

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК 539.3 /.6 (075.8)

P65

Авторський колектив:

М. М. Гребенніков, О. Г. Дібір, М. І. Пекельний, А. О. Кірпикін

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Б. В. Лупкін,
д-р техн. наук, проф. О. В. Мамлюк

Розрахунок статично невизначених рам [Текст] : навч. посіб. /
P65 М. М. Гребенніков, О. Г. Дібір, М. І. Пекельний, А. О. Кірпикін. – Харків :
Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. – 48 с.

ISBN 978-966-662-721-9

Викладено методику розкриття статичної невизначеності конструктивних елементів типу рама методом сил. Наведено таблиці довідкових даних, приклади розв'язання задач і рекомендації до виконання домашнього завдання з даної теми з урахуванням кінематичної перевірки одержаного розв'язку.

Для студентів, які вивчають курси «Опір матеріалів» і «Механіка матеріалів і конструкцій», при самостійній роботі.

Іл. 48. Табл. 8. Бібліогр.: 8 назв

УДК 539.3 /.6 (075.8)

© Авторський колектив, 2020

© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2020

ISBN 978-966-662-721-9

1. СТРИЖНЕВІ СИСТЕМИ

Стрижневою системою є така конструкція, що складається з елементів, що мають форму бруса.

Стрижнева система, всі елементи якої (стрижні) з'єднані у вузлах шарнірно і, як наслідок, працюють на розтяг або стиск, називається **фермою**.

Стрижнева система, всі елементи якої (стрижні) з'єднані у вузлах жорстко і, як наслідок, працюють в основному на вигин і кручення, називається **рамою**.

Надалі будемо розглядати тільки плоскі рами, навантажені в їх площині. В цьому випадку в стрижнях рами виникають поздовжні і поперечні сили і згинальні моменти.

Стрижнева система називається **статично невизначеною**, якщо реакції зовнішніх зв'язків і (або) внутрішні силові фактори в поперечних перерізах елементів системи не можуть бути визначені тільки за допомогою рівнянь статичної рівноваги.

2. ЗВ'ЯЗКИ ЗОВНІШНІ ТА ВНУТРІШНІ

Зв'язки зовнішні (абсолютні) – це зв'язки, що виключають абсолютне переміщення (лінійне або кутове) деякого перерізу, яке в цьому випадку називається опорним перерізом.

Зв'язки внутрішні (взаємні) – це зв'язки, що виключають відносні переміщення (кутове і лінійне) поруч розташованих перерізів.

При всій різноманітності конструктивного оформлення опори, що використовуються в плоских стрижневих системах, є трьох видів:

1. Шарнірно-рухомі (рис. 1)

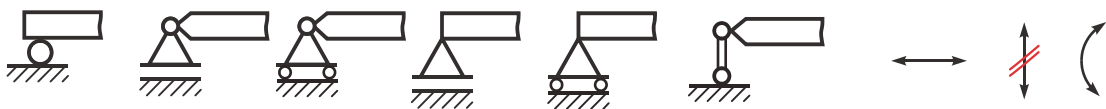


Рис. 1

Цей вид опор позбавляє опорний переріз одного ступеня рухливості, виключаючи тільки лінійне переміщення його в напрямку, перпендикулярному площині кочення. Це визначає напрямок реакції такої опори, лінія дії якої завжди перпендикулярна площині кочення.

2. Шарнірно-нерухомі (рис. 2)

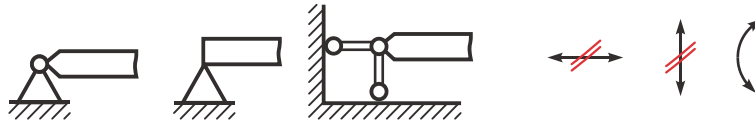


Рис. 2

Цей вид опор виключає лінійне переміщення опорного перерізу. Реакція цієї опори може мати довільний напрямок. Зазвичай при розрахунку визначають вертикальну і горизонтальну складові цієї реакції.

3. Жорстке защемлення (закладення) (рис. 3)

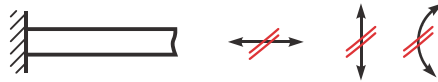


Рис. 3

Цей вид опор виключає як лінійне, так і кутове переміщення опорного перерізу. Отже, в загальному випадку визначають як опорну реакцію у вигляді двох її складових, так і реактивний момент.

Примітка. Переміщення, що вказані перекресленими стрілками, обмежені в перерізі через наявність опори даного типу.

3. ЗВ'ЯЗКИ НЕОБХІДНІ ТА ДОДАТКОВІ

Необхідним числом зв'язків називають їх мінімальну кількість, що забезпечує кінематичну незмінюваність конструкції. Необхідне число зв'язків завжди дорівнює кількості незалежних рівнянь рівноваги (в загальному випадку), які можна скласти для опису системи зусиль, що діють на конструкцію. Це число змінюється від 1 до 6. Для плоскої довільної системи сил кількість незалежних рівнянь статичної рівноваги дорівнює трьом:

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0; \quad \sum M_A = 0.$$

Додатковими (зайвими) називають зв'язки, накладені на конструкцію понад необхідного числа.

4. СТУПІНЬ СТАТИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ КОНСТРУКЦІЇ (РАМИ)

Якщо на конструкцію (раму) накладено додаткові (зайві) зовнішні зв'язки, то вона називається *статично невизначеною зовнішньо*.

Якщо на конструкцію (раму) накладено додаткові внутрішні зв'язки, то вона називається *статично невизначеною внутрішньо*.

У деяких конструкціях є зайвими як зовнішні, так і внутрішні зв'язки, що характерні для змішаної статичної невизначеності.

Розглянемо тільки рами, статично невизначені зовнішньо. Ступінь їх статичної невизначеності описується співвідношенням

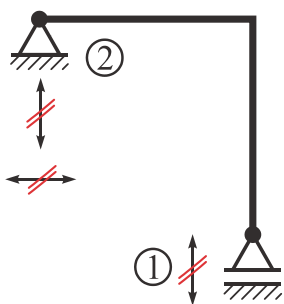
$$k = m - n, \quad (1)$$

де k – ступінь статичної невизначеності рами;

m – загальне число зовнішніх зв'язків, накладених на раму;

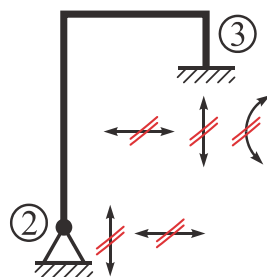
n – число необхідних зв'язків (кількість незалежних рівнянь статичної рівноваги).

Розглянемо приклади, показані на рис. 4.



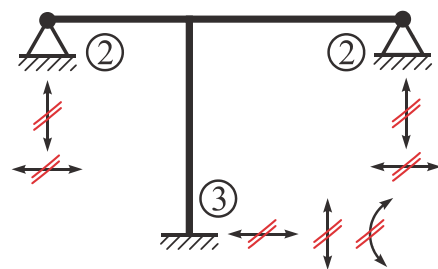
$$\begin{aligned} m &= 3; \\ n &= 3; \\ k &= m - n = 0; \end{aligned}$$

рама статично визначена



$$\begin{aligned} m &= 5; \\ n &= 3; \\ k &= m - n = 2; \end{aligned}$$

рама двічі статично невизначена



$$\begin{aligned} m &= 7; \\ n &= 3; \\ k &= m - n = 4; \end{aligned}$$

рама чотири рази статично невизначена

Рис. 4

5. ПОРЯДОК РОЗКРИТТЯ СТАТИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДОМ СИЛ

Для визначення зусиль у статично невизначених системах додатково до рівнянь статички складають рівняння спільності деформацій, оскільки додаткові (зайві) зв'язки накладають певні обмеження на переміщення тих перерізів, до яких вони прикладені.

Етапи розрахунку статично невизначеної системи:

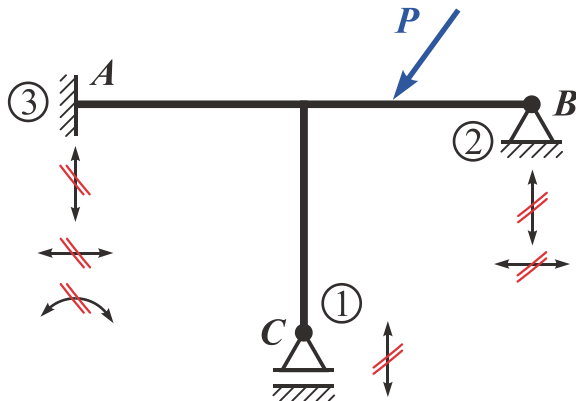


Рис. 5

1. Установимо ступінь статичної невизначеності конструкції (рис. 5):

$$m = 6;$$

$$n = 3;$$

$$k = m - n = 6 - 3;$$

конструкція тричі статично невизначена.

2. Виберемо основну систему.

Система, отримана з вихідної системи шляхом видалення всіх зовнішніх навантажень і додаткових (зайвих) зв'язків, називається **основною системою (ОС)**.

Відкинемо всі зовнішні навантаження і додаткові зв'язки, число яких завжди дорівнює ступеню статичної невизначеності. Основна система має бути статично визначеною і кінематично незмінною (не є рухомою як ціле). Можливі варіанти основних систем конструкції, зображеної на рис. 5, показані на рис. 6.

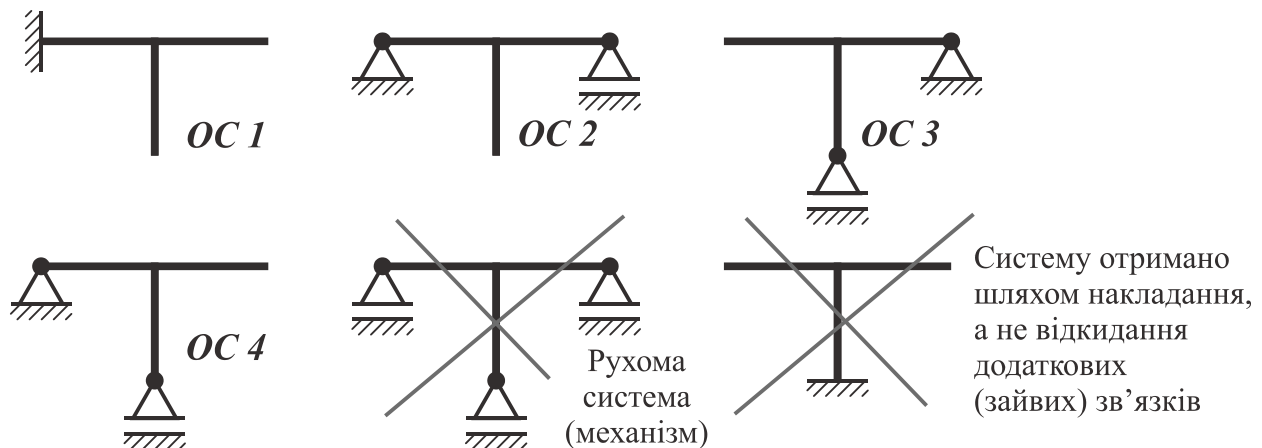


Рис. 6

Зауваження. Як зайві зв'язки не можна сприймати елементи, реакції яких можуть бути визначені безпосередньо з рівнянь рівноваги.

3. Побудуємо еквівалентну систему.

Система, що отримана з вибраної основної системи шляхом прикладання всіх зовнішніх навантажень і реакцій відкинутих зв'язків, називається **еквівалентною системою (ЕС)**.

У вибраній базовій системі замінимо дію відкинутих додаткових зв'язків їх реакціями, які позначимо $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$, і прикладемо всі зовнішні навантаження. Наприклад, використавши ОС 4 (див. рис. 6), отримаємо еквівалентну систему, зображену на рис. 7.

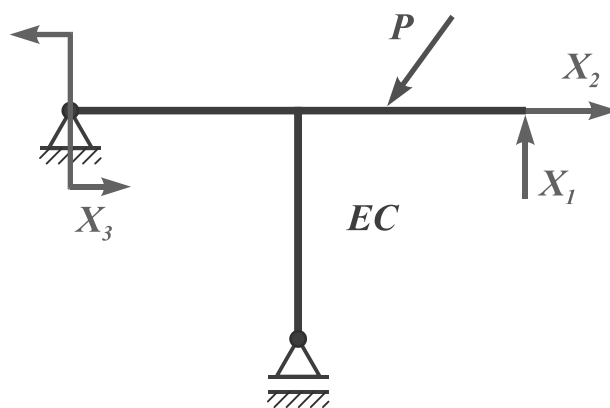


Рис. 7

4. Отримана в пункті 3 система буде дійсно еквівалентною вихідній при таких значеннях $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$, при яких деформації еквівалентної і вихідної систем були б однаковими. Це означає, що мають бути виконані вимоги щодо обмеження переміщень перерізів, в яких встановлені відкинуті додаткові зовнішні зв'язки.

Складемо рівняння з умови, що переміщення перерізів, в яких було відкинуто зв'язки у відповідних напрямках, мають дорівнювати нулю. Кількість цих рівнянь завжди дорівнює числу відкинутих додаткових зв'язків, тобто числу шуканих реакцій цих зв'язків, отже, систему рівнянь можна **розв'язати завжди**. Згідно із законом Гука всі ці рівняння є лінійними відносно $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$.

Розв'язавши отриману систему рівнянь, визначимо $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$.

Розкриття статичної невизначеності рами завершено.

5. Розглянемо статично визначену раму, навантажену системою зовнішніх зусиль, до яких введено і реакції відкинутих додаткових зв'язків $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$.

6. ВИВЕДЕННЯ КАНОНІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДУ СИЛ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ НЕВІДОМИХ РЕАКЦІЙ ЗОВНІШНІХ ЗВ'ЯЗКІВ

Додаткові рівняння (див. п. 4 розд. 5), що описують рівність нулю переміщень у напрямку зайвих невідомих, зручно складати в так званій канонічній формі, тобто використовуючи певну закономірність.

Розглянемо приклад (рис. 8):

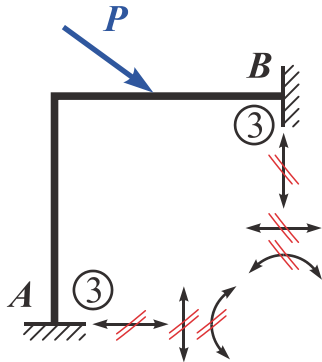


Рис. 8

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності системи за формулою (1):

$$m = 6;$$

$$n = 3;$$

$$k = m - n = 6 - 3 = 3.$$

2. Виберемо перший варіант (ОС 1) з можливих варіантів основних систем, показаних на рис. 9.

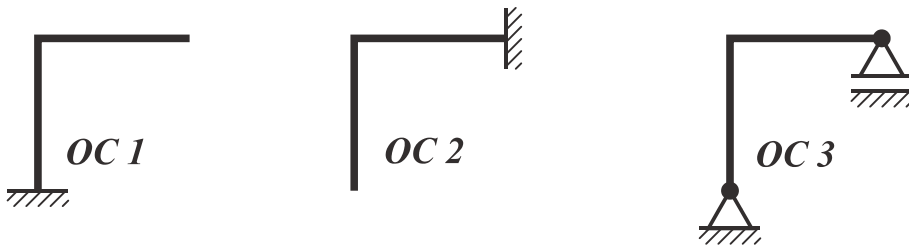


Рис. 9

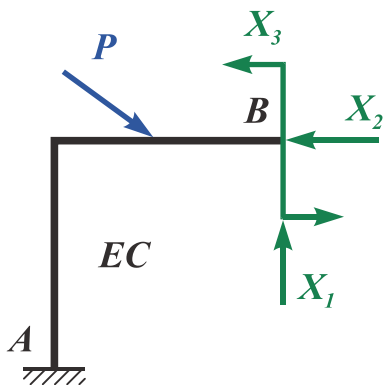


Рис. 10

3. Побудуємо еквівалентну систему, відповідну вибраній основній системі (рис. 10).

4. Реакції відкинутих зв'язків X_1, X_2, X_3 мають бути такими, щоб горизонтальне, вертикальне і кутове переміщення перерізу B еквівалентної системи дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \Delta_1 = f_B^{6epm}(X_1, X_2, X_3) + f_B^{6epm}(P) = 0; \\ \Delta_2 = f_B^{2op}(X_1, X_2, X_3) + f_B^{2op}(P) = 0; \\ \Delta_3 = \theta_B(X_1, X_2, X_3) + \theta_B(P) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Деформований стан системи показано на рис. 11.

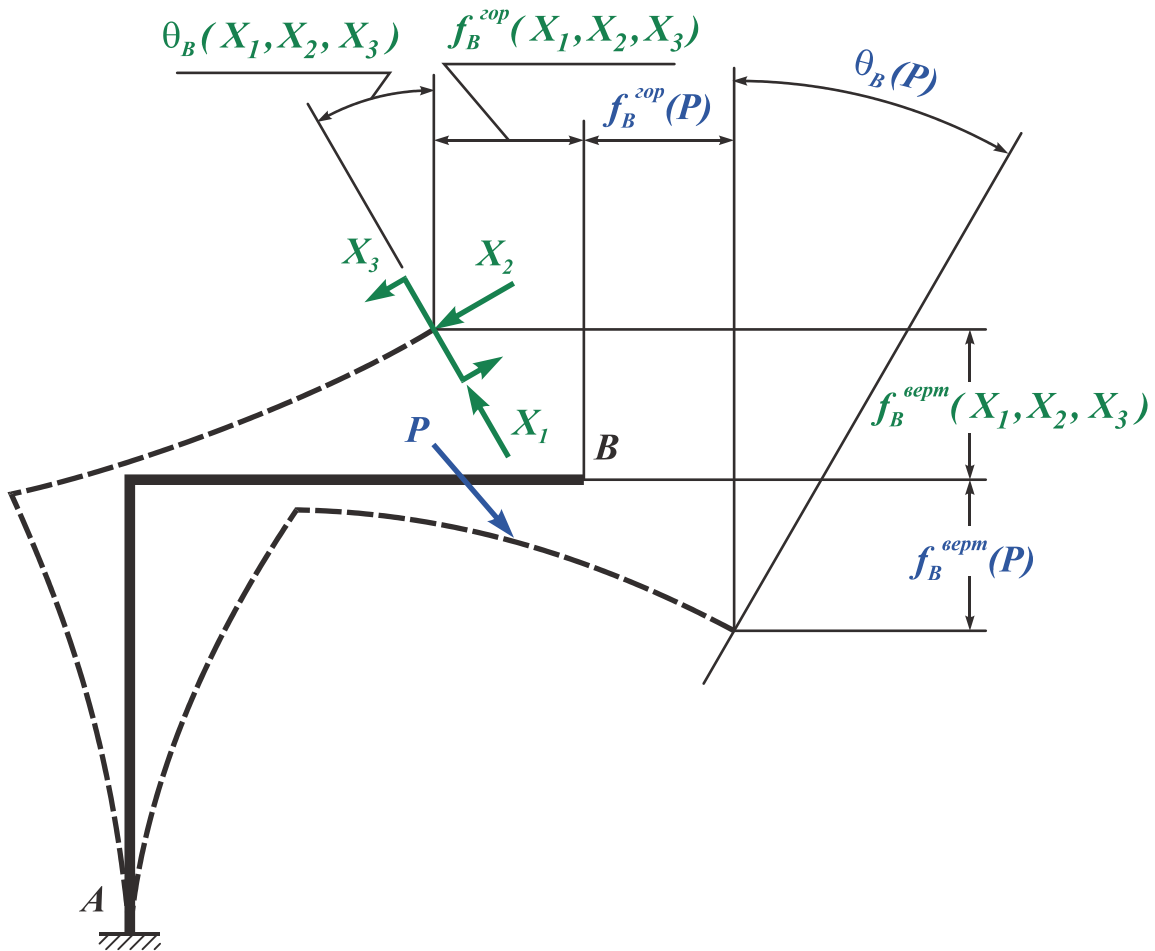


Рис. 11

Перепишемо систему (2), використавши принцип суперпозиції (принцип незалежності дії сил), і наведемо в ній переміщення, створювані кожним з доданків – X_1, X_2, X_3, P :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{1P} = 0; \\ \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{2P} = 0; \\ \Delta_3 = \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} + \Delta_{3P} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

Для визначення переміщень будуть епюри згинальних моментів в основній системі окремо від заданого навантаження (P -система, вантажна система) і від кожної одиничної сили $\bar{X}_1 = 1$ (система 1), $\bar{X}_2 = 1$ (система 2), ..., $\bar{X}_k = 1$ (система k). Ординати відповідних епюр позначимо $M_{y(P)}$, $\bar{M}_{y(1)}$, $\bar{M}_{y(2)}$, ..., $\bar{M}_{y(k)}$. Тоді на основі методу Мора знайдемо:

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{y(P)}^i \bar{M}_{y(1)}^i}{EI_y} dx; \quad \Delta_{2P} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{y(P)}^i \bar{M}_{y(2)}^i}{EI_y} dx; \quad \dots \quad ;$$

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{y(P)}^i \bar{M}_{y(k)}^i}{EI_y} dx;$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_{y(1)}^i \bar{M}_{y(1)}^i}{EI_y} dx; \quad \delta_{22} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_{y(2)}^i \bar{M}_{y(2)}^i}{EI_y} dx; \quad \dots \quad ;$$

$$\delta_{kk} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_{y(k)}^i \bar{M}_{y(k)}^i}{EI_y} dx;$$

$$\delta_{12} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_{y(1)}^i \bar{M}_{y(2)}^i}{EI_y} dx; \quad \delta_{13} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_{y(1)}^i \bar{M}_{y(3)}^i}{EI_y} dx; \quad \dots \quad ;$$

$$\delta_{ik} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_{y(i)}^i \bar{M}_{y(k)}^i}{EI_y} dx.$$

2. На основі теореми про взаємність переміщень

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (7)$$

3. Завжди

$$\delta_{ik} > 0, \quad \text{якщо } i = k. \quad (8)$$

4. Якщо в результаті розв'язання системи (5) отримаємо $X_k < 0$, це означає, що вибраний на еквівалентній системі напрямок реакції X_k необхідно змінити на протилежний.

7. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1

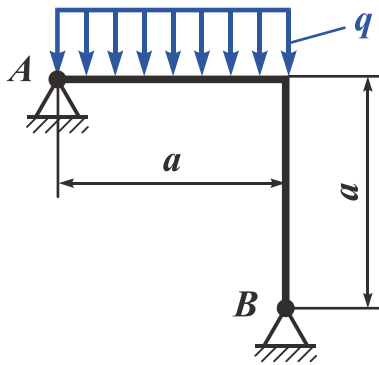


Рис. 12

Дано: $q, a, EI_y = \text{const.}$

Необхідно: розкрити статичну невизначеність конструкції (рис. 12); побудувати епюри внутрішніх силових факторів N_x, Q_z, M_y .

Розв'язання

1. Установимо ступінь статичної невизначеності конструкції:

$$k = m - n = 4 - 3 = 1,$$

тобто конструкція є один раз статично невизначеною (один зайвий зв'язок).

2. Виберемо основну систему (рис. 13).

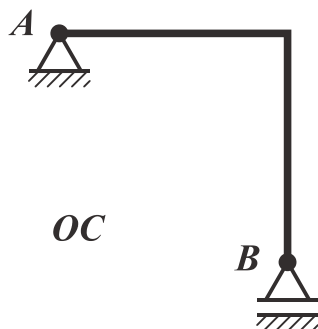


Рис. 13

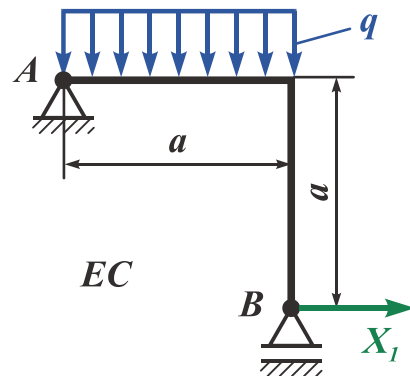


Рис. 14

4. Запишемо канонічне рівняння методу сил:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

де $\delta_{11}X_1$ – переміщення перерізу B під дією сили X_1 ;

δ_{11} – переміщення перерізу B в напрямку X_1 під дією одиничної за величиною сили $\bar{X}_1 = 1$, яка додається в тій же точці і в тому ж напрямку, що і X_1 ;

Δ_{1P} – переміщення перерізу B в напрямку X_1 під дією зовнішніх сил.

Сенс канонічного рівняння: величина і напрямок сили X_1 мають бути підібрані так, щоб горизонтальне переміщення перерізу B дорівнювало б нулю.

5. Визначимо коефіцієнт δ_{11} і вільний член Δ_{1P} канонічного рівняння:

а) побудуємо дві допоміжні системи: вантажну (P -систему) (рис. 15) і одиничну I , відповідну розв'язуваній задачі (рис. 16). Всі допоміжні системи розіб'ємо на ділянки ідентично. Вісь z спрямована в усіх системах всередину рами;

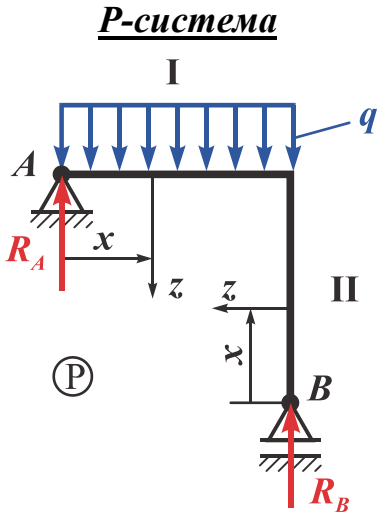


Рис. 15

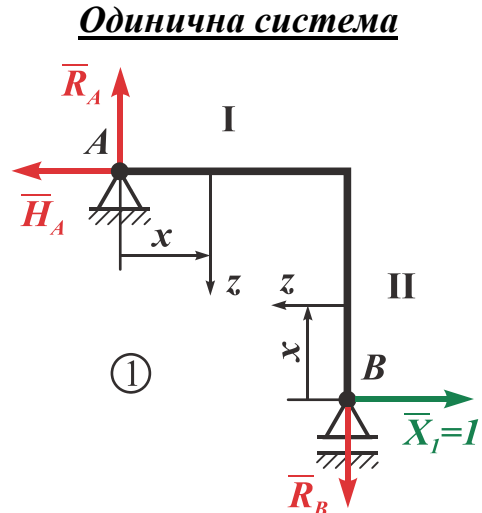


Рис. 16

б) знайдемо опорні реакції P -системи:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad R_B a - \frac{qa^2}{2} = 0; & \quad R_B = \frac{qa}{2}; \\ \sum M_B = 0; & \quad -R_A a + \frac{qa^2}{2} = 0; & \quad R_A = \frac{qa}{2}; \end{aligned}$$

в) знайдемо опорні реакції одиничної системи:

$$\begin{aligned} \sum P_{ix} = 0; & \quad -\bar{H}_A + \bar{X}_1 = 0; & \quad \bar{H}_A = \bar{X}_1 = 1; \\ \sum M_A = 0; & \quad \bar{X}_1 a - \bar{R}_B a = 0; & \quad \bar{R}_B = \bar{X}_1 = 1; \\ \sum M_B = 0; & \quad \bar{H}_A a - \bar{R}_A a = 0; & \quad \bar{R}_A = 1; \end{aligned}$$

г) рівняння внутрішніх силових факторів зведемо в табл. 1;

Таблиця 1

Згинальний момент	Номер ділянки	
	I $0 \leq x \leq a$	II $0 \leq x \leq a$
$M_{y(P)}$	$\frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2}$	0
$\bar{M}_{y(1)}$	$1 \cdot x$	$1 \cdot x$

д) побудуємо епюри згинальних моментів основної і одиничної систем (рис. 17).

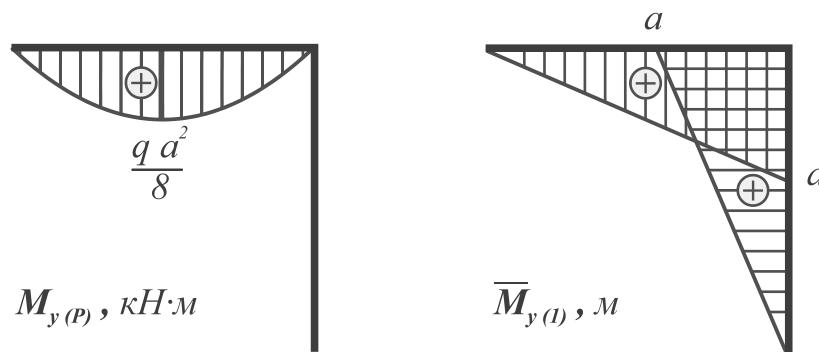


Рис. 17

е) обчислимо коефіцієнти канонічного рівняння.

Величину Δ_{1P} визначимо методом Мора:

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_{y(P)}^i \bar{M}_{y(1)}^i}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^a \left(\frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx + 0 = \frac{qa^4}{24EI_y}.$$

Величину δ_{11} раціонально визначати за допомогою формули Верещагіна:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_y} 2 \left(\frac{a^2}{2} \frac{2}{3} a \right) = \frac{2a^3}{3EI_y}.$$

6. Підставимо значення Δ_{1P} і δ_{11} в канонічне рівняння і розв'яжемо його:

$$\frac{2a^3}{3EI_y} X_1 + \frac{qa^4}{24EI_y} = 0; \quad X_1 = -\frac{qa}{16}.$$

Знак "-" свідчить про те, що дійсний напрям X_1 є протилежним вибраному на еквівалентній системі. На цьому розкриття статичної невизначеності конструкції закінчено.

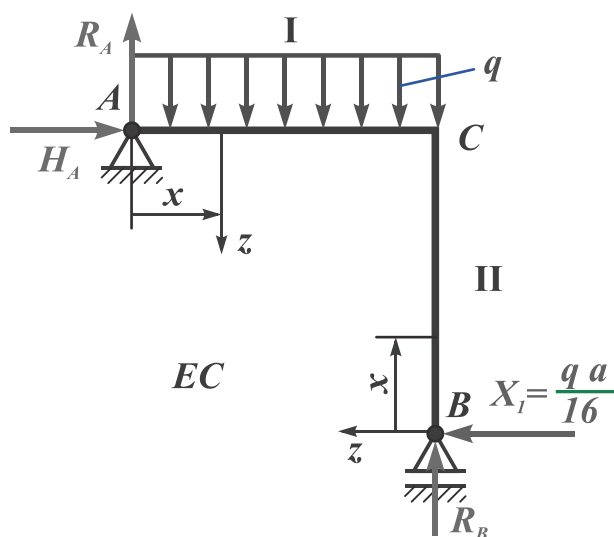


Рис. 18

7. Побудуємо епюри внутрішніх силових факторів для еквівалентної системи при знайденому значенні X_1 (рис. 18).

Реакції в опорах:

$$\begin{aligned} \sum P_{ix} = 0; & \quad \bar{H}_A - X_1 = 0; & \quad \bar{H}_A = X_1 = \frac{qa}{16}; \\ \sum M_A = 0; & \quad -\frac{qa^2}{2} + R_B a - \frac{qa^2}{16} = 0; & \quad R_B = \frac{9}{16} qa; \\ \sum M_B = 0; & \quad \frac{qa^2}{2} + R_A a - \bar{H}_A a = 0; & \quad R_A = \frac{7}{16} qa. \end{aligned}$$

Рівняння поздовжніх сил N_x :

$$N_x^I = -H_A = -\frac{qa}{16}; \quad N_x^{II} = -R_B = -\frac{9}{16} qa.$$

Рівняння поперечних сил Q_z :

$$Q_z^I = R_A - qx \quad \left|_{x=0} = \frac{7}{16} qa \quad \left|_{x=a} = -\frac{9}{16} qa;$$

$$Q_z^I = 0 = R_A - qx_e; \quad x_e = \frac{R_A}{q} = \frac{7}{16} a;$$

$$Q_z^{II} = X_1 = \frac{qa}{16}.$$

Рівняння згинальних моментів M_y :

$$M_y^I = R_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{7}{16} qax - \frac{qx^2}{2} \quad \left|_{x=0} = 0 \quad \left|_{x=a} = \frac{7}{16} qa^2 - \frac{qa^2}{2} = -\frac{qa^2}{16}$$

$$\left|_{x=x_e=\frac{7}{16}a} = \frac{7}{16} qa \frac{7}{16} a - \frac{q}{2} \left(\frac{7}{16}\right)^2 a^2 = \frac{49}{512} qa^2;$$

$$M_y^{II} = -X_1 x = -\frac{qa}{16} x \quad \left|_{x=0} = 0 \quad \left|_{x=a} = -\frac{qa^2}{16}.$$

Епюри мають вигляд, показаний на рис. 19.

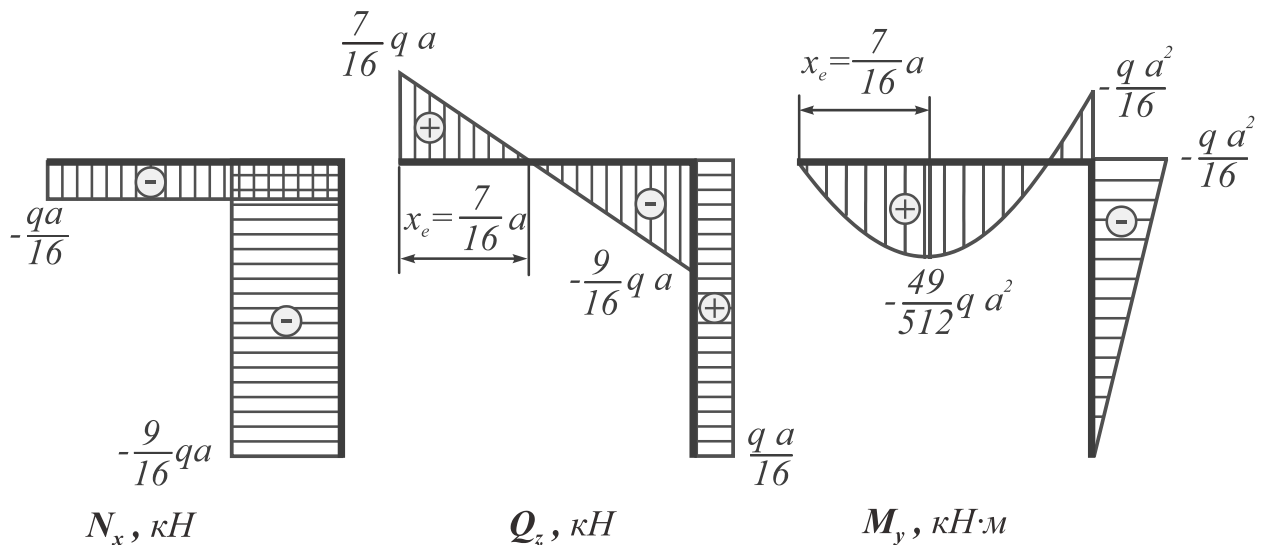


Рис. 19

8. Перевіримо правильність одержаного розв'язку:

а) рівновагу у вузлі C (рис. 20);

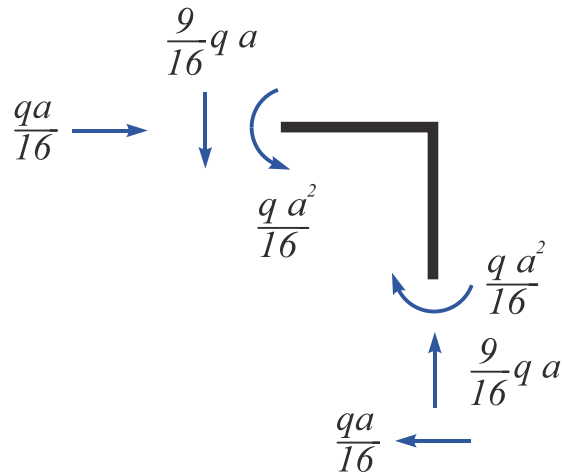


Рис. 20

б) рівність нулю горизонтального переміщення в опорі A , де воно за умовою завдання дорівнює нулю.

Для цього виберемо *нову основну систему* (рис. 21).

Зауваження. Нову основну систему необхідно вибирати так, щоб серед відкинутих зайвих зв'язків обов'язково був звільнений зв'язок на шукане переміщення.

Новій основній системі відповідає нова еквівалентна система (рис. 22).

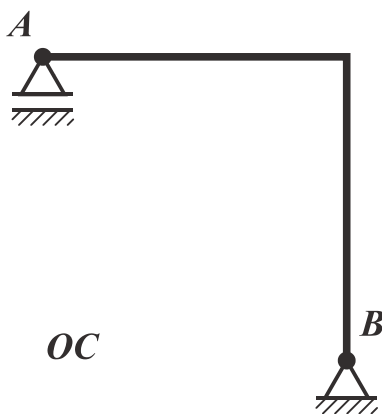


Рис. 21

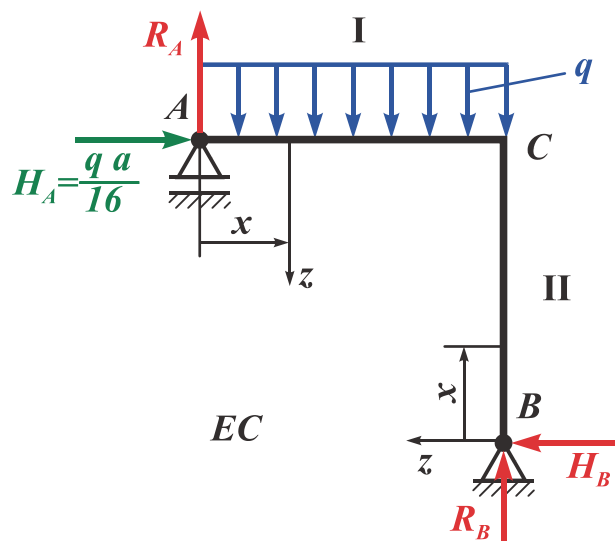


Рис. 22

Очевидно, що нову еквівалентну систему описують рівняння внутрішніх силових факторів, отримані в п. 6, тобто від вибору основної системи не залежить вигляд кінцевих епюр N_x , Q_z , M_y .

Для визначення горизонтального переміщення в опорі A нової еквівалентної системи необхідно за методом Мора подати її як P -систему, а як одиничну розглянути таку (рис. 23):

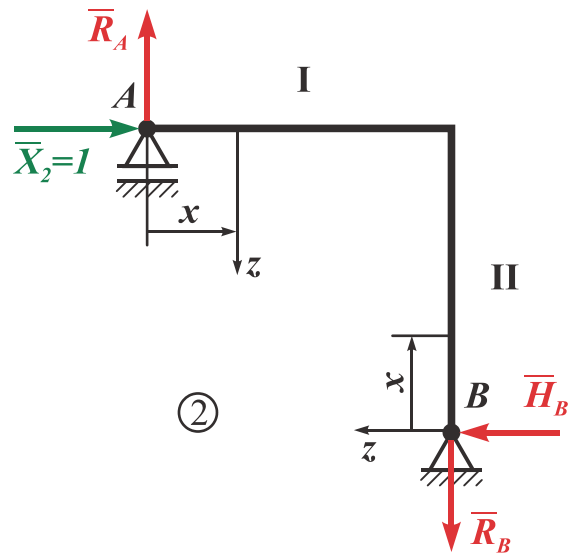


Рис. 23

$$\begin{aligned} \sum P_{ix} &= 0; & -\bar{X}_2 + \bar{H}_B &= 0; & \bar{H}_A = \bar{X}_2 &= 1; \\ \sum M_A &= 0; & \bar{H}_B a - \bar{R}_B a &= 0; & \bar{R}_B &= 1; \\ \sum M_B &= 0; & \bar{X}_2 a - \bar{R}_A a &= 0; & \bar{R}_A &= 1; \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{y(2)}^I = \bar{R}_A x = x; \quad \bar{M}_{y(2)}^{II} = \bar{H}_B x = x.$$

Шукане переміщення визначимо за методом Мора:

$$\begin{aligned} \delta_A^{zop} &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^a M_{y(P)}^I \bar{M}_{y(2)}^I dx + \int_0^a M_{y(P)}^{II} \bar{M}_{y(2)}^{II} dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^a \left(\frac{7}{16} qax - \frac{qx^2}{2} \right) x dx + \int_0^a \left(-\frac{qa}{16} x \right) x dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\frac{7}{16} qa \frac{x^3}{3} \Big|_0^a - \frac{q}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^a - \frac{qa}{16} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[qa^4 \left(\frac{7}{16 \cdot 3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16 \cdot 3} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

тобто завдання виконано правильно.

Приклад 2

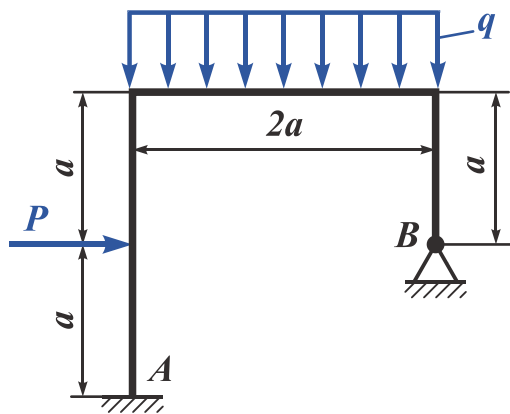


Рис. 24

Дано: $a = 1 \text{ м}$; $P = 40 \text{ кН}$;
 $q = 20 \text{ кН/м}$; $EI_y = \text{const}$;
 $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $K_T = 1,6$.

Необхідно: розкрити статичну невизначеність конструкції (рис. 24); побудувати епюри внутрішніх силових факторів N_x , Q_z , M_y ; підібрати двотавровий переріз.

Розв'язання

1. Установимо ступінь статичної невизначеності конструкції

$$k = m - n = 5 - 3 = 2,$$

тобто конструкція є двічі статично невизначеною (два зайвих зв'язки).

2. Відкинемо різними способами два зайвих зовнішніх зв'язки. Варіанти основних систем показано на рис. 25. Для подальшого розв'язання виберемо варіант основної системи *ОС 1*.

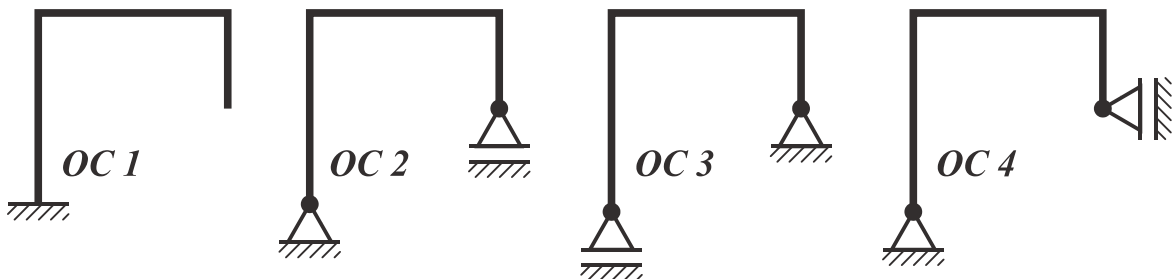


Рис. 25

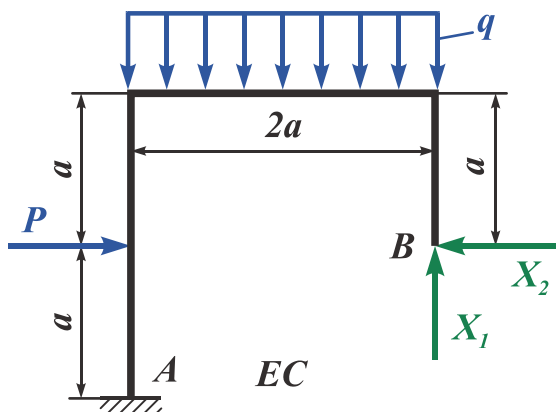


Рис. 26

3. Побудуємо еквівалентну систему, відповідну вибраній основній системі (рис. 26).

4. Запишемо систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

5. Визначимо коефіцієнти системи рівнянь.

Для цього розглянемо три допоміжні системи: P -систему (дія тільки заданих навантажень) і одиничні системи 1 і 2 (відповідно дія тільки одиничних сил $\bar{X}_1 = 1$ і $\bar{X}_2 = 1$) (рис. 27).

Усі допоміжні системи розіб'ємо на ділянки однаково. Вісь z спрямована в усіх системах всередину рами.

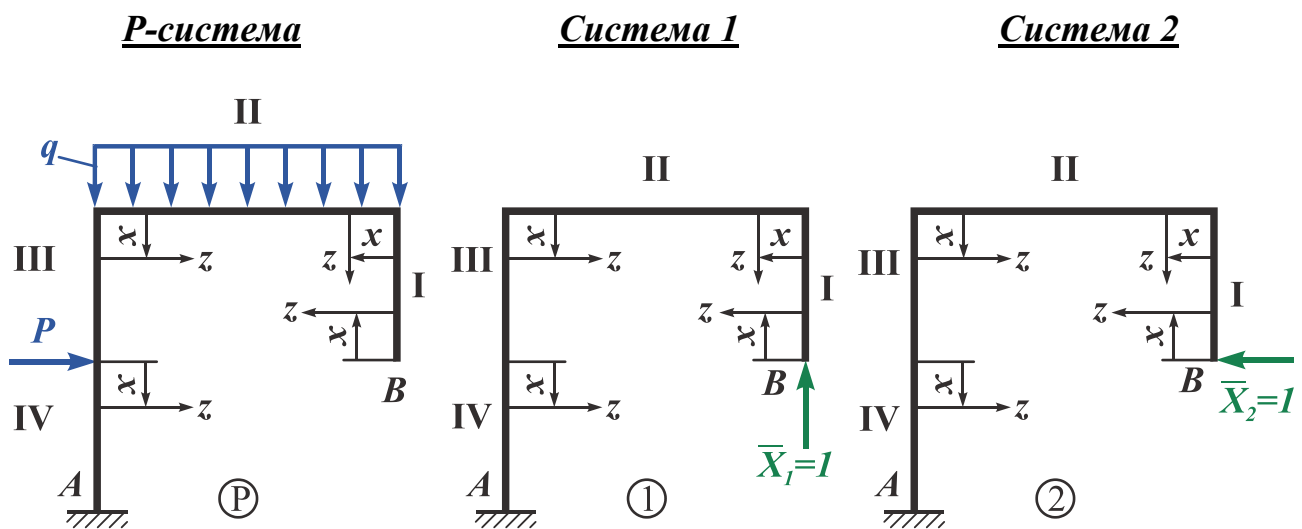


Рис. 27

Запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках у кожній допоміжній системі, використавши однаковий порядок обходу і нумерацію ділянок. Рівняння наведемо в табл. 2.

Таблиця 2

Згиналь- ний момент	Номер ділянки			
	I $0 \leq x \leq a$	II $0 \leq x \leq 2a$	III $0 \leq x \leq a$	IV $0 \leq x \leq a$
$M_{y(P)}$	0	$-\frac{qx^2}{2} = -10x^2$	$-2qa^2 = -40$	$-2qa^2 - Px =$ $= -40 - 40x$
$\bar{M}_{y(1)}$	0	$\bar{X}_1 x = x$	$\bar{X}_1 \cdot 2 = 2$	$\bar{X}_1 \cdot 2 = 2$
$\bar{M}_{y(2)}$	$-\bar{X}_2 x = -x$	$-\bar{X}_2 a = -1$	$-\bar{X}_2 (a - x) = x - 1$	$\bar{X}_2 x = x$

На основі наведених рівнянь побудуємо епюри $M_{y(P)}$, $\bar{M}_{y(1)}$ і $\bar{M}_{y(2)}$ (рис. 28).

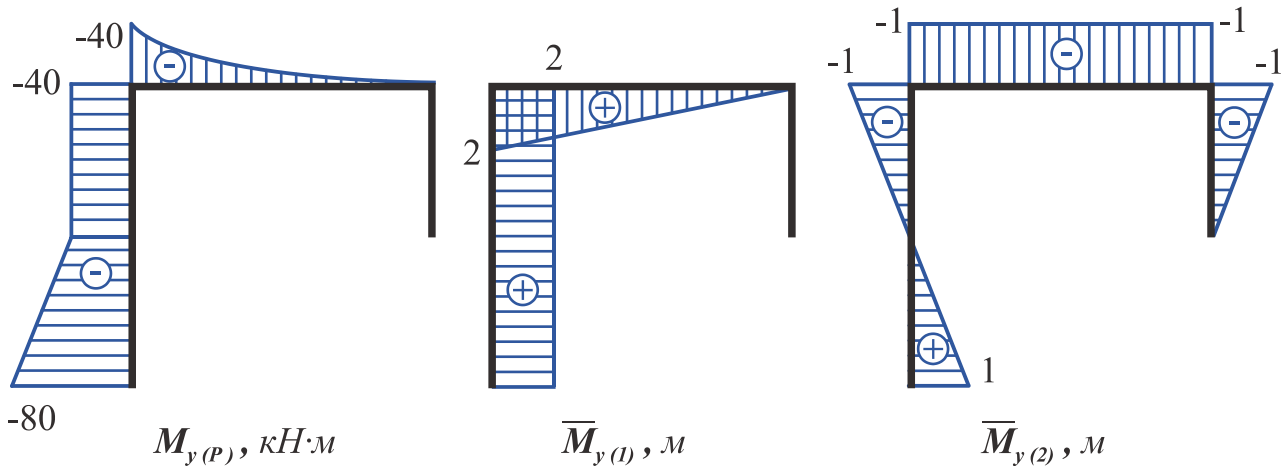


Рис. 28

Обчислимо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, використавши там, де це зручно, спосіб Верещагіна для розрахування інтегралів Мора ($\int M_y \bar{M}_y dx = \omega_i y_i$):

$$EI_y \Delta_{1P} = - \int_0^2 10x^2 x dx - 40 \cdot 1 \cdot 2 - \frac{40 + 80}{2} \cdot 1 \cdot 2 = -40 - 80 - 120 = -240;$$

$$EI_y \Delta_{2P} = \int_0^2 10x^2 \cdot 1 \cdot x dx + 40 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 40 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{40 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{40}{3};$$

$$EI_y \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 1) = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3};$$

$$EI_y \delta_{22} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \text{ (три однакових трикутники);}$$

$$EI_y \delta_{12} = EI_y \delta_{21} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -2.$$

6. Вирішимо систему канонічних рівнянь.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = -\Delta_{1P}; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = -\Delta_{2P}. \end{cases}$$

Підставивши значення коефіцієнтів і перетворивши рівняння, отримаємо систему

$$\begin{cases} 16X_1 - 3X_2 = 360; \\ -6X_1 + 9X_2 = -40. \end{cases}$$

Для її вирішення використаємо матричний метод:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 16 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 126;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 360 & -3 \\ -40 & 9 \end{vmatrix} = 360 \cdot 9 - 3 \cdot 40 = 3120;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 16 & 360 \\ -6 & -40 \end{vmatrix} = -16 \cdot 40 + 360 \cdot 6 = 1520;$$

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3120}{126} = 24,762 \text{ кН}; \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1520}{126} = 12,063 \text{ кН}.$$

На цьому розкриття статичної невизначеності конструкції закінчено.

7. Побудуємо епюри внутрішніх силових факторів N_x , Q_z і M_y для еквівалентної системи (рис. 29) при знайдених значеннях X_1 і X_2 .

Запишемо рівняння для визначення N_x , Q_z і M_y по ділянках, на їх основі побудуємо епюри внутрішніх силових факторів (рис. 30).

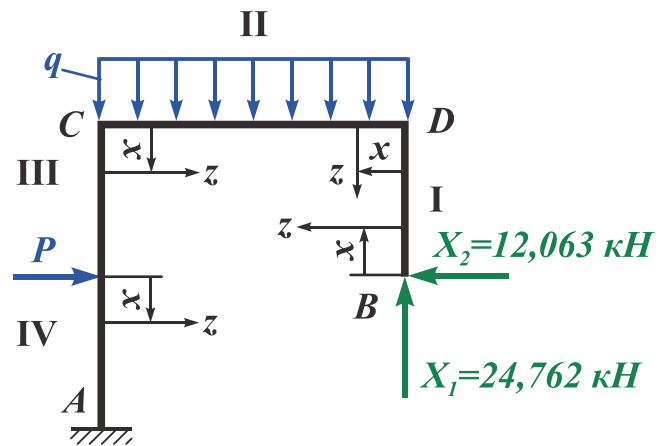


Рис. 29

Рівняння поздовжніх сил:

$$\begin{aligned} N_x^I &= -X_1 = -24,762 \text{ кН}; \\ N_x^{II} &= -X_2 = -12,063 \text{ кН}; \\ N_x^{III} &= -X_1 - 2qa = -15,238 \text{ кН}; \\ N_x^{IV} &= -X_1 - 2qa = -15,238 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Рівняння поперечних сил:

$$\begin{aligned} Q_z^I &= X_2 = 12,063 \text{ кН}; \\ Q_z^{II} &= qx - X_1 \Big|_{x=0} = -24,762 \text{ кН}; \quad \Big|_{x=2a} = 15,238 \text{ кН}; \\ Q_z^{II} &= 0 = qx_e - X_1 \rightarrow x_e = \frac{X_1}{q} = \frac{24,762}{20} = 1,2381 \text{ м}; \\ Q_z^{III} &= -X_2 = -12,063 \text{ кН}; \\ Q_z^{IV} &= -X_2 + P = 27,937 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Рівняння згинальних моментів:

$$M_y^I = -X_1 x \Big|_{x=0} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \Big|_{x=a} = -12,063 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = -X_1 x - X_2 a - \frac{qx^2}{2} \Big|_{x=0} = -12,063 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \Big|_{x=2a} = -2,539 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\Big|_{x=x_e=1,2381 \text{ м}} = 3,266 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = X_1 2a - X_2(a-x) - 2qa^2 \Big|_{x=0} = -2,539 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \Big|_{x=a} = 9,524 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV} = X_1 2a - X_2 x - 2qa^2 - Px \Big|_{x=0} = 9,524 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \Big|_{x=a} = -18,413 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

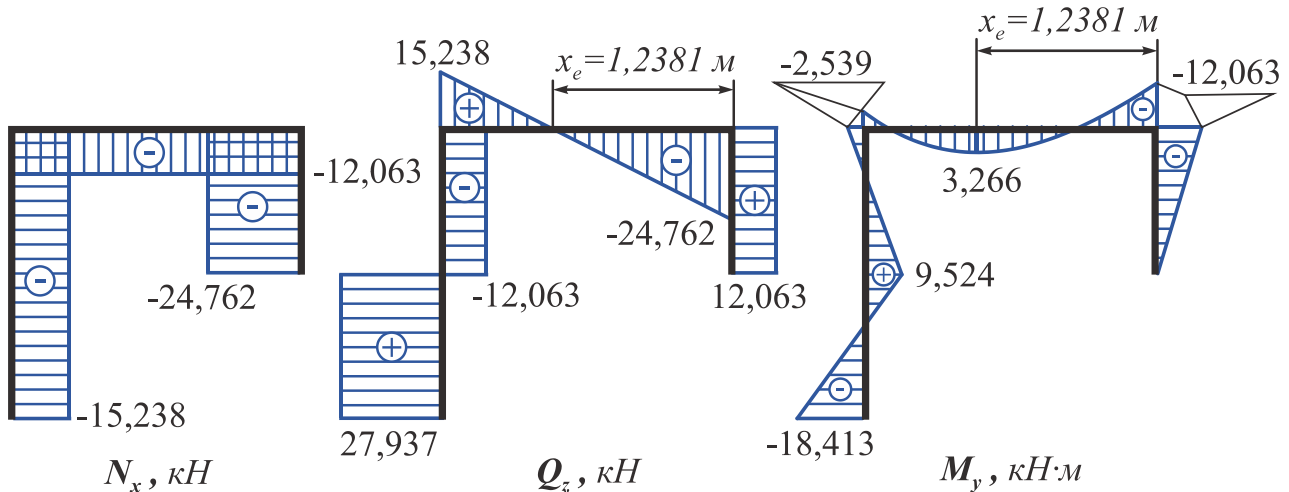


Рис. 30

8. Перевіримо правильність одержаного розв'язку, а саме:

а) рівновагу у вузлах **C** і **D** (рис. 31);

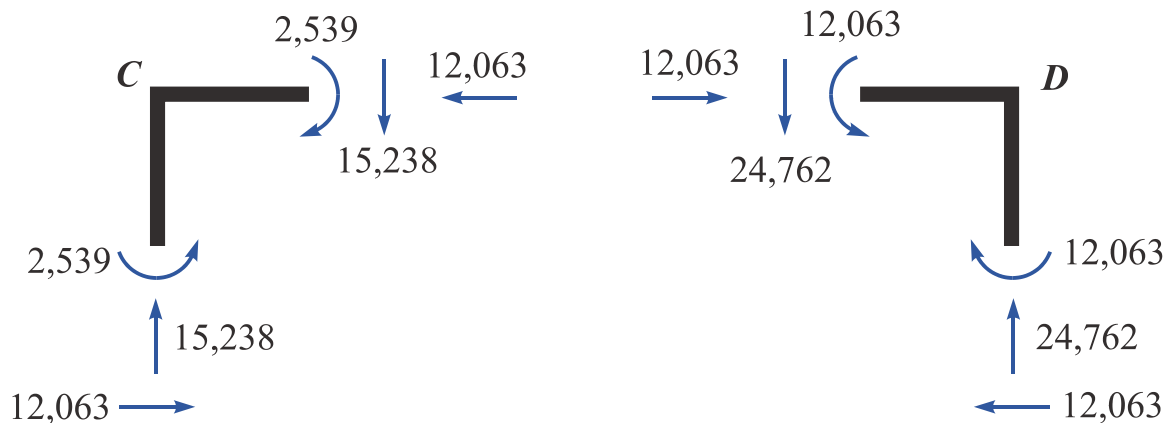


Рис. 31

б) рівність нулю кута повороту в опорі A (кінематична перевірка).

Для цього виберемо **нову основну систему** (рис. 32), якій відповідає нова еквівалентна система (рис. 33).

Нову еквівалентну систему описують рівняння внутрішніх силових факторів, отримані в п. 7, тому величина моменту $X_3 = 18,412 \text{ кНм}$ вже відома.

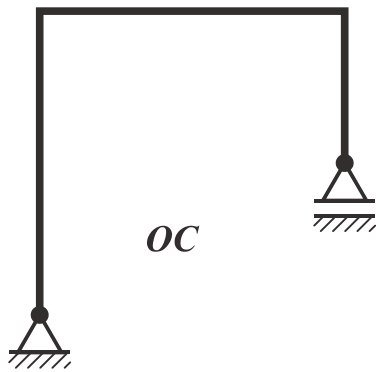


Рис. 32

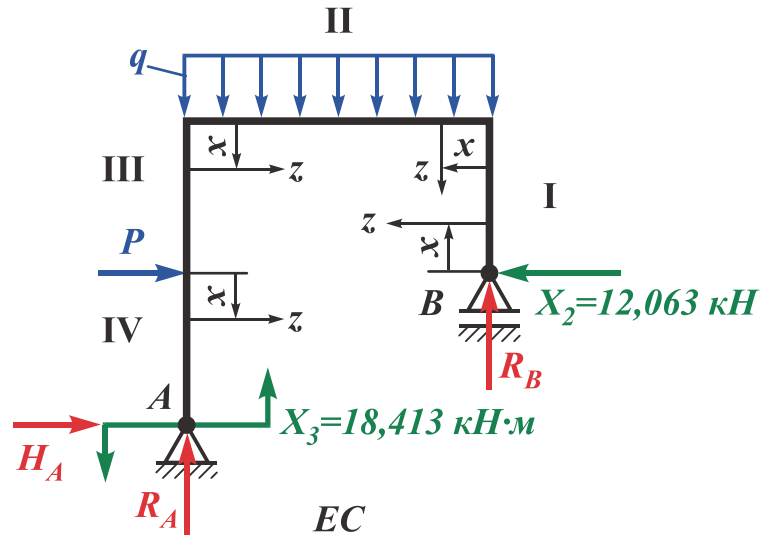


Рис. 33

Для обчислення кута повороту в опорі A слід розглянути з використанням методу Мора одиничну допоміжну систему, показану на рис. 34.

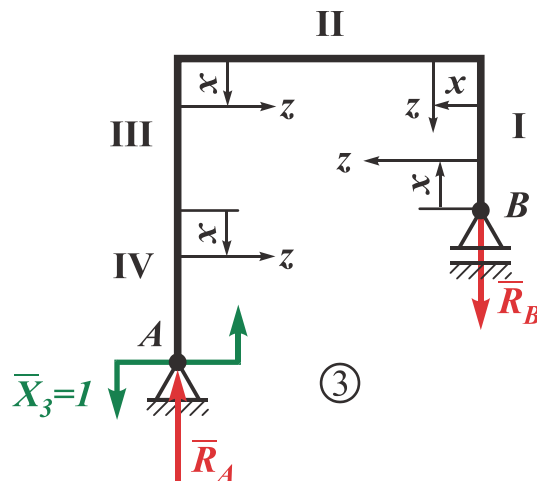


Рис. 34

Реакції опор знайдемо з рівнянь статyki:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & & \bar{X}_3 - \bar{R}_B 2a = 0; & & \bar{R}_B = 0,5; \\ \sum M_B = 0; & & \bar{X}_3 - \bar{R}_A 2a = 0; & & \bar{R}_A = 0,5. \end{aligned}$$

Запишемо рівняння згинальних моментів:

$$\bar{M}_{y(3)}^I = 0;$$

$$\bar{M}_{y(3)}^{II} = -\bar{R}_B x \quad \left|_{x=0} = 0 \text{ м}; \quad \left|_{x=2a} = -1 \text{ м};\right.$$

$$\bar{M}_{y(3)}^{III} = -\bar{R}_B 2a = -1 \text{ м};$$

$$M_{y(3)}^{IV} = -\bar{R}_B 2a = -1 \text{ м}.$$

Епюру $\bar{M}_{y(3)}$ показано на рис. 35.

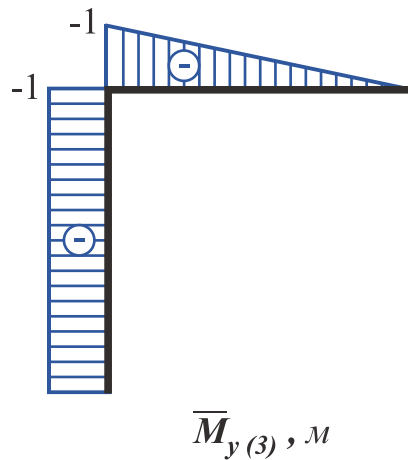


Рис. 35

Обчислимо значення кута повороту θ_A методом Мора:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} M_{y(P)}^i \bar{M}_{y(3)}^i dx = \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^2 M_{y(P)}^{II} \bar{M}_{y(3)}^{II} dx + \omega_3 y_{3c} + \omega_4 y_{4c} \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(- \int_0^2 (24,762x - 12,063 - 10x^2) 0,5x dx - 3,4925 \cdot 1 \cdot 1 + 4,4445 \cdot 1 \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} (-36,5085 + 36,5075) = -\frac{0,001}{EI_y}. \end{aligned}$$

Похибка розв'язання

$$\Delta \% = \left| \frac{-0,001}{-36,5085} \right| \cdot 100 \% = 0,003 \%,$$

тобто розкриття статичної невизначеності зроблено правильно.

На ділянках III і IV при обчисленні переміщення θ_A застосовано спосіб Верещагіна. Значення ω_3 і ω_4 визначено як площі прямокутників на епюрах $\bar{M}_{y(3)}^{III}$ і $\bar{M}_{y(3)}^{IV}$, ординати y_{3c} і y_{4c} знайдено з рівнянь M_y^{III} і M_y^{IV} при $x = a/2$.

9. Підберемо двотавровий поперечний переріз.

Як видно з епюри згинальних моментів (див. рис. 30), в небезпечному перерізі діє

$$|M_y|_{max} = 18,413 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Напруження, що допускається для матеріалу рами

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_T} = \frac{240}{1,6} = 150 \text{ МПа.}$$

З умови міцності при вигині

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_{н.о}} \leq [\sigma]$$

визначимо значення потрібного моменту опору

$$W_{н.о} \geq \frac{|M_y|_{max}}{[\sigma]} = \frac{18,413 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 122,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

За сортаментом підберемо номери двотаврів (додаток):

а) найближчий менший – це двотавр № 16

$$W_y = 109 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

визначимо **перевантаження**, яке буде існувати в небезпечних точках:

$$\Delta\sigma \% = \left| \frac{W_y - W_{н.о}}{W_y} \right| \cdot 100 \% = \left| \frac{109 - 122,75}{109} \right| \cdot 100 \% = 12,61\% > 5 \%.$$

б) найближчий більший – це двотавр № 18

$$W_y = 143 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

визначимо **недовантаження**, яке буде існувати в небезпечних точках:

$$\Delta\sigma \% = \left| \frac{W_y - W_{н.о}}{W_y} \right| \cdot 100 \% = \left| \frac{143 - 122,75}{143} \right| \cdot 100 \% = 14,16\% > 5 \%.$$

Оскільки перевантаження більше 5 % не допускається, то незалежно від значення недовантаження двотавра № 18 необхідно вибирати двотавр з великим моментом опору.

Таким чином, остаточно виберемо двотавр № 18.

Приклад 3

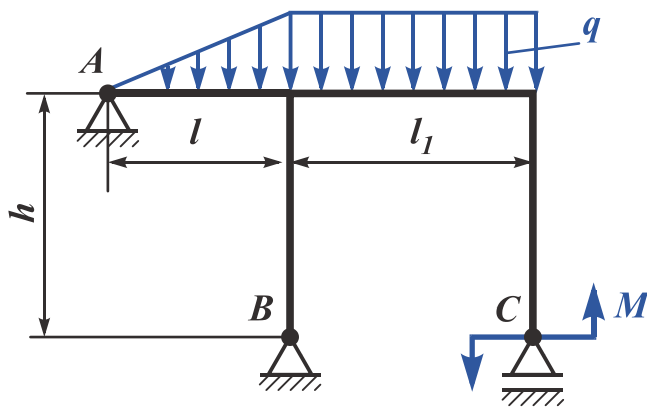


Рис. 36

Дано: $h = 4 \text{ м}$; $l = 3 \text{ м}$; $l_1 = 4 \text{ м}$;
 $q = 10 \text{ кН/м}$; $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
 $EI_y = \text{const}$; $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$;
 $K_T = 1,6$.

Необхідно: розкрити статичну невизначеність конструкції (рис. 36); побудувати епюри внутрішніх силових факторів N_x , Q_z , M_y ; підібрати двотавровий поперечний переріз.

Розв'язання

1. Встановимо ступінь статичної невизначеності конструкції

$$k = m - n = 5 - 3 = 2,$$

тобто конструкція двічі статично невизначена (два зайвих зв'язки).

2. Виберемо основну систему (рис. 37).

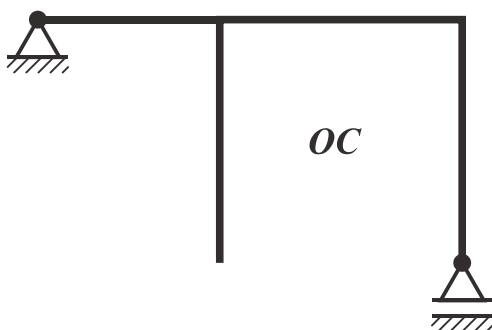


Рис. 37

3. Побудуємо еквівалентну систему, відповідну вибраній основній системі (рис. 38).

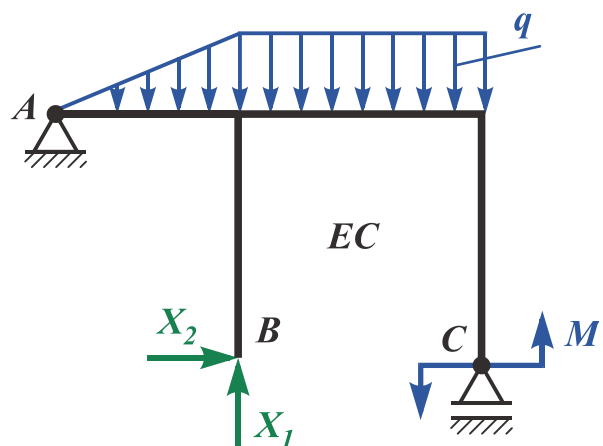


Рис. 38

4. Запишемо систему канонічних рівнянь методу сил

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases}$$

де $\delta_{11}X_1$ – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_1 , спричинене силою X_1 ;

δ_{11} – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_1 , спричинене одиничною силою $\bar{X}_1 = 1$, яка додається в тій же точці і в тому ж напрямку, що і X_1 ;

$\delta_{12}X_2$ – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_1 , спричинене силою X_2 ;

δ_{12} – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_1 , спричинене одиничною силою $\bar{X}_2 = 1$, яка додається в тій же точці, що і X_2 ;

Δ_{1P} – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_1 , спричинене зовнішніми силами;

$\delta_{21}X_1$ – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_2 , спричинене силою X_1 ;

δ_{21} – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_2 , спричинене одиничною силою $\bar{X}_1 = 1$, яка додається в тій же точці, що і X_1 ;

$\delta_{22}X_2$ – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_2 , спричинене силою X_2 ;

δ_{22} – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_2 , спричинене одиничною силою $\bar{X}_2 = 1$, яка додається в тій же точці і в тому ж напрямку, що і X_2 ;

Δ_{2P} – переміщення перерізу \mathbf{B} в напрямку дії X_2 , спричинене зовнішніми силами.

5. Визначимо коефіцієнти системи канонічних рівнянь.

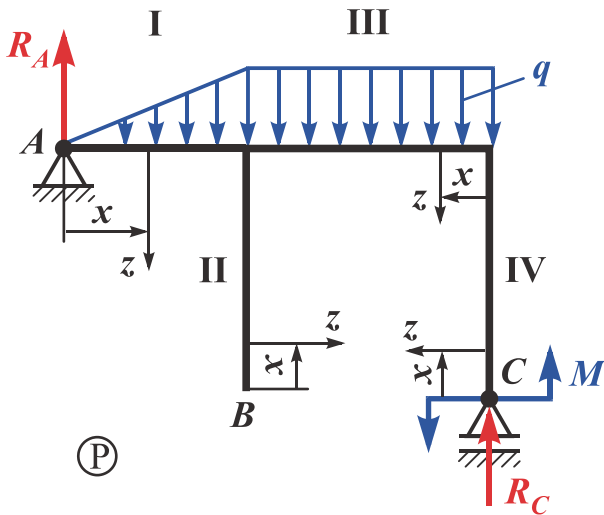
Для цього розглянемо три допоміжні системи: P -систему (дія тільки заданих навантажень) (рис. 39) і одиничні системи 1 і 2 (дія тільки одиничних сил відповідно $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 40) і $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 41)).

Усі допоміжні системи розіб'ємо на ділянки однаково.

Вісь z спрямована в усіх системах всередину рами.

Визначимо опорні реакції в кожній допоміжній системі:

а) *P*-система



Ⓐ

Рис. 39

$$\sum M_A = 0;$$

$$M + R_C(l_1 + l) - ql_1 \left(\frac{l_1}{2} + l \right) - \frac{ql}{2} \frac{2}{3} l = 0;$$

$$R_C = \frac{ql_1 \left(\frac{l_1}{2} + l \right) + \frac{ql}{2} \frac{2}{3} l - M}{l_1 + l} =$$

$$= \frac{10 \cdot 4 \cdot (2 + 3) + 10 \cdot 3 - 30}{7} = 28,57 \text{ кН};$$

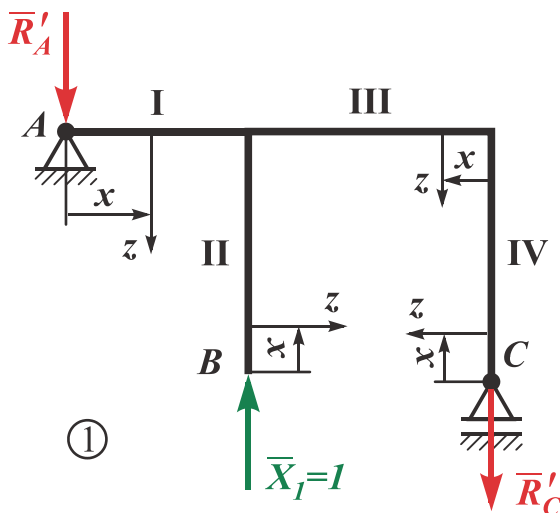
$$\sum M_C = 0; \quad M - R_A(l_1 + l) + \frac{ql}{2} \left(\frac{l}{3} + l_1 \right) + ql_1 \frac{l_1}{2} = 0;$$

$$R_A = \frac{\frac{ql}{2} \left(\frac{l}{3} + l_1 \right) + ql_1 \frac{l_1}{2} + M}{l_1 + l} = \frac{5 \cdot 3 \cdot (1 + 4) + 10 \cdot 8 + 30}{7} = 26,43 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність обчислення реакцій:

$$\sum P_{z,i} \equiv 0; \quad -R_A + \frac{ql}{2} + ql_1 - R_C = -26,43 + 15 + 40 - 28,57 = 0.$$

б) *единична система I*



Ⓐ

Рис. 40

$$\sum M_A = 0; \quad \bar{X}_1 l - \bar{R}'_C (l_1 + l) = 0;$$

$$\bar{R}'_C = \frac{l}{l_1 + l} = \frac{3}{7} = 0,429 \text{ м};$$

$$\sum M_C = 0; \quad \bar{R}'_A (l_1 + l) - \bar{X}_1 l_1 = 0;$$

$$\bar{R}'_A = \frac{l_1}{l_1 + l} = \frac{4}{7} = 0,571 \text{ м}.$$

Перевіримо правильність обчислення реакцій:

$$\sum P_{z,i} \equiv 0; \quad \bar{X}_1 - \bar{R}'_A - \bar{R}'_C = 1 - 0,429 - 0,571 = 0.$$

в) одинична система 2

$$\sum P_{x,i} = 0;$$

$$\bar{X}_2 - \bar{H}_A'' = 0; \quad \bar{H}_A'' = 1 \text{ м};$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$\bar{X}_2 h - \bar{R}_C''(l_1 + l) = 0;$$

$$\bar{R}_C'' = \frac{h}{l_1 + l} = \frac{4}{7} = 0,571 \text{ м};$$

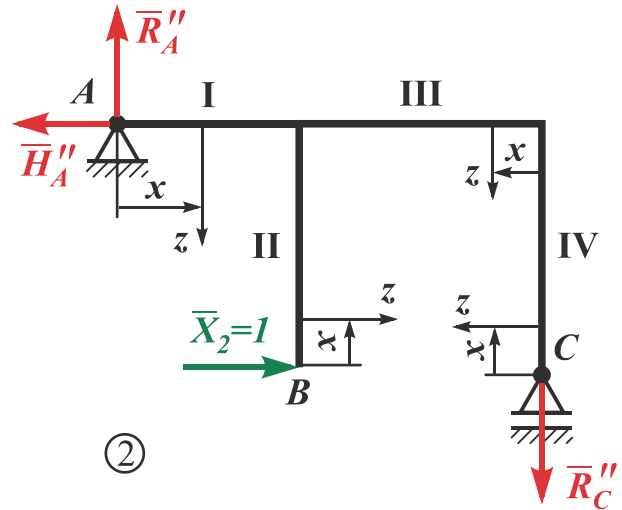


Рис. 41

$$\sum M_C = 0; \quad \bar{H}_A'' h - \bar{R}_A''(l_1 + l) = 0; \quad \bar{R}_A'' = \frac{h}{l_1 + l} = \frac{4}{7} = 0,571 \text{ м}.$$

Перевіримо правильність обчислення реакцій:

$$\sum P_{z,i} \equiv 0; \quad \bar{R}_A'' - \bar{R}_C'' = 0,571 - 0,571 = 0.$$

Запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках в кожній допоміжній системі, використавши однаковий порядок обходу і нумерацію ділянок. Рівняння наведемо в табл. 3.

Таблиця 3

Згиналь- ний момент	Номер ділянки			
	I $0 \leq x \leq 3$	II $0 \leq x \leq 4$	III $0 \leq x \leq 4$	IV $0 \leq x \leq 4$
$M_{y(P)}$	$R_A x - \frac{qx^3}{6l} =$ $= 26,43x - 0,556x^3$	0	$M + R_C x - \frac{qx^2}{2} =$ $= 30 + 28,57x - 5x^2$	$M = 30$
$\bar{M}_{y(1)}$	$-\bar{R}_A' x = -0,571x$	0	$-\bar{R}_C' x = -0,429x$	0
$\bar{M}_{y(2)}$	$\bar{R}_A'' x = 0,571x$	$-\bar{X}_2 \cdot x = -x$	$-\bar{R}_C'' x = -0,571x$	0

Побудуємо епюри згинальних моментів основної і одиничних систем (рис. 42).

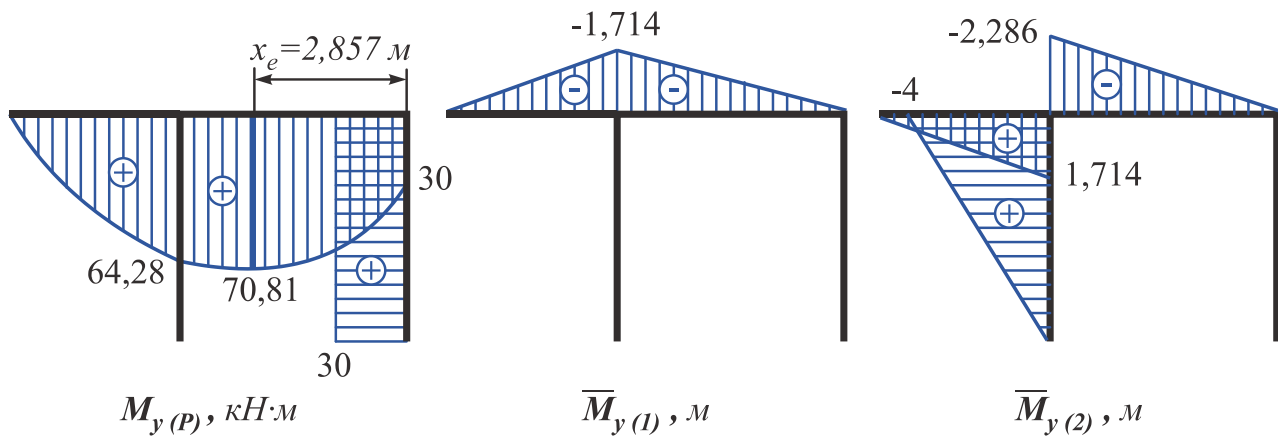


Рис. 42

Обчислимо коефіцієнти канонічних рівнянь способом Верещагіна, а вільні члени – методом Мора:

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} \frac{M_{y(P)}^i \cdot \bar{M}_{y(1)}^i}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^3 (26,43x - 0,556x^3)(-0,571x) dx + 0 + \right. \\ \left. + \int_0^4 (30 + 28,57x - 5x^2)(-0,429x) dx + 0 \right) = \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{26,43 \cdot 0,571 \cdot 27}{3} + \right. \\ \left. + \frac{0,556 \cdot 0,571 \cdot 243}{5} - \frac{30 \cdot 0,429 \cdot 16}{2} - \frac{28,57 \cdot 0,429 \cdot 64}{3} + \frac{5 \cdot 0,429 \cdot 256}{4} \right) = \\ = \frac{1}{EI_y} (-135,824 + 15,429 - 102,96 - 261,473 + 137,28) = -\frac{347,548}{EI_y};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} \frac{M_{y(P)}^i \cdot \bar{M}_{y(2)}^i}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^3 (26,43x - 0,556x^3)(0,571x) dx + 0 + \right. \\ \left. + \int_0^4 (30 + 28,57x - 5x^2)(-0,571) dx + 0 \right) = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{26,43 \cdot 0,571 \cdot 27}{3} + \right. \\ \left. + \frac{0,556 \cdot 0,571 \cdot 243}{5} - \frac{30 \cdot 0,571 \cdot 16}{2} - \frac{28,57 \cdot 0,571 \cdot 64}{3} + \frac{5 \cdot 0,571 \cdot 256}{4} \right) = \\ = \frac{1}{EI_y} (135,824 - 15,429 - 137,04 - 348,021 + 182,72) = -\frac{181,946}{EI_y};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^4 \bar{\omega}_{i(1)} \cdot \bar{y}_{i(1)} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{3 \cdot 1,714}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 + \frac{4 \cdot 1,714}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 \right) = \\ = \frac{1}{EI_y} (2,938 + 3,917) = \frac{6,855}{EI_y};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^4 \bar{\omega}_{i(2)} \cdot \bar{y}_{i(2)} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{3 \cdot 1,714}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 + \frac{4 \cdot 2,286}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,286 + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{1}{EI_y} (2,938 + 6,968 + 21,333) = \frac{31,239}{EI_y};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^4 \bar{\omega}_{i(1)} \cdot \bar{y}_{i(2)} = \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{3 \cdot 1,714}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 + \frac{4 \cdot 1,714}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,286 \right) = \frac{1}{EI_y} (-2,938 + 5,224) = \frac{2,286}{EI_y}.$$

6. Підставимо знайдені коефіцієнти в систему канонічних рівнянь і вирішимо її:

$$\begin{cases} 6,855 \cdot X_1 + 2,286 \cdot X_2 - 347,548 = 0; & | \times 2,286 \\ 2,286 \cdot X_1 + 31,239 \cdot X_2 - 181,946 = 0; & | \times (-6,855) \end{cases};$$

$$+ \begin{cases} 15,671 \cdot X_1 + 5,226 \cdot X_2 - 794,495 = 0; \\ -15,671 \cdot X_1 - 214,143 \cdot X_2 + 1247,24 = 0; \end{cases}$$

$$-208,917 \cdot X_2 + 452,745 = 0; \quad X_2 = 2,167 \text{ кН};$$

$$6,855 \cdot X_1 + 4,954 - 347,548 = 0; \quad X_1 = 49,977 \text{ кН}.$$

На цьому розкриття статичної невизначеності конструкції закінчено.

7. Побудуємо епюри внутрішніх силових факторів N_x , Q_z і M_y для еквівалентної системи при знайдених значеннях X_1 і X_2 (рис. 43).

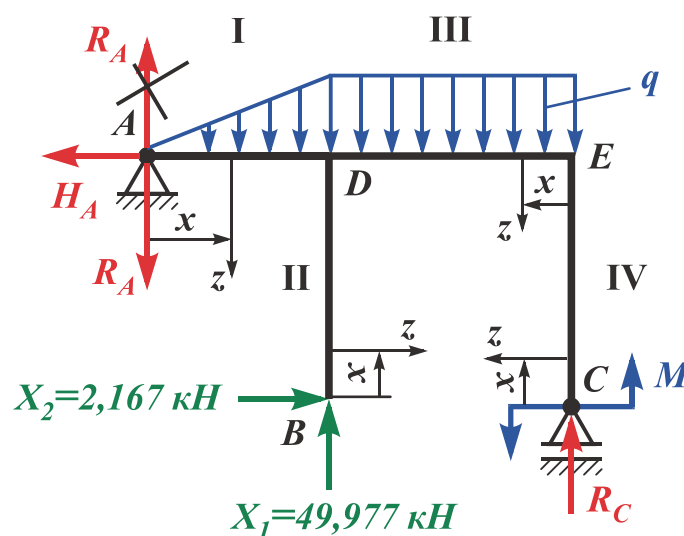


Рис. 43

Визначимо опорні реакції:

$$\sum P_{x,i} = 0; \quad -H_A + X_2 = 0; \quad H_A = X_2 = 2,167 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad M + R_C(l_1 + l) + X_1 l + X_2 h - ql_1 \left(\frac{l_1}{2} + l \right) - \frac{ql}{2} \frac{2}{3} l = 0;$$

$$R_C = \frac{ql_1 \left(\frac{l_1}{2} + l \right) + \frac{ql}{2} \frac{2}{3} l - M - X_1 l - X_2 h}{l_1 + l} =$$

$$= \frac{200 + 30 - 30 - 149,931 - 8,668}{7} = 5,914 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; \quad M - R_A(l_1 + l) - X_1 l_1 + H_A h + ql_1 \frac{l_1}{2} + \frac{ql}{2} \left(\frac{1}{3} l + l_1 \right) = 0;$$

$$R_A = \frac{ql_1 \frac{l_1}{2} + \frac{ql}{2} \left(\frac{1}{3} l + l_1 \right) + M - X_1 l_1 + X_2 h}{l_1 + l} =$$

$$= \frac{80 + 75 + 30 - 199,908 + 8,668}{7} = -0,891 \text{ кН}.$$

Змінімо напрямок реакції R_A на протилежний (вниз).

Перевіримо правильність обчислення реакцій:

$$\sum P_{z,i} = 0;$$

$$-R_A + \frac{ql}{2} + ql_1 - X_1 - R_C = 0;$$

$$0,891 + 15 + 40 - 49,977 - 5,914 = 0.$$

Рівняння поздовжніх сил:

$$N_x^I = H_A = 2,176 \text{ кН};$$

$$N_x^{II} = -X_1 = -49,977 \text{ кН};$$

$$N_x^{III} = 0;$$

$$N_x^{IV} = -R_C = -5,914 \text{ кН}.$$

Рівняння поперечних сил:

$$Q_z^I = -R_A - \frac{qx^2}{2l} \Big|_{x=0} = -0,891 \text{ кН} \Big|_{x=3 \text{ м}} = -15,891 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = -X_2 = -2,167 \text{ кН};$$

$$Q_z^{III} = -R_C + qx \Big|_{x=0} = -5,914 \text{ кН} \Big|_{x=4 \text{ м}} = 34,086 \text{ кН};$$

$$Q_z^{III} = 0 = -R_C + qx_e; \quad x_e = \frac{R_C}{q} = \frac{5,914}{10} = 0,5914 \text{ м};$$

$$Q_z^{IV} = 0.$$

Рівняння згинальних моментів:

$$M_y^I = -R_A x - \frac{qx^3}{6l} = -0,891x - 0,556x^3 \Big|_{x=0} = 0 \Big|_{x=3 \text{ м}} = -17,685 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = -X_2 x = -2,167x \Big|_{x=0} = 0 \Big|_{x=4 \text{ м}} = -8,668 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = M + R_C x - \frac{qx^2}{2} = 30 + 5,914x - 5x^2 \Big|_{x=0} = 30 \Big|_{x=4 \text{ м}} = -26,354 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\Big|_{x=x_e=0,5914} = 31,749 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV} = M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Епюри мають вигляд, показаний на рис. 44.

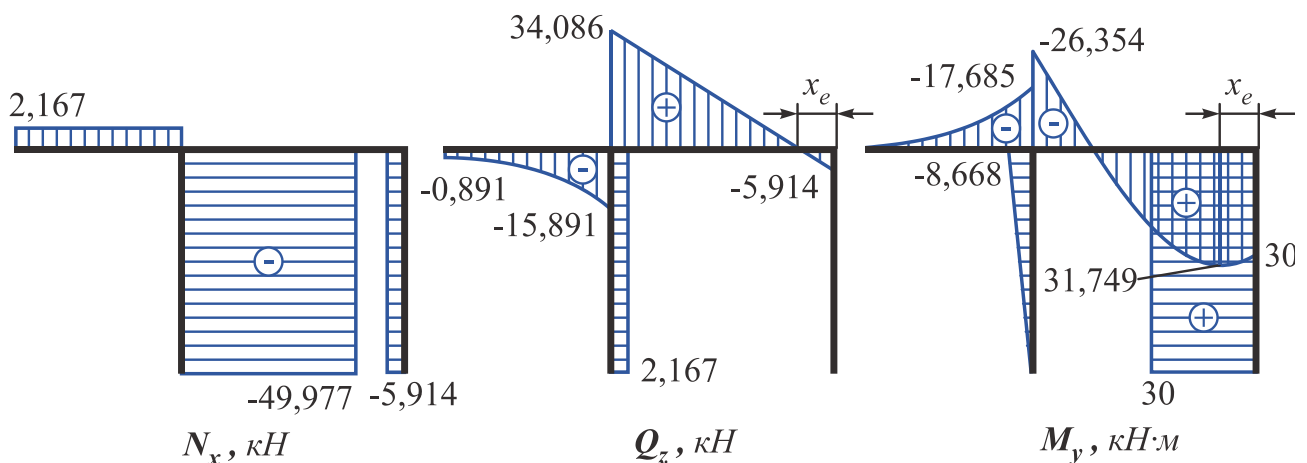


Рис. 44

8. Перевіримо правильність одержаних розв'язків, а саме:

а) рівновагу у вузлах D і E (рис. 45);

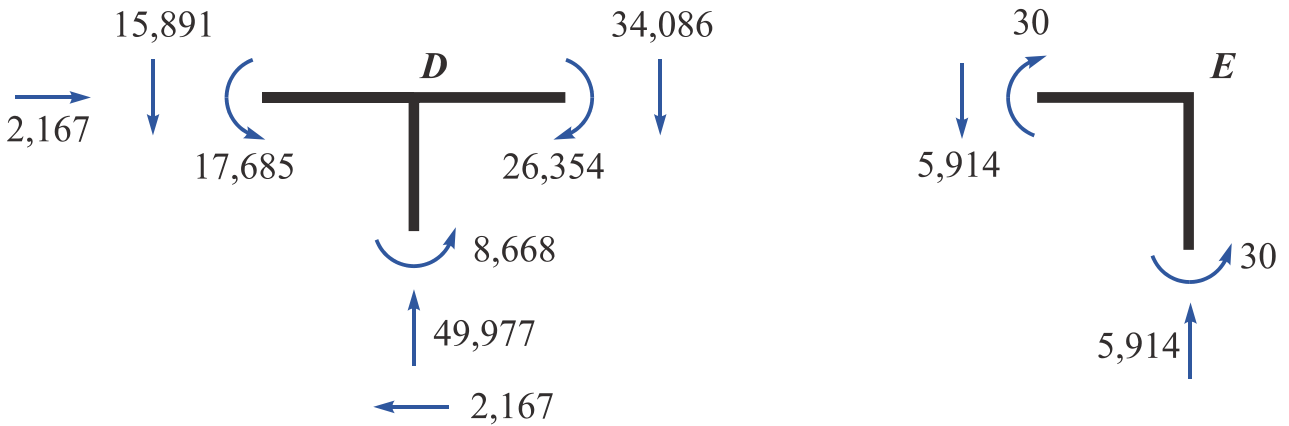


Рис. 45

б) рівність нулю вертикального переміщення точки A (кінематична перевірка).

Виберемо *нову основну систему* (рис. 46), якій відповідає нова еквівалентна система (рис. 47).

Зауваження. Нову основну систему необхідно вибрати так, щоб серед зайвих зв'язків, що відкидаються, обов'язково був звільнений зв'язок на шукане переміщення.

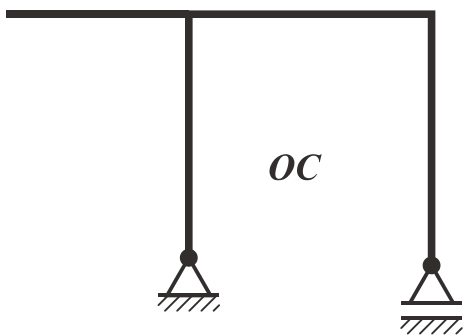


Рис. 46

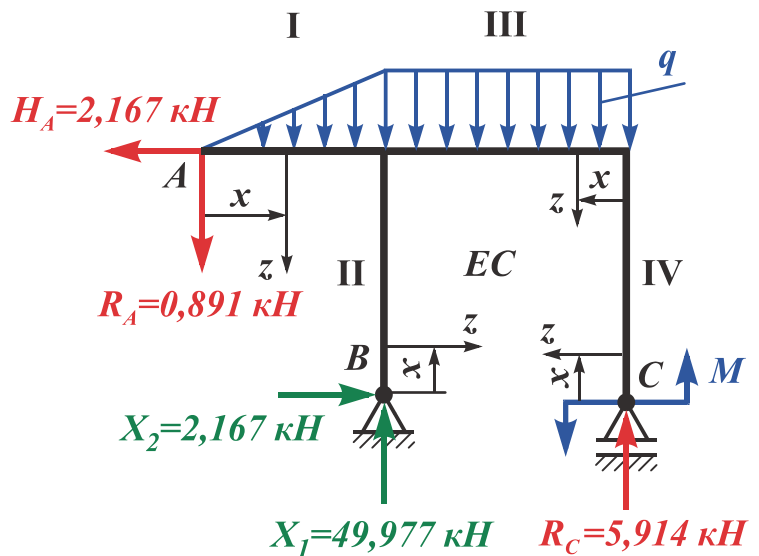


Рис. 47

Нову еквівалентну систему описують рівняння внутрішніх силових факторів, отримані в п. 7, тобто від вибору основної системи не залежить вигляд кінцевих епюр N_x , Q_z , M_y .

Для визначення вертикального переміщення в опорі A нової еквівалентної системи необхідно згідно з методом Мора подати її як P -систему, а як одиничну розглянути систему, показану на рис. 48.

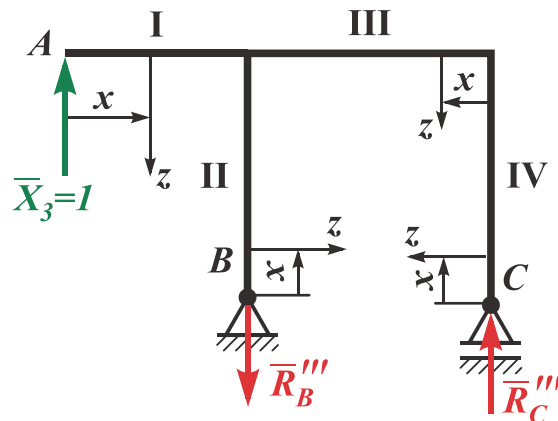


Рис. 48

Знайдемо реакції опор одиничної системи і запишемо рівняння згинальних моментів:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; \quad \bar{R}_C''' l_1 - \bar{X}_3 l = 0; \quad \bar{R}_C''' &= \frac{l}{l_1} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ м}; \\ \sum M_C = 0; \quad \bar{R}_B''' l_1 - \bar{X}_3 (l + l_1) = 0; \quad \bar{R}_B''' &= \frac{l + l_1}{l_1} = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ м}; \\ \sum P_{z,i} \equiv 0; \quad \bar{X}_3 + \bar{R}_C''' - \bar{R}_B''' &= 1 + 0,75 - 1,75 = 0; \\ \bar{M}_{y(3)}^I &= \bar{X}_3 x = x; \quad \bar{M}_{y(3)}^{II} = 0; \\ \bar{M}_{y(3)}^{III} &= \bar{R}_C''' x = 0,75x; \quad \bar{M}_{y(3)}^{IV} = 0. \end{aligned}$$

Підставимо в інтеграл Мора рівняння згинальних моментів:

$$\begin{aligned} \delta_A^{верт} &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^3 (-0,891x - 0,556x^3) x dx + \int_0^4 (30 + 5,914x - 5x^2) \cdot 0,75x dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{0,891 \cdot 3^3}{3} - \frac{0,556 \cdot 3^5}{5} + \frac{30 \cdot 0,75 \cdot 4^2}{2} + \frac{5,914 \cdot 0,75 \cdot 4^3}{3} - \frac{5 \cdot 0,75 \cdot 4^4}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} (274,624 - 275,041) = -\frac{0,417}{EI_y}. \end{aligned}$$

Похибка розв'язання

$$\Delta \% = \left| \frac{-0,417}{-275,041} \right| \cdot 100 \% = 0,15 \%,$$

тобто розкриття статичної невизначеності зроблено правильно.

9. Підберемо двотавровий поперечний переріз з умови міцності.

Як видно з епюри згинальних моментів (див. рис. 44), в небезпечному перерізі діє момент

$$|M_y|_{max} = 31,749 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Напруження, що допускається для матеріалу рами

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_T} = \frac{250}{1,6} = 156,25 \text{ МПа}.$$

З умови міцності при вигині

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_{н.о}} \leq [\sigma]$$

визначимо значення потрібного моменту опору

$$W_{н.о} \geq \frac{|M_y|_{max}}{[\sigma]} = \frac{31,749 \cdot 10^3}{156,25 \cdot 10^6} = 203,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

За сортаментом підберемо номера двотаврів (див. додаток):

а) найближчий менший – це двотавр № 20а

$$W_y = W_y = 203 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

визначимо **перевантаження**, яке буде існувати в небезпечних точках:

$$\Delta\sigma \% = \left| \frac{W_y - W_{н.о}}{W_y} \right| \cdot 100 \% = \left| \frac{203 - 203,2}{203} \right| \cdot 100 \% = 0,1 \% < 5 \%.$$

б) найближчий більший – це двотавр № 22

$$W_y = 232 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

визначимо **недовантаження**, яке буде існувати в небезпечних точках:

$$\Delta\sigma \% = \left| \frac{W_y - W_{н.о}}{W_y} \right| \cdot 100 \% = \left| \frac{232 - 203,2}{232} \right| \cdot 100 \% = 12,41 \% > 5 \%.$$

Остаточо виберемо двотавр № 20а.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

1. Встановити ступінь статичної невизначеності рами.
2. Вибрати основну систему.
3. Скласти еквівалентну систему.
4. Записати систему канонічних рівнянь методу сил.
5. Визначити коефіцієнти канонічних рівнянь методу сил за допомогою методу Мора або способом Верещагіна.
6. Розв'язати систему канонічних рівнянь і визначити невідомі зусилля.
7. Побудувати епюри поздовжніх N_x і поперечних Q_z сил і згинальних моментів M_y для еквівалентної системи.
8. Перевірити отриманий розв'язок (вибрати нову основну систему, переконатися у відсутності переміщень по знов відкинутим зв'язкам).
9. Підібрати двотавровий поперечний переріз рами. Прийняти для матеріалу $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, $K_T = 1,2 \dots 1,8$.
10. Виконати завдання, використавши варіанти вихідних даних (табл. 4) та схеми завдань (табл. 5, 6).

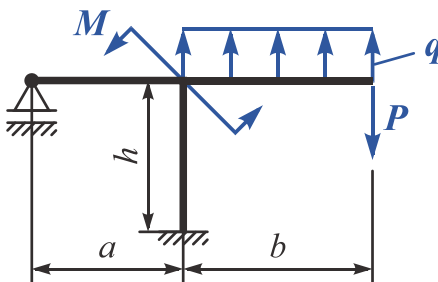
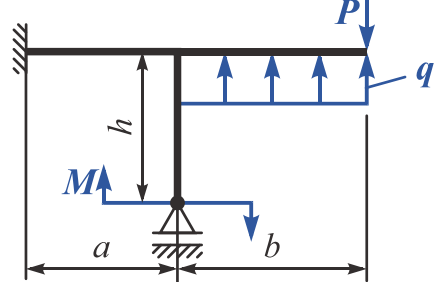
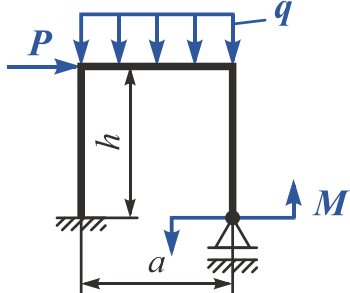
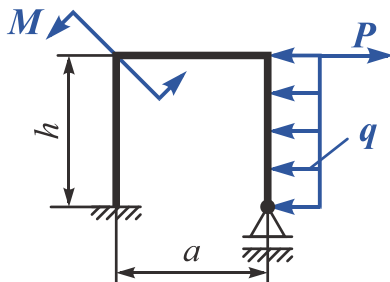
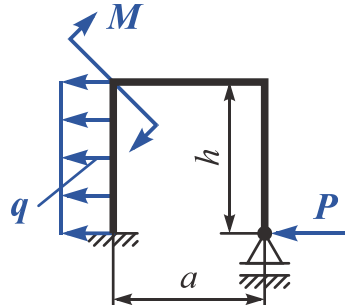
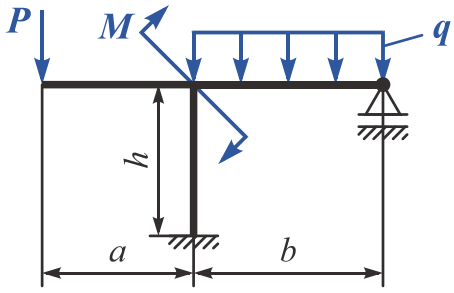
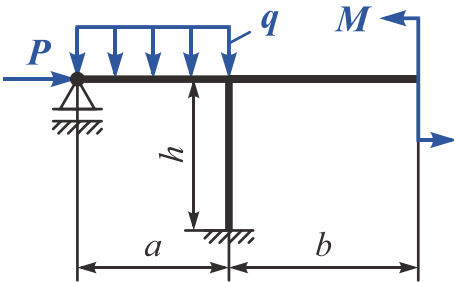
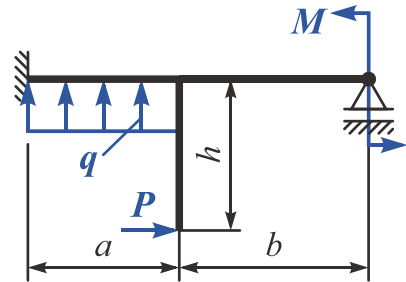
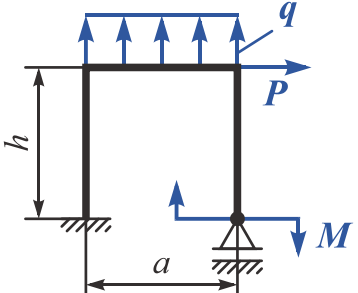
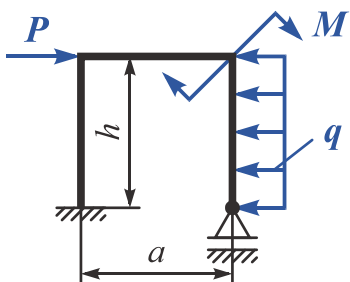
Таблиця 4

Варіанти вихідних даних

Параметр	Номер варіанта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P, \text{кН}$	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	28	26	24	22
$q, \text{кН/м}$	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	6	8	10
$M, \text{кНм}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$a, \text{м}$	4	2	2	4	6	2	4	2	2	4	6	2	4	2	2
$b, \text{м}$	6	6	4	2	4	6	6	4	2	4	6	6	4	2	4
$h, \text{м}$	2	4	6	6	6	4	2	4	6	6	6	4	2	4	6

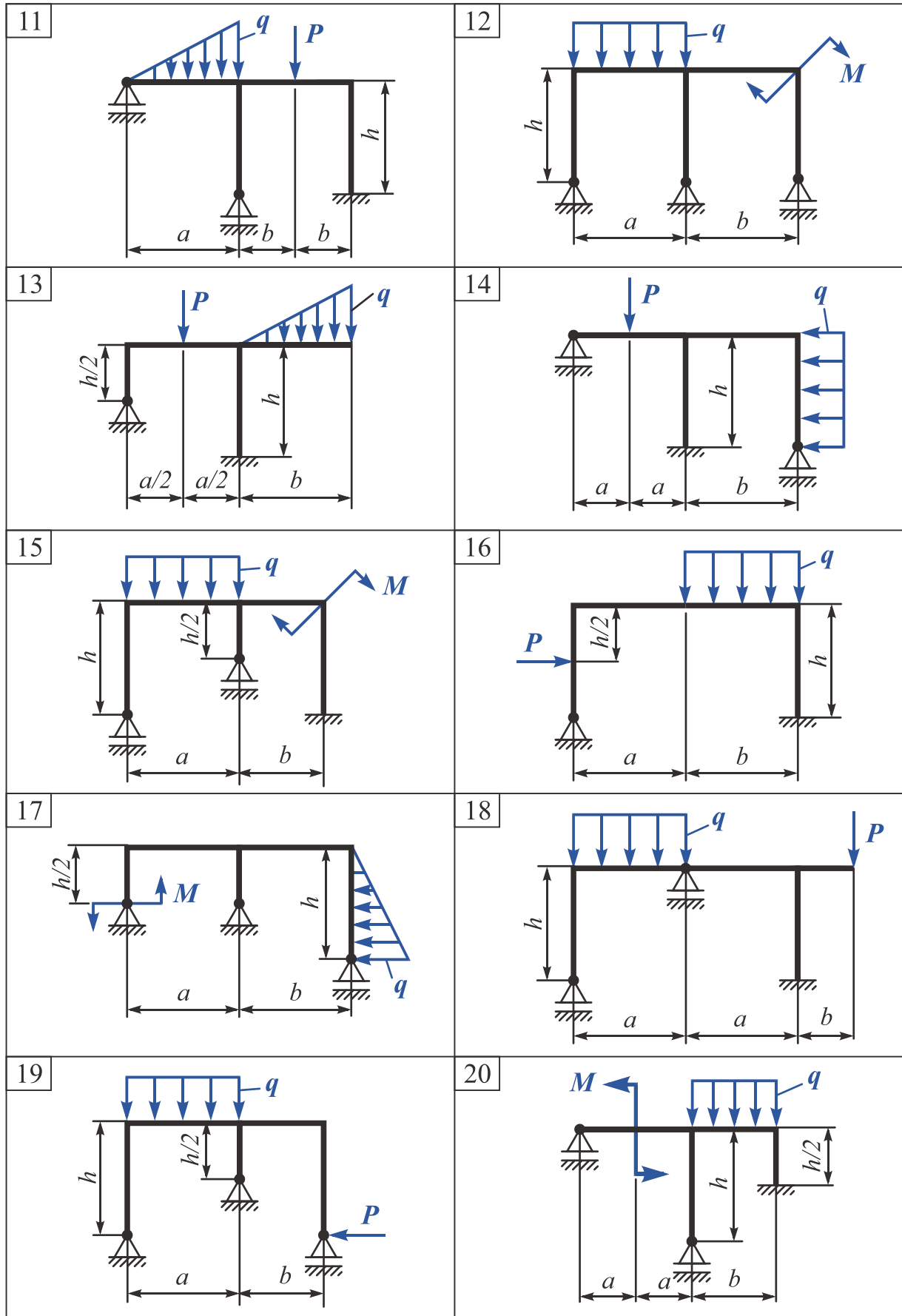
Параметр	Номер варіанта														
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$P, \text{кН}$	20	18	16	14	12	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$q, \text{кН/м}$	8	6	4	6	8	10	12	14	16	18	16	14	12	10	8
$M, \text{кНм}$	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
$a, \text{м}$	4	6	2	4	2	2	4	6	2	4	2	2	4	6	2
$b, \text{м}$	6	6	4	2	4	6	6	4	2	4	6	6	4	2	4
$h, \text{м}$	2	4	6	6	6	4	2	4	6	6	6	2	4	4	6

<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>
<p>9</p>	<p>10</p>

<p>11</p> 	<p>12</p> 
<p>13</p> 	<p>14</p> 
<p>15</p> 	<p>16</p> 
<p>17</p> 	<p>18</p> 
<p>19</p> 	<p>20</p> 

<p>21</p>	<p>22</p>
<p>23</p>	<p>24</p>
<p>25</p>	<p>26</p>
<p>27</p>	<p>28</p>
<p>29</p>	<p>30</p>

<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>
<p>9</p>	<p>10</p>



<p>21</p>	<p>22</p>
<p>23</p>	<p>24</p>
<p>25</p>	<p>26</p>
<p>27</p>	<p>28</p>
<p>29</p>	<p>30</p>

Сортамент гарячекатаної сталі. Балки двотаврові. ГОСТ 8239-89

	<p><u>Примітки:</u></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Площу поперечного перерізу і масу 1 м двотавра обчислено за номінальними розмірами; щільність сталі прийнята такою, що дорівнює $7,85 \text{ г/см}^3$. 2. Величини радіусів заокруглення, ухилу внутрішніх граней полиць, товщини полиць, що зазначені на рисунку і в таблиці, наведено для побудови калібрів і на готовому прокаті не контролюються. 3. У таблиці використано позначення: <ul style="list-style-type: none"> h – висота балки; b – ширина полиці; d – товщина стінки; t – середня товщина полиці; R – радіус внутрішнього заокруглення; F – площа поперечного перерізу; r – радіус заокруглення полиці; I – момент інерції; W – момент опору; S – статичний момент півперерізу; i – радіус інерції. 4. Двотаври від № 24 до № 60 не рекомендується застосовувати в нових розробленнях.
--	---

Номер	Розміри, мм							Маса 1 м, кг	Довідкові дані для осей					
	h	b	d	t	R	r	y – y		z – z					
							$I_{y,4}$ см ⁴		$W_{y,3}$ см ³	$i_{y,3}$ см	$S_{y,3}$ см ³	$I_{z,4}$ см ⁴	$W_{z,3}$ см ³	$i_{z,3}$ см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,9	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,7	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,8	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,4	317,0	10,10	178,0	260,0	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	371,0	11,20	210,0	260,0	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,9	407,0	11,30	229,0	337,0	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	472,0	12,30	268,0	337,0	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,2	518,0	12,50	292,0	436,0	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	597,0	13,50	339,0	419,0	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	743,0	14,70	423,0	516,0	71,1	2,89
40	400	155	8,5	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	953,0	16,20	545,0	667,0	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,0	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,5	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,6	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,0	3,54

Бібліографічний список

Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов. В 2 т. Т. 1. Элементарная теория и задачи / С. П. Тимошенко. – М. : Физматгиз, 1960. – 379 с.

Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев. : Вища шк., 1986. – 775 с.

Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.

Работнов, Ю. Н. Сопротивление материалов / Ю. Н. Работнов. – М. : Физматгиз, 1962. – 455 с.

Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Гостехиздат, 1953. – 856 с.

Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. М. Беляев [и др.]; под ред. В. К. Качурина. – М. : Наука, 1970. – 432 с.

Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролубов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1967. – 484 с.

Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров [и др.]. – Мн. : Наука и техника, 1988. – 464 с.

Зміст

1. Стрижневі системи.....	3
2. Зв'язки зовнішні та внутрішні	3
3. Зв'язки необхідні та додаткові	4
4. Ступінь статичної невизначеності конструкції (рами)	5
5. Порядок розкриття статичної невизначеності конструкції ме- тодом сил.....	6
6. Виведення канонічних рівнянь методу сил для знаходження не- відомих реакцій зовнішніх зв'язків	8
7. Приклади розв'язання задач	12
Приклад 1	12
Приклад 2	18
Приклад 3	26
Порядок виконання завдання	37
Додаток. Сортамент гарячекатаної сталі. Балки двотаврові. ГОСТ 8239-89	44
Бібліографічний список	46

Навчальне видання

**Гребенніков Михайло Миколайович
Дібір Олександр Геннадійович
Пекельний Микола Іванович
Кірпикін Анатолій Олексійович**

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2020

Підписано до друку 12.02.2020

Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 2,7. Обл.-вид. арк. 3,0. Наклад 100 пр.

Замовлення 56. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001