МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

М. П. Благодарний

ОДНОКРОКОВІ ТА БАГАТОКРОКОВІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ

Навчальний посібник до практичних занять та для самостійної роботи студентів

Харків «ХАІ» 2020

УДК 681.51.015.23:519.85(076.5)
Б68

Рецензенти: д-р техн. наук Ю. В. Паржин,
канд. техн. наук, доц. О. В. Сєвєрінов

Благодарний, М. П.

Б68 Однокрокові та багатокрокові моделі оптимізації в умовах визначеності [Текст] : навч. посіб. до практ. занять та для самост. роботи студентів / М. П. Благодарний. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін.-т», 2020. – 136 с.

ISBN 978-966-662-734-9

Викладено математичні методи обґрунтування рішень в умовах визначеності (лінійного, цілочислового, нелінійного, динамічного програмування та оптимізації сіткових графіків). Наведено геометричне трактування розглядуваних методів, приклади розв'язання задач математичного програмування й завдання для самостійної роботи.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» (спеціалізація «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси та виробництва»).

Іл. 31. Табл. 58. Бібліогр.: 24 назви

УДК 681.51.015.23:519.85(076.5)

ISBN 978-966-662-734-9

ПЕРЕДМОВА

На сучасному етапі суспільство розвивається в умовах науково-технічного прогресу, що охоплює не тільки науки й техніку, а й такі сфери, як промисловість, сільське господарство, військова справа та ін. Підвищення технічного рівня, ускладнення організаційної структури виробничих підрозділів потребує вдосконалення методів планування й керування.

Однією з необхідних умов підвищення ефективності керування є автоматизація процесів збору й оброблення інформації, широке використання засобів обчислювальної техніки, математичних моделей. Зі свого боку, це підвищує значення прикладної математики й кібернетики під час підготовки спеціалістів в області автоматизації.

Навчальний посібник призначено для вивчення математичних методів планування й керування в умовах повної інформації, що набули поширення як в економічних, так і прикладних задачах.

Особливу увагу приділено розгляду методів математичного програмування (планування), з допомогою яких вирішуються однокрокові й багатокрокові задачі оптимізації в умовах повної інформації. З метою полегшення засвоєння матеріалу й надання йому більшої наочності в посібнику широко використовується геометричне трактування методів лінійного, нелінійного, цілочислового й динамічного програмування та оптимізації сіткових графіків.

1. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОБҐРУНТУВАННЯ РІШЕНЬ

1.1. Однокрокові й багатокрокові моделі операцій

Однокрокова модель операції характеризується тим, що система в такій операції переходить з початкового в кінцевий стан стрибком, за один крок. Проміжні стани системи на інтервалі часу проведення операції (t_0, t) не враховуються. При цьому протягом усього часу керування системою стратегія $\overline{U}_{t_0}(t)$ керувального органу й стратегія середовища $\overline{\xi}_{t_0}(t)$ уважаються незмінними. До однокрокових операцій належить, наприклад, операція організації передання команд керування об'єктами керування. Унаслідок вирішення цього завдання можна визначити, які засоби і в якій кількості необхідно використовувати для передання. При цьому проміжні етапи створення комплексу засобів зв'язку (настроєння, входження у зв'язок тощо) у цій моделі не розглядаються.

Багатокрокова модель операцій відрізняється тим, що перехід системи з початкового в кінцевий стан здійснюється послідовно (за кроками), з урахуванням проміжних станів на кожному кроці. Інтервал часу (t_0, t) розбивається на послідовність підінтервалів (кроків) (t_0, t_1), (t_1, t_2) і т. д., на кожному з яких використовується своя стратегія керування $\overline{U}_{t_0}(t_1)$, $\overline{U}_{t_1}(t_2)$ і т. д.

При цьому вибір стратегії на наступному етапі здійснюється при врахуванні стану, якого набула система в кінці попереднього кроку. Прикладом багатокрокової моделі операції є передання повідомлень по мережі зв'язку (рис. 1.1).

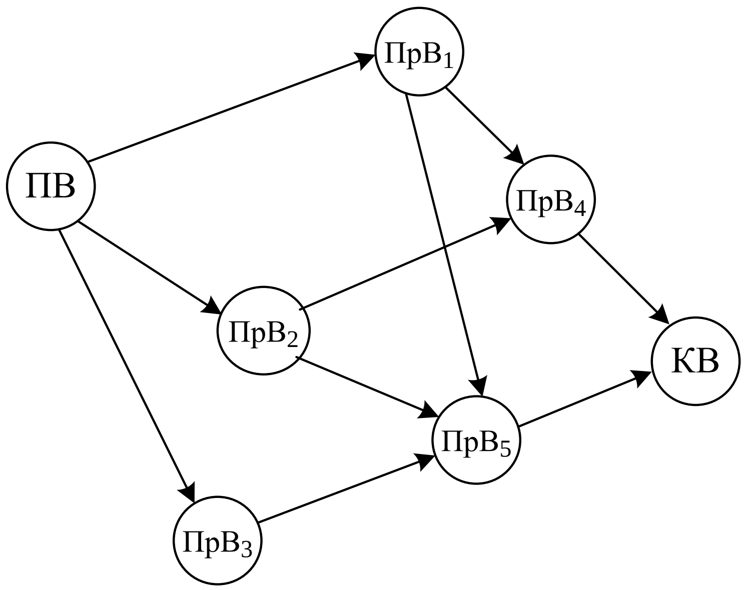

Рис. 1.1

Повідомлення від початкового (ПВ) до кінцевого (КВ) вузла зв'язку передається через проміжні (ПрВ) вузли зв'язку. Тут кроком є проміжок часу або довжина каналу передання повідомлення між сусідніми вузлами (наприклад, між $ПрВ_1$ і $ПрВ_4$). На початку кожного кроку (на відповідному вузлі зв'язку) вибирається подальший маршрут передання. Звичайно, що вибір маршруту буде визначатися тим, якого стану набула система в кінці попереднього кроку (на якому вузлі зв'язку в кінці попереднього кроку виявиться передане повідомлення).

Розглянемо класифікацію математичних методів обґрунтування розв'язків. В однокрокових моделях розв'язання полягає у визначенні кінцевого стану системи. Оскільки система «стрибком» переходить у кінцевий стан, без порушення цілісності можна записати: $\overline{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_0}) = 0$, $\overline{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \overline{\boldsymbol{X}}$. Незмінними на інтервалі $(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t})$ уважаються і стратегії середовища, тобто $\overline{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{t_0}}(\boldsymbol{t}) = \overline{\boldsymbol{\xi}}$. Тоді цільову функцію можна подати в такому вигляді:

$$\boldsymbol{J = f(\overline{X}, \overline{\xi}) = f(x_1,\ x_2, \dots, x_n,\ \xi_1,\ \xi_2, \dots, \xi_q)}, \tag{1.1}$$

де $\boldsymbol{f}$ – функція системи;

$\boldsymbol{x_1,\ x_2, \dots, x_n}$ – складові вектора $\overline{\boldsymbol{X}}$ станів;

$\boldsymbol{\xi_1,\ \xi_2, \dots, \xi_q}$ – складові вектора $\overline{\boldsymbol{X}}$ стратегій середовища.

Оскільки змінення стану системи пов'язане з розподілом ресурсів, буде правильним таке обмеження:

$$\overline{\boldsymbol{X}} \leq \overline{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{0}}, \tag{1.2}$$

де $\overline{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{0}}$ – виділені на проведення операції ресурси.

Тоді задача визначення стану $\overline{\boldsymbol{X}}$ системи формулюється так: необхідно знайти такий вектор $\overline{\boldsymbol{X}}$, який задовольняв би обмеженню (1.2) і перетворював на мінімум цільову функцію (1.1). Математичний запис цієї задачі має вигляд

$$\boldsymbol{J_{min}} = \boldsymbol{min}_{\overline{\boldsymbol{X}} \subset \boldsymbol{X} \leq \overline{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{0}}} \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{X}}, \overline{\boldsymbol{\xi}}). \tag{1.3}$$

У деяких випадках значення вектора $\overline{\boldsymbol{X}}$ мають бути невід'ємними. Це обмеження випливає з фізичної суті ресурсів, відведених на проведення операції (люди, засоби, машини, час і т. д.).

Сформульована задача (1.3) розв’язується методами математичного програмування. Математичне програмування (а точніше, планування) є розділом дослідження операцій, призначених для розв’язання однокрокових задач керування операціями. При цьому математичне програмування дає алгоритмічну форму розв’язання задачі, тобто видає обчислювальну процедуру, що приводить до розв’язку задачі.

Для розв’язання конкретних задач розроблено різні методи математичного програмування. Розглянемо детерміновані задачі керування операціями.

Детерміновані задачі мають місце в тих випадках, коли стратегії середовища є відомими або їх можна врахувати. Тоді вираз для цільової функцій набуде вигляду

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{f}(\overline{X}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}). \tag{1.4}$$

Якщо функція $\boldsymbol{f}$ є лінійною функцією змінних $\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$, обмеження (1.2) являють собою лінійні рівності або нерівності, а змінні $\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ задовольняють умові невід´ємності, то задача (1.3) розв’язується методами лінійного програмування.

У всіх інших випадках (функція $\boldsymbol{f}$ є нелінійною, обмеження (1.2) – нелінійними рівностями або нерівностями) методи розв'язання задачі (1.3) визначають суть нелінійного програмування.

Серед методів нелінійного програмування часто виокремлюють методи цілочислового й дробово-лінійного програмування. Завдання цілочислового програмування відрізняються тим, що при лінійних обмеженнях і цільовій функції на змінні $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ накладаються вимоги невід'ємності й цілочисельності. Що стосується дробово-лінійного програмування, то при лінійних обмеженнях цільова функція являє собою дробово-лінійну функцію змінних.

У стохастичних задачах умови проведення операції (стратегії середовища) є невідомими. Якщо цільову функцію задано у вигляді (1.1), а обмеження – у вигляді (1.2) і задано ймовірнісні характеристики стратегій середовища, то така задача розв'язується методами стохастичного програмування.

Важливим випадком стохастичної задачі є випадок, коли кількість стратегій середовища є звичайною, а величини $\boldsymbol{x_i}$ і $\boldsymbol{\xi_j}$ можуть набувати значень, що належать кінцевим множинам. Операції, що проводяться в цих умовах, називають статистичними іграми, а прийняття рішень здійснюється з допомогою методів теорії статистичних рішень [5].

В умовах протидії, коли стратегії середовища спрямовано на те, щоб перешкодити досягненню мети системою, для обґрунтування рішень застосовуються методи теорії стратегічних ігор, або просто теорії ігор.

Розглянемо класифікацію методів обґрунтування рішень при проведенні операцій, що описуються багатокроковими моделями. Якщо інтервал часу (t_0, t) проведення можна розбити (природним або штучним шляхом) на n підінтервалів (кроків), то стан системи на довільному k-му кроці можна подати у вигляді

$$\overline{x}_k = F(\overline{x}_{k-1}, \overline{U}_k, \overline{\xi}_k), \tag{1.5}$$

де $\overline{x}_k = \overline{x}_{k-1}(t_k)$ – стан системи в кінці k-го кроку;

$\overline{x}_{k-1} = \overline{x}_{k-2}(t_k)$ – стан системи в кінці (k – 1)-го кроку;

$\overline{U}_k = \overline{x}_{k-1}(t_k)$ – керування (стратегія) на k-му кроці;

$\overline{\xi}_k = \overline{\xi}_{k-1}(t_k)$ – стратегія середовища на k-му кроці.

Керування на k-му кроці кількісно можна оцінити деяким виграшем

$$J_k = \Phi_k(\overline{x}_k, \overline{U}_k, \overline{\xi}_k). \tag{1.6}$$

Вираз (1.6) є цільовою функцією на k-му кроці. Цільову функцію при керуванні всією операцією в більшості випадків можна подати сумою J_k. Функцією може бути час передання повідомлення від початкового до кінцевого вузла зв'язку. Цей час дорівнює сумі інтервалів часу передання повідомлення між сусідніми вузлами зв'язку.

Таким чином, у загальному випадку можна записати

$$J = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(\overline{x}_k, \overline{U}_k, \overline{\xi}_k). \tag{1.7}$$

На стратегію $\overline{U}_k$ на кожному кроці накладаються обмеження у вигляді рівностей або нерівностей.

Завдання вибору оптимального розв’язку формулюється так: знайти таке керування $\overline{U} = (\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_n)$, яке переводить систему з початкового стану $\overline{x}_0$ у кінцевий стан $\overline{x}_n$, задовольняє обмеження і перетворює на мінімум цільову функцію, тобто

$$J_{min} = min_{\overline{U}_k \subset \overline{U}, \overline{U}_k \leq U_k{}^0} \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(\overline{x}_k, \overline{U}_k, \overline{\xi}_k). \tag{1.8}$$

Якщо стратегія середовища є відомою, тобто задача є детермінованою, то її розв'язують методами динамічного програмування. У випадку, коли операція є комплексом робіт, наприклад з технічного обслуговування радіоелектронної апаратури, багатокрокове завдання доцільно вирішувати методами мережного планування.

В умовах невизначеності багатокрокове завдання розв´язується методами стохастичного динамічного програмування.

1.2. Класифікація математичних методів обґрунтування розв’язків

Математичні методи обґрунтування розв’язків для різних моделей операцій і різних умов проведення операції (повної інформації, невизначеності, протидії) наведено в класифікаційній табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Модель	Повна інформація	Невизначеність	Протидія
Однокрокова	Лінійне програмування, цілочислове програмування, нелінійне програмування	Стохастичне програмування, теорія статистичних розв’язків	Теорія ігор
Багатокрокова	Динамічне програмування, мережне планування	Стохастичне динамічне програмування	Теорія багатокрокових ігор

Зазначимо, що одну й ту саму задачу обґрунтування розв’язків можна розв’язати шляхом використання різних математичних методів. Так, наприклад, у деяких випадках багатокрокової моделі послідовність значень змінної на окремих кроках можна розглядати як одну багатовимірну змінну на одному кроці. Тоді багатокрокова модель перетвориться на однокрокову і замість методів динамічного програмування можна скористатися методами лінійного програмування. Вибір того чи іншого методу залежить як від самої задачі, так і від конкретних можливостей обчислювальних засобів.

У посібнику буде наведено стислі теоретичні відомості щодо розв'язання задач дослідження операцій в умовах визначеності (повної інформації), а саме однокрокові моделі (лінійного програмування, цілочислового програмування, нелінійнго програмування) і багатокрокові моделі (динамічного й мережного планування).

2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Графічний метод розв’язання загальної задачі лінійного програмування

Задача лінійного програмування формулюється таким чином: знайти такі невід'ємні значення змінних x_1, x_2, …, x_n, які задовольняють обмеженню

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + a_{in}x_n = b_i;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_ix_i + \ldots + C_nx_n. \qquad (2.2)$$

За таких умов задачу називають основною задачею лінійного програмування (ОЗЛП). При $n = m$ задача має єдиний розв'язок. У випадку, коли $m < n$, існує множина розв'язків і, отже, є можливість вибору найкращого (оптимального) розв'язку.

Будь-яку сукупність невід'ємних значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, яка задовольняє обмеження (2.1), назвемо допустимим, або опорним, розв'язком загальної задачі лінійного програмування (ЗЗЛП). Множина допустимих розв'язків являє собою підмножину множини невід'ємних значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і утворює область допустимих розв'язків (ОДР).

Сукупність значень $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ змінних, що забезпечує мінімальне значення цільової функції $L(\overline{x})$, називають оптимальним розв'язком ЗЗЛП.

Розглянемо випадок, коли кількість змінних x_i перевищує кількість рівнянь обмежень: $m - n = 2$. Для розв'язання задачі використовують графічний метод.

Виокремимо з усієї сукупності змінних x_i дві, які назвемо вільними. Використовуючи рівняння-обмеження (2.3), виразимо інші змінні, так звані базисні, через вільні.

Нехай як вільні вибрано змінні x_1 і x_2. Тоді базисні змінні будуть пов'язані з вільними співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
&x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2,\\
&x_4 = \beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2.
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Побудуємо координатні осі $0x_1$ і $0x_2$. Кожна точка координатної осі – це значення однієї з вільних змінних $x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$ (штрихуванням позначають ті півосі, на яких змінні x_1 і x_2 набувають невід'ємних значень). У першому квадраті системи координат $x_1 0 x_2$ змінні x_1 і x_2 будуть невід'ємними.

За умовою завдання інші змінні також мають бути невід'ємними, тобто $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, …, $x_n \ge 0$. Система рівнянь-обмежень для базисних змінних матиме такий вигляд:

$$\begin{gathered}\beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \ge 0,\\ \beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 \ge 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \ge 0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Наприклад, візьмемо $x_3 = 0$, тоді $\beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 = 0$ – пряма. Одна сторона півплощини $x_3 \ge 0$, друга – $x_3 < 0$. Заповнимо штрихуванням додатну півплощину (рис. 2.1).

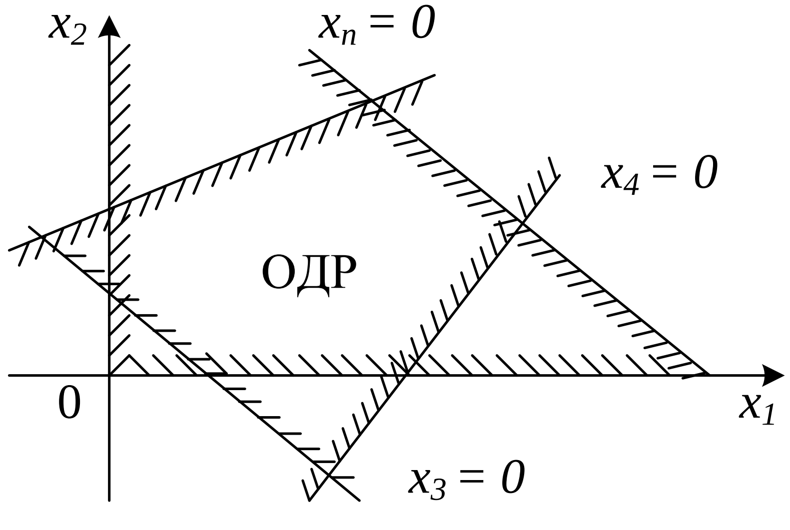

Рис. 2.1

Візьмемо $x_4 = 0$, тоді $\beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 = 0$. Одна сторона півплощини $x_4 > 0$, друга – $x_4 < 0$. Заповнимо штрихуванням додатну півплощину. Аналогічно визначимо півплощини для $x_n = 0$.

Визначимо область допустимих розв'язків (ОДР), де змінні набувають додатних значень:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots, x_j \ge 0,\ \ldots, x_n \ge 0.$$

Знайдемо оптимальний розв'язок. Виразимо цільову функцію $L(\overline{x})$

через вільні змінні:

$$\boldsymbol{L(\overline{x})} = \boldsymbol{C_1x_1} + \boldsymbol{C_2x_2} + \ldots + \boldsymbol{C_3(\beta_3} + \boldsymbol{\alpha_{31}x_1} + \boldsymbol{\alpha_{32}x_2}\,\boldsymbol{)} + \ldots$$
$$\ldots + \boldsymbol{C_n(\beta_n} + \boldsymbol{\alpha_{n1}x_1} + \boldsymbol{\alpha_{n2}x_2)} = \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1x_1} + \boldsymbol{\gamma_2x_2}, \qquad (2.5)$$

де $\boldsymbol{\gamma_0} = \boldsymbol{C_3\beta_3} + \ldots + \boldsymbol{C_n\beta_n};$

$\boldsymbol{\gamma_1} = \boldsymbol{C_1} + \boldsymbol{C_3\alpha_{31}} + \ldots + \boldsymbol{C_n\alpha_{n1}};$

$\boldsymbol{\gamma_2} = \boldsymbol{C_2} + \boldsymbol{C_3\alpha_{32}} + \ldots + \boldsymbol{C_n\alpha_{n2}}.$

Нехай

$$\boldsymbol{L(\overline{x})} = \Gamma_1 = \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1x_1} + \boldsymbol{\gamma_2x_2},$$

або

$$\boldsymbol{\gamma_0} - \Gamma_1 + \boldsymbol{\gamma_1x_1} + \boldsymbol{\gamma_2x_2} = 0,$$

– рівняння прямої в координатах $\boldsymbol{x_1}0\boldsymbol{x_2}$.

Пряма $\boldsymbol{L(\overline{x})}$ перетинає координатні осі в точках $\boldsymbol{x_1'} = \frac{\Gamma_1 - \boldsymbol{\gamma_0}}{\boldsymbol{\gamma_2}}$ і $\boldsymbol{x_2'} = \frac{\Gamma_1 - \boldsymbol{\gamma_0}}{\boldsymbol{\gamma_1}}$. Проведемо пряму $\boldsymbol{L(\overline{x})} = \Gamma_1$ (рис. 2.2).

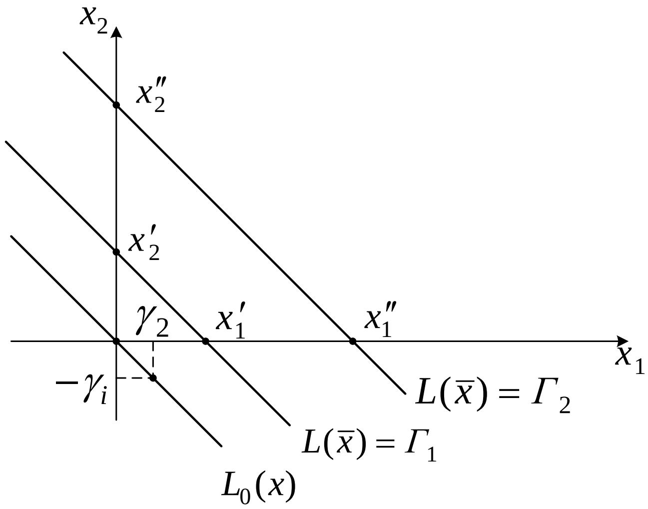

Рис. 2.2

Змінюємо значення цільової функції $\boldsymbol{L(\overline{x})}$ на Γ_2:

$$\boldsymbol{\gamma_0} - \Gamma_2 + \boldsymbol{\gamma_1x_1} + \boldsymbol{\gamma_2x_2} = 0.$$

Від Γ_1 до Γ_2 переміщуємо пряму $\boldsymbol{L(\overline{x})}$ паралельно самій собі. Для будування вихідної прямої із застосуванням графічного методу запишемо $\boldsymbol{L(\overline{x}) = \gamma_0}$.

Тоді рівняння основної прямої набуде вигляду

$$\boldsymbol{L_0\,(\overline{x}) = \gamma_{\,1} x_1 \,+\, \gamma_{\,2} x_2} = 0$$

і буде проходити через початок координат $\boldsymbol{x_1} 0 \boldsymbol{x_2}\ (0,\ 0)$. Друга точка, через яку буде проходити пряма $\boldsymbol{L_0\,(\overline{x})}$, має координати $\boldsymbol{(\gamma_2,\ -\gamma_1)}$. За координатами $(0,\ 0)$ і $(\boldsymbol{\gamma_2, -\gamma_1})$ будуємо основну пряму. Переміщення прямої $\boldsymbol{L_0\,(\overline{x})}$ в одному напрямку відповідає збільшенню її значення, а в протилежному – зменшенню.

Суть розв’язання задачі лінійного програмування – знаходження мінімуму цільової функції $\boldsymbol{L(\overline{x})}$. Для визначення напрямку переміщення $\boldsymbol{L(\overline{x})}$ використаємо поняття антиградієнта.

Якщо $\boldsymbol{F(\overline{x})}$ є диференційованою функцією, то її градієнтом називають вектор $\boldsymbol{\nabla F}(\overline{\boldsymbol{x}})$, проекціями якого є часткові похідні, а напрямок збігається з напрямком найбільшого зростання функції, тобто

$$\boldsymbol{\nabla F}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \left(\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_1},\ \frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_n}\right). \tag{2.6}$$

Вектор $-\boldsymbol{\nabla F}(\overline{\boldsymbol{x}})$ називають *антиградієнтом* функції $\boldsymbol{F(\overline{x})}$, який має вигляд

$$-\boldsymbol{\nabla F}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \left(-\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_1},\ -\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_2}, \ldots,\ -\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_n}\right). \tag{2.7}$$

Величина вектора $-\boldsymbol{\nabla F}(\overline{\boldsymbol{x}})$ дорівнює градієнту, а напрямок, протилежний градієнту, указує напрямок найбільшого спадання функції: $\boldsymbol{-\nabla L_0\,(\overline{x}) = (-\gamma_{\,1};\, -\gamma_{\,2})}$. Проекціями антиградієнта є координати $(\boldsymbol{-\gamma_1;\ -\gamma_2})$. Оскільки $\boldsymbol{\gamma_1} < 0$ і $\boldsymbol{\gamma_2} < 0$, антиградієнт $-\boldsymbol{\nabla L_0\,(\overline{x})}$ є спрямованим у перший квадрант координат $\boldsymbol{x_1} 0 \boldsymbol{x_2}$ (рис. 2.3, *а*). Якщо $\boldsymbol{\gamma_1}$ і $\boldsymbol{\gamma_2}$ мають різні знаки, то антиградієнт $-\boldsymbol{\nabla L_0\,(\overline{x})}$ є спрямованим у другий або четвертий квадрант координат $\boldsymbol{x_1} 0 \boldsymbol{x_2}$ (рис. 2.3, *б*).

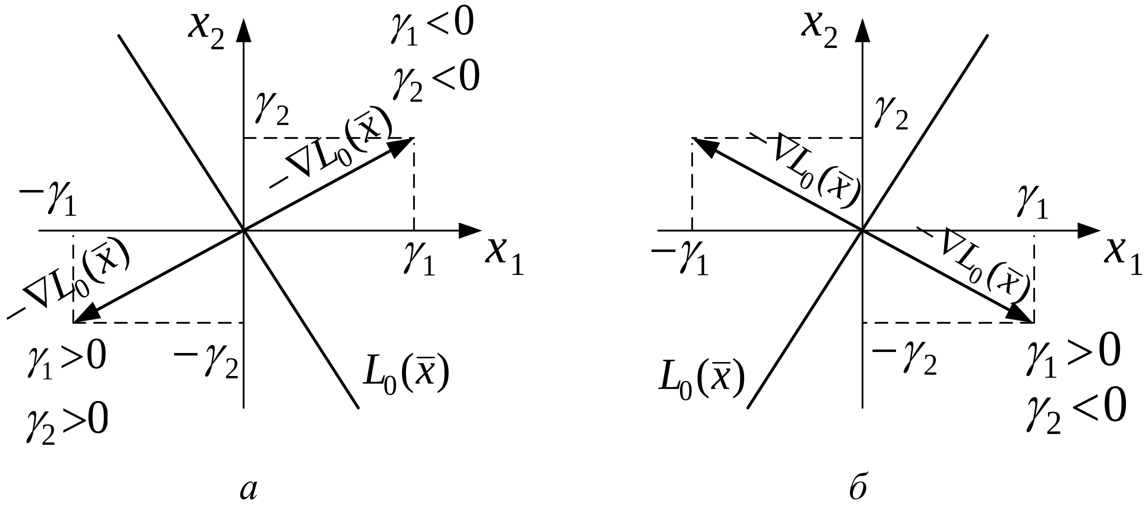

Рис. 2.3

Побудувавши багатокутник ОДР і основну пряму $\boldsymbol{L_0\ (\bar{x})}$, переміщуємо її паралельно самій собі в напрямку зменшення значення цільової функції $\boldsymbol{L(\bar{x})}$. Точка $\boldsymbol{\bar{x}}^*$, що належить ОДР (рис. 2.4) і є найбільш віддаленою від початку координат у напрямку $-\boldsymbol{\nabla L_0\ (\bar{x})}$, і буде оптимальним розв'язком.

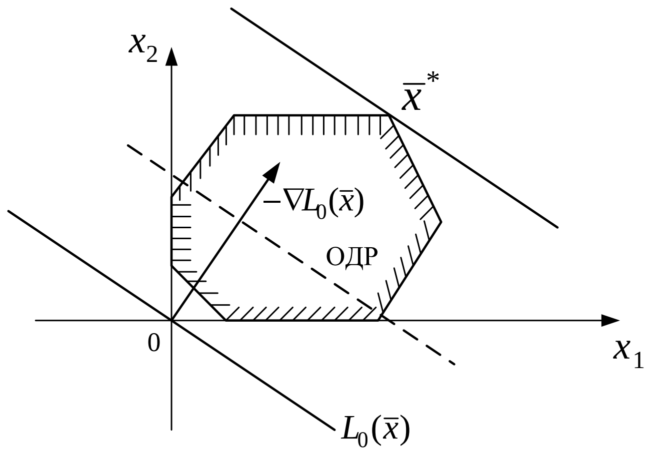

Рис. 2.4

Приклад 2.1. Знайти невід′ємні значення змінних $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$, які задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1} \quad + \quad \boldsymbol{x_3} \ = \ \mathbf{3}, \\ \boldsymbol{-3x_1 \ - \ x_2 - \ x_4} \ = \ \mathbf{4} \end{cases}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4.$$

Для цього прикладу $n - m = 2$. Виберемо x_1, x_2 як вільні змінні. Виразимо базові змінні x_3 і x_4 такими рівняннями:

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 + 3, \\ x_4 = 3x_1 - x_2 - 4. \end{cases}$$

Проведемо координатні осі $0x_1$ і $0x_2$ (рис. 2.5). Штрихуванням позначимо ті напіввісі, на яких вільні змінні x_1 та x_2 набувають невід'ємних значень.

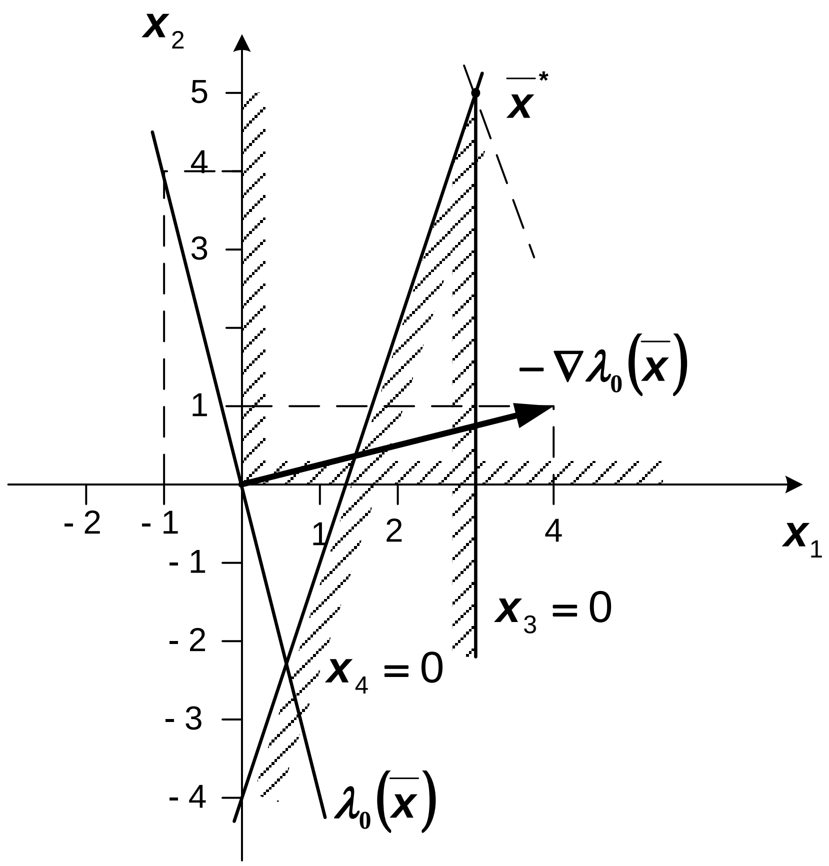

Рис. 2.5

Побудуємо пряму $x_3 = 0$. З рівняння

$$-x_3 + 3 = 0$$

випливає, що $x_1 = 3$. Таким чином, пряма $x_3 = 0$ є паралельною до осі $0x_2$ та перетинає вісь $0x_1$ у точці $x_1 = 3$. Очевидно, додатних значень змінна x_3 набуває в лівій від прямої x_3 = 0 напівплощині. Позначимо цю область штрихуванням.

Для будування прямої x_4 = 0 необхідно визначити дві точки, які їй належать. Такими точками є точки перетину прямої x_4 = 0 з осями $0x_1$ та $0x_2$.

Задаючи в рінянні

$$3x_1 - x_2 - 4 = 0$$

x_2 = 0, знаходимо точку перетину прямої з віссю $0x_1$, тобто $x_1 = \frac{4}{3}$, а задаючи x_1 = 0 – точку перетину прямої з віссю $0x_2$, тобто x_2 = –4. Проведемо через ці точки пряму x_4 = 0 та позначимо штрихуванням область, у якій x_4 набуває додатних значень.

Трикутник, обмежений прямими x_3 = 0 та x_4 = 0 и додатною напіввіссю $0x_1$, є областю допустимих розв'язків, тому що будь-яка точка в середині трикутника або на його межі задовольняє вимоги невід'ємності змінних x_1, x_2, x_3, x_4.

Виразимо цільову функцію $L(\overline{x})$ через вільні змінні x_1 і x_2:

$$L(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = x_1 - 2x_2 + 2(-x_1 + 3) - (3x_1 - x_2 - 4) =$$
$$= -4x_1 - x_2 + 10.$$

Рівняння основної прямої $L_0(\overline{x})$ буде мати вигляд

$$L_0(\overline{x}) = -4x_1 - x_2,$$

для якої $\gamma_1 = -4$, $\gamma_2 = -1$.

Основна пряма проходить через початок координат і точку з координатами (–1; 4). Вектор антиградієнта $-\nabla L_0(\overline{x})$ = (4; 1). Оскільки проекції вектора є додатними, пряма $L_0(\overline{x})$ буде переміщуватися зліва направо и знизу вверх. Переміщуючи основну пряму в цьому напрямку, знаходимо точку ОДР, найбільш віддалену від початку координат. Такою точкою буде вершина трикутника ОДР, утворена перетином прямих x_3 = 0 та x_4 = 0. Таким чином, у точці $\overline{x}^*$ оптимальними значеннями змінних x_3

та $\boldsymbol{x_4}$ є $\overline{\boldsymbol{x}}_3^* = 0$ та $\overline{\boldsymbol{x}}_4^* = 0$. З рівняння $-3\overline{\boldsymbol{x}}_1^* + 3 = 0$ знаходимо, що $\overline{\boldsymbol{x}}_1^* = 3$**,** а з рівняння $3\overline{\boldsymbol{x}}_1^* - \overline{\boldsymbol{x}}_2^* - 4 = 0$, що $\overline{\boldsymbol{x}}_2^* = 5$.

Таким чином, оптимальним розв'язком розглядуваної задачі лінійного програмування буде

$$\overline{\boldsymbol{x}}^* = (3;\ 5;\ 0;\ 0).$$

При цьому мінімальне значення цільової функції

$$\boldsymbol{L_{min}(\overline{x})} = -4 \cdot 3 - 5 + 10 = -7.$$

Можливі розв’язки задачі лінійного програмування графічним методом:

1. Єдиний оптимальний розв’язок (найбільш типовий випадок), який можна отримати в одній із вершин багатокутника ОДР (див. рис. 2.4).

2. Нескінченна кількість оптимальних розв’язків (пряма $\boldsymbol{L_0\ (\ \overline{x}\ )}$ є паралельною до однієї зі сторін багатокутника ОДР, причому ця сторона є найбільш віддаленою від початку координат у напрямку $-\boldsymbol{\nabla L_0(\overline{x})}$ (рис. 2.6).

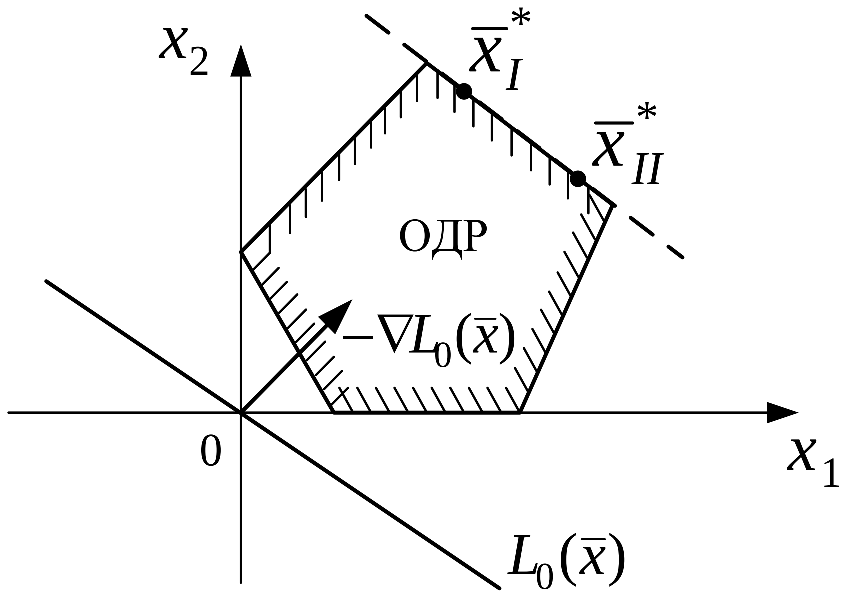

Рис. 2.6

3. Задача лінійного програмування не має оптимального розв’язку. У цьому випадку ОДР є необмеженою знизу і цільова функція може набувати досить малих значень (рис. 2.7).

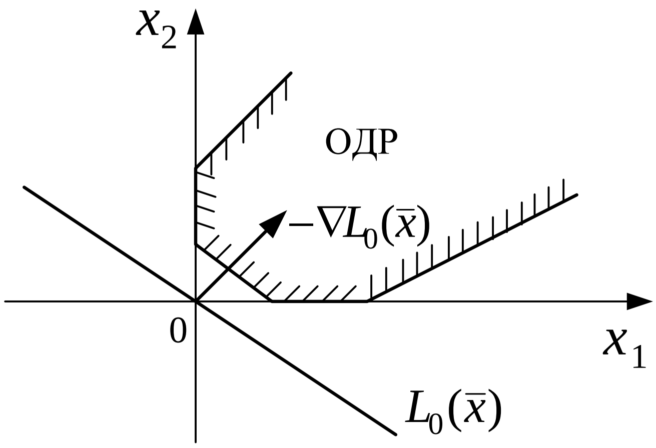

Рис. 2.7

4. Задача лінійного програмування не має допустимих розв'язків (система рівнянь-обмежень є несумісною, і області допустимих роз'язків не існує) (рис. 2.8).

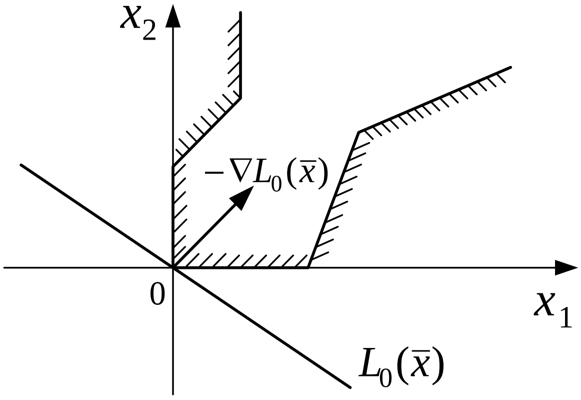

Рис. 2.8

Алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом:

– вибираємо $\boldsymbol{k = n - m}$ = 2 вільні змінні;

– виражаємо інші (базисні) змінні й цільову функцію через вільні змінні;

– будуємо багатокутник ОДР;

– будуємо пряму $\boldsymbol{L_0(\bar{x})}$ (основну пряму цільової функції) і визначаємо вектор $-\boldsymbol{\nabla L_0(\bar{x})}$;

– знаходимо точку $\overline{x}^*$ (або множину точок ОДР), найбільш віддалену від початку координат, шляхом переміщення основної прямої $L_0\ (\overline{x})$ паралельно самій собі в напрямку $-\nabla L_0\,(\overline{x})$. Ця точка й буде оптимальним розв'язком (якщо такий існує) задачі лінійного програмування.

Висновки:

1. Оптимальний розв'язок задачі ЛП, якщо такий існує, знаходиться на межі багатокутника ОДР. При цьому задача ЛП може мати один оптимальний розв'язок або кілька.
2. Оптимальний розв'язок є єдиним у точці, де (***n* – *m***) змінних перетворюються на нуль, тобто в одній із вершин багатокутника ОДР.
3. Для знаходження оптимального розв'язку необхідно перевірити на оптимальність лише ті точки, де (***n* – *m***) змінних перетворюються на нуль, тобто вершини багатокутника ОДР.

2.2. Симплекс-метод

Метод поширюється на загальний випадок, коли ***k*** = (***n* – *m***) > 2. У цьому випадку в рівнянннях-обмеженнях задають ***k*** вільних $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_k$ і ***m*** базисних (які виражаються через вільні змінні) $x_{k+1},\ x_{k+2},\dots,\ x_n$ змінних.

Зв'язки змінних виражають системою рівнянь

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \beta_{k+1} + \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k,\\
x_{k+2} &= \beta_{k+2} + \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,k}x_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{k+m} &= \beta_{k+m} + \alpha_{k+m,1}x_1 + \alpha_{k+m,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+m,k}x_k.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Рівняння гіперплощин для $x_{k+1} = 0,\ x_{k+2} = 0,\ \dots,\ x_n = 0$ в $(n-m)$-вимірному просторі будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\beta_{k+1} + \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k &= 0,\\
\beta_{k+2} + \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,k}x_k &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\beta_{k+m} + \alpha_{k+m,1}x_1 + \alpha_{k+m,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+m,k}x_k &= 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Таким чином, гіперплощини $x_1 = x_2 = x_k = 0$ утворюють (***n* – *m***)-вимірну систему координат. Перетин цих гіперплощин дає точку, у якій

$$x_{k+1} = \beta_{k+1},\ x_{k+2} = \beta_{k+2},\ \dots,\ x_{k+m} = \beta_{k+m}. \tag{2.10}$$

Якщо $\boldsymbol{\beta_{k+1}} \geq 0$, $\boldsymbol{\beta_{k+2}} \geq 0$, …, $\boldsymbol{\beta_{k+m}} \geq 0$, то точка перетину гіперплощин є однією з вершин багатогранника ОДР (рис. 2.9).

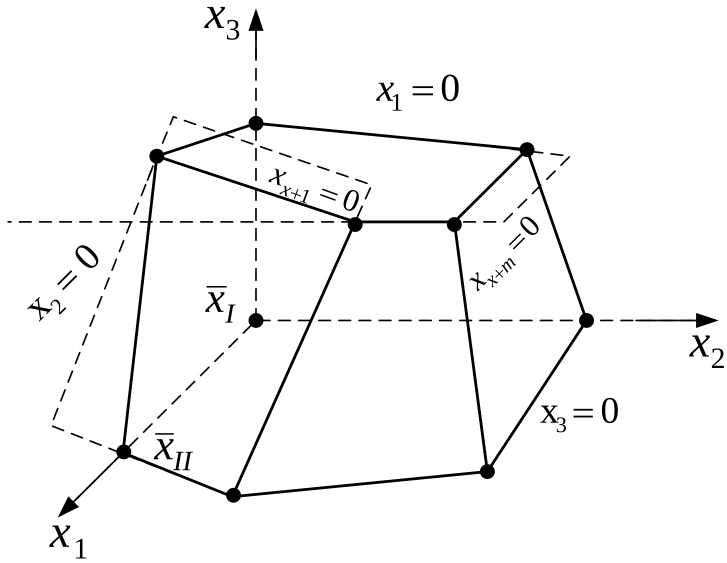

Рис. 2.9

Для знаходження однієї з вершин багатогранника ОДР необхідно прирівняти до нуля вільні змінні. Тоді за умови $\boldsymbol{\beta_{k+1}} \geq 0$, …, $\boldsymbol{\beta_{k+l}} \geq 0$, …, $\boldsymbol{\beta_{k+m}} \geq 0$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = (0, 0, \ldots, 0, \boldsymbol{\beta_{k+1}}, \boldsymbol{\beta_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{\beta_{k+m}}) \qquad (2.11)$$

буде допустимим розв'язком загальної задачі лінійного програмування.

Виразимо цільову функцію через вільні змінні:

$$\boldsymbol{L(\overline{x})} = \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1 x_1} + \boldsymbol{\gamma_2 x_2} + \ldots + \boldsymbol{\gamma_k x_k}. \qquad (2.12)$$

Знайдемо кілька допустимих розв'язків:

$$\overline{\boldsymbol{x_1}}(\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2} = \ldots = \boldsymbol{x_k} = 0) \to \boldsymbol{L(\overline{x_I})} = \boldsymbol{\gamma_0^I},$$
$$\overline{\boldsymbol{x_2}}(\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_3} = \ldots = \boldsymbol{x_{k+1}} = 0) \to \boldsymbol{L(\overline{x_2})} = \boldsymbol{\gamma_0^{II}}.$$

Перебираючи сукупність вільних змінних $\boldsymbol{k = n - m}$ і визначаючи $\boldsymbol{L(\overline{x})}$, можна знайти оптимальний розв'язок ЗЛП. Метод простого перебирання не є ефективним через складність при обчисленні.

Для розв'язання задач ЛП при будь-яких значеннях $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{m}$ було розроблено симплекс-метод, або метод послідовного поліпшення плану.

Суть симплекс-методу полягає в тому, що перехід від однієї вершини багатогранника ОДР до іншої здійснюється не довільно, а таким чином, щоб значення цільової функції не збільшувалося. При використанні симплекс-методу розв'язок від кроку до кроку наближається до оптимального.

1. Відповідно до загальних принципів розв'язання ЗЛП вибираємо ***k = (n–m)*** вільних змінних, наприклад $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_k}$, і виражаємо базисні змінні $\boldsymbol{x_{k+1}}, \boldsymbol{x_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ і цільову функцію $\boldsymbol{L(\overline{x})}$ через вільні змінні.

2. Уважаючи вільні змінні такими, що дорівнюють нулю, отримаємо перший розв'язок. Нехай $\boldsymbol{\beta_{k+1}} \geq 0, \boldsymbol{\beta_{k+2}} \geq 0, \ldots, \boldsymbol{\beta_{k+m}} \geq 0$. Тоді розв'язок $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ $(\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2} = \ldots = \boldsymbol{x_k} = 0)$ є допустимим (опорним).

3. Перехід до іншої вершини змінює значення цільової функції $\boldsymbol{L(\overline{x})}$. З іншого боку, цей перехід означає, що значення однієї з вільних змінних стає додатним, а однієї з базисних – таким, що дорівнює нулю. Наприклад, при переході з вершини $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ у вершину $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}$ змінна $\boldsymbol{x_1}$ збільшується, а змінна $\boldsymbol{x_{k+1}}$ зменшується до нуля.

Розглянемо вираз для цільової функції

$$\boldsymbol{L(\overline{x})} = \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1 x_1} + \boldsymbol{\gamma_2 x_2} + \ldots + \boldsymbol{\gamma_k x_k}. \qquad (2.13)$$

При $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2} = \ldots = \boldsymbol{x_k} = 0$, тобто у вершині $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$, значення цільової функції дорівнює $\boldsymbol{\gamma_0}$. Якщо коефіцієнти $\boldsymbol{\gamma_1}, \boldsymbol{\gamma_2}, \ldots, \boldsymbol{\gamma_k} > 0$, то при переході до іншої вершини (збільшення однієї з вільних змінних, наприклад $\boldsymbol{x_1}$) збільшиться цільова функція.

У розглянутій задачі проводиться мінімізація цільової функції при додатних коефіцієнтах $\boldsymbol{\gamma_i}$ (окрім $\boldsymbol{\gamma_0}$). Тому у виразі для $\boldsymbol{L(\overline{x})}$ перехід до іншої вершини багатогранника ОДР є недоцільним і розв'язок $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ $(\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2} = \ldots = \boldsymbol{x_k} = 0)$ у цьому випадку буде оптимальним.

Нехай у виразі $\boldsymbol{L(\overline{x})} = \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1 x_1} + \boldsymbol{\gamma_2 x_2} + \ldots + \boldsymbol{\gamma_k x_k}$ коефіцієнт $\boldsymbol{\gamma_1} < 0$. Це означає, що збільшуючи $\boldsymbol{x_1}$, тобто переходячи до іншої вершини багатогранника ОДР, можна зменшувати значення цільової функції. Такий перехід змінює сукупності вільних і базисних змінних. Тому при $\boldsymbol{\gamma_1} < 0$ вільну змінну $\boldsymbol{x_1}$ необхідно перетворити на базисну, а одну з базисних змінних – на вільну.

Визначимо, яку з базисних змінних необхідно перетворити на вільну. Розглянемо коефіцієнти $\boldsymbol{\alpha_{k+1,1}}, \boldsymbol{\alpha_{k+2,1}}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_{k+l,1}}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_{k+m,1}}$ при змінній $\boldsymbol{x_1}$ у виразі (2.11) і визначимо, які з них є від'ємними.

Нехай від'ємні значення мають коефіцієнти $\boldsymbol{\alpha_{k+1,1}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{k+2,1}}$. Оскільки при переході до наступної вершини збільшується тільки змінна $\boldsymbol{x_1}$, а інші вільні змінні залишаються такими, що дорівнюють нулю, то з огляду на те, що $\boldsymbol{\alpha_{k+1,1}} < 0$ і $\boldsymbol{\alpha_{k+2,1}} < 0$, змінні $\boldsymbol{x_{k+1}}$ і $\boldsymbol{x_{k+2}}$ зменшуються. При цьому

x_{k+1} дорівнює нулю при $x_1 = -\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}$, а x_{k+2} – при $x_1 = -\frac{\beta_{k+2}}{\alpha_{k+2,1}}$. Якщо

$$\left|\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}\right| < \left|\frac{\beta_{k+2}}{\alpha_{k+2,1}}\right|, \qquad (2.14)$$

то x_{k+1} набуває нульового значення раніше за x_{k+2}, і при подальшому збільшенні x_1 змінна x_{k+1} може набути від'ємних значень, що суперечить обмеженням задачі лінійного програмування. Отже, при виконанні нерівності (2.14) змінну x_{k+1} необхідно перетворити з базисної на вільну, а x_1 – з вільної на базисну.

Тепер вільними змінними будуть $x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$.

Виразимо базисні змінні й цільову функцію через нові вільні змінні:

$$\begin{gathered}
x_{k+2} = \mu_{k+2} + \lambda_{k+2,2}x_2 + \ldots + \lambda_{k+2,j}x_j + \lambda_{k+2,k}x_k + \\
+ \lambda_{k+2,k+1}x_{k+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{k+l} = \mu_{k+l} + \lambda_{k+l,2}x_2 + \ldots + \lambda_{k+2,j}x_j + \ldots + \lambda_{k+l,k}x_k + \\
+ \lambda_{k+l,k+1}x_{k+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{k+m} = \mu_{k+m} + \lambda_{k+m,2}x_2 + \ldots + \lambda_{k+m,j}x_j + \ldots \\
\ldots + \lambda_{k+m,k}x_k + \lambda_{k+m,k+1}x_{k+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1 = \mu_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1j}x_j + \ldots + \lambda_{1k}x_k + \lambda_{1,k+1}x_{k+1},
\end{gathered} \qquad (2.15)$$

$$L(\overline{x}) = \delta_0 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_j x_j + \ldots + \delta_k x_k + \delta_{k+1}x_{k+1}. \qquad (2.16)$$

Уважаємо, що всі вільні змінні $x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ дорівнюють нулю, тоді

$$\begin{gathered}
x_{k+2} = \mu_{k+2}, \\
\ldots\ldots\ldots \\
x_{k+l} = \mu_{k+l}, \\
\ldots\ldots\ldots \\
x_{k+m} = \mu_{k+m}, \\
x_1 = \mu_1
\end{gathered} \qquad (2.17)$$

або $\overline{x}_2 = (\mu_1, 0, 0, \ldots, 0, \mu_{k+2}, \ldots, \mu_{k+l}, \ldots, \mu_{k+m})$. При цьому значення цільової функції

$$L(\overline{x_2}) = \delta_0 \le \gamma_0. \qquad (2.18)$$

Якщо всі коефіцієнти δ_j, окрім δ_0, у виразі (2.16) є додатними, то розв'язок (2.17) є оптимальним. В іншому випадку, якщо є хоча б один від'ємний коефіцієнт δ_j, пошук оптимального розв'язку триває відповідно до алгоритму.

На практиці систему рівнянь (2.15) і вираз для цільової функції зручно записати у вигляді

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \beta_{k+1} - (\nu_{k+1,1}x_1 + \nu_{k+1,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+1,k}x_k);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{k+l} &= \beta_{k+l} - (\nu_{k+l,1}x_1 + \nu_{k+l,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+l,k}x_k); \qquad (2.19)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{k+m} &= \beta_{k+m} - (\nu_{k+m,1}x_1 + \nu_{k+m,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+m,k}x_k).
\end{aligned}$$

$$L(\overline{x}) = \gamma_0 - (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_j x_j + \ldots + \rho_k x_k), \qquad (2.20)$$

де $\nu_{ij} = -\alpha_{ij}$, $\rho_{ij} = -\gamma_{ij}$.

Таке вираження базисних змінних дає змогу спростити процедуру обчислень. Від'ємні значення коефіцієнтів у (2.20) означають, що оптимальний розв'язок є. У тому випадку, якщо хоча б один із коефіцієнтів ρ_1 є додатним, змінну x_1 необхідно перетворити на базисну.

Для того щоб визначити, яку з базисних змінних перетворити на вільну, необхідно серед коефіцієнтів $\nu_{k+1,i}$ при x_i у (2.20) знайти однакові за знаком з вільним членом і визначити співвідношення кожного вільного члена й відповідного коефіцієнта. Базисну змінну, для якої це співвідношення є мінімальним, необхідно перетворити на вільну.

Отже, алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом зводимо до виконання таких операцій:

1. Вибираємо $k = n - m$ вільних змінних.
2. Виражаємо базисні змінні і цільову функцію через вільні змінні у вигляді (2.22) і (2.23).
3. Визначаємо розв'язок задачі лінійного програмування, для чого в (2.22) усі вільні змінні зводимо до нуля. Якщо всі вільні члени β_{k+i} є додатними, то отриманий розв'язок є допустимим.

4. Перевіряємо допустимийй розв’язок на оптимальність. Якщо всі коефіцієнти $\boldsymbol{\rho_i}$ в (2.18) є від’ємними, то отриманий допустимий розв’язок є оптимальним.

5. Нехай коефіцієнт $\boldsymbol{\rho_i}$ у (2.20) є додатним. Шукаємо серед коефіцієнтів $\boldsymbol{\nu_{k+i,j}}$ $(\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,m}},\ \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1,k}})$ такі, які мають однаковий знак з вільними членами $\boldsymbol{\beta_{k+i}}$. Для всіх таких коефіцієнтів знаходимо відношення $\frac{\boldsymbol{\beta_{k+i}}}{\boldsymbol{\alpha_{k+i,j}}}$ і визначаємо мінімальне з них, тобто $\boldsymbol{min}\frac{\boldsymbol{\beta_{k+i}}}{\boldsymbol{\alpha_{k+i,j}}}$. Змінна $\boldsymbol{x_{k+i,j}}$, для якої виконується ця умова, перетворюється на вільну, а змінна $\boldsymbol{x_i}$, коефіцієнт $\boldsymbol{\rho_i}$ якої в (2.20) є додатним, – на базисну.

6. Виконуємо операції по пп. 2–5 доти, доки не буде знайдено оптимального розв’язку.

Наведемо приклад розв’язання задачі лінійного програмування симплекс-методом. Оскільки симплекс-метод є універсальним для будь-яких $\boldsymbol{k = n - m}$, у наведеному прикладі розглянемо випадок $\boldsymbol{k} = 2$. Це дасть змогу дослідити графічне тлумачення симплекс-методу.

Приклад 2.2. Знайти невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_5}$, що задовольняють системі обмежень

$$2\boldsymbol{x_1} + 3\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = 18,$$
$$-\boldsymbol{x_1} + 3\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_4} = 9,$$
$$2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_5} = 10$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію $\boldsymbol{L(\overline{x})} = -4\boldsymbol{x_1} - 2\boldsymbol{x_2}$.

На рис. 2.10 зображено багатокутник ОДР, кожна вершина якого є допустимим розв’язком.

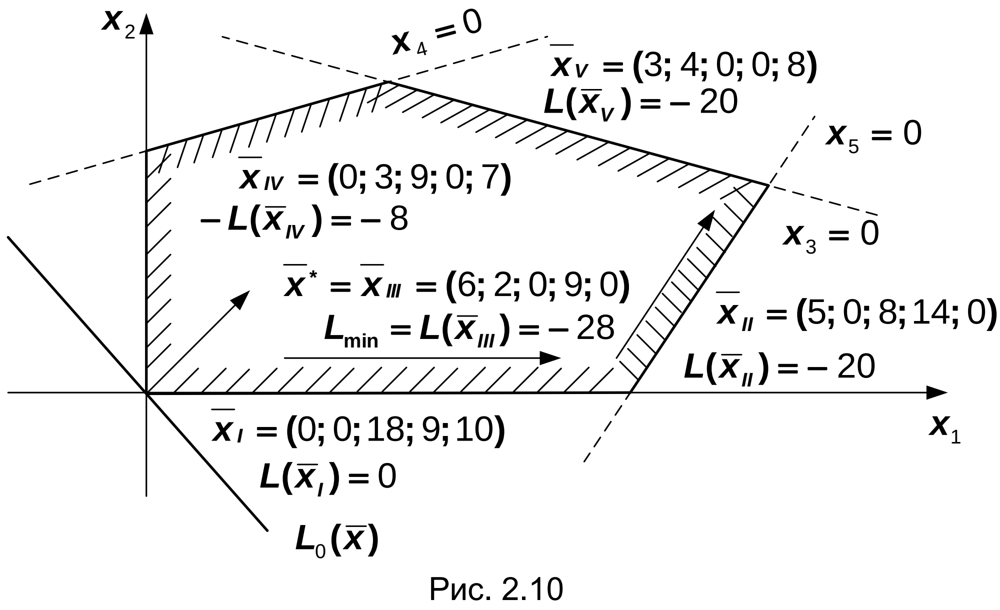

Рис. 2.10

Біля кожної вершини вказано відповідні розв’язки і значення цільової функції. З рисунка випливає, що оптимальним є такий розв’язок:

$$\overline{x}^* = \overline{x}_{III} = (6; 2; 0; 9; 0).$$

Мінімальне значення цільової функції

$$L_{min} = L(\overline{x}_{III}) = -28.$$

Розв’яжемо цю задачу симплекс-методом. Виберемо як вільні змінні x_1 і x_2. Тоді систему рівнянь-обмежень і вираз для цільової функції запишемо таким чином:

$$x_3 = 18 - (2x_1 + 3x_2);$$
$$x_4 = 9 - (-x_1 + 3x_2);$$
$$x_5 = 10 - (2x_1 - x_2);$$
$$L(\overline{x}) = 0 - (4x_1 + 2x_2).$$

Уважаючи $x_1 = x_2 = 0$, отримаємо x_3 = 18, x_4 = 9, x_5 = 10. Усі значення змінних є невід'ємними і, отже, розв’язок $\overline{x}_I$ = (0; 0; 18; 9; 10) є допустимим (вершина $\overline{x}_I$ на рис. 2.10). Цей розв´язок є допустимим, але не оптимальним, тому що коефіцієнти при x_1 і x_2 у виразі для $L(\overline{x})$ є додатними. Отже, будь-яку з цих змінних можна збільшити до деякого додатного значення, тобто перетворити з вільної змінної на базисну. Перетворимо на базисну змінну x_1. З цього починається перший крок розв’язання задачі симплекс-методом.

З'ясуємо, яку зі змінних (x_3, x_4 або x_5) слід перетворити з базисної на вільну. Коефіцієнти при x_1 є однаковими за знаком з вільними членами у виразах для x_3 і x_5. Визначимо відношення вільного члена до кожного з цих коефіцієнтів. Ці відношення відповідно становлять 18/2 = 9 і 10/2 = 5. Оскільки відношення вільного члена до коефіцієнта при x_1 для x_5 є меншим, ніж для змінної x_3, то змінну x_5 перетворимо з базисної на вільну.

Тепер вільними є змінні x_2 і x_5. Виразимо базисні змінні x_1, x_3 і x_4 і цільову функцію $L(\overline{x})$ через x_2 і x_5. З третього рівняння системи рівнянь

$$x_1 = 5 - (0{,}5x_5 - 0{,}5x_2).$$

Підставивши це рівняння у вирази для x_3, x_4 і $L(\overline{x})$, отримаємо

$$x_3 = 8 - (-x_5 + 4x_2),$$
$$x_4 = 14 - (0{,}5x_5 + 2{,}5x_2),$$
$$L(\overline{x}) = -20 - (-2x_5 + 4x_2).$$

Уважаючи вільні змінні $x_2 = x_5 = 0$, отримаємо $x_1 = 5$, $x_3 = 8$, $x_4 = 14$.

Усі змінні – невід'ємні, отже, розв'язок $\overline{x}_{II}$ = (5; 0; 8; 14; 0) є допустимим і відповідає вершині $\overline{x}_{II}$ на рис. 2.10. Таким чином, після виконання першого кроку цільова функція зменшується до $L(\overline{x}) = -20$.

Проаналізуємо, чи є розв´язок $\overline{x}_{II}$ оптимальним. Оскільки в рівнянні для цільової функції коефіцієнт при x_2 є додатним, оптимального розв´язку ще не отримано. Очевидно, що значення змінної x_2 можна збільшити, переводячи її до базисних. Визначимо, яку змінну з базисних необхідно перетворити на вільну.

Коефіцієнти при x_2 мають однакові знаки з вільними членами у виразах для x_3 і x_4. Оскільки відношення вільного члена до коефіцієнта при x_2 для x_3 є меншим, ніж для x_4, тобто 8/4 < 14/2,5, то змінну x_3 перетворимо на вільну. Таким чином, на другому етапі вільними будуть змінні x_3 і x_5, а базисними – x_1, x_2 і x_4.

Виразимо базисні змінні й цільову функцію $L(\overline{x})$ через вільні змінні:

$$x_1 = 6 - (0{,}125x_3 + 0{,}375x_5);$$
$$x_2 = 2 - (0{,}25x_3 - 0{,}25x_5);$$
$$x_4 = 9 - (-0{,}625x_3 + 1{,}125);$$
$$L(\overline{x}) = -28 - (-x_3 - x_5).$$

Уважаючи вільні змінні x_3 і x_5 такими, що дорівнюють нулю, отримаємо

$$x_1 = 6,\ x_2 = 2,\ x_4 = 9.$$

Розв'язок $\overline{x}_{III}$ = (6; 2; 0; 9; 0) є допустимим, оскільки всі змінні невід'ємні. Отже, після виконання другого кроку здійснено перехід з вершини $\overline{x}_{II}$ у вершину $\overline{x}_{III}$ багатокутника ОДР. При цьому значення цільової функції зменшилося: $L(\overline{x}_{III}) = -28$.

Перевіримо розв'язок $\overline{x}_{III}$ на оптимальність. З огляду на те, що всі коефіцієнти при вільних змінних у виразі для $L(\overline{x})$ є від'ємними, розв'язок $\overline{x}_{III}$ буде оптимальним для $\overline{x}^*$.

Таким чином, перехід від однієї вершини багатокутника ОДР до іншої відповідно до алгоритму симплекс-методу супроводжується зменшенням цільової функції доти, доки не буде знайдено вершину, у якій ця функція є мінімальною.

Розв’язання задач лінійного програмування істотно спрощується, якщо скористатися симплекс-таблицями. Для кожного кроку завдання складається своя симплекс-таблиця. Перехід між симплекс-таблицями на черговому кроці здійснюється за певними правилами симплекс-перетворення.

Вихідними даними для заповнення першої симплекс-таблиці є вільні члени (ВЧ) і коефіцієнти при змінних у виразі для цільової функції:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \beta_{k+1} - (\nu_{k+1,1}x_1 + \nu_{k+1,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+1,k}x_k); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+l} &= \beta_{k+l} - (\nu_{k+l,1}x_1 + \nu_{k+l,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+l,k}x_k); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+m} &= \beta_{k+m} - (\nu_{k+m,1}x_1 + \nu_{k+m,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+m,k}x_k); \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$L(\overline{x}) = \gamma_0 - (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_j x_j + \ldots + \rho_k x_k). \tag{2.22}$$

Симплекс-таблиця 2.1 складається з (m + 1) рядків і (k + 1) стовпців. У першому рядку записують коефіцієнти цільової функції, в інших – коефіцієнти у виразах для базисних змінних.

Таблиця 2.1

Базисні змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	X_1	X_2	…	X_k
$L(\overline{X})$	γ_0	ρ_1	ρ_2	…	ρ_k
X_{k+1}	β_{k+1}	$\nu_{k+1,1}$	$\nu_{k+1,2}$		$\nu_{k+1,k}$
X_{k+2}	β_{k+2}	$\nu_{k+2,1}$	$\nu_{k+2,2}$	…	$\nu_{k+2,k}$
…	…	….	….	…	…
X_{k+m}	$\beta_{k+m,1}$	$\nu_{k+m,1}$	$\nu_{k+m,2}$	…	$\nu_{k+2,k}$

Для отримання першого розв'язку всі вільні змінні необхідно прирівняти до нуля. Тоді на перетині першого стовпця й першого рядка знаходитиметься значення цільової функції, а інші елементи першого стовпця будуть базисними змінними.

Якщо всі значення базисних змінних є від'ємними, то отриманий розв'язок буде допустимим. Для перевірки цього розв'язку на оптимальність розглянемо перший рядок симплекс-таблиці 2.1.

Якщо всі елементи цього рядка (за винятком вільного члена) є від'ємними, то отриманий розв'язок буде оптимальним. Якщо один або кілька елементів у першому рядку є додатними, то розв'язок не буде оптимальним і його можна поліпшити. Для цього необхідно перетворити вільні й базисні змінні відповідно до правил симплекс-перетворення.

1. Серед додатних елементів першого рядка симплекс-таблиці 2.1 вибираємо один з найбільшим значенням. Нехай це буде коефіцієнт $\boldsymbol{\rho_1}$ при змінній $\boldsymbol{x_1}$. Це означає, що змінну $\boldsymbol{x_1}$ необхідно перетворити з вільної на базисну. Стовпець, у якому знаходиться найбільший додатний коефіцієнт, називають *розв'язувальним стовпцем.*

2. У розв'язувальному стовпці визначаємо ті елементи, які мають однаковий знак з відповідними вільними членами. Нехай це будуть коефіцієнти $\boldsymbol{\nu_{k+1,1}}$ і $\boldsymbol{\nu_{k+2,1}}$.

3. Розраховуємо відношення відповідних вільних членів до коефіцієнтів $\boldsymbol{\nu_{k+1,1}}$ і $\boldsymbol{\nu_{k+2,1}}$. Нехай виконується нерівність

$$\frac{\boldsymbol{\beta_{k+1}}}{\boldsymbol{\nu_{k+1,1}}} < \frac{\boldsymbol{\beta_{k+2}}}{\boldsymbol{\nu_{k+2,1}}}.$$

Тоді рядок, що відповідає базисній змінній $\boldsymbol{x_{k+1}}$, для якої виконується нерівність, назвемо *розв'язувальним рядком.* Елемент $\boldsymbol{\nu_{k+1,1}}$, що знаходиться на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця, називають *розв'язувальним елементом*. Базисну змінну $\boldsymbol{x_{k+1}}$ необхідно перетворити на вільну.

4. Будуємо нову симплекс-таблицю для нової системи вільних ($\boldsymbol{x_{k+1}}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_k}$) і базисних ($\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{x_{k+m}}$) змінних. Нова симплекс-таблиця заповнюється, як табл. 2.2.

5. Обчислюємо обернену величину $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\nu_{k+1,k}}}$ розв'язувального елемента вихідної симплекс-таблиці, і його значення записуємо у відповідній клітинці нової симплекс-таблиці.

6. Усі елементи розв'язувального стовпця вихідної симплекс-таблиці ділимо на розв'язувальний елемент. Отримані значення (частки) з протилежним знаком записуємо у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

7. Елементи розв'язувального рядка вихідної симплекс-таблиці ділимо на розв'язувальний елемент. Отримані значення записуємо у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Базисні змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{k+1}	x_2	…	x_k
$L(\overline{x})$	$\gamma_0 - \frac{\rho_1 * \beta_{k+1}}{\nu_{k+1,1}}$	$-\frac{\rho_1}{\nu_{k+1,1}}$	$\rho_2 - \frac{\rho_1 * \beta_{k+1}}{\nu_{k+1,1}}$	…	$\rho_k - \frac{\rho_1 * \beta_{k+1}}{\nu_{k+1,1}}$
x_1	$\frac{\beta_{k+1}}{\nu_{k+1,1}}$	$\frac{1}{\nu_{k+1,1}}$	$\frac{\nu_{k+1,2}}{\nu_{k+1,1}}$	…	$\frac{\nu_{k+1,k}}{\nu_{k+1,1}}$
x_{k+2}	—	$-\frac{\nu_{k+2,1}}{\nu_{k+1,1}}$	—	…	—
…	…	…	…	…	…
x_{k+m}	—	$-\frac{\nu_{k+m,1}}{\nu_{k+1,1}}$	—	…	—

8. Інші елементи нової симплекс-таблиці розраховуємо відповідно до правила прямокутника, яке полягає в такому. Нехай необхідно розрахувати значення елемента нової симплекс-таблиці, що знаходяться на перетині ***i***-го рядка і ***j***-го стовпця, тобто ν'_{ij}.

Складемо з елементів вихідної симплекс-таблиці прямокутну матрицю 2 x 2:

$$\begin{pmatrix} \nu_{ij} & \nu_{ik} \\ \nu_{lj} & \nu_{lk} \end{pmatrix},$$

де ν_{lk} – розв'язувальний елемент. Тоді

$$\nu'_{ij} = \frac{\nu_{ij}\nu_{lk} - \nu_{lj}\nu_{ik}}{\nu_{lk}} = \nu_{ij} - \frac{\nu_{li}\nu_{ik}}{\nu_{lk}}. \qquad (2.23)$$

Уважаючи значення вільних змінних у новій симплекс-таблиці такими, що дорівнюють нулю, з першого стовпця знаходимо значення цільової функції і базисних змінних. За елементами першого рядка перевіряємо отриманий розв´язок на оптимальність. Якщо розв´язок не є оптимальним, то необхідно побудувати наступну симплекс-таблицю і знову виконати пп. 1–8 табличного алгоритму.

Приклад 2.3. Розв´язати задачу лінійного програмування симплекс-методом. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, …, x_5, що задовольняють системі обмежень

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18,$$
$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$$
$$2x_1 - x_2 + x_5 = 10$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

Складемо вихідну симплекс-таблицю (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Базисні змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	$\leftarrow$ x_1	x_2
$L(\overline{x})$	0	4	2
x_3	18	2	3
x_4	9	–1	3
$\uparrow x_5$	10	$\boxed{2}$	–1

У розглядуваній задачі k = 2 вільні і m = 3 базисні змінні. Отже, у симплекс-таблиці буде чотири рядки і три стовпці. Крім того, у симплекс-таблиці будуть додаткові інформаційні рядок і стовпець. Заповнимо симплекс-таблицю. Уважаючи вільні змінні $x_1 = x_2 = 0$, з першого стовпця табл. 2.3 знаходимо x_3 = 18; x_4 = 9; x_5 = 10; $L(\overline{x})$ = 0.

Ці змінні є допустимими, але не оптимальними, тому що елементи першого рядка додатні. Оскільки коефіцієнт при x_1 у першому рядку більше за коефіцієнт при x_2, як розв´язувальний стовпець виберемо такий, що відповідає змінній x_1. Отже, змінну x_1 необхідно перетворити на базисну, що схематично позначено стрілкою над розв´язувальним стовпцем.

У розв´язувальному стовпці елементи другого й четвертого рядків, що відповідають базисним змінним x_3 і x_5, мають знаки, однакові з вільними членами. Визначаємо відношення зведених членів до цих коефіцієнтів. Оскільки $\frac{10}{2} < \frac{18}{2}$, базисна змінна x_5 перетворюється на вільну (у табл. 2.3

це позначено стрілкою зліва від змінної x_5). Розв´язувальний елемент (елемент, обведений квадратом), має в цій симплекс-таблиці значення, що дорівнює двом. Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Базисні змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	x_5	$\leftarrow x_2$
$L(\bar{x})$	–20	–2	4
↑ x_3	8	–1	$\boxed{4}$
x_4	14	0,5	2,5
x_1	5	0,5	–0,5

У цій симплекс-таблиці другий стовпець буде відповідати вільній змінній x_5, а четвертий рядок – базисній змінній x_1. Згідно з правилами симплекс-перетворення елемент нової симплекс-таблиці, що відповідає елементу вихідної симплекс-таблиці, буде дорівнювати 0,5.

Для отримання елементів стовпця при x_5 кожний елемент розв´язувального стовпця вихідної симплекс-таблиці розділимо на розв´язувальний елемент. Результат ділення запишемо з протилежним знаком у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

Для отримання елементів рядка при x_1 кожний елемент розв´язувального рядка вихідної симплекс-таблиці розділимо на розв´язувальний елемент. Результат ділення запишемо з тим самим знаком у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

Інші елементи знаходимо за правилом прямокутника. Нехай необхідно знайти значення елемента, що знаходиться на перетині першого рядка й першого стовпця нової симплекс-таблиці. Тоді, використовуючи вихідну симплекс-таблицю (табл. 2.3), будуємо матрицю 2 $\times$ 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix},$$

елементами головної діагоналі якої є розв´язувальний елемент і елемент, що знаходиться на перетині першого рядка й першого стовпця вихідної симплекс-таблиці. Елементи другої діагоналі належать до розв´язувальних рядка й стовпця. Елемент нової симплекс-таблиці

$$\boldsymbol{\nu'_{ij}} = \frac{\boldsymbol{\nu_{ij}\nu_{lk} - \nu_{lj}\nu_{ik}}}{\boldsymbol{\nu_{lk}}} = \boldsymbol{\nu_{ij}} - \frac{\boldsymbol{\nu_{li}\nu_{ik}}}{\boldsymbol{\nu_{lk}}} = \frac{0 \cdot 2 - 10 \cdot 4}{2} = -20.$$

Аналогічно розраховуються інші елементи нової симплекс-таблиці 2.4. Уважаючи вільні змінні $\boldsymbol{x_5} = \boldsymbol{x_2} = 0$, знаходимо: $\boldsymbol{x_3} = 8$; $\boldsymbol{x_4} = 14$; $\boldsymbol{x_1} = 5$; $\boldsymbol{L(\overline{x})} = -20$.

Оскільки значення всіх змінних є невід'ємними, отриманий розв′язок буде допустимим. Разом з тим, елемент першого рядка й третього стовпця є додатним. Отже, оптимального розв´язку задачі не отримано.

Виберемо як розв′язувальний стовпець при змінній $\boldsymbol{x_2}$. У ньому елементи мають той самий знак, що й вільні члени, і відповідають змінним $\boldsymbol{x_3}$ і $\boldsymbol{x_4}$. Зважаючи на те, що $\frac{8}{4} < \frac{14}{2{,}5}$, як розв′язувальний рядок вибираємо такий, що відповідає базисній змінній $\boldsymbol{x_3}$. Отже, на наступному кроці змінна $\boldsymbol{x_3}$ стає вільною, а змінна $\boldsymbol{x_2}$ – базисною. Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 2.5) і, користуючись правилами симплекс-перетворення, заповнюємо її.

Уважаючи вільні змінні $\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{x_5} = 0$, отримаємо значення базисних змінних і цільової функції: $\boldsymbol{x_2} = 2$; $\boldsymbol{x_4} = 9$; $\boldsymbol{x_1} = 6$; $\boldsymbol{L(\overline{x})} = -28$. Усі змінні мають невід'ємні значення, а елементи першого рядка – від'ємні. Отже, розв′язок $\boldsymbol{\overline{x}^*_{III}} = (6;\ 2;\ 0;\ 9;\ 0)$ є оптимальним, а мінімальне значення цільової функції становить –28. Якщо провести аналогію з графічним розв′язком цієї задачі, то можна помітити, що кожна симплекс-таблиця відповідає певній вершині багатокутника ОДР.

Таблиця 2.5

Базисні змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	x_5	x_2
$\boldsymbol{L(\overline{x})}$	28	–1	0,25
$\boldsymbol{x_2}$	2	–0,25	$\boxed{4}$
$\boldsymbol{x_4}$	9	1,125	–0,625
$\boldsymbol{x_1}$	6	0,375	–0,125

Очевидно, симплекс-перетворення на кожному кроці є переходом від однієї вершини багатокутника ОДР до іншої.

Висновки:

1. Якщо в кінцевій симплекс-таблиці елементи першого стовпця є додатними, а елементи першого рядка (крім елемента, що відповідає вільному члену $\boldsymbol{L(\bar{x})}$) – від'ємними, то задача лінійного програмування має єдиний оптимальний розв′язок.

2. Якщо в кінцевій симплекс-таблиці елементи першого стовпця є додатними, а серед від'ємних елементів першого рядка є один або кілька нульових елементів, то задача лінійного програмування має безліч оптимальних розв′язків.

3. Якщо в кінцевій симплекс-таблиці елементи першого стовпця є додатними, серед від'ємних елементів першого рядка є хоча б один додатний елемент, а в стовпці, що відповідає цьому додатному елементу, інші елементи є від'ємними, то задача лінійного програмування не має оптимального розв′язку.

Приклад 2.4. Знайти невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x_1}$, …, $\boldsymbol{x_8}$, що задовольняють системі обмежень

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 + x_3 &= 4,\\
x_1 + x_2 + x_4 &= 10,\\
2x_1 - x_2 + x_5 &= 2,\\
5x_1 + 2x_2 - x_6 &= 10,\\
x_1 + 2x_2 - x_7 &= 8,\\
-x_1 + 2x_2 - x_8 &= 4,
\end{aligned}
$$

і такі, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$\boldsymbol{L(\bar{x})} = -4x_1 - 2x_2.$$

Графічний розв´язок цього завдання показано на рис. 2.11.

Для розв´язання цієї задачі симплекс-методом подамо рівняння-обмеження й цільову функцію у вигляді

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 4 - (-2x_1 + x_2),\\
x_4 &= 10 - (x_1 + x_2),\\
x_5 &= 2 - (2x_1 - x_2),\\
x_6 &= 10 - (-5x_1 - 2x_2),\\
x_7 &= -8 - (-x_1 - 2x_2),\\
x_8 &= -4 - (x_1 - 2x_2),\\
\boldsymbol{L(\bar{x})} &= 0 - (4x_1 + 2x_2),
\end{aligned}
$$

де x_1, x_2 – вільні змінні; $x_3, \dots, x_8$ – базисні змінні.

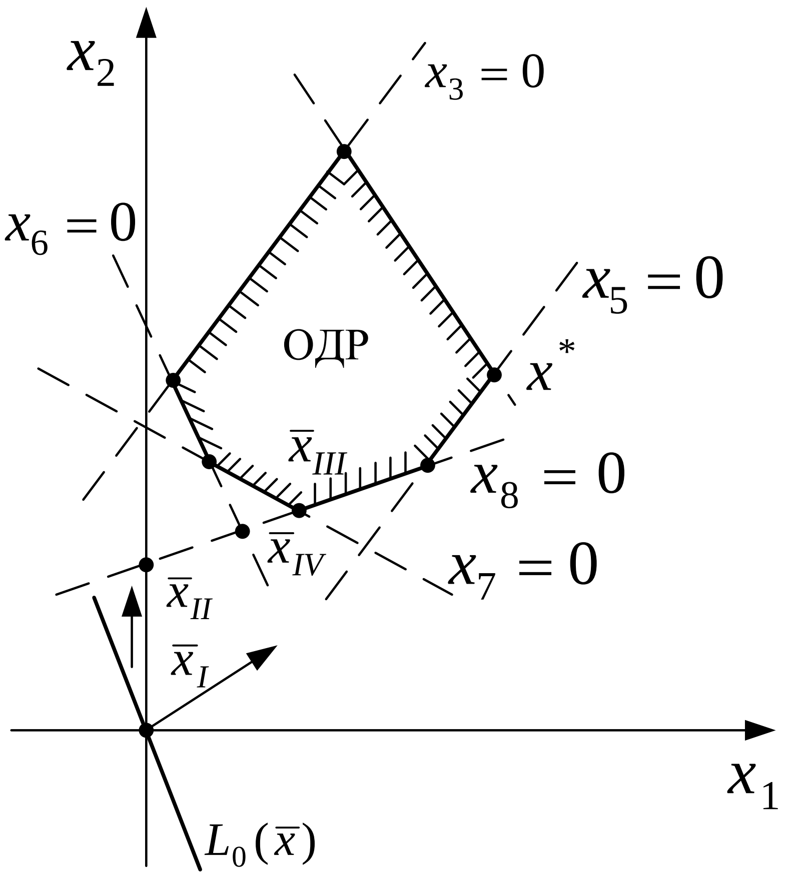

Рис. 2.11

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю 2.7. Уважаючи вільні змінні $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ такими, що дорівнюють нулю, отримаємо $\boldsymbol{x_3}$ = 4; $\boldsymbol{x_4}$ = 10; $\boldsymbol{x_6}$ = –10; $\boldsymbol{x_7}$ = –8; $\boldsymbol{x_8}$ = –4.

Оскільки серед базисних змінних є від'ємні, очевидно, розв´язок $\boldsymbol{\overline{x}_I}$= (0; 0; 4; 10; 2; −10; −8; −4) не є допустимим. Це підтверджується і графіком на рис. 2.11 (точка $\boldsymbol{\overline{x}_I}$ знаходиться поза межами ОДР). Серед елементів першого стовпця від'ємними є $\boldsymbol{x_6}$ = −10; $\boldsymbol{x_7}$ = − 8; $\boldsymbol{x_8}$ = – 4. Для пошуку допустимого розв´язку можна вибрати будь-який з них. Однак з метою найшвидшого отримання допустимого розв´язку доцільно вибрати той елемент, який має найменше абсолютне значення, тобто −4.

Розглянемо рядок змінної $\boldsymbol{x_8}$. Елемент, що знаходиться на перетині цього рядка й стовпця при $\boldsymbol{x_2}$, має однаковий знак з вільними членами. Тому стовпець змінної $\boldsymbol{x_2}$ буде розв´язувальним.

Таблиця 2.7

Базисні змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	X_1	$\overleftarrow{X_2}$
$L(\overline{X})$	0	4	2
X_3	4	–2	1
X_4	10	1	1
X_5	2	2	–1
X_6	–10	–5	12
X_7	–8	–1	–2
$\uparrow X_8$	–4	1	$\boxed{-2}$

У розв´язувальному стовпці визначимо елементи, однакові за знаком з вільними членами. Такими елементами є ті, що знаходяться на перетині розв´язувального стовпця й рядків при змінних x_3, x_4, x_5, x_7, x_8. Відношення вільного члена до елемента розв´язувального стовпця, однакового з ним за знаком, буде мінімальним для останнього рядка. Отже, рядок змінної x_8 буде розв´язувальним рядком, а елемент -2, обведений квадратом, – розв´язувальним елементом. Таким чином, на першому кроці змінну x_2 має бути перетворено на базисну, а змінну x_8 – на вільну.

Користуючись правилами симплекс-перетворення, заповнимо нову (другу) симплекс-таблицю (табл. 2.8).

Таблиця 2.8

Базисні змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	$\overleftarrow{X_1}$	X_8
$L(\overline{X})$	–4	5	1
X_3	2	–1,5	0,5
X_4	8	1,5	0,5
X_5	4	1,5	–0,5
X_6	–6	-6	–1
$\uparrow X_7$	–4	$\boxed{-2}$	–1
X_2	2	–0,5	–0,5

Після виконання першого кроку отримаємо розв´язок $\overline{x}_{II}$ = (0; 2; 2; 8; 4; –6; –4; –2), який також поки не є оптимальним. Серед від'ємних елементів першого стовпця вибираємо елемент, що дорівнює –4 в рядку змінної x_7. У цьому рядку всі елементи є від'ємними. Оскільки $\frac{-4}{-2} < \frac{-4}{-1}$, то стовпець змінної x_1 буде розв´язувальним. Відношення вільного члена до елемента розв´язувального стовпця, однакового з ним за знаком, буде мінімальним для рядка при x_7. Отже, рядок при x_7 є розв´язувальним.

На другому кроці пошуку допустимого розв´язку змінну x_1 слід перетворити на базисну, а змінну x_7 – на вільну. Після виконання симплекс-перетворень на другому кроці складаємо симплекс-таблицю 2.9.

Таблиця 2.9

Базисні змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	X_7	X_8
$L(\overline{X})$	–14	2,5	–1,5
X_3	5	–0,75	1,25
X_4	5	0,75	–0,25
X_5	1	0,75	–1,25
X_6	–6	–3	2
X_1	2	–0,5	0,5
X_2	3	–0,25	–0,25

Розв´язок, отриманийна другому кроці, $\overline{x}_{III}$ = (2; 3; 5; 5; 1; 6; 0; 0) є допустимим. Подальший пошук оптимального розв´язку здійснюється відповідно до розглянутого раніше алгоритму табличного симплекс-методу.

Приклад 2.5. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, …, x_6, що задовольняють системі обмежень

$$-5x_1 + 2x_2 - x_3 = 10,$$
$$2x_1 + x_2 - x_4 = 8,$$
$$x_1 - x_2 + x_5 = 2,$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_5 = 2,$$
$$x_1 + x_2 + x_6 = 10,$$

і такі, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

Графічний розв´язок цього завдання показано на рис. 2.12. З рисунка випливає, що задача лінійного програмування не має допустимих розв'язків.

Зведемо систему рівнянь-обмежень і цільову функцію до вигляду, зручного для заповнення симплекс-таблиці 2.10:

$$\boldsymbol{x_3} = -10 - (5\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2}),$$
$$\boldsymbol{x_4} = -8 - (-2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}),$$
$$\boldsymbol{x_5} = -2 - (-\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}),$$
$$\boldsymbol{x_6} = -10 - (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}),$$
$$\boldsymbol{L(\bar{x})} = -(-4\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2}).$$

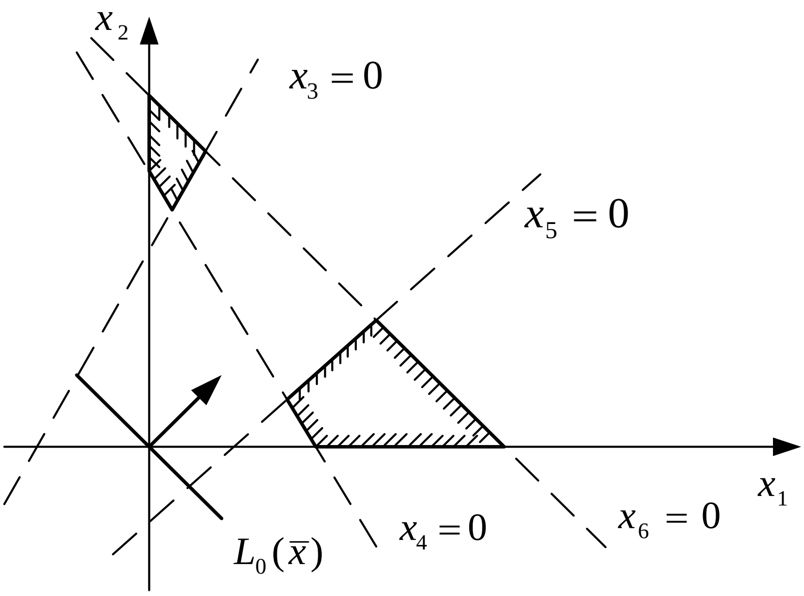

Рис. 2.12

Під час пошуку допустимого розв´язку відповідно до описаного вище алгоритму отримаємо послідовність симплекс-таблиць (табл. 2.10–2.12).

Таблиця 2.10

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	$\overleftarrow{\boldsymbol{x_1}}$	$\boldsymbol{x_2}$
$\boldsymbol{L(\bar{x})}$	0	4	2
$\mathbf{x_3}$	–10	5	–2
$\mathbf{x_4}$	–8	–2	–1
↑ $\mathbf{x_5}$	–2	$\boxed{-1}$	1
$\mathbf{x_6}$	10	1	1

→

Таблиця 2.11

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	$\boldsymbol{x_5}$	$\overleftarrow{\boldsymbol{x_2}}$
$\boldsymbol{L(\bar{x})}$	–8	4	6
$\boldsymbol{x_3}$	–20	5	3
↑ $\boldsymbol{x_4}$	–4	–2	$\boxed{-3}$
$\boldsymbol{x_1}$	3	–1	–1
$\boldsymbol{x_6}$	8	1	2

→

Таблиця 2.12

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{x_4}$
$\boldsymbol{L(\bar{x})}$	–16	0	2
$\boldsymbol{x_3}$	–24	3	1
$\boldsymbol{x_2}$	4/3	2/3	–1/3
$\boldsymbol{x_1}$	10/3	–1/3	–1/3
$\boldsymbol{x_6}$	16/3	–1/3	2/3

У рядку змінної x_3 (табл. 2.11) вільний член є від'ємним. Згідно з п. 2 алгоритму пошуку допустимого розв´язку в цьому рядку необхідно знайти елементи, однакові за знаком з вільним членом.

Однак таких елементів у рядку немає. Запишемо аналітичний вираз базисної змінної:

$$x_3 = -24 - x_4 - 3x_5.$$

Очевидно, що не знайдеться таких невід'ємних значень змінних $x_3,\ x_4$ і x_5, при яких наведене рівняння було би правильним. Це означає, що задача лінійного програмування не має допустимих розв´язків.

Якщо в кінцевій симплекс-таблиці один або кілька елементів першого стовпця є від'ємними і хоча б в одному рядку, що відповідає одному з цих елементів, інші елементи є додатними, то задача лінійного програмування не має допустимих розв´язків.

Висновки:

1. Розв´язання задачі лінійного програмування починається з пошуку допустимого розв´язку.
2. Після того як знайдено один із допустимих розв´язків, можна починати пошук оптимального розв´язку.
3. Під час такого пошуку необхідно ретельно проаналізувати кожну симплекс-таблицю з метою виявлення ознак, що відповідають різним випадкам задачі лінійного програмування.
4. Виявивши одну з цих ознак, процедуру пошуку слід припинити і з урахуванням кінцевої симплекс-таблиці зробити відповідні висновки.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти додатні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, які задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} = 4, \\ 2\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} - \mathbf{x_3} - \mathbf{x_4} = -5, \\ \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} - \mathbf{x_5} = -4, \\ \mathbf{x_2} + \mathbf{x_6} = 5, \\ 2\mathbf{x_1} - 2\mathbf{x_2} - \mathbf{x_6} + 2\mathbf{x_7} = 7 \end{cases}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7.$$

2. Знайти додатні значення змінних x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , які задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 10, \end{cases}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

3. Знайти додатні значення змінних x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , які задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ -9x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 12, \end{cases}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

4. Знайти додатні значення змінних $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$, які задовольняють системі обмежень

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4;$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 8;$$
$$2x_1 - x_2 + x_8 = 2;$$
$$5x_1 - 2x_2 - x_6 = 10;$$
$$x_1 + 2x_2 - x_7 = 8;$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_8 = 4$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = 5 - 2x_1 - 3x_3.$$

5. Знайти додатні значення змінних x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , які задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 19 \end{cases}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

3. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Метод відсічних площин

Задачі математичного програмування, у яких до всіх змінних або їх частини ставиться вимога цілості числових значень, належать до задач цілочислового програмування (ЦП).

При лінійній цільовій функції і лінійних обмеженнях (а саме такі задачі ЦП будуть розглядатися в подальшому) задача цілочислового програмування формулюється так: знайти такі невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, які задовольняли би обмеженню

$$\begin{gathered} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1j}x_j + \alpha_{1n}x_n \geq b_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2j}x_j + \alpha_{2n}x_n \geq b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{ij}x_j + \alpha_{in}x_n \geq b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mj}x_j + \alpha_{mn}x_n \geq b_m, \end{gathered} \tag{3.1}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ – цілі числа, і перетворювали на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_ix_i + \ldots + C_nx_n. \tag{3.2}$$

У такій постановці (усі змінні мають задовольняти вимоги цілочисельності) задача (3.1)–(3.2) належить до повністю цілочислових. Якщо ці вимоги ставляться не до всіх змінних, а тільки до їх частини, то задача є частково цілочисловою. Строго кажучи, вимога щодо цілочислових змінних призводить до того, що, незважаючи на лінійний характер обмежень і цільової функції, задача переходить до класу нелінійних. На рис. 3.1 показано область допустимих розв´язків задачі лінійного програмування (заштрихований багатокутник).

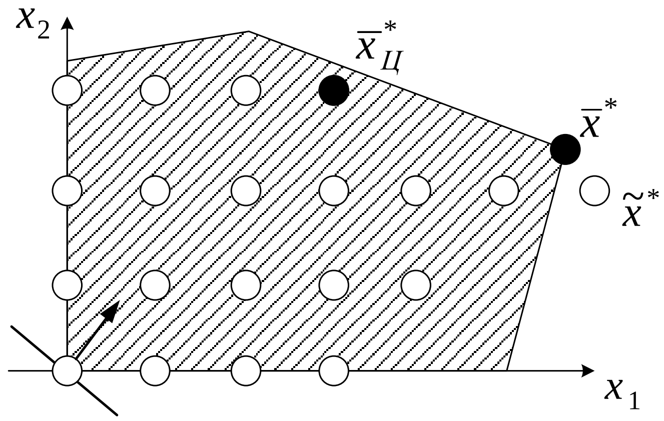

Рис. 3.1

Якщо поставити вимогу цілочисельності змінних, то область допустимих розв´язків перетвориться на систему точок.

Здавалося б, задачу цілочислового програмування можна розв´язати досить просто. Для цього, не беручи до уваги вимогу цілочисельності змінних, необхідно знайти оптимальний розв´язок задачі лінійного програмування, а потім дробові значення змінних округлити до найближчих цілих чисел. Однак, незважаючи на певну логіку наведених міркувань, такий шлях розв´язання задачі цілочислового програмування може призвести до неоптимального розв´язку. На рис. 3.1 показано оптимальний розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}^*$, округлене значення $\widetilde{\boldsymbol{x}}^*$ оптимального розв´язку $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ задачі лінійного програмування й оптимальний розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}_{Ц}^*$ задачі цілочислового програмування. З рисунка видно, що округлені значення оптимального розв´язку задачі лінійного й цілочислового програмування істотно відрізняються одне від одного.

Таким чином, для розв´язання задачі ЦП необхідно застосувати специфічні методи, у яких ураховано вимоги цілочисельності змінних. До таких методів належать метод відсічних площин і метод гілок і меж.

Зміст методу відсічних площин полягає в тому, що в систему обмежень задачі, у якій не враховано вимоги цілочисельності, уводяться додаткові обмеження. Кожне додаткове обмеження пов'язує частину зовнішніх цілочислових точок і відсікає ту частину ОДР, яка не містить цілочислових значень змінних (звідси й назва методу). Додаткові обмеження разом з основними утворюють нову область допустимих розв´язків (на рис. 3.1 позначено штрихуванням), межі якої проходять через цілочислові точки.

Очевидно, будь-яка вершина багатокутника нової області допустимих розв´язків відповідає тільки цілочисловим значенням змінних. Якщо тепер знайти вершину, найбільш віддалену від початку координат у напрямку зменшення цільової функції, то ця вершина буде оптимальним розв´язком задачі цілочислового програмування.

Розглянемо процедуру розв´язання задачі цілочислового програмування методом відсічних площин. Не будемо враховувати вимоги цілочислових змінних. Тоді задача (3.1)–(3.2) є звичайною задачею лінійного програмування. Розв´язуючи цю задачу симплекс-методом, знайдемо її оптимальний розв´язок. Якщо змінні, що становлять оптимальний розв´язок задачі, є цілочисловими, то отриманий розв´язок є оптимальним для задачі ЦП.

Нехай унаслідок розв´язання задачі лінійного програмування отримано оптимальний розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}^*$. Для ясності візьмемо змінні $\boldsymbol{x_1^*}$, $\boldsymbol{x_2^*}$, …, $\boldsymbol{x_k^*}$ вільними, а $\boldsymbol{x_{k+1}^*}$, $\boldsymbol{x_{k+2}^*}$, …, $\boldsymbol{x_{k+m}^*}$ – базисними.

Тоді згідно з кінцевою симплекс-таблицею можна записати

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_{k+1}^*} &= \boldsymbol{\beta_{k+1}} - (\boldsymbol{\alpha_{k+1,1}x_1^*} + \boldsymbol{\alpha_{k+1,2}x_2^*} + \ldots + \boldsymbol{\alpha_{k+1,k}x_k^*}),\\
\boldsymbol{x^*{}_{k+2}} &= \boldsymbol{\beta_{k+2}} - (\boldsymbol{\alpha_{k+2,1}x_1^*} + \boldsymbol{\alpha_{k+2,2}x_2^*} + \ldots + \boldsymbol{\alpha_{k+2,k}x_k^*}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{x_{k+m}^*} &= \boldsymbol{\beta_{k+m}} - (\boldsymbol{\alpha_{k+m,1}x_1^*} + \boldsymbol{\alpha_{k+m,2}x_2^*} + \ldots + \boldsymbol{\alpha_{k+m,k}x_k^*}).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Оскільки вільні змінні в розв´язку $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ дорівнюють нулю, то

$$\overline{\boldsymbol{x}}^* = \boldsymbol{(}0,\ 0,\ 0,\ \boldsymbol{\beta_{k+1}},\ \boldsymbol{\beta_{k+2}},\ \ldots,\ \boldsymbol{\beta_{k+m}}\boldsymbol{)}.$$

Нехай в оптимальному розв´язку $\boldsymbol{x_{k+l}^*} = \boldsymbol{\beta_{k+l}}$ **–** дробове число.

Розглянемо рівняння

$$\boldsymbol{x_{k+l}^*} = \boldsymbol{\beta_{k+l}} - \boldsymbol{(\alpha_{k+l,1}x_1^*} + \boldsymbol{\alpha_{k+l,2}x_2^*} + \ldots + \boldsymbol{\alpha_{k+l,k}x_k^*}\boldsymbol{)},$$

яке перетворимо таким чином:

$$\boldsymbol{\alpha_{k+l,1}x_1^*} + \boldsymbol{\alpha_{k+l,2}x_2^*} + \ldots + \boldsymbol{\alpha_{k+l,k}x_k^*} + \boldsymbol{x_{k+l}^*} = \boldsymbol{\beta_{k+l}}. \tag{3.4}$$

Позначимо через $\lfloor\boldsymbol{\alpha_{ij}}\rfloor$ найбільше ціле число, яке не перевищує $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$. Оскільки $\lfloor\boldsymbol{\alpha_{ij}}\rfloor \le \boldsymbol{\alpha_{ij}}$, можна записати

$$\lfloor\boldsymbol{\alpha_{k+l,1}}\rfloor\boldsymbol{x_1^*} + \lfloor\boldsymbol{\alpha_{k+l,2}}\rfloor\boldsymbol{x_2^*} + \ldots + \lfloor\boldsymbol{\alpha_{k+l,k}}\rfloor\boldsymbol{x_k^*} + \boldsymbol{x_{k+l}^*} \le \boldsymbol{\beta_{k+l}}. \tag{3.5}$$

Якщо до змінних поставити вимогу цілочисельності, то в лівій частині виразу (3.5) буде записано ціле число. Тоді справджується така нерівність:

$$\lfloor\alpha_{k+l,1}\rfloor x_1^* + \lfloor\alpha_{k+l,2}\rfloor x_2^* + \ldots + \lfloor\alpha_{k+l,k}\rfloor x_k^* + x_{k+l}^* \leq \lfloor\beta_{k+l}\rfloor. \qquad (3.6)$$

Віднімемо з виразу (3.6) вираз (3.4). Позначаючи

$$\lfloor\alpha_{ij}\rfloor - \alpha_{ij} = \gamma_{ij};\ \lfloor\beta_i\rfloor - \beta_i = \rho_i, \qquad (3.7)$$

отримаємо

$$\gamma_{k+l,1}x_1^* + \gamma_{k+l,2}x_2^* + \ \ldots + \gamma_{k+l,k}x_k^* \leq \rho_{k+l}. \qquad (3.8)$$

Нерівність (3.8) є додатковим обмеженням, у якому враховано цілочисельність хоча би змінної x_{k+l}. Перейдемо в (3.8) від нерівності до рівності. Для цього до лівої частини (3.8) додамо невід'ємну змінну y_1:

$$\gamma_{k+l,1}x_1^* + \gamma_{k+l,2}x_2^* + \ldots + \gamma_{k+l,k}x_k^* + y_1 = \rho_{k+l}. \qquad (3.9)$$

Якщо (3.9) подати у вигляді

$$y_1 = \rho_{k+l} - (\gamma_{k+l,1}x_1^* + \gamma_{k+l,2}x_2^* + \ldots + \gamma_{k+l,k}x_k^*), \qquad (3.10)$$

то вирази (3.3) і (3.10) становитимуть систему обмежень нової задачі ЛП, у якій уже враховано вимогу цілочисельності змінної x_{k+l}. Для розв´язання нової задачі ЛП до кінцевої симплекс-таблиці задачі (3.1)−(3.2) додамо рядок, у якому запишемо значення коефіцієнтів при змінних $x_{k+l,i}$ і вільного члена ρ_{k+l} у виразі (3.10). Отримана симплекс-таблиця вже містить $(m + 1)$ базисних змінних.

Застосовуючи симплекс-перетворення, знайдемо оптимальний розв´язок нової задачі ЛП. Якщо змінні, що становлять оптимальний розв´язок нової задачі ЛП, є цілочисловими, то процес обчислення завершується. Якщо є хоча б одна дробова змінна, то вводиться ще одне обмеження, і т. д. Процедура повторюється доти, доки не буде знайдено оптимальний цілочисловий розв´язок.

Розглянемо приклад розв´язання задачі цілочислового програмування методом відсічних площин. Для наочності супроводимо розв´язання графіками.

Приклад 3.1. Знайти невід'ємні значення змінних, які задовольняють обмеженню

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

де x_1, x_2 – цілі числа, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = -x_1 + 4x_2.$$

Знайдемо розв´язок задачі ЛП без урахування вимоги цілочисельності змінних. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей:

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6.$$

Ця задача є основною задачею лінійного програмування. Виберемо x_1 і x_2 як вільні змінні. Тоді базисні змінні й цільову функцію запишемо у вигляді

$$x_3 = 2 - (-x_1 + 2x_2),$$
$$x_4 = 6 - (-3x_1 + 2x_2),$$

$$L(\bar{x}) = 0 - (x_1 + 2x_2).$$

На рис. 3.2 показано область допустимих розв´язків цієї задачі (багатокутник, утворений осями координат і прямими x_3 = 0 і x_4 = 0).

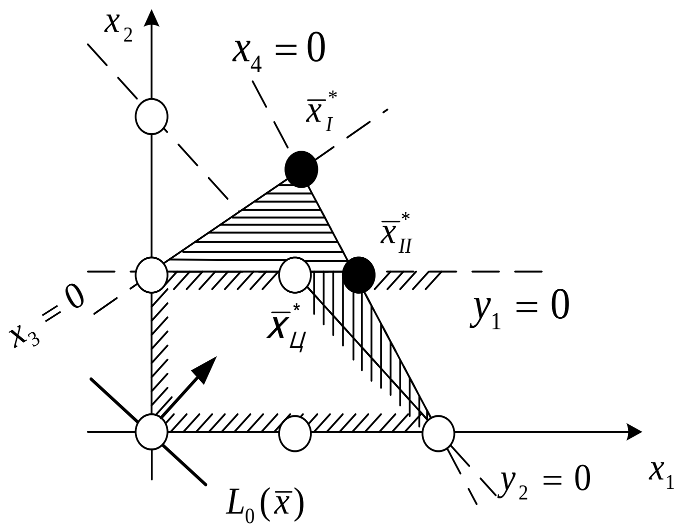

Рис. 3.2

Тут же світлими кружками показано цілочислові розв´язки, що задовольняють обмеженню (3.9).

Оптимальний розв´язок задачі ЛП (вершина $\bar{x}_I^*$, позначена темним кружком) містить, як це випливає з рисунка, змінну x_2, що набуває дробового значення. Переконаємося в цьому, розв'язавши задачу симплекс-методом (табл. 3.1−3.3).

Таблиця 3.1

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	x_1	$\overleftarrow{x_2}$
$L(\bar{x})$	0	1	4
$\uparrow x_3$	2	–1	$\boxed{2}$
x_4	6	3	2

→

Таблиця 3.2

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	$\overleftarrow{x_1}$	x_3
$L(\bar{x})$	–4	3	–2
x_2	1	–1/2	1/2
$\uparrow x_4$	4	$\boxed{4}$	–1

→

Таблиця 3.3

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	x_4	x_3
$L(\bar{x})$	–7	–3/4	–5/4
x_3	3/2	1/8	3/8
x_1	1	1/4	–1/4

Справді, x_2^* = 3/2, тому $\overline{x_I}^*$ = (1; 3/2; 0; 0) не є оптимальним розв´язком задачі цілочислового програмування.

Запишемо вираз:

$$x_2^* = 3/2 - (1/8x_4^* + 3/8x_3^*)$$

і відповідно до (3.4) перетворимо його на такий:

$$1/8x_4^* + 3/8x_3^* + x_2^* = 3/2.$$

Визначимо цілі частини коефіцієнтів при змінних x_3^* і x_4^* і вільного члена у виразі (3.10):

$$\lfloor 1/8 \rfloor = 0; \ \lfloor 3/8 \rfloor = 0; \ \lfloor 3/2 \rfloor = 1.$$

Тоді відповідно до (3.6) можна записати:

$$0x_4^* + 0x_3^* + x_2^* \le 1.$$

Віднімемо з цього виразу попередній вираз $1/8x_4^* + 3/8x_3^* + x_2^* = 3/2$:

$$-1/8x_4^* - 3/8x_3^* \le -1/2.$$

Перетворимо цю нерівність на рівняння

$$-1/8x_4^* - 3/8x_3^* + y_1 = -1/2,$$

і виразимо змінну y_1 таким чином:

$$y_1 = -1/2 - (-1/8x_4^* - 3/8x_3^*).$$

Додамо до кінцевої симплекс-таблиці 3.3 задачі лінійного програмування ще один рядок і розв’яжемо її з додатковим обмеженням. Розв´язок задачі з додатковим обмеженням наведено симплекс-таблицями 3.4–3.5. Розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}_{II}^{*}$ = (4/3; 1; 4/9; 0) уже містить цілочислову змінну $\boldsymbol{x}_{2}^{*}$.

Таблиця 3.4

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	x_4	$\overline{x_3}$
$L(\overline{x})$	−7	−3/4	−5/4
x_2	3/2	1/8	3/8
x_1	1	1/4	-1/4
↑ y_1	−1/2	−1/8	$\boxed{-3/8}$

→

Таблиця 3.5

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	x_4	y_1
$L(\overline{x})$	–16/3	–1/3	–10/3
x_2	1	0	1
x_1	4/3	1/5	–2/3
x_5	4/3	1/3	–8/3

Для того щоб з'ясувати, яким чином додаткове обмеження забезпечує цілочислове значення змінної $\boldsymbol{x}_{2}^{*}$, проаналізуємо вираз для $\boldsymbol{y_1}$. Підставимо у нього вирази для базисних змінних $\boldsymbol{x_3}$ і $\boldsymbol{x_4}$. Після нескладних перетворень отримаємо

$$\boldsymbol{y_1} = 1 - \boldsymbol{x_2}.$$

Якщо взяти $\boldsymbol{y_1}$ = 0, то $\boldsymbol{y_1} = 1 - \boldsymbol{x_2}$ = 0 є рівнянням прямої, паралельної до осі $0\boldsymbol{x_1}$, що перетинає вісь $0\boldsymbol{x_2}$ у точці $\boldsymbol{x_2} = 1$. Пряма $\boldsymbol{y_1}$ = 1 – $\boldsymbol{x_2}$ = 0 відсікає ту частину багатокутника ОДР разом із розв´язком $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{I}}^{*}$ вихідної задачі лінійного програмування, яка не містить цілочислових значень змінної $\boldsymbol{x_2}$ (на рис. 3.2 цю частину ОДР помічено горизонтальним штрихуванням). Таким чином, будь-яка точка $\boldsymbol{y_1} = 1 - \boldsymbol{x_2}$ = 0 нової ОДР відповідає цілочисловому значенню змінної $\boldsymbol{x_2}$.

Повернемося до табл. 3.5. Оскільки змінна $\boldsymbol{x}_{1}^{*}$ у розв´язку $\overline{\boldsymbol{x}}_{II}^{*}$ є нецілочисловою, продовжимо процедуру відсікання.

Запишемо вираз для $\boldsymbol{x}_{1}^{*}$:

$$\boldsymbol{x}_{1}^{*} = 4/3 - \left(1/3\boldsymbol{x}_{4}^{*} - 2/3\boldsymbol{y}_{1}^{*}\right),$$

або відповідно до виразу (3.4):

$$1/3\boldsymbol{x}_{4}^{*} - 2/3\boldsymbol{y}_{1}^{*} + \boldsymbol{x}_{1}^{*} = 4/3. \qquad (3.11)$$

Цілі частини коефіцієнтів при змінних і вільного члена у виразі (3.22) будуть однаковими:

$$\lfloor 1/3 \rfloor = 0; \ \lfloor -2/3 \rfloor = -1; \ \lfloor 4/3 \rfloor = 1.$$

Тоді відповідно до рівняння (3.6) запишемо

$$0\boldsymbol{x}_4^* - 1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_1^* \le 1. \qquad (3.12)$$

Віднявши з виразу (3.11) вираз (3.12), отримаємо

$$-1/3\boldsymbol{x}_4^* - 1/3\boldsymbol{y}_1^* \le -1/3.$$

Увівши додаткову змінну $\boldsymbol{y}_2$, отримаємо таке обмеження:

$$\boldsymbol{y}_2 = -1/3 - (-1/3\boldsymbol{x}_4^* - 1/3\boldsymbol{y}_1^*). \qquad (3.13)$$

Додамо в табл. 3.5 додатковий рядок, який заповнимо коефіцієнтами з виразу (3.13), і розв´яжемо задачу лінійного програмування (табл. 3.6, 3.7).

Таблиця 3.6

Базові змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	$\overline{x_4}$	y_1
$L(\overline{x})$	–16/3	–1/3	–10/3
x_2	12	0	1
x_1	4/3	1/3	–23
x_3	4/3	1/3	–8/3
↑ y_2	–1/3	$\boxed{-1/3}$	–1/3

→

Таблиця 3.7

Базові змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	y_1	y_2
$L(\overline{x})$	–5	–1	–3
x_2	1	0	1
x_1	1	1	–1
x_3	1	1	–3
x_4	1	–5	1

Оптимальний розв´язок цієї задачі лінійного програмування $\overline{\boldsymbol{x}}_{III}^*$ = (1; 1; 1; 1; 0) містить цілочислові значення змінних $\boldsymbol{x}_1$ і $\boldsymbol{x}_2$ і, отже, є оптимальним розв´язком $\overline{\boldsymbol{x}}_{\text{Ц}}^*$ задачі лінійного програмування.

Підставивши в рівняння (3.13) вирази для $\boldsymbol{x}_4$ і $\boldsymbol{y}_1$, отримаємо

$$\boldsymbol{y}_2 = 2 - \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2.$$

Пряма $\boldsymbol{y}_2$ = 0 відсікає ще одну частину ОДР, що не містить цілочислових розв´язків, у тому числі й розв´язку $\overline{\boldsymbol{x}}_{II}^*$ (на рис. 3.2 помічено вертикальним штрихуванням). Нова ОДР, утворена осями $0\boldsymbol{x}_1$ і $0\boldsymbol{x}_2$ з прямими $\boldsymbol{y}_1$ = 0 і $\boldsymbol{y}_2$ = 0, має межі, що проходять через цілочислові точки, і будь-яка вершина області відповідає одному з цілочислових розв´язків. Як випливає з рис. 3.2, вершина $\overline{\boldsymbol{x}}_{\text{Ц}}^*$ є найбільш віддаленою від початку координат у напрямку спадання цільової функції. Оскільки вершина $\overline{\boldsymbol{x}}_{\text{Ц}}^*$ відповідає цілочисловому розв´язку, вона і є оптимальним розв´язком задачі ЦП.

Наведемо загальний алгоритм розв´язання задачі лінійного програмування методом відсічних площин.

1. Без урахування вимоги цілочисельності розв´язується задача лінійного програмування з обмеженнями (3.1). Якщо всі змінні отриманого оптимального розв´язку є цілочисловими, то цей розв´язок буде оптимальним і для задачі ЦП.

2. Якщо кілька базисних змінних є нецілочисловими, то вибирається та з них, яка має найбільше значення. Для вибраної змінної складається додаткове обмеження вигляду (3.10).

3. Розв´язується нова задача лінійного програмування з додатковими обмеженнями. Якщо одна або кілька базисних змінних оптимального розв´язку нової задачі є нецілочисловими, то слід перейти до п. 2. Процедура обчислень триває доти, доки не буде знайдено цілочисловий розв´язок або не буде доведено, що задача ЦП не має розв´язку.

3.2. Метод гілок і меж

Розглянутий вище метод відсічних площин дає змогу розв´язувати цілочислові задачі як повністю, так і частково. Однак зі збільшенням розмірності задачі ЦП швидко збільшується й обсяг обчислень. Зменшити його в деяких випадках допомагає метод гілок і меж.

Розглянемо суть методу. Нехай необхідно знайти оптимальний розв´язок задачі цілочислового програмування (3.1)–(3.2).

Позначимо через $\boldsymbol{X}$ множину невід'ємних чисел $\boldsymbol{x_j}$, які відповідають обмеженням (3.1). Припустимо, що множину $\boldsymbol{X}$ можна розбити на підмножини $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_k}, \ldots, \boldsymbol{X_\eta}$ і з урахуванням цілочисельності будь-якої змінної і для кожної підмножини знайти розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{1}}, \overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{2}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{k}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{\eta}}$. Кожному розв´язку буде відповідати своє мінімальне значення цільової функції $\boldsymbol{L_{min_1}}, \boldsymbol{L_{min_2}}, \ldots, \boldsymbol{L_{min_k}}, \ldots, \boldsymbol{L_{min_\eta}}$. Виберемо серед підмножин $\boldsymbol{X_k}$, де k = $\overline{1, \boldsymbol{\eta}}$, таку підмножину $\boldsymbol{X_l}$, для якої $\boldsymbol{L_{min_l}}$ буде найменшим, тобто

$$\boldsymbol{L_{min_l}} = \boldsymbol{min_k}\, \boldsymbol{L_{min_k}}. \tag{3.14}$$

Інші підмножини $\boldsymbol{X_k}, \boldsymbol{k \neq l}$, виключаємо з подальшого розгляду як неперспективні.

З урахуванням цілочисельності іншої змінної розіб'ємо підмножину на більш дрібні підмножини $\boldsymbol{X_{l_1}}, \boldsymbol{X_{l_2}}, \boldsymbol{X_{l_3}}, \ldots, \boldsymbol{X_{l_\rho}}, \ldots, \boldsymbol{X_{l_\mu}}$, і для кожної з них знайдемо розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{l_1}}, \overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{l_2}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{l_\rho}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{l_\mu}}$ і значення цільової функції $\boldsymbol{L_{min\,l_1}}, \boldsymbol{L_{min\,l_2}}, \ldots, \boldsymbol{L_{min\,l_\rho}}, \ldots, \boldsymbol{L_{min\,l_\mu}}$. Для подальшого обчислення виберемо ту підмножину $\boldsymbol{L_{min\,l_q}}$, для якої

$$L_{min\, l_q} = min_{\rho}\, L_{\, l_{\rho}}. \quad (3.15)$$

Процес розбиття множини $\boldsymbol{X}$ на все більш дрібні підмножини триває доти, доки не буде знайдено оптимального розв´язку задачі цілочислового програмування або доведено, що розв´язку не існує.

Описаний процес є розгалуженням множини $\boldsymbol{X}$ на дерево підмножин (рис. 3.3). Ідея розгалуження множини $\boldsymbol{X}$ на дерево підмножин з подальшим вибором на основі оцінювання $\boldsymbol{L_{min}}$ для кожної підмножини перспективних гілок і є основою методу гілок і меж. Слід зазначити, що цей метод застосовується для розв´язання не тільки задач цілочислового програмування, а й багатьох інших.

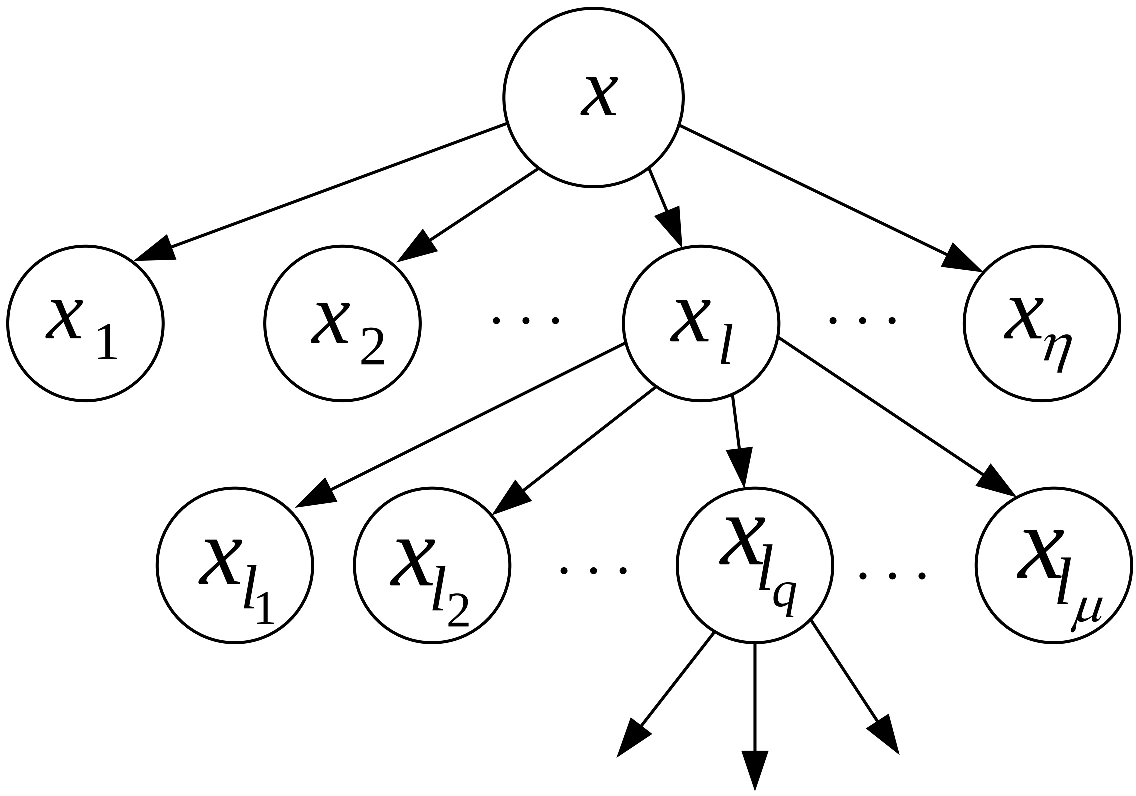

Рис. 3.3

Основним ускладненням під час практичного використання методу є визначення способу розбиття множин на підмножини й обчислення оцінки для кожної з підмножини. Проте для задач цілочислового програмування спосіб розбиття визначається порівняно легко, що й дає змогу ефективно використовувати метод гілок і меж при розв´язанні такого класу задач.

Розглянемо алгоритм їх розв'язання. Як і при використанні методу відсічних площин, спочатку розв´язуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями (3.1) без урахування вимоги цілочисельності змінних. Припустимо, що в розв´язку $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ задачі лінійного програмування змінні $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}^*$, $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}^*$, ..., $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}^*$ є вільними, а $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+1}}^*$, $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+2}}^*$, ..., $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+l}}^*$, ..., $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+m}}^*$ – базисними, при цьому базисні змінні обчислюються за виразами (3.3).

Якщо всі змінні $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+1}}^*$, $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+2}}^*$, ..., $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+l}}^*$, ..., $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+m}}^*$ (або задана їх частина) є цілочисловими, то розв´язок є оптимальним для задачі цілочислового програмування.

Припустимо, що змінна $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+l}}^* = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k+l}}$ набуває дробового значення. Відповідно до методу гілок і меж розіб´ємо область допустимих розв´язків на дві підобласті, кожна з яких містить на своїй межі тільки цілочислові значення $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k+l}}$. Очевидно, межі підобластей з урахуванням цілочисельності змінної $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k+l}}$ будуть визначатися з допомогою додаткових обмежень:

– для першої підобласті

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k+l}} \leq \lfloor \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k+l}} \rfloor; \tag{3.16}$$

– для другої підобласті

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k+l}} \ \geq \ \lfloor \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k+l}} \rfloor. \tag{3.17}$$

Увівши обмеженя (3.16) і (3.17), отримаємо перше розгалуження множини допустимих розв´язків на підмножини.

Розв'яжемо задачу ЦП з обмеженнями (3.1) і (3.16), унаслідок чого отримаємо оптимальний розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}^*$ і значення цільової функції $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min_1}}$. Розв´яжемо задачу ЛП з обмеженнями (3.1) і (3.17) для другої підобласті й отримаємо значення $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}^*$ і $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min_2}}$.

Порівняємо між собою оцінки $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min_1}}$ і $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min_2}}$. Нехай $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min_2}} > \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min_1}}$. Отже, друга підобласть виключається з подальшого обчислення.

Проаналізуємо розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}^*$. Якщо всі змінні в $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}^*$ є цілочисловими, то цей розв´язок є оптимальним для задачі ЦП.

Нехай $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}_j}^* = \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{1}_j}$ у розв´язку $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}^*$ має дробове значення. Зробимо друге розгалуження. Увівши додаткові обмеження

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}_j} \leq \lfloor \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{1}_j} \rfloor, \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}_j} \geq \lfloor \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{1}_j} \rfloor + 1, \tag{3.19}$$

розіб´ємо першу підобласть на більш дрібні підобласті. Знову розв´яжемо дві задачі лінійного програмування: першу – з обмеженнями (3.1), (3.16), (3.18) і другу – з обмеженнями (3.1), (3.17) і (3.19). Унаслідок цього отримаємо оптимальний розв´язок $\boldsymbol{x}^*_{\mathbf{1}_1}$ і $\boldsymbol{x}^*_{\mathbf{1}_2}$ і значення $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min}_{\mathbf{1}_1}}$ і $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min}_{\mathbf{1}_2}}$. Порівнявши між собою значення $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min}_{\mathbf{1}_1}}$ і $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min}_{\mathbf{1}_2}}$, виключаємо з подальшого розгляду одну з підобластей, наприклад першу, якщо

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min}\,\mathbf{1}_1} > \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{min}\,\mathbf{1}_2}.$$

Проаналізувавши розв´язки $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\mathbf{1}_1}$ та $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\mathbf{1}_2}$, робимо висновок про оптимальність розв´язку задачі ЦП або необхідність подальшого розгалуження.

Розглянемо обчислювальну процедуру методу гілок і меж та її геометричну інтерпретацію на прикладі.

Приклад 3.2. Знайти розв´язок задач (3.11) і (3.12) методом гілок і меж. Використовуючи цей метод, спочатку розв´яжемо задачу ЦП без урахування вимоги цілочисельності змінних. Таку задачу з обмеженнями (3.11) розв’язано в попередньому прикладі, а результат наведено кінцевою симплекс-таблицею 3.3. З огляду на те, що змінна $\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}$ у розв´язку $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ = (1; 3/2; 0; 0) набуває дробового значення, проведемо перше розбиття області допустимих розв´язків на дві підобласті. Для цього відповідно до (3.16) і (3.17) уведемо додаткові обмеження:

$$\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \leq 1 \text{ і } \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \geq 2.$$

Розв'яжемо задачу лінійного програмування для першої підобласті, межі якої визначаються нерівностями

$$-\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} + 2\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \leq 2,$$
$$3\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} + 2\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \leq 6,$$
$$\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \leq 1.$$

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей:

$$-\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} + 2\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x}_{\mathbf{3}} = 2,$$
$$3\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} + 2\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x}_{\mathbf{4}} = 6,$$
$$\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{y}_{\mathbf{1}} = 1.$$

Подаючи обмеження й цільову функцію у вигляді

$$x_3 = 2 - (-x_1 + 2x_2),$$
$$x_4 = 6 - (3x_1 + 2x_2),$$
$$y_1 = 1 - x_2,$$

$$L(\overline{x}) = 0 - (x_1 + 4x_2),$$

проведемо послідовність симплекс-перетворень (табл. 3.8–3.10).

Таблиця 3.8

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	x_1	$\overleftarrow{x_2}$
$L(\overline{x})$	0	1	4
x_3	2	–1	2
x_4	6	3	2
$\uparrow y_1$	2	0	$\boxed{1}$

→

Таблиця 3.9

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	x_1	$\overleftarrow{y_1}$
$L(\overline{x})$	–4	1	–4
x_3	0	–1	–2
$\uparrow x_4$	4	$\boxed{-3}$	–2
x_2	1	0	1

→

Таблиця 3.10

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	x_5	x_4
$L(\overline{x})$	–16/3	–1/8	–10/3
x_3	4/3	1/3	–8/3
x_1	4/3	1/3	–2/3
x_2	1	0	1

Оптимальний розв´язок для першої підобласті

$$\overline{x}_I^* = (4/3;\ 1;\ 4/3;\ 0;\ 0)$$

містить цілочислове значення змінної x_2. При цьому цільова функція $L_{min_1} = -16/3$.

Для другої підобласті, яка визначається обмеженнями

$$-x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$x_2 \ge 2$$

або

$$-x_1 + 2x_2 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$
$$x_2 - y_2 = 2,$$

розв´язок задачі лінійного програмування наведено симплекс-таблицями 3.11, 3.12.

Таблиця 3.11

Базові змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	x_1	$\overleftarrow{x_2}$
$L(\overline{x})$	0	1	4
$\uparrow x_3$	22	–1	$\boxed{2}$
x_4	6	3	2
y_2	–2	0	–1

→

Таблиця 3.12

Базові змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	x_1	x_3
$L(\overline{x})$	–4	3	–2
x_2	1	–1|2	1/2
x_4	4	4	–1
y_2	–1	1/2 1/2	1/2

Оскільки в останньому рядку кінцевої симплекс-таблиці 3.12 вільний член є від'ємним, а інші – додатними, задача лінійного програмування не має допустимих розв´язків і можна формально взяти $L_{min_2} = \infty$.

Через те, що

$$L_{min_1} < L_{min_2},$$

другу підобласть з подальшого обчислення виключаємо.

На рис. 3.4 показано розбиття області допустимих розв’язків на дві підобласті X_1 і X_2 прямими $y_1 = 0$ і $y_2 = 0$.

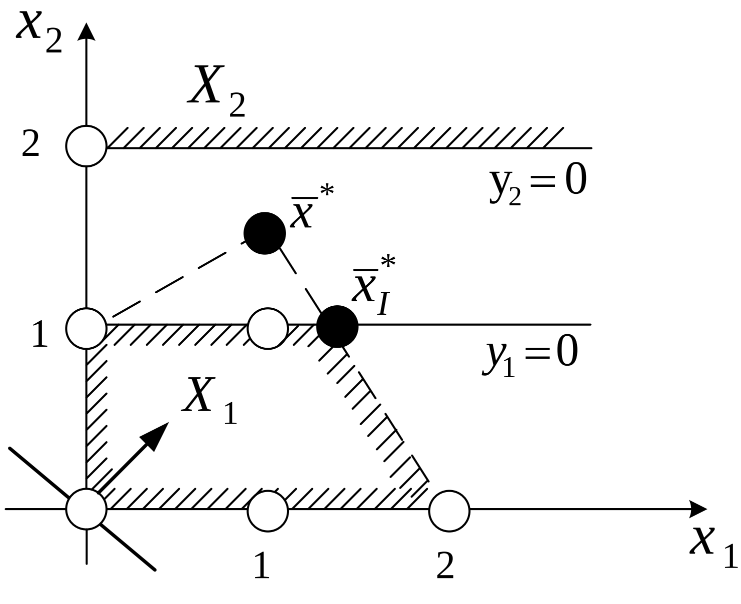

Рис. 3.4

Повернемося до першої підобласті. В оптимальному розв´язку $\overline{x}_1^*$ її змінна $x_1^* = 4/3$ – дробове число. Тому підобласть X_1 розіб´ємо на підобласті X_{1_1} і X_{1_2}.

Оскільки $\lfloor \frac{4}{3} \rfloor$ = 1, то відповідно до виразів (3.18) і (3.19) уведемо додаткові обмеження:

$$\boldsymbol{x_1} \le 1 – \text{ для підобласті } \boldsymbol{X_{1_1}};$$
$$\boldsymbol{x_1} \ge 2 – \text{ для підобласті } \boldsymbol{X_{1_2}}.$$

Розв'яжемо задачу лінійного програмування для підобласті $\boldsymbol{X_{1_1}}$ із застосуванням обмежень

$$-\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} \le 2,$$
$$3\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} \le 6,$$
$$\boldsymbol{x_2} \le 1,$$
$$\boldsymbol{x_1} \le 1.$$

Переходячи від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей

$$–\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = 2,$$
$$3\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_4} = 6,$$
$$\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{y_1} = 1,$$
$$\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{y_3} = 1$$

і застосовуючи табличний симплекс-метод, отримаємо послідовність симплекс-таблиць 3.13–3.15.

Таблиця 3.13

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	x_1	$\overleftarrow{x_2}$
$L(\bar{x})$	0	1	4
x_3	2	–1	2
x_4	6	3	2
↑ y_1	1	0	$\boxed{1}$
y_3	1	1	0

→

Таблиця 3.14

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	$\overleftarrow{x_1}$	y_1
$L(\bar{x})$	–4	1	–4
x_3	4	–1	–2
x_4	4	3	–2
x_2	1	0	1
↑ y_3	1	$\boxed{1}$	0

→

Таблиця 3.15

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	y_3	y_1
$L(\bar{x})$	–5	–1	–4
x_3	1	1	–2
x_4	1	–3	–2
x_2	1	0	1
x_1	1	1	0

Розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{1_1}}$ = (1; 1; 1; 0; 0) є цілочисловим, при цьому $\boldsymbol{L_{min1_1}}$ = −5.

Для під області $\boldsymbol{X_{1_2}}$ система обмежень має вигляд

$$\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} \le 2,$$
$$3\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} \le 6,$$
$$\boldsymbol{x_2} \le 1,$$
$$\boldsymbol{x_1} \ge 2,$$

або в канонічній формі

$$-\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = 2,$$
$$3\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_4} = 6,$$
$$\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{y_1} = 1,$$
$$\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{y_4} = 2.$$

Розв’язуючи задачу лінійного програмування табличним симплекс-методом, отримаємо послідовність симплекс-таблиць (табл. 3.16–3.18).

Таблиця 3.16

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	$\overleftarrow{x_1}$	x_2
$\boldsymbol{L(\bar{x})}$	0	1	4
$\mathbf{x_3}$	2	–1	2
$\mathbf{x_4}$	6	3	2
$\boldsymbol{y_1}$	1	0	*1*
$\uparrow \mathbf{y_4}$	–2	$\boxed{-1}$	0

→

Таблиця 3.17

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	$\boldsymbol{y_4}$	$\overleftarrow{\boldsymbol{x_2}}$
$\boldsymbol{L(\bar{x})}$	–2	1	4
$\boldsymbol{x_3}$	4	–1	–2
$\uparrow \boldsymbol{x_4}$	0	3	$\boxed{2}$
$\boldsymbol{y_1}$	1	0	1
$\boldsymbol{x_1}$	2	-1	0

→

Таблиця 3.18

БЗ	ВЗ		
	ВЧ	$\boldsymbol{y_3}$	$\boldsymbol{y_1}$
$\boldsymbol{L(\bar{x})}$	–2	–5	–2
$\boldsymbol{x_3}$	4	–4	–1
$\boldsymbol{x_2}$	0	3/2	1/2
$\boldsymbol{x_2}$	1	–3/2	–1/2
$\boldsymbol{x_1}$	1	–1	0

Розв´язок $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{1_2}} =$ (1; 0; 4; 0; 1; 0) також є цілочисловим, проте $\boldsymbol{L_{min\,1_2}}$ = −2. Оскільки

$$\boldsymbol{L_{min\,1_1}} < \boldsymbol{L_{min\,1_2}},$$

оптимальним розв´язком задачі цілочислового програмування буде $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{1_1}} =$ (1; 0; 4; 0; 1; 0), що збігається з результатом, отриманим методом відсічних площин. На рис. 3.5 показано підобласті $\boldsymbol{X_{1_1}}$ і $\boldsymbol{X_{1_2}}$, отримані розбиттям області $\boldsymbol{X}$ прямими $\boldsymbol{y_3}$ = 0 і $\boldsymbol{y_4}$ = 0.

Характерно, що підобласть $\boldsymbol{X_{1_2}}$ містить тільки одну точку $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{1_2}}$, що належить до області допустимих розв´язків задачі цілочислового програмування.

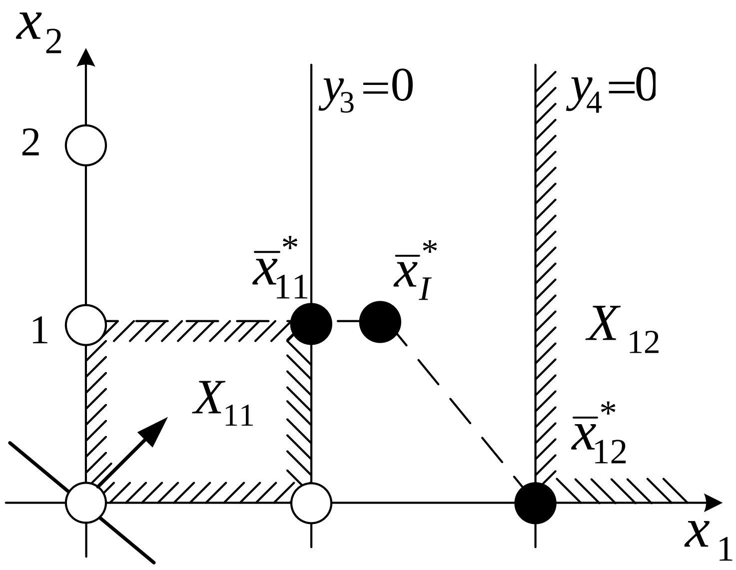

Рис. 3.5

Таким чином, в обчислюваному відношенні алгоритм розв'язання задачі цілочислового програмування методом гілок і меж є послідовністю задач лінійного програмування. При цьому на кожному кроці розгалуження кількість обмежень відповідної задачі збільшується на одиницю.

Дерево підмножин для розглядуваної задачі зображено на рис. 3.6.

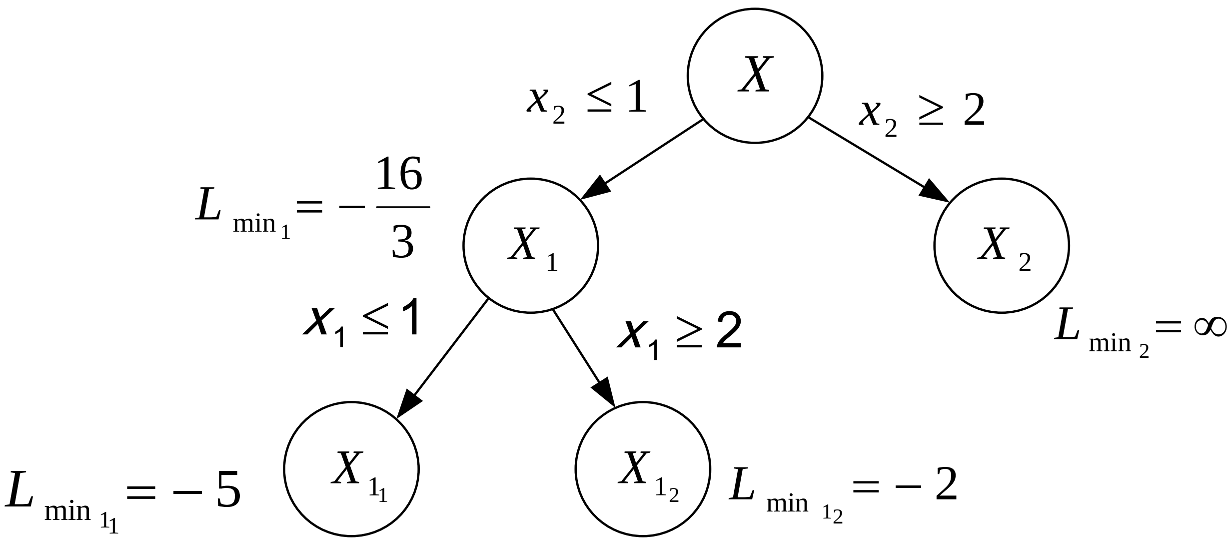

Рис. 3.6

Для задач цілочислового програмування кількість розгалужень є звичайною, якщо область допустимих розв´язків є скінченною. Отже, якщо область допустимих розв´язків є обмеженою, то завжди можна знайти цілочисловий розв´язок задачі за скінченну кількість кроків.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти невід'ємні значення змінних, які задовольняють обмеженню

$$-x_1 + 2x_2 \le 4,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$

де x_1, x_2 – цілі числа, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -x_1 + 4x_2.$$

2. Знайти невід'ємні значення змінних, які задовольняють обмеженню

$$-x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$

де x_1, x_2 – цілі числа, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -2x_1 + 3x_2.$$

2. Знайти невід'ємні значення змінних, що задовольняють обмеженню

$$-x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$

де x_1, x_2 – цілі числа, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -x_1 + 5x_2.$$

4. Знайти невід'ємні значення змінних, що задовольняють обмеженню

$$-x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$3x_1 + 3x_2 \le 6,$$

де x_1, x_2 – цілі числа, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -5x_1 + 3x_2.$$

5. Знайти невід'ємні значення змінних, що задовольняють обмеженню

$$-3x_1 + 2x_2 \le 5,$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12,$$

де x_1, x_2 – цілі числа, що перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -3x_1 + 6x_2.$$

4. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Методи розв´язання класичних задач нелінійного програмування

У загальному випадку задача нелінійного програмування формулюється так: необхідно знайти такі значення змінних x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n, які задовольняли б обмеженню

$$\begin{array}{c} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq b_1; \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq b_m \end{array} \tag{4.1}$$

і перетворювали на мінімум (або максимум) цільову функцію

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n), \tag{4.2}$$

де $g_i(\overline{x})$, $i = \overline{1,m}$, і $f(\overline{x})$ – нелінійні функції.

Задачі (4.1) і (4.2) є узагальненням раніше розглянутих задач: наприклад, якщо $g_i(\overline{x})$, $i = \overline{1,m}$, $f(\overline{x})$ – лінійні функції, а $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, то задача (4.1)–(4.2) перетворюється на задачу лінійного програмування,

Узагальненого способу розв'язання задач нелінійного програмування, подібного до сиплекс-методу, у лінійному програмуванні не існує. Це пояснюється великою різноманітністю цільових функцій і функцій, що є обмеженнями нелінійних задач. Однак якщо класифікувати наведені функції за певними ознаками, можна знайти обчислювальні процедури, що дадуть змогу ефективно розв´язувати задачі нелінійного програмування того чи іншого класу.

Найпростіша класична задача нелінійного програмування формулюється таким чином: знайти такі значення змінних x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n, які преретворюють на мінімум (або на максимум) цільову функцію

$$f\,(\overline{x}) = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_j,\, \ldots,\, x_n), \tag{4.3}$$

де $f(\overline{x})$ – неперервна диференційована функція.

Наведена задача характеризується тим, що обмежень на змінні x_1, x_2, …, x_j , …, x_n немає. Відомо [11], що необхідною умовою існування минімуму (або максимуму) цільової функції (4.3) є рівність нулю часткових похідних першого порядку. Якщо продиференціюємо (4.3) за x_1, x_2, …, x_j, …, x_n і прирівняємо часткові похідні до нуля, то отримаємо систему рівнянь

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f\,(\overline{x})}{\partial x_1} = 0,\\
\frac{\partial f\,(\overline{x})}{\partial x_2} = 0,\\
\ldots\\
\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_j} = 0,\\
\ldots\\
\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_n} = 0.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Розв´язавши цю систему, отримаємо значення $x_1^*,\ x_2^*, \ldots\ ,\ x_j^*, \ldots, x_n^*$ змінних, при яких цільова функція $f(\overline{x})$ може набувати мінімуму або максимуму.

Однак рівність нулю часткових похідних першого порядку є необхідною, але недостататньою умовою існування екстремуму. Часткові похідні функції $f(\overline{x})$ перетворюються на нуль і в сідлових точках. Одну з таких точок для функції двох змінних x_1 і x_2 зображено на рис. 4.8.

Для розуміння того, чи є точка $\overline{x}^*$ = $(x_1^*, x_2^*, \ldots,\ x_j^*, \ldots\ ,\ x_n^*)$, у якій часткові похідні перетворюються на нуль, точкою екстремуму або сідловою точкою, необхідно розрахувати визначник матриці других часткових похідних у цій точці, тобто

$$\left\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\bar{x} = \bar{x}^*} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial {x_1}^2} \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial n \partial x_1} \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial {x_1}^2} \end{vmatrix}_{\bar{x} = \bar{x}^*}. \quad (4.5)$$

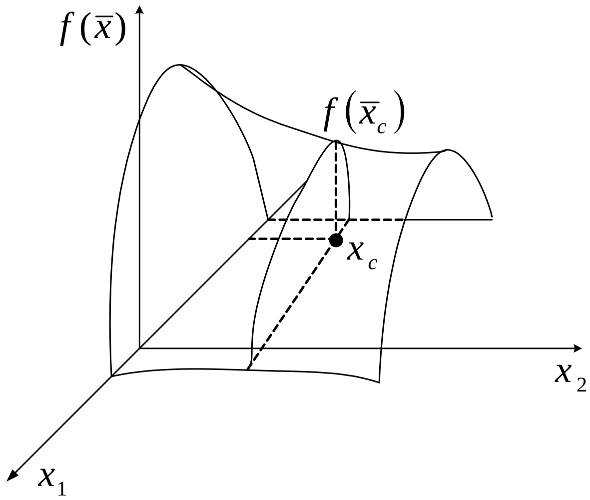

Рис. 4.1

Якщо $\left\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \neq 0$, то в точці $\bar{x}^* = (x_1^*,\ x_2^*, \dots, x_j^*, \dots,\ x_n^*)$ функція $f(\bar{x})$ набуває екстремуму (мінімуму або максимуму). Якщо $\left\| \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\| = 0$, то точка $\bar{x}^*$ є сідловою точкою.

Для визначення характеру екстремуму введемо поняття головного мінора ***k***-го порядку. Головним мінором ***k***-го порядку $\boldsymbol{\Delta_k}$ називають визначник матриці, яка утворюється шляхом викреслювання перших (***n – k***) рядків і (***n – k***) стовпців матриці (***n*** × ***n***). Наприклад, для матриці (3 × 3)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{33} \end{pmatrix}$$

головними мінорами будуть

$$\boldsymbol{\Delta_1} = |\ \boldsymbol{a_{33}}\ |; \ \boldsymbol{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}; \ \boldsymbol{\Delta_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, якщо всі головні мінори матриці $\|\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}\|$ є додатними (матриця є додатно визначеною), то функція $f(\bar{x})$ у точці $\bar{x}^*$ набуває мінімуму. Якщо ж головний мінор першого порядку матриці $\|\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}\|$ є від´ємним, а знаки інших головних мінорів чергуються (матриця є від´ємно визначеною), то в точці $\bar{x}^*$ функція $f(\bar{x})$ набуває максимуму.

Приклад 4.1. Знайти додатні значення змінних x_1 і x_2, які перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2.$$

Диференціюючи $f(\bar{x})$ за x_1 і x_2 і прирівнюючи часткові похідні до нуля, отримуємо

$$\frac{\partial f\ (\bar{x})}{\partial x_1} = 2x_1^* = 0,$$
$$\frac{\partial f\ (\bar{x})}{\partial x_2} = 2x_2^* = 0.$$

Унаслідок розв´язання цієї системи рівнянь отримаємо

$$x_1^* = 0,\ \ x_2^* = 0,\ \text{або}\ \ \bar{x}^* = (x_1^*,\ x_2^*) = (0,\ 0).$$

Побудуємо матрицю других часткових похідних:

$$\|\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}\|_{\bar{x}=\bar{x}^*} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори цієї матриці

$$\boldsymbol{\Delta_1} = 2,\ \boldsymbol{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

є додатними.

Таким чином, у точці $\overline{\boldsymbol{x}}^* = (\boldsymbol{x}_1^*,\ \boldsymbol{x}_2^*) = (0, 0)$ функція $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_1^2$ набуває мінімуму. На рис. 4.2 зображено параболоїд, який описується функцією $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_1^2$. У точці $\overline{\boldsymbol{x}}_б^* = (0, 0)$ значення $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_б^*) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{min}}^{(б)} = 0$.

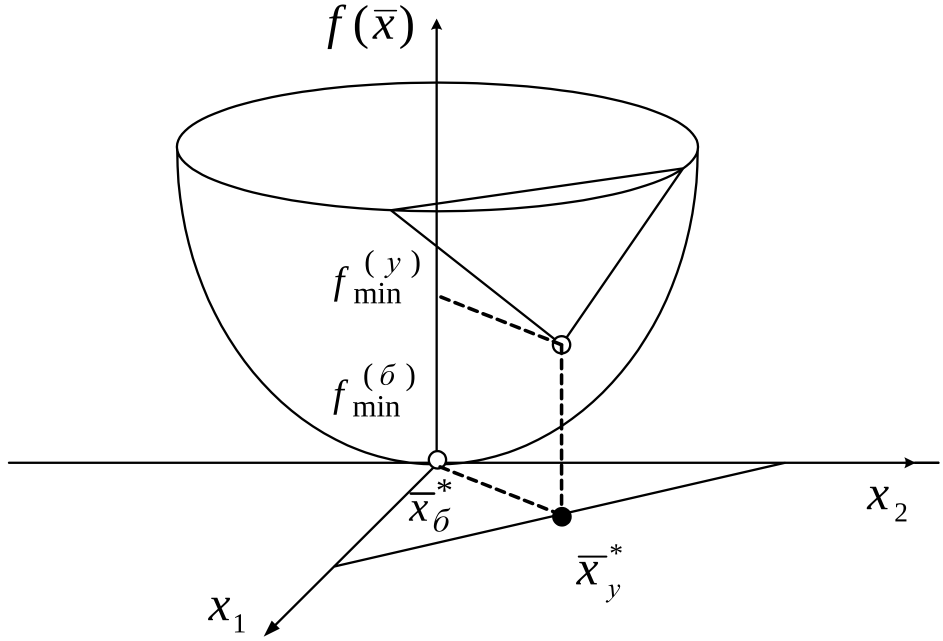

Рис. 4.2

Приклад 4.2. Знайти додатні значення змінних $\boldsymbol{x}_1$ і $\boldsymbol{x}_2$, які задовольняють обмеженню

$$3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 6$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2.$$

Рівняння-обмеження

$$3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 6 = 0$$

є рівнянням прямої в координатах $\boldsymbol{x}_1 0 \boldsymbol{x}_2$. Таким чином, у цій задачі точки $\overline{\boldsymbol{x}}$ є точками, які належать прямій. Уведення цього обмеження, як випливає з рис. 4.2, суттєво змінює положення мінімуму цільової функції $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$.

Екстремум цільової функції за браком обмежень називають безумовним екстремумом, а за їх наявності – умовним екстремумом. На рис. 4.2 показано, що безумовний мінімум функції $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})$ характеризується значенням $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{min}}^{(\text{б})}$, а умовний – $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{min}}^{(\text{у})}$.

Відповідно задачу пошуку безумовного екстремуму називають задачею безумовної оптимизації, а задачу пошуку умовного екстремуму – задачею умовної оптимизації.

Отже, у загальному випадку класична задача умовної оптимізації формулюється так: знайти такі значення змінних $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_j}$, …, $\boldsymbol{x_n}$, які задовольняли б обмеженню

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{g_1(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq b_1;} \\
\boldsymbol{g_2(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq b_2;} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{g_i(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq b_i;} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{g_m(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq b_m}
\end{gathered} \tag{4.6}$$

і перетворювали на мінімум (або на максимум) цільову функцію

$$\boldsymbol{f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}, \tag{4.7}$$

де $\boldsymbol{f(\overline{x})}$ і $\boldsymbol{g_i(\overline{x})}$, $\boldsymbol{i=\overline{1,m}}$, – неперервні двічі диференційовані функції.

На практиці більшість класичних задач є задачами умовної оптимізації. Основою методів розв´язання задач умовної оптимізації є ідея зведення задачі пошуку умовного естремуму до задачі пошуку безумовного екстремуму, тобто до більш простої задачі. Перехід від задачі умовної оптимизації до задачі безумовної оптимізації можна здійснити двома методами:

– виключення змінних;

– невизначених множників Лагранжа (шляхом додання нових змінних).

Розглянемо метод виключення змінних. Суть методу полягає в такому. З усієї сукупності змінних $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_j}$, …, $\boldsymbol{x_n}$ виберемо $\boldsymbol{k = n - m}$ змінних $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_k}$. Виразимо змінні $\boldsymbol{x_{k+1}}$, $\boldsymbol{x_{k+1}}$, …, $\boldsymbol{x_{k+m}}$ через змінні $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_k}$:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x_{k+1} = h_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)}, \\
\boldsymbol{x_{k+2} = h_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{x_{k+l} = h_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{x_{k+m} = h_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)}.
\end{gathered} \tag{4.8}$$

Тут n – кількість змінних, а m – кількість обмежень-рівностей у задачах (4.6)–(4.7).

Підставимо вирази для x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_{k+l}, …, x_{k+m} з (4.8) у вираз для цільової функції:

$$f(\overline{x}) = f[x_1, x_2, \ldots, x_k, h_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, x_{k+m}] =$$
$$= f[h_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, h_{k+m}(x_1, x_2, \ldots, x_k)]. \qquad (4.9)$$

Тепер задачі (4.6) і (4.7) будуть формулюватися таким чином: знайти такі значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$, які перетворюють на мінімум (або на максимум) цільову функцію (4.9). Така задача вже є задачею безумовної оптимізації. Оскільки обмежень немає, для її розв´язання можна використати розглянуту вище процедуру. Кількість змінних у цільовій функції (4.9) зменшилося до $k = n - m$. Це й дало назву методу.

Розв´яжемо останню задачу методом виключення змінних. Для цього, використавши рівняння-обмеженя

$$3x_1 + x_2 = 6,$$

виразимо змінну x_2 через x_1:

$$x_2 = 6 - 3x_1.$$

Підставивши x_2 у вираз для $f(\overline{x})$, отримаємо

$$f(\overline{x}) = f(x_1) = x_1^2 + (6 - 3x_1)^2.$$

Здиференціюємо $f(\overline{x})$ за x_1 і прирівняємо похідну до нуля:

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = 2x_1^* - 6(6 - 3x_1^*) = 0.$$

Розв´язавши це рівняння, отримаємо x_1^* = 1,8. Підставивши значення x_1^* у вираз для x_2, знайдемо x_2^* = 0,6. Таким чином, оптимальним роз´язком задачі буде $\overline{x}_у^*$ = (1,8; 0,6). Упевнимося в тому, що в точці $\overline{x}_у^*$ = (1,8; 0,6) цільова функція $f(\overline{x})$ набуває мінімуму.

Складемо матрицю других часткових похідних у точці $\overline{x}_у^*$:

$$\left\| \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\overline{x} = \overline{x}_у^*} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори цієї матриці $\boldsymbol{\Delta_1} = 2$; $\boldsymbol{\Delta_2} = 4$ є додатними. Таким чином, $\overline{\boldsymbol{x}}_у^* = (1{,}8;\ 0{,}6)$ зумовлює мінімум цільової функції. При цьому умовний мінімум

$$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}}^*) = \boldsymbol{f}_{min}^{у} = 3{,}6.$$

Метод виключення змінних є ефективним для розв´язання тих задач, де обмеження-рівності дають змогу досить просто виразити одні змінні через інші. Однак у деяких випадках цього зробити не вдається. Для розв´яння таких задач використовують інші методи, зокрема метод невизначених множників Лагранжа.

Метод невизначених множників Лагранжа. Цей метод розв’язання класичних задач НЛП розглянемо для випадку двох змінних, а отримані результати застосуємо для загального випадку ***n*** змінних.

Нехай необхідно знайти значення змінних $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_2}$, які задовольняють обмеженню

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{b} \tag{4.10}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}). \tag{4.11}$$

Відомо [14], що неявною функцією $\boldsymbol{x_2}$ незалежної змінної $\boldsymbol{x_1}$ називають функцію, значення якої знаходять з рівняння зв'язку між $\boldsymbol{x_1}$ і $\boldsymbol{x_2}$, не розв’язаного відносно $\boldsymbol{x_2}$. Виходячи з цього означення, можна вважати, що рівняння (4.11) визначає $\boldsymbol{x_2}$ як функцію від $\boldsymbol{x_1}$ у неявному вигляді.

Згідно з правилом диференціювання неявної функції отримаємо

$$\frac{\boldsymbol{dx_1}}{\boldsymbol{dx_2}} = -\frac{\boldsymbol{g'_{x_1}}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2})'}{\boldsymbol{g'_{x_2}}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})}, \tag{4.12}$$

де $\boldsymbol{g'_{x_1}}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = \dfrac{\boldsymbol{\partial g}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2})}{\boldsymbol{\partial x_1}}$, $\boldsymbol{g'_{x_2}}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = \dfrac{\boldsymbol{\partial g}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})}{\boldsymbol{\partial x_2}}$.

Знайдемо повну похідну за x_1 цільової функції $\boldsymbol{f(\overline{x})}$. Оскільки $\boldsymbol{f(\overline{x})}$ є складною функцією (з огляду на те, що $\boldsymbol{x_2}$ залежить від $\boldsymbol{x_1}$), повна похідна буде визначатися виразом

$$\frac{df\,(\overline{x})}{dx_1} = f'_{x_1}(x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1, x_2)\frac{dx_2}{dx_1}, \tag{4.13}$$

де $f'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{dx_1}$, $\quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{dx_2}$.

Підставивши (4.11) у (4.12), отримаємо

$$\frac{df\,(\overline{x})}{dx_1} = f'_{x_1}(x_1,\ x_2) - f'_{x_2}(x_1,\ x_2)\frac{g_{x_1}(x_1, x_2)'}{g'_{x_2}(x_1,\ x_2)}. \tag{4.14}$$

Якщо в точці екстремуму

$$\frac{df(\overline{x})}{dx_1} = 0,$$

то з урахуванням (4.13) можно записати

$$f'_{x_1}(x_1,\ x_2) - f'_{x_2}(x_1,\ x_2)\frac{g_{x_1}(x_1, x_2)'}{g'_{x_2}(x_1, x_2)} = 0,$$

або

$$\frac{f'_{x_1}(x_1, x_2)}{g'_{x_1}(x_1, x_2)} = \frac{f'_{x_2}(x_1, x_2)}{g'_{x_2}(x_1,\ x_2)}. \tag{4.15}$$

Позначимо кожне з цих відношень через $-\boldsymbol{\lambda}$:

$$\frac{f'_{x_1}(x_1, x_2)}{g'_{x_1}(x_1,\ x_2)} = -\boldsymbol{\lambda}, \tag{4.16}$$

$$\frac{f'_{x_2}(x_1, x_2)}{g'_{x_2}(x_1,\ x_2)} = -\boldsymbol{\lambda}. \tag{4.17}$$

Тоді з (4.16) і (4.17) отримаємо рівняння

$$f'_{x_1}(x_1,\ x_2) + \lambda g'_{x_1}(x_1,\ x_2) = 0, \tag{4.18}$$

$$f'_{x_2}(x_1,\ x_2) + \lambda g'_{x_2}(x_1,\ x_2) = 0, \tag{4.19}$$

які разом з рівнянням $g(x_1, x_2) = b$ дають змогу знайти значення змінних $x_1,\ x_2$ і λ.

Рівняння (4.16) і (4.17) можна отримати таким чином. Уведемо допоміжну функцію

$$G(x_1,\ x_2, \lambda) = f(x_1,\ x_2) + \lambda[g(x_1, x_2) - b], \tag{4.20}$$

що має назву функції Лагранжа. Знаходимо часткові похідні від функції $G(x_1, x_2, \lambda)$ і прирівнюємо їх до нуля, отримуємо шукані рівняння для визначення $x_1,\ x_2, \lambda$ у точках можливих екстремумів:

$$\frac{\partial G(x_1,\ x_2,\ \lambda)}{\partial x_1} = f'_{x_1}(x_1,\ x_2) + \lambda g'_{x_1}(x_1,\ x_2) = 0,$$

$$\frac{\partial G(x_1, x_2,\ \lambda)}{\partial x_2} = f'_{x_2}(x_1,\ x_2) + \lambda g'_{x_2}(x_1,\ x_2) = 0,$$

$$\frac{\partial G(x_1, x_2,\ \lambda)}{\partial \lambda} = g(x_1,\ x_2) - b = 0.$$

Неважко переконатися, що введення допоміжної змінної λ (невизначеного множника Лагранжа) дає змогу від задачі умовної оптимізації перейти до задачі безумовної оптимізації. Узагальнимо отримані результати на завдання (4.13), (4.14). Складемо функцію Лагранжа:

$$G(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x}) + \lambda_1[g_1(\overline{x} - b_1] + \lambda_2[g_2(\overline{x}) - b_2] + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_i[g_i(\overline{x}) - b_i] + \ldots + \lambda_m[g_m(\overline{x}) - b_m], \tag{4.21}$$

де $g_i(\overline{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$.

Очевидно, кількість невизначених множників $\boldsymbol{\lambda_i}$ у функції Лагранжа буде дорівнювати кількості обмежень-рівностей задачі нелінійного програмування. Диференціюючи цю функцію і прирівнюючи часткові похідні до нуля, отримаємо систему $(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m})$ рівнянь:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial G(\bar{x},\ \bar{\lambda})}{\partial x_1} = 0,\\
\frac{\partial G(\bar{x},\ \bar{\lambda})}{\partial x_2} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots.\\
\frac{\partial G(\bar{x},\ \bar{\lambda})}{\partial x_i} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial G(\bar{x},\ \bar{\lambda})}{\partial x_n} = 0,\\
\frac{\partial G(\bar{x},\ \bar{\lambda})}{\partial \lambda_1} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial G(\bar{x},\ \bar{\lambda})}{\partial \lambda_m} = 0.
\end{gathered}
\tag{4.22}
$$

Розв’язок системи (4.22) дає координати точок $\bar{\boldsymbol{x}}^* = (\bar{\boldsymbol{x}}_1^*,\ \bar{\boldsymbol{x}}_2^*, \ldots, \bar{\boldsymbol{x}}_j^*, \ldots, \bar{\boldsymbol{x}}_n^*)$ можливих умовних екстремумів цільової функції $\boldsymbol{f(\bar{x})}$.

Проілюструємо метод невизначених множників Лагранжа на прикладі.

Приклад 4.3. Знайти умовний екстремум функції

$$\boldsymbol{f(\bar{x}) = e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}}$$

з обмеженням

$$\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = 3.$$

Перш за все зазначимо, що метод виключення змінних для розв’язання цієї задачі застосувати не можна. Скористаємося методом невизначених множників Лагранжа.

Згідно з (4.21) складемо допоміжну функцію Лагранжа. Оскільки задача має одне обмеження-рівність, у функції Лагранжа буде один невизначений множник:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2},\ \boldsymbol{x_3},\ \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_1} + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_2} + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_3} + \boldsymbol{\lambda}[\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} - 3].$$

Диференціюючи $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3},\ \boldsymbol{\lambda})$ і прирівнюючи часткові похідні до нуля, отримуємо таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2},\ \boldsymbol{x_3},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{x_1}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_1^*} + \boldsymbol{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2},\ \boldsymbol{x_3},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{x_2}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_2^*} + \boldsymbol{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2},\ \boldsymbol{x_3},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{x_3}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_3^*} + \boldsymbol{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2},\ \boldsymbol{x_3},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} - 3 = 0.$$

З перших трьох рівнянь системи випливає, що

$$\lambda = -\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_1^*},\ \lambda = -\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_2^*},\ \lambda = -\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_3^*}.$$

Це означає, що

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_1^*} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_2^*} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}_3^*}$$

або

$$\boldsymbol{x}_1^* = \boldsymbol{x}_2^* = \boldsymbol{x}_3^*.$$

Тоді з останнього рівняння системи знаходимо

$$\boldsymbol{x}_1^* = \boldsymbol{x}_2^* = \boldsymbol{x}_3^* = 1.$$

Таким чином, у точці $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ = (1, 1, 1) цільова функція набуває екстремуму. Визначимо його характер. Для цього створимо матрицю других часткових похідних функції $\boldsymbol{f(\overline{x})}$:

$$\left\| \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\| = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{pmatrix}.$$

У точці $\overline{x} = \overline{x}^*$ матриця має такий вигляд:

$$\left\| \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\| = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Головні мінори $\Delta_1 = e$, $\Delta_2 = e^2$, $\Delta_3 = e^3$ є додатними, таким чином, у точці $\overline{x}^* = (1, 1, 1)$ функція $f(\overline{x}) = e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}$ набуває мінімуму.

На закінчення зупинимося на задачах, у яких обмеженнями є нерівності. Нехай необхідно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, які задовольняють системі обмежень (4.1) і перетворюють на мінімум (або на максимум) цільову функцію (4.2), де $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$, і $f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ – неперервні функції, які двічі диференціюються.

Розглянуті вище методи розв'язання класичних задач НЛП застосовуються тоді, коли обмеження задачі в загальному випадку є нелінійними рівняннями. Перехід від обмежень-нерівностей (4.1) до обмежень-рівностей здійснюється так само, як і при зведенні завдання лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями до ЗЗЛП.

Після додавання змінних x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+j}, …, x_{n+m} система обмежень (4.1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + x_{n+1} = b_1; \\ &g_2(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + x_{n+2} = b_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_i(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + x_{n+i} = b_i; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_m(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + x_{n+m} = b_m. \end{aligned} \qquad (4.23)$$

Зауважимо, що на змінні x_j обмеження не накладаються, тому x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+j}, …, x_{n+m} можуть набувати від´ємних значень. Тепер задача (4.23) відповідає усім характерним особливостям класичних задач НЛП, і для її розв'язання можна використовувати будь-який з розглянутих вище методів.

4.2. Квадратичне програмування

У задачах квадратичного програмування обмеженнями є лінійні рівності або нерівності вигляду

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{ij}x_j + \ldots + \alpha_{in}x_n \geq b_i, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \tag{4.24}$$

а цільовою функцією – сума лінійної і квадратичної функцій:

$$f(\overline{x}) = L(\overline{x}) + \varphi(\overline{x}), \tag{4.25}$$

де

$$L(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j; \tag{4.26}$$

$$\varphi(\overline{x}) = d_{11}x_{11}^2 + \ldots + d_{12}x_1x_2 + \ldots + d_{kj}x_kx_j + \ldots$$

$$\ldots + d_{nn}x_{nn}^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_kx_j. \tag{4.27}$$

Лінійні функції (4.26) і (4.27) можуть бути опуклими або вгнутими, тому належність задачі (4.24)−(4.25) до задач опуклого або вгнутого програмування повною мірою визначається властивостями квадратичної форми (квадратичної функції) $\varphi(\overline{x})$.

Квадратична форма $\varphi(\overline{x})$ є опуклою, якщо вона є додатно визначеною або додатно напіввизначеною, і вгнутою, якщо від'ємно визначеною або від'ємно напіввизначеною. Таким чином, для опуклої форми $\varphi(\overline{x})$ задача (4.24)−(4.25) належить до задач опуклого програмування, а для вгнутої функції $\varphi(\overline{x})$ – до задач увігнутого програмування.

Властивості квадратичної форми легко визначаються з матриці $\|d_{kj}\|$ коефіцієнтів d_{kj} шляхом обчислення головних мінорів. Матриця $\|d_{kj}\|$ розмірністю $n \times n$ є симетричною. Діагональними елементами цієї матриці є коефіцієнти при x_j^2, а недіагональними – $d_{kj} = d_{jk}$, що дорівнюють половині від коефіцієнта при x_kx_j. Наприклад, квадратичну форму

$$\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1^2$$

можна подати у вигляді

$$\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2,$$

і тоді їй буде відповідати матриця

$$\|d_{kj}\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

За результатами обчислення головних мінорів матриці $\| d_{kj} \|$ можливими є такі випадки:

1. Усі головні мінори матриці є додатними, квадратична форма $\varphi(\overline{x})$ є додатно визначеною.

2. Головні мінори Δ_1, Δ_2, …, Δ_r, де r – ранг матриці $\| d_{kj} \|$, є додатними, а інші дорівнюють нулю, квадратична форма $\varphi(\overline{x})$ є додатно напіввизначеною.

3. Головний мінор першого порядку є від'ємним, знаки інших мінорів чергуються, квадратична форма $\varphi(\overline{x})$ є від'ємно визначеною.

4. Головний мінор першого порядку є від'ємним, знаки мінорів Δ_1, $\Delta_2, \dots, \Delta_r$, де $r < n$ – ранг матриці, чергуються, а інші мінори дорівнюють нулю, квадратична форма $\varphi(\overline{x})$ є від'ємно напіввизначеною.

5. Серед головних мінорів Δ_1, Δ_2, …, Δ_n немає чергування знаків, серед мінорів є від'ємні, квадратична форма $\varphi(\overline{x})$ є невизначеною.

Приклад 4.4. Дослідити властивості квадратичної функції

$$\varphi(\overline{x}) = x_1x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Запишемо вираз для $\varphi(\overline{x})$ у вигляді

$$\varphi(\overline{x}) = -x_1^2 + 0{,}5x_1x_3 - x_2^2 - x_3^2 + 0{,}5x_1x_3$$

і складемо матрицю:

$$\|d_{kj}\| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо головні мінори матриці $\|d_{kj}\|$:

$$\Delta_1 = -1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -0{,}75.$$

Головний мінор першого порядку є від’ємним, знаки інших мінорів чергуються. Таким чином, відповідно до п. 3 квадратична форма $\boldsymbol{\varphi(\overline{x})}$ є від’ємно визначеною.

Приклад 4.5. Дослідити властивості функції

$$\boldsymbol{\varphi(\overline{x})} = \boldsymbol{x_1^2} + \boldsymbol{x_2^2} + \boldsymbol{x_3^2} + 2\boldsymbol{x_1 x_2}.$$

Складемо матрицю квадратичної форми $\boldsymbol{\varphi(\overline{x})}$:

$$\| \boldsymbol{d_{kj}} \| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0,5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори матриці є такими:

$$\boldsymbol{\Delta_1} = 1;\ \boldsymbol{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ \boldsymbol{\Delta_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг матриці $\boldsymbol{r} = 2$, а мінори є такими: $\boldsymbol{\Delta_1} > 0$, $\boldsymbol{\Delta_2} = 1$, $\boldsymbol{\Delta_3} = 0$, тобто відповідно до п. 2 функція $\boldsymbol{\varphi(\overline{x})}$ є додатно напіввизначеною.

Приклад 4.6. Дослідити властивості функції

$$\boldsymbol{\varphi(\overline{x})} = \boldsymbol{x_1^2} - \boldsymbol{x_2^2} - 2\boldsymbol{x_3^2} + 2\boldsymbol{x_1 x_2} - 4\boldsymbol{x_1 x_3} + 2\boldsymbol{x_2 x_3}.$$

Складемо матрицю квадратичної форми $\boldsymbol{\varphi(\overline{x})}$:

$$||\boldsymbol{d_{kj}}|| = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори матриці є такими:

$$\boldsymbol{\Delta_1} = -2;\ \boldsymbol{\Delta_2} = 1;\ \boldsymbol{\Delta_3} = 1.$$

Хоча $\boldsymbol{\Delta_1}$ є від´ємним, а $\boldsymbol{\Delta_2}$ – додатним, подальшого чергування знаків мінорів немає. Тому відповідно до п. 5 наведених правил функція $\boldsymbol{\varphi(\overline{x})}$ є невизначеною.

Перейдемо до розгляду методики розв´язання задач квадратичного програмування. Для спрощення будемо вважати, що цільова функція ***f(t)*** є опуклою, а обмеженнями є лише лінійні рівняння. Тоді функція ***f(t)*** має локальний мінімум, який є також і глобальним.

Отже, розглядається задача: знайти такі невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, які задовольняли би системі обмежень

$$a_1x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + a_{in}x_n = b_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + a_{mn}x_n = b_m$$

і перетворювали на мінімум цільову функцію

$$f(\overline{x}) = L(\overline{x}) + \varphi(\overline{x}).$$

Складемо допоміжну функцію Лагранжа:

$$G(\overline{x}^*, \overline{\lambda}) = f(\overline{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [\, a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots$$
$$\ldots + a_{1j}x_j + a_{1n}x_n - b_i] = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i]. \quad (4.28)$$

Відомо, що для знаходження оптимального розв’язку задачі опуклого програмування необхідно визначити сідлову точку функції Лагранжа:

$$\frac{\partial G(\overline{x}, \overline{\lambda})}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial G(\overline{x}, \overline{\lambda})}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i. \quad (4.30)$$

Позначимо

$$\frac{\partial G(\overline{x},\ \overline{\lambda})}{\partial x_j} = p_j;\ \frac{\partial G(\overline{x},\ \overline{\lambda})}{\partial \lambda_i} = -q_i. \qquad (4.31)$$

Тоді з (4.29) і (4.30) з урахуванням (4.31) визначимо:

$$2\sum_{k=1}^{n} d_{kj}x_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} - p_j = -c_j; \qquad (4.32)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + q_i = b_i. \qquad (4.33)$$

Значення координат сідлової точки функції $G(\overline{x}, \overline{\lambda})$ $\overline{x}^* = (\overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*, \ldots, \overline{x}_j^*, \ldots, \overline{x}_n^*)$ і $\overline{\lambda}^* = (\overline{\lambda}_1^*, \overline{\lambda}_2^*, \ldots, \overline{\lambda}_j^*, \ldots, \overline{\lambda}_m^*)$, очевидно, є розв’язком системи рівнянь (4.32) і (4.33) з обмеженнями, які для розглядуваної задачі набувають вигляду

$$p_j \geq 0;\ x_jp_j = 0; q_i \geq 0;\ q_i\lambda_i = 0;\ x_j \geq 0;\ \lambda_i \geq 0. \qquad (4.34)$$

Таким чином, розв’язання задачі квадратичного програмування звелося до пошуку допустимого розв’язку системи (***n*** + ***m)*** лінійних рівнянь (4.32)–(4.33) при обмеженнях (4.34). Зазначимо, що в цій задачі міститься 2(***n*** + ***m***) змінних, якими є $x_j,\ p_j,\ q_i,\ \lambda_i$.

Оскільки (4.32)−(4.33) є лінійними рівняннями, для пошуку допустимого розв’язку можна скористатися алгоритмом, викладеним у підрозд. 2.2. Основою цього алгоритму, як відомо, є симплекс-метод розв´язання задач лінійного програмування. Однак при пошуку розв´язку рівнянь (4.32)−(4.33) необхідно приділити увагу виконанню вимог $x_jp_j = 0$ та $q_i\lambda_i = 0$. Це є істотною відмінністю розглянутого алгоритму від наведеного в підрозд. 2.2.

Виконаємо процедуру розв´язання задачі квадратичного програмування на такому прикладі.

Приклад 4.7. Знайти невід’ємні значення змінних x_1 і x_2, які задовольняють обмеженням-нерівностям

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20,$$
$$2x_1 - x_2 \leq 8$$

і перетворюють на мінімум цільову функцию

$$f(\overline{x}) = 4x_1^2 + 15x_2^2 - 32x_1 - 120x_2.$$

Насамперед проведемо дослідження квадратичної форми

$$\boldsymbol{\varphi(\overline{x})} = 4\boldsymbol{x_1^2} + 15\boldsymbol{x_2^2}.$$

Матриця коефіцієнтів $\boldsymbol{d_{kj}}$ квадратичної форми має такий вигляд:

$$\|\boldsymbol{d_{kj}}\| = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори матриці

$$\boldsymbol{\Delta_1} = 1; \ \boldsymbol{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 60$$

є додатними, квадратична форма $\boldsymbol{\varphi(\overline{x})}$ – додатно визначеною й опуклою функцією. Таким чином, задача належить до задач опуклого програмування.

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей:

$$2\boldsymbol{x_1} + 5\boldsymbol{x_2} \le 20,$$
$$2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = 20,$$
$$2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_4} = 8.$$

Запишемо допоміжну функцію Лагранжа:

$$\boldsymbol{G}(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\lambda}}) = 4\boldsymbol{x_1^2} + 15\boldsymbol{x_2^2} - 32\boldsymbol{x_1} - 120\boldsymbol{x_2}\boldsymbol{\lambda_1}(2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} - 20) +$$
$$+ \boldsymbol{\lambda_2}(2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_4}) = 8.$$

Згідно з (4.32) і (4.33) складемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} 8\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{\lambda_1} + 2\boldsymbol{\lambda_2} - \boldsymbol{p_1} &= 32; \\ 30\boldsymbol{x_1} + 5\boldsymbol{\lambda_1} + \boldsymbol{\lambda_2} - \boldsymbol{p_2} &= 120; \\ 2\boldsymbol{x_1} + 5\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{q_1} &= 20; \\ 2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_4} + \boldsymbol{q_2} &= 8. \end{aligned}$$

Знайдемо додаткові значення змінних $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$, $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, які задовольняють системі рівнянь з урахуванням додаткових обмежень

$$\boldsymbol{p_1}\boldsymbol{x_1} = 0; \ \boldsymbol{p_2}\boldsymbol{x_2} = 0; \ \boldsymbol{q_1}\boldsymbol{\lambda_1} = 0; \ \boldsymbol{q_2}\boldsymbol{\lambda_2} = 0.$$

У системі є 10 змінних і чотири рівняння, виберемо $\boldsymbol{k}$ = 10 – 4 вільних змінних, через які виразимо інші (базисні) змінні.

Вільними змінними доцільно вибрати $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$. Тоді базисні змінні можна виразити таким чином:

$$\boldsymbol{p_1} = -32 + 8\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{\lambda_1} + 2\boldsymbol{\lambda_2};$$
$$\boldsymbol{p_2} = -120 + 30\boldsymbol{x_2} + 5\boldsymbol{\lambda_1} - \boldsymbol{\lambda_2};$$
$$\boldsymbol{x_3} = 20 - 2\boldsymbol{x_1} - 5\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{q_1};$$
$$\boldsymbol{x_4} = 8 - 2\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{q_2}.$$

Запишемо цю систему рівнянь у формі, зручній для заповнення симплекс-таблиці:

$$\boldsymbol{p_1} = -32 - (-8\boldsymbol{x_1} - 2\boldsymbol{\lambda_1} - 2\boldsymbol{\lambda_2});$$
$$\boldsymbol{p_2} = -120 - (-30\boldsymbol{x_2} - 5\boldsymbol{\lambda_1} - \boldsymbol{\lambda_2});$$
$$\boldsymbol{x_3} = 20 - (2\boldsymbol{x_1} - 5\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{q_1});$$
$$\boldsymbol{x_4} = 8 - (2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{q_2}).$$

Заповнимо першу симплекс-таблицю (табл. 4.1). Прирівнюючи вільні змінні $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$ до нуля, отримаємо перший розв’язок: $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{q_1} = \boldsymbol{q_2} = \boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_2} = 0$, $\boldsymbol{p_1}$ = −32, $\boldsymbol{p_2}$ = −120, $\boldsymbol{x_3}$ = 20, $\boldsymbol{x_4}$ = 8.

Таблиця 4.1

Базові змінні	Вільні змінні						
	ВЧ	$\overleftarrow{x_1}$	x_2	λ_1	λ_2	q_1	q_2
↑ p_1	-32	$\boxed{-8}$	0	-2	-2	0	0
p_2	-120	0	-30	-5	1	0	0
x_3	20	2	5	0	0	1	0
x_4	8	2	-1	0	0	0	1

Цей розв'язок системи рівнянь не є допустимим, оскільки $\boldsymbol{p_1}$ і $\boldsymbol{p_2}$ – від’ємні. Пошук допустимого розв’язку і становить суть процедури розв’язання задачі квадратичного програмування.

Відповідно до алгоритму пошуку допустимого розв’язку виберемо в першому стовпці від’ємний елемент зі значенням −32.

У рядку з вибраним від’ємним елементом знайдемо елементи, однакові з ним за знаком. У розглядуваній задачі це будуть елементи, розташовані на перетині першого рядка і стовпців при $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, тобто −8, −2 і −2.

Знайдемо відношення від’ємного вільного члена до кожного із зазначених від’ємних елементів. Очевидно,

$$\frac{-32}{28} < \frac{-32}{-2},$$

тому стовпець при x_1 буде розв'язувальним. Це означає, що змінну x_1 необхідно перевести до складу базисних змінних.

У розв'язувальному стовпці елементи рядків при p_1, x_3 і x_4 мають знаки, однакові зі знаком відповідного вільного члена. Визначимо відношення кожного вільного члена до відповідного елемента розв'язувального стовпця. Ці відношення будуть такими:

$$\frac{-32}{-8} = 4; \ \frac{20}{2} = \ 10; \frac{8}{2} = \ 4.$$

Оскільки 4 < 10, як розв'язувальний рядок можна було б вибрати рядок при p_1 або при x_4. Однак якщо розв'язувальним рядком вибрати рядок при x_4, то до складу базисних змінних потраплять і x_1, і x_4. Оскільки базисні змінні є відмінними від нуля, у цьому випадку добуток p_1x_1 також буде відмінним від нуля, що суперечить обмеженню p_1x_1 = 0. Тому як розв'язувальний рядок доцільно вибрати рядок при x_1, тому що тільки при цьому вимога p_1x_1 = 0 буде справджуватися.

Таким чином, для того щоб виконувалися обмеження

$$p_jx_j = 0; \ \ q_i\lambda_i = 0,$$

необхідно, щоб серед базисних змінних одночасно не було p_j і x_j або q_i і λ_i з однаковим індексом.

Виконавши симплекс-перетворення, перейдемо до симплекс-таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Базові змінні	Вільні змінні						
	ВЧ	p_1	$\overleftarrow{x_2}$	λ_1	λ_2	q_1	q_2
x_1	4	-1/8	0	1/4	1/4	0	0
$\uparrow p_2$	-120	0	$\boxed{-30}$	-5	1	0	0
x_3	12	1/4	5	-1/2	-1/2	1	0
x_4	8	1/4	-1	-1/2	-1/2	0	1

Розв'язок $p_1 = x_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = q_1 = q_2 = 0$; $x_1 = 4$; $p_2 = -120$; $x_3 = 12$; $x_4 = 0$ не є допустимим, тому продовжимо його пошук. Для цього розглянемо рядок при p_2. Очевидно, як розв'язувальний слід вибрати стовпець при $\boldsymbol{x_2}$. Тоді для виконання вимоги $\boldsymbol{p_2 x_2}$ = 0 необхідно, щоб розв'язувальним був рядок при $\boldsymbol{p_2}$. Після виконання симплекс-перетворень отримаємо симплекс-таблицю 4.3.

Таблиця 4.3

Базові змінні	Вільні змінні						
	ВЧ	p_1	p_2	$\overleftarrow{\lambda_1}$	λ_2	q_1	q_2
x_1	4	-1/8	0	1/4	1/4	0	0
x_2	4	0	-1/30	1/6	-1/30	0	0
$\uparrow x_3$	-8	1/4	1/6	$\boxed{-4/3}$	-1/3	1	6
x_4	4	1/4	-1/30	-1/3	16/30	0	1

Розв'язок $\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_2} = \boldsymbol{q_1} = \boldsymbol{q_2} = 0$; $\boldsymbol{x_1} = 4; \boldsymbol{x_2} = 4$; $\boldsymbol{x_3} = -8; \boldsymbol{x_4} = 4$ знову не є допустимим. Розглянемо рядок при $\boldsymbol{x_3}$. Тут елементи стовпців при $\boldsymbol{\lambda_1}$ і $\boldsymbol{\lambda_2}$ мають однаковий знак з вільним членом.

Оскільки

$$\frac{-8}{-4/3} < \frac{-8}{-1/3},$$

як розв'язувальний виберемо стовпець при $\boldsymbol{\lambda_1}$. Тоді розв'язувальним буде рядок при $\boldsymbol{x_3}$.

Виконавши симплекс-перетворення, отримаємо табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Базові змінні	Вільні змінні						
	ВЧ	p_1	p_2	x_3	λ_2	q_1	q_2
x_1	5/2	-5/64	1/32	3/16	3/16	3/16	0
x_2	3	1/32	-1/80	1/8	-3/40	1/8	0
λ_1	6	-3/16	-1/8	-3/4	1/4	-3/4	0
x_4	6	3/16	-3/40	-1/4	37/60	1/4	1

Розв'язок $\boldsymbol{p_1^*} = \boldsymbol{p_2^*} = \boldsymbol{x_3^*} = \boldsymbol{\lambda_2^*} = \boldsymbol{q_1^*} = \boldsymbol{q_2^*} = 0$; $\boldsymbol{x_1^*} = \frac{5}{2}$; $\boldsymbol{x_2^*} = 3$; $\boldsymbol{x_4^*} = 6$; $\boldsymbol{\lambda_1^*} = 6$ уже є допустимим розв'язком системи рівнянь.

Таким чином, розв'язок

$$(\overline{\boldsymbol{x}}^*, \overline{\boldsymbol{\lambda}}^*) = (\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}, \boldsymbol{x_3^*}, \boldsymbol{x_4^*}, \boldsymbol{\lambda_1^*}, \boldsymbol{\lambda_2^*}) = (5/2, 3, 0, 6, 6, 0)$$

є сідловою точкою функції Лагранжа, а $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ = (5/2, 3) – оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування. При цьому значення цільової функції $\boldsymbol{f(\overline{x}^*)} = \boldsymbol{f_{min}} = -280$.

У тому випадку, коли цільова функція (4.57) є вгнутою, розв'язок задачі квадратичного програмування є допустимим розв'язком системи рівнянь

$$\begin{gathered} 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj}\,\lambda_1^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,a_{ij} + p_j = -c_j; \\ \sum_{j=1}^{n} x_i\,a_{ij} - q_i = -b_i \end{gathered} \qquad (4.35)$$

при обмеженнях

$$p_j \geq 0;\ p_j x_j = 0;\ q_i \geq 0;\ \lambda_i q_i = 0;\ x_j \geq 0;\ \lambda_i \geq 0.$$

Очевидно, допустимий розв'язок системи (4.65) можна знайти так само, як і допустимий розв'язок рівнянь (4.62) і (4.63).

Описаний вище алгоритм пошуку допустимих розв'язків не є єдиним. Досить поширеним на практиці є метод штучних змінних, описаний, наприклад, у роботі [7]. Однак основою й цього методу є симплекс-метод, що дає змогу порівняно легко розв'язувати задачі квадратичного програмування на комп'ютері.

4.2. Дробово-лінійне програмування

Розглянемо таку задачу. На обчислювальний центр (ОЦ) колективного користування надходять задачі двох типів: науково-технічні й управлінські. Середній час розв'язання однієї задачі першого типу становить t_1 годин, а другого − t_2 годин.

Загальна кількість задач першого типу, що надходять на ОЦ протягом доби, не може перевищувати b_1, а другого типу – b_2. Визначити оптимальну кількість задач першого й другого типів, що надходять на ОЦ протягом доби, при якій пропускна здатність обчислювального центру була би максимальною.

Позначимо через x_1 кількість задач першого, а через x_2 – другого типу, що надходять на ОЦ. Тоді середній час розв'язання задач першого типу становитиме $t_1 x_1$ годин, другого типу − $t_2 x_2$ годин, а загальний час

$$t_{\text{заг}} = t_1 x_1 + t_2 x_2.$$

Пропускна здатність ОЦ визначається як середня кількість задач, що розв'язуються обчислювальним центром за одиницю часу, у цьому випадку – протягом години. Оскільки загальна кількість задач, що розв’язує обчислювальний центр,

$$\boldsymbol{x}_{\text{заг}} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2},$$

пропускна здатність буде визначатися виразом

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X}) = \frac{\boldsymbol{x}_{\text{заг}}}{\boldsymbol{t}_{\text{заг}}} = \frac{\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}}{\boldsymbol{t_1 x_1} + \boldsymbol{t_2 x_2}}. \tag{4.36}$$

Тоді розглядувану задачу можна сформулювати таким чином: знайти такі невід’ємні значення змінних $\boldsymbol{x_1}$ і $\boldsymbol{x_2}$, які задовольняють вимоги

$$\boldsymbol{x_1} \leq \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{x_2} \leq \boldsymbol{b_2} \tag{4.37}$$

і перетворюють на максимум цільову функцію (4.36). Оскільки цільова функція є дробово-лінійною, а обмеження – лінійними нерівностями, задача визначення пропускної здатності належить до класу задач дробово-лінійного програмування (ДЛП).

Обернена до пропускної здатності величина

$$\boldsymbol{q(x)} = \frac{\boldsymbol{t}_{\text{заг}}}{\boldsymbol{x}_{\text{заг}}} = \frac{\boldsymbol{t_1 x_1} + \boldsymbol{t_2 x_2}}{\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}} \tag{4.38}$$

характеризує середній час обслуговування (розв’язання) однієї задачі на ОЦ. У цьому випадку задача полягає в мінімізації виразу (4.38) при обмеженнях (4.37).

Сформулюємо тепер задачу дробово-лінійного програмування (ДЛП) у загальному вигляді. Потрібно знайти такі невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_j}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$, які задовольняють обмеженню

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{a_{11}x_1} + \boldsymbol{a_{12}x_2} + \ldots + \boldsymbol{a_{1j}x_j} + \boldsymbol{a_{1n}x_n} \geq \boldsymbol{b_1}, \\
\boldsymbol{a_{21}x_1} + \boldsymbol{a_{22}x_2} + \ldots + \boldsymbol{a_{2j}x_j} + \boldsymbol{a_{2n}x_n} \geq \boldsymbol{b_2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{a_{i1}x_1} + \boldsymbol{a_{i2}x_2} + \ldots + \boldsymbol{a_{ij}x_j} + \boldsymbol{a_{in}x_n} \geq \boldsymbol{b_i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{a_{m1}x_1} + \boldsymbol{a_{m2}x_2} + \ldots + \boldsymbol{a_{mj}x_j} + \boldsymbol{a_{mn}x_n} \geq \boldsymbol{b_m}
\end{gathered} \tag{4.39}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$\boldsymbol{f(\overline{x})} = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n}{d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_jx_j + \dots + d_nx_n}. \qquad (4.40)$$

Ця задача схожа на задачу лінійного програмування, проте цільова функція тут є нелінійною функцією змінних x_1, x_2, …, x_j, …, x_n. Припустимо, що обмеження являють собою систему m лінійних рівнянь (порядок переходу від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей було описано вище). Тоді так само, як і в задачі лінійного програмування, у розглядуваній задачі ДЛП при $n - m$ = 2 допускається проста геометрична інтерпретація.

Виберемо $n - m$ = 2 змінні, наприклад x_1 і x_2, і виразимо через них інші змінні:

$$\begin{aligned} x_3 &= \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2, \\ x_4 &= \beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2. \end{aligned} \qquad (4.41)$$

Рівняння (4.41) дають змогу побудувати область допустимих розв´язків задачі в координатах $x_1 0 x_2$ так само, як це робилося в задачі лінійного програмування. На рис. 4.3 показано ОДР, побудовану в координатах $x_1 0 x_2$.

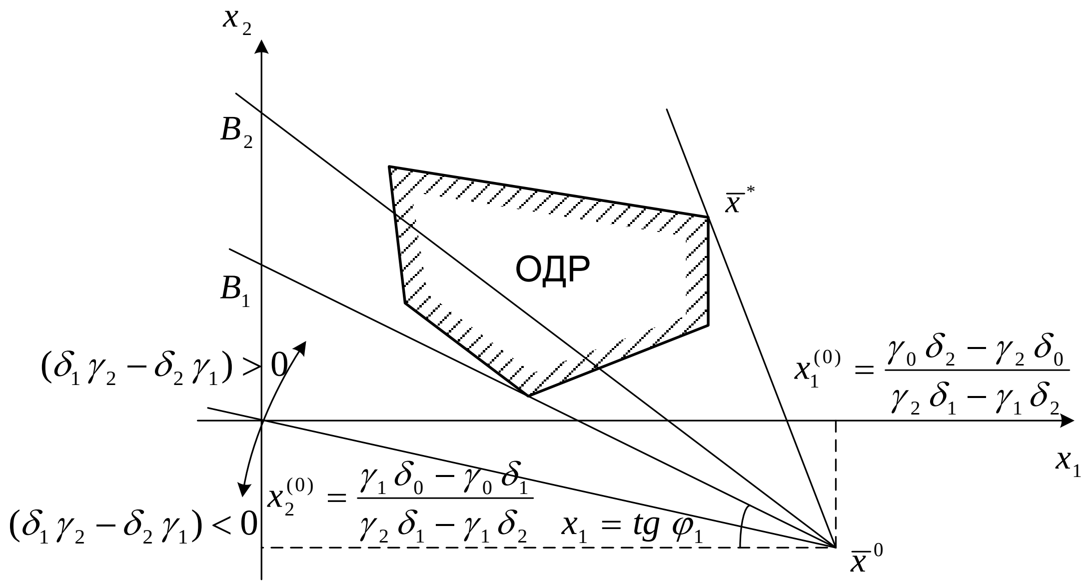

Рис. 4.3

Виразимо цільову функцію $f(\overline{x})$ через x_1 і x_2:

$$f(\overline{x}) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\delta_0 + \delta x_1 + \delta_2 x_2}. \tag{4.42}$$

Припустимо, що цільова функція набуває значення, яке дорівнює константі Γ. Тоді можна записати

$$\Gamma = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\delta_0 + \delta x_1 + \delta_2 x_2}. \tag{4.43}$$

Скориставшись рівнянням (4.43), виразимо x_2 через x_1:

$$x_2 = \frac{\gamma_0 - \Gamma\,\delta_0}{\Gamma\delta_2 - \gamma_2} + \frac{\gamma_1 - \Gamma\,\delta_1}{\Gamma\delta_2 - \gamma_2}\,x_1\,. \tag{4.44}$$

Очевидно, вираз (4.44) є рівнянням прямої в координатах $x_1 0 x_2$:

$$x_2 = kx_1 + b, \tag{4.45}$$

де k − кутовий коефіцієнт,

$$k = \frac{\gamma_1 - \Gamma\,\delta_1}{\Gamma\delta_2 - \gamma_2}; \tag{4.46}$$

b − початкова ордината,

$$b = \frac{\gamma_0 - \Gamma\delta_0}{\Gamma\delta_2 - \gamma_2}. \tag{4.47}$$

При зміненні константи Γ будуть змінюватися k і b. Однак це відповідає обертанню прямої (4.45) навколо деякої точки $\overline{x}^0 = (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})$. Для знаходження координат $x_1^{(0)}$ і $x_2^{(0)}$ точки $\overline{x}^0$ задамо два значення цільової функції $f(\overline{x})$ (наприклад, Γ_1 і Γ_2). Цим значенням відповідають прямі

$$x_2 = k_1 x_1 + b_1,$$

$$x_2 = k_2 x_1 + b_2,$$

де

$$\boldsymbol{k_1} = \frac{\gamma_1 - \Gamma_1\delta_1}{\Gamma_1\delta_2 - \gamma_2}, \quad \boldsymbol{b_1} = \frac{\gamma_0 - \Gamma_1\delta_0}{\Gamma_1\delta_2 - \gamma_2}, \tag{4.48}$$

$$\boldsymbol{k_2} = \frac{\gamma_1 - \Gamma_2\delta_1}{\Gamma_2\delta_2 - \gamma_2}, \quad \boldsymbol{b_2} = \frac{\gamma_0 - \Gamma_2\delta_0}{\Gamma_2\delta_2 - \gamma_2}. \tag{4.49}$$

Очевидно, точка $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}$ належить як до однієї, так і до другої прямої. Тоді можна записати

$$\boldsymbol{x_2^{(0)}} = \boldsymbol{k_1 x_1^{(0)}} + \boldsymbol{b_1}; \quad \boldsymbol{x_2^{(0)}} = \boldsymbol{k_2 x_1^{(0)}} + \boldsymbol{b_2}. \tag{4.50}$$

Звідси випливає, що

$$\boldsymbol{k_1 x_1^{(0)}} + \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{k_2 x_1^{(0)}} + \boldsymbol{b_2}.$$

Розв’яжемо це рівняння відносно $\boldsymbol{x_1^{(0)}}$:

$$\boldsymbol{x_1^{(0)}} = \frac{\boldsymbol{b_2 - b_1}}{\boldsymbol{k_1 - k_2}}. \tag{4.51}$$

Після підставлення (4.48) і (4.49) у (4.51) і нескладних перетворень отримаємо

$$\boldsymbol{x_1^{(0)}} = \frac{\gamma_0\delta_2 - \gamma_2\delta_0}{\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2}. \tag{4.52}$$

Для визначення координати $\boldsymbol{x_1^{(0)}}$ точки $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}$ підставимо (4.52) в одне з рівнянь, наприклад у перше (4.50). Тоді з урахуванням (4.48) отримаємо

$$\boldsymbol{x_2^{(0)}} = \frac{\gamma_1\delta_0 - \gamma_0\delta_1}{\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2}. \tag{4.53}$$

Якщо припустити, що $\boldsymbol{\gamma_0} = 0$, $\boldsymbol{\delta_0} = 0$, то, як випливає з (4.47), ордината $\boldsymbol{b} = 0$, а пряма

$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{k x_1} \tag{4.54}$$

буде проходити як через точку $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}$, так і через початок координат, при цьому

$$f_0(\overline{x}) = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{x_1\delta_1 - x_2\delta_2}. \qquad (4.55)$$

За аналогією із задачами лінійного програмування назвемо пряму (4.54) основною.

Обертання основної прямої навколо точки $\overline{x}^0$ в один бік відповідає збільшенню значення цільової функції, а в інший – її зменшенню.

Визначимо напрямок обертання основної прямої, при якому значення цільової функції зменшується. Для цього здиференціюємо (4.46) за ***Г***:

$$\frac{dk}{d\Gamma} = \frac{-\delta_1\ (\Gamma\delta_2\ - \gamma_2) - \delta_2\,(\gamma_1 - \Gamma\delta_1)}{(\Gamma\delta_2\ - \gamma_2)^2} = \frac{\delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{(\Gamma\delta_2\ - \gamma_2)^2}. \qquad (4.56)$$

Неважко показати, що при обертанні основної прямої проти ходу годинникової стрілки цільова функція буде зростати, якщо $\frac{dk}{d\Gamma} > 0$, і спадати, якщо $\frac{dk}{d\Gamma} < 0$. Оскільки розраховуємо напрямок тільки спадання цільової функції, то при $\frac{dk}{d\Gamma} > 0$ основну пряму необхідно обертати за ходом годинникової стрілки, а при $\frac{dk}{d\Gamma} < 0$ − проти її ходу.

Знаменник у (4.56) є додатним при будь-яких значеннях δ_2 і γ_2, отже, знак $\frac{dk}{d\Gamma}$ залежить від знака чисельника. З цього можна зробити висновок, що цільова функція спадає при обертанні основної прямої за ходом годинникової стрілки, якщо $(\delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_1) > 0$, і зростає при обертанні проти її ходу, якщо $(\delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_1) < 0$.

Установивши напрям обертання основної прямої, обертаємо її навколо точки $\overline{x}^0$ доти, доки не буде знайдено вершину $\overline{x}^*$ ОДР, найбільш віддалену в цьому напрямку від початку координат (див. рис. 4.4). Знайдена вершина й буде оптимальним розв’язком задачі дробово-лінійного програмування.

Приклад 4.8. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, які задовольняють системі обмежень

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\overline{x}) = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2 + 1}.$$

Обмеження являють собою систему з двох лінійних рівнянь. Оскільки кількість рівнянь є меншою за кількість змінних на 2, цю задачу можна розв'язати графічним методом.

Побудуємо в координатах $x_1 0 x_2$ область допустимих розв'язків, як це було зроблено в задачах лінійного програмування. ОДР для цієї задачі зображено на рис. 4.4.

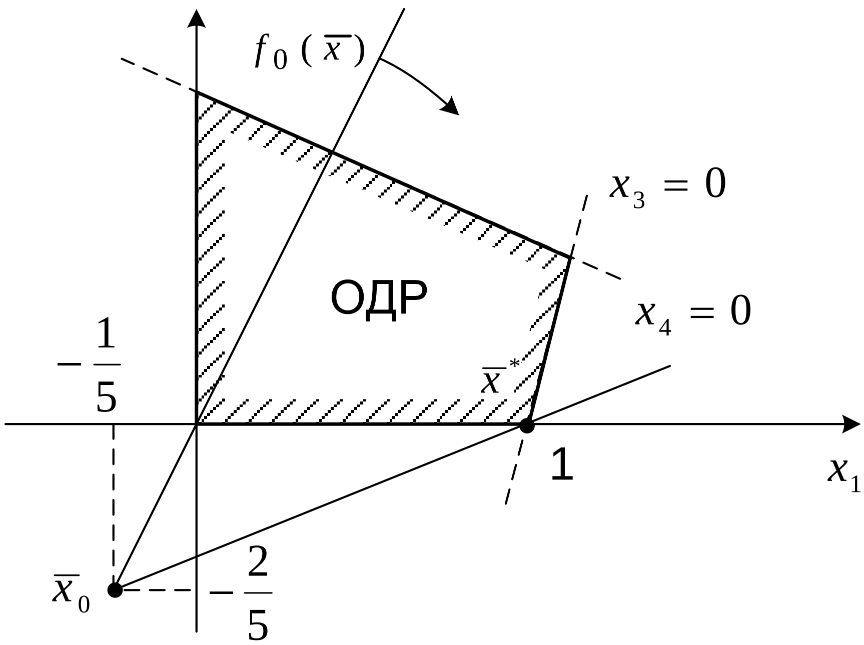

Рис. 4.4

Для будування основної прямої визначимо координати точки $\overline{x}^0$. З виразу для цільової функції випливає, що $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = -2$, $\gamma_2 = 1$, $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$. Тоді відповідно до (4.52) і (4.53)

$$x_1^{(0)} = -\frac{1}{5};\ x_2^{(0)} = -\frac{4}{5}.$$

Через точку $\overline{x}^0$ і початок координат проведемо основну пряму $f(\overline{x})$. Визначимо напрямок обертання основної прямої.

Оскільки

$$\delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1 = 5 > 0,$$

при обертанні основної прямої за ходом годинникової стрілки цільова функція буде спадати. Очевидно, точка $\overline{x}^*$, що є точкою перетину прямих $x_2 = 0$ і $x_3 = 0$, і буде оптимальним розв’язком цієї задачі. З першого рівняння системи обмежень випливає, що $x_1^* = 1$, а з другого – $x_4^* = 1$. Таким чином, оптимальний розв'язок задачі $\overline{x}^* = (1,\ 0,\ 0,\ 1)$, при цьому $L_{min} = -1$.

Розглядуваний графічний метод розв'язання задачі ДЛП, як і задач лінійного програмування, має обмежене застосування (при $n - m = 2$).

У загальному випадку при довільних значеннях $n - m$ для розв’язання задач ДЛП можна скористатися обчислювальною процедурою симплекс-методу. Для цього задачу ДЛП необхідно звести до задачі лінійного програмування. Розглянемо приклад перетворення.

Повернемося до задачі (4.39)–(4.40). Позначимо знаменник у виразі (4.40) через y_0:

$$y_0 = \frac{1}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_j x_j + \ldots + d_n x_n}. \tag{4.57}$$

Тоді цільову функцію можна подати таким чином:

$$f(\overline{x}, y_0) = C_1 x_1 y_0 + C_2 x_2 y_0 + \ldots + C_j x_j y_0 + C_n x_n y_0. \tag{4.58}$$

Перемножимо обидві частини кожної нерівності (4.39) на y_0:

$$\begin{gathered}
a_1 x_1 y_0 + a_{12} x_2 y_0 + \ldots + a_{1j} x_j y_0 + a_{1n} x_n y_0 \geq b_1 y_0, \\
a_{21} x_1 y_0 + a_{22} x_2 y_0 + \ldots + a_{2j} x_j y_0 + a_{2n} x_n y_0 \geq b_2 y_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1} x_1 y_0 + a_{i2} x_2 y_0 + \ldots + a_{ij} x_j y_0 + a_{in} x_n y_0 \geq b_i y_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} x_{1 y_0} + a_{m2} x_2 y_0 + \ldots + a_{mj} x_j y_0 + a_{mn} x_n y_0 \geq b_m y_0.
\end{gathered} \tag{4.59}$$

З (4.57) випливає, що

$$d_1 x_1 y_0 + d_2 x_2 y_0 + \ldots + d_j x_j y_0 + \ldots + d_n x_n y_0 = 1. \tag{4.60}$$

Уведемо такі позначення:

$$x_1 y_0 = y_1,\ x_2 y_0 = y_2,\ \ldots,\ x_j y_0 = y_j,\ \ldots,\ x_n y_0 = y_n.$$

Тоді цільова функція і система обмежень матимуть такий вигляд:

$$L(\overline{y}) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_j y_j + \ldots + c_n y_n; \tag{4.61}$$

$$\begin{gathered} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1j} y_j + a_{1n} y_n - b_1 y_0 \geq 0, \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2j} y_j + a_{2n} y_n - b_2 y_0 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{ij} y_j + a_{in} y_n - b_i y_0 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mj} y_j + a_{mn} y_n - b_m y_0 \geq 0, \\ d_1 y_1 + d_2 y_2 + \ldots + d_j y_j + \ldots + d_n y_n = 1. \end{gathered} \tag{4.62}$$

Задача тепер буде формулюватися так: знайти невід'ємні значення змінних $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n$, що задовольняють системі обмежень (4.62) і перетворюють на мінімум цільову функцію (4.61). Оскільки цільова функція й обмеження є лінійними функціями, задача (4.61)−(4.62) належить уже до задач лінійного програмування.

Таким чином, перехід від задачі ДЛП до задачі ЛП здійснюється шляхом заміни змінних і введення додаткового обмеження

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 + \ldots + d_j y_j + \ldots + d_n y_n = 1.$$

Приклад 4.9. Розв'язати з допомогою симплекс-методу задачу, розглянуту в попередньому прикладі.

Позначимо

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + 2x_2 + 1}.$$

Тоді цільову функцію відповідно до (4.58) запишемо таким чином:

$$f(\overline{x}, y_0) = -2x_1 y_0 + x_2 y_0.$$

Перемноживши обидві частини рівнянь-обмежень на y_0, отримаємо

$$2x_1y_0 - x_2y_0 + x_3y_0 = 2y_0,$$

$$x_1y_0 + 2x_2y_0 + x_4y_0 = 2y_0,$$

які разом з рівнянням

$$x_1y_0 + 2x_2y_0 + y_0 = 1$$

становитимуть обмеження нової задачі.

Позначимо

$$x_1y_0 = y_1;\ x_2y_0 = y_2;\ x_3y_0 = y_3\ ;\ x_4y_0 = y_4.$$

Тепер знайдемо такі невід'ємні значення змінних y_1, y_2, y_3, y_4, які задовольняють вимоги

$$2y_1 - y_2 + y_3 - 2y_0 = 0,$$

$$y_1 - 2y_2 + y_4 - 2y_0 = 0,$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_0 - 1 = 0$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{y}) = -2y_1 + y_2.$$

Візьмемо y_1 і y_2 за вільні змінні. Базові змінні й цільову функцію виразимо через вільні змінні:

$$y_0 = 1 - (y_1 + 2y_2);$$
$$y_3 = 2 - (4y_1 + 3y_2);$$
$$y_4 = 2 - (3y_1 + 6y_2);$$

$$L(\overline{y}) = 0 - (2y_1 - y_2).$$

Процес розв'язання задачі симплекс-методом характеризується послідовністю симплекс-таблиць 4.5 і 4.6.

Таблиця 4.5

Базові змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	y_1	y_2
$L(\overline{y})$	0	2	−1
y_0	1	1	2
y_3	2	$\boxed{4}$	3
y_4	2	3	6

→

Таблиця 4.6

Базові змінні	Вільні змінні		
	ВЧ	y_3	y_2
$L(\overline{y})$	−1	−2/4	−10/4
y_0	2/4	−1/4	5/4
y_1	2/4	1/4	3/4
y_4	2/4	−3/4	15/4

Оптимальним розв’язком задачі ДЛП є

$$\boldsymbol{y}_0^* = 2/4;\ \boldsymbol{y}_1^* = 2/4;\ \boldsymbol{y}_3^* = 0;\ \boldsymbol{y}_4^* = 2/4.$$

Оскільки $\boldsymbol{y}_1^* = \boldsymbol{x}_1^*\boldsymbol{y}_0^*$, то $\boldsymbol{x}_1^* = \frac{\boldsymbol{y}_1^*}{\boldsymbol{y}_0^*} = \frac{2/4}{2/4} = 1$. Аналогічно

$$\boldsymbol{x}_2^* = \frac{\boldsymbol{y}_2^*}{\boldsymbol{y}_0^*} = 0;\ \boldsymbol{x}_3^* = \frac{\boldsymbol{y}_3^*}{\boldsymbol{y}_0^*} = 0;\ \boldsymbol{x}_4^* = \frac{\boldsymbol{y}_4^*}{\boldsymbol{y}_0^*} = 1.$$

Отже, оптимальним розв’язком задачі ДЛП є вектор $\overline{\boldsymbol{x}}^* = (1;\ 0;\ 0;\ 1)$, який збігається з результатом, отриманим у попередньому прикладі графічним методом.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти такі значення змінних $\boldsymbol{x}_1$ і $\boldsymbol{x}_2$, які задовольняли б обмеженню

$$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \le 1,\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \le 4,\ \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \ge 2,\ -2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \le 2$$

і перетворювали на мінимум цільову функцію

$$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{x}_1 - 3)^2 + (\boldsymbol{x}_2 - 3)^2.$$

2. Знайти значення змінних $\boldsymbol{x}_1$ і $\boldsymbol{x}_2$, що задовольняють обмеженням, наведеним у прикладі 1, і забезпечують мінімум цільової функції

$$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{x}_1 - 5)^2 + (\boldsymbol{x}_2 + 2)^2.$$

3. Знайти додатні значення змінних, що задовольняють обмеженням

$$2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \ge 6,$$

$$\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \le 2,$$

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \ge 7,$$

$$(\boldsymbol{x}_1 - 3)^2 + (\boldsymbol{x}_2 - 3)^2 \ge 4$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}}) = -2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2.$$

4. Знайти додатні значення змінних x_1, x_2, що задовольняють обмеженням $2x_1 + 5x_2 \le 20$, $2x_1 - x_2 \le 8$, і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\overline{x}) = 4x_1^2 + 19x_2^2 - 12x_1 - 30x_2.$$

5. Дослідити властивості функції

$$\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_2.$$

6. Дослідити властивості функції

$$\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_2.$$

7. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, які задовольняють системі обмежень $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$, $x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$ і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$f(\overline{x}) = \frac{-4x_1 + 2x_2}{x_1 + 4x_2 + 5}.$$

5. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Метод спрямованого перебирання

Суть методу: при виборі керування на кожному кроці необхідно враховувати майбутнє. Перебирання проводиться від останнього кроку до першого. Оскільки стан системи на початку кожного кроку є невідомим, оптимальне керування визначається для кожного можливого стану і має назву умовного оптимального керування. Рухаємося до початкового стану, який є єдиним. За відомим початковим станом (на початку першого кроку) можна знайти безумовне оптимальне або оптимальне керування на першому кроці, яке переведе систему до відомого стану на другому кроці, і т. д. Тепер задача розв´язується від від початку до кінця.

Останній крок (***n***-й). Керування не залежить від майбутнього. На цьому кроці вибирають керування з найбільшим ефектом (***min W***). Потім переходять до оптимізації передостаннього кроку з урахуванням того, що на останньому кроці оптимальне керування вже є відомим, і т. д. Унаслідок цього визначається оптимальне керування для всього багатокрокового процесу:

$$U^* : x_1^{(0)} \to x_i^{(n)} \to \min W.$$

Послідовність умовних оптимальних розв´язків (від кінця до початку) (зворотний етап) полягає в будуванні безумовних оптимальних керувань, рухаючись у звичайному порядку (прямий етап розв'язання задачі динамічного програмування).

Виведемо формальне співвідношення:

$$w_l(x_k^{(l-1)}) = \sum_{i=l}^{n} \omega_i(x_k^{(i-1)},\ U_{kj}^{*(i)}), \tag{5.1}$$

де $w_l(x_k^{(l-1)})$ – мінімальне значення цільової функції з l-го кроку до n-го, якщо на всіх цих кроках здійснюється оптимальне керування $U_{kj}^{*(i)}$, $i = \overline{1, n}$. Назвемо величину $w_l(x_k^{(l-1)})$ *умовним оптимальним виграшем* на l-му кроці. Нехай відомими є $x_1^{(0)}$ і $x_1^{(n)}$. Розглянемо два останні кроки керування. На рис. 5.1 зображено граф станів системи, що містить два останніх кроки керування.

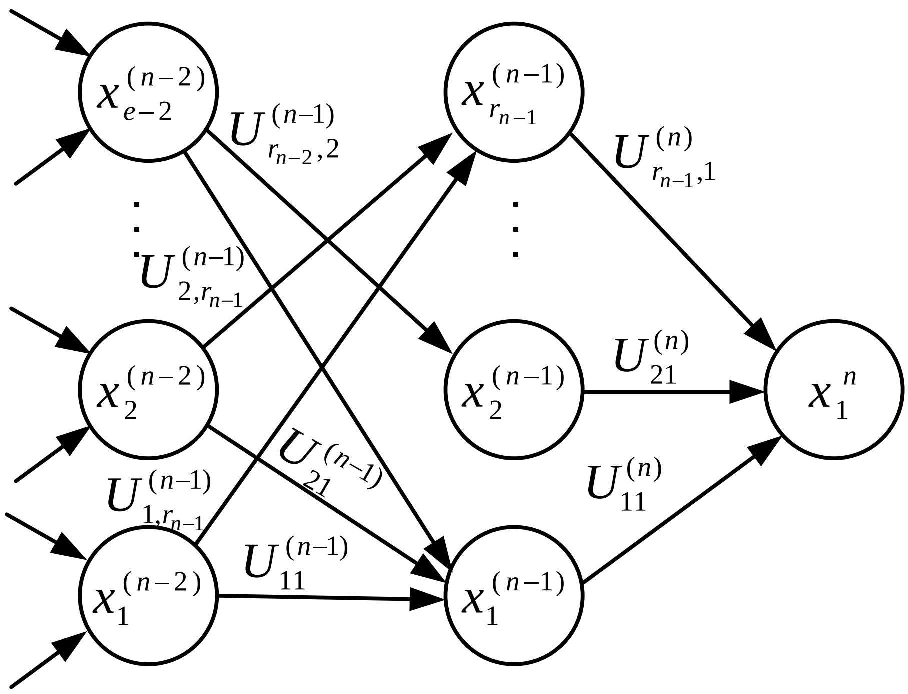

Рис. 5.1

У кінці ($\boldsymbol{n}$ − 1)-го кроку система перейде в один із можливих станів $\boldsymbol{x_1^{(n-1)}}$, $\boldsymbol{x_2^{(n-1)}}$, …, $\boldsymbol{x_{r_{n-1}}^{(n-1)}}$, де $\boldsymbol{r_{n-1}}$ − кількість можливих станів у кінці ($\boldsymbol{n}$ − 1)-го кроку, $\boldsymbol{x_j^{(n-1)}}$ − довільний стан на ($\boldsymbol{n}$ − 1)-му кроці, $\boldsymbol{j = \overline{1,\ r_{n-1}}}$. Стан $\boldsymbol{x_1^{(n-1)}}$ є відомим, тому для кожного стану $\boldsymbol{x_j^{(n-1)}}$ існує єдине керування $\boldsymbol{U_{j1}^{(n)}}$, яке переводить систему зі стану $\boldsymbol{x_j^{(n-1)}}$ у стан $\boldsymbol{x_1^{(n)}}$:

$$\boldsymbol{U_{j1}^{(n)}}: \boldsymbol{x_j^{(n-1)}} \to \boldsymbol{x_1^{(n)}}. \tag{5.2}$$

Кожному керуванню $\boldsymbol{U_{j1}^{(n)}}$ відповідає певне значення цільової функції на $\boldsymbol{n}$-му кроці:

$$\boldsymbol{\omega_n = \omega_n(x_j^{(n-1)},\ U_{j1}^{(n)})}. \tag{5.3}$$

Інших варіантів керування, окрім $\boldsymbol{U_{j1}^{(n)}}$, немає. Керування $\boldsymbol{U_{j1}^{(n)}}$ будемо називати умовним оптимальним керуванням на $\boldsymbol{n}$-му кроці $\boldsymbol{U_{j1}^{(n)} = U_{j1}^{*(n)}}$, а значення цільової функції – *умовним оптимальним виграшем*

$$\boldsymbol{W_n(x_k^{(n-1)}) = \omega_n(x_k^{(n-1)},\ U_{j1}^{(n)})}. \tag{5.4}$$

На цьому оптимізація $\boldsymbol{n}$-го кроку закінчується. Унаслідок оптимізації встановлено, що якого би стану $\boldsymbol{x_j^{(n-1)}}$ не набувала система в кінці ($\boldsymbol{n}$ −1)-го кроку, для нього відомим є оптимальне керування $\boldsymbol{U_{j1}^{*(n)}}$на $\boldsymbol{n}$-му кроці.

Оптимізація передостаннього ($\boldsymbol{n}$ − 1)-го кроку. У кінці ($\boldsymbol{n}$ − 2)-го кроку можливими станами системи є $\boldsymbol{x_1^{(n-1)}}$, $\boldsymbol{x_2^{(n-1)}}$, …, $\boldsymbol{x_{r_{n-2}}^{(n-1)}}$. Для кожного стану $\boldsymbol{x_k^{(n-1)}}$, $\boldsymbol{k = \overline{1,\ r_{n-1}}}$, визначимо керування $\boldsymbol{U_{kj}^{(n-1)}}$, яке переводить систему зі стану $\boldsymbol{x_k^{(n-2)}}$ у стан $\boldsymbol{x_k^{(n-1)}}$. На рис. 5.1 для стану $\boldsymbol{x_1^{(n-2)}}$ таких керувань два: $\boldsymbol{U_{11}^{(n-1)}}$, $\boldsymbol{U_{1,r_{n-1}}^{(n-1)}}$.

Відповідно до принципу оптимальності серед можливих керувань $\boldsymbol{U_{kj}^{(n-1)}}$, що переводять систему зі стану $\boldsymbol{x_k^{(n-2)}}$ у стан$\boldsymbol{x_j^{(n-1)}}$, необхідно вибрати таке, яке забезпечувало б мінімум суми $\boldsymbol{\omega_{n-1}(x_k^{(n-2)},\ U_{kj}^{(n-1)})}$ +

+ $\boldsymbol{\omega_n(x_k^{(n-1)}, U_{j1}^{(n)})}$. Проте внаслідок оптимізації $\boldsymbol{n}$-го кроку для $\boldsymbol{x_j^{(n-1)}}$ знайдено оптимальне керування $\boldsymbol{U_{j1}^{*(n)}}$, якому відповідає умовний оптимальний виграш на $\boldsymbol{n}$-му кроці

$$\boldsymbol{W_n(x_k^{(n-2)}, U_{kj}^{(n-1)}) = w_n(x_k^{(n-1)})}. \qquad (5.5)$$

Тоді умовне оптимальне керування $\boldsymbol{U_{kj}^{*(n-1)}}$ для стану $\boldsymbol{x_k^{(n-2)}}$ необхідно шукати з умови мінімізації суми

$$\boldsymbol{\omega_{n-1}(x_k^{(n-2)},\ U_{kj}^{(n-1)}) + w_n(x_k^{(n-1)})}. \qquad (5.6)$$

Однак мінімальне значення суми – це умовний оптимальний виграш на ($\boldsymbol{n}$ – 1)-му кроці

$$\boldsymbol{w_{n-1}(x_k^{(n-2)})} =$$

$$= \min_{U_{kj}^{(n-1)} \in U} \left(\boldsymbol{\omega_{n-1}(x_k^{(n-2)},\quad U_{kj}^{(n-1)}) + w_n(x_k^{(n-1)})}\right). \qquad (5.7)$$

Визначивши умовне оптимальне керування відповідно до формули (5.7) для кожного стану $\boldsymbol{x_k^{(n-2)}}$, $\boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1},\ \boldsymbol{r_{n-1}}}$, завершимо оптимізацію ($\boldsymbol{n}$ – 1)-го кроку. Унаслідок оптимізації стане відомою послідовність оптимальних керувань $\boldsymbol{(U_{kj}^{*(n-1)},\ U_{j1}^{*(n)})}$ для всіх $\boldsymbol{x_k^{(n-2)}}$ станів на двох останніх кроках.

Продовжуючи аналогічні міркування для оптимізації ($\boldsymbol{n}$ – 2), …, $\boldsymbol{l}$-го кроків, можна зробити висновок, що умовне оптимальне керування $\boldsymbol{U_{kj}^{*(l)}}$ на $\boldsymbol{l}$-му кроці слід визначати з рівняння

$$\boldsymbol{w_l(x_k^{(l-1)}) = \min_{U_{kj}^{(l-1)} \in U}[\omega_l(x_k^{(l)},\ U_{kj}^{(l)}) + w_{l+1}(x_j^{(l)})]}, \qquad (5.8)$$

яке є основним функціональним рівнянням динамічного програмування. Це рівняння є рекурентним $\boldsymbol{w_l}$ = $\mathbf{f}(\boldsymbol{w_{l+1}})$. Для першого кроку оптимізації отримаємо

$$\boldsymbol{w_l(x_1^{(0)}) = \min_{U_{1j}^{(1)} \in U}[\omega_1(x_1^{(0)},\ U_{1j}^{(1)}) + w_2(x_i^{(1)})]}. \qquad (5.9)$$

На цьому зворотний етап розв´язання задачі закінчується. Оскільки $\boldsymbol{x_1^{(0)}}$є відомим, то знаходимо на першому етапі керування $\boldsymbol{U_{1j}^{*(1)}}$. Знаючи керування $\boldsymbol{U_{1j}^{*(1)}}$ і користуючись рівнянням

$$\boldsymbol{x_i^{(1)}} = \boldsymbol{\varphi_1}(\boldsymbol{x_1^{(0)}}, U_{\boldsymbol{1j}}^{*(\boldsymbol{1})}),$$

знаходимо стан $\boldsymbol{x_i^{(1)}}$. Аналогічно визначаємо оптимальне керування $\boldsymbol{U_{ik}^{*(2)}}$ при $\boldsymbol{l}$ = 2 (стан $\boldsymbol{x_i^{(1)}}$ і значення $\boldsymbol{w_3}$ є відомими). Проходячи таким чином послідовно від першого кроку до останнього, отримаємо множину керувань

$$\boldsymbol{U^*} = (\boldsymbol{U_{1i}^{*(1)}},\ \boldsymbol{U_{ik}^{*(2)}}, \dots, \boldsymbol{U_{kj}^{*(k)}}, \dots, \boldsymbol{U_{j1}^{*(n)}}), \qquad (5.10)$$

яка є шуканим розв'язком задачі

$$\boldsymbol{W_{min}} = \boldsymbol{W_1(x_1^{(0)}}).$$

З викладеного можна зробити такі висновки:

− більш складним і трудомістким є зворотний етап;

− прямий етап не є складним;

− вирази для $\boldsymbol{w_l(x_k^{(l)}})$ і $\boldsymbol{w_l} = \boldsymbol{f(w_{l+1})}$ є символічними; конкретний вид функції є невизначеним; разом с тим ці вирази є корисними при організації обчислень.

Розв'язок задачі ДП методом спрямованого перебирання зручно проводити шляхом заповнення таблиць, кожна з яких відповідає умовній оптимізації одного кроку. Форма таблиці визначається структурою основного функціонального рівняння динамічного програмування.

Для умовної оптимізації ***l***-го кроку необхідно знати:

− можливі стани системи $\boldsymbol{x_k^{(l-1)}}$ на початку ***l***-го кроку;

− можливі керування $\boldsymbol{U_{kj}^{(l)}}$, що переводять систему зі стану $\boldsymbol{x_k^{(l-1)}}$ у стан $\boldsymbol{x_k^{(l)}}$;

− значення цільової функції $\boldsymbol{\omega_l(x_k^{(l-1)}}, U_{\boldsymbol{kj}}^{(\boldsymbol{l})}\boldsymbol{)}$, що відповідають керуванню $U_{\boldsymbol{kj}}^{(\boldsymbol{l})}$;

− значення умовного оптимального виграшу $\boldsymbol{w_{l+1}(x_j^{(l)}})$ на ($\boldsymbol{l}$ + 1)-му кроці.

Умовну оптимізацію ***l***-го кроку проводимо відповідно до табл. 5.1.

Таблиця 5.1

$x_k^{(l-1)}$	$x_1^{(l-1)}$			…	$x_{r_{l-1}}^{(l-1)}$		
$U_{kj}^{(l)}$	$U_{1j}^{(l)}$	…	$U_{1g}^{(l)}$	…	$U_{r_{l-1},p}^{(l)}$	…	$U_{r_{l-1},s}^{(l)}$
$\omega_l(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)})$	$\omega_l(\cdot)$	…	$\omega_l(\cdot)$	…	$\omega_l(\cdot)$	…	$\omega_l(\cdot)$
$\omega_l^*(x_k^{(l-1)}, U_{kj}^{(l)})$	$\omega_l^*(\cdot)$	…	$\omega_l^*(\cdot)$	…	$\omega_l^*(\cdot)$	…	$\omega_l^*(\cdot)$
$W_l(x_k^{(l-1)})$	$W_l(x_1^{(l-1)})$			…	$W_l(x_{r_{l-1}}^{(l-1)})$		
$U^{*(l)}(x_k^{(l-1)})$	$U_{ij}^{*(l)}, \dots, \quad U_{k1}^{*(n)}$			…	$U_{r_{l-1},j}^{*(l)}, \dots, \quad U_{r_p,1}^{*(n)}$		

У першому рядку записуємо можливі стани системи $x_k^{(l-1)}$ на початку l-го кроку, у другому – можливі керування $U_{kj}^{(l)}$ на l-му кроці, у третьому – значення цільової функції на l-му кроці, що відповідають кожному керуванню, у четвертому – значення суми $\omega_l^* = \omega_l + W_{l+1}$, у п'ятому – порівняння величин ω_l^* і знаходження мінімуму W_l; у шостому – послідовність $U^{*(l)}(x_k^{(l-1)})$ оптимальних керувань з l-го до n-го кроку включно для кожного можливого стану $x_k^{(l-1)}$.

Приклад 5.1. Розв'язати задачу оптимізації системи зв'язку, заданої графом (рис. 5.2).

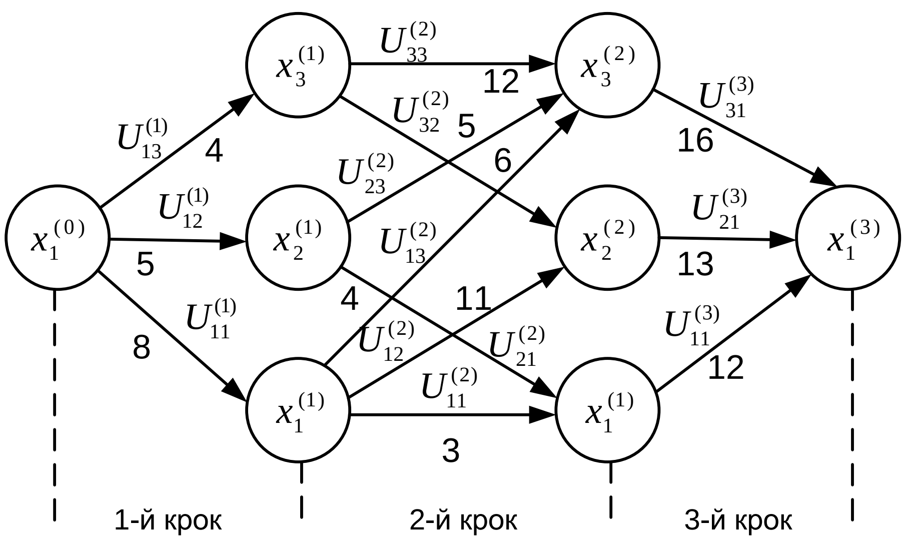

Рис. 5.2

Розв’язання розпочнемо з кінця, тобто з умовної оптимізації третього кроку ($\boldsymbol{n}$ = 3). Занесемо до табл. 5.2 значення $\boldsymbol{x_k^{(2)}}$, $\boldsymbol{U_{kj}^{(3)}}$, $\boldsymbol{\omega_3(x_k^{(2)})}$, $\boldsymbol{\omega_3^*(x_k^{(2)}}$, $\boldsymbol{U_{kj}^{(3)})}$, $\boldsymbol{w_3(x_k^{(2)}})$, $\boldsymbol{U^{*(3)}(x_k^{(2)})}$.

Таблиця 5.2

$\boldsymbol{x_k^{(2)}}$	$\boldsymbol{x_1^{(2)}}$	$\boldsymbol{x_2^{(2)}}$	$\boldsymbol{x_3^{(2)}}$
$\boldsymbol{U_{kj}^{(3)}}$	$\boldsymbol{U_{11}^{(3)}}$	$\boldsymbol{U_{21}^{(3)}}$	$\boldsymbol{U_{31}^{(3)}}$
$\boldsymbol{\omega_3(x_k^{(2)}, U_{kj}^{(3)}})$	12	13	16
$\boldsymbol{\omega_3^*(x_k^{(2)}, U_{kj}^{(3)})}$	12	13	16
$\boldsymbol{w_3(x_k^{(2)}})$	12	13	16
$\boldsymbol{U^{*(3)}(x_k^{(2)})}$	$\boldsymbol{U_{11}^{*(3)}}$	$\boldsymbol{U_{21}^{*(3)}}$	$\boldsymbol{U_{31}^{*(3)}}$

Далі виконаємо умовну оптимізацію другого кроку. Для цього запишемо в першому рядку табл. 5.3 можливі стани $\boldsymbol{x_k^{(1)}}$: $\boldsymbol{x_1^{(1)}}, \boldsymbol{x_2^{(1)}}$, $\boldsymbol{x_3^{(1)}}$ на початку цього кроку.

Таблиця 5.3

$\boldsymbol{x_k^{(2)}}$	$\boldsymbol{x_1^{(1)}}$			$\boldsymbol{x_2^{(1)}}$		$\boldsymbol{x_3^{(1)}}$	
$\boldsymbol{U_{kj}^{(2)}}$	$\boldsymbol{U_{11}}^{(2)}$	$\boldsymbol{U_{12}}^{(2)}$	$\boldsymbol{U_{13}}^{(2)}$	$\boldsymbol{U_{21}}^{(2)}$	$\boldsymbol{U_{22}}^{(2)}$	$\boldsymbol{U_{32}}^{(2)}$	$\boldsymbol{U_{33}}^{(2)}$
$\boldsymbol{\omega_2(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)})}$	3	11	6	4	9	7	12
$\boldsymbol{\omega_2^*(x_k^{(1)}, U_{kj}^{(2)})}$	$\boxed{15}$	24	22	$\boxed{16}$	25	$\boxed{20}$	28
$\boldsymbol{w_2(x_k^{(2)})}$	15			16		20	
$\boldsymbol{U^{*(2)}(x_k^{(2)})}$	$\boldsymbol{U_{11}^{*(2)}, U_{11}^{*(3)}}$			$\boldsymbol{U_{21}^{*(2)}, U_{11}^{*(3)}}$		$\boldsymbol{U_{32}^{*(2)}, U_{21}^{*(3)}}$	

У наступних рядках табл. 5.3 запишемо значення $\boldsymbol{U_{kj}^{(2)}}$, $\boldsymbol{\omega_2(x_k^{(1)},\ U_{kj}^{(2)})}$, $\boldsymbol{\omega_2^*(x_k^{(1)},\ U_{kj}^{(2)})}$, $\boldsymbol{w_2(x_k^{(1)})}$, $\boldsymbol{U^{*(2)}(x_k^{(1)})}$.

До $\boldsymbol{\omega_2(x_k^{(1)},\ U_{kj}^{(2)})}$ = 3 необхідно додати умовний оптимальний виграш на третьому кроці $\boldsymbol{w_3\ (\ x_k^{(2)})}$ = 12. Значення $\boldsymbol{w_3\ (\ x_k^{(2)})}$ умовного оптимального виграшу на третьому кроці запишемо в останньому рядку табл. 5.2 (12, 13, 16).

Знайдемо стовпець, який відповідає керуванню $\boldsymbol{U_{11}^{(2)}}$:

$$\boldsymbol{\omega_2^*(x_1^{(1)}, U_{11}^{(2)})} = 3 + 12 = 15.$$

Аналогічно розрахуємо й занесемо в четвертий рядок інші значення $\boldsymbol{\omega_2(x_k^{(1)},\ U_{kj}^{(2)})}$.

Знайдемо умовні оптимальні виграші на другому кроці. Серед усіх можливих значень $\boldsymbol{\omega_2\ (\ x_k^{(1)},\ U_{kj}^{(2)}\ )}$ для кожного стану $\boldsymbol{x_k^{(2)}}$ знайдемо мінімальне, це й буде умовним оптимальним виграшем:

$$\boldsymbol{x_1^{(1)}} \rightarrow (15,\ 24,\ 22) \rightarrow 15 = \boldsymbol{w_2(x_1^{(1)})},$$
$$\boldsymbol{x_2^{(1)}} \rightarrow (16,\ 25) \rightarrow 16 = \boldsymbol{w_2(x_2^{(1)})},$$
$$\boldsymbol{x_3^{(1)}} \rightarrow (20,\ 28) \rightarrow 20 = \boldsymbol{w_2(x_3^{(1)})}.$$

Умовний оптимальний виграш для $\boldsymbol{x_1^{(1)}}$ одержується керуванням $\boldsymbol{U_{11}^{*(2)}}$. В останній рядок табл. 5.3 запишемо $\boldsymbol{U_{11}^{*(2)}}$ і $\boldsymbol{U_{11}^{*(3)}}$, $\boldsymbol{U_{21}^{*(2)}}$, $\boldsymbol{U_{11}^{*(3)}}$, $\boldsymbol{U_{32}^{*(2)}}$, $\boldsymbol{U_{21}^{*(3)}}$.

Проведемо умовну оптимізацію першого кроку. Мережа зв'язку перед першим кроком перебуває у стані $\boldsymbol{x_1^{(0)}}$. Табл. 5.4 для першого кроку керування буде мати всього один стовпець станів.

Зі стану $\boldsymbol{x_1^{(0)}}$ мережа перейде в такі стани:

$$\boldsymbol{U_{12}^{(1)}} : \boldsymbol{x_1^{(1)}},\ \boldsymbol{U_{12}^{(1)}} : \boldsymbol{x_2^{(1)}},\ \boldsymbol{U_{12}^{(1)}} : \boldsymbol{x_3^{(1)}}.$$

Оптимальним на першому кроці є керування $\boldsymbol{U_{12}^{(1)}}$. З попередніх таблиць знаходимо оптимальні керування на другому й третьому етапах. Заповнення табл. 5.4 є завершенням зворотного етапу виконання завдання.

Таблиця 5.4

$x_k^{(0)}$	$x_1{}^{(0)}$		
$U_{kj}^{(1)}$	$U_{11}^{(1)}$	$U_{12}^{(1)}$	$U_{12}^{(1)}$
$\omega_1(x_k^{(0)}, U_{kj}^{(1)})$	8	5	4
$\omega_1^*(x_k^{(0)}, U_{kj}^{(1)})$	23	$\boxed{21}$	24
$w_1(x_k^{(0)})$	21		
$U^{*(1)}(x_k^{(0)})$	$U_{11}^{*(1)}, U_{21}^{*(2)}, U_{11}^{*(3)}$		

Прямий етап розв'язання задачі динамічного програмування – знаходження оптимального керування мережею:

$$U^*(x_k^{(0)}) = (U_{11}^{*(1)},\ U_{21}^{*(2)},\ U_{11}^{*(3)}).$$

Це і є оптимальне керуванням, яке переводить систему з початкового в кінцевий стан.

Переваги методу спрямованого перебирання:

1. Розв'язання задачі зводиться до заповнення таблиць.
2. Для оптимізації l-го кроку застосовуються дані попередньої таблиці.
3. Таблиці легко ввести в комп'ютер, що дає змогу автоматизувати процедуру розв'язання задачі динамічного програмування.

6.3. Графічне розв'язання задачі динамічного програмування

Якщо задача динамічного програмування характеризується порівняно невеликою кількістю кроків і можливих станів на кожному кроці, то для її розв'язання можна безпосередньо скористатися графом станів. Ідея способу полягає в графічному розв'язанні основного функціонального рівняння динамічного програмування

$$w_l(x_k^{(l-1)}) = min_{U_{kj}^{(l-1)} \in U}[\omega_l(x_k^{(l-1)},\ U_{kj}^{(l)}) + w_{l+1}(x_l^{(l)})]. \quad (5.11)$$

Розглянемо на прикладі процедуру графічного розв'язання задачі динамічного програмування. Візьмемо, що формалізацію задачі проведено, за її результатами побудовано граф станів системи.

Приклад 5.2. Задано граф станів, зображений на рис. 5.3. Значення цільової функції для кожного кроку керування проставлено біля відповідних ребер. Необхідно знайти керування $\boldsymbol{U}^* \in \boldsymbol{U}$, яке переводить систему з початкового стану в кінцевий і перетворює на мінімум цільову функцію. Процес переходу системи з початкового стану в кінцевий є п'ятикроковим процесом. Початковий стан $\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{0})}$ є лише одним і відомим, кінцеві стани $\{\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{5})},\ \boldsymbol{x}_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{2})}\}$ утворюють множину. Кількість кроків і станів системи – відносно невелика, тому спробуємо розв'язати задачу графічно.

Проведемо умовну оптимізацію останнього, п'ятого кроку. Вихідні стани п'ятого кроку: $\{\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{4})}, \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{4})}, \boldsymbol{x}_{\mathbf{3}}^{(\mathbf{4})}, \boldsymbol{x}_{\mathbf{4}}^{(\mathbf{4})}\}$*.*

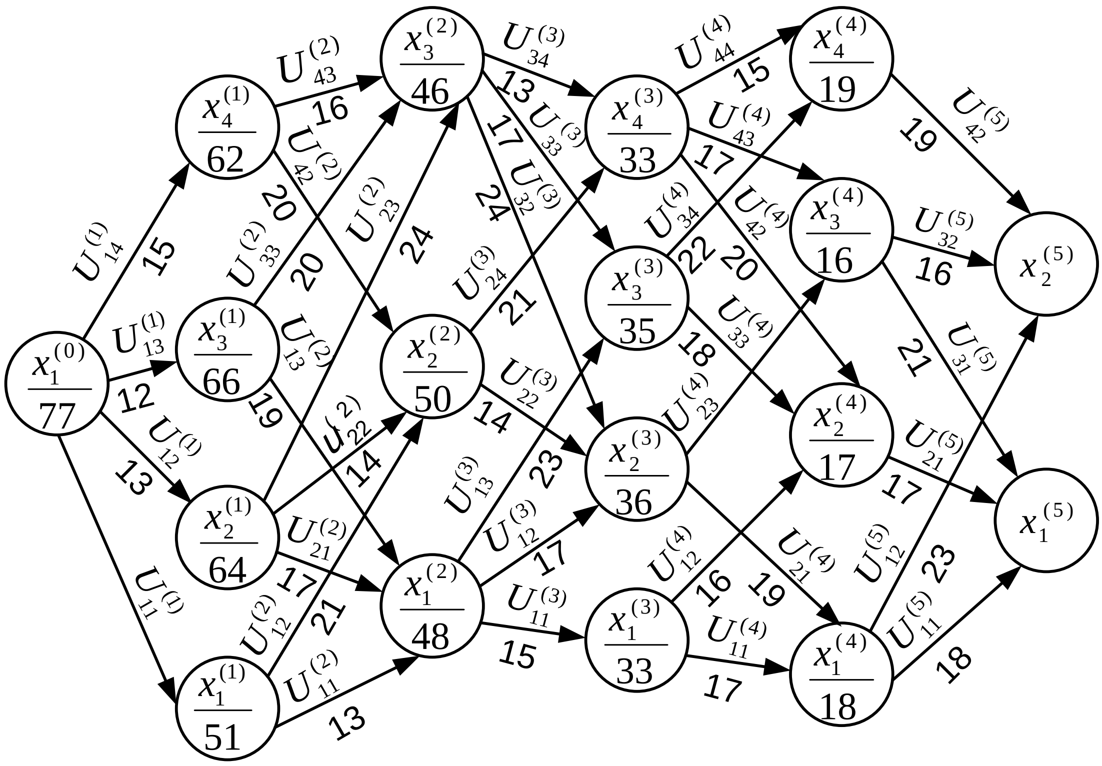

Рис. 5.3

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{4})}$:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{11}}^{(\mathbf{5})}: \mathbf{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{4})} \rightarrow \mathbf{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{5})} \rightarrow \text{ЦФ} = 18;$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{12}}^{(\mathbf{5})}: \mathbf{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{4})} \rightarrow \mathbf{x}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{5})} \rightarrow \text{ЦФ} = 23;$$

$$\boldsymbol{Min}(18, 23) = 18.$$

Запишемо число 18 у вершині $\boldsymbol{x}_1^{(4)}$. Ребро $\boldsymbol{x}_1^{(4)} \rightarrow \boldsymbol{x}_1^{(5)}$ стовщуєтся. Умовним оптимальним керуванням на п'ятому кроці є $U_{\mathbf{11}}^{(\mathbf{5})}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $\boldsymbol{x}_2^{(4)}$:

$$U_{\mathbf{21}}^{(\mathbf{5})}\colon \boldsymbol{x}_2^{(4)} \rightarrow \boldsymbol{x}_1^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 17.$$

Запишемо число 17 у вершині $\boldsymbol{x}_2^{(4)}$. Ребро $\boldsymbol{x}_2^{(4)} \rightarrow \boldsymbol{x}_1^{(5)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на п'ятому кроці є $U_{\mathbf{21}}^{(\mathbf{5})}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $\boldsymbol{x}_3^{(4)}$:

$$\boldsymbol{U}_{\mathbf{32}}^{(\mathbf{5})}\colon \boldsymbol{x}_3^{(4)} \rightarrow \boldsymbol{x}_2^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 16;$$
$$\boldsymbol{U}_{\mathbf{31}}^{(\mathbf{5})}\colon \boldsymbol{x}_3^{(4)} \rightarrow \boldsymbol{x}_1^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 24;$$
$$\boldsymbol{Min}(16, 24) = 16.$$

Запишемо число 16 у вершині $\boldsymbol{x}_3^{(4)}$. Ребро $\boldsymbol{x}_3^{(4)} \rightarrow \boldsymbol{x}_2^{(5)}$ стовщуєтся. Умовним оптимальним керуванням на п'ятому кроці є $U_{\mathbf{32}}^{(\mathbf{5})}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $\boldsymbol{x}_4^{(4)}$:

$$\boldsymbol{U}_{\mathbf{42}}^{(\mathbf{5})}\colon \boldsymbol{x}_4^{(4)} \rightarrow \boldsymbol{x}_2^{(5)} \rightarrow \text{ЦФ} = 19.$$

Запишемо число 19 у вершині $\boldsymbol{x}_4^{(4)}$. Ребро $\boldsymbol{x}_4^{(4)} \rightarrow \boldsymbol{x}_2^{(5)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на п'ятому кроці є $\boldsymbol{U}_{\mathbf{42}}^{(\mathbf{5})}$.

Проведемо умовну оптимізацію четвертого кроку. Вихідні стани четвертого кроку: $\{\boldsymbol{x}_1^{(3)}, \boldsymbol{x}_2^{(3)}, \boldsymbol{x}_3^{(3)}, \boldsymbol{x}_4^{(3)}\}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $\boldsymbol{x}_1^{(3)}$:

$$\boldsymbol{U}_{\mathbf{11}}^{(\mathbf{4})}\colon \boldsymbol{x}_1^{(3)} \rightarrow \boldsymbol{x}_2^{(4)} \rightarrow \text{ЦФ (на двох кроках)} = 17 + 18 = 35;$$
$$\boldsymbol{U}_{\mathbf{12}}^{(\mathbf{4})}\colon \boldsymbol{x}_1^{(3)} \rightarrow \boldsymbol{x}_2^{(4)} \rightarrow \text{ЦФ (на двох кроках)} = 16 + 17 = 33;$$
$$\boldsymbol{Min}\ (35, 33) = 33.$$

Запишемо число 33 у вершині $\boldsymbol{x}_1^{(3)}$. Ребро $\boldsymbol{x}_1^{(3)} \rightarrow \boldsymbol{x}_2^{(4)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на четвертому кроці є $\boldsymbol{U}_{\mathbf{12}}^{(\mathbf{4})}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $\boldsymbol{x}_2^{(3)}$:

$$\boldsymbol{U_{21}^{(4)}}: \boldsymbol{x_2^{(3)}} \to \boldsymbol{x_1^{(4)}}$$ → ЦФ (на двох кроках) = 18 + 19 = 37;
$$\boldsymbol{U_{23}^{(4)}}: \boldsymbol{x_2^{(3)}} \to \boldsymbol{x_3^{(4)}}$$ → ЦФ (на двох кроках) = 20 + 16 = 36;

Min (36, 37) = 36.

Запишемо число 36 у вершині $\boldsymbol{x_2^{(3)}}$. Ребро $\boldsymbol{x_2^{(3)}} \to \boldsymbol{x_3^{(4)}}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на четвертому кроці є $\boldsymbol{U_{23}^{(4)}}$.

Проведемо умовну оптимізацію третього кроку. Вихідні стани третього кроку: $\{\boldsymbol{x_1^{(2)}}, \boldsymbol{x_2^{(2)}}, \boldsymbol{x_3^{(2)}}\}$. Визначимо оптимальне умовне керування для стану $\boldsymbol{x_1^{(2)}}$:

$$\boldsymbol{U_{11}^{(3)}}:\ \boldsymbol{x_1^{(2)}} \to \boldsymbol{x_1^{(3)}} \to \text{ЦФ} = 53.$$
$$\boldsymbol{U_{12}^{(3)}}: \boldsymbol{x_1^{(2)}} \to \boldsymbol{x_2^{(3)}} \to \text{ЦФ} = 48.$$

Min (48, 53) = 48.

Запишемо число 48 у вершині $\boldsymbol{x_1^{(2)}}$. Ребро $\boldsymbol{x_1^{(2)}} \to \boldsymbol{x_2^{(3)}}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на третьому кроці є $\boldsymbol{U_{12}^{(3)}}$.

Визначимо оптимальне умовне керування для стану $\boldsymbol{x_2^{(2)}}$:

$$\boldsymbol{U_{22}^{(3)}}:\ \boldsymbol{x_2^{(2)}} \to \boldsymbol{x_2^{(3)}} \to \text{ЦФ} = 50.$$

Запишемо число 50 у вершині $\boldsymbol{x_2^{(2)}}$. Ребро $\boldsymbol{x_2^{(2)}} \to \boldsymbol{x_2^{(3)}}$стовщується. Умовним оптимальним керуванням на третьому кроці є $\boldsymbol{U_{22}^{(3)}}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $\boldsymbol{x_3^{(2)}}$:

$$\boldsymbol{U_{34}^{(3)}}:\ \boldsymbol{x_3^{(2)}} \to \boldsymbol{x_4^{(3)}} \to \text{ЦФ} = 46;$$
$$\boldsymbol{U_{33}^{(3)}}:\ \boldsymbol{x_3^{(2)}} \to \boldsymbol{x_3^{(3)}} \to \text{ЦФ} = 52;$$
$$\boldsymbol{U_{32}^{(3)}}:\ \boldsymbol{x_3^{(2)}} \to \boldsymbol{x_2^{(3)}} \to \text{ЦФ} = 60.$$

Min(46, 52, 60) = 46.

Запишемо число 46 у вершині $\boldsymbol{x_3^{(2)}}$. Ребро $\boldsymbol{x_3^{(2)}} \to \boldsymbol{x_4^{(3)}}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на третьому кроці є $\boldsymbol{U_{34}^{(3)}}$.

Проведемо умовну оптимізацію другого кроку. Вихідні стани другого кроку: $\{\boldsymbol{x_1^{(1)}}, \boldsymbol{x_2^{(1)}}, \boldsymbol{x_3^{(1)}}, \boldsymbol{x_4^{(1)}}\}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $\boldsymbol{x_1^{(1)}}$:

$$\boldsymbol{U_{12}^{(2)}}:\ \boldsymbol{x_1^{(1)}} \to \boldsymbol{x_2^{(2)}} \to \text{ЦФ} = 71;$$
$$\boldsymbol{U_{11}^{(2)}}:\ \boldsymbol{x_1^{(1)}} \to \boldsymbol{x_1^{(2)}} \to \text{ЦФ} = 61;$$
$$\boldsymbol{Min}(61,\ 71) = 61.$$

Запишемо число 61 у вершині $\boldsymbol{x_1^{(1)}}$. Ребро $\boldsymbol{x_1^{(1)}} \to \boldsymbol{x_1^{(2)}}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на другому кроці є $\boldsymbol{U_{11}^{(2)}}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $\boldsymbol{x_2^{(1)}}$:

$$\boldsymbol{U_{21}^{(2)}}:\ \boldsymbol{x_2^{(1)}} \to \boldsymbol{x_1^{(2)}} \to \text{ЦФ} = 65;$$
$$\boldsymbol{U_{12}^{(2)}}:\ \boldsymbol{x_2^{(1)}} \to \boldsymbol{x_2^{(2)}} \to \text{ЦФ} = 64;$$
$$\boldsymbol{U_{12}^{(2)}}:\ \boldsymbol{x_2^{(1)}} \to \boldsymbol{x_2^{(2)}} \to \text{ЦФ} = 70;$$
$$\boldsymbol{Min}\ (65,\ 64,\ 70) = 64.$$

Запишемо число 64 у вершині $x_2^{(1)}$. Ребро $\boldsymbol{x_2^{(1)}} \to \boldsymbol{x_2^{(2)}}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на 2-му кроці є $\boldsymbol{U_{12}^{(2)}}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $\boldsymbol{x_3^{(1)}}$:

$$\boldsymbol{U_{33}^{(2)}}:\ \boldsymbol{x_3^{(1)}} \to x_3^{(2)} \to \text{ЦФ} = 66\ .$$

Запишемо число 66 у вершині $\boldsymbol{x_3^{(1)}}$. Ребро $\boldsymbol{x_3^{(1)}} \to \boldsymbol{x_3^{(2)}}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на другому кроці є $\boldsymbol{U_{33}^{(2)}}$.

Визначимо умовне оптимальне керування для стану $\boldsymbol{x_4^{(1)}}$:

$$\boldsymbol{U_{43}^{(2)}}:\ \boldsymbol{x_4^{(1)}} \to \boldsymbol{x_3^{(2)}} \to \text{ЦФ} = 62;$$
$$\boldsymbol{U_{42}^{(2)}}:\ \boldsymbol{x_4^{(1)}} \to \boldsymbol{x_2^{(2)}} \to \text{ЦФ} = 70;$$
$$\boldsymbol{Min}\ (62,\ 70) = 62.$$

Запишемо число 62 у вершині $\boldsymbol{x_4^{(1)}}$. Ребро $\boldsymbol{x_4^{(1)}} \to \boldsymbol{x_3^{(2)}}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на другому кроці є $U_{43}^{(2)}$.

Проведемо умовну оптимізацію першого кроку. Вихідний стан першого кроку – $\boldsymbol{x_1^{(0)}}$. Визначимо умовне оптимальне керування для стану $\boldsymbol{x_1^{(0)}}$:

$$U_{11}^{(1)}:\ x_1^{(0)} \to x_1^{(1)} \to \text{ЦФ} = 80;$$
$$U_{12}^{(1)}:\ x_1^{(0)} \to x_2^{(1)} \to \text{ЦФ} = 77;$$
$$U_{13}^{(1)}:\ x_1^{(0)} \to x_3^{(1)} \to \text{ЦФ} = 78;$$
$$U_{14}^{(2)}:\ x_1^{(0)} \to x_4^{(1)} \to \text{ЦФ} = 78;$$
$$\boldsymbol{Min}(80, 77, 78, 78) = 77.$$

Запишемо число 77 у вершині $x_1^{(0)}$. Ребро $x_1^{(0)} \to x_2^{(1)}$ стовщується. Умовним оптимальним керуванням на першому кроці є $U_{12}^{(1)}$.

Таким чином, W_{min} = 77.

Далі проводимо етап безумовної оптимізації і знаходимо оптимальне керування:

$$U^* = (U_{12}^{*(1)}, U_{22}^{*(2)}, U_{22}^{*(3)}, U_{23}^{*(4)}, U_{32}^{*(5)}).$$

Задачі для самостійного розв’язання

1. На рис. 5.4 наведено можливі варіанти пересування з пункту А до пунту В в умовах радіаційного забруднення середовища. Вершини графа відповідають населеним пунктам, а ребра – дорогам, що їх з'єднують. Числа біля ребер графа відображають дозу опромінення в умовних одиницях. Необхідно знайти маршрут руху з пункту А в пункт В, при якому доза, отримана під час руху, була би мінімальною.

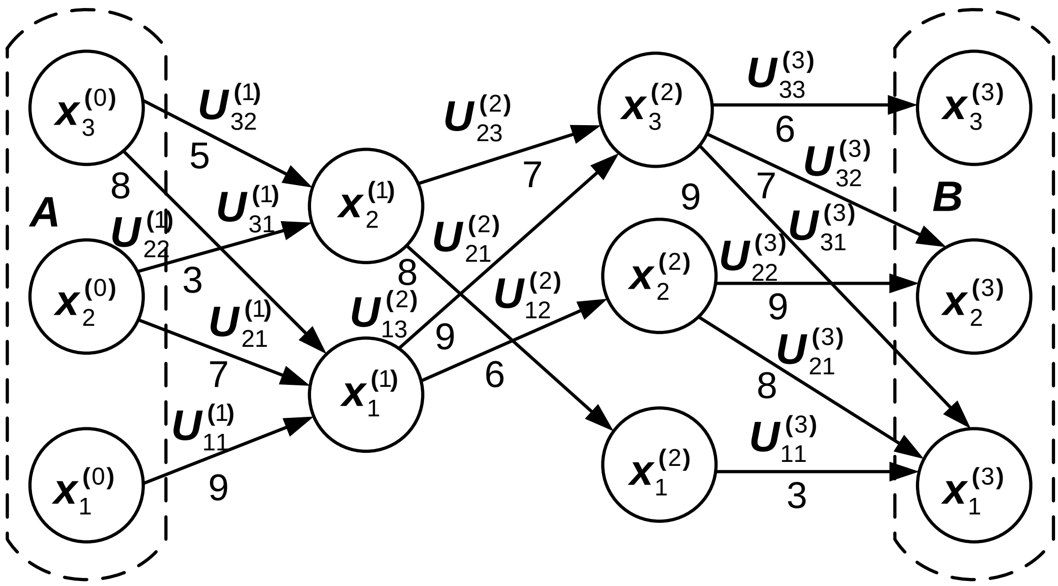

Рис. 5.4

3. Чотири будівельні бригади ($\boldsymbol{m}$ = 4) буде задіяно на будівництві трьох об'єктів ($\boldsymbol{n}$ = 3). Ефективність застосування будівельних бригад під час будівництва кожного з об’єктів за фіксований проміжок часу задано в табл. 5.5. Необхідно розподілити будівельні бригади за об'єктами таким чином, щоб за фіксований проміжок часу обсяг виконаних робіт був максимальним.

Кількість будівельних бригад	Номер об'єкта ***l***		
	1	2	3
1	5	4	3
2	6	5	4
3	7	9	6
4	9	10	9

3. Задано граф станів, зображений на рис. 5.5. Значення відстані між населеними пунктами для кожного кроку керування проставлено біля відповідних ребер. Необхідно знайти керування $\boldsymbol{U}^* \in \boldsymbol{U}$, яке переводить систему з початкового стану в кінцевий і перетворює на мінімум цільову функцію – пройдену відстань між пунктами відправлення й призначення.

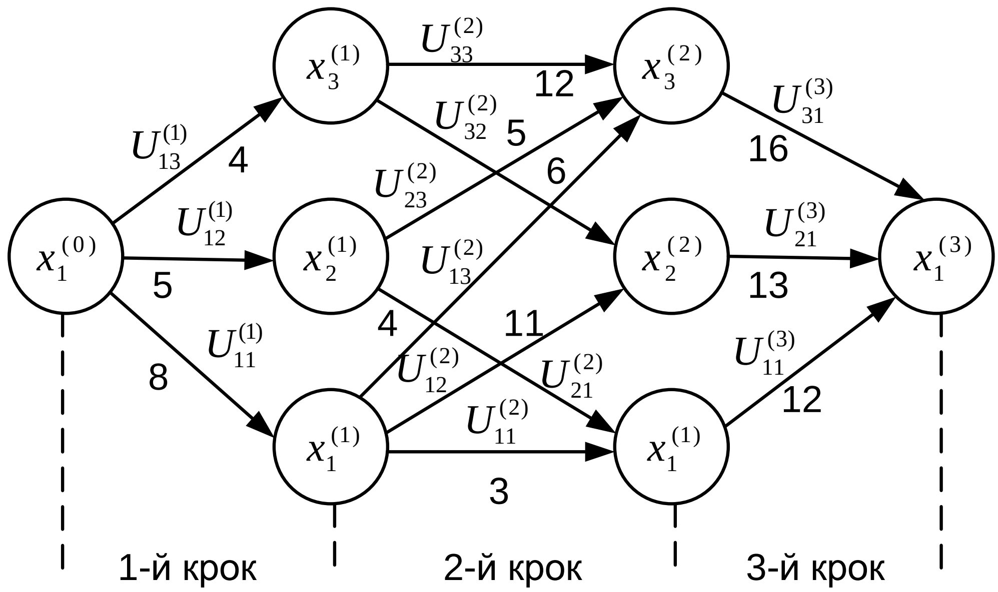

Рис. 5.5

6. ОПТИМІЗАЦІЯ СІТКОВИХ ГРАФІКІВ

Завдання оптимізації сіткових графіків за своєю суттю є завданням розподілу ресурсів між роботами комплексу (матеріальних засобів, робочої сили, фінансів і т. д.). Тривалість кожної роботи, очевидно, залежить від кількості ресурсів, виділених на її виконання. Розподіляючи відповідним чином ресурси між роботами, можна добитися, наприклад, мінімального часу комплексу робіт або мінімальної вартості витрат матеріальних ресурсів, матеріальних засобів і т. д.

Задачі оптимізації сіткових графіків (задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів між роботами комплексу) є складними. Їх розв’язання залежить від структури сіткового графіка, вигляду цільової функції й обмежень. Часто їх можна звести до задач математичного програмування і розв´язати відомими методами. Там, де це зробити не вдається, залучаються евристичні методи, які в поєднанні з можливостями комп'ютерів забезпечують успіх під час розв´язання задачі оптимізації.

Основні задачі оптимізації сіткових графіків:

− оптимізація за критерієм витрат ресурсів;

− оптимізація за критерієм економії ресурсів.

Розглянемо методи розв'язання цих задач більш докладно.

6.1. Оптимізація сіткових графіків за критерієм витрат ресурсів

Нехай унаслідок проведеного аналізу комплексу робіт побудовано сітковий графік і розраховано його параметри. Будемо вважати, що графік має один критичний шлях, довжина якого становить $t_{кр}$. З іншого боку, наприклад, вищий орган керування може встановити інший час виконання комплексу робіт $t_{д}$, причому $t_{д} < t_{кр}$.

Необхідно так організувати комплекс робіт, щоб виконати його в установлений термін. Зменшення часу (зменшення критичного шляху) досягається зменшенням тривалості критичних робіт, унаслідок чого критичний шлях сіткового графіка може або залишитися незмінним, або змінитися.

В останньому випадку змінюється структура сіткового графіка, оскільки новий критичний шлях буде містити у своєму складі роботи графіка, що раніше були некритичними:

− зменшення тривалості критичних робіт (без змінення топології графіка);

− зменшення тривалості критичних робіт (зі зміненням топології графіка).

− використання додаткових ресурсів (або зовнішніх, або внутрішніх резервів (перекидання ресурсів з одних робіт на інші)).

Цільовою функцією в розглядуваних задачах є сумарна кількість ресурсів, що використовуються для зменшення часу виконання комплексу робіт. Обмеження можуть накладатися на кількість використаних додаткових ресурсів, час виконання робіт і т. д.

Для цієї задачі обмеження накладаються на ресурси, що використовуються для зменшення часу виконання робіт. Змістовна постановка задачі полягає в такому. Задано директивний термін $t_д$ виконання комплексу робіт. Під час аналізу сіткового графіка знайдено реальний час його виконання $t_{кр}$, причому $t_д < t_{кр}$. Тривалість комплексу робіт можна зменшити, використовуючи для цього ресурси в обмеженій кількості. Постає запитання: для виконання яких робіт і в якій кількості необхідно використати додаткові ресурси, щоб загальний час виконання комплексу робіт не перевищував $t_д$, а сумарні витрати додаткових ресурсів були би мінімальними.

Проведемо формалізацію задачі. Довільну роботу комплексу позначимо через α_{ij}, а час її виконання – через t_{ij}. Якщо для виконання використати додаткові ресурси в розмірі x_{ij} , то час виконання роботи α_{ij} зменшиться до t'_{ij} . Очевидно, термін виконання роботи залежить від додаткових ресурсів, що використовуються для її виконання:

$$t'_{ij} = f(x_{ij}). \tag{6.1}$$

Оскільки ресурси, що використовуються додатково для виконання роботи α_{ij}, є обмеженими, справджуються такі нерівності:

$$x_{ij} \leq h_{ij}; \tag{6.2}$$

$$x_{ij} \geq 0, \tag{6.3}$$

де h_{ij} − максимальна кількість додаткових ресурсів, яку може бути використано для виконання роботи α_{ij}.

Нерівність (6.3) означає, що за своєю фізичною природою (інструменти, прилади, техніка тощо) ресурси не можуть бути від´ємними величинами.

Позначимо довільну критичну роботу через $\alpha_{ij_{кр}}$, а її тривалість – через $t_{ij_{кр}}$. Тоді з урахуванням уведених позначень час виконання комплексу робіт (довжина критичного шляху) без використання додаткових ресурсів

$$t_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} t_{ij} = \sum_{\alpha_{ij_{\text{кр}}}} t_{ij_{\text{кр}}}, \qquad (6.4)$$

а після використання додаткових ресурсів –

$$t'_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij} \in L'_{\text{кр}}} t'_{ij} = \sum_{\alpha_{ij_{\text{кр}}}} t'_{ij_{\text{кр}}},$$

або з урахуванням (6.1)

$$t'_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ii} \in L'_{\text{кр}}} f(x_{ij}). \qquad (6.5)$$

Вираз $\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}$ означає, що в (6.4) і (6.5) підсумовуються роботи, які належать до критичного шляху $L_{\text{кр}}$ або $L'_{\text{кр}}$, де $L'_{\text{кр}}$ − критичний шлях сіткового графіка після використання додаткових ресурсів.

За умовою задачі новий термін виконання комплексу робіт $t'_{\text{кр}}$ не повинен перевищувати $t_{\text{д}}$:

$$\sum_{\alpha_{ii} \in L'_{\text{кр}}} f(x_{ij}) \le t_{\text{д}}. \qquad (6.6)$$

З іншого боку, сумарні витрати ресурсів

$$F(\overline{x}) = \sum_{\alpha_{ii} \in L'_{\text{кр}}} x_{ij}. \qquad (6.7)$$

Тоді задачу оптимізації сіткового графіка можна сформулювати таким чином: знайти невід'ємні значення змінних x_{ij}, які задовольняли б обмеженням (6.2) і (6.6) і перетворювали на мінімум цільову функцію (6.7).

На перший погляд, сформульована задача нагадує задачу лінійного програмування. Справді, цільова функція (6.7) являє собою лінійну функцію змінних x_{ij}, обмеження (6.2) є лінійною нерівністю. Разом з тим обмеження (6.6) у загальному випадку є нелінійним, оскільки функція $f(x_{ij})$ має нелінійний характер. Тому розглядувана задача в загальному випадку є задачею нелінійного програмування, і для її розв´язання необхідно використовувати відповідні методи.

Приклад 6.1. Комплекс робіт подано сітковим графіком, зображеним на рис. 6.1. Час виконання комплексу $t_{кр}$ = 8 год. Цей час має бути зменшено до $t_{\text{д}}$ = 6 год, для чого, щоб виконати критичні роботи α_{35} і α_{36}, може бути використано додаткові ресурси не більше 4 і 9 од. відповідно.

Залежність тривалості роботи від кількості додаткових ресурсів визначається виразом

$$t_{ij}^{'} = t_{ij} e^{-c_{ij} x_{ij}}, \tag{6.8}$$

де t_{ij} – тривалість роботи αij без використання додаткових ресурсів;

$t_{ij}^{'}$ – тривалість роботи αij з використанням додаткових ресурсів;

x_{ij} – кількість додатково використаних ресурсів;

c_{ij} – коефіцієнт.

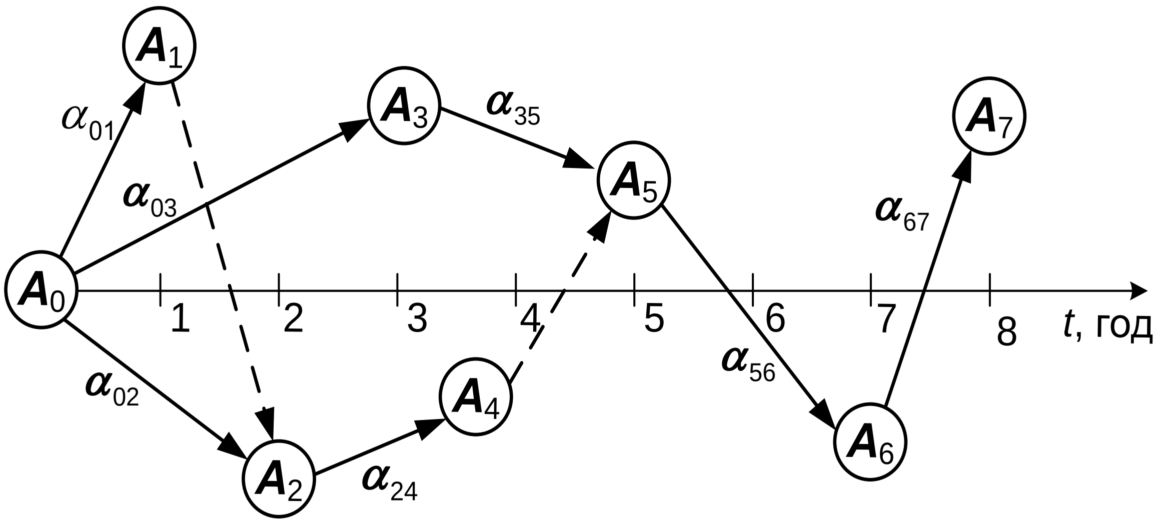

Рис. 6.1

Розрахуємо, скільки необхідно використати додаткових ресурсів, щоб виконати комплекс робіт у заданий термін $t_д$ при мінімальній сумарній витраті додаткових ресурсів, якщо $c_{35} = 0{,}1$ і $c_{56} = 0{,}2$.

З рис. 6.1 випливає, що критичний шлях сіткового графіка являє собою послідовність робіт:

$$L_{кр} = (\alpha_{03} - \alpha_{35} - \alpha_{56} - \alpha_{67}).$$

Довжина критичного шляху

$$t_{кр} = t_{03} + t_{35} + t_{56} + t_{67} = 8 \text{ год.}$$

Якщо для виконання роботи α_{35} використати додаткові ресурси в кількості x_{35} од., а для виконання роботи α_{56} – x_{56} од., то з урахуванням (6.8) довжина критичного шляху

$$t'_{\text{кр}} = t_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t_{67} =$$

$$= t_{03} + t_{35}e^{-0,1x_{35}} + t_{56}e^{-0,2x_{56}} + t_{67} =$$

$$= 3 + 2e^{-0,1x_{35}} + 2e^{-0,2x_{56}} + 1 = 4 + 2e^{-0,1x_{35}} + 2e^{-0,2x_{56}}.$$

За умовою задачі ця величина має бути меншою від директивного часу t_{∂}, тобто

$$4 + 2e^{-0,1x_{35}} + 2e^{-0,2x_{56}} \le 6$$

або

$$e^{-0,1x_{35}} + e^{-0,2x_{56}} \le 1.$$

З іншого боку, на обсяг додаткових ресурсів накладаються обмеження

$$x_{35} \le 4, \tag{6.10}$$

$$x_{56} \le 9. \tag{6.11}$$

Сумарні витрати додаткових ресурсів

$$F(\overline{x}) = x_{35} + x_{56}. \tag{6.12}$$

Тепер задачу можна сформулювати таким чином: знайти такі невід'ємні значення змінних x_{35} і x_{56}, які задовольняли б обмеженням (6.9)–(6.11) і перетворювали на мінімум цільову функцію (6.12).

Обмеження (6.9) є суто нелінійними. Тому задача мінімізації цільової функції (6.12) при обмеженнях (6.9)–(6.11) є задачею нелінійного програмування.

Оскільки обмеження й цільова функція є безперервними й диференційованими функціями, задача належить до класичних задач нелінійного програмування, і її можна розв´язати, зокрема, методом невизначених множників Лагранжа. Однак з огляду на те, що обмеження (6.9)–(6.11) є нерівностями, розв´язання задачі методом множників Лагранжа стає досить громіздким.

Розв´яжемо цю задачу графічним методом, аналогічним графічному методу розв’язання задач лінійного програмування [2, 10]. Перейдемо в обмеженнях задачі від нерівностей до рівностей. Оскільки до змінних задачі ставиться вимога невід'ємності, додамо до лівої частини кожної нерівності додатні величини y_1 , y_2 , y_3 . Тоді формулювання задачі перетвориться на таке: знайти невід'ємні значення змінних x_{35}, x_{56}, y_1, y_2, y_3, що задовольняють обмеженням

$$e^{-0{,}1x_{35}} + e^{-0{,}2x_{56}} + y_1 = 1;$$

$$x_{35} + y_2 = 4;$$

$$x_{56} + y_3 = 9$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію (6.12).

Виразимо змінні y_1, y_2, y_3 через x_{35} і x_{56}:

$$y_1 = 1 - e^{-0{,}1x_{35}} - e^{-0{,}2x_{56}};$$

$$y_2 = 4 - x_{35};$$

$$y_3 = 9 - x_{56}$$

і побудуємо в координатах $x_{35}0x_{56}$ область допустимих розв´язків задачі, тобто область, обмежену лініями y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, кожна точка якої задовольняє вимогу невід'ємності змінних (рис. 6.2).

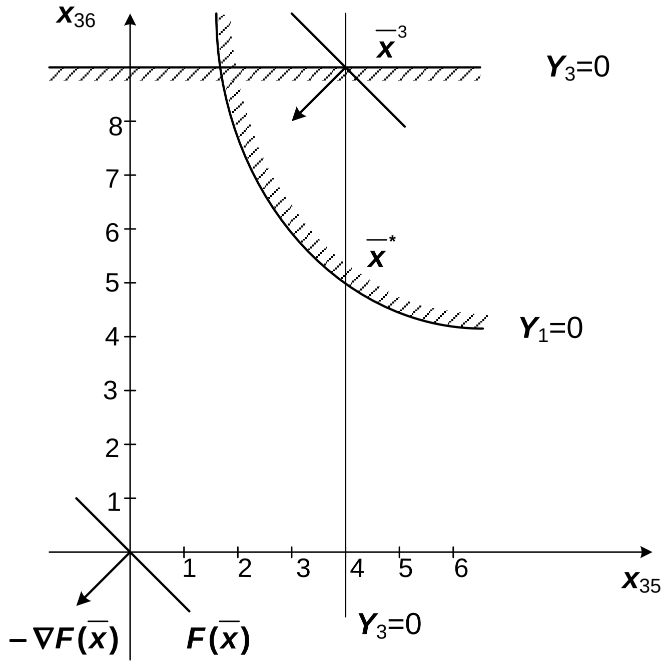

Рис. 6.2

Цільова функція $F(\overline{x})$ у координатах $x_{35}0x_{56}$ являє собою пряму, що проходить через початок координат. Для того щоб визначити напрямок переміщення прямої $F(\overline{x})$ у бік зменшення цільової функції, знайдемо антиградієнт функції $F(\overline{x})$:

$$-\nabla F(\overline{x}) = \left(-\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_{35}}; -\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_{56}}\right) = (-1; -1).$$

Неважко переконатися, що якщо почати переміщення прямої $F(\overline{x})$ в напрямку антиградієнта з точки $\overline{x}_1$ області допустимих розв'язків, то оптимальний розв'язок буде в точці $\overline{x}^*$. У цій точці перетинаються лінії y_1 = 0 і y_2 = 0 , тобто

$$1 - e^{-0,1x_{35}^*} - e^{-0,2x_{56}^*} = 0;$$
$$4 - x_{35}^* = 0.$$

З другого рівняння випливає, що $x_{35} = 4$. Підставивши це значення в перше рівняння, отримаємо x_{56}^* = 5,5.

Таким чином, під час розв'язання задачі виявлено, що для зменшення часу виконання комплексу робіт необхідно при виконанні роботи α_{35} використати 4 од. додаткових ресурсів, а при виконанні роботи α_{56} – 5,6 од. При цьому тривалість робіт α_{35} і α_{56} зменшиться:

$$t_{35}^{'} = t_{35}e^{-0,1\cdot 4} = 1,34 \text{ год};$$

$$t_{56}^{'} = t_{56}e^{-0,2\cdot 5,5} = 0,66 \text{ год}.$$

Загальний час виконання комплексу робіт

$$t_{\text{кр}}^{'} = t_{03} + t_{35}^{'} + t_{56}^{'} + t_{67} = 3 + 1,34 + 0,66 + 1 = 6 \text{ год},$$

що задовольняє директивні вимоги. Мінімальні сумарні витрати додаткових ресурсів

$$F_{min}(\overline{x}) = x_{35}^* + x_{56}^* = 9,5 \text{ од}.$$

На практиці збереження критичного шляху сіткового графіка при розв´язанні задачі оптимізації забезпечується порівняно невеликим зміненням тривалості критичних робіт. У цьому випадку можна вважати, що тривалість виконання роботи лінійно залежить від кількості додатково використаних ресурсів. Тоді вираз (3.1) можна подати такою залежністю:

$$t'_{ij} = f(x_{ij}) = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij}). \qquad (6.13)$$

Тепер задача мінімізації цільової функції (6.7) при обмеженнях (6.2), (6.3) є задачею лінійного програмування.

Приклад 6.2. Комплекс робіт, заданий сітковим графіком, зображено на рис. 6.1. Залежності тривалості роботи від додатково витрачених ресурсів обчислюють за виразом (6.13). Кількість додатково використаних ресурсів є обмеженою: для роботи α_{03} – 5 од., для роботи α_{35} – 4 од., для роботи α_{56} – 2 од. і для роботи α_{67} – 2 од.
Яку кількість ресурсів і для яких робіт має бути додатково використано, щоб при мінімальних сумарних затратах ресурсів комплекс робіт було виконано не більше, ніж за 6 год? Коефіцієнт c_{ij} для критичних робіт набуває таких значень: c_{03} = 0,067; c_{35} = 0,05; c_{56} = 0,15; c_{67} = 0,4. Позначимо через x_{ij} кількість ресурсів, які додатково використовуються для виконання роботи α_{ij}. Тоді тривалість критичних робіт буде визначатися з урахуванням (6.13) такими виразами:

$$t'_{03} = t_{03}(1 - c_{03}x_{03}) = 3(1 - 0{,}067x_{03});$$
$$t'_{35} = t_{35}(1 - c_{35}x_{35}) = 2(1 - 0{,}05x_{35});$$
$$t'_{56} = t_{56}(1 - c_{56}x_{56}) = 2(1 - 0{,}15x_{56});$$
$$t'_{67} = t_{67}(1 - c_{67}x_{67}) = 1(1 - 0{,}4x_{67}).$$

Загальний час виконання комплексу робіт з використанням додаткових ресурсів

$$t'_{\text{кр}} = t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67} = 8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67}.$$

За умовою задачі цей час не повинен перевищувати 6 год:

$$8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67} \le 6. \qquad (6.15)$$

Обмеження на додаткові ресурси запишемо таким чином:

$$\boldsymbol{x_{03}} \leq 5;\ \boldsymbol{x_{35}} \leq 4;\ \boldsymbol{x_{56}} \leq 2;\ \boldsymbol{x_{67}} \leq 2.$$

Загальні витрати додаткових ресурсів

$$\boldsymbol{F(\overline{x})} = \boldsymbol{x_{03}} + \boldsymbol{x_{35}} + \boldsymbol{x_{56}} + \boldsymbol{x_{67}}. \qquad (6.16)$$

Тепер задача буде формулюватися так: знайти невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x_{03}}, \boldsymbol{x_{35}}, \boldsymbol{x_{56}}, \boldsymbol{x_{67}}$, що задовольняють обмеженням (6.15) і (6.16) і перетворюють на мінімум цільову функцію. Ця задача належить до задач лінійного програмування.

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей, для чого введемо додаткові невід'ємні змінні $\boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{y_5}$:

$$8 - 0{,}2\boldsymbol{x_{03}} - 0{,}1\boldsymbol{x_{35}} - 0{,}3\boldsymbol{x_{56}} - 0{,}4\boldsymbol{x_{67}} + \boldsymbol{y_1} = 6;$$
$$\boldsymbol{x_{03}} + \boldsymbol{y_2} = 5;$$
$$\boldsymbol{x_{35}} + \boldsymbol{y_3} = 4;$$
$$\boldsymbol{x_{56}} + \boldsymbol{y_4} = 2;$$
$$\boldsymbol{x_{67}} + \boldsymbol{y_5} = 2.$$

У задачі є $\boldsymbol{n}$ = 9 змінних і $\boldsymbol{m}$ = 5 обмежень-рівностей. Розв´яжемо задачу табличним симплекс-методом. Як вільні виберемо змінні $\boldsymbol{x_{03}}, \boldsymbol{x_{35}}, \boldsymbol{x_{56}}, \boldsymbol{x_{67}}$. Інші (базисні) змінні виразимо через вільні у формі, призначеній для заповнення симплекс-таблиць:

$$\boldsymbol{y_1} = -2 - (-0{,}2\boldsymbol{x_{03}} - 0{,}1\boldsymbol{x_{35}} - 0{,}3\boldsymbol{x_{56}} - 0{,}4\boldsymbol{x_{67}});$$
$$\boldsymbol{y_2} = 5 - (\boldsymbol{x_{03}});$$
$$\boldsymbol{y_3} = 4 - (\boldsymbol{x_{35}});$$
$$\boldsymbol{y_4} = 2 - (\boldsymbol{x_{56}});$$
$$\boldsymbol{y_5} = 2 - (\boldsymbol{x_{67}}).$$

Цільова функція має вигляд

$$\boldsymbol{F(\overline{x})} = 0 - (-\boldsymbol{x_{03}} - \boldsymbol{x_{35}} - \boldsymbol{x_{56}} - \boldsymbol{x_{67}}). \qquad (6.17)$$

Послідовність симплекс-таблиць 6.1−6.4 відповідає різним крокам розв´язання задачі.

Таблиця 6.1

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	x_{56}	$\overleftarrow{x_{67}}$
$F(\overline{x})$	0	−1	−1	−1	−1
y_1	−2	−0,2	−0,1	−0,3	−0,4
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
y_4	2	0	0	1	0
$\uparrow y_5$	2	0	0	0	$\boxed{1}$

Таблиця 6.2

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	$\overleftarrow{x_{56}}$	y_5
$F(\overline{x})$	2	−1	−1	−1	1
y_1	−1.2	−0,2	−0,1	−0,3	0,4
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
$\uparrow y_4$	2	0	0	$\boxed{1}$	0
x_{67}	2	0	0	0	1

Таблиця 6.3

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	$\overleftarrow{x_{03}}$	x_{35}	y_4	y_5
$F(\overline{x})$	4	−1	−1	1	1
$\uparrow y_1$	−0,6	$\boxed{-0{,}2}$	−0,1	0,3	0,4
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
x_{56}	2	0	0	1	0
x_{67}	2	0	0	0	$\boxed{1}$

Таблиця 6.4

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	y_1	x_{35}	y_4	y_5
$F(\overline{x})$	7	−5	−0,5	−0,5	−1
x_{03}	3	−5	0,5	−1,5	−2
y_2	2	5	−0,5	1,5	2
y_3	4	0	1	0	0
x_{56}	2	0	0	1	0
x_{67}	2	0	0	0	1

Таким чином, оптимальним розв´язком задачі є такі значення змінних:

$$x_{03}{}^* = 3;\ x_{35}{}^* = 0;\ x_{56}{}^* = 2;\ x_{67}{}^* = 2.$$

Це означає, що для зменшення часу виконання комплексу на роботу α_{03} необхідно додатково витратити 3 од. ресурсів, на роботу α_{56} − 2 од. До виконання роботи α_{35} додаткові ресурси залучати недоцільно.

Знайдемо час виконання комплексу робіт:

$$t'_{кр} = t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67} = t_{03}(1 - c_{03}x^*{}_{03}) +$$
$$+\ t_{35}(1 - c_{35}x^*{}_{35}) + t_{56}(1 - c_{56}x^*{}_{56}) + t_{67}(1 - c_{67}x^*{}_{67}) =$$
$$= 3(1 – 0{,}067\cdot 3) + 2 + 2(1 - 0{,}15\cdot 2) + 1(1 – 0{,}4\cdot 2) = 6 \text{ год.}$$

При цьому мінімальні сумарні витрати

$$F_{min}(\overline{x}) = x^*{}_{03} + x^*{}_{35} + x^*{}_{56} + x^*{}_{67} = 7 \text{ год.}$$

У розглянутих задачах обмеження накладалися тільки на додаткові ресурси. Разом з тим на практиці істотне значення можуть мати й обмеження на тривалість тієї чи іншої роботи. Справді, зменшувати час, наприклад, критичних робіт, можна до певних меж, за якими змінюється критичний шлях сіткового графіка. Обмеження на тривалість роботи зазвичай відображається у вигляді нерівності

$$t'_{ij} \geq T_{ij}, \tag{6.18}$$

де T_{ij} − мінімально допустимий час виконання роботи.

Тоді задачу оптимізації сіткового графіка можна сформулювати так: знайти невід'ємні значення змінних x_{ij}, що задовольняють обмеженням (6.2), (6.14) і (6.18) і перетворюють на мінімум цільову функцію (6.17).

Приклад 6.3. Розв´язати задачу прикладу 6.2 при таких обмеженнях: h_{03} = 5; h_{35} = 4; h_{56} = 2; h_{67} = 2; T_{03} = 2 год; T_{35} = 1,6 год; T_{56} = 1,2 год; T_{67} = 0,4 год. Директивний термін виконання комплексу робіт становить не більше 6 год.

Знову, як і раніше, через x_{ij} позначимо витрату додаткових ресурсів при виконанні роботи α_{ij}. Тоді тривалість критичних робіт відповідно до (6.13) і з урахуванням значень C_{ij} буде визначатися виразами

$$t'_{03} = 3(1 - 0{,}067x_{03});$$
$$t'_{35} = 2(1 - 0{,}05x_{35});$$
$$t'_{56} = 2(1 - 0{,}15x_{56});$$
$$t'_{67} = 3(1 - 0{,}4x_{67}).$$

Складемо обмеження задачі. Згідно з (6.1), (6.2) і (6.18) отримаємо

$$8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67} \le 6;$$
$$x_{03} \le 5;$$
$$x_{35} \le 4;$$
$$x_{56} \le 2;$$
$$x_{67} \le 2; \qquad (6.19)$$
$$3 - 0{,}2x_{03} \ge 2;$$
$$2 - 0{,}1x_{35} \ge 1{,}6;$$
$$2 - 0{,}3x_{56} \ge 1{,}2;$$
$$1 - 0{,}4x_{67} \ge 0{,}4.$$

Цільовою функцією розглядуваної задачі є функція

$$F(\overline{x}) = x_{03} + x_{35} + x_{56} + x_{67}.$$

Завдання пошуку мінімуму цільової функції $F(\overline{x})$ при обмеженнях (6.19) є задачею лінійного програмування.

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей

$$8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67} + y_1 = 6;$$
$$x_{03} + y_2 = 5;$$
$$x_{35} + y_3 = 4;$$
$$x_{56} + y_4 = 2;$$
$$x_{67} + y_5 = 2.$$
$$3 - 0{,}2x_{03} + y_6 = 2;$$
$$2 - 0{,}1x_{35} + y_7 = 1{,}6;$$
$$2 - 0{,}3x_{56} + y_8 = 1{,}2;$$
$$1 - 0{,}4x_{67} + y_9 = 0{,}4$$

і подамо обмеження й цільову функцію в такому вигляді:

$$\boldsymbol{y_1} = -2 -(-\,0{,}2\boldsymbol{x_{03}} - 0{,}1\boldsymbol{x_{35}} - 0{,}3\boldsymbol{x_{56}} - 0{,}4\boldsymbol{x_{67}});$$
$$\boldsymbol{y_2} = 5 - (\,\boldsymbol{x_{03}});$$
$$\boldsymbol{y_3} = 4 - (\boldsymbol{x_{35}});$$
$$\boldsymbol{y_4} = 2 - (\boldsymbol{x_{56}});$$
$$\boldsymbol{y_5} = 2 - (\boldsymbol{x_{67}})$$
$$\boldsymbol{y_6} = 1 - (0{,}2\boldsymbol{x_{03}})$$
$$\boldsymbol{y_7} = 0{,}4 - (0{,}1\boldsymbol{x_{35}})$$
$$\boldsymbol{y_8} = 0{,}8 - (0{,}3\boldsymbol{x_{56}});$$
$$\boldsymbol{y_9} = 0{,}6 - (0{,}4\boldsymbol{x_{67}});$$
$$\boldsymbol{F(\overline{x})} = 0 - (-\,\boldsymbol{x_{03}} - \boldsymbol{x_{35}} - \boldsymbol{x_{56}} - \,\boldsymbol{x_{67}}).$$

Розв´язок задачі наведено последовністю симплекс-таблиць (табл. 6.5−6.8).

Таблиця 6.5

БЗ	ВЗ				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	x_{56}	$\overleftarrow{x_{67}}$
$F(\overline{x})$	0	−1	−1	−1	−1
y_1	−2	−0,2	−0,1	−0,3	−0,4
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
y_4	2	0	0	1	0
y_5	2	0	0	0	1
y_6	1	0,2	0	0	0
y_7	0,4	0	0,1	0	0
y_8	0,8	0	0	0,3	0
$\uparrow y_9$	0,6	0	0	0	$\boxed{0{,}4}$

Таблиця 6.6

БЗ	ВЗ				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	$\overleftarrow{x_{56}}$	y_9
$F(\overline{x})$	1,5	−1	−1	−1	2,5
y_1	−1,4	−0,2	−0,1	−0,3	1
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
$\uparrow y_4$	2	0	0	$\boxed{1}$	0
y_5	0,5	0	0	0	−2,5
y_6	1	0,2	0	0	0
y_7	0,4	0	0,1	0	0
y_8	0,8	0	0	0,3	0
x_{67}	1,5	0	0	0	2,5

Таблиця 6.7

БЗ	ВЗ				
	ВЧ	$\overleftarrow{x_{03}}$	x_{35}	y_4	y_9
$F(\overline{x})$	3,5	−1	-1	1	2,5
$\uparrow y_1$	−0,8	$\boxed{-0{,}2}$	−0,1	−0,3	1
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
x_{56}	2	0	0	1	0
y_5	0,5	0	0	0	−2,5
y_6	1	1,2	0	0	0
y_7	0,4	0	0,1	0	0
y_8	0,2	0	0	0,3	0
x_{67}	1,5	0	0	0	2,5

Таблиця 6.8

БЗ	ВЗ				
	ВЧ	y_1	x_{35}	y_4	y_9
$F(\overline{x})$	7,5	−5	−0,5	−0,5	−2,5
x_{03}	4	5	0,5	−1,5	−5
y_2	1	5	−0,5	1,5	5
y_3	4	0	1	0	0
x_{56}	2	0	0	1	0
y_5	0,5	0	0	0	-2,5
y_6	0,2	−5	−0,1	0,3	1
y_7	0,4	0	0,1	0	0
y_8	0,2	0	0	0,3	0
x_{67}	1,5	0	0	0	2,5

Оптимальний розв´язок утворюють значення x^*_{03} = 4; x^*_{03} = 4; x^*_{35} = 0; x^*_{56} = 2; x^*_{67} = 1,5.

Це означає, що для зменшення часу виконання комплексу робіт необхідно використати додаткові ресурси для робіт x_{03}, x_{56} і x_{67} в обсязі 4, 2 і 1,5 одиниць відповідно. Для роботи x_{35} додаткові ресурси використовувати недоцільно. При цьому тривалість робіт x_{03}, x_{56} і x_{67} зменшується:

$$t'_{03} = 3(1 - 0{,}067 \cdot 4) = 2{,}2 \text{ год};$$
$$t'_{56} = 2(1 - 0{,}15 \cdot 4) = 1{,}4 \text{ год};$$
$$t'_{67} = 1(1 - 0{,}4 \cdot 1{,}5) = 0{,}4 \text{ год},$$

що задовольняє заданим обмеженням

$$t'_{03} \geq 2;\ t'_{56} \geq 1{,}2;\ t'_{67} \geq 0{,}4.$$

Загальний час виконання комплексу робіт зменшиться:

$$t'_{\text{кр}} = t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67} = 6 \text{ год}.$$

Сумарний прибуток додаткових ресурсів

$$F_{min}(\overline{x}) = 7{,}5 \text{ од}.$$

Коефіцієнти c_{ij} у виразах (6.8) і (6.13) відображають ту частину часу, на яку зменшиться тривалість виконання роботи α_{ij}, якщо додатково використати одну одиницю ресурсу. На практиці трапляються завдання, у яких задається кількість ресурсів d_{ij} , які необхідно використати для зменшення роботи на одиницю часу (наприклад, на одну годину). Тоді задачу оптимізації сіткового графіка за критерієм витрати ресурсів можна поставити інакше: *на скільки можна зменшити кожну з критичних робіт*, *щоб час виконання комплексу не перевищував заданий при мінімальній витраті додаткових ресурсів.*

Позначимо через τ_{ij} невідомий час, на який має бути зменшено виконання роботи α_{ij}. Тоді новий час виконання роботи α_{ij}

$$t'_{ij} = t_{ij} - \tau_{ij}. \tag{6.20}$$

Для зменшення часу роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ до величини $\boldsymbol{t'_{ij}}$ додатково буде використано ресурси

$$\boldsymbol{z_{ij} = d_{ij}\tau_{ij}}. \tag{6.21}$$

Загальний час виконання комплексу робіт із використанням додаткових ресурсів

$$\boldsymbol{t'}_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij} \in L'_{\text{кр}}} \boldsymbol{t'_{ij}} = \sum_{\alpha_{ij_{\text{кр}}} \in L_{\text{кр}}} (\boldsymbol{t_{ij}} - \boldsymbol{\tau_{ij}}) = \boldsymbol{t}_{\text{кр}} - \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} \boldsymbol{\tau_{ij}}. \tag{6.22}$$

Цей час не повинен перевищувати директивний термін $\boldsymbol{t}_{\text{д}}$:

$$\boldsymbol{t}_{\text{кр}} - \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} \boldsymbol{\tau_{ij}} \le \boldsymbol{t}_{\text{д}}. \tag{6.23}$$

На тривалість робіт і додаткові ресурси накладаються такі обмеження:

$$\boldsymbol{t'_{ij} = t_{ij} - \tau_{ij} \ge T_{ij}};$$
$$\boldsymbol{z_{ij} = d_{ij}\tau_{ij} \le h_{ij}}.$$

Сумарні витрати додаткових ресурсів

$$\boldsymbol{z(\overline{\tau})} = \sum_{\alpha_{ij} \in L'_{\text{кр}}} \boldsymbol{z_{ij}} = \sum_{\alpha_{ij} \in L'_{\text{кр}}} \boldsymbol{d_{ij}\tau_{ij}}. \tag{6.24}$$

Тепер задачу можна сформулювати таким чином: знайти невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{\tau_{ij}}$, які задовольняють обмеженню (6.23) і перетворюють на мінімум цільову функцію (6.24).

Приклад 6.4. Комплекс робіт задано сітковим графіком (рис. 6.1). Для зменшення часу виконання комплексу при виконанні робіт $\boldsymbol{\alpha_{03}, \alpha_{35}, \alpha_{56}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{67}}$ може бути використано додаткові ресурси в розмірі понад 5; 4; 2 і 2 од. відповідно.

Тривалість робіт можна зменшити на 1 год, витративши такі ресурси: для роботи $\boldsymbol{\alpha_{03}}$ − у розмірі 5 од.; для роботи $\boldsymbol{\alpha_{35}}$ − 10 од.; для роботи $\boldsymbol{\alpha_{56}}$ − 3,33 од. і для роботи $\boldsymbol{\alpha_{67}}$ − 2,5 од. На скільки необхідно зменшити тривалість кожної критичної роботи, щоб час виконання комплексу робіт не перевищував 6 год при мінімальній сумарній витраті додаткових ресурсів? Мінімально допустимий час виконання робіт

$$T_{03} = 2 \text{ год}; T_{35} = 1{,}6 \text{ год}; T_{56} = 1{,}2 \text{ год}; T_{67} = 1{,}2 \text{ год}.$$

Якщо позначити через τ_{ij} час, на який необхідно зменшити тривалість роботи α_{ij}, то новий час виконання критичних робіт можна записати у вигляді співвідношень:

$$t'_{03} = t_{03} - \tau_{03};$$
$$t'_{56} = t_{56} - \tau_{56};$$
$$t'_{35} = t_{35} - \tau_{35};$$
$$t'_{67} = t_{67} - \tau_{67}.$$

З урахуванням додаткових ресурсів час виконання всього комплексу

$$t'_{\text{кр}} = t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67} = 8 - \tau_{03} - \tau_{35} - \tau_{56} - \tau_{67}.$$

Обсяг додаткових ресурсів, що використовуються для виконання критичних робіт:

$$z_{03} = d_{03}\tau_{03} = 5\tau_{03};$$
$$z_{35} = d_{ij}\tau_{35} = 10\tau_{35};$$
$$z_{56} = d_{56}\tau_{56} = 3{,}33\tau_{56};$$
$$z_{67} = d_{67}\tau_{67} = 2{,}5\tau_{67}.$$

Сумарні витрати додаткових ресурсів

$$z(\overline{\tau}) = 5\tau_{03} + 10\tau_{35} + 3{,}33\tau_{56} + 2{,}5\tau_{67}. \qquad (6.27)$$

Обмеження накладаються:

− на час виконання комплексу робіт:

$$8 - \tau_{03} - \tau_{35} - \tau_{56} - \tau_{67} \leq 6; \qquad (6.28)$$

− на обсяг додаткових ресурсів:

$$\begin{aligned} 5\tau_{03} &\leq 5; \\ 10\tau_{35} &\leq 4; \\ 3{,}33\tau_{56} &\leq 2; \\ 2{,}5\tau_{67} &\leq 2; \end{aligned} \qquad (6.29)$$

− на тривалість кожної з критичних робіт:

$$
\begin{aligned}
3 - \boldsymbol{\tau_{03}} &\geq 2;\\
2 - \boldsymbol{\tau_{35}} &\geq 1{,}5;\\
2 - \boldsymbol{\tau_{56}} &\geq 1{,}2;\\
1 - \boldsymbol{\tau_{67}} &\geq 0{,}4.
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Задача оптимізації полягає в обчисленні значень $\boldsymbol{\tau_{03}}, \boldsymbol{\tau_{35}}$, $\boldsymbol{\tau_{56}}$ і $\boldsymbol{\tau_{67}}$, які відповідають обмеженням (6.28)−(6.30) і перетворюють на мінімум цільову функцію (6.27). Оскільки цільова функція й обмеження є лінійними функції змінних $\boldsymbol{\tau_{ij}}$, ця задача належить до задач лінійного програмування.

Розв´язання задачі проведемо табличним симплекс-методом, увівши додаткові змінні $\boldsymbol{u_k}$. Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей:

$$
\begin{gathered}
8 - \boldsymbol{\tau_{03}} - \boldsymbol{\tau_{35}} - \boldsymbol{\tau_{56}} - \boldsymbol{\tau_{67}} + \boldsymbol{u_1} = 6;\\
5\boldsymbol{\tau_{03}} + \boldsymbol{u_2} = 5;\\
10\boldsymbol{\tau_{35}} + \boldsymbol{u_3} = 4;\\
3{,}33\boldsymbol{\tau_{56}} + \boldsymbol{u_4} = 2;\\
2{,}5\boldsymbol{\tau_{67}} + \boldsymbol{u_5} = 2;\\
3 - \boldsymbol{\tau_{03}} - \boldsymbol{u_6} = 2;\\
2 - \boldsymbol{\tau_{35}} - \boldsymbol{u_7} = 1{,}5;\\
2 - \boldsymbol{\tau_{56}} - \boldsymbol{u_8} = 1{,}2;\\
1 - \boldsymbol{\tau_{67}} - \boldsymbol{u_9} = 0{,}4;\\
\boldsymbol{u_1} = -2 - (- \boldsymbol{\tau_{03}} - \boldsymbol{\tau_{35}} - \boldsymbol{\tau_{56}} - \boldsymbol{\tau_{67}});\\
\boldsymbol{u_2} = 5 - (5\boldsymbol{\tau_{03}});\\
\boldsymbol{u_3} = 4 - (10\boldsymbol{\tau_{35}});\\
\boldsymbol{u_4} = 2 - (3{,}33\boldsymbol{\tau_{56}});\\
\boldsymbol{u_5} = 2 - (2{,}5\boldsymbol{\tau_{67}});\\
\boldsymbol{u_6} = 1 - (\boldsymbol{\tau_{03}});\\
\boldsymbol{u_7} = 0{,}4 - (\boldsymbol{\tau_{35}})\\
\boldsymbol{u_8} = 0{,}8 - (\boldsymbol{\tau_{56}});\\
\boldsymbol{u_9} = 0{,}6 - (\boldsymbol{\tau_{67}});
\end{gathered}
$$

$$
\boldsymbol{z}(\overline{\boldsymbol{\tau}}) = 0 - (-5\boldsymbol{\tau_{03}} - 10\boldsymbol{\tau_{35}} - 3{,}33\boldsymbol{\tau_{56}} - 2{,}5\boldsymbol{\tau_{67}}).
$$

Послідовність симплекс-таблиць 6.9−6.12 відповідає етапам розв´язання задачі.

Таблиця 6.9

БЗ	Вільні змінні				
	ВЧ	τ_{03}	τ_{35}	τ_{56}	$\overleftarrow{\tau_{67}}$
$Z(\overline{\tau})$	0	−5	−10	−3,33	−2,5
u_1	−2	−1	−1	−1	−1
u_2	5	5	0	0	0
u_3	4	0	10	0	0
u_4	2	0	0	3,33	0
u_5	2	0	0	0	2,5
u_6	1	1	0	0	0
u_7	0,4	0	1	0	0
u_8	0,8	0	0	1	0
$\uparrow u_9$	0,6	0	0	0	$\boxed{1}$

Таблиця 6.10

БЗ	Вільні змінні				
	ВЧ	τ_{03}	τ_{35}	$\overleftarrow{\tau_{56}}$	u_9
$Z(\overline{\tau})$	1,5	−5	−10	−3,33	2,5
u_1	−1,4	−1	−1	−1	1
u_2	5	5	0	0	0
u_3	4	0	10	0	0
$\uparrow u_4$	2	0	0	$\boxed{3{,}33}$	0
u_5	0,5	0	0	0	−2,5
u_6	1	1	0	0	0
u_7	0,4	0	1	0	0
u_8	0,8	0	0	1	0
τ_{67}	0,6	0	0	0	1

Таблиця 6.11

БЗ	Вільні змінні				
	ВЧ	$\overleftarrow{\tau_{03}}$	τ_{35}	u_4	u_9
$Z(\overline{\tau})$	3,5	−5	-10	1	2,5
$\uparrow u_1$	−0,8	$\boxed{-1}$	−1	0,3	1
u_2	5	5	0	0	0
u_3	4	0	10	0	0
τ_{56}	0,6	0	0	0,3	0
u_5	0,5	0	0	0	−2,5
u_6	1	1	0	0	0
u_7	0,4	0	1	0	0
u_8	0,2	0	0	−0,3	0
τ_{67}	0,6	0	0	0	1

Таблиця 6.12

БЗ	Вільні змінні				
	ВЧ	u_1	τ_{35}	u_4	u_9
$Z(\overline{\tau})$	7,5	−5	−0,5	−0,5	−2,5
τ_{03}	0,8	−1	1	−0,3	−1
u_2	1	5	−5	1,5	5
u_3	4	0	10	0	0
τ_{56}	0,6	0	0	0,3	0
u_5	0,5	0	0	0	-2,5
u_6	0,2	1	−1	0,3	1
u_7	0,4	0	1	0	0
u_8	0,2	0	0	−0,3	0
τ_{67}	1,5	0	0	0	1

За результатами розв´язання задачі отримаємо оптимальне значення τ_{ij}:

$$\tau_{03}^{*} = 0{,}8 \text{ год}; \ \tau_{35}^{*} = 0 \text{ год}; \ \tau_{56}^{*} = 0{,}6 \text{ год}; \ \tau_{67}^{*} = 0{,}6 \text{ год}.$$

Отже, час виконання роботи α_{03} необхідно зменшити на 0,8 год, α_{56} − на 0,6 год і α_{67} − на 0,6 год. Загальний час виконання комплексу робіт зменшиться на $\tau_{03}^{*} + \tau_{56}^{*} + \tau_{67}^{*} = 2$ год: $t'_{\text{кр}} = 8 - 2 = 6$ год, що задовольняє поставлені вимоги.

Для зменшення часу виконання критичних робіт необхідно додатково витратити ресурси в таких обсягах:

$$\boldsymbol{z_{03} = d_{03}\tau^*_{03}} = 5{\cdot}0{,}8 = 4 \text{ од.};$$

$$\boldsymbol{z_{56} = d_{56}\tau^*_{56}} = 3{,}33{\cdot}0{,}6 = 2 \text{ од.};$$

$$\boldsymbol{z_{67} = d_{67}\tau^*_{67}} = 2{,}5{\cdot}0{,}6 = 1{,}5 \text{ од.}$$

Неважко переконатися, що ці величини задовольняють обмеженням (6.29). Сумарні витрати ресурсів $\boldsymbol{Z(\overline{\tau})}$ = 7,5 од. при заданих обмеженнях будуть мінімальними.

На закінчення зазначимо, що до задачі лінійного програмування можна звести задачу оптимізації сіткового графіка і в тому випадку, якщо його критичний шлях змінюється. Розмірність задачі при цьому суттєво збільшується, що спричиняє певні труднощі при її розв´язанні навіть з використанням комп'ютерів.

Тому при оптимізації сіткового графіка за критерієм витрати ресурсів застосовувати змінену топологію графіка необхідно тільки в тому випадку, якщо вже використано всі можливості пошуку оптимального розв'язку без змінення критичного шляху.

6.2. Оптимізація сіткового графіка за критерієм економії ресурсів

Якщо директивний термін $\boldsymbol{t_д}$ витребування перевищує час виконання комплексу робіт $\boldsymbol{t_{кр}}$ $\boldsymbol{(t_д > t_{кр})}$, то необхідно збільшити тривалість виконання критичних робіт, вивільнивши при цьому ресурси, наприклад техніку, прилади, фахівців, заощадивши витратний матеріал. Постає запитання: *з яких робіт і в якій кількості можна вивільнити ресурси, щоб час виконання комплексу не перевищував заданого часу й при цьому вивільнялася б сумарна кількість ресурсів*.

Задача є двоїстою відносно розглянутої раніше задачі в підрозд. 6.1, у якій вирішувалося, як зменшити час виконання комплексу робіт з використанням додаткових ресурсів. Розглядувана ж задача є задачею збільшення часу виконання комплексу робіт з вивільненням (заощадженням) ресурсів.

Обмеженнями в розглядуваній задачі можуть бути максимально допустимий час виконання того чи іншого завдання, а також максимальна кількість вивільнених ресурсів (на відміну від (6.18) і (6.2)). Водночас обмеження вигляду (6.6) є формально однаковим для задач обох типів.

У загальному випадку задача оптимізації за критерієм економії ресурсів також є задачею нелінійного програмування. Обмежимося розглядом лише лінійних її моделей, оскільки багато практичних задач можна описати подібними моделями.

Час виконання роботи α_{ij} позначимо через t_{ij}. Якщо при виконанні роботи α_{ij} вивільнити ресурси в розмірі x_{ij} од., то тривалість роботи збільшиться до

$$t_{ij}^* = t_{ij}(1 + b_{ij}x_{ij}), \tag{6.31}$$

де b_{ij} – коефіцієнт, що відображає, наскільки збільшиться тривалість роботи α_{ij}, якщо при її виконанні не використовувати одну одиницю ресурсу. Новий термін виконання комплексу робіт

$$t_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} t_{ij}' = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} t_{ij}\,(1 + b_{ij}x_{ij})$$

не повинен перевищувати директивного терміну, тобто

$$t_{ij}\left(1 + b_{ij}x_{ij}\right) \le t_{\text{д}}. \tag{6.32}$$

На тривалість критичних робіт накладаються обмеження

$$t_{ij\text{кр}}^* \le T_{ij}, \tag{6.33}$$

де T_{ij} – максимально допустимий час виконання роботи α_{ij}.

Загальну кількість вивільнених ресурсів визначають за виразом

$$\mathcal{E}(\overline{x}) = \sum_{\alpha_{ij_{\text{кр}}} \in L_{\text{кр}}} x_{ij}. \tag{3.34}$$

Тепер задача оптимізації сіткового графіка за критерієм економії ресурсів полягає в тому, щоб знайти такі невід'ємні значення змінних x_{ij}, які задовольняли б обмеженням (6.32) і (6.33) і перетворювали на мінімум цільову функцію $\mathcal{E}(\overline{x})$. Ця задача належить до задач лінійного програмування.

Приклад 6.5. Нехай комплекс робіт задано сітковим графіком, зображеним на рис. 6.3. Директивний термін виконання комплексу робіт $t_д$ = 10 год. Залежність часу виконання роботи від кількості вивільнених ресурсів визначається виразом (6.31), де b_{ij} для критичних робіт набуває таких значень: b_{03} = 0,083, b_{35} = 0,1, b_{56} = 0,2, b_{67} = 0,1. Час виконання робіт α_{ij} не повинен перевищувати T_{03} = 4 год, T_{35} = 2,5 год, T_{56} = 2,5 год, T_{67} = 1,5 год.

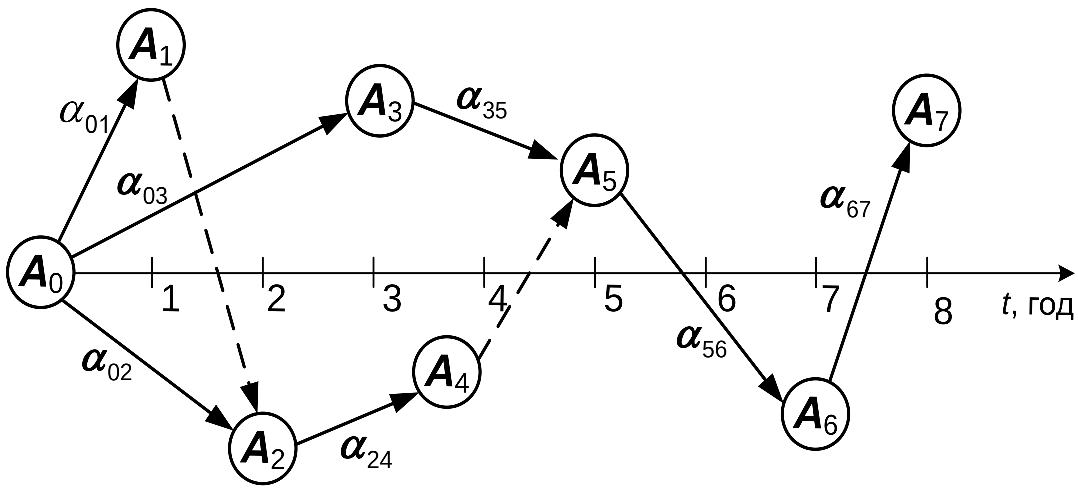

Рис. 6.3

Необхідно визначити, з яких робіт і в якій кількості можна вивільнити ресурси, щоб виконати комплекс робіт у заданий термін і забезпечити максимальну економію ресурсів.

При вивільненні ресурсів час виконання критичних робіт буде таким:

$$\boldsymbol{t}^*_{\mathbf{03}} = 3\cdot(1 + 0{,}083\boldsymbol{x}_{03});$$
$$\boldsymbol{t}^*_{\mathbf{35}} = 2\cdot(1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{35});$$
$$\boldsymbol{t}^*_{\mathbf{56}} = 2\cdot(1 + 0{,}2\boldsymbol{x}_{56});$$
$$\boldsymbol{t}^*_{\mathbf{67}} = 1\cdot(1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67}).$$

Новий час виконання комплексу робіт

$$\boldsymbol{t}^*_{\text{кр}} = \boldsymbol{t}^*_{\mathbf{03}} + \boldsymbol{t}^*_{\mathbf{35}} + \boldsymbol{t}^*_{\mathbf{56}} + \boldsymbol{t}^*_{\mathbf{67}} = \mathbf{8 + 0{,}25}\boldsymbol{x}_{03} + 0{,}2\boldsymbol{x}_{35} + 0{,}4\boldsymbol{x}_{56} + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67}.$$

За умовою задачі цей час не повинен перевищувати $\boldsymbol{t}_{\partial} = 10$ год, тобто

$$8 + 0{,}25\boldsymbol{x}_{03} + 0{,}2\boldsymbol{x}_{35} + 0{,}4\boldsymbol{x}_{56} + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67} \le 10. \qquad (6.35)$$

На тривалість критичних робіт накладаються такі обмеження:

$$\begin{aligned} 3(1 + 0{,}083\boldsymbol{x}_{03}) &\le 4; \\ 2(1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{35}) &\le 2{,}5; \\ 2(1 + 0{,}2\boldsymbol{x}_{56}) &\le 2{,}5; \\ 1(1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67}) &\le 1{,}5. \end{aligned} \qquad (6.36)$$

Сумарна економія ресурсів

$$\mathcal{E}(\overline{x}) = x_{03} + x_{35} + x_{56} + x_{67}. \qquad (6.37)$$

Необхідно знайти такі невід'ємні значення змінних x_{03}, x_{35}, x_{56}, x_{67}, які задовольняють обмеженням (6.35, 6.36) і перетворюють на мінімум цільову функцію (6.37).

Ця задача є задачею лінійного програмування. Для її розв'язання перейдемо до основної задачі лінійного програмування й уведемо додаткові змінні y_1, y_2, y_3, y_4, y_5:

$$0{,}25x_{03} + 0{,}2x_{35} + 0{,}4x_{56} + 0{,}1x_{67} + y_1 = 2;$$
$$3 + 0{,}25x_{03} + y_2 = 4;$$
$$2 + 0{,}2x_{35} + y_3 = 2{,}5;$$
$$2 + 0{,}4x_{56} + y_4 = 2{,}5;$$
$$1 + 0{,}1x_{67} + y_5 = 1{,}5.$$

Замінимо пошук максимуму функції (6.37) пошуком її мінімуму:

$$\mathcal{E}'(\overline{x}) = -x_{03} - x_{35} - x_{56} - x_{67}.$$

Як вільні змінні виберемо x_{03}, x_{35}, x_{56} та x_{67}. Тоді базисні змінні й цільова функція набудуть такого вигляду:

$$y_1 = 2 - (0{,}25x_{03} + 0{,}2x_{35} + 0{,}4x_{56} + 0{,}1x_{67});$$
$$y_2 = 1 - (0{,}25x_{03});$$
$$y_3 = 0{,}5 - (0{,}2x_{35});$$
$$y_4 = 0{,}5 - (0{,}4x_{56});$$
$$y_5 = 0{,}5 - (0{,}1x_{67});$$

$$\mathcal{E}'(\overline{x}) = 0 - (x_{03} + x_{35} + x_{56} + x_{67}).$$

Розв´язок цієї задачі подамо послідовністю симплекс-таблиць 6.13−6.16.

Таблиця 6.13

БЗ	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	x_{56}	$\overleftarrow{x_{67}}$
$\mathcal{E}'(\overline{x})$	0	1	1	1	1
y_1	2	0,25	0,2	0,4	0,1
y_2	1	0,25	0	0	0
y_3	0	0,25	0	0	0
y_4	0,5	0	0	0,4	0
$\uparrow y_5$	0,5	0	0	0	$\boxed{0,1}$

Таблиця 6.14

БЗ	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	$\overleftarrow{x_{35}}$	x_{56}	y_5
$\mathcal{E}'(\overline{x})$	−5	1	1	1	−10
y_1	1,5	0,25	0,2	0,4	−1
y_2	1	0,25	0	0	0
$\uparrow y_3$	0,5	0	$\boxed{0,2}$	0	0
y_4	0,5	0	0	0,4	0
x_{67}	5	0	0	0	10

Таблиця 6.15

БЗ	Вільні змінні				
	ВЧ	$\overleftarrow{x_{03}}$	$\uparrow y_3$	x_{56}	y_5
$\mathcal{E}'(\overline{x})$	−7,5	1	−5	1	−10
$\uparrow y_1$	1	$\boxed{0,25}$	−1	0,4	−1
y_2	1	0,25	0	0	0
x_{35}	2,5	0	5	0	0
y_4	0,5	0	0	0,4	0
x_{67}	5	0	0	0	10

Таблиця 6.16

БЗ	Вільні змінні				
	ВЧ	y_1	x_{35}	x_{56}	y_5
$\mathcal{E}'(\overline{x})$	−11,5	−4	−1	−0,75	−6
x_{03}	4	4	−4	1,6	−4
y_2	0	−1	1	−1,6	1
x_{35}	2,5	0	5	0	0
y_4	0,5	0	0	0,4	0
x_{67}	5	0	0	0	10

Оптимальним є такий розв´язок:

$$x_{03}^* = 4;\ x_{35}^* = 2,5;\ x_{56}^* = 0;\ x_{67}^* = 5.$$

Таким чином, якщо при виконанні роботи α_{03} вивільнити 4 од. ресурсів, при виконанні роботи α_{35} − 2,5 од., при виконанні роботи α_{67} – 5 од., то весь комплекс робіт можна виконати за час

$$t_{\text{кр}}^* = t_{03}^* + t_{35}^* + t_{56}^* + t_{67}^* = 8 + 0,25 \cdot 4 + 0,2 \cdot 2,5 + 0,4 \cdot 0 + 0,1 \cdot 5 = 10 \text{ год},$$

що не перевищує директивний термін. При цьому відповідно до (6.37) економія ресурсів

$$\boldsymbol{\mathcal{E}(\overline{x})} = 4 + 2{,}5 + 5 = 11{,}5 \text{ од.}$$

Можлива й інша постановка задачі оптимізації сіткового графіка за критерієм економії ресурсів. Її основою є те, що при збільшенні тривалості роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ на одиницю часу (наприклад, на одну годину) можна вивільнити деяку кількість ресурсів, яку позначимо через $\boldsymbol{q_{ij}}$. Якщо збільшити тривалість роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ на проміжок часу $\boldsymbol{\tau_{ij}}$, тобто

$$\boldsymbol{t_{ij}^{*}} = \boldsymbol{t_{ij}} + \boldsymbol{\tau_{ij}}, \tag{6.38}$$

то економія ресурсів

$$\boldsymbol{v_{ij}} = \boldsymbol{q_{ij}}\,\boldsymbol{\tau_{ij}}. \tag{6.39}$$

Задача полягає в такому: визначити, на який проміжок часу можна збільшити кожну з критичних робіт, щоб час виконання комплексу не перевищував заданий при максимальній економії сумарних ресурсів.

З урахуванням (6.33) при збільшенні тривалості робіт загальний час виконання комплексу

$$\boldsymbol{t}_{\text{кр}}^{*} = \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ij}} \in \boldsymbol{L}_{\text{кр}}} \boldsymbol{t_{ij}^{*}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ij}} \in \boldsymbol{L}_{\text{кр}}} (\boldsymbol{t_{ij}} + \boldsymbol{\tau_{ij}}) = \boldsymbol{t}_{\text{кр}} + \\ + \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ij}} \in \boldsymbol{L}_{\text{кр}}} \boldsymbol{\tau_{ij}}. \tag{6.40}$$

За умовою задачі цей час не повинен перевищувати директивний термін $\boldsymbol{t}_{\text{д}}$:

$$\boldsymbol{t}_{\text{кр}} + \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ij}} \in \boldsymbol{L}_{\text{кр}}} \boldsymbol{\tau_{ij}} \le \boldsymbol{t}_{\text{д}}. \tag{6.41}$$

Тривалість кожної роботи можна збільшувати безмежно, але доцільно ставити вимогу, щоб час її виконання не перевищував деякої заданої величини $\boldsymbol{T_{ij}}$, тобто

$$\boldsymbol{t_{ij}^{*}} = \boldsymbol{t_{ij}} + \boldsymbol{\tau_{ij}} \le \boldsymbol{T_{ij}}. \tag{6.42}$$

З іншого боку, економія ресурсів має бути не меншою від величини h_{ij}:

$$v_{ij} = q_{ij}\,\tau_{ij} \geq h_{ij}. \tag{6.43}$$

Сумарна економія ресурсів визначиться виразом

$$v(\overline{\tau}) = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} v_{ij} = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} q_{ij}\,\tau_{ij}. \tag{6.44}$$

Завдання тепер полягатиме в тому, щоб знайти такі невід'ємні значення змінних τ_{ij}, які задовольняли б обмеженням (6.41)–(6.43) і перетворювали на максимум цільову функцію (6.44). Неважко переконатися, що сформульована задача в певному сенсі є двоїстою задачею (6.23)–(6.26).

Задачі для самостійного розв'язання

1. Для реалізації одного циклу керування в мехатронній системі необхідно виконати комплекс операцій з такими часовими витратами:

– прийом апаратурою керувального органу інформації про стан від інших систем – 0,5 год;

– збір об'єктом керування інформації про свій стан – 0,2 год;

– увімкнення й перевірка апаратури на об'єкті керування – 0,1 год;

– передання на керувальний орган зібраної інформації про стан об'єкта керування – 0,1 год;

– аналіз прийнятої інформації, розв’язання управлінських завдань і прийняття рішення керувальним органом – 2 год;

– формування команди та її передання на об'єкт керування – 0,1 год;

– виконання прийнятої команди об'єктом керування – 0,1год.

Перші три операції виконують одночасно, послідовність інших визначають відповідно до їх змісту. Необхідно побудувати сітковий графік комплексу операцій з реалізації одного циклу керування й визначити його характеристики.

При проведенні кожної операції α_{ij} витрачається певна сума грошових коштів, Якщо в операцію α_{ij} додатково вкласти кошти на суму x_{ij} ум. од., то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - C_{ij}x_{ij})$, де C_{ij} – коефіцієнт.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, яку доцільно вкласти в операції α_{01} і α_{45}, щоб час циклу керування не перевищув 2 год, а додаткові кошти при виконанні операції α_{01} були не більшими за 1 ум. од., α_{45} – 2 ум. од. При цьому C_{01} = 0,2, C_{45} = 0,2.

2. Для підвищення ефективності мехатронної системи поставлено завдання модернізації її приймально-передавальної апаратури. Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, які потрібно вкласти для вирішення цього завдання, щоб час циклу керування зменшити не менш ніж на 0,2 год за таких умов: додаткові кошти, укладені в кожну операцію α_{ij}, що підлягає аналізу, були не більшими за 3 ум. од.:

$$t'_{ij} = t_{ij}(1 - C_{ij}x_{ij}), \text{ де } C_{ij} = 0{,}5.$$

3. Під час обміну інформацією між керувальним органом і об'єктом керування використовувалася приймально-передавальна апаратура з певною швидкістю передання. Якщо для виконання операції α_{ij} використовувати апаратуру з підвищеною на ΔV_{ij} ум. од. швидкістю передання, то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - \alpha_{ij}\Delta V_{ij})$. Визначити мінімально необхідну величину підвищення швидкості приймально-передавальної апаратури, щоб час циклу керування зменшити не менш ніж на 10 % за таких технічних обмежень: $\Delta V_{ij} \le 100$, $\alpha_{ij} = 0{,}01$. Перевірити, чи змінився критичний шлях. Якщо так, то побудувати новий сітковий графік.

4. Якщо при виконанні операцій $\{\alpha_{ij}\}$, наведених у задачі 1, додатково вкласти матеріальні ресурси в розмірі x_{ij} ум. од. в кожну операцію, то час їх виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$. Визначити мінімальну кількість необхідних ресурсів, які потрібно вкласти в комплекс операцій, щоб час циклу керування зменшити хоча б на 1 год при тому ж самому критичному шляху і $x_{ij} \le 5$, $c_{ij} = 0{,}1$ для всіх номерів робіт. При виконанні кожної операції α_{ij} витрачається певна сума x_{ij} грошових коштів. Якщо в операцію α_{ij} додатково вкласти кошти, то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - C_{ij}x_{ij})$, де C_{ij} – коефіцієнт. Визначити мінімальну суму додаткових коштів, яку доцільно вкласти в операції α_{01} і α_{45}, щоб час циклу керування не перевищував 2 год, а додаткові кошти при виконанні операції α_{01} були не більшими за 1 ум. од., α_{45} – 2 ум. од. При цьому $C_{01} = 0{,}4$, $C_{45} = 0{,}4$.

5. Для підвищення ефективності мехатронної системи поставлено завдання модернізації її приймально-передавальної апаратури. Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, яку потрібно вкласти для вирішення цього завдання, щоб час циклу керування зменшити не менш

ніж на 0,2 год за таких умов: додаткові кошти, укладені в кожну з операцій α_{ij}, що підлягають аналізу, були б не більшими за 3 ум.од.

$$t'_{ij} = t_{ij}(1 - C_{ij}x_{ij}), \quad C_{ij} = 0{,}25.$$

6. Під час обміну інформацією між керувальним органом і об'єктом керування використовувалася приймально-передавальна апаратура з певною швидкістю передання. Якщо під час проведення операції α_{ij} використовувати апаратуру з підвищеною на ΔV_{ij} ум. од. швидкістю передання, то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}\Delta V_{ij})$. Визначити мінімально необхідну величину підвищення швидкості роботи приймально-передавальної апаратури, щоб час циклу керування зменшити не менш ніж на 10 % за таких технічних обмежень: $\Delta V_{ij} \le 100$, $c_{ij} = 0{,}001$. Перевірити, чи змінився критичний шлях. Якщо так, то побудувати новий сітковий графік.

7. Директивний термін виконання комплексу робіт, заданих сітковим графіком (рис. 6.3), становить 12 год. При збільшенні часу виконання критичних робіт на 1 год звільнюються ресурси в розмірі q_{03} = 2,5 од., q_{35} = 2 од., q_{56} = 1 од. q_{67} = 2 од. Час виконання робіт не повинен перевищувати таких значень: T_{05} = 4 год, T_{35} = 4 год, T_{56} = 3 год., T_{67} = 2 год, а економія ресурсів має бути не меншою від таких значень: h_{03} = 2 од., h_{35} = 1 од., h_{56} = 2 од., h_{67} = 2 од. На скільки можна збільшити час виконання критичних робіт, щоб час виконання комплексу не перевищував 10 год, а обсяг заощаджених ресурсів був максимальним?

8. Для реалізації одного циклу керування в мехатронній системі необхідно виконати комплекс операцій з такими часовими витратами:

– прийом апаратурою керувального органу інформації про стан від інших истем – 0,75 год;

– збір об'єктом керування інформації про свій стан – 0,25 год;

– увімкнення й перевірка апаратури на об'єкті керування – 0,15 год;

– передання на керувальний орган зібраної інформації про стан об'єкта керування – 0,15 год.;

– аналіз прийнятої інформації, розв'язання ння управлінських завдань і прийняття рішення керувальним органом – 2,5 год;

– формування команди та її передання на об'єкт керування – 0,2 год;

– виконання прийнятої команди об'єктом керування – 0,2 год.

Перші три операції виконують одночасно, послідовність інших визначають відповідно до їх змісту. Необхідно побудувати сітковий графік комплексу операцій з реаліції одного циклу керування й визначати його характеристики.

При проведенні кожної операції α_{ij}, зазначеної в завданні, витрачається певна сума грошових коштів. Якщо в операцію α_{ij} додатково вкласти кошти на суму x_{ij} ум. од., то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - C_{ij}x_{ij})$, де C_{ij} – коефіцієнт.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, яку доцільно вкласти в операції α_{01} і α_{45}, щоб час циклу керування не перевищув 3 год, а додаткові кошти при виконанні операції α_{01} були не більшими за 1,5 ум. од., α_{45} – 2 ум. од. При цьому C_{01} = 0,25, C_{45} = 0,28.

9. Директивний термін виконання комплексу робіт, заданих сітковим графіком (рис. 6.3), становить 13 год. При збільшенні часу виконання критичних робіт на 1 год звільнюються ресурси в розмірі q_{03} = 2,5 од., q_{35} = 2 од., q_{56} = 1,5 од., q_{67} = 1 од. Час виконання робіт не повинен перевищувати таких значень: T_{03} = 4 год, T_{35} = 2 год, T_{56} = 3 год, T_{67} = 3 год, а економія ресурсів має бути не меншою від таких значень: h_{03} = 2 од., h_{35} = 2 од., h_{56} = 1 од., h_{67} = 3 од. На скільки можна збільшити час виконання критичних робіт, щоб час виконання комплексу не перевищував 9 год, а обсяг заощаджених ресурсів був максимальним?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища шк., 1995. – 319 с.
2. Медиченко, М. П. Методы оптимального планирования и управления / М. П. Медиченко. – М. : МО СССР, 1986. – 192 с.
3. Дедков, В. К. Основные вопросы эксплуатации сложных систем / В. К. Дедков, Н. А. Северцев. — М. : Высш. шк., 1976. − 405 с.
4. Поспелов, Г. С. Программно-целевое планирование и управление / Г. С. Поспелов, В. Л. Ириков. – М. : Сов. радио, 1976. – 440 с.
5. Калинин, В. Н. Теория систем и управления / В. Н. Калинин, Б. А. Резников. – Л. : ВИКИ им. Можайского, 1978. – 417 с.
6. Крайзмер, Л. П. Кибернетика / Л. П. Крайзмер. – М. : Экономика, 1977. – 279 с.
7. Денисов, Л. А. Теория больших систем управления / Л. А. Денисов, Д. Н. Колесников. – Л. : Энергоиздат, 1992. – 287 с.
8. Бир, Ст. Кибернетика и управление производством : пер. с англ. / Ст. Бир. – М. : Наука, 1985. – 391 с.
9. Бусленко, Н. П. Лекции по теории сложных систем / Н. П. Бусленко и др. – М. : Радио и связь, 1993. – 439 с.
10. Снапелев, Ю. М. Моделирование и управление в сложных системах / Ю. М. Снапелев, В. А. Старосельских. – М. : Сов. радио, 1984. – 264 с.
11. Городецкий, В. И. Математическое программирование и массовое обслуживание / В. И. Городецкий, Ю. И. Рыжиков. – Л. : ВИКИ им. Можайского, 1985. – 182 с.
12. Синяк, В. А. Электронная автоматика в военном деле / В. А. Синяк. – М. : Радио и связь. – 1989. – 42 с.
13. Машинные методы оптимизации в технике связи / Р. Н. Пашкеев и др. – М. : Связь, 1986. – 272 с.
14. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М. : Сов. радио, 1982. – 552 с.
15. Дегтярев, Ю. Л. Методы оптимизации / Ю. Л. Дегтярев. – М. : Радио и связь, 1990. – 270 с.
16. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1986. – 352 с.
17. Монахов, В. М. Методы оптимизации / В. М. Монахов. – М. : Просвещение, 1988. – 176 с.
18. Ермольев, Ю. М. Математические методы исследования операций / Ю. М. Ермольев. – Киев : Вища шк., 1999. – 308 с.
19. Благодарний, М. П. Сучасні методи управління та оптимізації / М. П. Благодарний, Ю. В. Білоконська. – Харків : ХАІ, 2018. – 128 с.
20. Антонов, А. В. Системный анализ : учеб. для студентов вузов /

А. В. Антонов, В. М. Колодяжный. – М. : Высш. шк., 2008. – 454 с.
21. Кулян, В. Р. Математическое программирование с элементами информационной технологи : учеб. пособие для студентов нематемат. специальностей вузов / В. Р. Кулян, Е. А. Юнишева, А. Б. Жильцов. – Киев : МАУП, 2000. – 124 с.
22. Колодяжный, В. М. Математическое программирование и элементы теории исследования операций / В. М. Колодяжный. – Харьков : ХАИ, 2001. – 230 с.
23. Сирота, А. А. Компьютерные модели и оценка эффективности сложных систем : учеб. пособие для студентов вузов / А. А. Сирота. – М. : Техносфера, 2006. – 280 с.
24. Благодарний, М. П. Спеціальні питання сучасного керування та оптимізації [Текст] : навч. посіб. для самост. роботи студентів. У 3 ч. Ч. 1. Методи обґрунтування управлінських рішень в умовах повної інформації / М. П. Благодарний. – Харків : ХАІ, 2019. – 176 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Благодарний Микола Петрович

ОДНОКРОКОВІ ТА БАГАТОКРОКОВІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ

Редактор О. Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2020
Підписано до друку 30.04.2020
Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 7,6. Обл.-вид. арк. 8,5. Наклад 50 пр.
Замовлення 108. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001