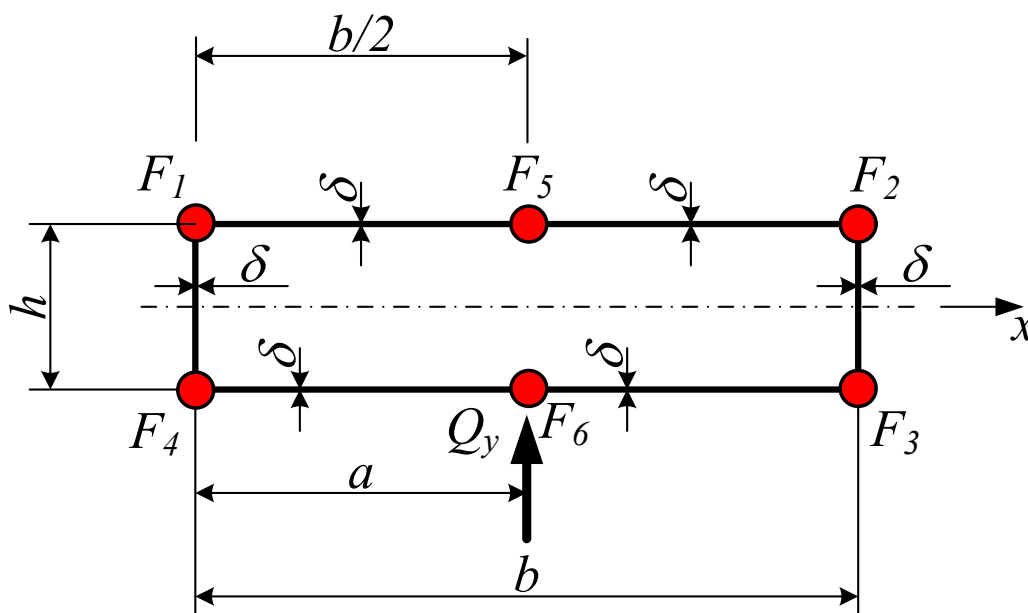


Рис. Д.7.2.1. Дискретний переріз

Розрахуємо площі F_i . Додатки до наявних «кутових» площ від обшивок

$$\Delta F_{\text{обш}} = \frac{1}{6} b \delta = \frac{1}{6} \cdot 80 \cdot 0,3 = 4 \text{ см}^2$$

і від стінок

$$\Delta F_{\text{ст}} = \frac{1}{6} h \delta = \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 0,3 = 1 \text{ см}^2.$$

Утворені після дискретизації зосереджені площі:

$$F_5 = F_6 = \frac{2}{3}hb = \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 0,3 = 16 \text{ см}^2;$$

$$F_1 = F_4 = f_1 + \Delta F_{\text{обш}} + \Delta F_{\text{ст}} = 20 + 4 + 1 = 25 \text{ см}^2;$$

$$F_2 = F_3 = f_2 + \Delta F_{\text{обш}} + \Delta F_{\text{ст}} = 10 + 4 + 1 = 15 \text{ см}^2.$$

Унаслідок симетрії перерізу положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , де буде розташовуватися і центр жорсткості.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = \sum_{i=1}^6 F_i y_i^2 = 2(F_1 + F_2 + F_5) \frac{h^2}{4} = 2(25 + 15 + 16) \frac{20^2}{4} = 11200 \text{ см}^4.$$

Природно, що результат збігся з отриманим в попередній задачі.

Знайдемо функцію S_x поточного статичного моменту площі перерізу щодо осі x . Введемо в переріз розріз (рис. Д.7.2.2). З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою. Пронумеруємо ділянки. Еюра S_x буде симетричною відносно осі x .

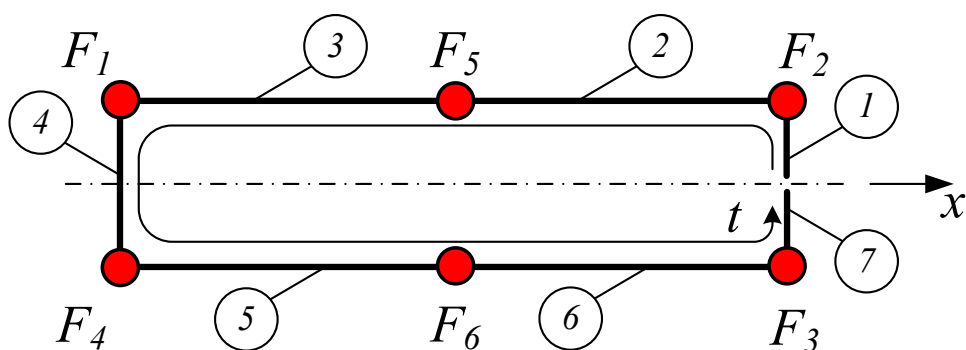


Рис. Д.7.2.2. Напрямок контурної координати і номери ділянок в перерізі

$$\text{Ділянка 1: } 0 \leq t \leq \frac{h}{2};$$

$$S_{x1} = 0.$$

$$\text{Ділянка 2: } 0 \leq t \leq \frac{b}{2};$$

$$S_{x2} = F_2 \frac{h}{2} = 15 \frac{20}{2} = 150 \text{ см}^3.$$

Ділянка 3: $0 \leq t \leq \frac{b}{2}$;

$$S_{x3} = S_{x2} + F_5 \frac{h}{2} = 150 + 16 \frac{20}{2} = 310 \text{ см}^3.$$

Ділянка 4: $0 \leq t \leq \frac{h}{2}$;

$$S_{x4} = S_{x3} + F_1 \frac{h}{2} = 310 + 25 \frac{20}{2} = 560 \text{ см}^3.$$

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.2.3 епюру S_x .

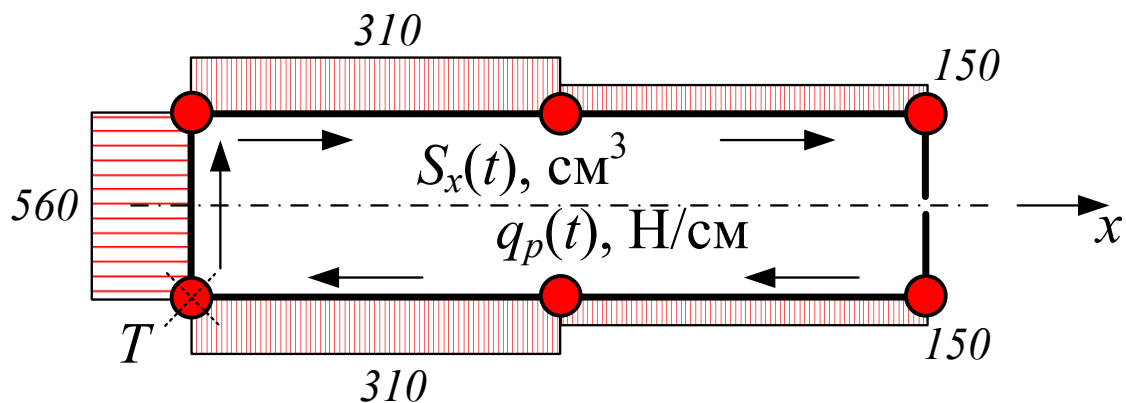


Рис. Д.7.2.3. Епюри $S_x(t)$ та $q_p(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил:

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{11200}{11200} S_x(t) = -S_x(t) \text{ Н/см}.$$

Таким чином, епюра $q_p(t)$ збігається з функцією $S_x(t)$ і має напрямок, протилежний контурній координаті t .

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова

$$\int q_p(t) dy = Q_y;$$

$$\int q_p(t) dy = q_{p4} \cdot h = 560 \cdot 20 = 11200 \text{ Н}.$$

Умова виконана.

Визначаємо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну вибираємо точку T (див. рис. Д.7.2.3):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a - \int q_p \rho dt),$$

де $\Omega = 2bh = 2 \cdot 80 \cdot 20 = 3200 \text{ см}^2$.

Величина a збігається з наведеною у вихідних даних. Skorиставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла

$$\int q_p \rho dt = -(q_{p2} + q_{p3}) \frac{b}{2} h = -(150 + 310) \frac{80}{2} \cdot 20 = -368000 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Тоді

$$q_0 = \frac{1}{3200} (11200 \cdot 40 + 368000) = 255 \text{ Н/см}.$$

Зобразимо на рис. Д.7.2.4 епюру q_0 .

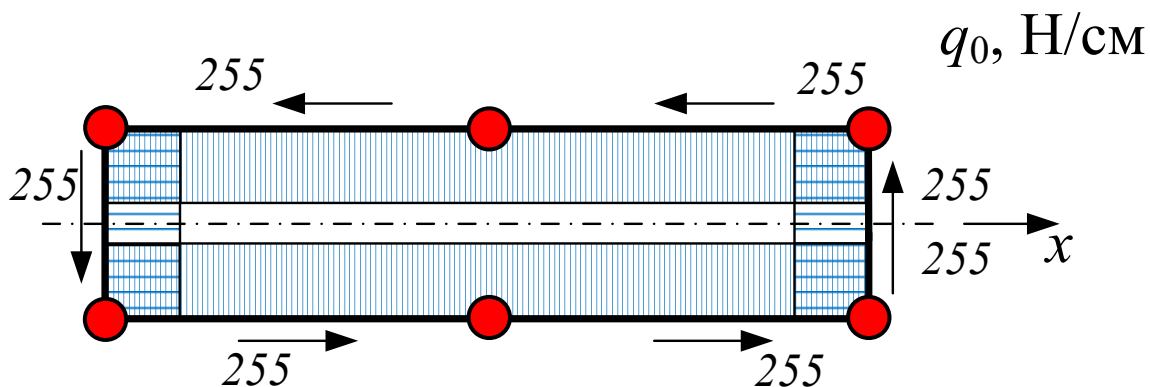


Рис. Д.7.2.4. Епюра q_0

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t)$ на ділянках:

$$q_{\Sigma 1}(t) = 255 \text{ Н/см};$$

$$q_{\Sigma 2}(t) = 255 - 150 = 105 \text{ Н/см};$$

$$q_{\Sigma 3}(t) = 255 - 310 = -55 \text{ Н/см};$$

$$q_{\Sigma 4}(t) = 255 - 560 = -305 \text{ Н/см}.$$

Покажемо на рис. Д.7.2.5 епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

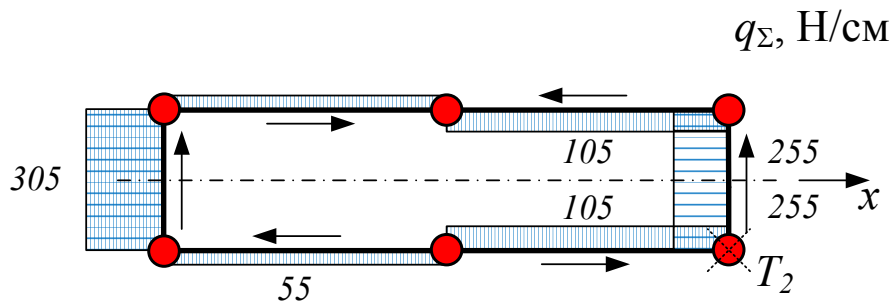


Рис. Д.7.2.5. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Перевіримо правильність визначення потоків дотичних сил $q_{\Sigma}(t)$. Переконаємося, що момент, який створюють потоки $q_{\Sigma}(t)$ відносно точки T_2 (див. рис. Д.7.2.5), дорівнює моменту сили Q_y в перерізі відносно тієї ж точки:

$$\begin{aligned} M_{T_2}[q_{\Sigma}(t)] &= q_{\Sigma 4}hb + q_{\Sigma 3}\frac{b}{2}h - q_{\Sigma 2}\frac{b}{2}h = \\ &= 305 \cdot 20 \cdot 80 + 55 \cdot \frac{80}{2} \cdot 20 - 105 \cdot \frac{80}{2} \cdot 20 = 448000 \text{ Н}\cdot\text{см}; \\ M_{T_2}(Q_y) &= Q_y \cdot (b - a) = 11200 \cdot (80 - 40) = 448000 \text{ Н}\cdot\text{см}. \end{aligned}$$

Якщо зазначені моменти збігаються за величиною, то потоки $q_{\Sigma}(t)$ визначені правильно.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Визначимо крутильну жорсткість поперечного перерізу (розрахована раніше)

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = \frac{\Omega^2 G \delta}{\int dt} = \frac{\Omega^2 G \delta}{2b + 2h} = \frac{3200^2 G \cdot 0,3}{2 \cdot 80 + 2 \cdot 20} = 15360 \cdot G \text{ см}^4.$$

Для обчислення погонного кута закручування перерізу проведемо попередньо підрахунок інтеграла

$$\begin{aligned} \int q_{\Sigma}(t) dt &= q_{\Sigma 1}h + 2q_{\Sigma 2}\frac{b}{2} - 2q_{\Sigma 3}\frac{b}{2} - q_{\Sigma 4}h = \\ &= 255 \cdot 20 + 2 \cdot 105 \cdot \frac{80}{2} - 2 \cdot 55 \cdot \frac{80}{2} - 305 \cdot 20 = 3000 \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$\int \frac{q_{\Sigma}(t)dt}{G\delta} = \frac{3000}{G \cdot 0,3} = \frac{10000}{G} \text{ Н/см.}$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_{\Sigma}(t)dt}{G\delta} = \frac{10000}{3200 \cdot G} = \frac{3,125}{G} \text{ Н/см}^3.$$

Цей результат збігся з отриманим раніше результатом щодо заданого перерізу (з працюючою на нормальні напруження обшивкою).

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{\text{кр}} = \theta G I_{\text{кр}} = \frac{3,125}{G} \cdot 15360 \cdot G = 48000 \text{ Н}\cdot\text{см.}$$

Розрахуємо величину відстані, яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = \frac{48000}{11200} = 4,286 \text{ см.}$$

Цей результат збігся з отриманим раніше результатом щодо заданого перерізу (з працюючою на нормальні напруження обшивкою).

Цю відстань c відкладемо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{\text{кр}}$ (рис. Д.7.2.6). Від носка профілю центр жорсткості видалено на відстань

$$x'_{\text{ц.ж}} = a - c = 40 - 4,286 = 35,714 \text{ см.}$$

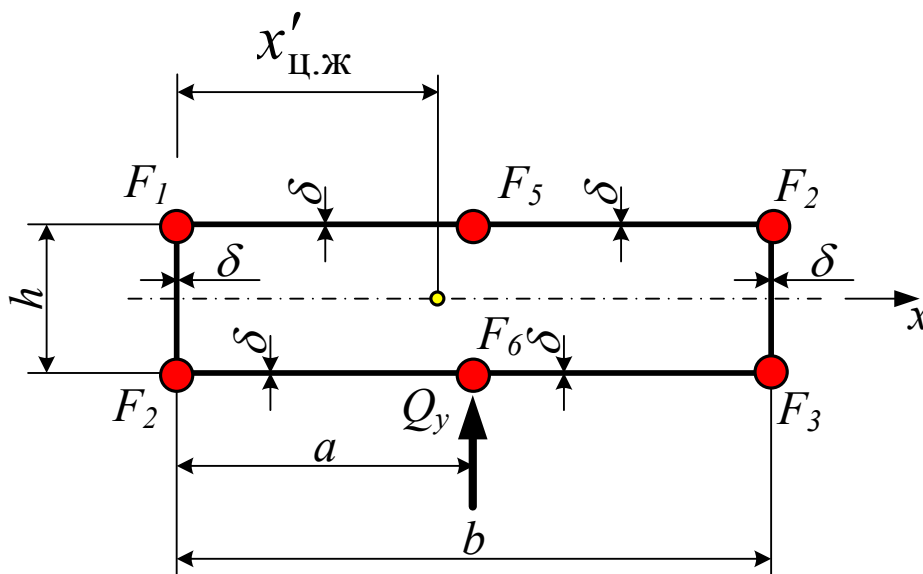


Рис. Д.7.2.6. Положення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, застосовуючи метод фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості. Для скорочення розрахунків залишимо колишню величину цієї сили.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбувається і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо величину постійної частини потоку дотичних сил q_0 за формулою

$$q_0 = -\frac{\int \frac{q_p(t)dt}{G\delta}}{\int \frac{dt}{G\delta}} = |G\delta = const| = -\frac{\int q_p(t)dt}{\int dt} = -\frac{\int q_p(t)dt}{L},$$

де L – периметр контуру;

$$L = 2b + 2h = 2 \cdot 80 + 2 \cdot 20 = 200 \text{ см.}$$

Розрахуємо верхній інтеграл

$$\begin{aligned} -\int q_p(t)dt &= -2\left(q_{p2} \frac{b}{2} + q_{p3} \frac{b}{2}\right) - q_{p4}h = \\ &= 2\left(150 \frac{80}{2} + 310 \frac{80}{2}\right) + 560 \cdot 20 = 48000 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Цей інтеграл являє собою площу епюри q_p .

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = -\frac{\int q_p(t)dt}{L} = \frac{48000}{200} = 240 \text{ Н/см.}$$

Покажемо на рис. Д.7.2.7 епюру потоку дотичних сил q_0 за умови відсутності крутіння.

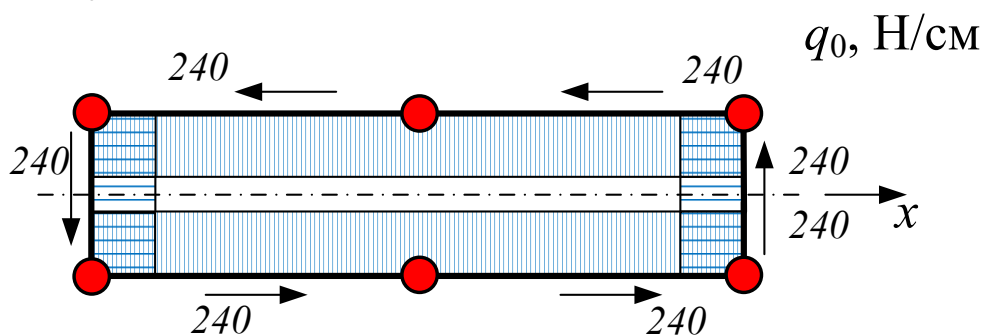


Рис. Д.7.2.7. Епюра q_0

Зобразимо сумарну епюру потоків дотичних сил $q_{\Sigma}(t)$ в цьому випадку (рис. Д.7.2.8).

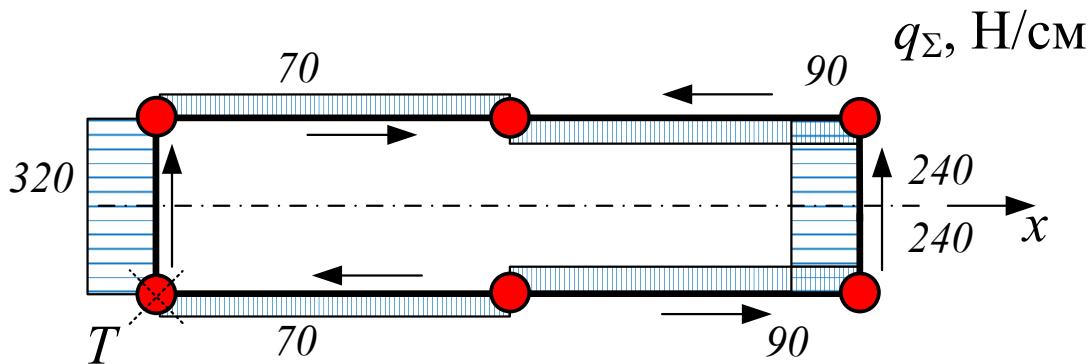


Рис. Д.7.2.8. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Розрахуємо момент відносно точки T (див. рис. Д.7.2.8), створюваний сумарним потоком дотичних сил:

$$\begin{aligned} M_T(q_{\Sigma}) &= \int q_{\Sigma} \rho dt = \int (q_p + q_0) \rho dt = \int q_p \rho dt + \int q_0 \rho dt = \\ &= \int q_p \rho dt + q_0 2hb. \end{aligned}$$

Перший інтеграл було знайдено раніше:

$$M_T(q_{\Sigma}) = -368000 + q_0 2hb = -368000 + 240 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 80 = 400000 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Визначимо положення центра жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки (носка профілю) на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = \frac{M_T(q_{\Sigma})}{Q} = \frac{400000}{11200} = 35,714 \text{ см}.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів, які збіглися з отриманими раніше (без проведення дискретизації).

Зауваження. Дослідимо додатково вплив дискретизації на положення центра жорсткості перерізу в даній задачі. Проведемо спрощену дискретизацію.

Спочатку переріз після проведення звичайної дискретизації містив чотири зосереджені площі і чотири полоси: верхню і нижню обшивки і праву і ліву стінки. Раніше кожна зі смужок (стінок) передавала здатність сприймати нормальні напруження на три зосереджені площі, розташовані на її краях. Площі в середині стінок можна не враховувати, оскільки вони розташовані на осі, яка є нейтральною віссю (в цих площах нормальні напруження дорівнюють нулю).

Тепер кожна обшивка являє собою дві площі також за умови збереження осевого моменту інерції смужки відносно горизонтальної осі симетрії. Переріз після дискретизації буде містити чотири зосереджені площі і мати вигляд, показаний на рис. Д.7.2.9.

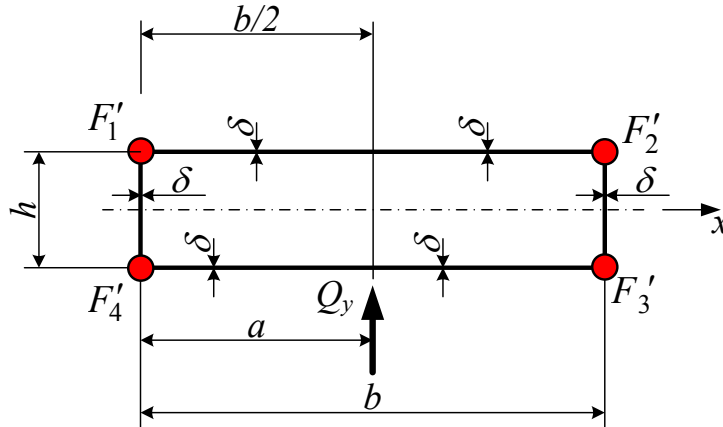


Рис. Д.7.2.9. Спрощений дискретний переріз

Розрахуємо ці площі F'_i . Додатки до наявних «кутових» площ від обшивок

$$\Delta F'_{\text{обш}} = \frac{1}{2} b \delta = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 0,3 = 12 \text{ см}^2,$$

а додатки від стінок

$$\Delta F'_{\text{ст}} = \frac{1}{6} h \delta = \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 0,3 = 1 \text{ см}^2.$$

Утворені після дискретизації зосереджені площі:

$$F'_1 = F'_4 = f_1 + \Delta F'_{\text{обш}} + \Delta F'_{\text{ст}} = 20 + 12 + 1 = 33 \text{ см}^2,$$

$$F'_2 = F'_3 = f_2 + \Delta F'_{\text{обш}} + \Delta F'_{\text{ст}} = 10 + 12 + 1 = 23 \text{ см}^2.$$

Унаслідок симетрії перерізу положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , там же буде розташовуватися і центр жорсткості.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = \sum_{i=1}^4 F_i y_i = 2(F'_1 + F'_2) \frac{h^2}{4} = 2(33 + 23) \frac{20^2}{4} = 11200 \text{ см}^4.$$

Природно, що результат збігся з отриманим раніше.

Визначимо функцію поточного статичного моменту площі перерізу щодо осі x . Введемо в переріз розтин (рис. Д7.2.10). З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t . Пронумеруємо ділянки. Епюра $S_x(t)$ симетрична відносно осі x .

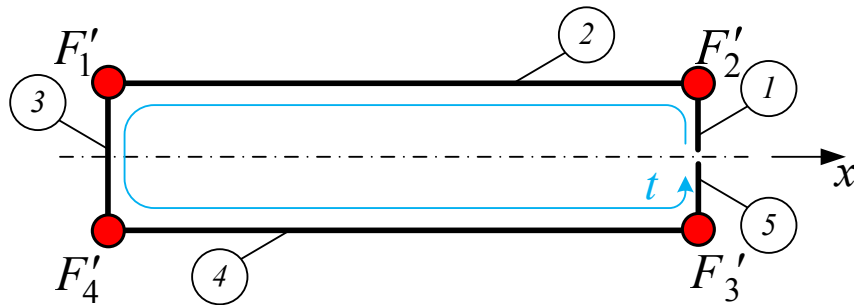


Рис. Д.7.2.10. Напрямок контурної координати і номери ділянок в перерізі

Ділянка 1: $0 \leq t \leq \frac{h}{2}$;

$$S_{x1} = 0.$$

Ділянка 2: $0 \leq t \leq b$;

$$S_{x2} = F'_2 \frac{h}{2} = 23 \frac{20}{2} = 230 \text{ см}^3.$$

Ділянка 3: $0 \leq t \leq h$;

$$S_{x3} = S_{x2} + F'_1 \frac{h}{2} = 230 + 33 \frac{20}{2} = 560 \text{ см}^3.$$

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.2.11 епюру $S_x(t)$.

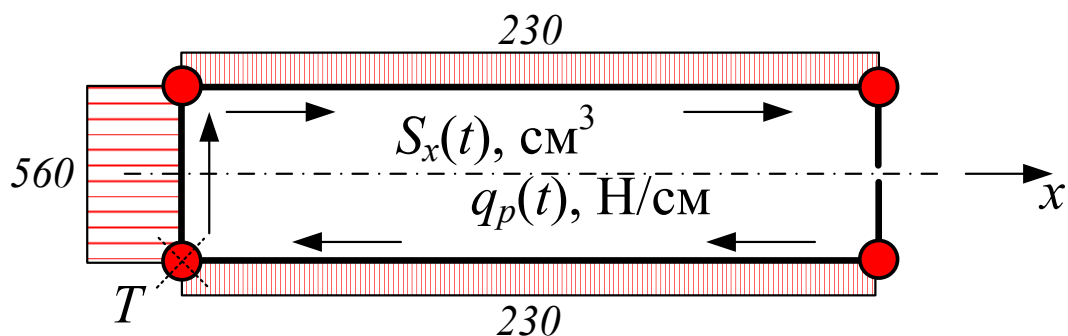


Рис. Д.7.2.11. Епюри $S_x(t)$ та $q_p(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{11200}{11200} S_x(t) = -S_x(t) \text{ Н/см.}$$

Таким чином, еюра $q_p(t)$ збігається з функцією $S_x(t)$ і має напрямок, протилежний контурній координаті (див. рис. Д.7.2.11).

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова

$$\int q_p(t) dy = Q_y;$$

$$\int q_p(t) dy = q_{p4} \cdot h = 560 \cdot 20 = 11200 \text{ Н.}$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T (див. рис Д.7.2.11):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a - \oint q_p \rho dt),$$

де

$$\Omega = 2bh = 2 \cdot 80 \cdot 20 = 3200 \text{ см}^2.$$

Величина a наведена у вихідних даних. Скориставшись даними еюри $q_p(t)$ (див. рис Д.7.2.11), отримаємо значення для інтеграла

$$\oint q_p \rho dt = -q_{p2} \frac{b}{2} h = -230 \cdot 80 \cdot 20 = -368000 \text{ Н}\cdot\text{см.}$$

Тепер

$$q_0 = \frac{1}{3200} (11200 \cdot 40 + 368000) = 255 \text{ Н/см.}$$

Результат одержали такий же, як і при першій дискретизації. Зобразимо еюру q_0 (рис Д.7.2.12).

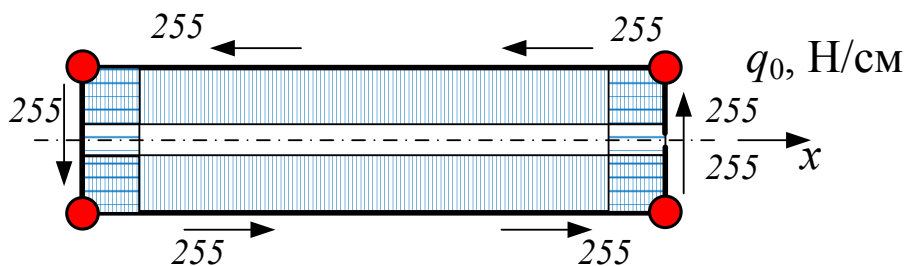


Рис. Д.7.2.12. Еюра q_0

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t)$ на ділянках:

$$q_{\Sigma 1}(t) = 255 \text{ Н/см};$$

$$q_{\Sigma 2}(t) = 255 - 230 = 25 \text{ Н/см};$$

$$q_{\Sigma 3}(t) = 255 - 560 = -305 \text{ Н/см}.$$

Покажемо на рис. Д.7.2.13 епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

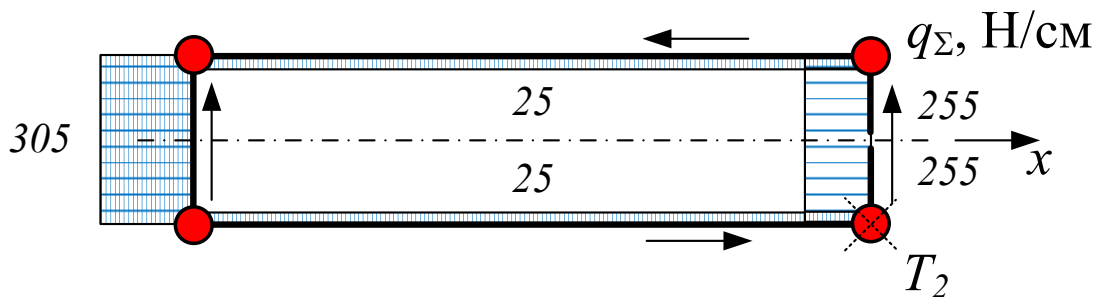


Рис. Д.7.2.13. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Перевіримо правильність визначення потоків дотичних сил $q_{\Sigma}(t)$. Переконаємося, що момент, який створюють потоки відносно точки T_2 (див. рис. Д.7.2.13), дорівнює моменту сили Q_y в перерізі відносно тієї ж точки:

$$M_{T_2}[q_{\Sigma}(t)] = q_{\Sigma 3}hb + q_{\Sigma 2}bh = 305 \cdot 20 \cdot 80 - 25 \cdot 80 \cdot 20 = 448000 \text{ Н}\cdot\text{см};$$

$$M_{T_2}(Q_y) = Q_y \cdot (b - a) = 11200 \cdot (80 - 40) = 448000 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Зазначені моменти збігаються за величиною, тобто потоки $q_{\Sigma}(t)$ визначені правильно.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу (розрахована раніше)

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}} = 15360 \cdot G \text{ см}^4.$$

Для обчислення погонного кута закручування перерізу проведемо попередньо розрахунок інтеграла

$$\int q_{\Sigma}(t)dt = q_{\Sigma 1}h + 2q_{\Sigma 2}b - q_{\Sigma 3}h =$$

$$= 255 \cdot 20 + 2 \cdot 25 \cdot 80 \cdot 20 - 305 \cdot 20 = 3000 \text{ Н},$$

а також

$$\int \frac{q_{\Sigma}(t)dt}{G\delta} = \frac{3000}{G \cdot 0,3} = \frac{10000}{G} \text{ Н/см.}$$

Обчислимо погонний кут закручування

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_{\Sigma}(t)dt}{G\delta} = \frac{10000}{3200 \cdot G} = \frac{3,125}{G} \text{ Н/см}^3.$$

Цей результат збігся з отриманою величиною для вихідного перерізу (з працюючою на нормальні напруги обшивкою і при раніше проведеній дискретизації).

Тепер можна обчислити крутний момент:

$$M_{\text{кр}} = \theta GI_{\text{кр}} = \frac{3,125}{G} 15360 \cdot G = 48000 \text{ Н}\cdot\text{см.}$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості перерізу

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = \frac{48000}{11200} = 4,286 \text{ см.}$$

Цей результат також збігся з отриманою величиною для вихідного перерізу (з працюючою на нормальні напруги обшивкою і при раніше проведеній дискретизації).

Цю відстань відкладемо вліво від діючої в перерізі сили Q_y , відповідно до напрямку моменту $M_{\text{кр}}$ (рис. Д.7.2.14). Від носка профілю центр жорсткості віддалений на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = a - c = 40 - 4,286 = 35,714 \text{ см.}$$

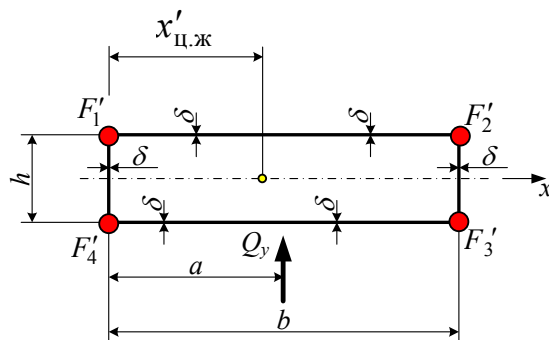


Рис. Д.7.2.14. Положення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, застосовуючи метод фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості. Для скорочення розрахунків залишимо колишню величину цієї сили.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбувається, і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо постійну частину потоку дотичних сил q_0 , величину якої визначимо за формулою

$$q_0 = - \frac{\int \frac{q_p(t) dt}{G\delta}}{\int \frac{dt}{G\delta}} = |G\delta = const| = - \frac{\int q_p(t) dt}{\int dt} = - \frac{\int q_p(t) dt}{L},$$

де L – периметр контуру

$$L = 2b + 2h = 2 \cdot 80 + 2 \cdot 20 = 200 \text{ см.}$$

Розрахуємо верхній інтеграл

$$-\int q_p(t) dt = -2q_{p2}b - q_{p3}h = 2 \cdot 230 \cdot 80 + 560 \cdot 20 = 48000 \text{ Н.}$$

Цей інтеграл являє собою площу епюри q_p .

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = - \frac{\int q_p(t) dt}{L} = \frac{48000}{200} = 240 \text{ Н/см.}$$

Результат збігається з отриманим у першому варіанті дискретизації. Покажемо на рис. Д.7.2.15 епюру q_0 за умови відсутності крутіння.

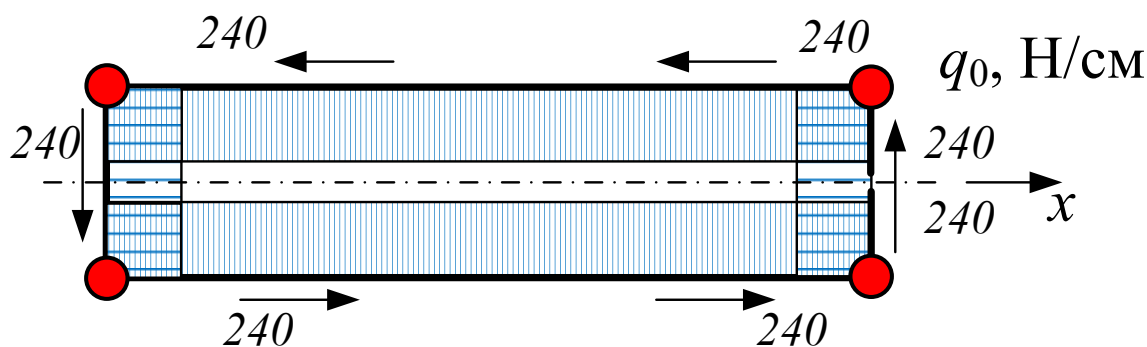


Рис. Д.7.2.15. Епюра q_0

Зобразимо на рис. Д.7.2.16 сумарну епюру потоків дотичних сил в цьому випадку.

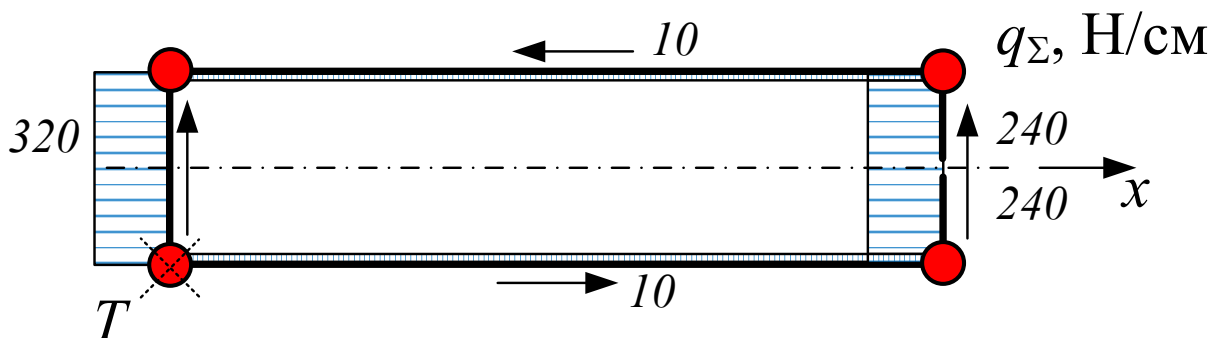


Рис. Д.7.2.16. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Обчислимо момент відносно точки T (рис. Д.7.2.16), створений сумарним потоком дотичних сил:

$$M_T(q_{\Sigma}) = \int q_{\Sigma} \rho dt = \int (q_p + q_0) \rho dt = \int q_p \rho dt + \int q_0 \rho dt = \int q_p \rho dt + q_0 2hb.$$

Перший інтеграл розраховано раніше:

$$M_T(q_{\Sigma}) = -368000 + q_0 2hb = -384000 + 240 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 80 = 400000 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Визначимо положення центра жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки T (носка профілю) (див. рис. Д.7.2.14) на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = \frac{M_T(q_{\Sigma})}{Q} = \frac{400000}{11200} = 35,714 \text{ см}.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів, які збіглися з отриманими раніше (без проведення дискретизації і при першому варіанті дискретизації).

Додатково наведемо результати розрахунків при дослідженні залежності потоків дотичних сил від положення поперечної сили у розглянутій задачі (з використанням спрощеної дискретизації) (рис. Д.7.2.17).

Отримані результати узагальнимо. Покажемо на рис. Д.7.2.18, як змінюються потоки дотичних сил на контурі перерізу при зміні положення діючої поперечної сили.

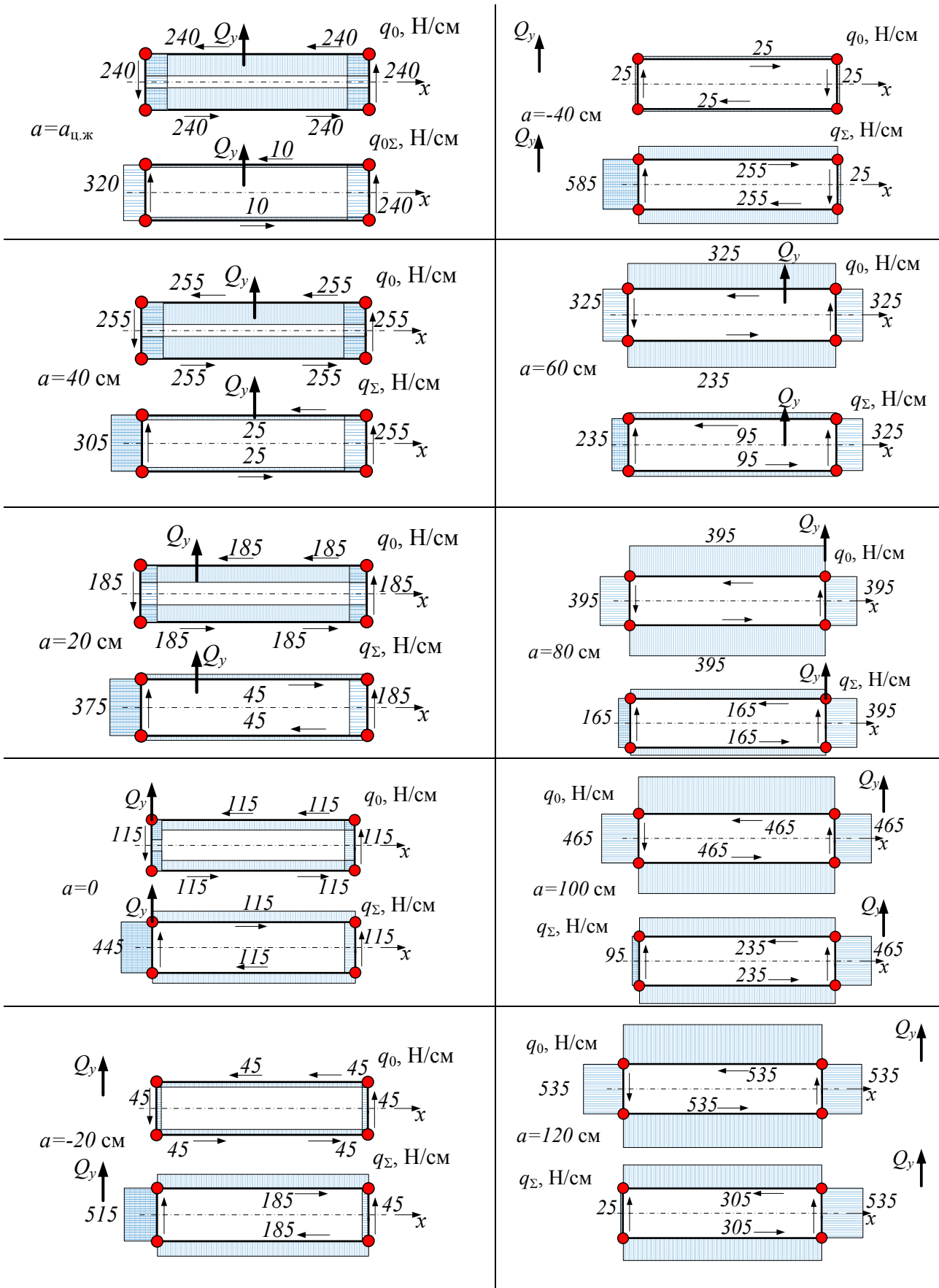


Рис. Д.7.2.17. Епюри $q_0(t)$ і $q_\Sigma(t)$ при різних значеннях a

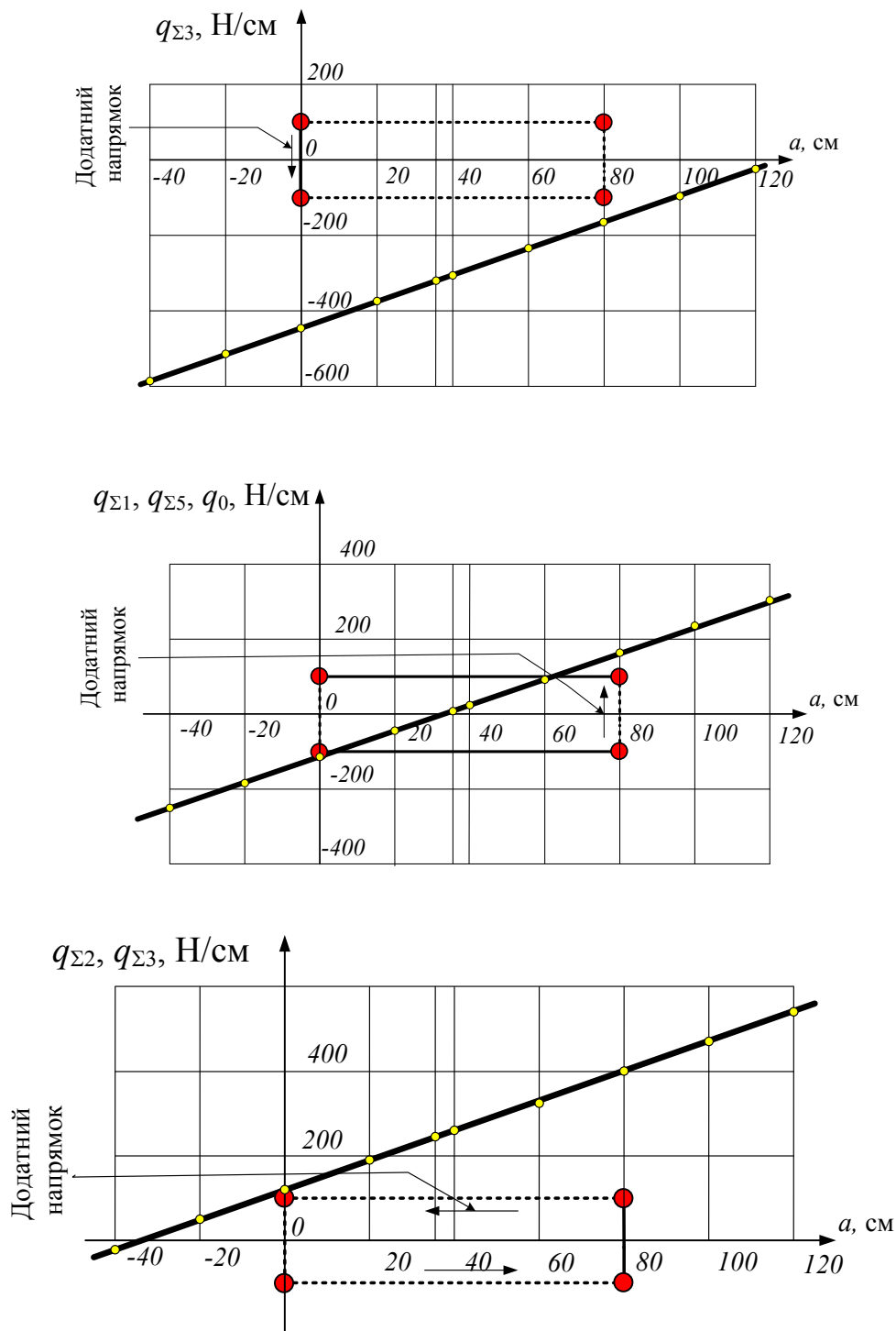


Рис. Д.7.2.18. Залежність $q_{\Sigma i}(t)$ та q_0 від a

Можна помітити, що величини потоків на ділянках лінійно залежать від положення поперечної сили, отже, достатньо обчислити їх при двох положеннях сили: в будь-якому іншому положенні сили потоки дотичних сил можна визначити за лінійною залежністю.

Задача № 3

Розглянути замкнутий профіль – кільцевий переріз (рис. Д.7.3.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$).

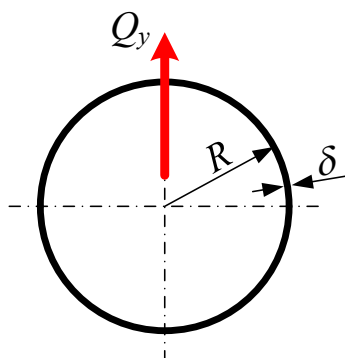


Рис. Д.7.3.1. Кільцевий переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий; $\delta = const$.
Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр його ваги шукати не потрібно. Він знаходиться в центрі кола, там буде розташовуватися і центр жорсткості. Визначаємо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = \pi R^3 \delta.$$

Визначаємо функцію S_x поточного статичного моменту площі перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч на осі x (рис. Д.7.3.2), відносно осі x . З'єднуємо пару вільних точок контурною координатою t . Причому $t = \varphi R$. Додатково введемо допоміжну координату $\zeta = \psi R$.

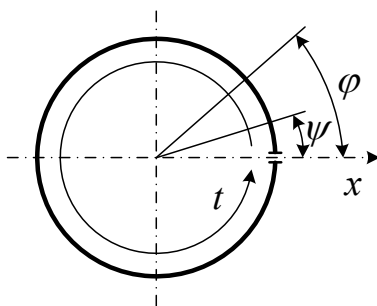


Рис. Д.7.3.2. Кільцевий переріз

Епюра S_x симетрична відносно осі x :

$$0 \leq t \leq 2\pi R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \zeta \leq t; 0 \leq \psi \leq \varphi; y(\psi) = R \sin \psi;$$

$$S_x(\varphi) = \int_0^\varphi y \delta R d\psi = \int_0^\varphi R \sin \psi \delta R d\psi = R^2 \delta \int_0^\varphi \sin \psi d\psi = -R^2 \delta \cos \psi \Big|_0^\varphi =$$

$$= R^2 \delta (1 - \cos \varphi) \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = R^2 \delta \quad \Big|_{\varphi=\pi} = 2R^2 \delta.$$

На рис. Д.7.3.3 покажемо епюру $S_x(\varphi)$.

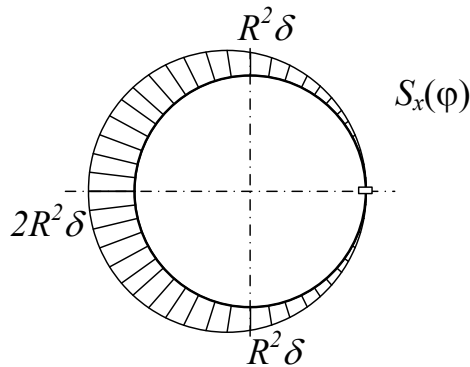


Рис. Д.7.3.3. Епюра $S_x(\varphi)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(\varphi) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(\varphi) = -\frac{Q_y R^2 \delta}{\pi R^3 \delta} (1 - \cos \varphi) = -\frac{Q_y}{\pi R} (1 - \cos \varphi) \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{Q_y}{\pi R} \Big|_{\varphi=\pi} = -2 \frac{Q_y}{\pi R}.$$

Зобразимо на рис. Д.7.3.4 епюру $q_p(\varphi)$, яка має напрямок, протилежний контурній координаті.

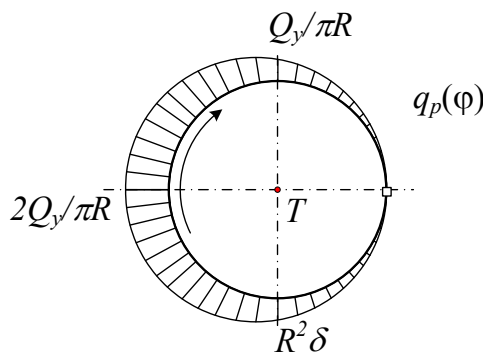


Рис. Д.7.3.4. Епюра $q_p(\varphi)$

Перевіримо правильність визначення $q_p(\varphi)$. Має виконуватися умова

$$\int q_p(\varphi) dy = Q_y:$$

$$2 \int_0^{\pi} q_p \cos \varphi \cdot R d\varphi = -\frac{2Q_y R}{\pi R} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{2Q_y}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi - \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right] = -\frac{2Q_y}{\pi} \left[0 - \frac{\pi}{2} \right] = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну вибираємо точку I (див. рис. Д.7.3.4):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a - \oint q_p \rho dt);$$

$$\Omega = 2\pi R^2.$$

Величина a дорівнює нулю. Скориставшись даними епюри $q_p(\varphi)$, отримаємо значення інтеграла

$$\oint q_p \rho dt = \int_0^{2\pi} q_p R^2 d\varphi = -\frac{Q_y R^2}{\pi R} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) d\varphi =$$

$$= -\frac{Q_y R}{\pi} 2\pi = -2Q_y R;$$

$$q_0 = -\left(-\frac{2Q_y R}{2\pi R^2} \right) = \frac{Q_y}{\pi R}.$$

Зобразимо на рис. Д.7.3.5 епюру q_0 .

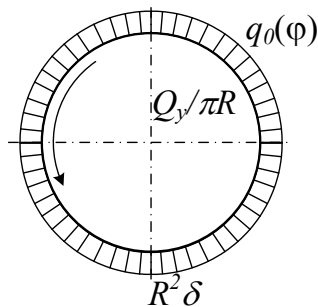


Рис. Д.7.3.5. Епюра q_0

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(\varphi) = q_0 + q_p(\varphi)$:

$$q_{\Sigma}(\varphi) = \frac{Q_y}{\pi R} - \frac{Q_y}{\pi R}(1 - \cos \varphi) = \frac{Q_y}{\pi R} \cos \varphi.$$

Покажемо на рис. Д.7.3.6 епюру $q_{\Sigma}(t)$, вказавши напрямки потоків.

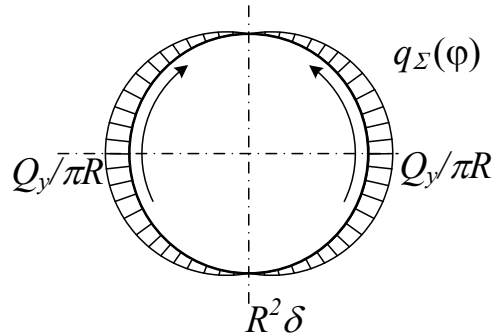


Рис. Д.7.3.6. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Розподіл потоків при інших варіантах дії поперечної сили Q_y (рис. Д.7.3.7) буде таким же самим.

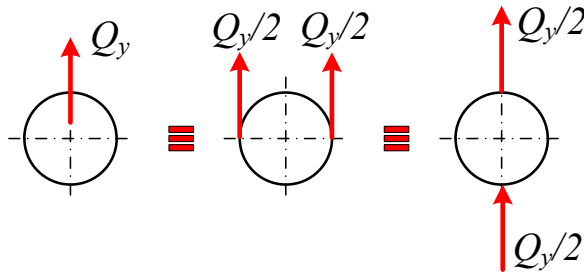


Рис. Д.7.3.7. Варіанти дії поперечної сили Q_y

Такий розподіл потоків дотичних сил не зміниться при іншому способі прикладення навантаження за умови відсутності крутного моменту.

Якщо в перерізі діє крутний момент, то задачу можна поділити на дві і при її розв'язанні скористатися методом суперпозиції (рис. Д.7.3.8).

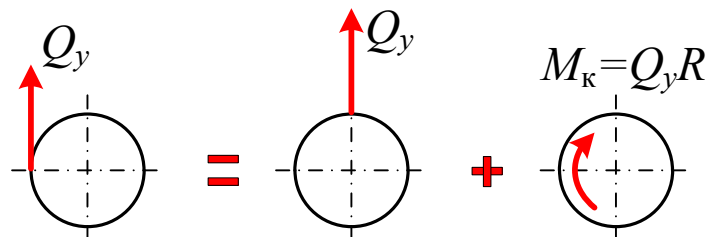


Рис. Д.7.3.8. Суперпозиція розв'язання

Задача № 4

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.4.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_\sigma = 0$ (модель Вагнера).

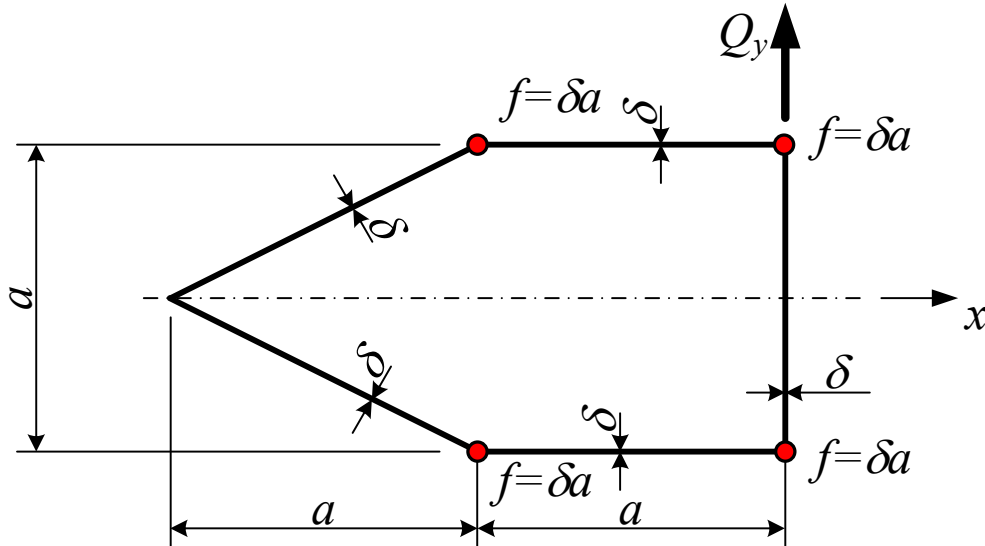


Рис. Д.7.4.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил і визначити положення центра жорсткості.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу положення центра його ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , де буде розташовуватися і центр жорсткості.

Момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 4f \left(\frac{a}{2} \right)^2 = 4\delta a \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \delta a^3.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t . Нумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x .

$$\text{Ділянка 1: } 0 \leq t \leq \frac{a}{2}; S_{x1} = 0.$$

Ділянка 2: $0 \leq t \leq a$: $S_{x2} = f \frac{a}{2} = \delta a \frac{a}{2} = \frac{\delta a^2}{2}$.

Ділянка 3: $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{5}}{2} a$; $S_{x3} = S_{x2} + f \frac{a}{2} = \frac{\delta a^2}{2} + \delta a \frac{a}{2} = \delta a^2$.

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.4.2 епюру $S_x(t)$.

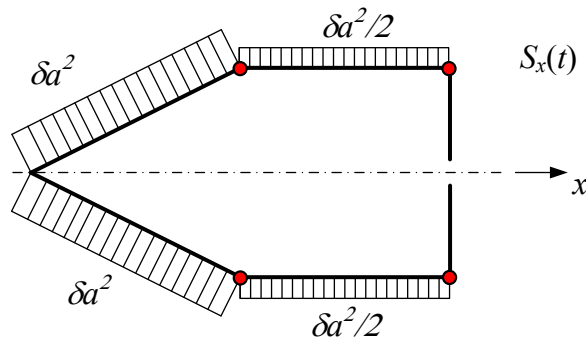


Рис. Д.7.4.2. Епюра $S_x(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{\delta a^3} S_x(t).$$

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Обчислимо значення цієї функції на ділянках:

$$q_{p1} = 0; q_{p2} = -\frac{Q_y}{\delta a^3} \frac{\delta a^2}{2} = -\frac{Q_y}{2a}; q_{p3} = -\frac{Q_y}{\delta a^3} \delta a^2 = -\frac{Q_y}{a}.$$

Покажемо на рис. Д.7.4.3 епюру $q_p(t)$.

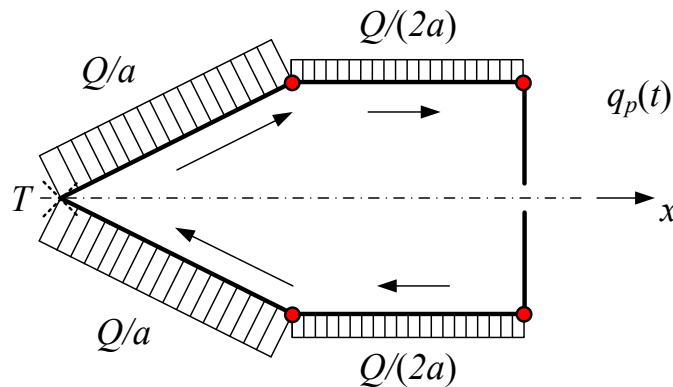


Рис. Д.7.4.3. Епюра $q_p(t)$

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова

$$\int q_p(t) dy = Q_y;$$

$$\int q_p(t) dy = 2q_{p3} \cdot \frac{a}{2} = 2 \frac{Q_y}{a} \cdot \frac{a}{2} = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T (див. рис. Д.7.4.3):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \oint q_p \rho dt);$$

$$\Omega = 2a^2 + a^2 = 3a^2; a_T = 2a.$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла і потоку q_0 :

$$\oint q_p \rho dt = -2q_{p2} a \frac{a}{2} = -2 \frac{Q_y}{2a} a \frac{a}{2} = -\frac{Q_y a}{2};$$

$$q_0 = \frac{1}{3a^2} \left(Q_y 2a + \frac{Q_y a}{2} \right) = \frac{5 Q_y}{6 a}.$$

Покажемо на рис. Д.7.4.4 епюру $q_0(t)$.

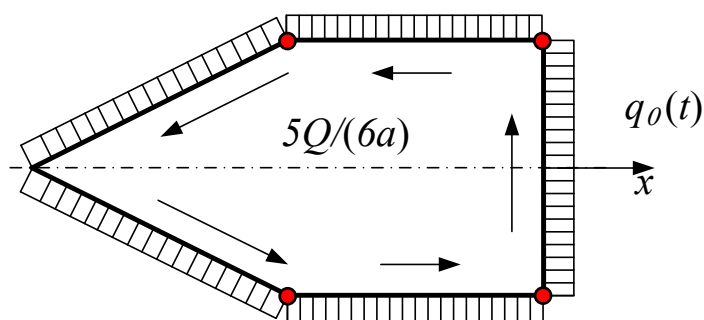


Рис. Д.7.4.4. Епюра $q_0(t)$

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t)$ на ділян-

ках: $q_{\Sigma 1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{Q_y}{a}; q_{\Sigma 2} = -\frac{Q_y}{2a} + \frac{5}{6} \cdot \frac{Q_y}{a} = \frac{Q_y}{3a}; q_{\Sigma 3} = -\frac{Q_y}{a} + \frac{5}{6} \frac{Q_y}{a} = -\frac{Q_y}{6a}.$

Покажемо на рис. Д.7.4.5 епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

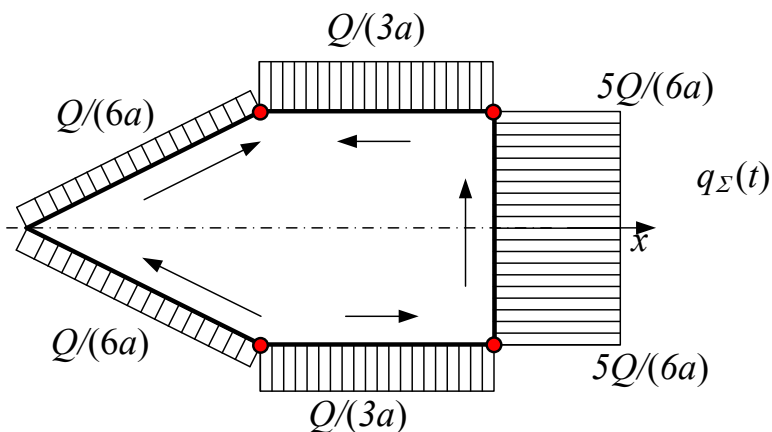


Рис. Д.7.4.5. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Перевіримо правильність визначення потоків дотичних сил $q_{\Sigma}(t)$. Переконаємося, що момент, який створюється потоками $q_{\Sigma}(t)$ відносно точки T_1 (рис. Д.7.4.6), дорівнює моменту сили Q_y в перерізі відносно тієї ж точки (останній момент дорівнює нулю):

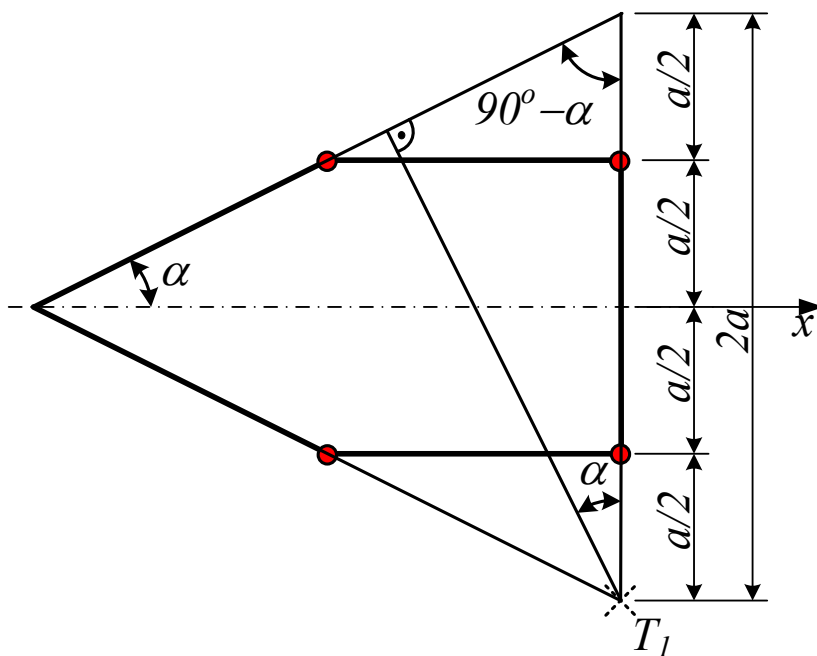


Рис. Д.7.4.6. Розташування моментної точки T_1 в перерізі

$$M_{T_1}[q_{\Sigma}(t)] = q_{\Sigma 3} t_3 \rho_3 - q_{\Sigma 2} t_2 \rho_2 + q_{\Sigma 1} t_1 \rho_1;$$

$$t_3 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a; \quad \cos \alpha = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \rho_3 = 2a \cos \alpha;$$

$$M_{T_1}[q_{\Sigma}(t)] = \frac{Q_y}{6a} \frac{\sqrt{5}}{2} a \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{Q_y}{3a} a \frac{3}{2} a + \frac{Q_y}{3a} a \frac{1}{2} a = 0.$$

Зазначені моменти збіглися за величиною, отже, потоки $q_{\Sigma}(t)$ визначені правильно.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = \frac{G\delta(3a^2)^2}{3a + 2 \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{9G\delta a^3}{3 + \sqrt{5}} = 1,719G\delta a^3.$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_{\Sigma}(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G\delta} \int q_{\Sigma}(t) dt = \frac{1}{\Omega G\delta} \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{Q_y}{a} a + 2 \frac{Q_y}{3a} a - 2 \frac{Q_y}{6a} \frac{\sqrt{5}}{2} a \right) = \\ &= \frac{Q_y}{\Omega G\delta} \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{6} \right) = \frac{Q_y}{3a^2 G\delta} \left(\frac{9}{6} - \frac{\sqrt{5}}{6} \right) = \frac{Q_y}{18a^2 G\delta} (9 - \sqrt{5}) = 0,3758 \frac{Q_y}{a^2 G\delta}. \end{aligned}$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{\text{кр}} = \theta GI_{\text{кр}} = 1,719G\delta a^3 \cdot 0,3758 \frac{Q_y}{a^2 G\delta} = 0,6460Q_y a.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = \frac{0,6460Q_y a}{Q_y} = 0,6460a.$$

Цю відстань відкладаємо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{\text{кр}}$ (рис. Д.7.4.7). Від носка профілю центр жорсткості видалено на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = 2a - c = 2a - 0,6460a = 1,354a.$$

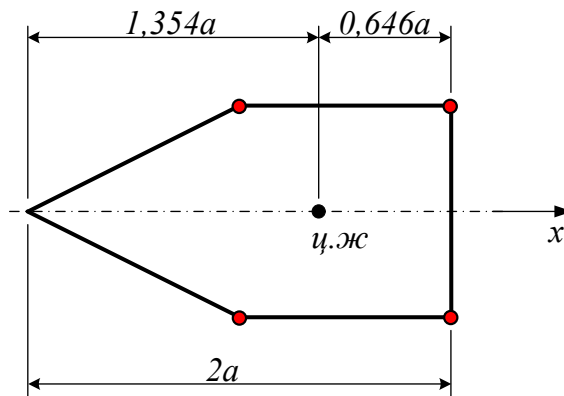


Рис. Д.7.4.7. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, застосувавши метод фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не буде і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння обчислимо постійну частину потоку дотичних сил q_0 , величину якої визначимо за формулою

$$q_0 = -\frac{\int \frac{q_p(t)dt}{G\delta}}{\int \frac{dt}{G\delta}} = |G\delta = const| = -\frac{\int q_p(t)dt}{\int dt} = -\frac{\int q_p(t)dt}{L},$$

де L – периметр контуру;

$$L = 3a + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a = (3 + \sqrt{5})a = 5,236a.$$

Розрахуємо верхній інтеграл

$$-\int q_p(t)dt = 2 \left(\frac{Q_y}{2a} a + \frac{Q_y}{a} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a \right) = (1 + \sqrt{5})Q_y = 3,236Q_y.$$

Цей інтеграл являє собою площу епюри q_p .

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = -\frac{\int q_p(t)dt}{L} = \frac{3,236Q_y}{5,236a} = 0,6180 \frac{Q_y}{a}.$$

На рис. Д.7.4.8 показана епюра q_0 за умови відсутності крутіння.

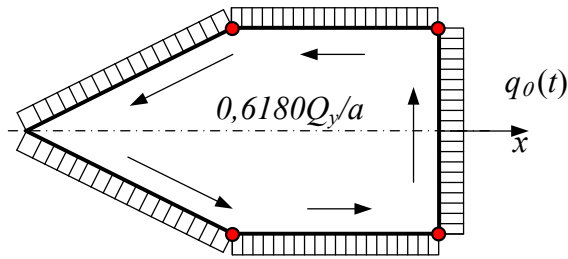


Рис. Д.7.4.8. Епюра $q_0(t)$ за умови відсутності крутіння

На рис. Д.7.4.9 зобразимо сумарну епюру потоків дотичних сил в цьому випадку.

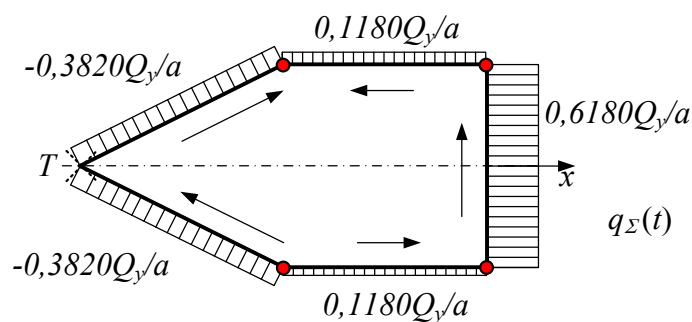


Рис. Д.7.4.9. Епюра $q_\Sigma(t)$ за умови відсутності крутіння

Розрахуємо момент відносно точки T (див. рис. Д.7.4.9), створований сумарним потоком дотичних сил q_Σ :

$$\begin{aligned} M_T(q_\Sigma) &= \oint q_\Sigma \rho dt = \oint (q_p + q_0) \rho dt = \oint q_p \rho dt + \oint q_0 \rho dt = \\ &= \oint q_p \rho dt + q_0 \Omega. \end{aligned}$$

Перший інтеграл було розраховано раніше:

$$M_T(q_\Sigma) = -\frac{Q_y a}{2} + q_0 \Omega = -\frac{Q_y a}{2} + 0,6180 \frac{Q_y}{a} 3a^2 = 1,354 Q_y a.$$

Визначимо центр жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки T (носка профілю) на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = \frac{M_T(q_\Sigma)}{Q} = \frac{1,354 Q_y a}{Q_y} = 1,354 a.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів.

Задача № 5

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.5.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_\sigma = 0$ (модель Вагнера).

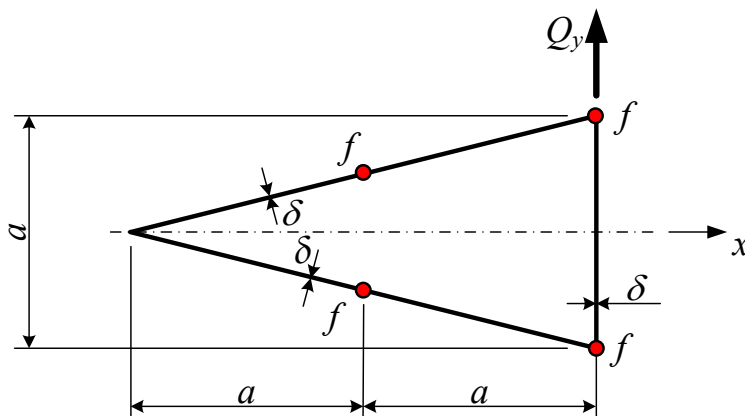


Рис. Д.7.5.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил і визначити положення центра жорсткості.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр ваги перерізу шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , де буде розташовуватися і центр жорсткості.

Момент інерції площі перерізу відносно осі x

$$I_x = \left[4f \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 4f \left(\frac{a}{4} \right)^2 \right] = \frac{5}{8} fa^2.$$

Визначаємо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч на осі x . З'єднуємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.5.2). Нумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x .

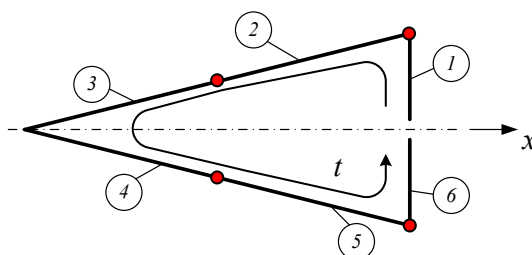


Рис. Д.7.5.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

Ділянка 2: $S_{x2} = f \frac{a}{2}$.

Ділянка 3: $S_{x3} = S_{x2} + f \frac{a}{4} = f \frac{a}{2} + f \frac{a}{4} = f \frac{3a}{4}$.

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.5.3 епюру $S_x(t)$.

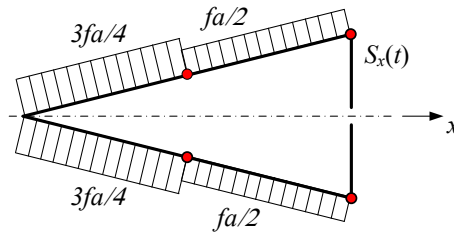


Рис. Д.7.5.3. Епюра $S_x(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{5}{8} \frac{Q_y}{fa^2} S_x(t).$$

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Обчислимо значення цієї функції на ділянках:

$$q_{p1} = 0; \quad q_{p2} = -\frac{Q_y}{\frac{5}{8}fa^2} \frac{fa}{2} = -\frac{4Q_y}{5a}; \quad q_{p3} = -\frac{Q_y}{\frac{5}{8}fa^2} \frac{3fa}{4} = -\frac{6Q_y}{5a},$$

далі – симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.5.4 епюру $q_p(t)$.

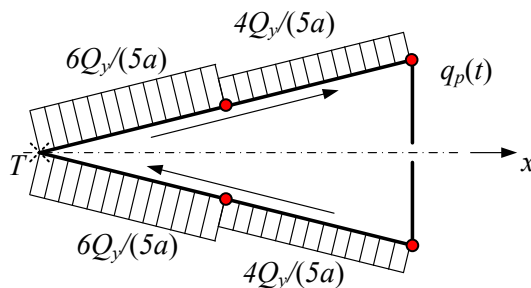


Рис. Д.7.5.4. Епюра $q_p(t)$

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова

$$\int q_p(t) dy = Q_y;$$

$$\int q_p(t) dy = 2q_{p2} \cdot \frac{a}{4} + 2q_{p3} \cdot \frac{a}{4} = \left(\frac{4Q_y}{5a} + \frac{6Q_y}{5a} \right) \frac{a}{2} = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T (рис. Д.7.5.4):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \oint q_p \rho dt);$$

$$\Omega = 2a^2; \quad a_T = 2a.$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла і потоку q_0 :

$$\oint q_p \rho dt = 0; \quad q_0 = \frac{1}{2a^2} Q_y 2a = \frac{Q_y}{a}.$$

Покажемо на рис. Д.7.5.5 епюру $q_0(t)$.

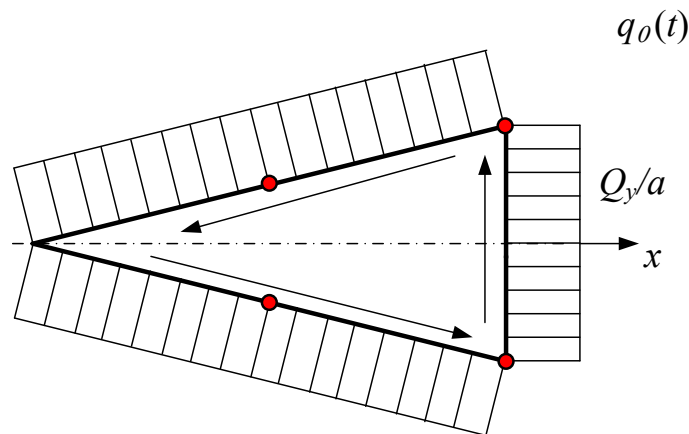


Рис. Д.7.5.5. Епюра $q_0(t)$

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t)$ на ділян-

$$\text{ках: } q_{\Sigma 1} = \frac{Q_y}{a}, \quad q_{\Sigma 2} = -\frac{4Q_y}{5a} + \frac{Q_y}{a} = \frac{Q_y}{5a}, \quad q_{\Sigma 3} = -\frac{6Q_y}{5a} + \frac{Q_y}{a} = -\frac{Q_y}{5a}.$$

Покажемо на рис. Д.7.5.6 епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

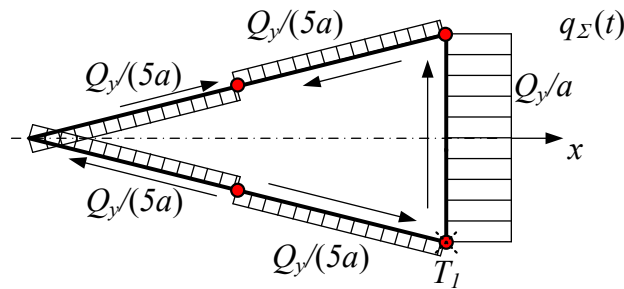


Рис. Д.7.5.6. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Перевіримо правильність визначення потоків дотичних сил $q_{\Sigma}(t)$. Переконаємося, що момент, який створюють потоки $q_{\Sigma}(t)$ відносно точки T_1 (див. рис. Д.7.5.6), дорівнює моменту сили Q_y в перерізі відносно тієї ж точки. Обидва моменти дорівнюють нулю, отже, потоки $q_{\Sigma}(t)$ визначені правильно.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = \frac{G\delta(2a^2)^2}{a + 2\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{4G\delta a^3}{1 + \sqrt{17}} = 0,7808G\delta a^3.$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_{\Sigma}(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G\delta} \int q_{\Sigma}(t) dt = \frac{1}{\Omega G\delta} \left(\frac{Q_y}{a} a + 2 \frac{Q_y}{5a} a - 2 \frac{Q_y}{5a} a \right) = \\ &= \frac{Q_y}{\Omega G\delta} = 0,5 \frac{Q_y}{a^2 G\delta}. \end{aligned}$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{\text{кр}} = \theta GI_{\text{кр}} = 0,7808G\delta a^3 \cdot 0,5 \frac{Q_y}{a^2 G\delta} = 0,3904Q_y a.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = \frac{0,3904Q_y a}{Q_y} = 0,3904a.$$

Цю відстань відкладаємо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{кр}$ (рис. Д.7.5.7). Від носка профілю центр жорсткості видалено на відстань

$$x_{ц.ж} = 2a - c = 2a - 0,3904a = 1,610a.$$

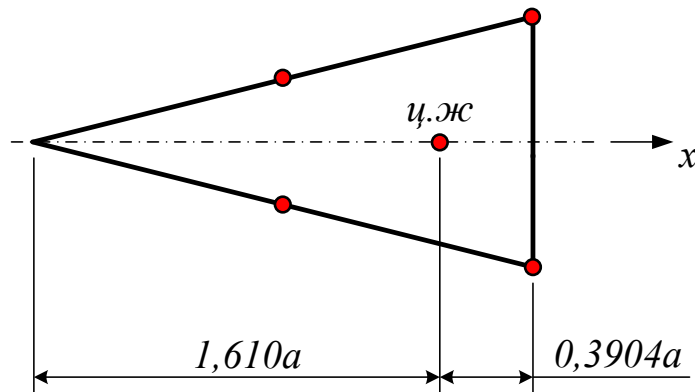


Рис. Д.7.5.7. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, застосувавши метод фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбудеться, і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо постійну частину потоку дотичних сил q_0 , величину якої визначимо за формулою

$$q_0 = -\frac{\oint \frac{q_p(t)dt}{G\delta}}{\oint \frac{dt}{G\delta}} = |G\delta = const| = -\frac{\oint q_p(t)dt}{\oint dt} = -\frac{\oint q_p(t)dt}{L},$$

де L – периметр контуру;

$$L = (1 + \sqrt{17})a = 5,123a.$$

Розрахуємо значення верхнього інтеграла

$$-\oint q_p(t)dt = 2\left(\frac{4Q_y}{5a} \frac{\sqrt{17}}{4} a + \frac{6Q_y}{5a} \frac{\sqrt{17}}{4} a\right) = \sqrt{17}Q_y = 4,123Q_y.$$

Зауважимо, що цей інтеграл являє собою площу епюри q_p .

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = -\frac{\int q_p(t)dt}{L} = \frac{4,123Q_y}{5,123a} = 0,8048\frac{Q_y}{a}.$$

На рис. Д.7.5.8 показана епюра $q_0(t)$ за умови відсутності крутіння.

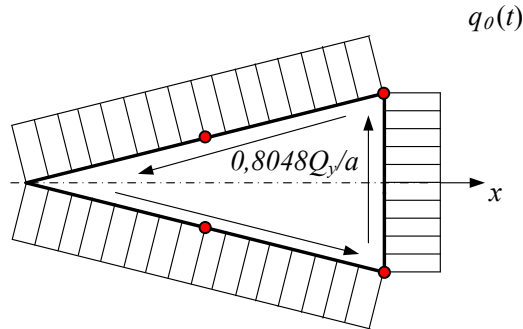


Рис. Д.7.5.8. Епюра $q_0(t)$ за умови відсутності крутіння

Зобразимо на рис. Д.7.5.9 сумарну епюру потоків дотичних сил в цьому випадку.

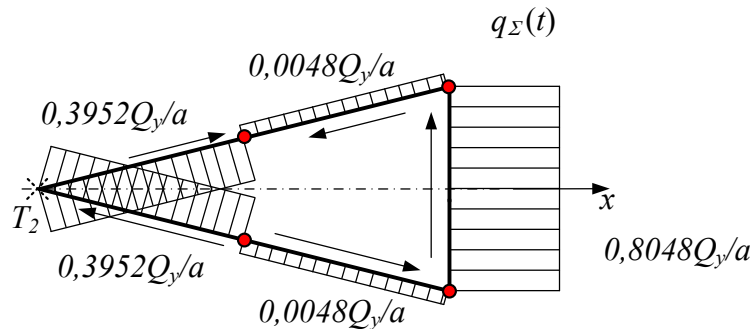


Рис. Д.7.5.9. Епюра $q_Σ(t)$ за умови відсутності крутіння

Розрахуємо момент відносно точки T_2 (див. рис. Д.7.5.9), створюваний сумарним потоком дотичних сил $q_Σ$:

$$\begin{aligned} M_{T_2}(q_Σ) &= \int q_Σ \rho dt = \int (q_p + q_0) \rho dt = \int q_p \rho dt + \int q_0 \rho dt = \\ &= \int q_p \rho dt + q_0 \Omega. \end{aligned}$$

Перший інтеграл дорівнює нулю, тоді

$$M_{T_2}(q_Σ) = 0 + q_0 \Omega = 0,8048 \frac{Q_y}{a} 2a^2 = 1,610 Q_y a.$$

Визначимо центр жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки T_2 (носка профілю) на відстань

$$x_{ц.ж} = \frac{M_{T_2}(q_\Sigma)}{Q} = \frac{1,610Q_y a}{Q_y} = 1,610a.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів.

Зауваження: як і очікувалося, товщина обшивки при її сталості, а також однорідність матеріалу обшивки за контуром не впливає на положення центра жорсткості перерізу.

Проведемо додаткове дослідження. Припустимо, що товщина стінки становить 2δ (рис. Д.7.5.10). Встановимо, яке це вплинуло на положення центра жорсткості перерізу.

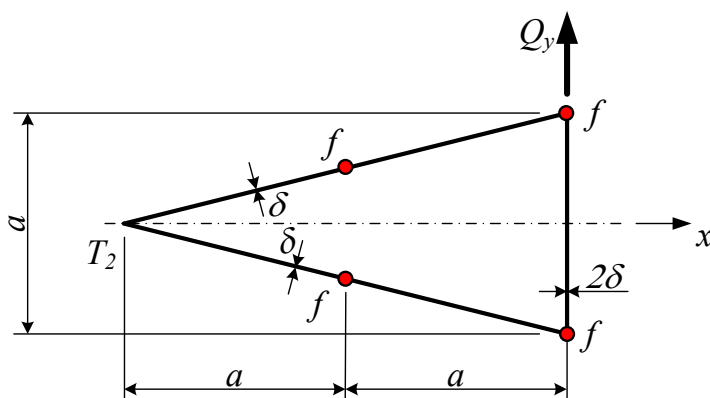


Рис. Д.7.5.10. Змінений переріз

Проведемо розрахунки, що стосуються зміни товщини стінки.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{кр} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = \frac{G\delta(2a^2)^2}{\frac{a}{2} + 2\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{8G\delta a^3}{1 + 2\sqrt{17}} = 0,8652G\delta a^3.$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_\Sigma(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G\delta} \left(\frac{Q_y}{2a} a + 2 \frac{Q_y}{5a} a - 2 \frac{Q_y}{5a} \right) = \frac{Q_y}{2\Omega G\delta} = 0,25 \frac{Q_y}{a^2 G\delta}.$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{кр} = \theta GI_{кр} = 0,8652G\delta a^3 \cdot 0,25 \frac{Q_y}{a^2 G\delta} = 0,2163Q_y a.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості

$$c = \frac{M_{кр}}{Q_y} = \frac{0,2163Q_y a}{Q_y} = 0,2163a.$$

Цю відстань відкладаємо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{кр}$ (рис. Д.7.5.11). Від носка профілю центр жорсткості видалено на відстань

$$x_{ц.ж} = 2a - c = 2a - 0,2163a = 1,7837a.$$

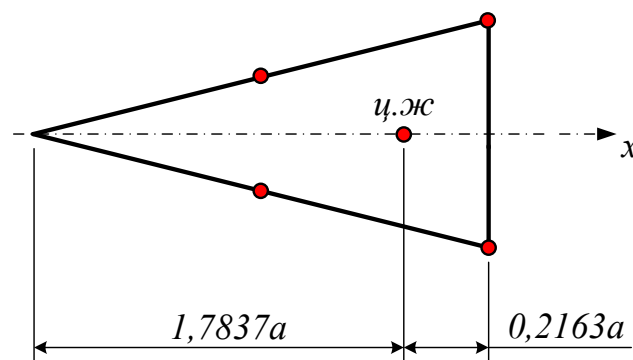


Рис. Д.7.5.11. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, застосувавши метод фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбувається, і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо постійну частину потоку дотичних сил q_0 , величину якої визначимо за формулою

$$q_0 = - \frac{\int \frac{q_p(t) dt}{G\delta}}{\int \frac{dt}{G\delta}} = |G\delta = const| = - \frac{\int q_p(t) dt}{\int dt} = - \frac{\int q_p(t) dt}{L},$$

де L – периметр контуру;

$$L = \oint \frac{dt}{\delta} = \frac{4}{\delta} \frac{\sqrt{17}}{4} a + \frac{a}{2\delta} = \left(\sqrt{17} + \frac{1}{2} \right) \frac{a}{\delta} = 4,623 \frac{a}{\delta}.$$

Розрахуємо значення верхнього інтеграла

$$-\oint \frac{q_p(t)}{\delta} dt = \frac{2}{\delta} \left(\frac{4Q_y}{5a} \frac{\sqrt{17}}{4} a + \frac{6Q_y}{5a} \frac{\sqrt{17}}{4} a \right) = \sqrt{17} \frac{Q_y}{\delta} = 4,123 \frac{Q_y}{\delta}.$$

Зауважимо, що цей інтеграл являє собою площу епюри q_p .

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = \frac{4,123 \frac{Q_y}{\delta}}{4,623 \frac{a}{\delta}} = 0,8918 \frac{Q_y}{a}.$$

Розрахуємо момент відносно точки T_2 (див. рис. Д.7.5.9), створюваний сумарним потоком дотичних сил q_Σ :

$$M_T(q_\Sigma) = \oint q_\Sigma \rho dt = \oint (q_p + q_0) \rho dt = \oint q_p \rho dt + \oint q_0 \rho dt = \oint q_p \rho dt + q_0 \Omega.$$

Перший інтеграл дорівнює нулю, а другий

$$M_{T_2}(q_\Sigma) = 0 + q_0 \Omega = 0,8918 \frac{Q_y}{a} 2a^2 = 1,7837 Q_y a.$$

Визначимо центр жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки (носка профілю) (рис. Д.7.5.12) на відстань

$$x_{ц.ж} = \frac{M_T(q_\Sigma)}{Q} = \frac{1,7837 Q_y a}{Q_y} = 1,7837 a.$$

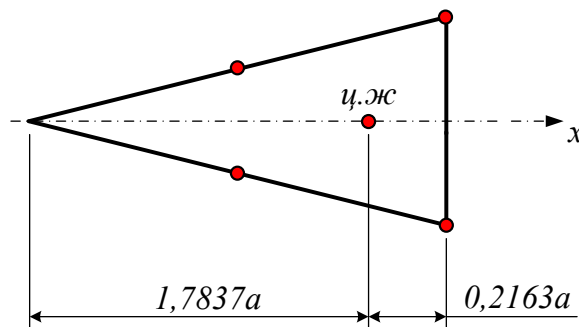


Рис. Д.7.5.12. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості розглянутого перерізу, застосувавши метод фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбудеться, і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо постійну частину потоку дотичних сил q_0 , величину якої визначимо за формулою

$$q_0 = -\frac{\int \frac{q_p(t)dt}{G\delta}}{\int \frac{dt}{G\delta}} = |G = const| = -\frac{\int \frac{q_p(t)}{\delta} dt}{\int \frac{dt}{\delta}}.$$

Розрахуємо значення верхнього інтеграла

$$-\int \frac{q_p(t)}{\delta} dt = \frac{2}{\delta} \left(\frac{4Q_y}{5a} \frac{\sqrt{17}}{4} a + \frac{6Q_y}{5a} \frac{\sqrt{17}}{4} a \right) = \sqrt{17} \frac{Q_y}{\delta} = 4,123 \frac{Q_y}{\delta}.$$

Визначимо величину нижнього інтеграла

$$\int \frac{dt}{\delta} = \frac{4}{\delta} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} a + \frac{a}{2\delta} = \left(\sqrt{17} + \frac{1}{2} \right) \frac{a}{\delta} = 4,623 \frac{a}{\delta}.$$

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = \frac{4,123 \frac{Q_y}{\delta}}{4,623 \frac{a}{\delta}} = 0,8918 \frac{Q_y}{a}.$$

Розрахуємо момент щодо точки T_2 (див. рис. Д.7.5.10), створюваний сумарним потоком дотичних сил q_Σ :

$$\begin{aligned} M_{T_2}(q_\Sigma) &= \int q_\Sigma \rho dt = \int (q_p + q_0) \rho dt = \int q_p \rho dt + \int q_0 \rho dt = \\ &= \int q_p \rho dt + q_0 \Omega. \end{aligned}$$

Перший інтеграл дорівнює нулю, тоді

$$M_{T_2}(q_\Sigma) = 0 + q_0 \Omega = 0,8918 \frac{Q_y}{a} 2a^2 = 1,7837 Q_y a.$$

Визначимо центр жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки T_2 (носка профілю) на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = \frac{M_T(q_\Sigma)}{Q} = \frac{1,7837Q_y a}{Q_y} = 1,7837a.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів.

Висновок: при збільшенні товщини стінки центр жорсткості змістився у напрямку до цієї стінки.

Тепер припустимо, що товщина обшивки становить 2δ (рис. Д.7.5.13). Встановимо, як це вплинуло на положення центра жорсткості перерізу.

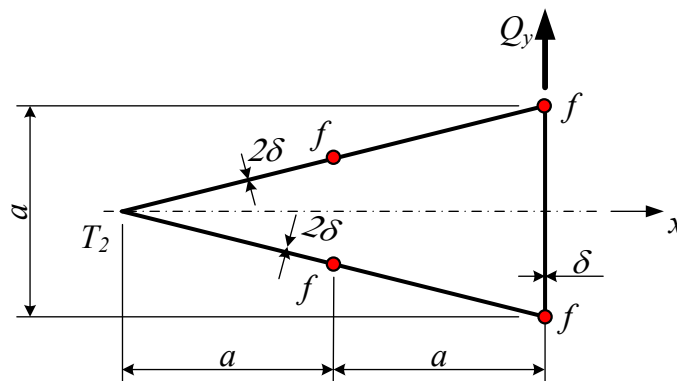


Рис. Д.7.5.13. Третій варіант перерізу

Проведемо розрахунки, що стосуються зміни товщини стінки.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}} = \frac{G\delta(2a^2)^2}{a + 2 \frac{1}{2} \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{4G\delta a^3}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{17}} = 1,3065G\delta a^3.$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\Omega} \oint \frac{q_\Sigma(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G\delta} \left(\frac{Q_y}{a} a + 2 \frac{Q_y}{5a} a \frac{1}{2} - 2 \frac{Q_y}{5a} \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{Q_y}{2a^2 G\delta} = 0,5 \frac{Q_y}{a^2 G\delta}. \end{aligned}$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{кр} = \theta GI_{кр} = 0,5 \frac{Q_y}{a^2 G \delta} \cdot 1,3065 G \delta a^3 = 0,6533 Q_y a.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{кр}}{Q_y} = \frac{0,6533 Q_y a}{Q_y} = 0,6533 a.$$

Цю відстань відкладаємо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{кр}$ (рис. Д.7.5.14). Від носка профілю центр жорсткості видалений на відстань

$$x_{ц.ж} = 2a - c = 2a - 0,6533a = 1,3467a.$$

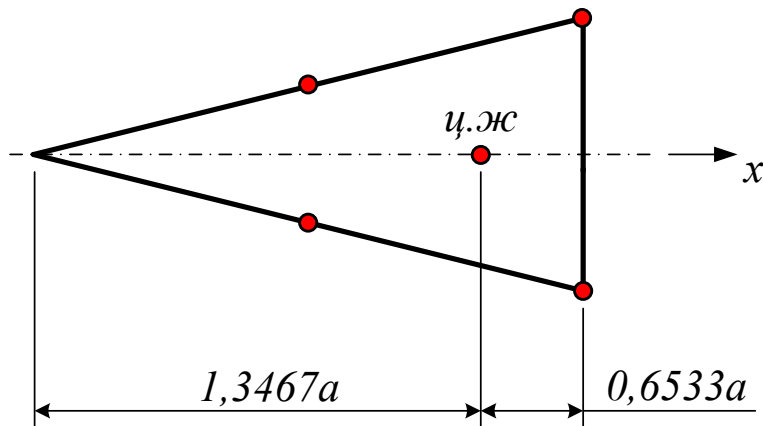


Рис. Д.7.5.14. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості розглянутого перерізу, застосувавши метод фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбудеться, і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо постійну частину потоку дотичних сил, величину якої визначимо за формулою

$$q_0 = - \frac{\int \frac{q_p(t) dt}{G \delta}}{\int \frac{dt}{G \delta}} = |G = const| = - \frac{\int \frac{q_p(t)}{\delta} dt}{\int \frac{dt}{\delta}}.$$

Розрахуємо значення верхнього інтеграла

$$-\int \frac{q_p(t)}{\delta} dt = \frac{2}{2\delta} \left(\frac{4Q_y}{5a} \frac{\sqrt{17}}{4} a + \frac{6Q_y}{5a} \frac{\sqrt{17}}{4} a \right) = \frac{\sqrt{17}}{2} \frac{Q_y}{\delta} = 2,0616 \frac{Q_y}{\delta}.$$

Обчислимо величину нижнього інтеграла

$$-\int \frac{dt}{\delta} = \frac{4}{2\delta} \frac{\sqrt{17}}{4} a + \frac{a}{\delta} = \left(\frac{\sqrt{17}}{2} + 1 \right) \frac{a}{\delta} = 3,0616 \frac{a}{\delta}.$$

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = \frac{2,0616 \frac{Q_y}{\delta}}{3,0616 \frac{a}{\delta}} = 0,6734 \frac{Q_y}{a}.$$

Розрахуємо момент відносно точки T_2 (рис. Д.7.5.13), створюваний сумарним потоком дотичних сил:

$$M_{T_2}(q_\Sigma) = \int q_\Sigma \rho dt = \int (q_p + q_0) \rho dt = \int q_p \rho dt + \int q_0 \rho dt = \int q_p \rho dt + q_0 \Omega.$$

Перший інтеграл дорівнює нулю, тоді

$$M_{T_2}(q_\Sigma) = 0 + q_0 \Omega = 0,6734 \frac{Q_y}{a} \cdot 2a^2 = 1,3467 Q_y a.$$

Визначимо центр жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки T_2 (носка профілю) на відстань

$$x_{ц.ж} = \frac{M_T(q_\Sigma)}{Q} = \frac{1,3467 Q_y a}{Q_y} = 1,3467 a.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів.

Висновок: при збільшенні товщини обшивки центр жорсткості змістився у напрямку до носка профілю.

Задача № 6

Розглянути замкнутий профіль рис. Д.7.6.1, стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_\sigma = 0$ (модель Вагнера).

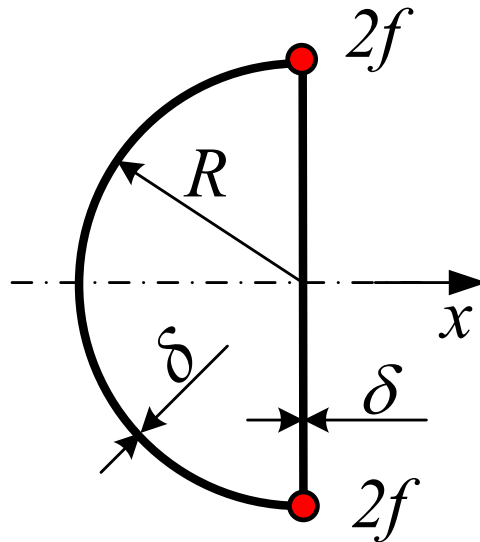


Рис. Д.7.6.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил і визначити положення центра жорсткості.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу положення його центра ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , там буде розташовуватися і центр жорсткості.

Визначаємо момент інерції площі перерізу відносно осі x

$$I_x = \frac{(2R)^3 \delta}{12} + \frac{\pi R^3 \delta}{2} = \left(\frac{8}{12} + \frac{\pi}{2} \right) R^3 \delta = 2,2375 R^3 \delta.$$

Визначаємо функцію S_x поточного статичного моменту відносно осі x площі перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч на осі x (рис. Д.7.6.2). З'єднуємо пару вільних точок контурною координатою t . Нумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x . Домовимося, що поперечна сила Q_y (див. рис. Д.7.6.2) діє на стінку (вибір точки прикладення цієї сили є довільним).

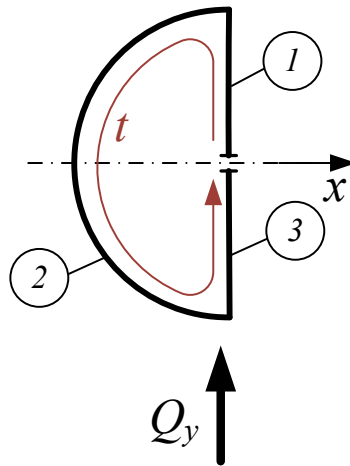


Рис. Д.7.6.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

Ділянка 2: $S_{x2} = 2fR$.

Ділянка 3: $S_{x3} = 0$.

Покажемо на рис. Д.7.6.3 епюру $S_x(t)$.

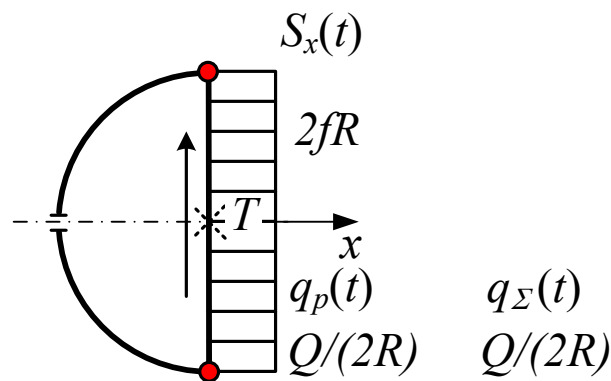


Рис. Д.7.6.3. Епюри $S_x(t)$, $q_p(t)$ та $q_\Sigma(t)$

Визначаємо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{4fR^2} S_x(t).$$

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Обчислимо значення цієї функції на ділянках:

$$q_{p1} = 0; q_{p2} = -\frac{Q_y}{4fR^2} \cdot 2fR = -\frac{Q_y}{2R}; q_{p3} = 0.$$

Покажемо ці потоки на рис. Д.7.6.3.

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова

$$\int q_p(t) dy = Q_y:$$

$$\int q_p(t) dy = 2q_{p2} \cdot 2R = \frac{Q_y}{2R} \cdot 2R = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T перетину стінки з віссю x :

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \oint q_p \rho dt);$$

$$\Omega = \pi R^2; a_T = 0.$$

За даними епюри $q_p(t)$ (рис. Д.7.6.3) зрозуміло, що $\oint q_p \rho dt = 0$ та $q_0 = 0$.

Сумарні потоки дотичних сил $q_\Sigma(t) = q_0 + q_p(t) = q_p(t)$.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{кр} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}} = \frac{G\delta(\pi R^2)^2}{R(\pi + 2)} = \frac{\pi^2 G\delta R^3}{\pi + 2} = 1,9196 G\delta R^3.$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\Omega} \oint \frac{q_\Sigma(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G\delta} \oint q_\Sigma(t) dt = \frac{1}{\pi R^2 G\delta} \left(\frac{Q_y}{2R} 2R \right) = \\ &= \frac{Q_y}{\pi R^2 G\delta} = 0,3183 \frac{Q_y}{R^2 G\delta}. \end{aligned}$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{кр} = \theta GI_{кр} = 0,3183 \frac{Q_y}{R^2 G \delta} \cdot 0,1945 G \delta R^3 = 0,6110 Q_y R.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{кр}}{Q_y} = \frac{0,6110 Q_y R}{Q_y} = 0,6110 R.$$

Цю відстань відкладемо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{кр}$ (рис. Д.7.6.4).

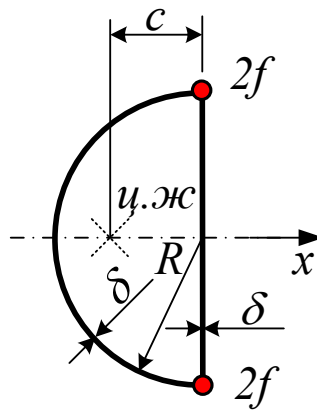


Рис. Д.7.6.4. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Задача № 7

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.7.1), стінки якого працюють на нормальні напруження ($\delta_\sigma \neq 0$).

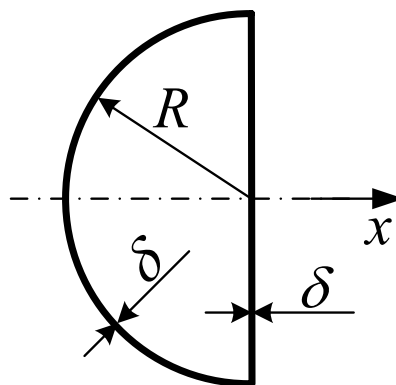


Рис. Д.7.7.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил і визначити положення центра жорсткості.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу положення його центра ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , там буде розташовуватися і центр жорсткості.

Розрахуємо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = \frac{(2R)^3 \delta}{12} + \frac{\pi R^3 \delta}{2} = \left(\frac{8}{12} + \frac{\pi}{2} \right) R^3 \delta = 2,2375 R^3 \delta.$$

Визначимо функцію поточного статичного моменту S_x відносно осі x площі перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x (рис. Д.7.7.2). З'єднуємо пару вільних точок контурною координатою t . Нумеруємо ділянки. Еюра S_x симетрична відносно осі x . Домовимося, що поперечна сила Q_y діє на стінку (вибір точки прикладання цієї сили є довільним).

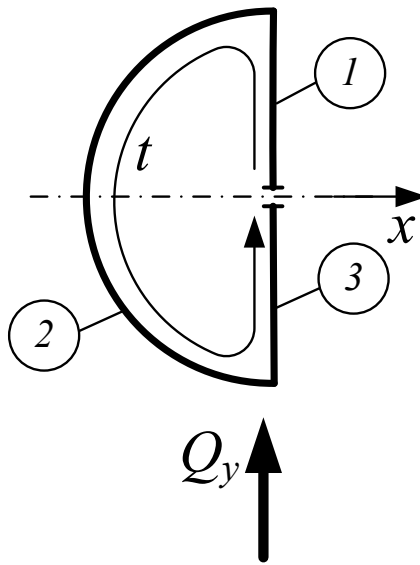


Рис. Д.7.7.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $0 \leq t \leq R$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$; $y = \zeta$; $S_{x1}^0 = 0$;

$$S_{x1} = S_{x1}^0 + \int_0^t y dF = \int_0^t \zeta \delta d\zeta = \frac{\zeta^2 \delta}{2} \Big|_0^t = \frac{t^2 \delta}{2} \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=R} = 0,5 R^2 \delta = S_{x1}^*.$$

Ділянка 2: $0 \leq \varphi \leq \pi$; $0 \leq \psi \leq \varphi$; $dF = \delta R d\psi$; $y = R \cos \psi$; $S_{x2}^0 = S_{x1}^*$;

$$\begin{aligned}
S_{x_2} &= S_{x_2}^0 + \int_0^t y dF = 0,5R^2\delta + \int_0^t R^2\delta \cos\psi d\psi = \\
&= 0,5R^2\delta + R^2\delta \sin\psi \Big|_0^\varphi = 0,5R^2\delta + R^2\delta \sin\varphi \Big|_{\varphi=0} = 0,5R^2\delta \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \\
&= 1,5R^2\delta \Big|_{\varphi=\pi} = 0,5R^2\delta = S_{x_3}^*.
\end{aligned}$$

Ділянка 3: $0 \leq t \leq R$; $0 \leq \zeta \leq t$; $dF = \delta d\zeta$; $y = R - \zeta$; $S_{x_3}^0 = S_{x_2}^*$;

$$\begin{aligned}
S_{x_3} &= S_{x_3}^0 + \int_0^t y dF = 0,5R^2\delta + \int_0^t (\zeta - R)\delta d\zeta = 0,5R^2\delta + 0,5\zeta^2\delta - R\delta\zeta \Big|_0^t = \\
&= 0,5R^2\delta + 0,5t^2\delta - Rt\delta \Big|_{t=0} = 0,5R^2\delta \Big|_{t=R} = 0.
\end{aligned}$$

Покажемо на рис. Д.7.7.3 епюру $S_x(t)$.

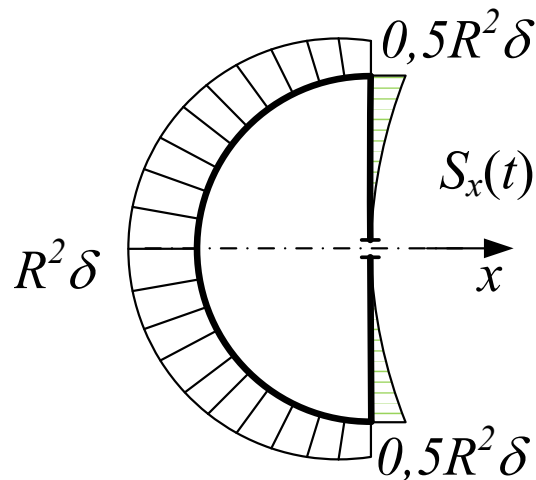


Рис. Д.7.7.3. Епюра $S_x(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{2,2375R^2\delta} S_x(t).$$

Потік $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Обчислимо значення цієї функції на ділянках:

$$q_{p1} = 0,22347 \frac{Q_y}{R^3} t^2 \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=R} = 0,22347 \frac{Q_y}{R};$$

$$q_{p2} = 0,44693 \frac{Q_y}{R^3} R^2 \delta(0,5 + \sin \varphi) \Big|_{\varphi=0} = 0,22347 \frac{Q_y}{R} \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 0,67039 \frac{Q_y}{R} \Big|_{\varphi=\pi} = 0,22347 \frac{Q_y}{R};$$

$$q_{p3} = 0,44693 \frac{Q_y}{R^3} (0,5R^2 - Rt + 0,5t^2) \Big|_{t=0} = 0,22347 \frac{Q_y}{R} \Big|_{t=R} = 0.$$

Покажемо ці потоки на рис. Д.7.7.4.

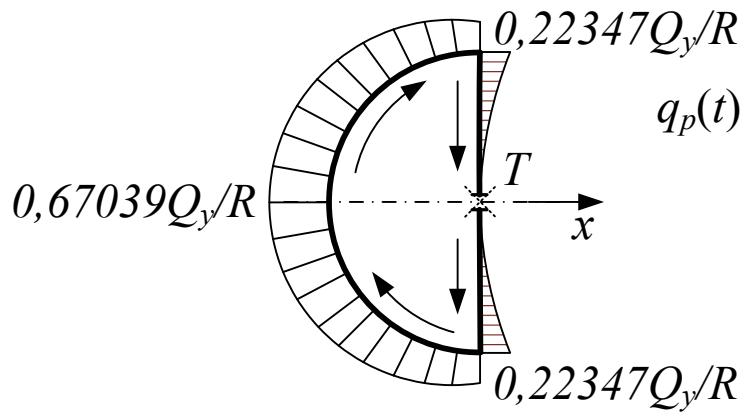


Рис. Д.7.7.4. Епюра $q_p(t)$

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова $\int q_p(t) dy = Q_y$:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_{p2}(\varphi) R \sin \varphi d\varphi - 2 \int_0^R q_{p1}(t) dt =$$

$$= 2 \left[0,44693 \frac{Q_y}{R} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,5 + \sin \varphi) R \sin \varphi d\varphi - 0,22347 \frac{Q_y}{R^2} \int_0^R t^2 dt \right] =$$

$$= 2Q_y \left[0,44693 \left(0,5 \cdot 1 + \frac{\pi}{4} \right) - 0,22347 \cdot \frac{1}{3} \right] q_{p2} \cdot 2R = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну вибираємо точку T перерізу стінки з віссю x :

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \oint q_p \rho dt); \quad \Omega = \pi R^2; \quad a_T = 0.$$

За даними епюри $q_p(t)$ (див. рис. Д.7.7.4) зрозуміло, що

$$\begin{aligned} \oint q_p \rho dt &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_{p2}(\varphi) R^2 d\varphi = -2 \cdot 0,44693 \cdot \frac{Q_y}{R} R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,5 + \sin \varphi) d\varphi = \\ &= -2 \cdot 0,44693 Q_y R \left(0,5 \frac{\pi}{2} + 1 \right) = -1,59590 Q_y R. \end{aligned}$$

Тоді

$$q_0 = \frac{1,59590 \cdot Q_y R}{\pi R^2} = 0,50799 \frac{Q_y}{R}.$$

Покажемо на рис. Д.7.7.5 епюру постійної частини потоку дотичних сил q_0 .

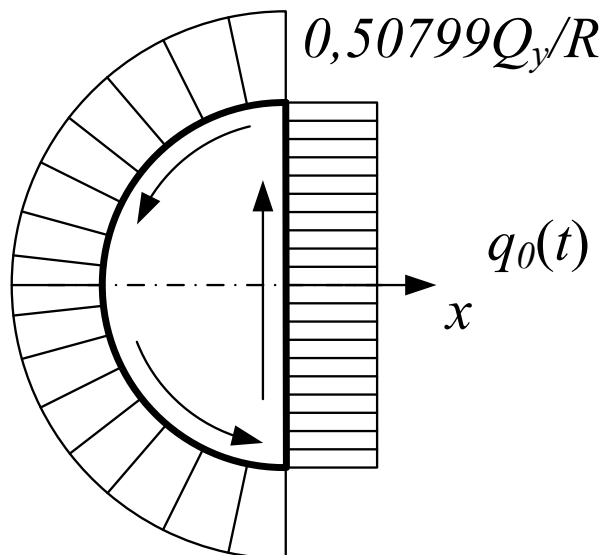


Рис. Д.7.7.5. Епюра q_0

Сумарні потоки дотичних сил $q_\Sigma(t) = q_0 + q_p(t)$. Покажемо сумарну епюру потоку дотичних сил на рис. Д.7.7.6.

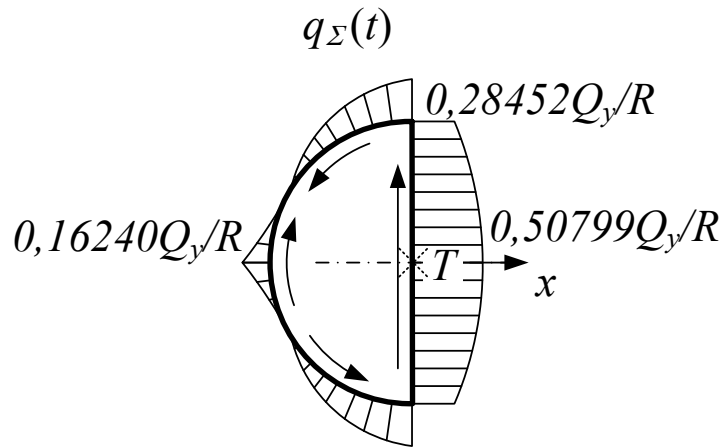


Рис. Д.7.7.6. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}} = \frac{G\delta(\pi R^2)^2}{R(\pi + 2)} = \frac{\pi^2 G\delta R^3}{\pi + 2} = 1,91956 G\delta R^3.$$

Погонний кут закручування

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{q_{\Sigma}(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G\delta} \oint q_{\Sigma}(t) dt.$$

Одержимо

$$\begin{aligned} \oint q_{\Sigma}(t) dt &= \oint q_p(t) dt + \oint q_0 dt = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,22347 \frac{Q_y}{R} R - \\ &- 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,44693 \frac{Q_y}{R} (0,5 + \sin \varphi) R d\varphi + 0,50799 \frac{Q_y}{R} (\pi + 2) R = \\ &= Q_y \left(-0,14898 - 2 \cdot 0,44693 \left(0,5 \frac{\pi}{2} + 1 \right) + 2,61188 \right) = 0,86700 Q_y. \end{aligned}$$

Тоді

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{q_{\Sigma}(t) dt}{G\delta} = \frac{0,86700 Q_y}{\pi R^2 G\delta} = 0,27597 \frac{Q_y}{R^2 G\delta}.$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{\text{кр}} = \theta GI_{\text{кр}} = 0,27597 \frac{Q_y}{R^2 G \delta} \cdot 1,91956 G \delta R^3 = 0,52975 Q_y R.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = \frac{0,52975 Q_y R}{Q_y} = 0,52975 R.$$

Цю відстань відкладаємо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{\text{кр}}$ (рис. Д.7.7.7).

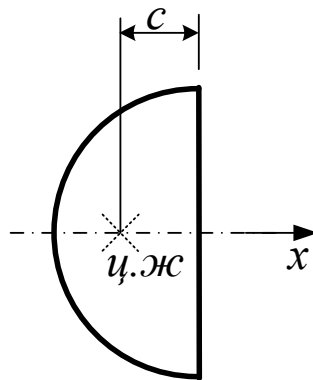


Рис. Д.7.7.7. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила Q_y в перерізі проходить через центр жорсткості.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбудеться, і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо постійну частину потоку дотичних сил q_0 , величину якої визначимо за формулою

$$q_0 = - \frac{\int \frac{q_p(t) dt}{G \delta}}{\int \frac{dt}{G \delta}} = |G \delta = const| = - \frac{\int q_p(t) dt}{\int dt} = - \frac{\int q_p(t) dt}{L},$$

де L – периметр контуру ($L = (2 + \pi)R = 5,1416R$).

Підрахуємо значення верхнього інтеграла

$$\begin{aligned}
-\oint q_p(t)dt &= -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,22347 \frac{Q_y}{R} R - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,44693 \frac{Q_y}{R} (0,5 + \sin \varphi) R d\varphi = \\
&= -0,14898 - 2 \cdot 0,44693 \left(0,5 \frac{\pi}{2} + 1 \right) = -1,74488 Q_y.
\end{aligned}$$

Цей інтеграл являє собою площу епюри q_p .

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = -\frac{\oint q_p(t)dt}{L} = \frac{1,74488 Q_y}{5,1416 R} = 0,33937 \frac{Q_y}{R}.$$

Момент відносно точки T (див. рис. Д.7.7.6), створюваний сумарним потоком дотичних сил:

$$\begin{aligned}
M_T(q_\Sigma) &= \oint q_\Sigma \rho dt = \oint (q_p + q_0) \rho dt = \oint q_p \rho dt + \oint q_0 \rho dt = \\
&= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,44693 \frac{Q_y}{R} (0,5 + \sin \varphi) R d\varphi + q_0 \Omega = \\
&= -2 \cdot 0,44693 \left(0,5 \frac{\pi}{2} + 1 \right) + 0,33937 \frac{Q_y}{R} \cdot \pi R^2 = 0,52975 Q_y R.
\end{aligned}$$

Визначимо центр жорсткості. Він віддалений вліво від моментної точки T на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = \frac{M_T(q_\Sigma)}{Q} = \frac{0,52975 Q_y R}{Q_y} = 0,52975 R.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів.

Зауваження: порівнюючи отриманий результат з розв'язком попередньої задачі, де було розглянуто аналогічний переріз зі спрощеною дискретизацією, встановлюємо наявну відмінність положень центрів жорсткості, що дорівнює 13,3 % від R . Це свідчить про неможливість застосування спрощеної дискретизації для визначення положення центра жорсткості в перерізах з криволінійним контуром.

Задача № 8

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.8.1). Обшивка працює тільки на дотичні напруження $\delta_\sigma = 0$ (модель Вагнера).

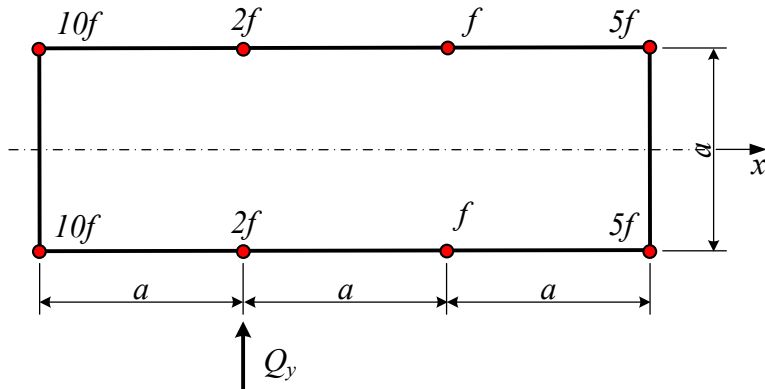


Рис. Д.7.8.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил.

Розв'язання

Розрахуємо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2 \cdot (10f + 2f + f + 5f) \frac{a^2}{4} = 9fa^2.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x . Попередньо введемо в перерізі розріз праворуч на осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t . Нумеруємо ділянки (рис. Д.7.8.2). Епюра S_x симетрична відносно осі x .

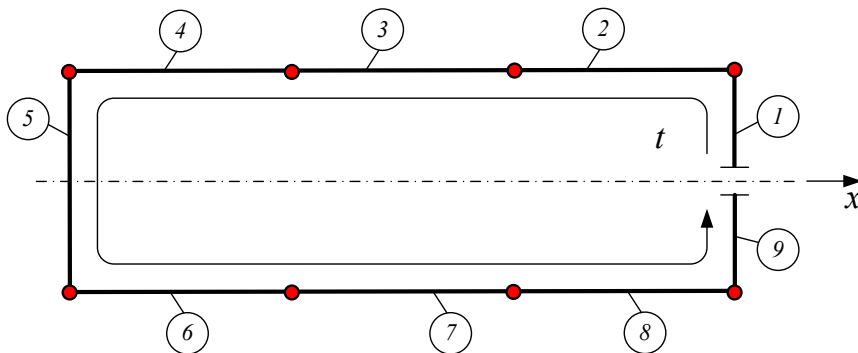


Рис. Д.7.8.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

$$\text{Ділянка 1: } S_{x2} = 5f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{5fa}{2}.$$

$$\text{Ділянка 2: } S_{x2} = 5f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{5fa}{2}.$$

$$\text{Ділянка 3: } S_{x3} = S_{x2} + f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{5fa}{2} + \frac{fa}{2} = \frac{6fa}{2}.$$

$$\text{Ділянка 4: } S_{x4} = S_{x3} + 2f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{6fa}{2} + \frac{2fa}{2} = \frac{8fa}{2}.$$

$$\text{Ділянка 5: } S_{x5} = S_{x4} + 10f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{8fa}{2} + \frac{10fa}{2} = 9fa.$$

Покажемо на рис. Д.7.8.3 епюру $S_x(t)$.

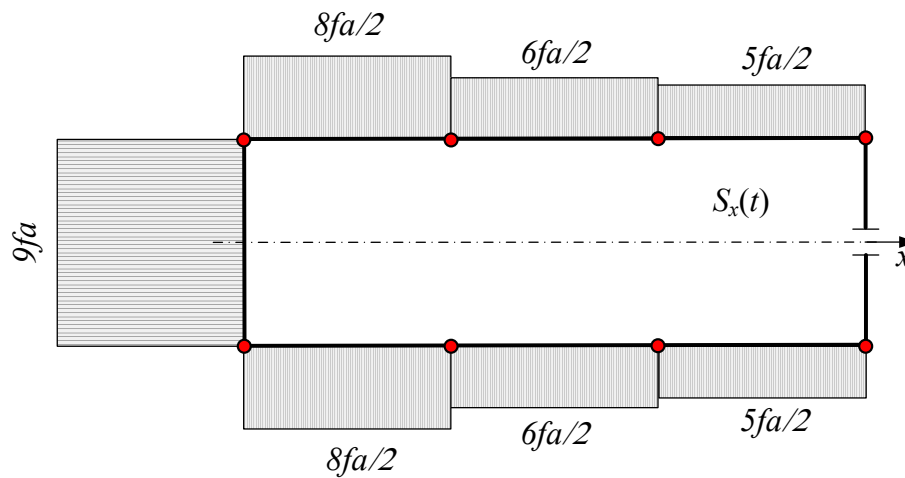


Рис. Д.7.8.3. Епюра $S_x(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{9fa^2} S_x(t).$$

Потік $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Обчислимо значення цієї функції на ділянках:

$$q_{p1} = 0, \quad q_{p2} = q_{p8} - \frac{Q_y}{9fa^2} \frac{5fa}{2} = -\frac{5Q_y}{18a};$$

$$q_{p3} = q_{p7} - \frac{Q_y}{9fa^2} \frac{fa}{2} = -\frac{5Q_y}{18a} - \frac{Q_y}{18a} = -\frac{6Q_y}{18a};$$

$$q_{p4} = q_{p6} - \frac{Q_y}{9fa^2} \frac{2fa}{2} = -\frac{6Q_y}{18a} - \frac{2Q_y}{18a} = -\frac{8Q_y}{18a};$$

$$q_{p5} = -\frac{Q_y}{9fa^2} \frac{10fa}{2} = -\frac{8Q_y}{18a} - \frac{10Q_y}{18a} = -\frac{18Q_y}{18a}.$$

Покажемо ці потоки на рис. Д.7.8.4.

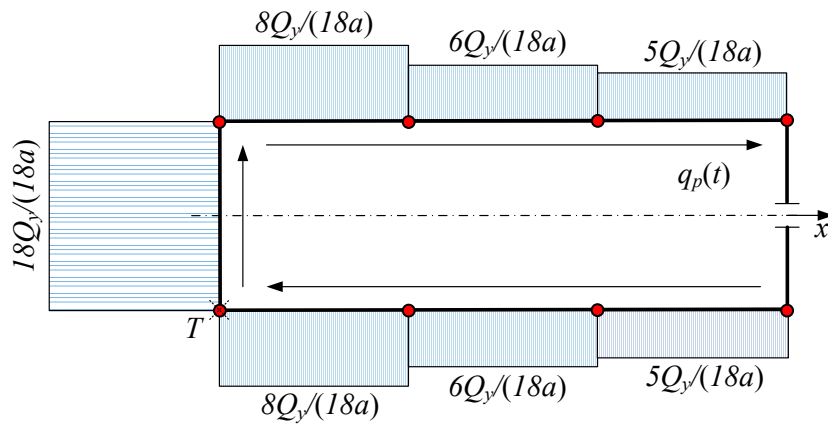


Рис. Д.7.8.4. Епюра $q_p(t)$

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова $\int q_p(t) dy = Q_y$:

$$\int q_p(t) dy = q_{p5} \cdot a = \frac{18Q_y}{18a} a = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T (див. рис. Д.7.8.4):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \int q_p \rho dt); \quad \Omega = \pi R^2; \quad a_T = 0.$$

За даними епюри $q_p(t)$ (див. рис. Д.7.8.4) зрозуміло, що

$$\oint q_p \rho dt = - \left(\frac{5Q_y}{18a} + \frac{6Q_y}{18a} + \frac{8Q_y}{18a} \right) a \cdot a = - \frac{19Q_y a}{18}.$$

Тоді

$$q_0 = \frac{1}{6a^2} \left(Q_y a + \frac{19Q_y a}{18} \right) = \frac{37Q_y}{108a}.$$

Покажемо на рис. Д.7.8.5 епюру $q_0(t)$ постійної частини потоку дотичних сил.

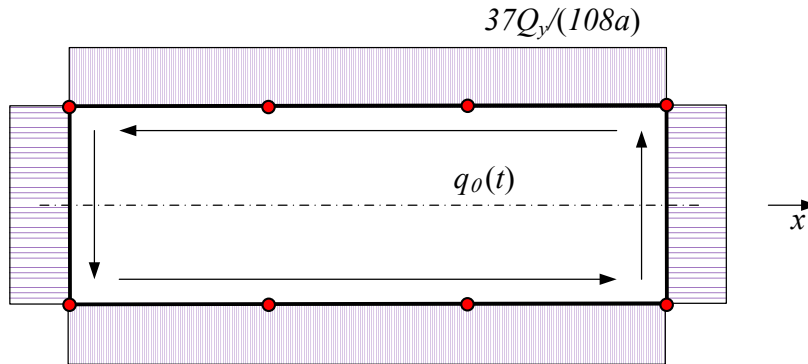


Рис. Д.7.8.5. Епюра $q_0(t)$

Сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t)$:

$$q_{\Sigma 1} = \frac{37Q_y}{108a}; \quad q_{\Sigma 2} = -\frac{5Q_y}{18a} + \frac{37Q_y}{108a} = \frac{7Q_y}{108a};$$

$$q_{\Sigma 3} = -\frac{6Q_y}{18a} + \frac{37Q_y}{108a} = \frac{Q_y}{108a}; \quad q_{\Sigma 4} = -\frac{8Q_y}{18a} + \frac{37Q_y}{108a} = -\frac{11Q_y}{108a};$$

$$q_{\Sigma 5} = -\frac{18Q_y}{18a} + \frac{37Q_y}{108a} = -\frac{71Q_y}{108a}.$$

Покажемо сумарну епюру $q_{\Sigma}(t)$ потоку дотичних сил на рис. Д.7.8.6.

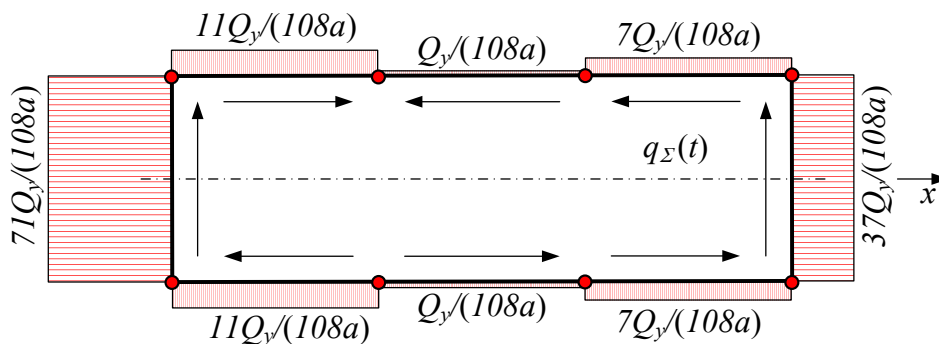


Рис. Д.7.8.6. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Задача № 9

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.9.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_\sigma = 0$ (модель Вагнера) і мають постійну товщину по контуру.

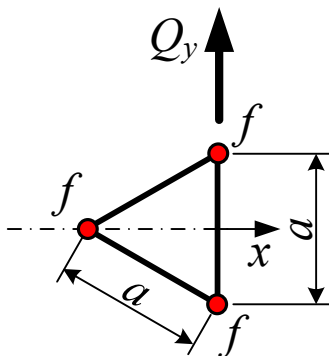


Рис. Д.7.9.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил і визначити положення центра жорсткості.

Розв'язання

Внаслідок симетрії перерізу положення його центра ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , де буде розташовуватися і центр жорсткості.

Момент інерції площі перерізу відносно осі x

$$I_x = 2f \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} f a^2.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.9.2). Нумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x .

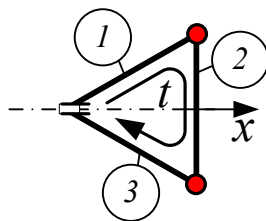


Рис. Д.7.9.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

Ділянка 2: $S_{x2} = f \frac{a}{2}$.

Ділянка 3: $S_{x3} = 0$.

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.9.3 епюру $S_x(t)$.

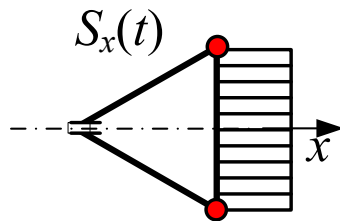


Рис. Д.7.9.3. Епюра $S_x(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{\frac{1}{2} f a^2} S_x(t) = -\frac{2Q_y}{f a^2} S_x(t).$$

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Обчислимо значення цієї функції на ділянках:

$$q_{p1} = 0; \quad q_{p2} = -\frac{2Q_y}{f a^2} \frac{f a}{2} = -\frac{Q_y}{a}; \quad q_{p3} = 0.$$

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.9.4 епюру $q_p(t)$.

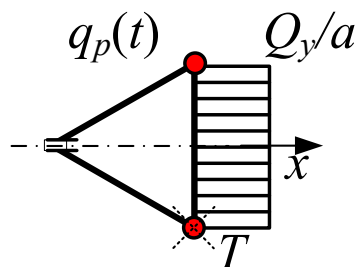


Рис. Д.7.9.4. Епюра $q_p(t)$

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова

$$\int q_p(t) dy = Q_y:$$

$$\int q_p(t) dy = q_{p2} \cdot a = \frac{Q_y}{a} \cdot a = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T (див. рис. Д.7.9.4):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \oint q_p \rho dt);$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2; a_T = 0.$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла і потоку q_0 :

$$\oint q_p \rho dt = 0; q_0 = 0.$$

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_\Sigma(t) = q_0 + q_p(t) = q_p(t)$ на ділянках: $q_{\Sigma1} = q_{p1}$, $q_{\Sigma2} = q_{p2}$, $q_{\Sigma3} = q_{p3}$.

Покажемо на рис. Д.7.9.5 епюру $q_\Sigma(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

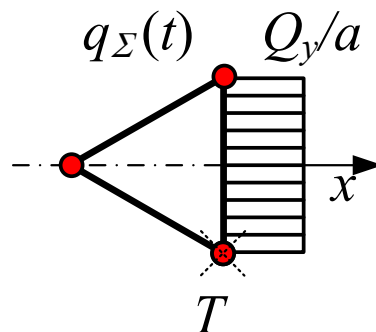


Рис. Д.7.9.5. Епюра $q_\Sigma(t)$

Перевіримо правильність визначення потоків дотичних сил $q_\Sigma(t)$. Переконаємося, що момент, створений потоком $q_\Sigma(t)$, відносно точки T (див. рис. Д.7.9.5) дорівнює моменту сили Q_y в перерізі відносно тієї ж точки. Обидва моменти дорівнюють нулю, отже, потоки $q_\Sigma(t)$ визначені правильно.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = \frac{G\delta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \right)^2}{3a} = \frac{\frac{3}{4} G\delta a^3}{3} = \frac{G\delta a^3}{4} = 0,25G\delta a^3.$$

Погонний кут закручування

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_{\Sigma}(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G\delta} \int q_{\Sigma}(t) dt = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2 G\delta} \left(\frac{Q_y}{a} a \right) = 1,1547 \frac{Q_y}{a^2 G\delta}.$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{\text{кр}} = \theta GI_{\text{кр}} = 1,1547 \frac{Q_y}{a^2 G\delta} 0,25G\delta a^3 = 0,28868Q_y a.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = \frac{0,28868Q_y a}{Q_y} = 0,28868a.$$

Цю відстань відкладаємо вліво від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{\text{кр}}$ (рис. Д.7.9.6). Від носка профілю центр жорсткості видалений на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a - c = 0,8660a - 0,28868a = 0,5773a.$$

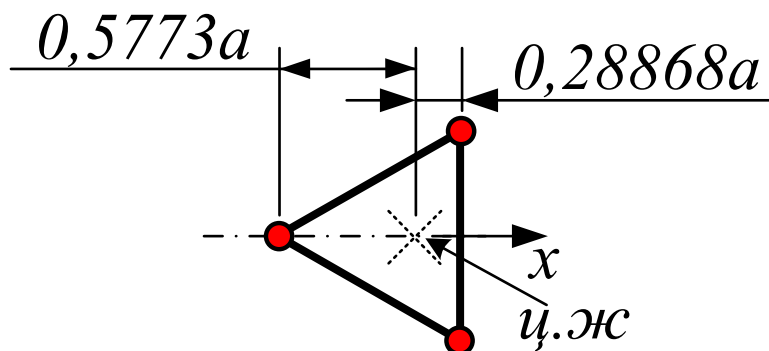


Рис. Д.7.9.6. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, застосувавши метод фіктивної сили.

Вважаємо, що поперечна сила в перерізі проходить через центр жорсткості.

Якщо сила, що діє в поперечному перерізі, проходить через центр жорсткості, то крутіння не відбудеться, і погонний кут закручування буде дорівнювати нулю. Виходячи з відсутності крутіння, обчислимо постійну частину потоку дотичних сил

$$q_0 = - \frac{\oint \frac{q_p(t) dt}{G\delta}}{\oint \frac{dt}{G\delta}} = |G\delta = const| = - \frac{\oint q_p(t) dt}{\oint dt} = - \frac{\oint q_p(t) dt}{L},$$

де L – периметр контуру ($L = 3a$).

Розрахуємо верхній інтеграл

$$-\oint q_p(t) dt = \frac{Q_y}{a} a = Q_y.$$

Зауважимо, що цей інтеграл являє собою площу епюри q_p .

Таким чином, постійна частина потоку дотичних сил

$$q_0 = - \frac{\oint q_p(t) dt}{L} = \frac{Q_y}{3a} = 0,3333 \frac{Q_y}{a}.$$

На рис. Д.7.9.7 показана епюра $q_0(t)$ за умови відсутності крутіння,

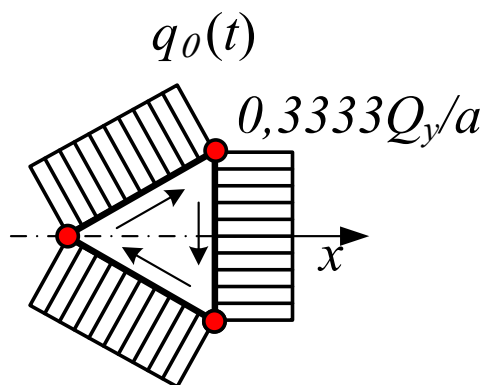


Рис. Д.7.9.7. Епюра $q_0(t)$ за умови відсутності крутіння

а на рис. Д.7.9.8 – сумарна епюра потоків дотичних сил в цьому випадку.

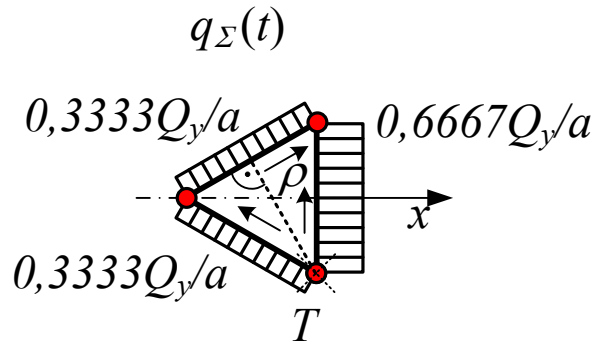


Рис. Д.7.9.8. Епюра q_{Σ} за умови відсутності крутіння

Розрахуємо момент відносно точки T (див. рис. Д.7.9.8), створюваний сумарним потоком дотичних сил q_{Σ} :

$$M_T(q_{\Sigma}) = \oint q_{\Sigma} \rho dt = q_{\Sigma 1} \rho = \frac{Q_y}{3a} \frac{\sqrt{3}}{2} a = 0,28868 Q_y a.$$

Визначимо центр жорсткості. Він віддалений вправо від моментної точки T (носка профілю) на відстань

$$x_{\text{ц.ж}} = \frac{M_T(q_{\Sigma})}{Q} = \frac{0,28868 Q_y a}{Q_y} = 0,28868 a.$$

Як бачимо, розрахунок двома способами положення центра жорсткості в перерізі привів до однакових результатів.

Задача № 10

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.10.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_{\sigma} = 0$ (модель Вагнера) і мають постійну товщину по контуру.

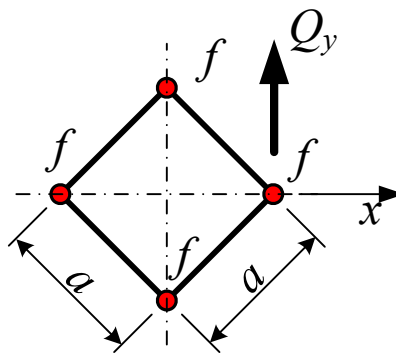


Рис. Д.7.10.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр ваги перерізу шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x .

Момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2f \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = fa^2.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі щодо осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.10.2). Пронумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x .

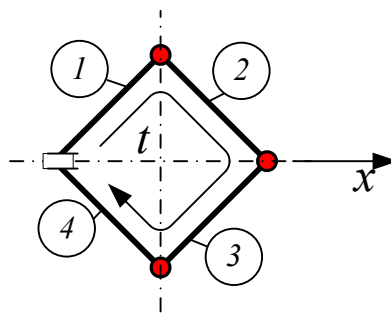


Рис. Д.7.10.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

Ділянка 2: $S_{x2} = f \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.10.3 епюру $S_x(t)$.

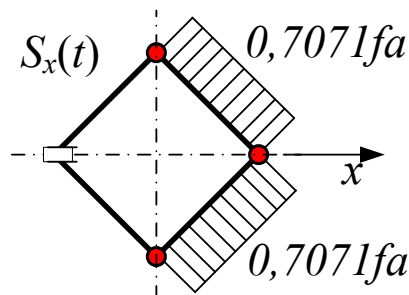


Рис. Д.7.10.3. Епюра $S_x(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{fa^2} S_x(t).$$

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Обчислимо значення цієї функції на ділянках

$$q_{p1} = 0; \quad q_{p2} = -\frac{Q_y}{fa^2} \frac{fa}{\sqrt{2}} = -\frac{Q_y}{\sqrt{2}a}.$$

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.10.4 епюру $q_p(t)$.

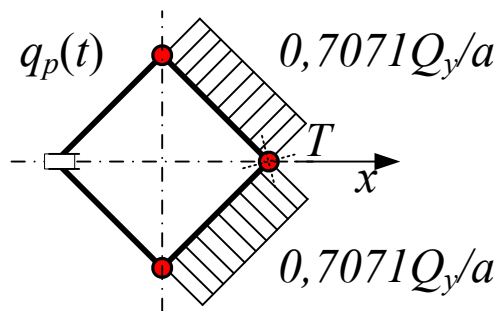


Рис. Д.7.10.4. Епюра $q_p(t)$

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова $\int q_p(t) dy = Q_y$:

$$\int q_p(t) dy = 2q_{p2} \frac{a}{\sqrt{2}} = 2 \frac{Q_y}{\sqrt{2}a} \frac{a}{\sqrt{2}} = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T (див. рис. Д.7.10.4):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \oint q_p \rho dt);$$

$$\Omega = 2a^2; \quad a_T = 0.$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла і потоку q_0 :

$$\oint q_p \rho dt = 0; \quad q_0 = 0.$$

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t) = q_p(t)$ на ділянках: $q_{\Sigma 1} = q_{p1}$, $q_{\Sigma 2} = q_{p2}$, $q_{\Sigma 3} = q_{p3}$, $q_{\Sigma 4} = q_{p4}$.

Покажемо на рис. Д.7.10.5 епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

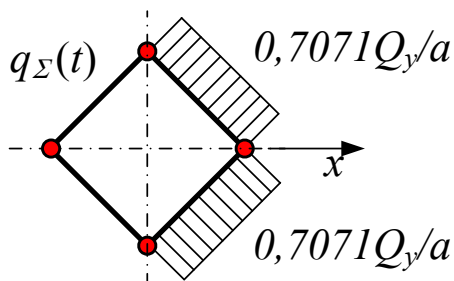


Рис. Д.7.10.5. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Перевіримо правильність визначення потоків дотичних сил $q_{\Sigma}(t)$. Переконаємося, що момент, створений потоком $q_{\Sigma}(t)$ відносно точки T (див. рис. Д.7.10.4), дорівнює моменту сили Q_y в перерізі відносно тієї ж точки. Якщо обидва моменти дорівнюють нулю, то потоки $q_{\Sigma}(t)$ визначені правильно.

Задача № 11

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.11.1), стінки якого працюють на нормальні напруження $\delta_{\sigma} \neq 0$ і мають постійну товщину по контуру.

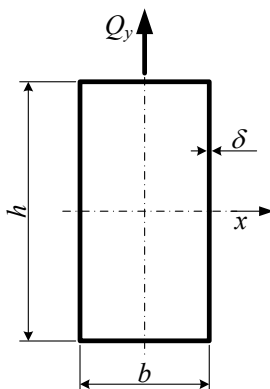


Рис. Д.7.11.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий; $Q_y = 18$ кН; $\delta = 0,2$ см; $h = 60$ см; $b = 30$ см.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр його ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x .

Момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2 \left(\frac{h^3 \delta}{12} + b \delta \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) = 2 \left(\frac{60^3 \cdot 0,2}{12} + 30 \cdot 0,2 \left(\frac{60}{2} \right)^2 \right) = 18000 \text{ см}^4.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.11.2). Пронумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x .

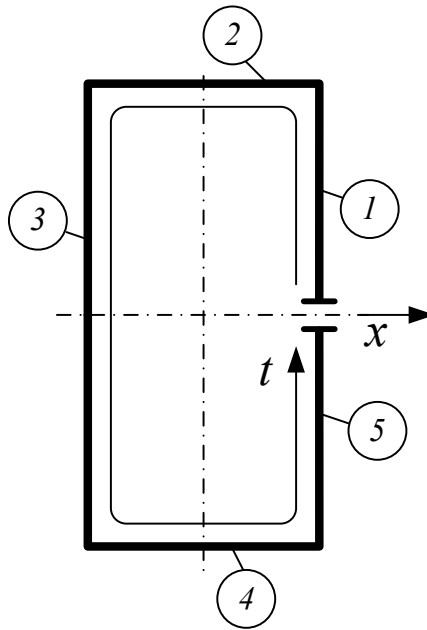


Рис. Д.7.11.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $0 \leq t \leq \frac{h}{2}$; $0 \leq \zeta \leq t$; $y_1 = \zeta$; $dF = \delta d\zeta$; $S_{x1}^0 = 0$;

$$\begin{aligned} S_{x1} &= S_{x1}^0 + \int_0^t y_1 dF = 0 + \int_0^t \zeta \delta d\zeta = 0,2 \frac{\zeta^2}{2} \Big|_0^t = 0,1 t^2 \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=30 \text{ см}} = \\ &= 90 \text{ см}^2 = S_{x1}^* \end{aligned}$$

Ділянка 2: $0 \leq t \leq b$; $0 \leq \zeta \leq t$; $y_2 = \frac{h}{2}$; $dF = \delta d\zeta$; $S_{x2}^0 = S_{x1}^*$;

$$S_{x2} = S_{x2}^0 + \int_0^t y_2 dF = 90 + \int_0^t \frac{h}{2} \delta d\zeta = 90 + 6\zeta \Big|_0^t = 90 + 6t \Big|_{t=0} = 90 \Big|_{t=30 \text{ см}} = 270 \text{ см}^2 = S_{x2}^*.$$

Ділянка 3: $0 \leq t \leq h$; $0 \leq \zeta \leq t$; $y_3 = \frac{h}{2} - \zeta$; $dF = \delta d\zeta$; $S_{x3}^0 = S_{x2}^*$;

$$S_{x3} = S_{x3}^0 + \int_0^t y_3 dF = 270 + \int_0^t \left(\frac{h}{2} - \zeta \right) \delta d\zeta = 270 + 6\zeta \Big|_0^t - 0,1 \frac{\zeta^2}{2} \Big|_0^t = 270 + (6t - 0,1t^2) \Big|_{t=0} = 270 \Big|_{t=30 \text{ см}} = 360 \text{ см}^2.$$

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.11.3 епюру $S_x(t)$.

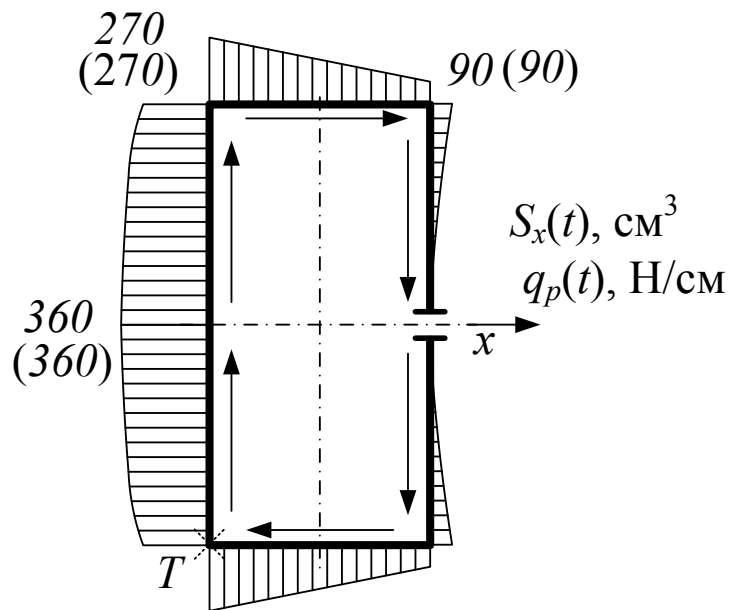


Рис. Д.7.11.3. Епюри $S_x(t)$ та $q_p(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{18000}{18000} S_x(t) = -S_x(t).$$

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Покажемо на рис. Д.7.11.3 епюру $q_p(t)$ без указання знака числових значень.

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова $\int q_p(t) dy = Q_y$. Обчислимо площу епюри дотичних сил на вертикальних ділянках:

$$\int q_p(t) dy = 270 \cdot 60 + 2 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 30 - 2 \cdot 90 \cdot \frac{1}{3} \cdot 30 = 18000 \text{ Н.}$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T (див. рис. Д.7.11.3):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \int q_p \rho dt);$$

$$\Omega = 2hb = 2 \cdot 60 \cdot 30 = 3600 \text{ см}^2; a_T = \frac{b}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ см.}$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла і потоку q_0 :

$$-\int q_p \rho dt = 2 \cdot 90 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot 30 + \frac{270 + 90}{2} \cdot 30 \cdot 60 = 378000 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$q_0 = \frac{1}{3600} (18000 \cdot 15 + 378000) = 180 \text{ Н/см.}$$

Покажемо на рис. Д.7.11.4 епюру $q_0(t)$.

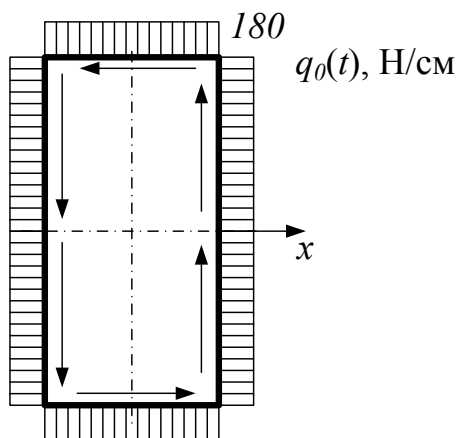


Рис. Д.7.11.4. Епюра $q_0(t)$

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t) = q_p(t)$. Покажемо на рис. Д.7.11.5 епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

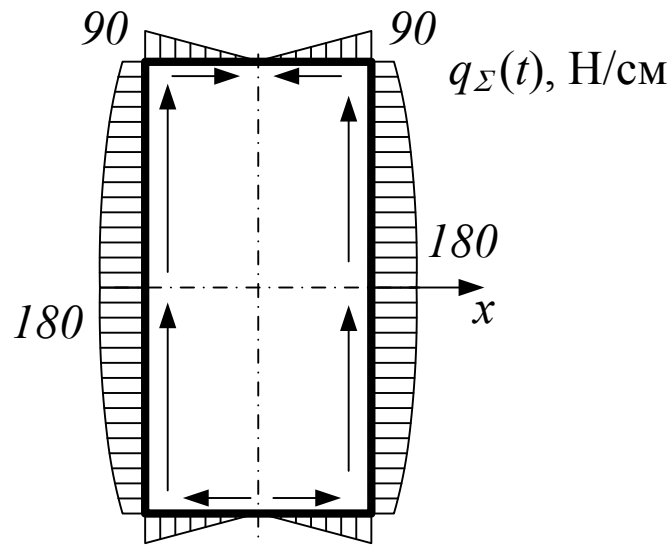


Рис. Д.7.11.5. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Задача № 12

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.12.1), стінки якого працюють на нормальні напруження $\delta_{\sigma} \neq 0$ і мають постійну товщину по контуру.

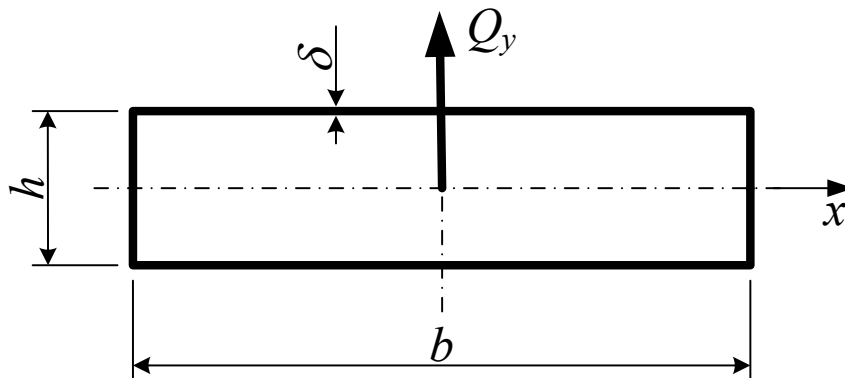


Рис. Д.7.12.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий; $Q_y = 3467$ Н; $\delta = 0,2$ см;
 $h = 20$ см; $b = 80$ см.

Необхідно побудувати епюру потоків дотичних сил.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр його ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x .

Момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2 \left(\frac{h^3 \delta}{12} + b \delta \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) = 2 \left(\frac{20^3 \cdot 0,2}{12} + 80 \cdot 0,2 \left(\frac{20}{2} \right)^2 \right) = 3467 \text{ см}^4.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.12.2). Пронумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x .

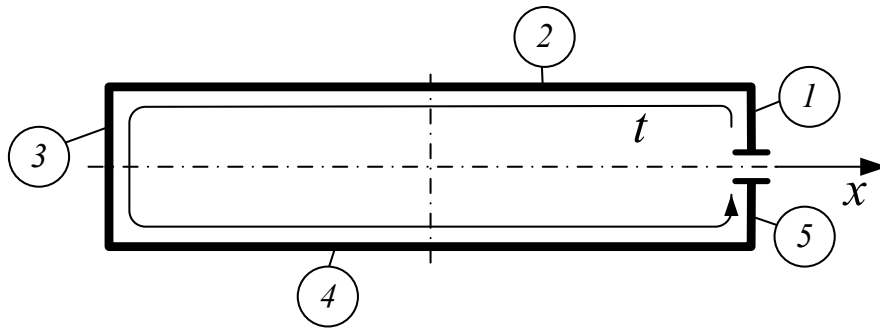


Рис. Д.7.12.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $0 \leq t \leq \frac{h}{2}$; $0 \leq \zeta \leq t$; $y_1 = \zeta$; $dF = \delta d\zeta$; $S_{x1}^0 = 0$;

$$\begin{aligned} S_{x1} &= S_{x1}^0 + \int_0^t y_1 dF = 0 + \int_0^t \zeta \delta d\zeta = 0,2 \frac{\zeta^2}{2} \Big|_0^t = 0,1 t^2 \Big|_{t=0} = 0 \Big|_{t=10 \text{ см}} = \\ &= 10 \text{ см}^2 = S_{x1}^*. \end{aligned}$$

Ділянка 2: $0 \leq t \leq b$; $0 \leq \zeta \leq t$; $y_2 = \frac{h}{2}$; $dF = \delta d\zeta$; $S_{x2}^0 = S_{x1}^*$;

$$\begin{aligned} S_{x2} &= S_{x2}^0 + \int_0^t y_2 dF = 10 + \int_0^t \frac{h}{2} \delta d\zeta = 10 + 2\zeta \Big|_0^t = 10 + 2t \Big|_{t=0} = 10 \Big|_{t=80 \text{ см}} = \\ &= 170 \text{ см}^2 = S_{x2}^*. \end{aligned}$$

Ділянка 3: $0 \leq t \leq h$; $0 \leq \zeta \leq t$; $y_3 = \frac{h}{2} - \zeta$; $dF = \delta d\zeta$; $S_{x3}^0 = S_{x2}^*$;

$$S_{x3} = S_{x3}^0 + \int_0^t y_3 dF = 170 + \int_0^t \left(\frac{h}{2} - \zeta \right) \delta d\zeta = 170 + 2\zeta \Big|_0^t - 0,2 \frac{\zeta^2}{2} \Big|_0^t =$$

$$= 170 + \left(2t - 0,1t^2 \right) \Big|_{t=0} = 170 \Big|_{t=10 \text{ см}} = 180 \text{ см}^2.$$

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.12.3 епюру $S_x(t)$.

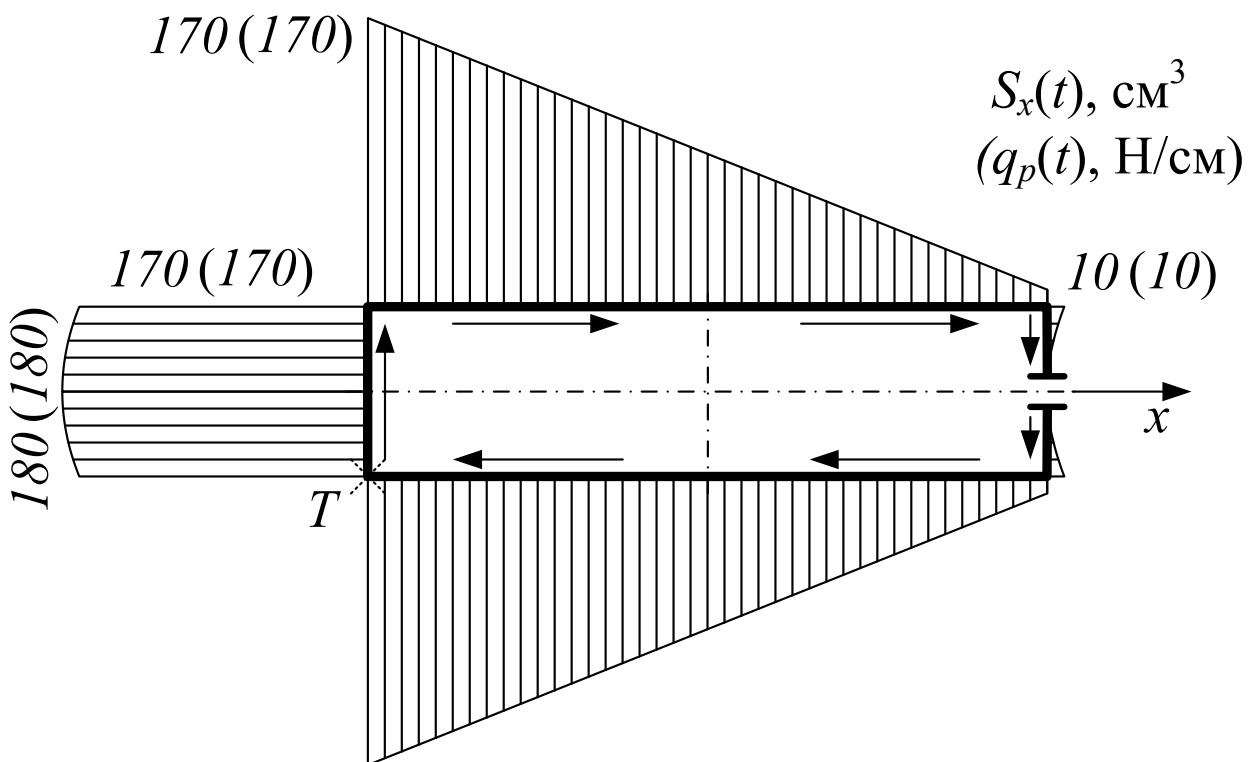


Рис. Д.7.12.3. Епюри $S_x(t)$ та $q_p(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{3467}{3467} S_x(t) = -S_x(t).$$

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Покажемо на рис. Д.7.12.3 епюру $q_p(t)$ без указання знака числових значень.

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова $\int q_p(t) dy = Q_y$. Обчислимо площу епюри дотичних сил на вертикальних ділянках

$$\int q_p(t) dy = 170 \cdot 20 + 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 = 3467 \text{ Н.}$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну виберемо точку T (див. рис. Д.7.12.3):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \int q_p \rho dt);$$

$$\Omega = 2hb = 2 \cdot 20 \cdot 80 = 3200 \text{ см}^2; a_T = \frac{b}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ см.}$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла і потоку q_0 :

$$-\int q_p \rho dt = 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 80 + \frac{170+10}{2} \cdot 80 \cdot 20 = 149333 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$q_0 = \frac{1}{3200} (3467 \cdot 40 + 149333) = 90 \text{ Н/см.}$$

Покажемо на рис. Д.7.12.4 епюру $q_0(t)$.

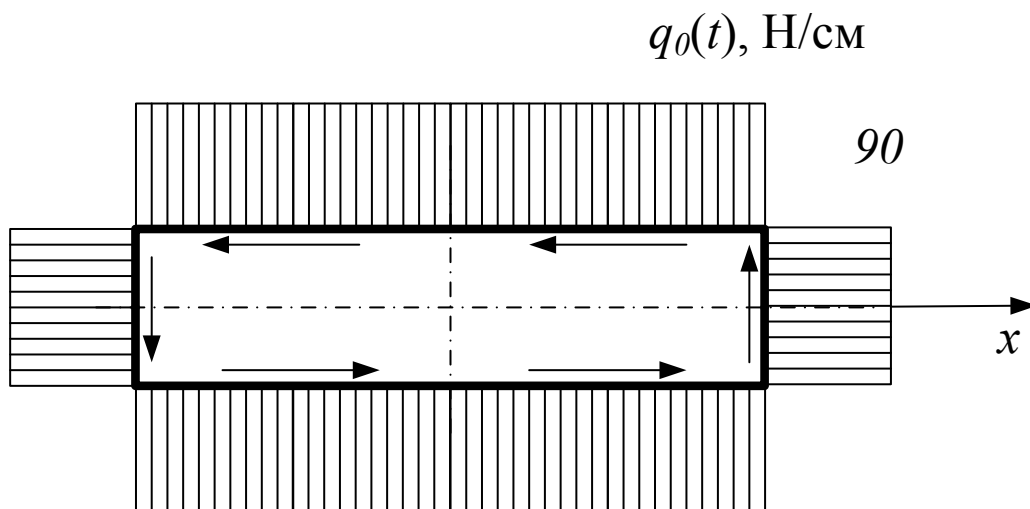


Рис. Д.7.12.4. Епюра $q_0(t)$

Підрахуємо сумарні потоки дотичних сил $q_{\Sigma}(t) = q_0 + q_p(t)$. Покажемо на рис. Д.7.12.5 епюру $q_{\Sigma}(t)$ без указання знака числових значень, але зазначаючи напрямки потоків.

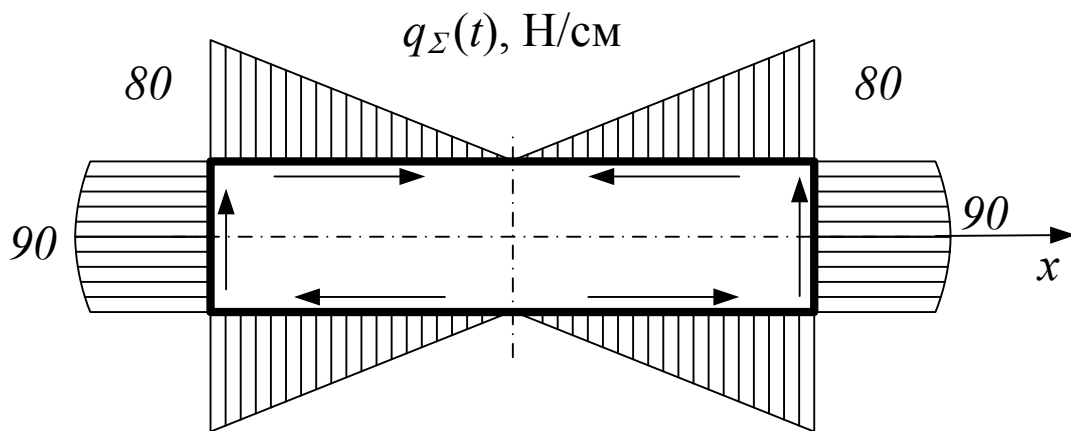


Рис. Д.7.12.5. Епюра $q_{\Sigma}(t)$

Задача № 13

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.13.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_{\sigma} = 0$ і мають постійну товщину по контуру.

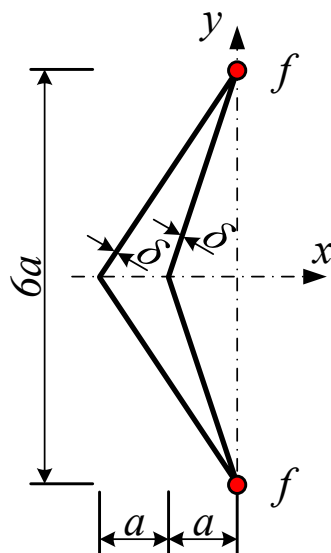


Рис. Д.7.13.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал у перерізі однаковий.

Необхідно: визначити місце розташування центра жорсткості методом виділення моменту.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр його ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , де буде розташовуватися і центр жорсткості.

Момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2 \left(f \left(\frac{6a}{2} \right)^2 \right) = 18fa^2.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.13.2).

Пронумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x .

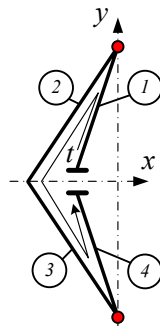


Рис. Д.7.13.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

Ділянка 2: $S_{x2} = f3a = 3fa$.

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.13.3 епюру $S_x(t)$.

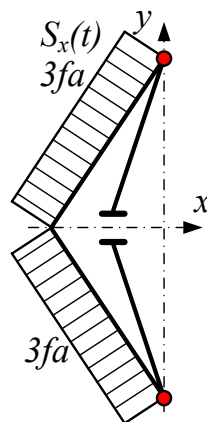


Рис. Д.7.13.3. Епюра $S_x(t)$

Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{18fa^2} S_x(t).$$

На ділянках

$$q_{p1}(t) = 0; \quad q_{p2}(t) = -\frac{Q_y}{18fa^2} 3fa = -\frac{Q_y}{6a}$$

і далі буде симетричним.

Еюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Покажемо на рис. Д.7.13.4 епюру $q_p(t)$ без указання знака числових значень.

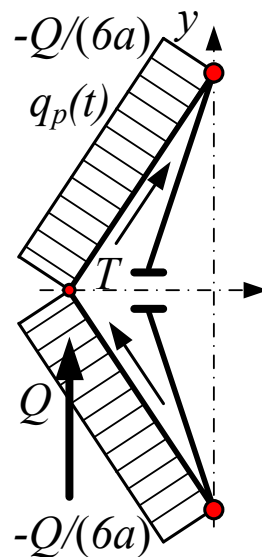


Рис. Д.7. 13.4. Еюра $q_p(t)$

Перевіримо правильність визначення $q_p(t)$. Має виконуватися умова $\int q_p(t) dy = Q_y$:

$$\int q_p(t) dy = 2 \cdot q_{p2} \cdot 3a = 2 \frac{Q_y}{6a} 3a = Q_y.$$

Умова виконана.

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну вибираємо точку T (див. рис. Д.7.13.4):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \int q_p \rho dt);$$

$$\Omega = 2 \cdot \frac{6a \cdot a}{2} = 6a^2; \quad a_T = 0.$$

Зрозуміло, що $q_0 = 0$.

Сумарні потоки дотичних сил $q_\Sigma(t) = q_0 + q_p(t) = q_p(t)$.

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = \frac{G\delta(6a^2)^2}{a(2 \cdot \sqrt{10} + 2 \cdot \sqrt{13})} = \frac{36G\delta a^3}{(2\sqrt{10} + 2\sqrt{13})}.$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_\Sigma(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G\delta} \int q_\Sigma(t) dt = \frac{1}{6a^2 G\delta} \left(-2 \frac{Q_y}{6a} \sqrt{13} \right) = -\frac{\sqrt{13} Q_y}{18a^2 G\delta}.$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{\text{кр}} = \theta GI_{\text{кр}} = -\frac{\sqrt{13} Q_y}{18a^2 G\delta} \frac{36G\delta a^3}{(2\sqrt{10} + 2\sqrt{13})} = -0,533 Q_y a.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = -\frac{0,533 Q_y a}{Q_y} = -0,533 a.$$

Цю відстань відкладаємо вправо від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{\text{кр}}$ (рис. Д.7.13.5).

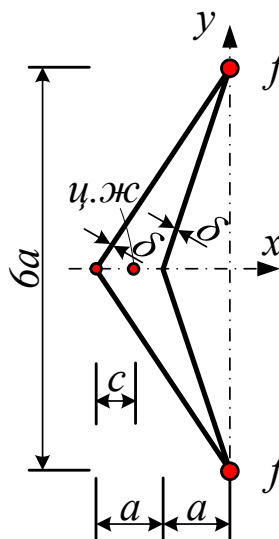


Рис. Д.7.13.5. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Задача № 14

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.14.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_\sigma = 0$ і мають постійну товщину по контуру.

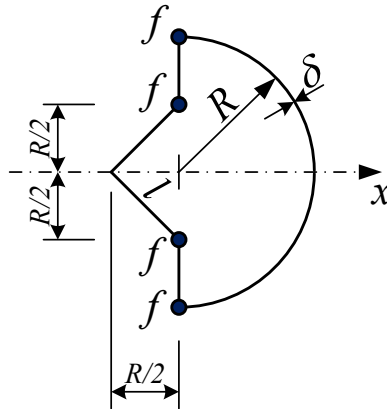


Рис. Д.7.14.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно визначити місце розташування центра жорсткості методом виділення моменту.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр його ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , де буде розташовуватися і центр жорсткості.

Момент інерції площі перерізу відносно осі x

$$I_x = 2f \left(R^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right) = \frac{5}{2} fR^2 .$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.14.2).

Нумеруємо ділянки. Еюра S_x симетрична відносно осі x .

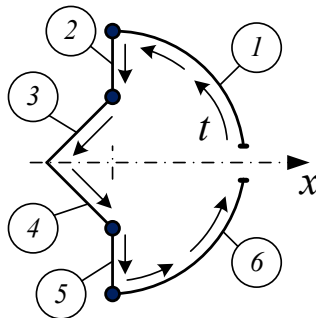


Рис. Д.7.14.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

Ділянка 2: $S_{x2} = fR$.

Ділянка 3: $S_{x3} = fR + f \frac{R}{2} = \frac{3}{2} fR$.

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.14.3 епюру $S_x(t)$.

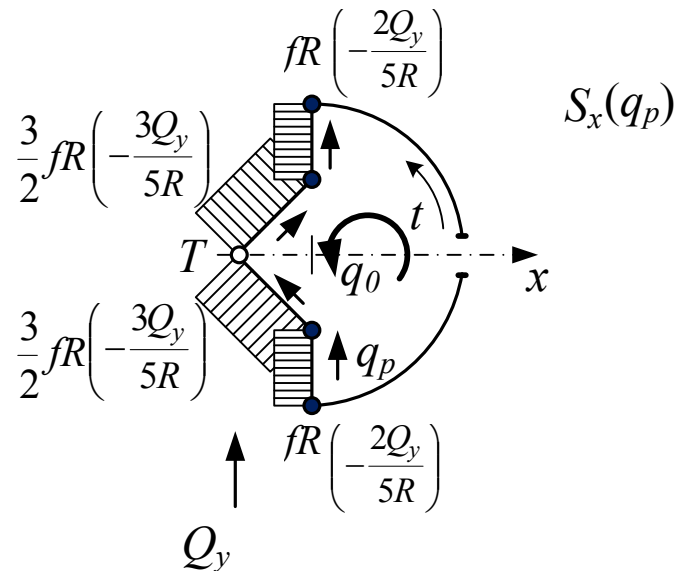


Рис. Д.7.14.3. Епюри $S_x(t)$ і $q_p(t)$

Прикладемо силу Q_y , як показано на рис. Д.7.14.3. Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{2Q_y}{5fR^2} S_x(t).$$

На ділянках

$$q_{p1}(t) = 0; \quad q_{p2}(t) = -\frac{2Q_y}{5fR^2} fR = -\frac{2Q_y}{5R}; \quad q_{p3}(t) = -\frac{2Q_y}{5fR^2} \cdot \frac{3}{2} fR = -\frac{3Q_y}{5R}$$

і далі маємо симетрично.

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Покажемо на рис. Д.7.14.3 епюру $q_p(t)$ без указання знака числових значень.

Розрахуємо деякі геометричні параметри перерізу (довжину похилої ділянки ℓ , подвоєну площу перерізу Ω і периметр контурної лінії L):

$$\ell = R \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}; \quad \Omega = \pi R^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} R \frac{R}{2} = R^2 \left(\pi + \frac{1}{2} \right);$$

$$L = \pi R + 2 \cdot \frac{R}{2} + 2 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = R(\pi + 1 + \sqrt{2}).$$

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну вибираємо точку T (див. рис. Д.7.14.3):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \oint q_p \rho dt); \quad a_T = 0.$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла і потоку:

$$q_0 = \frac{1}{R^2 \left(\pi + \frac{1}{2} \right)} \left(- \left(- \frac{2Q_y}{5R} \right) R \frac{R}{2} \right) = \frac{Q_y}{R} \frac{1}{5 \left(\pi + \frac{1}{2} \right)}.$$

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{кр} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}} = G\delta R^3 \frac{\left(\pi + \frac{1}{2} \right)^2}{\pi + 1 + \sqrt{2}}.$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\theta = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{q_\Sigma dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{(q_p + q_0) dt}{G\delta} =$$

$$= \frac{1}{G\delta R^2 \left(\pi + \frac{1}{2} \right)} \left(\frac{Q_y}{R} \frac{R(\pi + 1 + \sqrt{2})}{5 \left(\pi + \frac{1}{2} \right)} - \frac{2Q_y}{5R} R - \frac{3Q_y}{5R} \cdot \sqrt{2} R \right) =$$

$$= \frac{Q_y}{5G\delta R^2 \left(\pi + \frac{1}{2} \right)} \left(\frac{(\pi + 1 + \sqrt{2})}{\left(\pi + \frac{1}{2} \right)} - 2 - 3\sqrt{2} \right).$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$M_{кр} = \theta \cdot GI_{кр} =$$

$$= \frac{Q_y}{5G\delta R^2 \left(\pi + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{(\pi + 1 + \sqrt{2})}{\left(\pi + \frac{1}{2}\right)} - 2 - 3\sqrt{2} \right) G\delta R^3 \frac{\left(\pi + \frac{1}{2}\right)^2}{\pi + 1 + \sqrt{2}} = -0,619Q_y R.$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості

$$c = \frac{M_{кр}}{Q_y} = -0,619R.$$

Цю відстань відкладаємо вправо від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{кр}$ (рис. Д.7.14.4).

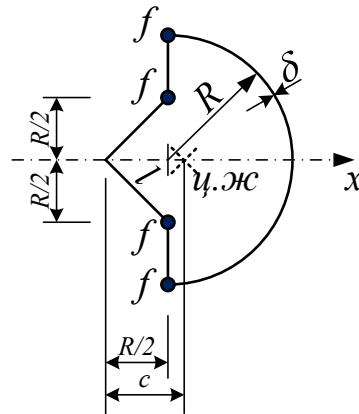


Рис. Д.7.14.4. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Задача № 15

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.15.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_\sigma = 0$ і мають постійну товщину по контуру.

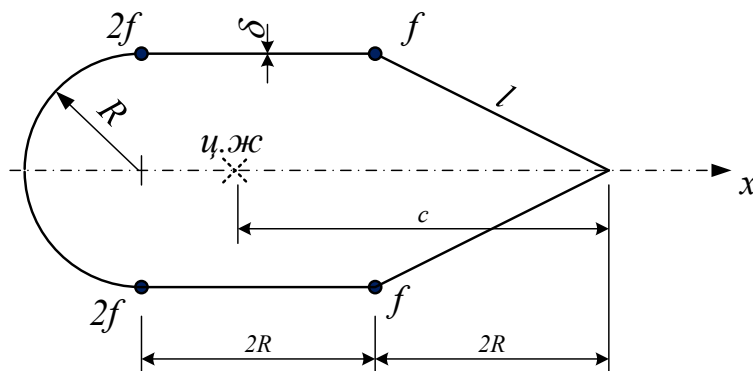


Рис. Д.7.15.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно визначити місце розташування центра жорсткості методом виділення моменту.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр його ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , де буде розташовуватися і центр жорсткості.

Момент інерції площі перерізу відносно осі x

$$I_x = 2(2fR^2 + fR^2) = 6fR^2.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.15.2). Пронумеруємо ділянки. Епюра S_x симетрична відносно осі x .

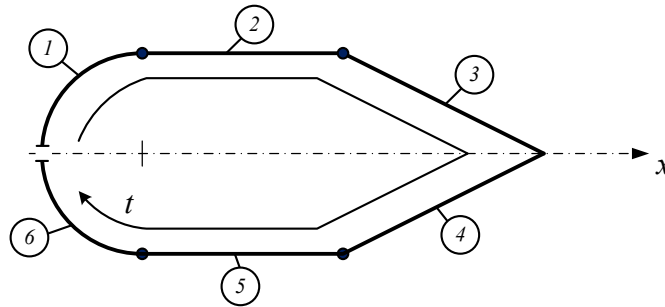


Рис. Д.7.15.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

Ділянка 2: $S_{x2} = 2fR$.

Ділянка 3: $S_{x3} = 2fR + fR = 3fR$.

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.15.3 епюру $S_x(t)$ (зверху).

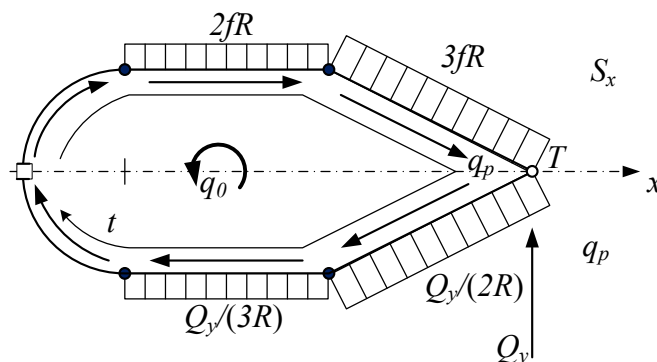


Рис. Д.7.15.3. Епюри $S_x(t)$ і $q_p(t)$

Прикладемо силу Q_y , як показано на рис. Д.7.15.3. Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{6fR^2} S_x(t).$$

На ділянках

$$q_{p1}(t) = 0; \quad q_{p2}(t) = -\frac{Q_y}{6fR^2} 2fR = -\frac{Q_y}{3R}; \quad q_{p3}(t) = -\frac{Q_y}{6fR^2} \cdot 3fR = -\frac{Q_y}{2R}$$

і далі маємо симетрично.

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Покажемо на рис. Д.7.15.3 епюру $q_p(t)$ (знизу) без укавання знака числових значень.

Розрахуємо деякі геометричні параметри перерізу (довжину похилої ділянки ℓ , подвоєну площу перерізу Ω і периметр контурної лінії L):

$$\ell = \sqrt{5}R; \quad \Omega = \pi R^2 + 8 \cdot R^2 + 4 \cdot R^2 = R^2(\pi + 12);$$

$$L = \pi R + 2 \cdot 2R + 2 \cdot \sqrt{5}R = R(\pi + 4 + 2\sqrt{5}).$$

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну вибираємо точку T (див. рис. Д.7.15.3)

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \int q_p \rho dt); \quad a_T = 0.$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення величини потоку:

$$q_0 = \frac{1}{R^2(\pi + 12)} \left(- \left(-\frac{Q_y}{3R} \right) 2R \cdot R \right) = \frac{Q_y}{R} \frac{4}{3(\pi + 12)}.$$

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{кр} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = G\delta R^3 \frac{(\pi + 12)^2}{\pi + 4 + 2\sqrt{5}}.$$

Визначимо погонний кут закручування

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_{\Sigma} dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega} \int \frac{(q_p + q_0) dt}{G\delta} = \\ &= \frac{1}{G\delta R^2 \left(\pi + \frac{1}{2} \right)} \left(\frac{4Q_y R (\pi + 4 + 2\sqrt{5})}{3R (\pi + 12)} - \frac{4Q_y R}{3R} - \frac{Q_y}{2R} \cdot 2\sqrt{5} \right) = \\ &= \frac{Q_y}{G\delta R^2 (\pi + 12)} \left(\frac{4}{3} \left(\frac{(\pi + 4 + 2\sqrt{5})}{(\pi + 12)} - 1 \right) - \sqrt{5} \right). \end{aligned}$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$\begin{aligned} M_{\text{кр}} &= \theta \cdot GI_{\text{кр}} = \\ &= \frac{Q_y}{G\delta R^2 (\pi + 12)} \left(\frac{4}{3} \left(\frac{(\pi + 4 + 2\sqrt{5})}{(\pi + 12)} - 1 \right) - \sqrt{5} \right) G\delta R^3 \cdot \frac{(\pi + 12)^2}{\pi + 4 + 2\sqrt{5}} = -3,32Q_y R. \end{aligned}$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{\text{кр}}}{Q_y} = -3,32R.$$

Цю відстань відкладемо вправо від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{\text{кр}}$ (див. рис. Д.7.15.1).

Задача № 16

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.16.1), стінки якого не працюють на нормальні напруження $\delta_{\sigma} = 0$ і мають постійну товщину по контуру.

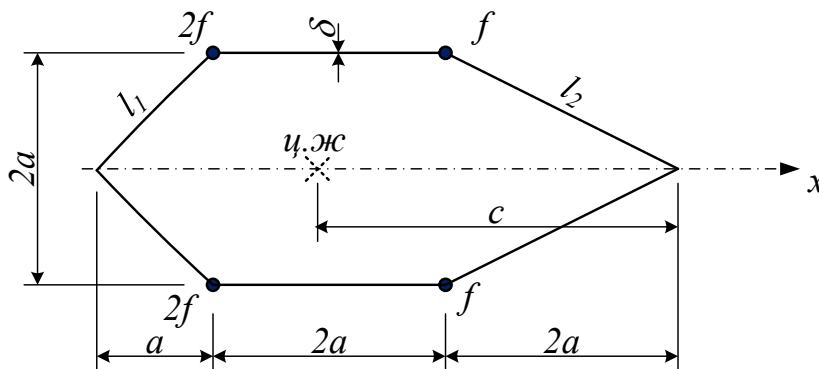


Рис. Д.7.16.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий.

Необхідно визначити місце розташування центра жорсткості методом виділення моменту.

Розв'язання

Унаслідок симетрії перерізу центр його ваги шукати не потрібно. Він знаходиться на осі x , де буде розташовуватися і центр жорсткості.

Момент інерції площі перерізу відносно осі x

$$I_x = 2(2fa^2 + fa^2) = 6fa^2.$$

Визначимо функцію S_x поточного статичного моменту площі відносно осі x перерізу, в якому попередньо введемо розріз праворуч по осі x . З'єднаємо пару вільних точок контурною координатою t (рис. Д.7.16.2). Пронумеруємо ділянки. Еюра S_x симетрична відносно осі x .

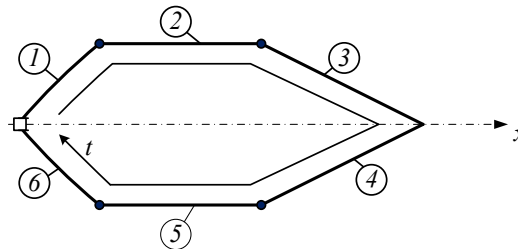


Рис. Д.7.16.2. Нумерація ділянок перерізу

Ділянка 1: $S_{x1} = 0$.

Ділянка 2: $S_{x2} = 2fa$.

Ділянка 3: $S_{x3} = 2fa + fa = 3fa$.

Далі маємо симетричні ділянки.

Покажемо на рис. Д.7.16.3 еюру $S_x(t)$ (зверху).

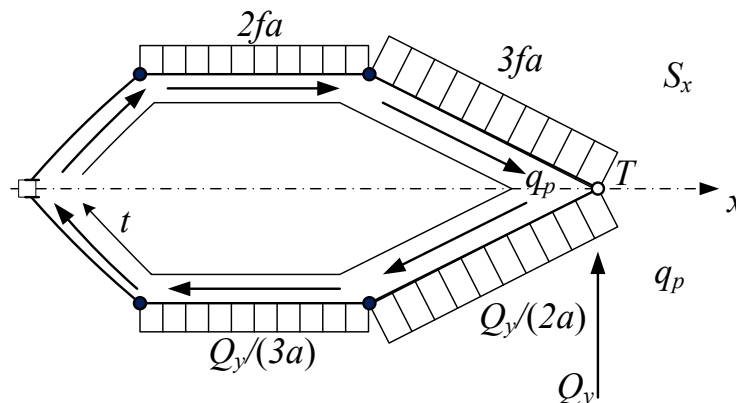


Рис. Д.7.16.3. Еюри $S_x(t)$ і $q_p(t)$

Прикладемо силу Q_y , як показано на рис. Д.7.16.3. Визначимо змінну складову функції потоку дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t) = -\frac{Q_y}{6fa^2} S_x(t).$$

На ділянках

$$q_{p1}(t) = 0; \quad q_{p2}(t) = -\frac{Q_y}{6fa^2} 2fa = -\frac{Q_y}{3a}; \quad q_{p3}(t) = -\frac{Q_y}{6fa^2} 3fa = -\frac{Q_y}{2a}$$

і далі маємо симетрично.

Епюра $q_p(t)$ має напрямок, протилежний контурній координаті. Покажемо на рис. Д.7.16.3 епюру $q_p(t)$ (знизу) без указання знака числових значень.

Розрахуємо деякі геометричні параметри перерізу (довжину похилої ділянки ℓ , подвоєну площу перерізу Ω і периметр контурної лінії L):

$$\ell_1 = \sqrt{2}a; \quad \ell_2 = \sqrt{5}a; \quad \Omega = 2R^2 + 8R^2 + 4R^2 = 14a^2; \\ L = (4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2})a.$$

Визначимо постійну складову функції потоку дотичних сил q_0 . Як моментну вибираємо точку T (див. рис. Д.7.16.3):

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_T - \oint q_p \rho dt); \quad a_T = 0.$$

Скориставшись даними епюри $q_p(t)$, отримаємо значення інтеграла і потоку

$$q_0 = \frac{1}{14a^2} \left(- \left(-\frac{Q_y}{3a} \right) 2aa \right) = \frac{Q_y}{a} \frac{2}{21}.$$

Знайдемо, де розташовується центр жорсткості заданого перерізу, скориставшись методом виділення моменту.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{кр} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}} = G\delta a^3 \cdot \frac{196}{4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}.$$

Погонний кут закручування

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_{\Sigma} dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega} \int \frac{(q_p + q_0) dt}{G\delta} = \\ &= \frac{Q_y}{14G\delta a^2} \left(\frac{2}{21} \cdot (4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \right) = \\ &= \frac{Q_y}{14G\delta a^2} \left(\frac{2}{21} (4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) - \frac{4}{3} - \sqrt{5} \right).\end{aligned}$$

Тепер можна обчислити крутний момент

$$\begin{aligned}M_{кр} &= \theta \cdot GI_{кр} = \\ &= \frac{Q_y}{14G\delta a^2} \left(\frac{2}{21} (4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) - \frac{4}{3} - \sqrt{5} \right) G\delta a^3 \frac{196}{4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}} = \\ &= -3,09 Q_y R.\end{aligned}$$

Розрахуємо відстань c , яка позиціонує центр жорсткості:

$$c = \frac{M_{кр}}{Q_y} = -3,09 R.$$

Цю відстань відкладаємо вправо від діючої в перерізі сили Q_y відповідно до напрямку моменту $M_{кр}$ (див. рис. Д.7.16.1). Одержані результати порівняйте з результатами попередньої задачі.

Задача № 17

Розглянути замкнутий профіль (рис. Д.7.17.1), стінки якого працюють на нормальні напруження $\delta_{\sigma} \neq 0$ і мають постійну товщину по контуру.

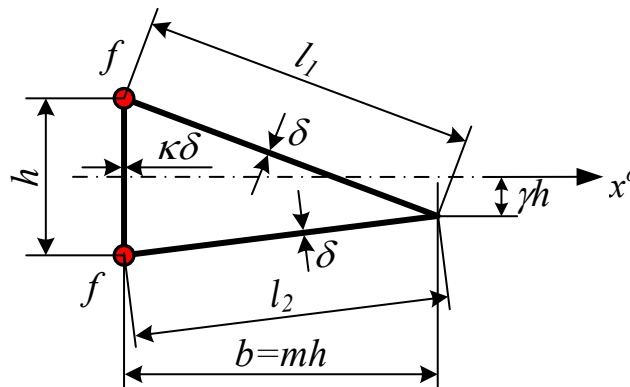


Рис. Д.7.17.1. Поперечний переріз

Дано: матеріал в перерізі однаковий. Числові значення параметрів:
 $m = 2$; $k = 2$; $h = 20$ см; $\delta = 0,2$ см; $\gamma = 0,25$; $f = 5$ см².

Необхідно: провести дискретизацію та визначити місце розташування центра жорсткості методом виділення моменту.

Розв'язання

Визначимо геометричні параметри: подвоєну площу перерізу $\Omega = 800$ см²; довжину похилих ділянок $\ell_1 = 42,72$ см і $\ell_2 = 40,31$ см.

Покажемо на рис. Д.7.17.2 дискретний переріз.

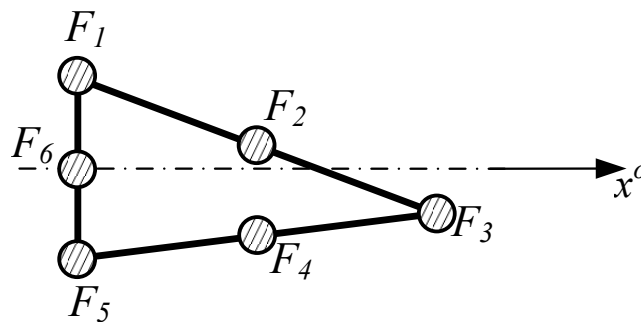


Рис. Д.7.17.2. Дискретний переріз

Площі дискретних поздовжніх елементів перерізу (рис. Д.7.17.2):

$$F_1 = f + \frac{1}{6}k\delta h + \frac{1}{6}\delta \cdot \ell_1 = 5 + \frac{1}{6}2 \cdot 0,2 \cdot 20 + \frac{1}{6} \cdot 0,2 \cdot 42,72 = 7,757 \text{ см}^2;$$

$$F_2 = \frac{2}{3}\delta\ell_1 = \frac{2}{3} \cdot 0,2 \cdot 42,72 = 5,696 \text{ см}^2;$$

$$F_3 = \frac{1}{6}\delta\ell_1 + \frac{1}{6}\delta \cdot \ell_2 = \frac{1}{6} \cdot 0,2 \cdot 42,72 + \frac{1}{6} \cdot 0,2 \cdot 40,31 = 2,768 \text{ см}^2;$$

$$F_4 = \frac{2}{3}\delta\ell_2 = \frac{2}{3} \cdot 0,2 \cdot 40,31 = 5,377 \text{ см}^2;$$

$$F_5 = f + \frac{1}{6}k\delta h + \frac{1}{6}\delta \cdot \ell_2 = 5 + \frac{1}{6}2 \cdot 0,2 \cdot 20 + \frac{1}{6} \cdot 0,2 \cdot 40,31 = 7,677 \text{ см}^2;$$

$$F_6 = \frac{2}{3}k\delta h = \frac{2}{3}2 \cdot 0,2 \cdot 20 = 5,333 \text{ см}^2.$$

Визначимо положення центра ваги перерізу відносно осей x^0 і y^0 , які вказані на рис. Д.7.17.3.

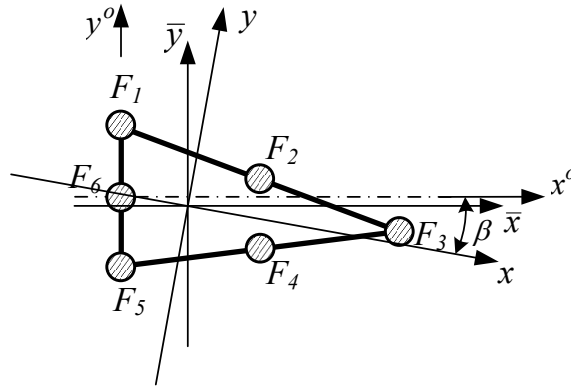


Рис. Д.7.17.3. Осі дискретного перерізу

Запишемо центральні координати зосереджених площ в перерізі:

$$x_1^0 = 0; x_2^0 = 20 \text{ см}; x_3^0 = 40 \text{ см}; x_4^0 = 20 \text{ см}; x_5^0 = 0; x_6^0 = 0 \text{ та}$$

$$y_1^0 = 10 \text{ см}; y_2^0 = 2,5 \text{ см}; y_3^0 = -5 \text{ см}; y_4^0 = -7,5 \text{ см}; y_5^0 = -10 \text{ см}; y_6^0 = 0.$$

Координати центра ваги перерізу:

$$y_c = \frac{S_x^\Sigma}{F^\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^6 S_{xi}}{\sum_{i=1}^6 F_i} = \frac{\sum_{i=1}^6 F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^6 F_i} = \frac{-39,14}{34,598} = -1,131 \text{ см};$$

$$x_c = \frac{S_y^\Sigma}{F^\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^6 S_{yi}}{\sum_{i=1}^6 F_i} = \frac{\sum_{i=1}^6 F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^6 F_i} = \frac{332,18}{34,598} = 9,601 \text{ см}.$$

Покажемо центральні осі інерції перерізу \bar{x} і \bar{y} на рис. Д.7.17.3. Обчислимо моменти інерції площі перерізу відносно цих осей:

Спочатку визначимо координати зосереджених площ у центральних осях перерізу за формулами:

$$\bar{x}_i = x_i^0 - x_c; \bar{y}_i = y_i^0 - y_c.$$

Величини \bar{x}_i вийшли такими:

$$\bar{x}_1 = -9,601 \text{ см}; \bar{x}_2 = 10,399 \text{ см}; \bar{x}_3 = 30,399 \text{ см}; \bar{x}_4 = 10,399 \text{ см};$$

$$\bar{x}_5 = -9,601 \text{ см}; \bar{x}_6 = -9,601 \text{ см}.$$

Одержані значення \bar{y}_i :

$$\bar{y}_1 = 11,131 \text{ см}; \bar{y}_2 = 3,631 \text{ см}; \bar{y}_3 = -3,869 \text{ см}; \bar{y}_4 = -6,369 \text{ см}; \\ \bar{y}_5 = -8,869 \text{ см}; \bar{y}_6 = 1,131 \text{ см}.$$

Три величини моментів інерції перерізу отримані такими:

$$I_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^6 (F_i \cdot \bar{y}_i^2) = 961,09 + 75,10 + 41,43 + 218,11 + 603,87 + 6,82 = \\ = 1906,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^6 (F_i \cdot \bar{x}_i^2) = 715,04 + 615,96 + 2557,91 + 581,46 + 707,66 + 491,59 = \\ = 5669,62 \text{ см}^4;$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \sum_{i=1}^6 (F_i \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i) = -828,98 + 215,07 - 325,55 - 356,13 + 653,71 - 57,91 = \\ = -699,79 \text{ см}^4.$$

Визначимо кут повороту β центральних осей інерції перерізу до положення головних осей:

$$\operatorname{tg} 2\beta = -\frac{2I_{\bar{x}\bar{y}}}{I_{\bar{x}} - I_{\bar{y}}} = -\frac{2(-699,79)}{1906,4 - 5669,62} = -0,3719; \beta = -10,200^\circ; \\ \sin \beta = -0,1771; \cos \beta = 0,9842.$$

Введемо головні центральні осі інерції перерізу x і y , які вкажемо на рис. Д.7.17.3.

Спочатку визначимо координати зосереджених площ в головних осях перерізу за формулами:

$$x_i = \bar{x}_i \cos \beta + \bar{y}_i \sin \beta; y_i = \bar{y}_i \cos \beta - \bar{x}_i \sin \beta.$$

Величини x_i вийшли такими:

$$x_1 = -11,402 \text{ см}; x_2 = 9,592 \text{ см}; x_3 = 30,604 \text{ см}; x_4 = 11,363 \text{ см}; \\ x_5 = -7,878 \text{ см}; x_6 = -9,649 \text{ см}.$$

Одержані значення y_i :

$$y_1 = 9,255 \text{ см}; y_2 = 5,416 \text{ см}; \bar{y}_3 = 1,576 \text{ см}; y_4 = -4,426 \text{ см};$$

$$y_5 = -10,429 \text{ см}; y_6 = -0,587 \text{ см}.$$

Перевіримо отримані головні координати зосереджених площ:

$$S_x = \sum_{i=1}^6 y_i \cdot F_i = 71,79 + 30,85 + 4,36 - 23,80 - 80,06 - 3,13 =$$

$$= -106,99 + 107 \approx 0;$$

$$S_y = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot F_i = -88,58 + 54,64 + 84,71 + 61,10 - 60,48 - 51,46 =$$

$$= -200,52 + 200,45 \approx 0;$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^6 (x_i \cdot y_i \cdot F_i) = -819,81 + 295,93 + 113,50 - 270,43 + 630,75 + 30,20 =$$

$$= -1070,39 + 1090,24 = 19,85 \text{ см}^4 \approx 2 \text{ \%}.$$

Результати одержали близькими до очікуваних.
Дві величини осьових моментів інерції перерізу:

$$I_x = \sum_{i=1}^6 (x_i^2 \cdot F_i) = 664,42 + 167,08 + 6,87 + 105,34 + 834,95 + 1,83 =$$

$$= 1780,50 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \sum_{i=1}^6 (y_i^2 \cdot F_i) = 1011,58 + 524,11 + 2592,46 + 694,28 + 496,46 + 496,53 =$$

$$= 5795,42 \text{ см}^4.$$

Ці величини осьових моментів інерції перерізу розрахуємо за іншими формулами:

$$I_x = I_{\bar{x}} \cos^2 \beta + I_{\bar{y}} \sin^2 \beta - I_{\bar{x}\bar{y}} \sin 2\beta = 1780,46 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{\bar{y}} \cos^2 \beta + I_{\bar{x}} \sin^2 \beta + I_{\bar{x}\bar{y}} \sin 2\beta = 5795,32 \text{ см}^4.$$

Очевидно, що розбіжність результатів є досить невеликою.
Визначимо положення центра жорсткості перерізу.

Спочатку в перерізі докладемо силу $Q_y = I_x$ (чисельно), як показано на рис. Д.7.17.4, де також зобразимо напрямок контурної координати і відповідним чином пронумеровані ділянки контуру.

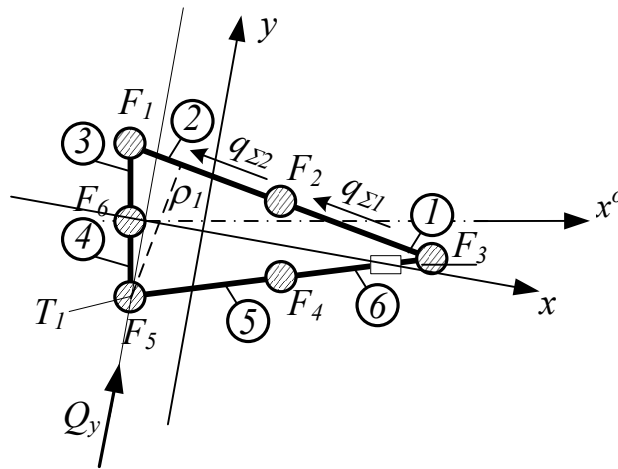


Рис. Д.7.17.4. Сила Q_y в перерізі

Обчислимо поточні статичні моменти S_x і потоки дотичних сил q_{py} (нумерація ділянок наведена на рис. Д.7.17.4) за формулою

$$q_{pyi}(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_{xi}:$$

$$S_{x1} = 4,36 \text{ см}^3; \quad q_{py1} = -4,36 \text{ Н/см};$$

$$S_{x2} = 4,36 + 30,85 = 35,21 \text{ см}^3; \quad q_{py2} = -35,21 \text{ Н/см};$$

$$S_{x3} = 35,21 + 71,79 = 107,0 \text{ см}^3; \quad q_{py3} = -107,0 \text{ Н/см};$$

$$S_{x4} = 107,0 + (-3,13) = 103,87 \text{ см}^3; \quad q_{py4} = -103,87 \text{ Н/см};$$

$$S_{x5} = 103,87 + (-80,86) = 23,81 \text{ см}^3; \quad q_{py5} = -23,81 \text{ Н/см};$$

$$S_{x6} = 23,81 + (-23,80) \approx 0; \quad q_{py6} = 0.$$

Визначимо потік q_{0y} (моментна точка – T_1).

Геометричні параметри:

$$\rho_1 = h \frac{mh}{\ell_1} = 20 \frac{2 \cdot 20}{42,72} = 18,727 \text{ см}; \quad a_y = 0.$$

Потік дотичних сил

$$q_{0y} = \frac{1}{\Omega} (Q_y a_y - \int q_{py} \rho dt) = \frac{1}{\Omega} (- \int q_{py} \rho dt) = \frac{1}{\Omega} \left(- \rho_1 (q_{py1} + q_{py2}) \frac{\ell_1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{800} \left(-18,727(-4,36 - 35,21) \frac{42,72}{2} \right) = 19,785 \text{ Н/см}$$

та напрямки – за годинниковою стрілкою.

Крутильна жорсткість поперечного перерізу

$$GI_{кр} = \frac{\Omega^2}{\int \frac{dt}{G\delta}} = \frac{\Omega^2}{\frac{\ell_1 + \ell_2}{G\delta} + \frac{h}{G \cdot 2\delta}} =$$

$$= \frac{800^2 \cdot G}{\frac{42,72 + 40,31}{0,2} + \frac{20}{2 \cdot 0,2}} = 1376,05G \text{ см}^4.$$

Розраховані сумарні потоки дотичних сил:

$$q_{yi}^{\Sigma}(t) = q_{0yi}(t) + q_{pyi}(t);$$

$$q_{y1}^{\Sigma} = 15,425 \text{ Н/см}; q_{y2}^{\Sigma} = -15,425 \text{ Н/см}; q_{y3}^{\Sigma} = -87,215 \text{ Н/см};$$

$$q_{y4}^{\Sigma} = -84,085 \text{ Н/см}; q_{y5}^{\Sigma} = -4,025 \text{ Н/см}; q_{y6}^{\Sigma} = 19,785 \text{ Н/см}.$$

Визначимо погонний кут закручування перерізу:

$$\theta_y = \frac{1}{\Omega} \int \frac{q_y^{\Sigma}(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G} \left(\frac{(q_{y1}^{\Sigma} + q_{y2}^{\Sigma}) \frac{\ell_1}{2}}{\delta} + \frac{(q_{y3}^{\Sigma} + q_{y4}^{\Sigma}) \frac{h}{2}}{2\delta} + \frac{(q_{y5}^{\Sigma} + q_{y6}^{\Sigma}) \frac{\ell_2}{2}}{\delta} \right) =$$

$$= -\frac{3,3679}{G} \text{ Н/см}^3.$$

Обчислимо крутний момент в перерізі

$$M_{кр.y} = \theta_y GI_{кр.y} = -\frac{3,3679}{G} \cdot 1376,05G = -4634,34 \text{ Н/см}.$$

Розрахована відстань c_x , яка позиціонує центр жорсткості в головних центральних осях перерізу:

$$c_x = \frac{M_{кр.y}}{Q_y} = -\frac{4634,34}{1780,50} = -2,60 \text{ см}.$$

Потім у перерізі докладемо силу $Q_x = I_y$ (чисельно), як показано на рис. Д.7.17.5, де також зображено напрямок контурної координати і відповідним чином пронумеровані ділянки контуру.

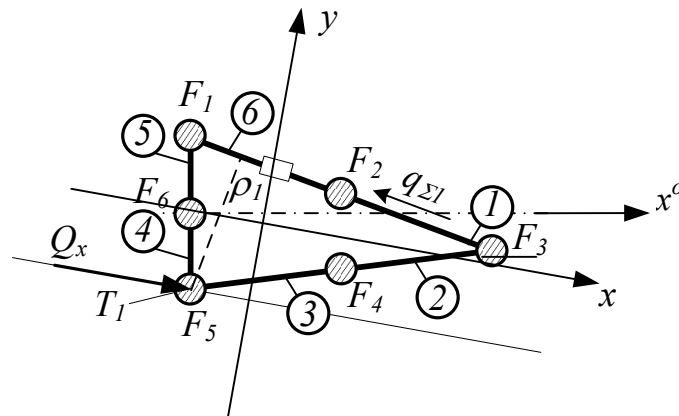


Рис. Д.7.17.5. Сила Q_x в перерізі

Обчислимо поточні статичні моменти S_y і потоки дотичних сил q_{px} (нумерацію ділянок наведено на рис. Д.7.17.5), за формулою

$$q_{pxi}(t) = -\frac{Q_x}{I_y} S_{yi}:$$

$$S_{y1} = 54,64 \text{ см}^3; \quad q_{px1} = -54,64 \text{ Н/см};$$

$$S_{y2} = 54,64 + 84,71 = 139,35 \text{ см}^3; \quad q_{px2} = -139,35 \text{ Н/см};$$

$$S_{y3} = 139,35 + 61,10 = 200,45 \text{ см}^3; \quad q_{px3} = -200,45 \text{ Н/см};$$

$$S_{y4} = 200,45 + (-60,48) = 139,97 \text{ см}^3; \quad q_{px4} = -139,97 \text{ Н/см};$$

$$S_{y5} = 139,97 + (-51,46) = 88,51 \text{ см}^3; \quad q_{px5} = -88,51 \text{ Н/см};$$

$$S_{y6} = 88,51 + (-88,58) \approx 0; \quad q_{px6} = 0.$$

Визначимо потік q_{0x} (моментна точка – T_1).

Геометричний параметр $a_y = 0$.

Потік дотичних сил

$$\begin{aligned} q_{0x} &= \frac{1}{\Omega} (Q_x a_x - \oint q_{px} \rho dt) = \frac{1}{\Omega} (-\oint q_{px} \rho dt) = \frac{1}{\Omega} \left(-\rho_1 (q_{px1}) \frac{\ell_1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{800} \left(-18,727 (-54,64) \frac{42,72}{2} \right) = 27,32 \text{ Н/см}, \end{aligned}$$

а напрямки – за годинниковою стрілкою.

Розрахуємо сумарні потоки дотичних сил:

$$q_{xi}^{\Sigma}(t) = q_{0xi}(t) + q_{pxi}(t);$$

$$q_{x1}^{\Sigma} = -27,32 \text{ Н/см}; \quad q_{x2}^{\Sigma} = -112,03 \text{ Н/см}; \quad q_{x3}^{\Sigma} = -173,13 \text{ Н/см};$$

$$q_{x4}^{\Sigma} = -112,65 \text{ Н/см}; \quad q_{x5}^{\Sigma} = -61,19 \text{ Н/см}; \quad q_{x6}^{\Sigma} = 27,32 \text{ Н/см}.$$

Визначимо погонний кут закручування перерізу:

$$\theta_x = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{q_x^{\Sigma}(t) dt}{G\delta} = \frac{1}{\Omega G} \left(\frac{(q_{x1}^{\Sigma} + q_{x6}^{\Sigma}) \frac{\ell_1}{2}}{\delta} + \frac{(q_{x4}^{\Sigma} + q_{x5}^{\Sigma}) \frac{h}{2}}{2\delta} + \frac{(q_{x2}^{\Sigma} + q_{x3}^{\Sigma}) \frac{\ell_2}{2}}{\delta} \right) =$$

$$= -\frac{41,354}{G} \text{ Н/см}^3.$$

Обчислимо крутний момент в перерізі

$$M_{\text{кр.}x} = \theta_x G I_{\text{кр}} = -\frac{3,3679}{G} \cdot 1376,05 G = -4634,34 \text{ Н/см}.$$

Підрахована відстань c_x , яка позиціонує центр жорсткості в головних центральних осях перерізу:

$$c_y = \frac{M_{\text{кр.}x}}{Q_x} = -\frac{56904,8}{1780,50} = -9,82 \text{ см}.$$

Точка прикладання сил Q_x і Q_y збігається з розташуванням зосередженої площі F_5 ($x_5 = -7,878$ см, $y_5 = -10,429$ см).

Від цієї точки позиціонується в головних центральних осях центр жорсткості відстанями c_x і c_y :

$$x_{\text{ц.ж}} = x_5 - c_x = -7,878 + 2,60 = -5,28 \text{ см};$$

$$y_{\text{ц.ж}} = y_5 - c_y = -10,429 + 9,82 = -0,61 \text{ см}.$$

У центральних осях \bar{x} і \bar{y} центр жорсткості позиціонується так:

$$\bar{x}_{\text{ц.ж}} = x_{\text{ц.ж}} \cos \beta + y_{\text{ц.ж}} \sin \beta = -5,30 \text{ см};$$

$$\bar{y}_{\text{ц.ж}} = y_{\text{ц.ж}} \cos \beta + x_{\text{ц.ж}} \sin \beta = -1,54 \text{ см},$$

а у вихідних осях

$$x_{Ц.Ж}^0 = x_{Ц.Т} + \bar{x}_{Ц.Ж} = 4,30 \text{ см};$$

$$y_{Ц.Ж}^0 = y_{Ц.Т} + \bar{y}_{Ц.Ж} = -2,67 \text{ см}.$$

Покажемо розташування центра жорсткості перерізу на рис. Д.7.17.6.

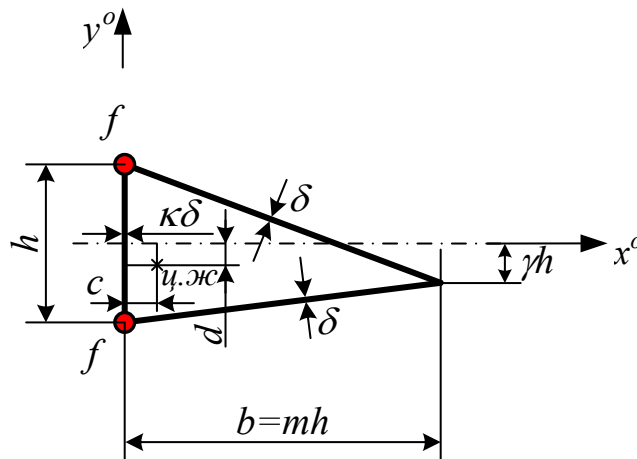


Рис. Д.7.17.6. Розміщення центра жорсткості в перерізі

Зауваження: розрахунок положення центра жорсткості в тонкостінному перерізі з аналогічними параметрами, але при $\gamma = 0$ (рис. Д.7.17.7), (симетричний переріз), привів до таких значень координат:

$$x_{Ц.Ж}^0 = 4,326 \text{ см};$$

$$y_{Ц.Ж}^0 = 0.$$

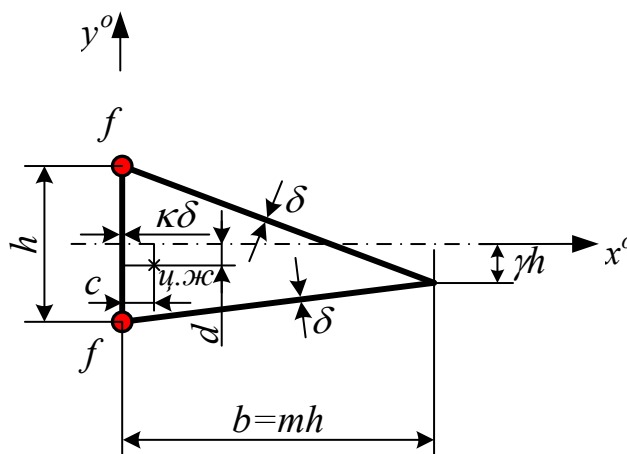


Рис. Д.7.17.7. Розміщення центра жорсткості в симетричному перерізі

Практично положення центра жорсткості вздовж горизонтальної осі не змінилося.

ВАРІАНТИ ВИХІДНИХ ДАНИХ ДО ЗАДАЧІ «РОЗРАХУНОК ДВОЗАМКНУТОГО КОНТУРУ НА ЗСУВ І КРУЧЕННЯ»

Відповідно до заданого варіанта (табл. Д.8.1) визначте індивідуальні (варійовані) параметри перерізу тонкостінного стрижня:

- схему перерізу (відповідно до заданого номером рисунку - чотири варіанти рис. Д.8.1 – Д.8.4);
- величину a , що визначає положення середнього (рис. Д.8.1 і Д.8.3) або переднього (рис. Д.8.2 і Д.8.4) лонжерона;
- площі f_3 поясів заднього лонжерона.

Таблиця Д.8.1

Розшифровка номера індивідуального варіанта

Положення цифри в номері варіанта	Параметр	Значення i -ї цифри в номері варіанта			
		1	2	3	4
Перша цифра	Номер рисунка зі схемою	1	2	3	4
Друга цифра	a , см	20	30	40	50
Третя цифра	f_3 , см ²	3	4	5	6

Однаковими для всіх варіантів є такі параметри:

- величина діючої в перерізі сили $Q_y = 500$ кН;
- відстань c , що характеризує положення сили в перерізі (задається викладачем);
- хорда перерізу $(a + b) = 100$ см;
- площі поясів і поздовжніх елементів $f_1 = f_2 = 4$ см²;
- матеріал обшивки – дюраль Д16Т:

$$E_d = 72 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad G_d = 28 \cdot 10^9 \text{ Па};$$

- матеріал поздовжніх елементів, стінок і поясів лонжеронів – сталь 30ХГСН2А:

$$E_{ст} = 200 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad G_{ст} = 77 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

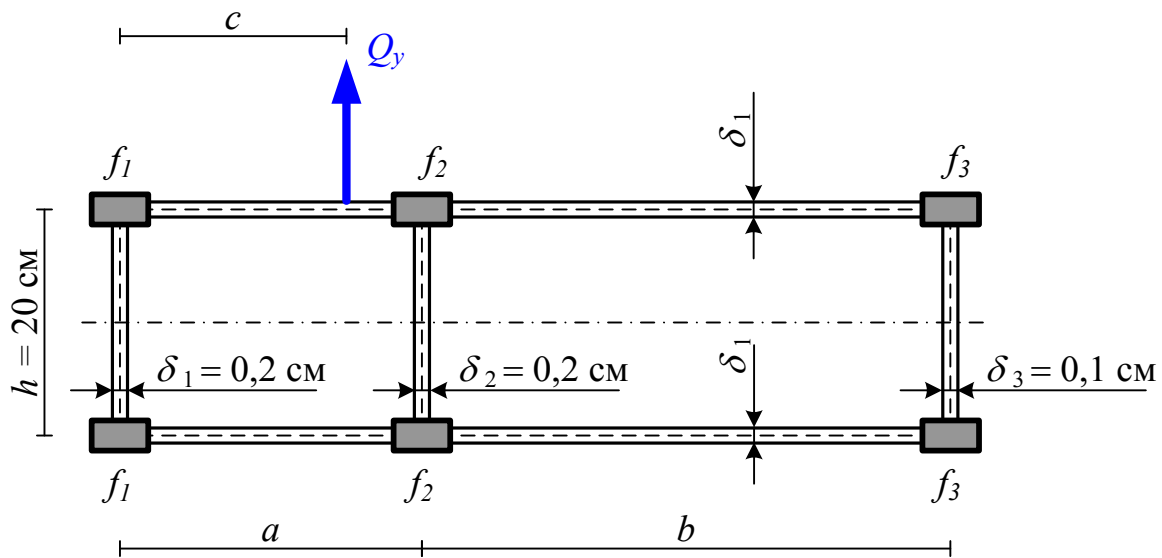


Рис. Д.8.1. Перший варіант двозамкнутого профілю

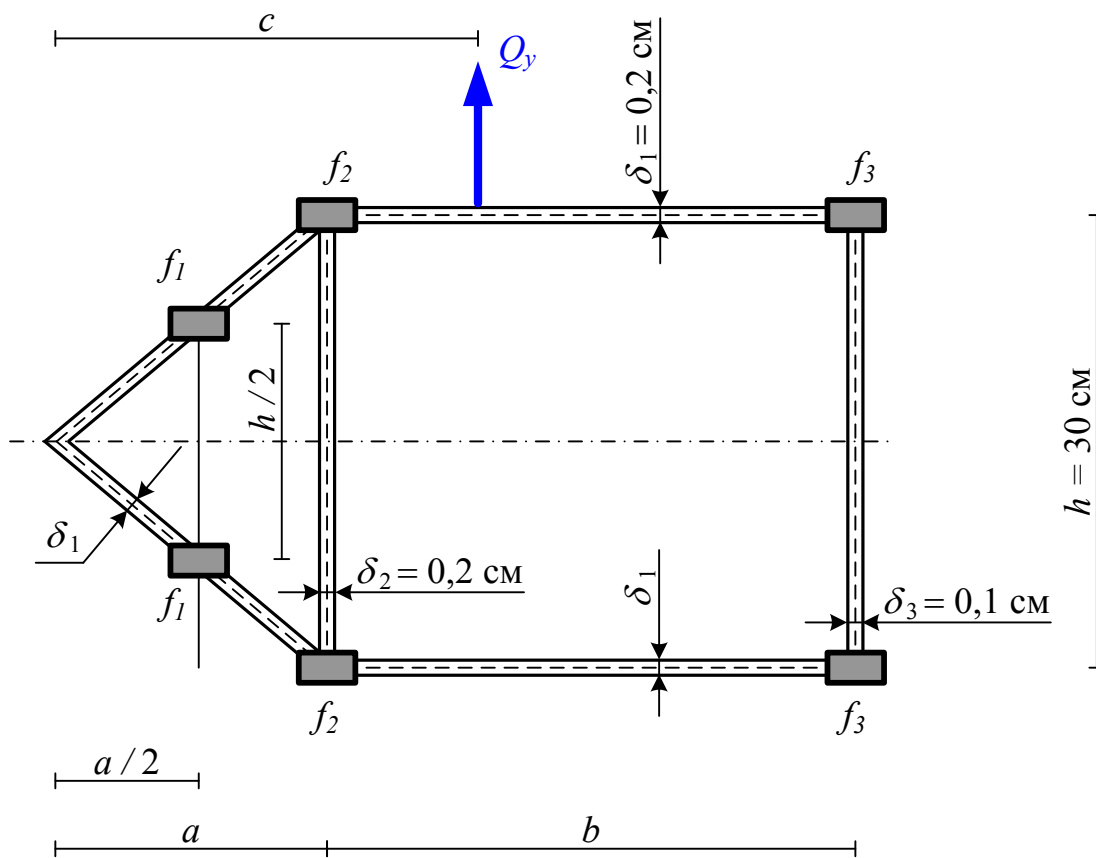


Рис. Д.8.2. Другий варіант двозамкнутого профілю

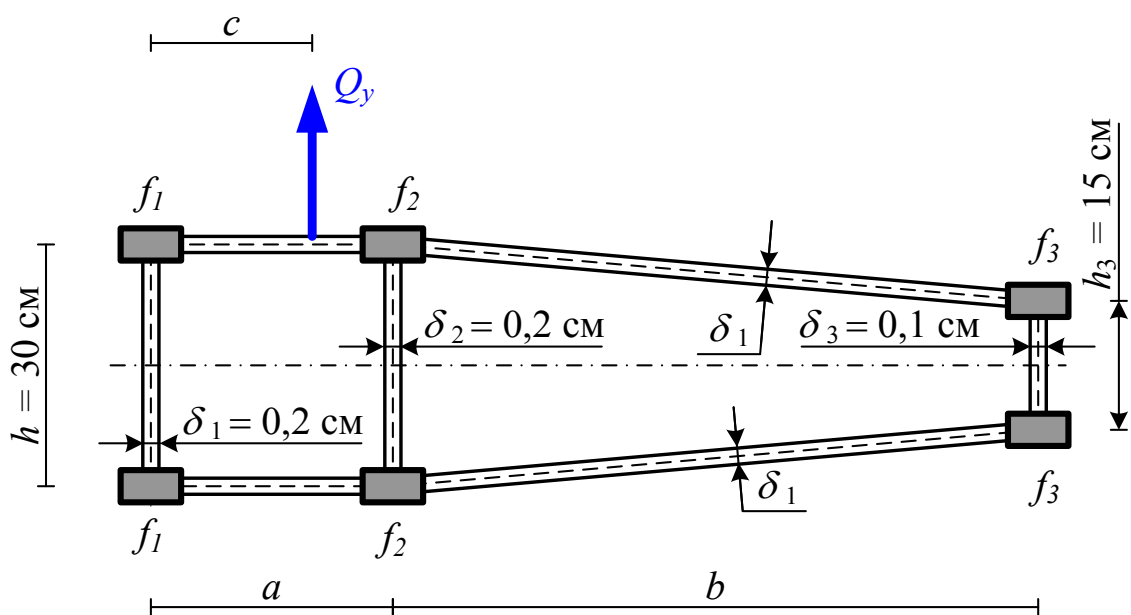


Рис. Д.8.3. Третій варіант двозамкнутого профілю

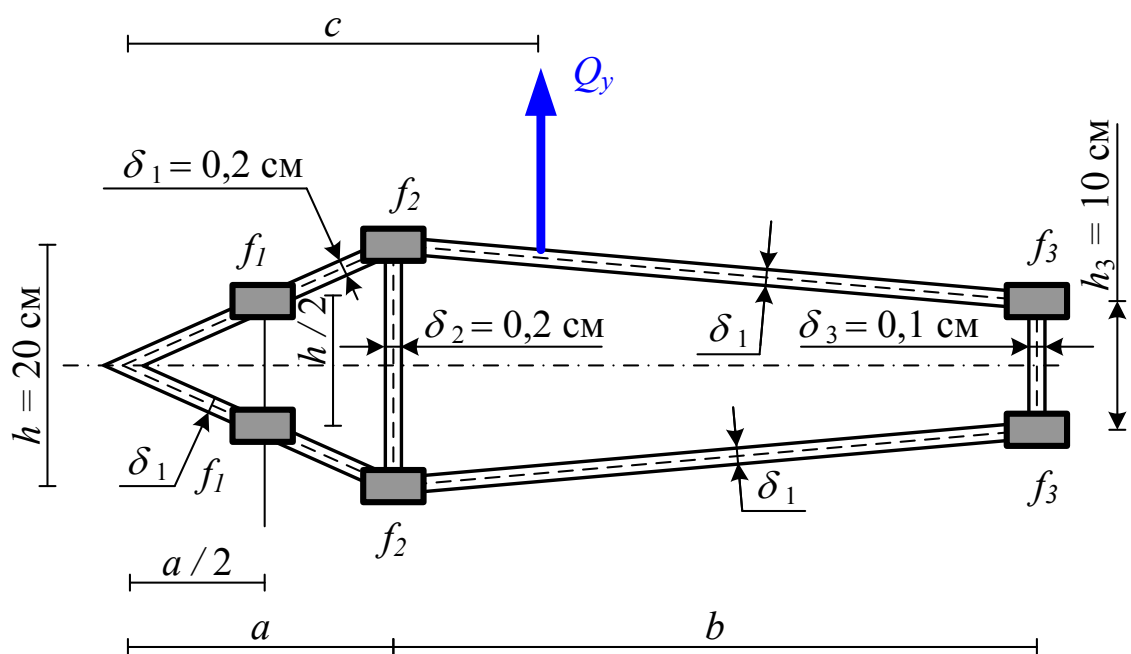


Рис. Д.8.4. Четвертий варіант двозамкнутого профілю

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА ТЕМОЮ «РОЗРАХУНОК ДВОЗАМКНУТОГО КОНТУРУ НА ЗСУВ І КРУЧЕННЯ»

Задача

Побудувати епюру потоків дотичних сил; визначити положення центра жорсткості, зусилля в поясах і відносний кут закручування тонкостінного стрижня (рис. Д.9.1) з обшивкою, що працює тільки на зсув ($\delta_\sigma = 0$). Профіль симетричний відносно осі x .

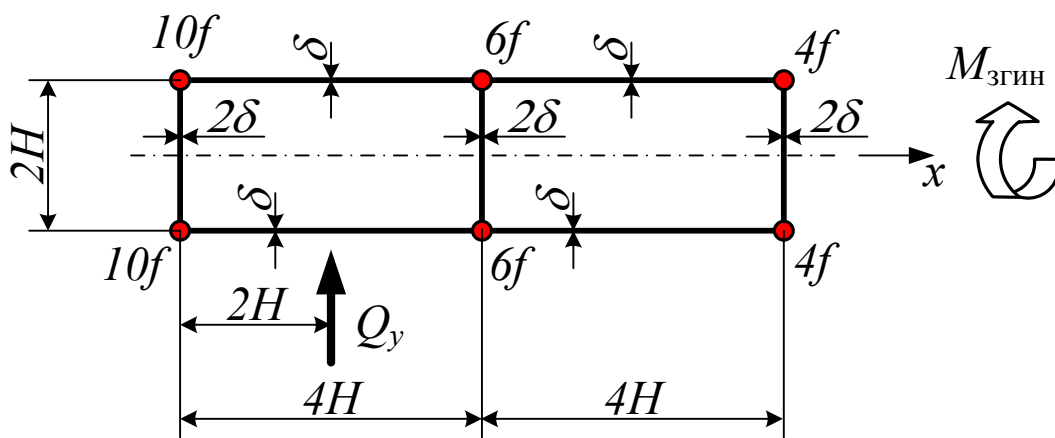


Рис. Д.9.1. Двозамкнутий профіль

Дано: $Q = Q_y = 200$ кН; $M_{\text{згин}} = 1600$ кНм; $H = 0,2$ м; $\delta = 0,002$ м; $f = 2 \cdot 10^{-4}$ м². Матеріал поясів – сталь: $E = 200$ ГПа. Матеріал обшивки і стінок – дюралюміній: $G = 27,7$ ГПа.

Розв'язання

Положення центра ваги перерізу шукати не потрібно. Він унаслідок симетрії знаходиться на осі x . На цій же осі розташовано і центр жорсткості.

Визначимо момент інерції площі перерізу відносно осі x :

$$I_x = 2(10f + 6f + 4f)H^2 = 40fH^2 = 40 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2^2 = 32000 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Знайдемо зусилля в поясах. У всіх поясах унаслідок їх рівновіддаленості від осі x (головної центральної осі) діють однакові за модулем напруження:

$$\sigma_z = \frac{M_{згин} \cdot H}{I_x} = \frac{1600 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{32000 \cdot 10^{-8}} = 1000 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1000 \text{ МПа}.$$

Визначимо зусилля в лівих поясах:

$$N_{10f} = \sigma_z \cdot 10f = 1000 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} = 2000 \cdot 10^3 \text{ Н} = 2000 \text{ кН}.$$

Розрахуємо зусилля в середніх поясах:

$$N_{6f} = \sigma_z \cdot 6f = 1000 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} = 1200 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1200 \text{ кН}.$$

Визначимо зусилля в правих поясах:

$$N_{4f} = \sigma_z \cdot 4f = 1000 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} = 800 \cdot 10^3 \text{ Н} = 800 \text{ кН}.$$

Побудуємо функцію $S_x(t)$ поточного статичного моменту площі перерізу відносно осі x . Введемо два розрізи, отримаємо контур з розгалуженнями (рис. Д.9.2). З'єднаємо пари вільних точок основною та допоміжною контурними координатами. Пронумеруємо ділянки. Епюра $S_x(t)$ симетрична відносно осі x .

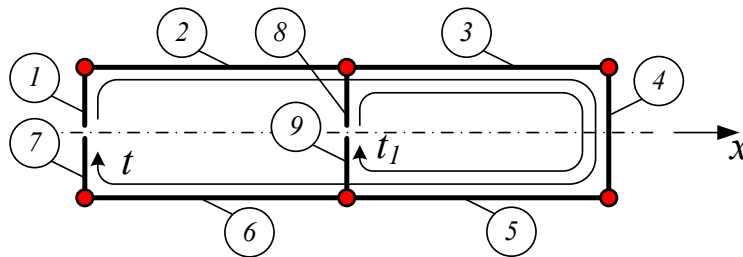


Рис. Д.9.2. Напрямок контурної координати і номери ділянок в перерізі

Маємо:

$$S_{x1} = 0; S_{x2} = S_{x6} = 10fH; S_{x3} = S_{x5} = 10fH + 6fH = 16fH; \\ S_{x4} = 16fH + 4fH = 20fH.$$

Далі маємо симетрію.

Побудуємо епюру поточного статичного моменту (рис. Д.9.3).

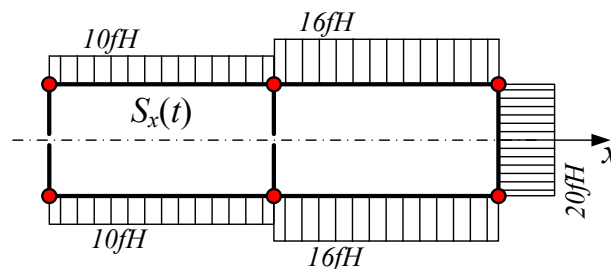


Рис. Д.9.3. Епюра $S_x(t)$

Визначимо функцію потоків дотичних сил

$$q_p(t) = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(t).$$

На ділянках

$$q_{p2}(t) = 0;$$

$$q_{p2}(t) = q_{p6}(t) = -\frac{Q_y}{40 fH^2} 10 fH = -\frac{Q_y}{4H} = -\frac{200}{4 \cdot 0,2} = -250 \text{ кН/м};$$

$$q_{p3}(t) = q_{p5}(t) = -\frac{Q_y}{40 fH^2} 16 fH = -\frac{2Q_y}{5H} = -\frac{2 \cdot 200}{5 \cdot 0,2} = -400 \text{ кН/м};$$

$$q_{p4}(t) = -\frac{Q_y}{40 fH^2} 20 fH = -\frac{Q_y}{2H} = -\frac{200}{2 \cdot 0,2} = -500 \text{ кН/м}.$$

Покажемо епюру потоків дотичних сил $q_p(t)$ та їх напрямок на рис. Д.9.4.

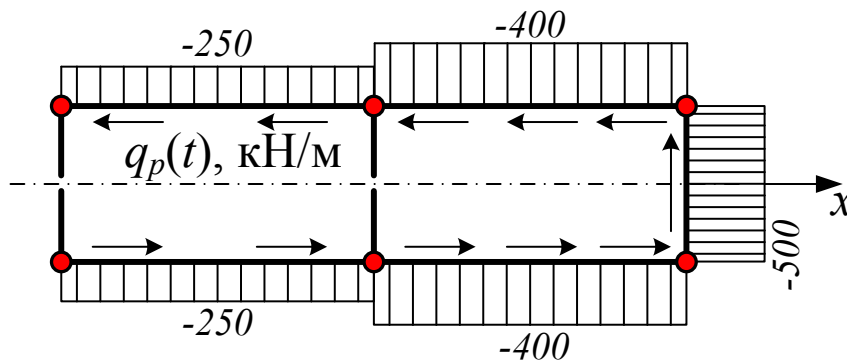


Рис. Д.9.4. Епюра $q_p(t)$

Двозамкнутий контур є один раз статично невизначеним. Застосуємо метод сил. Скористаємося відкритим контуром, розглянутим раніше (див. рис. Д.9.2), формально як основною системою, оскільки відкритий контур не може нести будь-яке навантаження. Зроблені в двозамкнутому профілі розрізи «компенсуємо» введенням контурних моментів M_1 і M_2 , які відповідають невідомим X_1 і X_2 . Запишемо систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}M_1 + \delta_{12}M_2 + \Delta_{1P} = \theta, \\ \delta_{21}M_1 + \delta_{22}M_2 + \Delta_{2P} = \theta. \end{cases}$$

Кожне з цих двох рівнянь являє собою погонний кут закручування контуру θ , одержуваний підсумовуванням погонних кутів закручування, що спричинені двома невідомими моментами M_1 і M_2 та зовнішнім навантаженням на основну систему.

Покажемо на рис. Д.9.5 еквівалентну та основну системи.

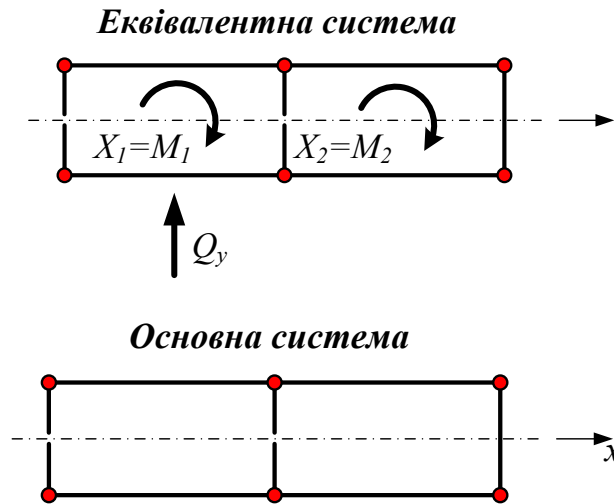


Рис. Д.9.5. Еквівалентна та основна системи

Покажемо на рис. Д.9.6 вантажний та одиничні стани основної системи.

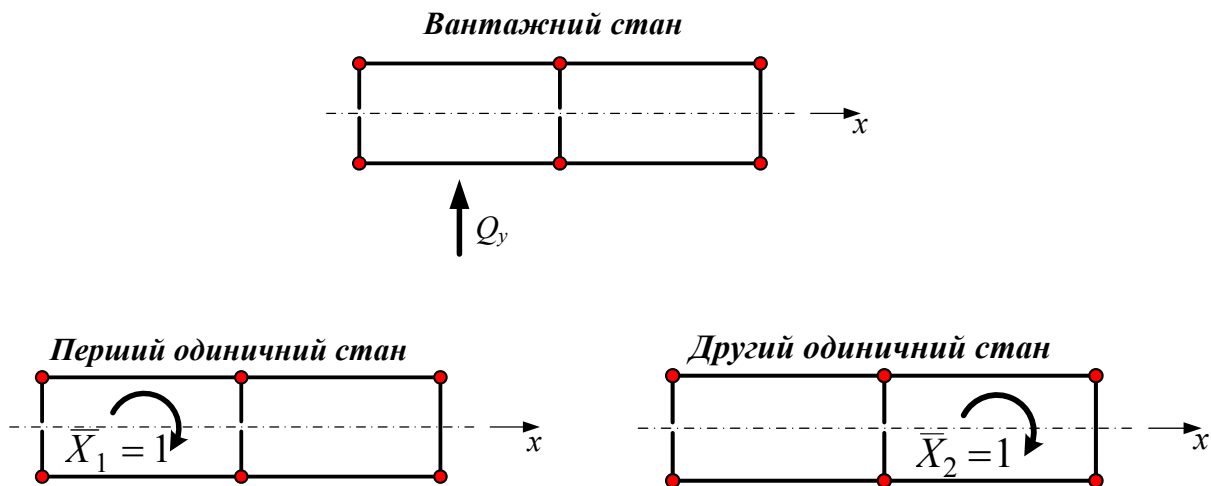


Рис. Д.9.6. Вантажний та одиничні стани основної системи

В одиничних станах при дії одиничних моментів у відповідних контурах виникають одиничні потоки дотичних сил

$$\bar{q}_{01}(t) = \frac{1}{\Omega_1} \text{ і } \bar{q}_{02}(t) = \frac{1}{\Omega_2},$$

де Ω_1 і Ω_2 – подвоєні площі лівого і правого контурів.

У цій задачі $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = 2 \cdot 4H \cdot 2H = 16H^2$.

Покажемо на епюрах ці потоки, які діють кожен у своєму контурі (рис. Д.9.7).

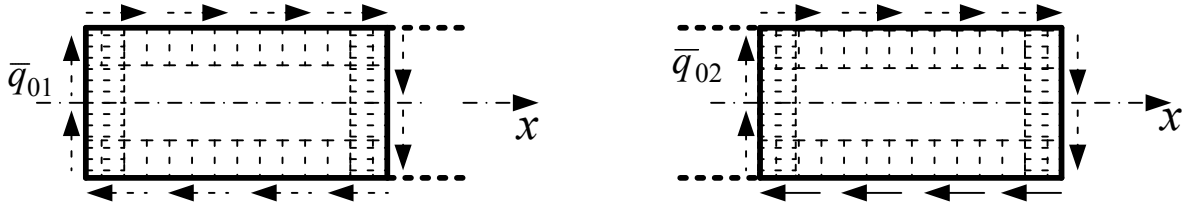


Рис. Д.9.7. Епюри потоків дотичних сил в одиничних станах основної системи

Потоки дотичних сил у вантажному стані шукати не потрібно, оскільки вже отримали $q^P(t) = q_p(t)$ (вантажний стан є поперечне згинання відкритого контуру).

Обчислимо коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь методом сил.

Коефіцієнт δ_{11} одержимо за допомогою «перемноження» епюри потоків дотичних сил в першому одиничному стані на саму себе:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{\Omega_1^2} \oint \frac{dt}{G\delta} = \frac{1}{(16H^2)^2} \left(2 \frac{4H}{G\delta} + 2 \frac{2H}{G \cdot 2\delta} \right) = \frac{5}{128H^3 G\delta} = \\ &= \frac{5}{128 \cdot 0,2^3 \cdot 27,7 \cdot 10^9 \cdot 0,002} = 0,8814 \cdot 10^{-7} \text{ 1/Нм}^2. \end{aligned}$$

У цьому завданні – два однакових контури, тому $\delta_{11} = \delta_{22}$.

Коефіцієнт δ_{12} отримаємо «перемноженням» епюри потоку дотичних сил в першому одиничному стані на аналогічний потік в другому одиничному стані. Одночасно ці потоки існують тільки на середній стінці і тільки там проводиться множення. Спрямовані ці потоки в протилежних напрямках, тому δ_{12} має знак мінус:

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= -\frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \oint \frac{dt}{G\delta} = -\frac{1}{(16H^2)^2} \left(\frac{2H}{G \cdot 2\delta} \right) = -\frac{1}{256H^3 G\delta} = \\ &= -\frac{1}{256 \cdot 0,2^3 \cdot 27,7 \cdot 10^9 \cdot 0,002} = -0,8814 \cdot 10^{-8} \text{ 1/Нм}^2. \end{aligned}$$

Симетричні відносно діагоналі коефіцієнти є однаковими, а значить $\delta_{12} = \delta_{21}$. У цьому завданні присутні два однакових контури, тому $\delta_{11} = \delta_{22}$.

Вільний член рівняння Δ_{1P} визначають за допомогою «перемноження» епюри потоків дотичних сил в першому одиничному стані на аналогічний потік у вантажному стані. Одночасно ці потоки існують тільки в першому контурі (на верхній і нижній обшивці) і тільки там проводиться множення. Потоки спрямовані в протилежні напрямки, тому Δ_{1P} має знак мінус:

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= -\frac{1}{\Omega_1} \int \frac{q_p(t)dt}{G\delta} = -\frac{1}{16H^2} \left(2 \frac{Q_y 4H}{4H \cdot G \cdot \delta} \right) = -\frac{Q_y}{8H^2 G \delta} = \\ &= -\frac{200 \cdot 10^3}{8 \cdot 0,2^2 \cdot 27,7 \cdot 10^9 \cdot 0,002} = -1,125 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м.}\end{aligned}$$

Вільний член рівняння Δ_{2P} визначають за допомогою «перемноження» епюри потоків дотичних сил у другому одиничному стані на аналогічний потік у вантажному стані. Одночасно ці потоки існують лише в другому контурі (на трьох боках контуру) і тільки там виконується множення. Потоки спрямовані в протилежні напрямки, тому Δ_{2P} має знак мінус:

$$\begin{aligned}\Delta_{2P} &= -\frac{1}{\Omega_2} \int \frac{q_p(t)dt}{G\delta} = -\frac{1}{16H^2} \left(2 \frac{2Q_y \cdot 4H}{5H \cdot G \cdot \delta} + \frac{Q_y \cdot 2H}{2H \cdot G \cdot 2\delta} \right) = -\frac{37Q_y}{160H^2 G \delta} = \\ &= -\frac{37 \cdot 200 \cdot 10^3}{160 \cdot 0,2^2 \cdot 27,7 \cdot 10^9 \cdot 0,002} = -2,082 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м.}\end{aligned}$$

В обох рівняннях у наведеній вище системі канонічних рівнянь методу сил однакові праві частини: погонні кути повороту кожного з двох контурів, що є перерізом, однакові і дорівнюють погонному куту закручування всього перерізу. Це означає, що два рівняння містять три невідомі: M_1 , M_2 і θ . Виключимо невідому θ , віднімемо з першого рівняння друге:

$$(\delta_{11} - \delta_{21})M_1 + (\delta_{12} - \delta_{22})M_2 + (\Delta_{1P} - \Delta_{2P}) = 0.$$

Розрахуємо вираз в дужках:

$$\begin{aligned}(\delta_{11} - \delta_{21}) &= \left(\frac{5}{128} - \left(-\frac{1}{256} \right) \right) \frac{1}{H^3 G \delta} = \frac{11}{256} \frac{1}{H^3 G \delta}, \\ (\delta_{12} - \delta_{22}) &= -\frac{11}{256} \frac{1}{H^3 G \delta};\end{aligned}$$

$$(\Delta_{1P} - \Delta_{2P}) = -\left(\frac{1}{8} - \frac{37}{160}\right) \frac{Q_y}{H^2 G \delta} = \frac{17}{160} \cdot \frac{Q_y}{H^2 G \delta}.$$

Тоді рівняння буде мати вигляд

$$\frac{11}{256 H^3 G \delta} M_1 - \frac{11}{256 H^3 G \delta} M_2 = -\frac{17}{160} \frac{Q_y}{H^2 G \delta}.$$

Перетворимо його

$$M_1 - M_2 = -\frac{136}{55} Q_y H = -\frac{136}{55} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 0,2 = -0,9891 \cdot 10^5 \text{ Нм}.$$

Це рівняння пов'язує два невідомі крутні моменти, що діють у двох контурах поперечного перерізу і відповідають двом невідомим потокам дотичних сил. Його недостатньо для визначення невідомих.

Необхідно залучити умову статичної еквівалентності потоків дотичних сил і внутрішніх силових факторів у перерізі. У нашій задачі (рис. Д.9.8) це є умова рівності моментів сили Q_y і потоків дотичних сил відносно моментної точки T .

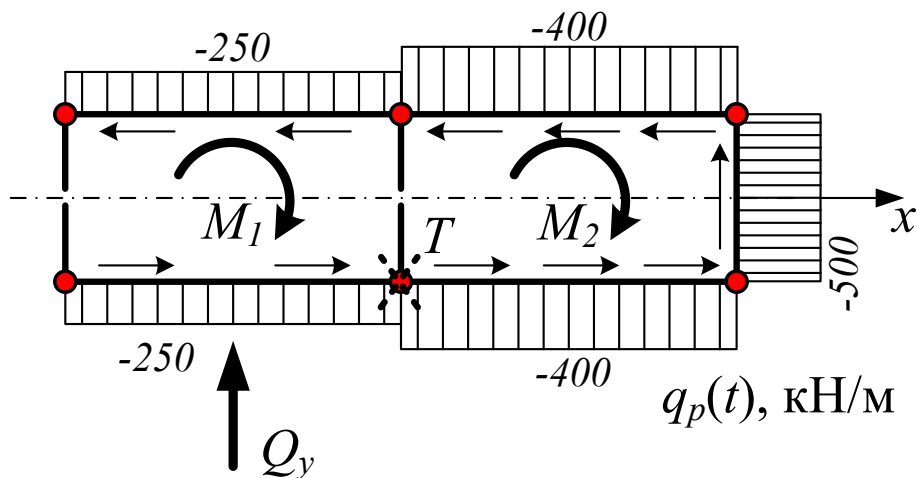


Рис. Д.9.8. Дія потоків дотичних сил і сили Q_y

Умова статичної еквівалентності

$$M_T(Q_y) = M_T(q) = M_T(q_p) + M_T(q_{01}) + M_T(q_{02}) = M_T(q_p) + M_1 + M_2,$$

причому

$$M_T(Q_y) = Q_y \cdot 2H;$$

$$M_T(q_p) = -\left(\frac{Q_y}{4H} 4H \cdot 2H + \frac{2Q_y}{5H} 4H \cdot 2H + \frac{Q_y}{2H} 2H \cdot 4H\right) = -\frac{46}{5} Q_y H.$$

З умови статичної еквівалентності випливає, що

$$M_1 + M_2 = M_T(Q_y) - M_T(q_p),$$

$$M_1 + M_2 = Q_y H \left(2 + \frac{46}{5}\right) = \frac{56}{5} Q_y H.$$

Це і є друге рівняння для визначення M_1 і M_2 . Система рівнянь алгебри для пошуку M_1 і M_2 є такою:

$$\begin{cases} M_1 - M_2 = -\frac{136}{55} Q_y H, \\ M_1 + M_2 = \frac{56}{5} Q_y H. \end{cases}$$

Після вирішення цієї системи встановимо, що

$$M_1 = \frac{48}{11} Q_y H = 1,7455 \cdot 10^5 \text{ Нм}; \quad M_2 = \frac{376}{55} Q_y H = 2,7345 \cdot 10^5 \text{ Нм}.$$

Визначимо постійні складові потоків дотичних сил в кожному з контурів, скориставшись формулою Бредта:

$$q_{01} = \frac{M_1}{\Omega_1} = \frac{1,7455 \cdot 10^5}{16 \cdot 0,2^2} = 2,7273 \cdot 10^5 \text{ Н/м} = 272,73 \text{ кН/м};$$

$$q_{02} = \frac{M_2}{\Omega_2} = \frac{2,7345 \cdot 10^5}{16 \cdot 0,2^2} = 4,2727 \cdot 10^5 \text{ Н/м} = 427,27 \text{ кН/м}.$$

Покажемо епюри цих потоків на рис. Д.9.9.

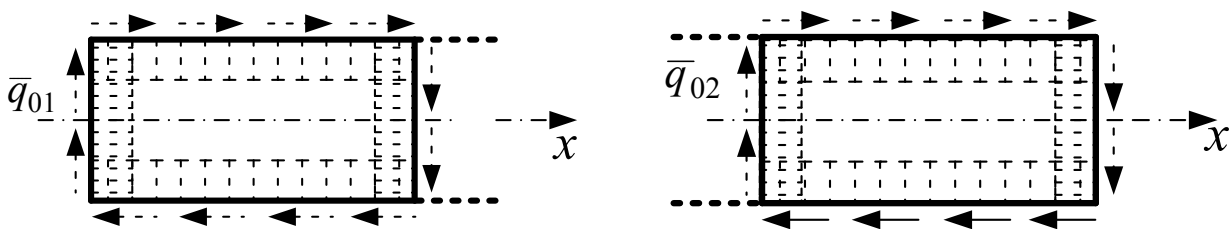


Рис. Д.9.9. Епюри потоків q_{01} і q_{02} дотичних сил в одиничних станах

Обчислимо сумарні потоки дотичних сил, що діють в перерізі, за формулою

$$q_{\Sigma}(t) = q_p(t) + q_{01} + q_{02},$$

причому підсумовування виконують за наявності зазначених потоків на ділянках контуру:

$$q_{\Sigma 1}(t) = q_{\Sigma 7}(t) = q_{01} = 272,73 \text{ кН/м (спрямований вгору);}$$

$$q_{\Sigma 2}(t) = q_{\Sigma 6}(t) = q_{p2}(t) + q_{01} = -250 + 272,73 = 22,73 \text{ кН/м (спрямований вправо);}$$

$$q_{\Sigma 8}(t) = q_{\Sigma 9}(t) = q_{01} - q_{02} = 272,73 - 427,27 = -154,54 \text{ кН/м (спрямований вгору, тут знак є досить умовним – головне вказати напрямок дії);}$$

$$q_{\Sigma 3}(t) = q_{\Sigma 5}(t) = q_{p3}(t) + q_{02} = -400 + 427,27 = 27,27 \text{ кН/м (спрямований вправо);}$$

$$q_{\Sigma 4}(t) = q_{p4}(t) + q_{02} = -500 + 427,27 = -72,73 \text{ кН/м (спрямований вгору).}$$

Побудуємо сумарну епюру потоків дотичних сил (рис. Д.9.10).

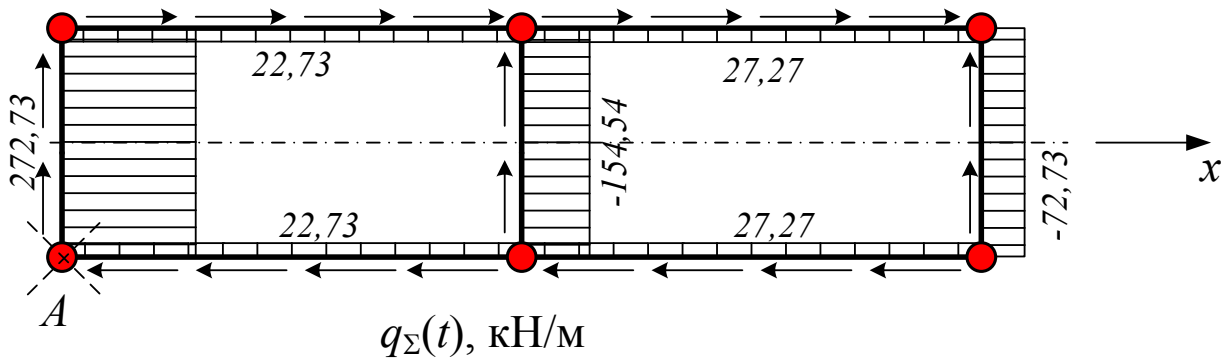


Рис. Д.9.10. Епюра потоків $q_{\Sigma}(t)$

Перевіримо правильність її побудови.

Перевіримо також умову статичної еквівалентності потоків дотичних сил поперечної сили:

$$\begin{aligned} \sum q_{\Sigma i} \cdot \Delta y_i &= Q_y; \\ (q_{\Sigma 1} + q_{\Sigma 8} + q_{\Sigma 4}) \cdot 2H &= Q_y; \\ (272,73 + 154,54 + 72,73) \cdot 2 \cdot 0,2 &= 200; \\ 200,02 &\cong 200. \end{aligned}$$

Умову виконано.

Далі перевіримо умову статичної еквівалентності моментів, що створюються потоками дотичних сил відносно точки A , моменту поперечної сили відносно зазначеної точки:

$$\begin{aligned} \sum q_{\Sigma i} t_i \rho_{Ai} &= Q_y \rho_A; \\ -q_{\Sigma 2} \cdot 4H \cdot 2H - q_{\Sigma 3} \cdot 4H \cdot 2H + q_{\Sigma 4} \cdot 2H \cdot 8H + q_{\Sigma 8} \cdot 2H \cdot 8H &= Q_y \cdot 2H; \\ -22,73 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 0,2 - 27,27 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 0,2 + 72,73 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 8 \cdot 0,2 + \\ + 154,54 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 4 \cdot 0,2 &= 200 \cdot 2 \cdot 0,2; \\ 80,025 &\cong 80. \end{aligned}$$

Умову виконано.

Визначимо погонний кут закручування перерізу за двома канонічними рівняннями:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \delta_{11} M_1 + \delta_{12} M_2 + \Delta_{1P} = 0,8814 \cdot 10^{-7} \cdot 1,7455 \cdot 10^5 - \\ &- 0,8814 \cdot 10^{-8} \cdot 2,7345 \cdot 10^5 - 1,128 \cdot 10^{-2} = 0,1696 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м}; \\ \theta_2 &= \delta_{21} M_1 + \delta_{22} M_2 + \Delta_{2P} = -0,8814 \cdot 10^{-8} \cdot 1,7455 \cdot 10^5 + \\ &+ 0,8814 \cdot 10^{-7} \cdot 2,7345 \cdot 10^5 - 2,028 \cdot 10^{-2} = 0,1680 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м}; \end{aligned}$$

Середнє значення

$$\theta_{\text{ср}} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{0,1696 + 0,1680}{2} \cdot 10^{-2} = 0,169 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м}.$$

Установимо положення центра жорсткості методом фіктивного моменту. Внаслідок симетрії даного перерізу центр жорсткості знаходиться на осі.

Метод фіктивного моменту базується на використанні двох підходів до визначення крутного моменту.

При геометричному підході

$$M_{\text{кр}} = Q_y a_{\text{ц.ж}},$$

де $a_{\text{ц.ж}}$ – відстань від центра жорсткості до лінії дії сили.

При фізичному підході

$$M_{\text{кр}} = \theta \cdot GI_{\text{кр}},$$

де $GI_{\text{кр}}$ – крутильна жорсткість перерізу; θ – дійсне значення погонного (відносного) кута закручування перерізу під дією заданого навантаження.

Метод фіктивного моменту застосовують у тих випадках, коли з попередніх розрахунків вже відома величина θ . Однак у разі багатозамкнутих контурів (на відміну від однозамкнутого) не існує простої формули для визначення жорсткості, і цю величину доводиться визначати за допомогою методу фіктивного моменту.

У цьому випадку до розглянутого перерізу прикладають безрозмірний крутний момент $M'_{\phi} = 1$, спрямований, наприклад, за годинниковою стрілкою, і знаходять відносний кут закручування, спричинений цим моментом (рис. Д.9.11).

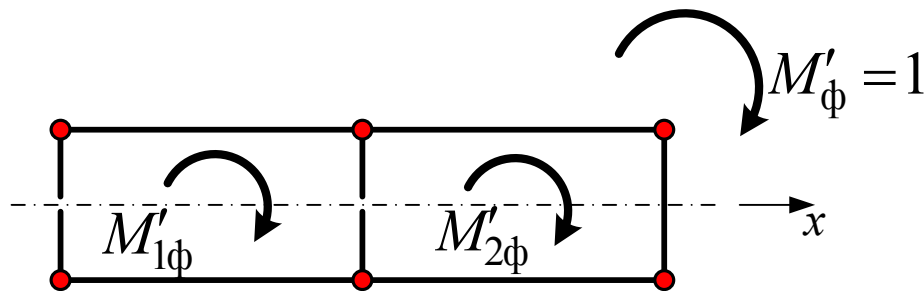


Рис. Д.9.11. Еквівалентна система для пошуку фіктивного погонного кута закручування

При цьому роздільна система рівнянь методу сил виходить з наведеної раніше з урахуванням таких особливостей крутіння без згинання:

- потоки $q_{pi} \equiv 0$;
- момент $M_T(q_{pi}) \equiv 0$;
- коефіцієнти $\Delta_{jp} \equiv 0$;
- замість моменту, залежного від сили Q_y , за умови статичної еквівалентності моментів враховують фіктивний момент $M'_{\phi} = 1$.

Крім того, слід враховувати, що одиничні стани $\bar{X}'_{1\phi} = \bar{M}'_{1\phi} = 1$ і $\bar{X}'_{2\phi} = \bar{M}'_{2\phi} = 1$ нічим не відрізняються від розглянутих раніше. Отже, коефіцієнти δ_{jk} збігаються з обчисленими раніше і розмірність цих коефіцієнтів становить $(\text{Н} \cdot \text{м}^2)^{-1}$.

Таким чином, роздільна система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} (\delta_{21} - \delta_{11})M'_{1\phi} + (\delta_{22} - \delta_{12})M'_{2\phi} = 0, \\ M'_{1\phi} + M'_{2\phi} = 1. \end{cases}$$

Підставимо значення

$$\begin{cases} -\frac{11}{256H^3G\delta}M'_{1\phi} + \frac{11}{256H^3G\delta}M'_{2\phi} = 0, \\ M'_{1\phi} + M'_{2\phi} = 1. \end{cases}$$

Перетворимо

$$\begin{cases} M'_{1\phi} - M'_{2\phi} = 0, \\ M'_{1\phi} + M'_{2\phi} = 1. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $M'_{1\phi} = M'_{2\phi} = \frac{1}{2}$ є безрозмірними моментами в контурах, вони додатні, тобто спрямовані за годинниковою стрілкою.

Визначимо погонний кут закручування перерізу за двома канонічними рівняннями:

$$\begin{aligned} \theta_{1\phi} &= \delta_{11}M'_{1\phi} + \delta_{12}M'_{2\phi} = 0,8814 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 - 0,8814 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5 = \\ &= 0,3966 \cdot 10^{-7} \text{ 1/Нм}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{2\phi} &= \delta_{21}M'_{1\phi} + \delta_{22}M'_{2\phi} = -0,8814 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5 + 0,8814 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 = \\ &= 0,3966 \cdot 10^{-7} \text{ 1/Нм}^2. \end{aligned}$$

Значення кутів збігаються, тому середнє значення

$$\theta_{\phi} = \frac{\theta_{1\phi} + \theta_{2\phi}}{2} = 0,3966 \cdot 10^{-7} \text{ 1/Нм}^2.$$

Проведений розрахунок профілю під дією фіктивного моменту дозволяє визначити крутильну жорсткість перерізу

$$GI_{\text{кр}} = \frac{M_{\phi}}{\theta_{\phi}} = \frac{1}{\theta_{\phi}} = \frac{1}{0,3966 \cdot 10^{-7}} = 2,5214 \cdot 10^7 \text{ Нм}^2.$$

Далі проводимо виділення крутного моменту із заданого навантаження (розкладання внутрішніх силових факторів на згинання та кручення):

$$M_{\text{кр}} = \theta_{\text{ср}} \cdot GI_{\text{кр}} = 0,1690 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5214 \cdot 10^7 = 42612 \text{ Нм},$$

причому відносний кут закручування був обчислений раніше. Момент $M_{кр}$ спрямовано так само, як і кут $\theta_{ср}$. Домовимося вважати $M_{кр}$ додатним, якщо він спрямований за годинниковою стрілкою, і від'ємним – у протилежному випадку.

Використавши геометричне уявлення крутного моменту, визначимо відстань від лінії дії заданої сили Q_y до центра жорсткості:

$$a_1 = \frac{M_{кр}}{Q_y} = \frac{42612}{200000} = 0,2131 \text{ м.}$$

Додатне значення a_1 відкладемо вправо від лінії дії сили Q_y (рис. Д.9.12). Для прив'язки положення центра жорсткості до геометрії перерізу визначимо відстань від носика перерізу до центра жорсткості:

$$x'_{ц.ж} = c + a_1 = 0,4 + 0,2131 = 0,6131 \text{ м,}$$

при додаванні було враховано знак a_1 .

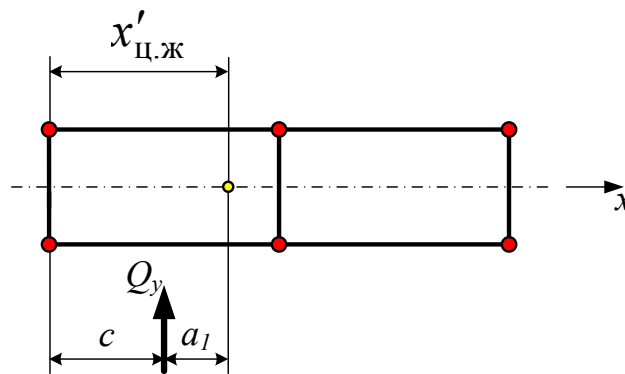


Рис. Д.9.12. Положення центра жорсткості в перерізі

Установимо положення центра жорсткості методом фіктивної сили. Цей метод засновано на тому, що дія поперечної сили не приводить до крутіння ($\theta = 0$), якщо лінія дії цієї сили проходить через центр жорсткості перерізу. Відповідно до цього центр жорсткості визначається як точка, через яку проходить рівнодіюча потоків дотичних сил (згинання без крутіння).

У симетричних перерізах центр жорсткості лежить на осі симетрії, отже, в даному випадку – на осі Ox . Залишається визначити його положення на цій осі. Для цього необхідно дослідити дію сили Q_y . Щоб визначити місце розташування сили Q_y , потрібно обчислити момент відповідних потоків дотичних сил відносно довільної моментної точки і розділити цей момент на величину рівнодійної Q_y .

При використанні методу фіктивної сили до розглядуваного перерізу подумки прикладаємо фіктивну силу, причому передбачаємо, що лінія її дії проходить через центр жорсткості (рис. Д.9.13).

Як фіктивну силу можна застосувати задану силу Q_y , подумки змістивши її до центра жорсткості. Далі розглянемо три стани основної системи.

У вантажному стані виникають потоки q_{pi} , які збігаються зі знайденими раніше.

Зайві невідомі (контурні моменти, які в даному випадку можна позначити через $X''_{1\phi} = M''_{1\phi}$ і $X''_{2\phi} = M''_{2\phi}$) спочатку слід вважати спрямованими за годинниковою стрілкою.

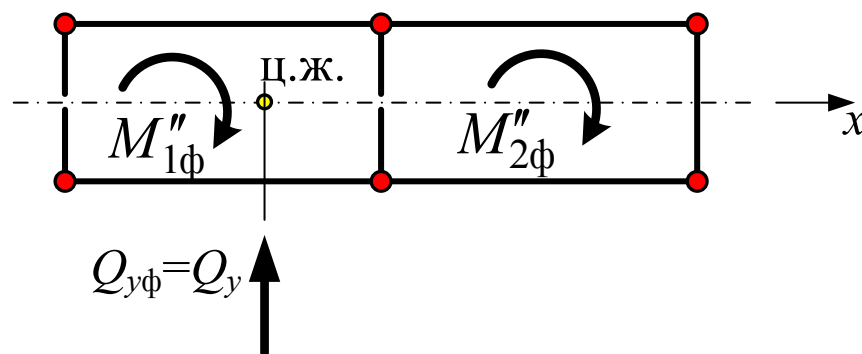


Рис. Д.9.13. Еквівалентна система для пошуку центра жорсткості методом фіктивної сили

Перший і другий одиничні стани, а також коефіцієнти δ_{jk} і Δ_{jP} не відрізняються від знайдених раніше.

Складемо систему рівнянь. Для визначення зайвих невідомих $M''_{1\phi}$ і $M''_{2\phi}$ в даному випадку, коли $\theta = 0$, досить двох рівнянь сумісності деформацій (без умови статички):

$$\begin{cases} \delta_{11}M''_{1\phi} + \delta_{12}M''_{2\phi} + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21}M''_{1\phi} + \delta_{22}M''_{2\phi} + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Зайві невідомі $M''_{1\phi}$ і $M''_{2\phi}$ визначимо розв'язанням цієї системи:

$$\begin{cases} 0,8814 \cdot 10^{-7} M''_{1\phi} - 0,8814 \cdot 10^{-8} M''_{2\phi} - 1,128 \cdot 10^{-2} = 0; \\ -0,8814 \cdot 10^{-8} M''_{1\phi} + 0,8814 \cdot 10^{-7} M''_{2\phi} - 2,082 \cdot 10^{-2} = 0, \end{cases}$$

$$M''_{1\phi} = 1,533 \cdot 10^5 \text{ Нм} \text{ і } M''_{2\phi} = 2,515 \cdot 10^5 \text{ Нм}.$$

Шукані моменти одержимо додатними, а значить, спрямованими за годинниковою стрілкою. Для обчислення моменту, залежного від потоків дотичних сил, як моментну точку виберемо точку T (рис. Д.9.14). Тоді можна скористатися вже знайденим моментом $M_T(q_p)$. Якщо момент спрямовано за годинниковою стрілкою, приписуємо йому знак «+».

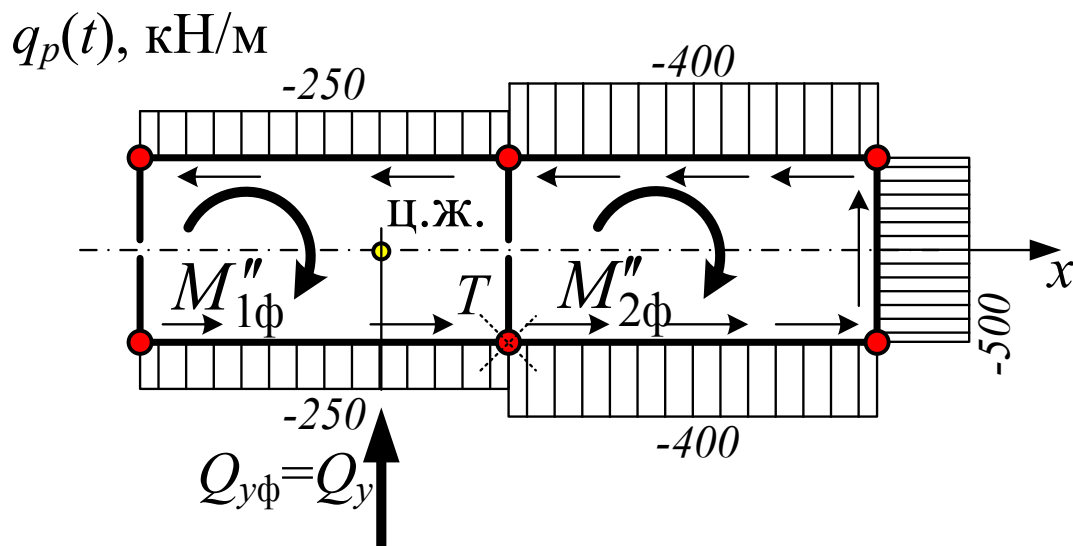


Рис. Д.9.14. Еквівалентна система для пошуку положення центра жорсткості методом фіктивної сили

Сумарний момент, залежний від потоків дотичних сил:

$$M_T(q) = M''_{1\phi} + M''_{2\phi} + M_T(q_p).$$

Раніше визначили, що

$$M_T(q_p) = -\frac{46}{5} Q_y H = -\frac{46}{5} \cdot 200000 \cdot 0,2 = -3,680 \cdot 10^5 \text{ Нм}.$$

Тоді

$$M_T(q) = (1,533 + 2,515 - 3,680) \cdot 10^5 = 0,368 \cdot 10^5 \text{ Нм}.$$

Отримана додатна величина, отже, момент $M_T(q)$ спрямовано за годинниковою стрілкою.

Відстань від моментної точки до лінії дії сили Q_y , що проходить через центр жорсткості, визначимо виразом

$$a_2 = \frac{M_T(q)}{Q_y} = \frac{36800}{200000} = 0,184 \text{ м.}$$

При додатних $M_T(q)$ і Q_y центр жорсткості розташовано зліва від моментної точки (рис. Д.9.15).

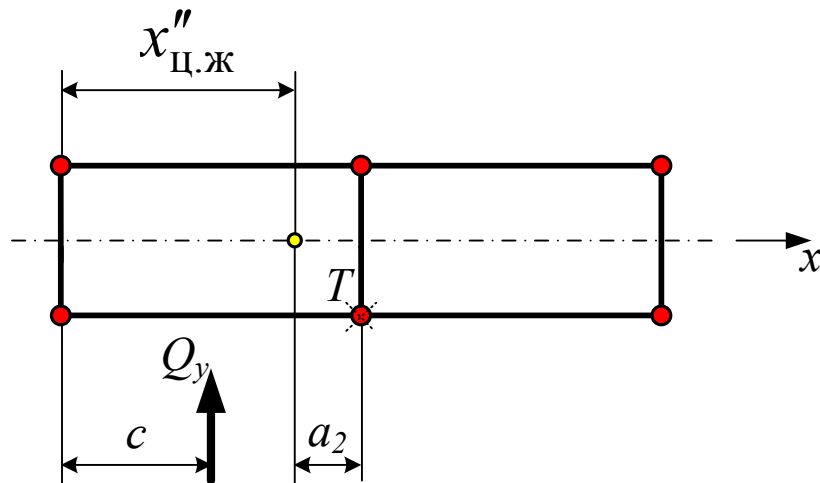


Рис. Д.9.15. Положення центра жорсткості в перерізі

Відстань від носика перерізу до центра жорсткості визначається формулою

$$x''_{\text{ц.ж}} = 4H - a_2 = 4 \cdot 0,2 - 0,184 = 0,616 \text{ м,}$$

де $4H$ – відстань від носика перерізу до моментної точки (стінки середнього лонжерона).

Знайдене положення центра жорсткості має збігатися (з точністю до похибки округлення) з положенням центра жорсткості, отриманим методом фіктивного моменту. Для перевірки обчислень визначимо відносну похибку

$$\left| \frac{x''_{\text{ц.ж}} - x'_{\text{ц.ж}}}{8H} \right| \cdot 100\%,$$

де в знаменнику указано довжину контуру.

Підрахуємо

$$\left| \frac{0,616 - 0,6131}{8 \cdot 0,2} \right| \cdot 100\% = 0,181\%.$$

Ця величина не перевищує 3 %, а значить положення центра жорсткості знайдено правильно (з точністю до 3 % величини хорди перерізу).

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Строительная механика летательных аппаратов: учеб. для авиационных специальностей вузов / И. Ф. Образцов и [др.] – М. : Машиностроение, 1986. – 536 с.

Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни / В. З. Власов. – М. : Физматгиз, 1959. – 574 с.

Макеев, А. И. Строительная механика стержневых элементов авиационных конструкций: учеб. пособие / А. И. Макеев, Б. И. Скопинцев. – Харьков : ХАИ, 1987. – 103 с.

Петров, Ю. П. Основы расчета на нормальные и касательные напряжения тонкостенных стержней открытого профиля / Ю.П. Петров. – Харьков : ХАИ, 1984. – 100 с.

Скопинцев, Б. И. Расчет тонкостенного стержня при изгибе и свободном кручении. Определение положения центра жесткости сечения / Б. И. Скопинцев, П. А. Фомичев. – Харьков. : ХАИ, 1983. – 36 с.

Львов, М. П. Строительная механика авиационных конструкций. В 3 ч. Ч. 2: Расчет тонкостенных стержней / М. П. Львов, А. Г. Дибир. – Харьков : ХАИ, 2011. – 113 с.

Дибир, А. Г. Исследование положения центра жесткости в однозамкнутом прямоугольном сечении тонкостенного стержня / А. Г. Дибир, А. А. Кирпикин, Н. И. Пекельный // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. – Харьков, 2017. – Вып. 76. – С. 135 – 140.

Дибир, А. Г. Исследование положения центра жесткости в однозамкнутом треугольном сечении тонкостенного стержня / А. Г. Дибир, А. А. Кирпикин, Н. И. Пекельный // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. – Харьков, 2018. – Вып. 80. – С. 134 – 138.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. НОРМАЛЬНІ НАПРУЖЕННЯ В ПЕРЕРІЗІ КРИЛА	4
2. ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ ЗСУВУ У ВІДКРИТОМУ ПРОФІЛІ	10
2.1. Балочна теорія зсуву відкритого профілю	10
2.2. Головні осі перерізу	11
2.3. Епюра поточних статичних моментів	16
2.4. Дотичні напруження	22
3. ЦЕНТР ЗГИНАННЯ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ	23
3.1. Дискретизація стінок	23
3.2. Метод фіктивної сили	25
3.3. Процедура обчислень	26
4. ЗСУВ І КРУЧЕННЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФІЛЮ	29
4.1. Вихідні дані.....	29
4.2. Дискретизація і редукція перерізу	29
4.3. Епюра змінної частини потоку дотичних сил	31
4.4. Потік дотичних сил в початковій точці контуру	33
4.5. Сумарні потоки дотичних сил	34
4.6. Дотичні напруження	35
4.7. Центр жорсткості замкнутого профілю	35
5. РОЗРАХУНОК ДВОЗАМКНУТОГО ПРОФІЛЮ	38
5.1. Підготовка вихідних даних	38
5.2. Вибір основної системи	38
5.3. Вантажний стан основної системи	39
5.4. Перший одиничний стан	41
5.5. Другий одиничний стан	42
5.6. Рівняння для отримання розв'язку	43
5.7. Обчислення зайвих невідомих	44
5.8. Відносний кут закручування перерізу	46
5.9. Сумарні потоки дотичних сил	46
5.10. Оцінювання міцності стінок і обшивок	48
5.11. Визначення центра жорсткості (метод фіктивного моменту)	49
5.12. Визначення центра жорсткості (метод фіктивної сили)	51
Додаток 1. Варіанти вихідних даних до задачі «Дослідження нормальних згинальних напружень в дискретному неоднорідному перерізі крила»	54
Додаток 2. Варіанти вихідних даних до задачі «Дотичні напруження у відкритому профілі»	59

Додаток 3. Приклади розв'язання задач за темою «Дотичні напруження у відкритому профілі»	67
Додаток 4. Варіанти вихідних даних до задачі «Центр згинання відкритого профілю»	106
Додаток 5. Приклади розв'язання задач за темою «Центр згинання відкритого профілю»	115
Додаток 6. Варіанти вихідних даних до задачі «Зсув і кручення замкнутого профілю»	151
Додаток 7. Приклади розв'язання задач за темою «Зсув і кручення замкнутого профілю»	154
Додаток 8. Варіанти вихідних даних до задачі «Розрахунок двозамкнутого контуру на зсув і кручення»	258
Додаток 9. Приклад розв'язання задачі за темою «Розрахунок двозамкнутого контуру на зсув і кручення»	261
Бібліографічний список	277

Навчальне видання

Дібір Олександр Геннадійович

**БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА
АВІАЦІЙНИХ КОНСТРУКЦІЙ**

Частина 2

Розрахунок тонкостінних стрижнів

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2020

Підписано до друку 19.10.2020

Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 15,6. Обл.-вид. арк. 17,5. Наклад 100 пр.

Замовлення 218. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001