МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

М. П. Благодарний

СПЕЦІАЛЬНІ ПИТАННЯ СУЧАСНОГО КЕРУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Частина 2

ІГРОВІ МЕТОДИ ОБҐРУНТУВАННЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

Навчальний посібник для самостійної роботи студентів

Харків «ХАІ» 2021

УДК [658.012,123:517.977.14+519.83](075.4)
Б68

Рецензенти: д-р техн. наук Ю. В. Паржин,
канд.техн. наук, доц. О. В. Сєвєрінов

Благодарний, М. П.
Б68 Спеціальні питання сучасного керування та оптимізації [Текст] : навч. посіб. для самост. роботи студентів. В 3 ч. Ч. 2. Ігрові методи обґрунтування управлінських рішень / М. П. Благодарний. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2021. – 176 с.

ISBN 978-966-662-813-1

Викладено загальні принципи керування системами в умовах протидії та невизначеності. Детально розглянуто одно- і багатокрокові матричні й статистичні ігри та методи їх розв´язання. Наведено приклади конфліктних ситуацій, які описуються матричними й статистичними іграми, обґрунтовано вибір оптимальних стратегій для конкретних випадків. Подано геометричне трактування розглянутих теоретичних положень. Результати розв´язання задач обговорено на змістовному рівні.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» (спеціалізація «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси та виробництва»).

Іл. 15. Табл. 79. Бібліогр.: 20 назв

УДК [658.012,123:517.977.14+519.83](075.4)

ISBN 978-966-662-813-1

ПЕРЕДМОВА

Сьогодні керування складними організаційно-технічними системами зазвичай здійснюється в умовах гострого дефіциту інформації про обстановку, у якій проводиться операція. Це є характерним насамперед для систем критичного призначення, які взаємодіють з іншими системами в стані конфлікту [1, 8]. При цьому брак інформації може бути зумовлено свідомою протидією інших систем.

Природно, що методи обґрунтовування рішень в цих умовах істотно відрізняються від раніше разглянутих [8]. З огляду на поширення конфліктних ситуацій під час організації діяльності в багатьох сферах сучасного життя знання й володіння цими методами є необхідними для фахівців в області автоматизації керування.

При викладенні матеріалу автор прагнув уникнути застосування громіздкого математичного апарату, максимально використовуючи геометричне трактування теоретичних положень. Можливості практичного застосування методів ілюструються різними прикладами з галузі професійної діяльності.

У запропонованому навчальному посібнику розглянуто ігрові методи обґрунтування рішень в умовах протидії. Серед багатьох моделей конфліктних ситуацій, що трапляються на практиці, основну увагу приділено однокроковим матричним, статистичним і багатокроковим коаліційним іграм.

1. ОПТИМІЗАЦІЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

1.1. Ефективність виконання операцій в умовах невизначеності

У першій частині посібника було розглянуто найпростіші, повністю детерміновані випадки, коли всі умови операції $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$, ..., $\boldsymbol{a_n}$ є відомими, і будь-який вибір розв'язку $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, ..., $\boldsymbol{x_m}$ приводить до певного значення показника ефективності $\boldsymbol{L(\overline{x})}$. Однак цей найпростіший випадок не так вже й часто трапляється на практиці. Набільш типовим є випадок, коли не всі умови, у яких буде проводитися операція, є відомими заздалегідь, а деякі з них містять елементи протидії або невизначеності. Наприклад, успіх операції може залежати від метеорологічних умов, які заздалегідь є невідомими, або від коливань попиту і пропозиції, які заздалегідь важко передбачити, пов'язаних з мінливістю моди, або ж від поведінки розумного супротивника, дії якого є заздалегідь невідомими.

У подібних випадках ефективність операції залежить вже не від двох, а від трьох категорій факторів:

– умов виконання операції $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, які є відомими напередодні і змінити їх не можна;

– умов або факторів $\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \ldots, \boldsymbol{Y_l}$, що є невідомими;

– елементів розв'язку $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_m}$, які необхідно буде вибрати.

Нехай ефективність операції характеризується деяким показником ***W***, що залежить від усіх трьох груп факторів. Запишемо це у вигляді загальної формули [3]:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}\,(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}; \boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \ldots, \boldsymbol{Y_l}; \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_m}\,). \qquad (1.1)$$

Якби умови $\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \ldots, \boldsymbol{Y_l}$ були відомими, то можна було б заздалегідь підрахувати показник ***W*** і вибрати такі розв'язки $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_m}$, при яких він був би максимальним. Однак параметри $\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \ldots, \boldsymbol{Y_l}$ є невідомими, а отже, невідомою є й залежність від них показника ефективності ***W*** при будь-якому розв'язку. Проте постає завдання пошуку розв'язку. Його можна сформулювати так: при заданих умовах $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ з урахуванням невідомих чинників $\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \ldots, \boldsymbol{Y_l}$ знайти такі елементи розв'язку $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_m}$, які б могли перетворювати на максимум показник ефективності ***W***. Це – не чисто математичне завдання (недарма в його формулюванні зроблено застереження «про можливість»).

Наявність невідомих факторів Y_1, Y_2, ..., Y_l переводить цю задачу в іншу категорію: вона перетворюється на задачу вибору розв'язку в умовах невизначеності. Якщо умови виконання операції є невідомими, то немає можливості так само успішно організувати її, як це було би зроблено, якби було більше інформації.

Тому будь-яке рішення, прийняте в умовах невизначеності, є гіршим за рішення, прийняте в цілком певній ситуації. Справа дослідника – надати своїм рішенням якомога більше ознак розумності. Рішення, прийняте в умовах невизначеності, але на основі математичних розрахунків, буде все ж кращим за рішення, вибране навмання.

Завдання про вибір рішення в умовах невизначеності трапляються в житті дуже часто. Нехай, наприклад, комусь необхідно їхати у відрядження, взявши із собою валізу, яка має обмежений обсяг, причому її вага не повинна перевищувати тієї, при якій не потребується стороння допомога (умови α_1, α_2, …, α_n). Погода в місці відрядження заздалегідь є невідомою (умови Y_1, Y_2, ..., Y_l). Необхідно визначити, які речі (x_1, x_2, ..., x_m) слід взяти із собою.

Це завдання, зрозуміло, можна розв'язати без усякого математичного апарату, хоча, мабуть, доведеться застосувати якісь числові дані (хоча б щодо ймовірності морозної або дощової погоди в районі відрядження певної пори року). Однак якщо потрібно прийняти більш серйозне і відповідальне рішення (наприклад, щодо характеристик проектованої греблі в районі можливих паводків або вибору типу посадкового пристрою для посадки на планету з невідомими властивостями поверхні або зразка озброєння для боротьби з противником, характеристики якого заздалегідь є невідомими), то для вибору рішення в обов'язковому порядку слід провести математичні розрахунки, що полегшать цей вибір і нададуть йому доступною мірою ознак розумності.

Застосовувані при цьому методи істотно залежать від того, якою є природа невідомих факторів Y_1, Y_2, ..., Y_l і які орієнтовні відомості про них є. Найбільш простим і сприятливим для розрахунків є випадок, коли невідомі фактори Y_1, Y_2, ..., Y_l є випадковими величинами (або ж випадковими функціями), про які є статистичні дані, що характеризують їх розподіл.

Розглянемо, наприклад, роботу залізничної станції, прагнучи оптимізувати процес обслуговування вантажних поїздів. Заздалегідь не відомо точні моменти прибуття поїздів, кількість вагонів у кожному поїзді, станції призначення вантажів, до яких прямують вагони. Усі ці характеристики є випадковими величинами, закон розподілу кожної з яких (і їх сукупності) можна визначити за наявними даними шляхом використання методів математичної статистики.

Аналогічно, наприклад, у кожній військовій операції є випадкові чинники, пов'язані з розсіюванням снарядів, випадковістю моментів виявлення цілей і т. ін. Узагалі усі ці фактори можна визначити методами теорії ймовірностей, і для них отримати закони розподілу (або принаймі числові характеристики).

У разі, коли невідомі фактори, які фігурують в операції ($\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$), є звичайними випадковими величинами (або випадковими функціями), розподіл яких, хоча б орієнтовно, є відомим, для оптимізації розв'язання можна застосувати один з двох прийомів [8]:

– штучне зведення до детермінованої схеми;

– оптимізація за середнім.

Перший прийом зводиться до того, що невизначена імовірнісна картина явища наближено замінюється детермінованою. Для цього всі задані випадкові чинники $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ наближено замінюються невипадковими (зазвичай їх математичними сподіваннями). Цей прийом застосовується переважно в грубих, орієнтовних розрахунках, коли діапазон випадкових змін величин $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ є порівняно малим, тобто їх без великої помилки можна розглядати як невипадкові.

Прийом заміни випадкових величин їх математичними сподіваннями можна успішно застосовуватися й у випадках, коли величини $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ мають більший розкид, але показник ефективності ***W*** залежить від них лінійно (або майже лінійно) [3].

Другий прийом («оптимізація в середньому») є більш складним. Його застосовують, коли випадковість величин $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ є досить істотною і заміна кожної з них її математичним очікуванням може призвести до великих помилок. Розглянемо цей випадок більш детально. Нехай показник ефективності ***W*** істотно залежить від чинників (будемо для простоти вважати їх випадковими величинами) $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$. Припустимо, що нам відомо розподіл цих факторів, скажімо, щільність розподілу $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, ..., y_l)$. Операція при цьому виконується багато разів, причому умови $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ змінюються кожного разу випадковим чином. Який розв'язок $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, ..., $\boldsymbol{x_m}$ слід вибрати? Очевидно, такий, при якому операція в середньому буде найбільш ефективною, тобто математичне сподівання показника ***W*** буде максимальним. Таким чином, потрібно вибирати такий розвязок $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, ..., $\boldsymbol{x_m}$, при якому набуває максимуму математичне очікування показника ефективності (так звана «оптимізація в середньому» [3]:

$$\overline{\boldsymbol{W}} = \iiint \boldsymbol{W}\ (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_k};\ \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_l};\ \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_m}\ ) \times$$

$$\times\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2},\ \dots, \boldsymbol{y_l}) \boldsymbol{dy_1} \boldsymbol{dy_2} \dots\ \boldsymbol{dy_l}. \tag{1.2}$$

Елемент невизначеності якоюсь мірою зберігається. Успішність кожної окремої операції, що здійснюється при випадкових, заздалегідь невідомих значеннях $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ може бути як набагато більшою, так, на жаль, і меншою від очікуваної середньої. При багаторазовому здійсненні операції ці відмінності в середньому згладжуються. Однак часто цей спосіб оптимізації розв'язку за відсутності кращого застосовується і тоді, коли операція здійснюється лише кілька разів або навіть один раз. Тоді треба зважати на можливість неприємних несподіванок у кожному окремому випадку. Оптимізація в середньому все ж краще, ніж вибір рішення без всяких обґрунтувань. Застосовуючи цей прийом до численних (хоча б і різних) операцій, все ж можна в середньому виграти більше, ніж якщо зовсім не користуватися розрахунками.

Для того щоб скласти уявлення про те, чим доведеться ризикувати в кожному окремому випадку, бажано, окрім математичного сподівання показника ефективності оцінювати також і його дисперсію (або середньоквадратичне відхилення).

Найбільш важкими для дослідження є випадки невизначеності, коли невідомі фактори $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ не можуть бути вивченими й описаними з допомогою статистичних методів: закони їх розподілу або не можна отримати (відповідних статистичних даних немає), або, що є ще гіршим, таких законів розподілу зовсім не існує.

Це буває, коли явище, про яке йдеться, не має властивості статистичної стійкості. Наприклад, усі знають, що на Марсі можливе органічне життя, і деякі вчені навіть уважають його досить імовірним, але абсолютно неможливо підрахувати цю ймовірність на основі будь-яких статистичних даних. Інший приклад: припустимо, що ефективність розроблюваного озброєння сильно залежить від того, чи буде мати передбачуваний противник до моменту початку бойових дій у своєму розпорядженні засоби захисту, і якщо так, то які саме.

Очевидно, немає ніякої можливості підрахувати ймовірності цих гіпотез, їх можна щонайбільше вибрати довільно, що сильно зашкодить об'єктивності дослідження. У подібних випадках замість довільного й суб'єктивного значення ймовірностей з подальшою оптимізацією в середньому доцільно розглянути весь діапазон можливих умов $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ і скласти уявлення про те, якою є ефективність операції в цьому діапазоні і як на неї впливають невідомі умови. При цьому завдання дослідження операцій набуває нових методологічних особливостей.

Розглянемо випадок, коли ефективність операції **W** залежить окрім заданих умов $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ і елементів розв'язків $\boldsymbol{x_1, x_2}$, ..., $\boldsymbol{x_m}$ ще й від кількох невідомих чинників $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, ..., $\boldsymbol{Y_l}$ нестатистичної природи, стосовно яких ніяких певних відомостей немає, а можна робити тільки припущення. Спробуємо все ж розв'язати задачу.

Зафіксуємо параметри Y_1, Y_2, ..., Y_l, надамо їм певних значень $Y_1 = y_1$, $Y_2 = y_2$, ..., $Y_l = y_l$ і переведемо їх тим самим до категорії заданих умов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Для цих умов можна розв'язати завдання дослідження операцій і знайти відповідний оптимальний розв'язок $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Його елементи окрім заданих умов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, вочевидь, будуть залежати ще й від того, які конкретні значення було надано умовам Y_1, Y_2, ..., Y_l:

$$x_1 = x_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; y_1, y_2, \ldots, y_l);$$

$$x_2 = x_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; y_1, y_2, \ldots, y_l).$$

Розв'язок, оптимальний для цієї сукупності умов $y_1, y_2, \ldots, y_l$ (і тільки для неї), називають локально-оптимальним, при цьому він уже не є оптимальним для інших значень Y_1, Y_2, ..., Y_l. Сукупність локально-оптимальних розв'язків для діапазону умов Y_1, Y_2, ..., Y_l дає уявлення про те, як необхідно було б діяти, якби невідомі умови Y_1, Y_2, ..., Y_l були точно відомими. Тому локально-оптимальний розв'язок, на отримання якого часто витрачається багато зусиль, має в разі невизначеності суто обмежену цінність. Цілком очевидно, що в цьому випадку слід віддати перевагу не строго оптимальному розв'язку для якихось певних умов, а компромісному, який, не будучи, можливо, строго оптимальним для жодних умов, виявляється цілком прийнятним для багатьох умов.

Сьогодні повноцінної математичної «теорії компромісу» ще не існує, хоча в теорії розв'язань і є деякі спроби в цьому напрямку. Зазвичай остаточний вибір компромісного рішення здійснює людина, яка, спираючись на розрахунки, може оцінити й зіставити сильні та слабкі сторони кожного варіанта рішення в різних умовах і на основі цього зробити остаточний вибір. При цьому необов'язково (хоча іноді й цікаво) знати точний локальний оптимум для кожної сукупності умов $y_1, y_2, \ldots, y_l$.

Розглянемо випадок, що має місце в так званих конфліктних ситуаціях. Тут невідомі параметри Y_1, Y_2, ..., Y_l залежать не від об'єктивних обставин, а від супротивника, який активно нам протидіє. Такі ситуації є характерними для бойових дій, частково – для спортивних змагань, конкурентної боротьби і т. д.

При обґрунтуванні розв'язків у подібних випадках корисним є застосування математичного апарату теорії ігор – математичної теорії конфліктних ситуацій. Моделі конфліктних ситуацій, що вивчаються в теорії ігор, базуються на уявленні, що маємо справу з розумним і далекоглядним противником. Він завжди вибирає свою поведінку найгіршим для нас (і найкращим для себе) способом.

Така ідеалізація конфліктної ситуації в багатьох випадках може підказати найменш ризикований, «перестрахувальний» розв'язок, який не обов'язково приймати, але в усякому разі корисно мати на увазі.

Нарешті, зробимо одне загальне зауваження. При обгрунтуванні в розв'язку в умовах невизначеності, що б не було зроблено, елемент випадковості залишається. Тому нерозумно ставити вимоги до точності розв'язку занадто високими. Замість того, щоб після скрупульозних розрахунків однозначно вказати один-єдиний, точно оптимальний (у якомусь сенсі) розв'язок, завжди краще вибрати область прийнятних розв'язків, які виявляються несуттєво гіршими від інших, яка б точа зору не використовувалася. У межах цієї області відповідальні особи можуть зробити свій остаточний вибір.

1.2. Оцінювання ефективності операцій за кількома показниками

Вище розглядалася задача дослідження операцій, де потребувалося вибрати розв'язок так, щоб максимізувати (або мінімізувати) один показник ефективності $\boldsymbol{W}$. На практиці часто трапляються випадки, коли ефективність операції доводиться оцінювати не за одним, а відразу за кількома показниками: $\boldsymbol{W_1}, \boldsymbol{W_2}, \ldots, \boldsymbol{W_n}$. Одні з цих показників бажано зробити більшими, інші – меншими.

Зазвичай ефективність великих за обсягом і складних операцій не можна вичерпно охарактеризувати з використанням одного показника; додатково доводиться залучати й інші. Наприклад, під час оцінювання діяльності промислового підприємства необхідно враховувати кілька показників, а саме:

– прибуток;
– повний обсяг продукції («вал»);
– собівартість і т. д.

Під час аналізу бойової операції крім основного показника, який характеризує її ефективність (математичне сподівання заподіяної противнику шкоди тощо), доводиться враховувати і кілька додаткових, таких як власні втрати, час виконання операції, витрати боєприпасів і т. ін.

Така кількість показників ефективності, з яких деякі бажано максимізувати, а інші – мінімізувати є характерною для будь-якого більш-менш складного завдання дослідження операцій.

Постає питання: як же бути? Насамперед треба підкреслити, що поставлені вимоги є несумісними. Розв'язок, який перетворює на максимум один якийсь показник $\boldsymbol{W_1}$, зазвичай не перетворює ні на максимум, ні на мінімум інші показники $\boldsymbol{W_2}, \ldots, \boldsymbol{W_n}$.

Тому поширене формулювання «досягнення максимального ефекту при мінімальних витратах» для наукового дослідження не є придатними. Коректним є будь-яке з формулювань: «досягнення максимального ефекту при заданих витратах» або ж «досягнення заданого ефекту при мінімальних витратах».

У загальному випадку не існує розв'язку, який перетворював би на максимум один показник $\boldsymbol{W_1}$ і водночас на максимум (або мінімум) інший показник $\boldsymbol{W_2}$. Тим більше, такого розв'язку не існує для кількох показників. Однак кількісний аналіз ефективності може виявитися дуже корисним і у випадку, якщо є кілька показників ефективності.

Передусім цей аналіз дає змогу заздалегідь відкинути явно нераціональні варіанти розв'язків, які поступаються кращим варіантам за всіма показниками. Проілюструємо сказане на прикладі. Нехай під час аналізу бойова операція ***O*** оцінюється за двома показниками:

W – імовірність виконання бойового завдання («ефективність);

S – вартість витрачених коштів.

Очевидно, що перший показник бажано перетворити на максимум, а другий – на мінімум. Припустимо для простоти, що пропонується на вибір 15 різних варіантів розв’язків; позначимо їх через $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_{15}}$. Для кожного з них є відомими значення ***W*** і ***S***. Зобразимо для наочності кожен варіант розв'язку у вигляді точки на площині з координатами ***W*** і ***S*** (рис. 1.1).

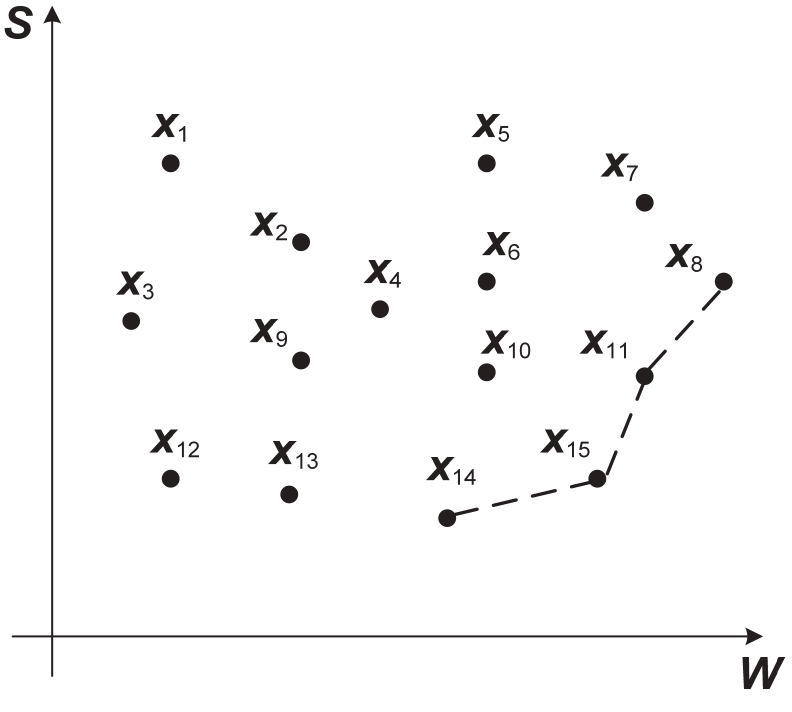


Рис. 1.1

З рисунка видно, що деякі варіанти розв’язків є «неконкурентоспроможними» і їх заздалегідь необхідно відкинути. Дійсно, ті варіанти, які мають перевагу за ефективністю W перед іншими варіантами з тієї ж вартістю S, повинні знаходитися на правій межі області можливих варіантів. Ті ж варіанти, які при однаковій ефективності мають меншу вартість, повинні знаходитися на нижній межі області можливих варіантів.

Яким варіантам слід віддати перевагу під час оцінювання ефективності за двома показниками? Очевидно, тим, які знаходяться одночасно на правій і нижній межах області (див. пунктирну лінію на рис. 1.1). Дійсно, для кожного з варіантів, що знаходяться на цій ділянці межі, завжди знайдеться інший варіант, який поступається йому за ефективністю, але є більш дешевим або, навпаки, не поступається йому за дешевизною, але є більш ефективним.

Таким чином, з 15 попередньо запропонованих варіантів більшість можна не розглядати, і залишається проаналізувати тільки чотири варіанти: X_8, X_{11}, X_{15}, X_{14}. З них варіант X_8 – найбільш ефективний, але зате порівняно дорогий; X_{14} – найдешевший, але не настільки ефективний. Справа особи, яка приймає рішення, – розібратися в тому, яку ціну вона згодна заплатити за підвищення ефективності або, навпаки, якою часткою ефективності ми готові пожертвувати, щоб не мати занадто великих матеріальних утрат.

Аналогічний попередній перегляд варіантів (хоча й без цієї наочної геометричної інтерпретації) можна провести й для багатьох показників: W_1, W_2, ..., W_k. Така процедура попереднього відбраковування неконкурентоспроможних варіантів розв’язків має завжди передувати розв’язанню задач дослідження операцій з кількома показниками. Це, хоча і не усуває необхідності компромісу, істотно зменшує потужність множини розв’язків, у межах яких здійснюють вибір.

З огляду на те, що комплексне оцінювання операції відразу за кількома показниками є трудомістким і потребує роздумів, на практиці пробують штучно об'єднати кілька показників в один узагальнений показник (критерій). Часто як такий узагальнений (складений) критерій беруть дріб; у чисельнику ставлять показники W_1, W_2, ..., W_m, які бажано збільшити, а в знаменнику – показники W_{m+1}, ... , W_k, які бажано зменшити [3]:

$$U = \frac{W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_m}{W_{m+1} \times \ldots \times W_k}. \qquad (1.3)$$

Наприклад, якщо йдеться про військову операцію, то в чисельнику ставлять такі величини, як «імовірність виконання бойового завдання» або «втрати противника»; у знаменнику – «власні втрати», «витрата боєприпасів», «час виконання операції» і т. ін.

Загальним недоліком складових критеріїв типу (1.3) є те, що брак ефективності за жодним показником завжди можна компенсувати за рахунок ефективності іншого (наприклад, мале значення ймовірності виконання бойового завдання – малою витратою боєприпасів. Часто складові критерії пропонуються не у вигляді дробу, а зваженою сумою окремих показників ефективності:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{a_1 W_1} + \boldsymbol{a_2 W_2} + \ldots + \boldsymbol{a_k W_k}, \tag{1.4}$$

де – $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ – додатні або від'ємні коефіцієнти.

Додатні коефіцієнти ставляться при тих показниках, які бажано максимізувати; від'ємні – при тих, які бажано мінімізувати. Абсолютні значення коефіцієнтів («ваги») відповідають ступеням важливості показників.

Неважко переконатися, що складовий критерій вигляду (1.3) по суті нічим не відрізняється від критерію виду (1.2) і має ті ж самі недоліки (можливість взаємної компенсації різнорідних показників). Тому некритичне користування складовими критеріями загрожує небезпеками й може призвести до неправильних рекомендацій. Однак у деяких випадках, коли «ваги» не вибираються довільно, а підбираються так, щоб складовий критерій найкраще виконував свої функції, удається отримати з його допомогою певні результати обмеженої цінності.

У деяких випадках завдання з кількома показниками вдається звести до задачі з одним-єдиним показником, якщо виокремити один (головний) показник $\boldsymbol{W_1}$ ефективності й перетворити його на максимум, а на допоміжні показники $\boldsymbol{W_2}$, $\boldsymbol{W_3}$, ..., $\boldsymbol{W_k}$ накласти тільки деякі обмеження такого вигляду [3]:

$$\boldsymbol{W_2} \geq \boldsymbol{\omega_2};\ \ldots;\ \boldsymbol{W_m} \geq \boldsymbol{\omega_m};\ \boldsymbol{W_{m+1}} \leq \boldsymbol{\omega_{m+1}};\ \ldots;\ \boldsymbol{W_k} \leq \boldsymbol{\omega_k}.$$

Ці обмеження увійдуть у комплекс заданих умов $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_k}$.

Наприклад, при оптимізації плану роботи промислового підприємства можна вимагати, щоб прибуток був максимальним, план з асортименту – виконаним, а собівартість продукції була не вище заданої. При плануванні ракетного обстрілу можна вимагати, щоб нанесена противнику шкода була максимальною, але при цьому власні втрати й вартість операції не перевищували відомих меж. При такій постановці завдання всі показники ефективності, крім одного (головного), переводяться до розряду заданих умов операції. Варіанти розв'язання, що перевищують задані межі, відразу ж відкидаються як неконкурентоспроможні.

Отримані рекомендації, очевидно, будуть залежати від того, як вибрати обмеження для допоміжних показників. Щоб визначити, наскільки це впливає на остаточні рекомендації щодо вибору розв'язку, корисно варіювати обмеження в розумних межах.

Нарешті, можливим є ще один шлях знаходження компромісного розв'язку, який можна назвати методом послідовних поступок. Припустимо, що показники ефективності розташовані в порядку зменшення важливості: спочатку основний ($\boldsymbol{W_1}$), потім – інші, допоміжні ($\boldsymbol{W_2}, \boldsymbol{W_3}$, ..., $\boldsymbol{W_k}$). Для простоти будемо вважати, що кожен з них потрібно перетворити на максимум (якщо це не так, то достатньо змінити знак показника). Процедура будування компромісного розв'язку зводиться до такого. Спочатку шукається розв'язок, що перетворює на максимум головний показник ефективності $\boldsymbol{W_1}$. Потім призначається, виходячи з практичних міркувань і точності, з якою відомо вихідні дані (а часто вона буває невеликою), деяка поступка $\Delta\boldsymbol{W_1}$, яку ми згодні допустити для того, щоб перетворити на максимум другий показник $\boldsymbol{W_2}$. Накладаємо на показник $\boldsymbol{W_1}$ обмеження, щоб він був не менше, ніж $\boldsymbol{W_1^*} - \boldsymbol{\Delta W_1}$, де $\boldsymbol{W_1^*}$ – максимальне значення $\boldsymbol{W_1}$, і при цьому обмеженні шукаємо розв'язок, який перетворює на максимум $\boldsymbol{W_2}$. Далі знову призначається поступка в показнику $\boldsymbol{W_2}$, ціною якої можна максимізувати $\boldsymbol{W_3}$, і т. д.

Такий спосіб будування компромісного розв'язку є хорошим завдяки тому, що тут відразу видно, ціною якої поступки в одному показнику забезпечується виграш в іншому. Зауважимо, що свобода вибору розв'язку, який набувається ціною навіть незначних поступок, може виявитися суттєвою, оскільки в області максимуму ефективність розв'язку зазвичай змінюється дуже слабо.

Так чи інакше, при будь-якому способі формалізації задача кількісного обґрунтування розв'язку за кількома показниками залишається не до кінця визначеною, і остаточний вибір розв'язку визначається вольовим актом керівника (так будемо умовно називати відповідальну за вибір особу). Справа дослідника – надати в розпорядження керівника достатню кількість даних, що дасть йому змогу всебічно оцінити переваги й недоліки кожного варіанта розв'язку і з їх урахуванням зробити остаточний вибір.

1.3. Методи визначення вагових коефіцієнтів показників ефективності інженерних рішень

Методика розв'язання завдань, яка має більше однієї мети, потребує застосування загального методу, що дає змогу приписувати деякі відносні оцінки (ваги) кожній меті. На практиці люди часто користуються ваговими коефіцієнтами інтуїтивно, на основі досвіду.

В інженерних розробках знання вагових коефіцієнтів, уміння їх правильно знаходити й оперувати ними значною мірою визначає правильний вибір варіанта і, природно, успіх усієї розробки системи або її модернізації. Однак яка з них є кращою? Задавшись ваговими коефіцієнтами кожного часткового показника якості, можна за об'єднаним (узагальненим) показником визначити найкращу, майже оптимальну систему.

При модернізації виробів конструкторськими бюро підприємств знання вагових коефіцієнтів і правильного їх застосування набуває особливого значення, адже невдалий вибір варіанта модернізації може спричинити порушення експлуатаційних, технологічних і виробничих циклів не тільки на підприємстві-виготівнику, але й в експлуатаційних організаціях і призвести до економічних витрат, що виходять за допустимі межі.

Навіть невеликі конструктивні зміни потребують попереднього оцінювання. Модернізація проводиться при виконанні таких умов:

– має бути збережено принцип взаємозамінності блоків;

– не має бути знижено показників якості процесу керування, зумовлених технічними вимогами;

– габарити модернізованої системи не мають перевищувати габаритів початкової системи;

– трудомісткість налаштування й трудові витрати на технічне обслуговування має бути знижено;

– модернізацію має бути проведено протягом невеликого часового терміну.

Коли розглядається багато конкурентних систем з великою кількістю параметрів, значення правильного вибору вагових коефіцієнтів збільшується. Неправильне значення вагових коефіцієнтів, що не відповідає «важливості» часткових показників якості, може призвести до неправильного оцінювання конкурентних варіантів. Тому вагові коефіцієнти для часткових показників якості мають визначатися не суб'єктивно, а шляхом математичного обґрунтування. Методи визначення вагових коефіцієнтів часткових показників якості систем на сучасному етапі розвитку науки й техніки глибоко не досліджено.

Поняття вагового коефіцієнта як коефіцієнта важливості є дуже містким, тому завжди необхідно зазначати, як його визначати й для яких цілей. Наприклад, можна визначити ваговий коефіцієнт часткового показника якості як його відносну важливість залежно від етапу життєвого циклу системи (ваговий коефіцієнт вартості на етапах упровадження, серійного виробництва й т. ін.). Можна визначати ваговий коефіцієнт заходів, що провадяться, залежно від термінів виконання. Вагові коефіцієнти часткових показників якості під час розроблення систем та їх модернізації визначаються, виходячи з призначення системи та умов виконання нею основного завдання.

У цьому випадку обґрунтованість і точність визначення вагових коефіцієнтів залежать від того, наскільки повно і з якою точністю математична модель відображає виконання завдання реальною системою. Наприклад, якщо разглядати певний клас систем керування транспортними засобами, то їх ефективність визначається із співвідношення

$$E = \frac{P}{C}. \tag{1.5}$$

Оскільки

$$P = W(y_1, y_2, \ldots, y_l), \tag{1.6}$$

де y_i – часткові показники якості, $i = \overline{1, l}$, то

$$E = F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{1.7}$$

– функція багатьох змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$, де $y_n = C$.

У кожному конкретному випадку слід указати, для якого класу систем визначаються вагові коефіцієнти, адже математична модель, побудована для одного класу систем, буде відрізнятися від математичної моделі для іншого. Якщо параметри, що визначають ефективність, є функціями часу, то й значення вагових коефіцієнтів також будуть функціями часу.

Значення вагових коефіцієнтів не вичерпуються їх використанням для розрахунку ефективності систем. З порівняння різних вагових коефіцієнтів випливає відносна значущість кожного часткового показника якості для певного класу систем. Це дає змогу конструктору систем обґрунтовано вибирати напрям модернізації й розроблення нових систем певного класу. Наприклад, якщо для конкретного типу стаціонарного інженерного рішення (ІР) вагові коефіцієнти надійності й вартості є значно більшими від вагових коефіцієнтів інших часткових показників якості, то конструктор добиватиметься високої надійності нового ІР шляхом не застосування нових надійних, але дорогих елементів, а резервування малонадійних, але дешевих елементів, незважаючи на те, що це призведе до збільшення маси й габаритів системи.

Для визначення вагових коефіцієнтів часткових показників необхідним є уміння будувати математичні моделі системи, що є самостійним завданням, отримувати інформацію про можливі значення параметрів і часткових показників якості конкурентних варіантів систем. Природно, що в міру нагромадження й розширення інформації про можливі значення часткових показників якості й параметрів систем (законів їх розподілу) відповідно змінюватимуться і значення їх вагових коефіцієнтів.

Проте процес цей є повільним порівняно з часом, потрібним для розрахунку вагових коефіцієнтів за вже наявною математичною моделлю системи.

Принцип визначення вагових коефіцієнтів часткових показників якості за математичною моделлю функції. Оцінювання практичної оптимальності ІР зводиться до визначення коефіцієнтів важливості (вагових коефіцієнтів) часткових показників якості, що характеризують систему. Фактична оптимальність систем визначається на основі головного показника якості системи, який вибирається, виходячи з її призначення. Наприклад, для певного класу систем головним показником є ефективність ***E***. Чим більшим є значення ***E***, тим кращою і ближчою до оптимальної буде система. У загальному випадку ефективність зв'язана складною залежністю з частковими показниками якості системи, які, зі свого боку, можуть знаходитись у функціональній залежності один з одним, і насамперед з вартістю.

Розглянемо методику визначення вагових коефіцієнтів для різних випадків функціональної залежності ефективності системи від часткових показників якості. Нехай задано залежність (1.3), причому всі часткові показники якості є незалежними змінними. За ваговий коефіцієнт ***i***-го часткового показника якості візьмемо ступінь його впливу на головний показник якості системи ***E***. Вплив часткового показника якості на головний показник визначимо, узявши повний диференціал функції ***E***:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial E}{\partial y_2} dy_1 + \ \dots + \frac{\partial E}{\partial y_1} dy_n. \qquad (1.8)$$

Часткові похідні перед значеннями dy_i, $i = \overline{1,n}$, можна розглядати як вагові коефіцієнти часткових показників якості y_1, y_2, …, y_n, зв'язаних функціональною залежністю з головним показником ***E***. Дійсно, вираз $\frac{\partial E}{\partial y_i}$ є відображенням того, як змінюється ефективність системи ***E*** при зміненні часткового показника якості y_i (при фіксованих значеннях інших показників), тобто визначає ступінь його впливу на головний показник ***E***.

На основі викладеного можна записати

$$b_i = \frac{\partial E}{\partial y_i}, \qquad (1.9)$$

де b_i — ваговий коефіцієнт ***i***-го часткового показника якості.

Узявши

$$b_i = \frac{\partial E}{\partial y_i}\Big|_{y_i = y_{i0}},\ i = \overline{1, n}, \tag{1.10}$$

де y_{0_i} – точка обчислення значення b_i, і зафіксувавши значення інших показників якості, рівняння (1.8) можна записати у вигляді

$$dE = b_1 dy_1 + b_2 dy_2 + \ldots + b_n dy_n. \tag{1.11}$$

Це рівняння є наслідком лінеаризації функції E в точці з координатами $y_i = y_{0_i}$, $i = 1, n$:

$$\eta_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\, y_i \Big/ \frac{C}{C_M}\sum_{i=1}^{n} b_i\ .$$

Коефіцієнт практичної оптимальності η, що визначається цим виразом, є лінійною функцією змінних y_i:

$$\eta = k(b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n). \tag{1.12}$$

Тут $k = \frac{C}{C_M}\sum_{i=1}^{n} b_i$.

У (1.10) і (1.11) передбачається, що часткові показники якості b_i виражено в безрозмірній формі, а їх значення при наближенні системи до оптимальної збільшуються. Вагові коефіцієнти b_i самі є функціями багатьох змінних часткових показників якості y_i, оскільки останні при визначенні b_i бралися цілком визначеними:

$$b_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

При розв’язанні систем, для яких задано значення y_i, числові значення b_i знаходять підставленням у рівняння (1.10) конкретних значень часткових показників якості. Знаючи y_i, C, C_m, b_i, можна визначити коефіцієнт практичної оптимальності й оцінити, яка з конкурентних систем буде кращою.

Методи визначення вагових коефіцієнтів часткових показників якості. Для спрощення визначення ефективності систем беруть до уваги, що вагові коефіцієнти не зв'язані один з одним і не залежать від значень самих часткових показників якості. Найбільш поширеними методами пошуку значень b_i, $i=\overline{1,n}$, є статистичний, множинної кореляції, ліанерізації функцій випадкових величин, статистичних випробувань, визначення показників b_i, $i=\overline{1,n}$, при неповній інформації, експертних оцінок. Наведемо стислу характеристику цих методів.

Статистичний метод. Вагові показники b_i, $i=\overline{1,n}$, перебувають у функціональній залежності від часткових показників якості й розглядаються як випадкові величини із заданими законами розподілу. Функція $b_i = f_i(y_1, y_2, ..., y_n)$ є випадковою. Знаючи закони розподілу y_i, $i=\overline{1,n}$, можна знайти закон розподілу b_i, його математичне сподівання й дисперсію.

Метод множинної кореляції. Під кореляційною залежністю розуміється зв'язок між двома випадковими величинами, при якому одна з них реагує на змінення іншої зміненням значень свого математичного сподівання. Задача визначення залежності розв'язується методами регресії та множинної кореляції. Регресією y_1 та y_2 є функція $g_2(y_1)$, що являє собою статистичну залежність цих величин

$$y_2 = g_2(y_1) + h_2(y_1,y_2), \tag{1.13}$$

де $h_2(y_1,y_2)$ – поправковий член;

$g_2(y_1) = M(y_1|y_2)$ – умовне математичне сподівання величини y_1 при фіксованому значенні величини y_2. Регресія апроксимується лінійною функцією $ay_1 + b$, коефіцієнти a і b якої мінімізують середньоквадратичне відхилення:

$$M[y_2 - g_2(y_1)]^2 = M[y_2 - (ay_1 + b)]^2.$$

Якість найкращого лінійного наближення визначається коефіцієнтом кореляції. Метод множинної кореляції дає змогу навести аналіз функції, який зв'язує між собою більш ніж дві змінні величини. Метод не можна застосовувати, якщо математичне сподівання й дисперсія не є функціями часу.

Метод лінеаризації функцій випадкових величин застосовується у випадку, коли рівняння $b_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ є нелінійним. Для отримання значень $M(b_i)$, $D(b_i)$ необхідно лінеаризувати рівняння із заданою точністю. За припущенням щодо лінійності функції $b_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ у вузьких межах отримують вираз

$$b_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$

$$= f_i(m(y_1), m(y_2), \ldots, m(y_n)) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i}\right)_m y_j^0 . \qquad (1.14)$$

*Метод статистичних випробувань з*астосовується за умови, що значень числових характеристик вагових коефіцієнтів $M(b_i)$ і $D(b_i)$ недостатньо і необхідно визначити закони їх розподілу. Для цього застосовують методи статистичних випробовувань (наприклад, метод Монте-Карло). Метод застосовують у тому випадку, коли аналітичне розв’язання задачі є важким (або його не має взагалі), фізичне моделювання є неможливим, а в наявності є інформація про розподіл імовірностей параметрів досліджуваного процесу.

Метод визначення показників b_i *за неповною інформацією про закони розподілу часткових показників якості*. Цей метод дає змогу уточнювати дані щодо $M(b_i)$ і $D(b_i)$ за статистичним матеріалом обмеженого обсягу, при цьому оцінюють значення $\widehat{M}(b_i)$ і $\widehat{D}(b_i)$. Завдання застосування методу – отримати оцінки $M(b_i)$ і $D(b_i)$ з мінімальними значеннями помилок: змістовності, незміщеності, ефективності.

1.4. Визначення вагових коефіцієнтів часткових показників якості інженерних рішень методом експертного оцінювання

Якщо наявного обсягу інформації про часткові показники якості системи недостатньо для надійного об'єктивного визначення їх вагових коефіцієнтів із застосуванням розглянутих вище методів, то використовується метод експертного оцінювання, який інакше називають методом евристичного прогнозування. У загальному випадку експертні оцінки, що дають висококваліфіковані фахівці, мають певною мірою суб'єктивний характер і в чистому вигляді застовуються під час оцінювання нескладних систем і пристроїв.

При розв'язанні проблеми вибору найкращого варіанта складних систем або пристроїв інформація, отримана у вигляді оцінок, що дають експерти, потребує обгрунтованої систематизації й кропіткого оброблення. Процедура визначення вагових коефіцієнтів часткових показників якості інженерних рішень методом експертного оцінювання складається з таких етапів: розроблення анкетних запитань, підбір експертів, опитування експертів, математичне оброблення результатів опитування (визначення вагових коефіцієнтів). Розглянемо зміст цих етапів докладніше:

Розроблення анкетних запитань. Запитання в анкетах має бути поставлено так, щоб не допустити багатозначності тлумачення, тому складне запитання необхідно розбити на елементарні з огляду на простоту формулювання. Кращою формою буде та, у якій є конкретне запитання і кілька цифр, одну або кілька з яких експерт повинен підкреслити.

Анкети можуть містити запитання про найбільш імовірні значення вагових коефіцієнтів $\boldsymbol{b_i}$. Надалі під час оброблення результатів опитування $\boldsymbol{N}$ експертів за значеннями вагових коефіцієнтів $\boldsymbol{b_{ij}}$ ($\boldsymbol{j}$ — номер експерта) визначають математичне сподівання $\boldsymbol{M(b_i)}$ і дисперсію $\boldsymbol{D(b_i)}$ кожного вагового коефіцієнта. Анкети можуть містити запитання щодо можливих значень коефіцієнта — максимального $b_{\boldsymbol{imax}}$ або (і) мінімального $\boldsymbol{b_{i_{min}}}$. Запитання в анкеті також може бути поставлено так, що експерти дають три оцінки значень кожного вагового коефіцієнта: максимального $\boldsymbol{b_{i_{max}}}$, мінімального $\boldsymbol{b_{i_{min}}}$ і найбільш імовірного $\boldsymbol{b_{i_{mod}}}$.

Іноді виявляється необхідним знати думку експертів про перелік часткових показників якості, які доцільно враховувати під час оцінювання ефективності цього класу інженерних рішень. У цьому випадку опитування експертів проводиться в два етапи. Під час підготовки анкети для першого етапу необхідно звертати особливу увагу на означення показника якості системи, пов'язаної з її призначенням. Тому як вступну частину анкети необхідно вказати призначення та місце застосування ІР. Запитання про показники якості, які можуть оцінюватися різними способами, має бути поділено на кілька часткових запитань.

В анкеті другого етапу опитування вказується призначення системи та вибраний узагальнений показник якості системи, що містить ті часткові показники якості, які було визначено на першому етапі опитування. У запитаннях експертам пропонується вказати або найбільш імовірні значення вагових коефіцієнтів, або тільки їх верхні й нижні межі, або ж верхні, нижні й найбільш імовірні значення. Для визначеності показники якості, пов'язані з призначенням системи, доцільно взяти такими, що дорівнюють одиниці.

Це полегшить роботу експертів, оскільки вони порівнюватимуть значущість інших часткових показників з головним частковим показником якості й дасть змогу отримати дані від експертів, виражені у вимірюваних величинах, що спростить математичне оброблення результатів опитування.

Призначення експертів. Експертів повинно бути не мало, але й не дуже багато. Мала група може мати погану узгодженість думок, а у великій групі неминучою буде велика відмінність у компетентності експертів. Як свідчить досвід, достатньо 10—15 фахівців.

Для оцінюваних вагових коефіцієнтів часткових показників якості ІР експертами доцільно запрошувати фахівців НДІ та конструкторських бюро, які розробляють системи, подібні або близькі до цього класу ІР, спеціалістів промислових підприємств, що модернізують і впроваджують систему, та спеціалістів з експлуатації подібних систем. Серед експертів обов'язково мають бути фахівці з усіх груп, зокрема такі, які експлуатуватимуть нові системи цього класу. Це значною мірою зменшить перелік спірних запитань, що виникають під час розроблення, модернізації й експлуатації нових систем, прискорить розроблення ІР та їх упровадження, підвищить їх техніко-економічну ефективність. Бажано, щоб експерти не були особисто зацікавлені в прийнятті певного рішення.

Опитування експертів. Необхідно дотримуватися таємниці відповідей кожного експерта, щоб уникнути виникнення оцінок, спричинених не думкою експерта як фахівця, а відповідними обставинами (посадовим положенням, взаєминами з іншими експертами й т. ін.). Тому експерт повинен відповідати на запитання анкети, не знаючи думок інших экспертів. Опитування можна проводити в кілька турів. Після першого туру узагальнюються результати відповідей експертів і всіх їх ознайомлюють з цими результатами. Потім опитування повторюється кілька разів, щоб прихильники крайніх оцінок могли остаточно сформувати обгрунтовану думку. Відповіді експертів, отримані під час опитування, вивчаються й піддаються математичному обробленню.

Математичне оброблення результатів опитування. Метою вивчення й математичного оброблення отриманої інформації є:

1) анализування принципового підходу фахівців до оцінювання варіантів розроблення або модернізації ІР;

2) перетворення отриманої якісної інформації на кількісну форму.

Під час оброблення інформації, отриманої від експертів, за показник групової думки береться медіана (медіана $x_{1/2}$ розділяє область визначення змінної x на два інтервали), а за показник узгодженості думок експертів – діапазон квартилів (квартилі $x_{1/4}$, $x_{1/2}$, $x_{3/4}$ розділяють область визначення змінної на чотири інтервали, потрапляння в які мають однакові ймовірності), які добре характеризують сукупність отриманої інформації.

Експертів, чиї оцінки виявляються поза межами квартилів, просять обгрунтувати свої оцінки й повідомити думку з приводу досконалості поставлених запитань. З цими матеріалами анонімно ознайомлюють інших експертів, щоб дати їм можливість ще раз продумати обгрунтованість своїх оцінок і врахувати всі обставини, які вони могли пропустити в першому турі.

Зазвичай результати другого й подальших турів дають менший розкид оцінок експертів. Медіана відповідей останнього туру береться за узагальнену думку. Таке впорядкування отриманої інформації дає змогу знайти об'єктивніші оцінки групової думки, ніж у разі простого усереднення.

В експертних методах імовірнісна математична модель зазвичай формується на основі оцінок, що характеризують передбачуваний розподіл шуканої величини. Береться, що з погляду експерта розподіл є безперервною функцією, характер якої можна визначити, застосовуючи спеціальні критерії. У цьому випадку результати опитування обробляються ймовірнісними методами.

Якщо визначити характер функції неможливо, то й неможливо застосувати ймовірнісні методи. У цьому випадку отриману інформацію оцінюють з допомогою методів, що відображають переваги експерта, коли він приписує кожному порівнюваному варіанту деяке число.

Експертне оцінювання якісних і важковимірювальних ознак провадиться за порядковою шкалою й потребує застосування спеціальних методів упорядкування для їх математичного оброблення. Упорядкування слід застосовувати в таких випадках:

1) із загальної кількості характерних ознак певних варіантів необхідно виокремити найбільш важливі;

2) необхідно оцінити чинники, які не можна точно виміряти, але можна зіставити між собою, охарактеризувати їх як «кращі», «цінніші», «корисніші» і т. ін.

Найбільш поширені методи впорядкування: ранжування, безпосереднього оцінювання, послідовного порівняння, парного порівняння, рангової кореляції. Розглянемо стисло їх суть.

Метод ранжування. Під час ранжування передбачається встановлення відносної значущості показників якості (чинників) досліджуваних варіантів ІР. Найбільш переважному показнику зазвичай присвоюється перший ранг, а найменш переважному – останній. Кожному показнику (чиннику) експерт приписує числа натурального ряду 1, 2, 3, ..., $\boldsymbol{N}$. Звичайно кількість рангів дорівнює кількості ранжованих показників. Якщо експерт декільком показникам (чинникам) приписує один і той же ранг, то кількість рангів $\boldsymbol{N}$ не буде дорівнювати кількості $\boldsymbol{n}$ показників ІР. У таких випадках показникам присвоюються стандартизовані ранги, які являють собою середні суми місць, що припадають на показники з однаковими рангами.

Загальну кількість рангів уважають такою, що дорівнює n. Сума рангів S_n при ранжуванні n показників дорівнює сумі чисел натурального ряду:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{n(n+1)}{2},$$

де α_i — ранг i-го показника якості.

Оскільки в ранжуванні беруть участь кілька експертів, для кожного показника якості підраховується сума рангів, присвоєних їм експертом, і показнику, що має найменшу суму, присвоюється перший ранг. Відповідно показнику, що має найбільшу суму, присвоюється останній ранг. У табл. 1.1 наведено приклад ранжування чотирьох показників якості на основі оцінок, даних трьома експертами (невелику кількість експертів узято для спрощення прикладу).

З табл. 1.1 видно, що внаслідок ранжування перший ранг присвоєно надійності, а останній — габаритам системи. Ранжування є відображенням одного показника порівняно з іншим, тому його зазвичай застосовують разом з іншими методами.

Таблиця 1.1

Показник	Показник якості			
	СКВ	Маса	Габарити	Надійність
Експерт 1	2	3	4	1
Експерт 2	1	4	3	2
Експерт 3	2	3	4	1
Сума рангів	*5*	*10*	*11*	*4*
Кінцевий ранг показника	*2*	*3*	*4*	*1*

Метод безпосереднього оцінювання. Набір показників якості ІР оцінюється певною кількістю балів (наприклад, десятьма), і всі показники якості відповідно до проведеного ранжування розподіляються в межах заданої бальної шкали. Оцінювання в балах проводиться під час математичного оброблення анкет опитування – кожній відповіді експерта ставиться певний бал, наприклад: якщо показник якості оцінено як «дуже важливий» – то 3, «важливий» – 2, «так» – 1, «ні» – 0 і т. ін. Тоді

$$b_{ij} = {l_{ij}} \Big/ {\sum_{i=1}^{n} l_{ij}}, \qquad (1.15)$$

де l_{ij} – оцінка i-го показника, надана j-м експертом;

n – кількість показників якості.

Середнє значення вагового коефіцієнта i-го показника якості

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} b_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij}}, \tag{1.16}$$

де m — кількість експертів.

Для ілюстрації визначення вагових коефіцієнтів методом безпосереднього оцінювання розглянемо такий приклад. Результати оцінювання чотирьох показників якості l_1 – l_4 трьома експертами наведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Експерт j	Оцінки показників l_j			
	l_1	l_2	l_3	l_4
1	0	3	0	3
2	1	2	1	1
3	2	1	2	2

Значення цих оцінок l_{ij} знаходиться в лівій частині табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Оцінка l_{ij}		Ваговий коефіцієнт b_{ij}		Оцінка l_{ij}		Ваговий коефіцієнт b_{ij}	
l_{11}	0	b_{11}	0	l_{31}	0	b_{31}	0
l_{12}	1	b_{12}	0,2	l_{32}	1	b_{32}	0,2
l_{13}	2	b_{13}	0,3	l_{33}	2	b_{33}	0,3
l_{21}	3	b_{21}	0,5	l_{41}	3	b_{41}	0,5
l_{22}	2	b_{22}	0,4	l_{42}	1	b_{42}	0,2
l_{23}	1	b_{23}	0,14	l_{43}	2	b_{43}	0,3

Для обчислення значень b_{ij} спочатку підрахуємо значення всіх оцінок експертів:

$$\sum_{i=1}^{4} l_{i1} = 6, \ \sum_{i=1}^{4} l_{i2} = 5, \ \sum_{i=1}^{4} l_{i3} = 7.$$

Підставивши отримані значення $\sum_{i=1}^{n} l_{ij}$ у формулу (1.15), обчислимо значення b_{ij}. Оцінки b_{ij} наведені в правій частині табл. 1.3. Для визначення вагових коефіцієнтів спочатку обчислимо $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$ для всіх i:

$$\sum_{j=1}^{3} b_{1j} = 0 + 0,2 + 0,3 = 0,5;$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_{2j} = 0,5 + 0,4 + 0,14 = 1,04;$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_{3j} = 0 + 0,2 + 0,3 = 0,5;$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_{4j} = 0,5 + 0,2 + 0,3 = 1.$$

Обчислимо значення знаменника формули (1.16):

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} = \sum_{j=1}^{3} b_{1j} + \sum_{j=1}^{3} b_{2j} + \sum_{j=1}^{3} b_{3j} + \sum_{j=1}^{3} b_{4j} =$$

$$= 0,5 + 1,04 + 1 = 3,04.$$

Підставивши отримані значення чисельника $\sum_{i=1}^{n} l_{ij}$ для кожного b_i, знайдемо вагові коефіцієнти:

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{3} b_{1j}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij}} = \frac{0,5}{3,04} = 0,164,$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{3} b_{2j}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij}} = \frac{1,04}{3,04} = 0,341,$$

$$b_3 = \frac{\sum_{j=1}^{3} b_{3j}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij}} = \frac{0,5}{3,04} = 0,164,$$

$$b_4 = \frac{\sum_{j=1}^{3} b_{4j}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij}} = \frac{1}{3,04} = 0,328.$$

Наведений приклад відображає трудомісткість обчислень під час оброблення результатів опитування навіть трьох експертів про визначення вагових коефіцієнтів усього лише чотирьох часткових показників якості системи. На практиці трапляються значно більші труднощі, оскільки визначаються вагові коефіцієнти більш ніш п'яти часткових показників якості та опитуються від 10 до 15 експертів.

Метод послідовних порівнянь. Метод застосовується у випадках, коли необхідно встановити точний зв'язок між показниками якості в системі. Порівнюючи показники якості відповідно до вимог методу, необхідно:

1. Провести ранжування показників.

2. Показнику l_1 з рангом, що дорівнює 1, приписати оцінку $v_1 = 1$, а іншим показникам – оцінку від 0 до 1.

3. З'ясувати, чи буде показник з оцінкою $v_1 = 1$ перевершувати за важливістю всі інші разом.

Якщо так, то v_1 слід збільшити до такого значення, щоб справеджувалася нерівність

$$v_1 > \sum_{i=2}^{n} v_i,$$

де v_i — оцінка всіх інших показників. Інакше v_i слід змінити так, щоб справджувалася нерівність

$$v_1 < \sum_{i=2}^{n} v_i.$$

4. Аналогічна процедура застосовується для наступного показника якості l_2. Ця процедура продовжується доти, доки не буде оцінено (n –1)-й показник.

За наявності великої кількості показників (більше семи) застосування методу стає дуже трудомістким. У цьому випадку більш доцільно використовувати метод парних порівнянь.

Метод парних порівнянь. При застосуванні цього методу одному з двох показників (важливішому) присвоюється експертна оцінка 1, а менш важливому — 0. Якщо кожна пара показників порівнюється одноразово, то кількість порівнянь

$$k = \frac{m(m-1)}{2},$$

де m — кількість часткових показників якості системи.

Якщо операцію парних порівнянь проводять кілька експертів, то середнє значення вагового коефіцієнта на основі опитування всіх експертів визначається формулою

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} b_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}},$$

де $b_{ji} = f_{ij}/k$ — вага показника i-ї якості за даними j-го експерта;

f_{ij} – середня частота переваги, надана j-м експертом i-му показнику порівняно з іншими показниками,

$$f_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} f(\frac{l_i}{l_{i+c}})_j,$$

де $f\left(\frac{l_i}{l_{i+c}}\right)$ — частота переваги, що віддається показнику l_i порівняно з показником l_{i+c}. Індекс (i + c) належить до показників, що доповнюють цей показник при однозначному порівнянні.

Математичний апарат, який використовується під час експертного оцінювання відносної значущості показників якості, що визначають ефективність системи, постійно розвивається.

1.5. Методика розрахунку оцінок ефективності інженерних рішень

Методика використовується для розрахунку ефективності кожного з конкурентних варіантів інженерних рішень з метою їх порівняння й вибору найкращого серед них.

Узагальнюючи попередній матеріал, можна запропонувати таку методику розрахунку ефективності інженерних рішень.

1. Усі параметри кожної $к$-ї системи ($\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_1^k$), де $k = 1, m$, розбивають на l груп.

2. У межах кожної з l груп, де це можливо, об'єднують параметри з метою зменшення їх кількості в групі; після цього кожному з параметрів присвоюють умовне позначення α_{ij}^k i-го параметра в j-й групі k-ї системи.

3. Визначають, які з параметрів збільшуються під час оптимізації інженерного рішення, а які – зменшуються.

4. Визначають «еталонні» значення i-го параметра j-ї групи серед усіх $k = 1, m$ інженерних рішень:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{ij}_{\text{ет}}} = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{ijmax} = \boldsymbol{max}\ \alpha_{ij}^{k} & \text{– для параметра, що підвищує ефективність ІР,} \\ \boldsymbol{\alpha}_{ijmin} = \boldsymbol{min}\ \alpha_{ij}^{k} & \text{– для знижувального параметра.} \end{cases}$$

5. Обчислюють нормовані значення ***i***-го параметра в ***j***-й групі ***k***-ї системи:

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{k} = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^{k}/\boldsymbol{\alpha}_{ijmax} & \text{– для параметра, що підвищує ефективність ІР,} \\ \boldsymbol{\alpha}_{ij}^{k}/\boldsymbol{\alpha}_{ijmin} & \text{– для знижувального параметра.} \end{cases}$$

Отримані дані доцільно занести до таблиці.

6. Часткові оцінки ефективності по кожній ***j***-й групі ***k***-ї системи розраховують за формулою

$$\boldsymbol{\gamma_j^k = \sum_{i=1}^{r_{ij}} \rho_{ij}\, \eta_{ij}^k},$$

де $\boldsymbol{\rho}_{ij}$ – коефіцієнт, у якому враховано вагу ***i***-го параметра в ***j***-й групі оцінюваних систем.

7. Коефіцієнт $\boldsymbol{\rho}_{ij}$ розраховують за такою формулою:

$$\boldsymbol{\rho_{ij}} = \frac{\boldsymbol{\alpha_{ij}}}{\boldsymbol{\sum_{i=1}^{r_j} \alpha_{ij}}},$$

де

$$\boldsymbol{\alpha_{ij}} = \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta\eta}}_{\boldsymbol{ij}}}{\overline{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{ij}}},$$

$$\overline{\boldsymbol{\Delta\eta}}_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{m=1}^{k} \left| \boldsymbol{\eta_{ij}^k} - \overline{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{ij}} \right|,$$

$$\overline{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{ij}} = \boldsymbol{\frac{1}{m}\sum_{m=1}^{k} \eta_{ij}^k}\ .$$

8. Узагальнена оцінка ефективності **κ**-ї системи

$$\gamma^k = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \gamma_j^k,$$

де β_j – ваговий коефіцієнт, у якому враховується ступінь важливості j-ї групи параметрів.

Об'єктивність оцінки ефективності γ^k значною мірою залежить від вибору вагових коефіцієнтів. Метод експертних оцінок у практичній діяльності застосовують шляхом опитування експертів.

9. У загальному випадку в експертній групі працює N експертів. Вони повинні дати висновок щодо ступеня важливості кожної з груп параметрів. Кожен з експертів оцінює важливість j-ї групи параметрів балом C_{ij}, де $i = 1, N$; $j = \overline{1, l}$.

10. Проводять нормування оцінки, наданої i-м експертом по j-й групі параметрів, згідно з виразом

$$\beta_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sum_{j=1}^{l} C_{ij}}.$$

11. Обчислюють середнє значення оцінки важливості параметрів j-ї групи, тобто усереднюють оцінку по всіх N експертах, згідно з виразом

$$\overline{\beta}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}.$$

Значення $\overline{\beta}_j$ використовують як вагові коефіцієнти β_j для обчислення узагальненої оцінки γ^k ефективності інженерного рішення.

На подальших етапах методики розрахунку ефективності інженерних рішень з'ясовують узгодженість думок експертів.

12. Обчислюють середньоквадратичне відхилення оцінки вагового коефіцієнта j-ї групи:

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\beta_{ij} - \overline{\beta}_j)^2}{N}} .$$

13. Визначають коефіцієнт варіації j-ї групи:

$$\nu_j = \frac{\sigma_i}{\overline{\overline{\beta}}_j},$$

який характеризує ступінь узгодженості думок експертів щодо важливості параметрів j-ї групи. Чим меншим є значення ν_j, тим кращою буде узгодженість експертів і тим більшою об'єктивність оцінки β_j.

14. За всіма групами параметрів визначають коефіцієнт варіації:

$$\nu_0 = \frac{\sigma_\nu}{\overline{\nu}},$$

де

$$\overline{\nu} = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} \nu_i,$$

$$\sigma_\nu = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{l}(\nu_j - \overline{\nu})^2}{l}}.$$

Чим меншим є значення ν_0, тим кращою буде узгодженість експертів за всіма групами параметрів інженерного рішення.

Контрольні запитання

1. Наведіть означення організаційної системи.
2. Що називають операцією?
3. Які фактори визначають ситуацію?
4. Які групи факторів впливають на значення показника ефективності?
5. Наведіть приклади показників ефективності детермінованих систем.
6. Наведіть зміст оптимізації в середньому.
7. Назвіть заходи з оптимізації, коли випадкові фактори не мають властивості статистичної стійкості.
8. Наведіть узагальнені критерії ефективності операцій за кількома показниками.
9. Як оцінюється ефективність прийняття рішень в конфліктних ситуаціях?
10. Назвіть завдання методики розрахунку ефективності інженерних рішень.
11. За якими ознаками розбивають часткові показники якості системи на групи?
12. Наведіть порядок оброблення експертних оцінок.
13. Які показники якості є знижувальними, а які – підвищувальними?
14. Яким чином робиться узагальнене оцінювання ефективності ІР?
15. Охарактеризуйте математичний апарат, який використовується під час експертного оцінювання відносної значущості показників якості.

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІГОР

2.1. Гра як модель конфліктної ситуації

Під час практичної діяльності багато задач керування доводиться розв´язувати в умовах зіткнення інтересів кількох сторін, що маюють різні цілі й прагнуть досягти їх часто на шкоду одна одній. Такі умови виникають, наприклад, в конкурентній боротьбі за ринки збуту продукції, під час спортивних змагань, дипломатичних перемовин, ведення бойових дій тощо.

Ситуацію, у якій інтереси сторін заходять у суперечність, називають *конфліктною,* а взаємодія сторін із суперечливими інтересами – *конфліктом*.

Протиріччя інтересів може виникати через різні цілі учасників конфлікту. Наприклад, якщо одна зі сторін, яка бере участь у збройному конфлікті, планує напад на деякий об’єкт (вогневу позицію, склад боєприпасів, пункт керування тощо), то її метою є знищення об’єкта. Завдання другого учасника конфлікту – захист об’єкта. З цією метою він організовує його оборону. Цей конфлікт характеризує зіткнення односторонніх інтересів двох його учасників.

Разом з тим, конфлікт може виникнути через наявність багатосторонніх інтересів у однієї особи. Наприклад, під час проектування вузла мехатронної системи доводиться враховувати протилежні техніко-економічні вимоги до нього. Бажання підвищити надійність функціонування шляхом дублювання елементів, вузлів і блоків суперечить вимогам щодо мінімальних габаритів, ваги, вартості, енергоспоживання тощо.

Характерною особливістю конфлікту є те, що його учасники мають діяти в умовах невизначеності, причинами якої можуть бути:

– свідомі дії сторін, що конфліктують;

– невідомі умови проведення операції (конфлікт з «неусвідомленою природою»);

– недостатня інформація про поведінку учасників конфлікту.

Розглянемо приклади умов невизначеності. Наприклад, під час збройного конфлікту стороні, яка обороняє об’єкт, перед початком бойових дій не відомо, який вид зброї (авіацію, артилерію, ракети), у який кількості та в який момент часу застосує противник. Разом з тим і нападна сторона до початку збройного конфлікту не знає, які засоби оборони (зенітно-ракетні комплекси, засоби радіоелектронної боротьби, фальшиві об’єкти тощо) буде використано для захисту об’єкта. Таким чином, жоден з учасників збройного конфлікту завчасно не знає задуму противника і змушений діяти, ураховуючи його можливу поведінку.

У багатьох випадках невизначеність виникає через невідомі умови проведення операції. Наприклад, не можна завчасно визначити, у яких метеорологічних умовах буде здійснюватися марш військового підрозділу або які характеристики будуть мати прилади, що надходять до контрольно-вимірювальної лабораторії.

У цьому випадку має місце конфлікт з «неусвідомленою природою», яка не намагається знайти для себе певні вигоди, обернути на свою користь помилки, які здійснює інший учасник конфлікту, тобто не створює цілеспрямованої протидії. Вивчення законів розвитку природи дає змогу значною мірою зменшити невизначеність, але ліквідувати її повністю не вдається.

Таким чином, невизначеність виявляється в недостатній інформації про поведінку учасників конфлікту, у його наслідках та умовах, у яких він відбувається. Ці обставини створюють труднощі для учасників конфлікту при прийнятті ними рішень щодо того, як діяти в певній конфліктній ситуації.

Можна, звичайно, при прийнятті рішень спиратися на набутий досвід, знання та інтуїцію. Однак цей шлях, за незначним винятком, призводить до помилок під час розв’язання задач і зрештою – до матеріальних і моральних утрат.

Інший шлях – використання рекомендацій, які можна обґрунтувати математичними методами, а саме методами теорії ігор. Ці методи не дають готових розв’язків, але істотно допомагають у процесі їх прийняття. Саме з цих позицій необхідно підходити до вивчення ігрових методів.

Теорія ігор – розділ дослідження операцій, у якому вивчаються математичні моделі конфліктних ситуацій і методи обґрунтування рішень в умовах конфлікту (протидії та невизначеності). Як наукова дисципліна теорія ігор сформувалась у 30-ті роки минулого століття, коли було сформульовано її основні ідеї та основні результати [4]. З появою та розвитком обчислювальної техніки теоретико-ігрові методи набули поширення в різних областях діяльності людини: економіці, політиці, військовій справі, торгових відносинах тощо [1, 3, 4].

Об'єктами вивчення теорії ігор є різні конфліктні ситуації. Кожна конкретна конфліктна ситуація характеризується багатьма факторами, що впливають на розвиток і розв’язання конфлікту. Наприклад, на результат спортивних змагань впливають ступінь підготовки спортсменів, стан спортивних споруд, підтримка глядачів з трибун та багато інших факторів.

При будуванні моделі конфліктної ситуації всі фактори врахувати досить складно, а в деяких випадках неможливо. Тому під час аналізу конфліктних ситуацій виокремлюють лише суттєві (головні) фактори, що впливають на розвиток конфлікту, їх ураховують при будуванні математичної моделі.

Спрощену й формалізовану модель конфліктної ситуації називають грою. Гра як модель конфліктної ситуації характеризується системою правил, що визначають кількість учасників гри й можливі варіанти їх дій, ступенем інформованості щодо дій інших учасників, а також кінцевим результатом. Приклад – шахова гра. За правилами, у грі беруть участь два гравці. Кожний гравець має у своєму розпорядженні шістнадцять фігур білого або чорного кольору, знає послідовність і порядок здійснення ходів.

Позиція, що утворюється на шахматній дошці, є відомою кожному гравцю від початку до закінчення гри. У правилах установлено, що за виграш шахматист отримує одне очко, за нічию – половину очка, а за програш – нуль. Аналогічні правила діють і в інших спортивних іграх.

Учасників гри називають гравцями (одна особа (у шахах), група осіб, об'єднаних спільними інтересами, – команда, військовий підрозділ, фірма, політична група). Кожна з команд у спортивних іграх (футбол, хокей тощо) хоч і складається з кількох спортсменів, уважається як один гравець, оскільки інтереси кожного члена команди в грі збігаються. З цієї ж причини гравцями вважаються військові підрозділи, фірми, компанії, які конкурують за ринки збуту, різноманітні депутатські групи в парламентській боротьбі та ін.

Розвиток гри в часі можна подати послідовністю ходів. Хід – це вибір і здійснення гравцем одного з передбачених у правилах гри варіантів дій (наприклад, хід шаховою фігурою).

У теорії ігор розрізняють особисті й випадкові ходи. Особистий хід – гравець свідомо робить вибір і здійснює одну з дозволених дій (хід у шаховій грі). Випадковий хід – гравець робить вибір відповідно до механізму випадкового вибору (наприклад, кидання гральної кістки або підкидання монети).

Варіанти дій і правила їх вибору на кожному особистому ході гравця залежно від ситуації, що склалася в грі, називають стратегіями (наприклад, стратегії нападної сторони – авіаційний удар удень, ракетний удар уночі, артилерійський вогневий наліт уночі).

Стратегія – це певний закінчений план дії гравця, згідно з яким він діє в усіх випадках розвитку гри. Стратегії можуть бути вдалими й невдалими, хорошими й поганими.

Кількісна оцінка результату гри для кожного гравця – виграш у грі (вартісне вираження: прибуток для фірми, кількість очок у спорті, імовірність бажаного результату гри). Програш – це негативний виграш. Результат гри (виграш) залежить від застосовуваних гравцями стратегій. Кожному результату гри відповідає певний виграш гравців.

Функція виграшів – це залежність між застосовуваними стратегіями й виграшем (аналітичний вираз, таблиця тощо). Форма функції виграшів визначається моделлю конфліктної ситуації.

Оптимальна стратегія – це стратегія, що забезпечує гравцю максимальний виграш у грі. Розв’язок гри – це пошук оптимальної стратегії.

Таким чином, гра як модель реальної конфліктної ситуації задається набором стратегій кожного гравця, правил їх вибору під час кожного особистого ходу й функцією виграшу. Розв’язання гри полягає в тому, щоб серед допустимих стратегій вибрати такі, які забезпечать гравцю максимальний виграш.

Методи розв’язання ігор цілком і повністю визначаються конкретною моделлю гри.

2.2. Класифікація ігор

В основу кваліфікації ігор може бути покладено різні кваліфікаційні ознаки, що характеризують кількість і взаємовідносини гравців, склад і характер використовуваних ними стратегій, систему розподілу виграшів, ступінь інформованості гравців під час гри та ін.

На рис. 2.1 схематично зображено класифікацію ігор. Для кожної з них розроблено свої методи розв´язання.

Розглянемо класифікацію такого показника, як кількість грацців. За кількістю гравців, які беруть участь у грі, розрізняють бінарні й множинні ігри. У бінарних іграх беруть участь два гравці. Наприклад, ігри, що моделюють бойові дії, спортивні ігри (футбол, шахи тощо).

Множинні ігри (ігри ***N*** осіб) характеризуються участю більше двох гравців. Типові приклади таких ігор – грошово-речова лотерея, конкурентна боротьба кількох фірм, багатосторонні переговори.

За характером стратегій, якими користуються гравці, ігри поділяють на дискретні й неперервні. Якщо сукупність стратегій кожного гравця утворює кінцеву множину, то така гра належить до дискретних ігор. Прикладом дискретної гри є збройний конфлікт зі знищенням об’єкта. Прикладами неперервних ігор є стратегії вибору винищувачем-перехоплювачем кутів атаки. Множина кутів атаки є нескінченною (континуальною). Отже така гра є неперервною.

За кількістю стратегій гравців розрізняють скінченні й нескінченні ігри. У скінченній грі кожний гравець має скінченну кількість стратегій. Наприклад, багато ігор, що моделюють проведення бойових дій, є скінченними, оскільки сторони, що беруть участь у конфлікті, є обмеженими кількістю особового складу підрозділів, видів озброєнь, боєприпасів тощо.

До скінченних ігор належить гра в шахи, хоча кількість стратегій кожного гравця є дуже великою. Нескінченна гра має місце, коли хоча би в одного з гравців є нескінченна кількість стратегій.

Зауважимо, що дискретні ігри можуть бути як скінченними,так і нескінченними. Неперервні ігри можуть бути тільки нескінченними.

За характером розподілу виграшів визначають ігри з нульовою та ненульовою сумою. Ігри з нульовою сумою характеризуються тим, що результат гри зажди дорівнює нулю, тобто один гравець виграє стільки, скільки програє інший. Бінарна гра з нульовою сумою є антагоністичною (інтереси гравців є протилежними).

Рис. 2.1

Нульова сума – це коли результат гри дорівнює нулю (скільки один виграє, стільки другий програє), ненульова – результат, відмінний від нуля (лотерея).

Бінарну гру з ненульовою сумою називають антагоністичною грою, тому що інтереси гравців у ній є прямо протилежними: один гравець прагне якомога більше виграти, другий – якомога менше програти. Багато економічних і військових ситуацій можна описати антагоністичними іграми. До таких ігор належить багато видів спортивних змагань (наприклад, гра в хокей, футбольний матч, шахові ігри тощо).

Однак множинну гру ***N*** осіб з нульовою сумою не можна назвати антагоністичною. Наприклад, якщо два гравці виграють у третього, то один відносно другого може не відчувати антагонізму. В іграх з ненульовою сумою результат відрізняється від нуля. Прикладом гри з ненульовою сумою є грошово-речова лотерея. Бінарна гра з ненульовою сумую є неантагоністичною грою.

У множинних іграх беруть участь ***N*** осіб. Важливе значення має характер взаємин гравців. За цією ознакою розрізняють безкоаліційні та коаліційні ігри. У безкоаліційних іграх гравці не стають до угоди між собою, тобто кожний гравець діє самостійно, керуючись тільки власними інтересами.

Такі обмеження в реальних конфліктах виникають або через неможливість узгодженості між гравцями, або внаслідок дії законних і підзаконних актів, які заперечують таку узгодженість. Наприклад, при втраті зв´язку підрозділи продовжують бойові дії самостійно відповідно до поставленого завдання. Таку ситуацію можна описати безкоаліційною грою.

Разом з тим під час конфліктів між деякими їх учасниками допускаються угоди щодо співробітництва. Ці угоди можуть набирати форми кооперації, узгодження дій, обміну інформацією тощо.

Множину гравців, між якими укладається угода, називають коаліцією, а ігри, які моделюють таку конфліктну ситуацію, – коаліційними іграми. Коаліції можуть утворювати держави, підприємства, різноманітні партії та суспільні організації, окремі люди, які беруть участь у парламентських і місцевих виборах, тощо.

За кількістю кроків ігри поділяються на одно- та багатокрокові. В однокроковій грі робиться всього один крок, після чого здійснюється розподіл виграшів (наприклад, вибір одного з видів наступальної, оборонної зброї, вибір виду продукції для освоєння ринків збуту тощо). Розподіл виграшів полягає в тому, що після закінчення бойових дій учасники конфлікту зазнають тих чи інших матеріальних утрат. Багатокрокова гра складається з послідовності кроків. При цьому обумовлюється кількість кроків, послідовність їх здійснення гравцями тощо.

Наприклад, у шаховій грі, яка належить до багатокрокових, визначається час гри та кількість ходів. Перший хід робить учасник, який грає білими фігурами.

Важливою кваліфікаційною ознакою є вид функції виграшів. Якщо в грі беруть участь два гравці, то функцію виграшів можна задати в матричній формі.

Для скінченної антагоністичної гри це буде матриця, кожний рядок якої відповідатиме стратегії першого гравця, а кожний стовпець – одній зі стратегій другого гравця. Елемент α_{ij}, який знаходиться на перетині i-го рядка і j-го стовпця, характеризує виграш першого гравця при використанні ним i-ї стратегії та j-ї стратегії його противником.

Такі ігри дістали назву матричних ігор. У скінченній неантагоністичний грі (гра двух осіб з ненульовою сумою) виграші кожного з гравців задаються своїми матрицями. Кількість таких матриць дорівнює двом, тому гру називають біматричною грою.

Функції виграшів у нескінченних іграх – неперервні функції. За видом функції виграшу розрізняють опуклі (функція виграшів є опуклою функцією), сепарабельні (функція виграшів є добутком окремих функцій) та інші ігри.

За ступенем інформованості гравців розрізнюють:

– ігри з повною інформацією, коли кожному з гравців відомо, які ходи зробили інші учасники гри від її початку до поточного моменту часу (наприклад, які ходи зробив противник під час гри в шахи);

– ігри з неповною інформацією (учасники гри знають не всю інформацію про попередні ходи.

Найбільш повно сьогодні розроблено методику розв´язання матричних ігор. До матричних ігор за певних припущень може бути зведено й деякі інші ігри. У подальшому основну увагу приділимо матричним іграм.

Контрольні запитання

1. Наведіть означення теорії ігор.
2. Наведіть означення гри.
3. Наведіть означення ресурсу.
4. Кого називають гравцями в теорії ігор?
5. З яких кроків складається розв'язок гри?
6. Наведіть означення бінарної гри.
7. Наведіть означення антагоністичної гри.
8. Наведіть приклад однокрокової гри.
9. Наведіть приклад багатокрокової гри.
10. Як розрізнють ігри за ступенем інформованості?
11. Які ігри є неантагоністичними?

12. Наведіть приклади ігор з нульовою сумою.
13. Яким чином розрізнюють гравців за ступенем інформованості?
14. Наведіть класифікацію ігор за видом функції виграшів.

3. МАТРИЧНІ ІГРИ

3.1. Подання матричної гри

Матрична гра – це скінченна антагоністична однокрокова гра двох гравців з повною інформацією, функцію виграшів якої подано в матричній формі. Матричними іграми можна описати конфліктні ситуації, пов'язані з плануванням операцій в умовах протидії.

Розглянемо таку конфліктну ситуацію. Для доведення команд керування до своїх структурних підрозділів під час бойових дій одна з протидійних сторін використовує короткохвильові (КХ) та ультракороткохвильові (УКХ) радіостанції. Друга сторона прагне зруйнувати керування військами противника, користуючись для цього стаціонарними й мобільними засобами радіоелектронної протидії (РЕП).

Ефективність системи радіоелектронної протидії можна оцінити середньою кількістю радіостанцій противника, які було заглушено засобами РЕП. Відомо, що при використанні стаціонарних засобів РЕП у середньому заглушаються дві КХ- і чотири УКХ-радіостанції, при використанні авіаційних засобів РЕП – чотири КХ- і шість УКХ-радіостанцій, при використанні мобільних засобів РЕП наземного базування − вісім КХ- та дві УКХ-радіостанції відповідно. Як повинні діяти учасники конфлікту, щоб забезпечити досягнення своїх цілей?

Відповімо на це запитання, використавши методи теорії ігор. Для цього побудуємо формальну модель конфліктної ситуації, тобто опишемо її грою. Подамо сторону, яка здійснює радіоелектронну протидію, як гравця ***A***, його противника – як гравця ***B***. Мета гравця ***A*** полягає в тому, щоб своїми засобами радіоелектронної протидії заглушити якомога більше радіостанцій гравця ***B*** і таким чином максимально порушити керування військами. Мета гравця ***B*** є цілком протилежною і полягає в тому, щоб кількість радіостанцій, приглушених засобами радіоелектронної боротьби противника, була мінімальною. У розглянутій конфліктній ситуації виявляється антагоністичне протиріччя цілей гравців, отже, гра є антагоністичною. Для досягнення своєї мети гравець ***A*** використовує три види засобів радіоелектронної протидії, а гравець ***B*** – два види засобів зв´язку (радіостанцій).

Найпростішою лінією поводження гравця ***A*** є вибір одного з трьох засобів заглушення й використання його протягом усієї операції (чисті стратегії гравця ***A***). Чисті стратегії гравця ***A*** – це детермінований (невипадковий) вибір одного з допустимих варіантів дій і використання його до кінця гри. Чистими стратегіями гравця ***A*** є такі:

A_1 − вибір і використання під час операції тільки стаціонарних установок;

A_2 − вибір і використання під час операції тільки установок повітряного базування;

A_3 − вибір і використання під час операції тільки мобільних установок наземного базування;

Гравець ***B*** має у своєму розпорядженні дві чисті стратегії:

B_1 − вибір і використання під час операції тільки короткохвильових (КХ) радіостанцій;

B_2 − вибір і використання під час операції тільки ультракороткохвильових (УКХ) радіостанцій.

Перед описом конфліктної ситуації було зроблено припущення про те, що заздалегідь відомо, які радіостанції та засоби радіоелектронної протидії буде застосовано в конфлікті, тобто сторони конфлікту мають повну інформацію про можливі дії противника. Таким чином, у розглядуваній грі кожний з гравців має обмежену кількість чистих стратегій, тобто гра є скінченною, з повною інформацією.

Застосування гравцями довільної пари чистих стратегій приводить до певного результату гри – заглушення роботи відповідної кількості радіостанцій. Результат гри при використанні стратегій A_1 і B_1 дорівнюватиме двом, при використанні стратегій A_2 і B_2 – чотирьом і т. д.

Зведемо ці дані в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***	
	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	4	6
A_3	8	2

У лівому стовпці запишемо стратегії гравця ***A***, у верхньому рядку – стратегії гравця ***B***, у кожній клітинці – результат використання відповідної пари чистих стратегій гравців ***A*** і ***B***. Таку таблицю називають платіжною матрицею, або матрицею гри. Кожний елемент матриці характеризує виграш гравця ***A*** (відповідно – програш гравця ***B***) унаслідок застосування пари чистих стратегій. У цілому матриці являють собою функції виграшів.

Оскільки функції виграшів наведено в матричній формі, то досліджувана гра є матричною. Таким чином, реальну конфліктну ситуацію змодельовано матричною грою.

З огляду на те, що гравець **A** має три чисті стратегії, а гравець **B** – дві, матриця гри є прямокутною матрицею розміром 3 × 2 (матрична гра носить назву гри 3 × 2). Для формалізації реальної конфліктної ситуації у вигляді матричної гри необхідно виокремити й пронумерувати всі чисті стратегії кожного гравця та скласти матрицю гри. У загальному випадку гравець **A** має m чистих стратегій A_i, $i = 1, m$, а гравець **B** – n чистих стратегій B_j, $j = 1, n$.

Позначимо результати гри при використанні пари стратегій A_i і B_j через $\alpha(A_i, B_j)$ або через α_{ij}. Тоді матриця гри буде являти собою матрицю розміром $m \times n$, елементами якої є значення α_{ij} (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Стратегії гравця **A**	Стратегії гравця **B**					
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1j}	…	α_{1n}
A_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2j}	…	α_{2n}
			…	…		
A_i	α_{i1}	α_{i2}	…	α_{ij}	…	α_{in}
			…	…		
A_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mj}	…	α_{mn}

Гра $m \times n$ у загальному випадку вважається заданою, якщо визначено впорядковані множини $\{A_i\}$, $i = 1, m$, і $\{B_j\}$, $j = 1, n$, чистих стратегій гравців і матрицю гри $\|\alpha_{ij}\|$.

У багатьох випадках для зручності використання виникає необхідність перетворення матриці гри. Якщо до кожного елемента матриці $\|\alpha_{ij}\|$ додати деяке постійне число c, тобто перейти до матриці $\|\alpha_{ij} + c\|$, то нова матриця $\|\alpha_{ij} + c\|$ буде еквівалентною матриці $\|\alpha_{ij}\|$.

3.2. Розв’язання ігор у чистих стратегіях

Формалізуючи конфлікту ситуацію, тобто подаючи її у вигляді гри $m \times n$, можна розпочинати пошук оптимальних стратегій гравців, які й утворюють розв´язок гри.

В однокроковій грі кожний гравець приймає рішення незалежно від іншого. У розглянутій вище грі це означає, що до початку конфлікту кожний гравець аналізує свої стратегії з урахуванням відповідних дій противника, приймає рішення щодо вибору однієї зі стратегій та реалізує це рішення протягом усього часу проведення операції. За правилами гри, змінення стратегій під час бойових дій до їх закінчення не передбачено.

Наведемо міркування гравця ***A*** під час аналізу гри. Для цього скористаємося матрицею гри (див. табл. 3.1). Кожний елемент матриці означає виграш гравця А та програш гравця В при використанні відповідної пари чистих стратегій.

Таким чином, якщо гравець ***A*** вибирає чисту стратегію $\boldsymbol{A_1}$, то відповідною стратегією гравця ***B*** може бути стратегія $\boldsymbol{B_1}$ або $\boldsymbol{B_2}$. Гравець ***A*** враховує, що йому протидіє розумний, добре інформований супротивник, який своїми діями (вибором відповідної стратегії) буде намагатися перешкодити гравцю ***A*** досягнути своїх цілей. Тому гравець ***A*** буде орієнтуватися на гірший варіант, тобто на те, що для стратегії $\boldsymbol{A_1}$ буде застосовано таку відповідну стратегію, яка забезпечить йому мінімальний виграш. З аналізу рядка матриці 3.1, який відповідає стратегії $\boldsymbol{A_1}$, випливає, що найменший виграш

$$\boldsymbol{\alpha_1} = \boldsymbol{min}_{\{\mathrm{B}_1,\,\mathrm{B}_2\}}\{\boldsymbol{\alpha_{11}},\ \boldsymbol{\alpha_{12}}\} = \boldsymbol{min}\ \{2;\ 5\} = 2$$

при використанні гравцем ***B*** стратегії $\boldsymbol{B_1}$. Аналогічно при використанні гравцем ***A*** стратегії $\boldsymbol{A_2}$ найменшим його виграшем буде

$$\boldsymbol{\alpha_2} = \boldsymbol{min}_{\{\mathrm{B}_1,\,\mathrm{B}_2\}}\{\boldsymbol{\alpha_{21}},\ \boldsymbol{\alpha_{22}}\} = \boldsymbol{min}\{4;\ 6\} = 4,$$

а при використанні стратегії $\boldsymbol{A_3}$ –

$$\boldsymbol{\alpha_3} = \boldsymbol{min}_{\{\mathrm{B}_1,\,\mathrm{B}_2\}}\{\boldsymbol{\alpha_{31}},\ \boldsymbol{\alpha_{32}}\} = \boldsymbol{min}\{8;\ 2\} = 2.$$

Яку стратегію у розглядуваній грі доцільно вибрати гравцю ***A***? Очевидно, ту, яка з усіх $\boldsymbol{\alpha_i}$, $\boldsymbol{i}$ = 1, 3, забезпечить йому найбільший виграш. Ця стратегія вибирається з умови

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{max}_{\{A_1, A_2, A_3\}}\{\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}\} = \boldsymbol{max}\ \{2; 4; 2\} = 4$$

і являє собою стратегію $\boldsymbol{A_2}$. Таким чином, величина $\boldsymbol{\alpha}$ є мінімальним гарантованим виграшем гравця ***A*** при довільних відповідних діях супротивника. При цьому враховується той факт, що гравець ***B*** у своїх відповідних діях не припускається помилок і прорахунків. Інакше виграш гравця ***A*** може тільки збільшитися.

Аналогічно розмірковує і гравець ***B***. При можливому виборі ним стратегії $\boldsymbol{B_1}$ відповідною стратегією гравця ***A*** може бути або стратегія $\boldsymbol{A_1}$, або $\boldsymbol{A_2}$, або $\boldsymbol{A_3}$. Гравець ***B*** усвідомлює, що супротивник буде намагатися нанести йому найбільший збиток (отримати найбільший виграш). Тому гравець ***B*** орієнтується на гірший випадок. З аналізу стовпця матриці для стратегії $\boldsymbol{B_1}$ випливає, що найбільший програш гравця ***B***

$$\boldsymbol{\beta_1} = \boldsymbol{max}_{\{A_1, A_2, A_3\}}\{\boldsymbol{\alpha_{11}}, \boldsymbol{\alpha_{21}}, \boldsymbol{\alpha_{31}}\} = \boldsymbol{max}\ \{2; 4; 8\} = 8$$

у разі застосування гравцем ***A*** стратегії $\boldsymbol{A_3}$.

У разі використання гравцем ***B*** стратегії $\boldsymbol{B_2}$ найбільший програш

$$\boldsymbol{\beta_2} = \boldsymbol{max}_{\{A_1, A_2, A_3\}}\{\boldsymbol{\alpha_{12}}, \boldsymbol{\alpha_{22}}, \boldsymbol{\alpha_{32}}\} = \boldsymbol{max}\ \{4; 6; 2\} = 6$$

за умови застосування гравцем ***A*** стратегії $\boldsymbol{A_2}$. Однак метою гравця ***B*** у грі є досягнення мінімального програшу, тому свою стратегію він буде вибирати з умови

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{min}_{\{B_1, B_2\}}\{\boldsymbol{\beta_1},\ \boldsymbol{\beta_2}\} = \boldsymbol{min}\{8; 6\} = 6.$$

Величина $\boldsymbol{\beta}$ характеризує мінімальний гарантований програш гравця ***B*** у розглядуваній грі. Більше, ніж $\boldsymbol{\beta}$, гравець ***B*** не може програти при довільних відповідних діях гравця ***A*** за умови, що той не припускається помилок. Узагальнимо наведені міркування. Під час аналізу матриці гри гравець ***A*** з урахуванням того, що йому протидіє розумний противник, для кожної стратегії $\boldsymbol{A_i}$ знаходить мінімальне значення виграшу залежно від відповідних стратегій гравця ***B***, тобто

$$\boldsymbol{\alpha_i} = \boldsymbol{min}_{\{B_j\}}\ \boldsymbol{\alpha_{ij}}, \tag{3.1}$$

де $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ – результат гри при використанні чистих стратегій $\boldsymbol{A_i}$ й $\boldsymbol{B_j}$ відповідно. Очевидно, що найкращою стратегією гравця ***A*** в таких умовах є та, яка забезпечує максимальне значення $\boldsymbol{\alpha_i}$, тобто

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{max}_{\{\mathrm{A_i}\}}\, \boldsymbol{\alpha_i},$$

або з урахуванням (3.1)

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{max}_{\{A_i\}}\, \boldsymbol{min}_{\{B_j\}}\, \boldsymbol{\alpha_{ij}}\,. \tag{3.2}$$

Величина ***α*** визначає мінімальний гарантований виграш гравця ***A*** в поточній грі.

Аналіз матриці гри з позиції гравця ***B*** полягає в тому, що для кожної стратегії $\boldsymbol{B_j}$ визначається максимальне значення програшу залежно від відповідних стратегій гравця ***A***, тобто

$$\boldsymbol{\beta_j} = \underset{\{A_j\}}{\boldsymbol{max}}\, \boldsymbol{\alpha_{ij}}. \tag{3.3}$$

З точки зору гравця ***B***, кращою його стратегією буде та, яка забезпечує йому мінімальне значення $\boldsymbol{\beta_j}$, тобто

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{min}_{\{B_j\}}\, \boldsymbol{\beta_j},$$

або з урахуванням (3.3)

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{min}_{\{B_j\}}\, \boldsymbol{max}_{\{A_i\}}\, \boldsymbol{\alpha_{ij}}\,. \tag{3.4}$$

Величина ***β*** характеризує максимальний гарантований програш гравця ***B*** у цій грі.

Знайдемо, як співвідносяться між собою величини ***α*** і ***β***. Для будь-якої пари стратегій $\boldsymbol{A_i}$ і $\boldsymbol{B_j}$

$$\boldsymbol{\alpha_i} = \boldsymbol{min}_{\{B_j\}}\, \boldsymbol{\alpha_{ij}},$$

тоді можна стверджувати, що

$$\boldsymbol{\alpha_i} \le \boldsymbol{\alpha_{ij}}. \tag{3.5}$$

З іншого боку, оскільки

$$\boldsymbol{\beta_j = \max_{\{A_j\}} \alpha_{ij}},$$

то

$$\boldsymbol{\beta_j} \geq \boldsymbol{\alpha_{ij}}. \quad (3.6)$$

Об'єднавши (3.5) і (3.6), отримаємо

$$\boldsymbol{\alpha_i} \leq \boldsymbol{\alpha_{ij}} \leq \boldsymbol{\beta_j},$$

звідки випливає, що

$$\boldsymbol{\alpha_i} \leq \boldsymbol{\beta_j}. \quad (3.7)$$

Оскільки це співвідношення справджується для будь-якої пари стратегій $\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{B_j}$, то, вибираючи $\boldsymbol{A_i}$ як таку стратегію, для якої $\boldsymbol{\alpha_i} = \boldsymbol{\alpha}$, а $\boldsymbol{B_j}$ – як таку, для якої $\boldsymbol{\beta_j} = \boldsymbol{\beta}$, отримаємо

$$\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}. \quad (3.8)$$

Величину $\boldsymbol{\alpha}$ називають *нижньою ціною* гри, а величину $\boldsymbol{\beta}$ – *верхньою ціною* гри.

Стратегія, яка забезпечує гравцю ***A*** виграш, що дорівнює нижній ціні гри $\boldsymbol{\alpha}$, має назву *максимінної стратегії*. *Мінімаксною* стратегією гравця ***B*** називають стратегію, яка забезпечує йому програш $\boldsymbol{\beta}$, що дорівнює верхній ціні гри.

Розглянутий підхід до вибору стратегій гравців відображає ідею отримання ними гарантованих результатів. Кожен гравець орієнтується на гіршу з його точки зору ситуацію: або гравець ***A*** отримує мінімальний виграш $\boldsymbol{\alpha}$, або гравець ***B*** отримує максимальний програш $\boldsymbol{\beta}$ при будь-яких відповідних діях противника. Виключаються помилки в діях противника і можливий ризик у своїх діях. Кожен гравець діє гранично обережно.

Такий принцип обґрунтовування розв'язків гравців у конфліктних ситуаціях дістав назву «принцип *гарантованого результату*», або «принцип *мінімаксу*». У подальшому усі підходи до розв'язання матричних ігор будуть розглядатися, виходячи з цього принципу.

Для пошуку нижньої та верхньої ціни діють таким чином. До матриці гри додають один стовпець, який позначають через $\boldsymbol{\alpha_i}$, і знизу – один рядок, який позначають через $\boldsymbol{\beta_j}$. До кожної клітинки стовпця $\boldsymbol{\alpha_i}$ заносять мінімальний елемент відповідного рядка, а до кожної клітинки рядка $\boldsymbol{\beta_j}$ – максимальний елемент відповідного стовпця матриці гри.

Проілюструємо методику визначення нижньої та верхньої ціни гри на прикладі матриці, яку задано табл. 3.1. Після додання додаткового стовпця $\boldsymbol{\alpha_i}$ і додаткового рядка $\boldsymbol{\beta_j}$ матриця набуде такого вигляду, як табл. 3.3.

Проаналізуємо рядок, що відповідає стратегії $\boldsymbol{A_1}$. Із двох елементів цього рядка мінімальним є елемент $\boldsymbol{\alpha_{11}}$ = 2, який характеризує результат гри за умови використанні чистих стратегій $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{B_1}$.

Таблиця 3.3

$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{B_j}$		$\boldsymbol{\alpha_i}$
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	
$\boldsymbol{A_1}$	2	4	2
$\boldsymbol{A_2}$	4	6	$\boxed{4}$
$\boldsymbol{A_3}$	8	2	2
$\boldsymbol{\beta_j}$	8	$\boxed{6}$	

Записуємо його значення ($\boldsymbol{\alpha_1}$ = 2) у верхню клітинку стовпця $\boldsymbol{\alpha_i}$. Аналогічно в наступну клітинку стовпця $\boldsymbol{\alpha_2}$ запишемо значення елемента $\boldsymbol{\alpha_{21}}$ = 4, яке є мінімальним у рядку, що відповідає стратегії $\boldsymbol{A_2}$, тобто $\boldsymbol{\alpha_2}$ = 4, і т. д. Максимальним серед елементів стовпця $\boldsymbol{\alpha_i}$ буде елемент $\boldsymbol{\alpha_2}$ = 4 (його обведено квадратом). Цей елемент характеризує нижню ціну $\boldsymbol{\alpha}$ гри.

Проведемо аналіз стовпців, які відповідають чистим стратегіям гравця ***B***. Максимальним серед елементів стовпця $\boldsymbol{B_1}$ буде елемент $\boldsymbol{\alpha_{31}}$ ($\boldsymbol{\alpha_{31}}$= 8), який є результатом гри при використанні стратегій $\boldsymbol{A_3}$ і $\boldsymbol{B_1}$. Його значення записуютьс як $\boldsymbol{\beta_1}$ у першу клітинку рядка $\boldsymbol{\beta_j}$.

Оскільки в другому стовпці $\boldsymbol{B_2}$ максимальним є елемент $\boldsymbol{\alpha_{22}}$ = 6, запишемо його значення як $\boldsymbol{\beta_2}$ у другу клітинку рядка $\boldsymbol{\beta_j}$. Серед елементів рядка $\boldsymbol{\beta_j}$ мінімальним є елемент $\boldsymbol{\beta_2}$ = 6, обведений квадратом. Значення цього елемента характеризує верхню ціну гри.

Таким чином, з табл. 3.3 випливає, що в цій грі $\boldsymbol{\alpha}$ = 4, $\boldsymbol{\beta}$ = 6, максимінною стратегією гравця ***A*** є стратегія $\boldsymbol{A_2}$, а мінімаксною стратегією гравця ***B*** – стратегія $\boldsymbol{B_2}$.

Повернемося до питання про пошук оптимальних стратегій гравців. Припустимо, що, розробляючи бізнес-план, гравець ***A*** прийняв рішення використовувати свою максимінну стратегію $\boldsymbol{A_2}$. Оскільки розглянута гра згідно з умовою є грою з повною інформацією, то це рішення негайно стає відомим гравцю ***B***, який при складанні свого плану вирішує відповісти стратегією, що забезпечує йому програш менший, ніж верхня ціна гри.

Зі свого боку, рішення гравця ***B*** стає відомим гравцеві ***A***, який, аналізуючи перший стовпець, робить висновок, що на стратегію $\boldsymbol{B_1}$ він може відповісти стратегією $\boldsymbol{A_3}$, що забезпечить йому виграш, більший за нижню ціну гри. З огляду на те, що і це рішення стає відомим гравцю ***B***, він буде намагатися зменшити свій програш, відповівши на стратегію $\boldsymbol{A_3}$ стратегією $\boldsymbol{B_1}$, і т. д.

Таким чином, в умовах повної інформованості про можливі дії гравців жоден з них до початку роботи з реалізації бізнес-плану не зможе прийняти рішення, яку ж чисту стратегію йому використовувати під час гри, щоб забезпечити собі найбільший виграш або найменший програш. Іншими словами, у цій грі не існує пари чистих стратегій, які максимально задовольняли б цілі гравців.

Розглянемо гру, яку задано матрицею (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{B_j}$		$\boldsymbol{\alpha_i}$
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	
$\boldsymbol{A_1}$	2	4	2
$\boldsymbol{A_2}$	**4**	6	$\boxed{4}$
$\boldsymbol{A_3}$	3	2	2
$\boldsymbol{\beta_j}$	$\boxed{4}$	6	

Нехай гравець ***A*** при плануванні дій прийняв рішення скористатися стратегією $\boldsymbol{A_2}$. Оскільки це рішення стає відомим гравцю ***B***, той у відповідь на рішення про прийняття стратегії $\boldsymbol{A_2}$ приймає рішення використати стратегію $\boldsymbol{B_1}$. Аналізуючи стовпець матриці гри, який відповідає стратегії $\boldsymbol{B_1}$, гравець ***A*** робить висновок, що відхилятися від стратегії $\boldsymbol{A_2}$ у відповідь на стратегію $\boldsymbol{B_1}$ йому не вигідно, бо при використанні будь-якої іншої стратегії його виграш буде меншим, ніж при використанні стратегії $\boldsymbol{A_2}$.

Гравцю ***B*** також невигідно відхилятися від стратегії $\boldsymbol{B_1}$ у відповідь на використання стратегії $\boldsymbol{A_2}$, оскільки в іншому випадку (наприклад, при використанні стратегії $\boldsymbol{B_2}$ у відповідь на використання стратегії $\boldsymbol{A_2}$) його програш збільшується. Отже, у цій грі існує пара оптимальних чистих стратегій $\boldsymbol{A_2^*}$ і $\boldsymbol{B_2^*}$ (позначимо їх зірочкою), які в умовах активної протидії гравців максимально задовольняють їх цілям, забезпечуючи одному максимальний виграш, а другому – мінімальний програш. Іншими словами, ця гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Визначимо, які властивості повинна мати матриця, щоб гра мала розв'язок у чистих стратегіях. Для цього знайдемо значення нижньої і верхньої ціни гри. З табл. 3.4 випливає, що нижня ціна гри дорівнює верхній, тобто

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = 4.$$

Елемент матриці $\boldsymbol{\alpha_{21}}$ = 4, який відповідає нижній і верхній ціні гри (у таблиці виділено) є мінімальним у рядку $\boldsymbol{A_2}$ та максимальним у стовпці $\boldsymbol{B_1}$. Такий елемент називають *сідловим елементом*. Звідси можна зробити такий висновок: якщо матриця гри має сідловий елемент, то гра має розв'язок у чистих стратегіях.

У практичній діяльності можуть траплятись ігри, матриці яких мають не один, а кілька сідлових елементів. Приклад такої матриці наведено в табл. 3.5.

Таблиця 3.5

$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{B_j}$				$\boldsymbol{\alpha_i}$
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	
$\boldsymbol{A_1}$	5	6	9	4	4
$\boldsymbol{A_2}$	**8**	**7**	8	**7**	$\boxed{7}$
$\boldsymbol{A_3}$	7	6	6	3	3
$\boldsymbol{\beta_j}$	8	$\boxed{7}$	9	$\boxed{7}$	

Неважко переконатися, що в наведеній матриці є два сідлових елементи: елемент $\boldsymbol{\alpha_{22}}$, розміщений на перетині рядка A_2 і стовпця $\boldsymbol{B_2}$, та елемент $\boldsymbol{\alpha_{24}}$, розміщений на перетині рядка A_2 і стовпця $\boldsymbol{B_4}$. Це означає, що гра має розв'язок у чистих стратегіях, причому розв'язками є дві рівноправні пари оптимальних чистих стратегій $\{\boldsymbol{A_2^*}, \boldsymbol{B_2^*}\}$ і $\{\boldsymbol{A_2^*}, \boldsymbol{B_4^*}\}$.

На основі викладеного вище випливає, що гру можна розв'язати в чистих стратегіях, якщо матриця гри має один або кілька сідлових елементів, тобто при рівності нижньої та верхньої ціни гри ($\boldsymbol{\alpha}$ = $\boldsymbol{\beta}$) або з урахуванням (3.2) і (3.4) за умови, що

$$\boldsymbol{max}_{\{A_i\}}\,\boldsymbol{min}_{\{B_j\}}\,\boldsymbol{\alpha}_{ij} = \boldsymbol{min}_{\{B_j\}}\,\boldsymbol{max}_{\{A_i\}}\,\boldsymbol{\alpha}_{ij}. \tag{3.9}$$

Розв'язання гри полягає в тому, що знаходиться одна або кілька пар оптимальних чистих стратегій $\{\boldsymbol{A}_i^*,\ \boldsymbol{B}_j^*\}$, відхилятися від яких гравцям не має сенсу. Ситуацію, при якій жоден з гравців не має розумних підстав для змінення своєї стратегії, називають *ситуацією рівноваги*. Таким чином, гра, матриця якої має один або кілька сідлових елементів, характеризується ситуацією рівноваги, якщо гравці дотримуються своїх оптимальних стратегій.

3.3. Змішані стратегії

На практиці конфліктні ситуації, що описуються іграми із сідловим елементом, трапляються дуже рідко. Більш поширеними є випадки, коли матриця гри не має сідлового елемента. При цьому, як випливає з розглянутого вище прикладу, жоден з гравців не має такої чистої стратегії, яка повністю задовольняла б його цілям у цій грі.

Іншими словами, гра, матриця якої не містить сідлових елементів, характеризується нестійкістю. Пояснюється це тим, що за умовою гри передбачувані рішення одного гравця негайно стають відомими його противнику, який уживає відповідні дії.

Повернемося до гри, матриця якої наведена табл. 3.1. Припустимо, що гравець ***B*** прийняв рішення використовувати стратегію $\boldsymbol{B_2}$. Гравець ***A***, орієнтуючись на найгірший випадок, коли противник знає його розв'язок, змушений відповісти стратегією $\boldsymbol{A_3}$, при якій його виграш становить величину, що дорівнює двом. Однак якби гравець ***A*** мав можливість якимось чином приховати своє рішення і тим самим знизити ступінь інформованості гравця ***B*** щодо своїх дій, він на стратегію $\boldsymbol{B_2}$ відповів би стратегією $\boldsymbol{A_2}$ і тим самим збільшив би величину свого виграшу до 6. Отже, в ситуації, що розглядається, гравцям необхідно приховувати свої задуми. Досягти цього можна, уводячи елементи випадковості в дії гравців, при яких кожний їх крок виявляється непередбачуваним для противника.

Нехай під час прийняття свого рішення при проведенні гри гравець ***A*** з імовірністю $\boldsymbol{p_1}$ орієнтується на вибір стратегії $\boldsymbol{A_1}$, з імовірністю $\boldsymbol{p_2}$ – на вибір стратегії $\boldsymbol{A_2}$ і з імовірністю $\boldsymbol{p_3}$ – на вибір стратегії $\boldsymbol{A_3}$.

Тепер його супротивник ніякими міркуваннями не зможе точно передбачити яку ж стратегію A_1, A_2 чи A_3 вибере гравець ***A*** для використання під час гри. Максимум, що тепер знає гравець ***B***, – це розподіл імовірностей використання гравцем ***A*** своїх стратегій A_1, A_2, A_3.

Тут ми підходимо до дуже важливого поняття теорії ігор – *змішаної стратегії*. Стратегію, яка полягає у випадковому чергуванні чистих стратегій, називають *змішаною стратегією гравця*.

Задається змішана стратегія у вигляді розподілу ймовірностей використання гравцем своїх чистих стратегій. Якщо в загальному випадку гравець ***A*** має ***m*** чистих стратегій A_1, A_2, …, A_m, а гравець ***B*** – ***n*** чистих стратегій B_1, B_2, …, B_n, то змішаною стратегією гравця ***A*** є стратегія

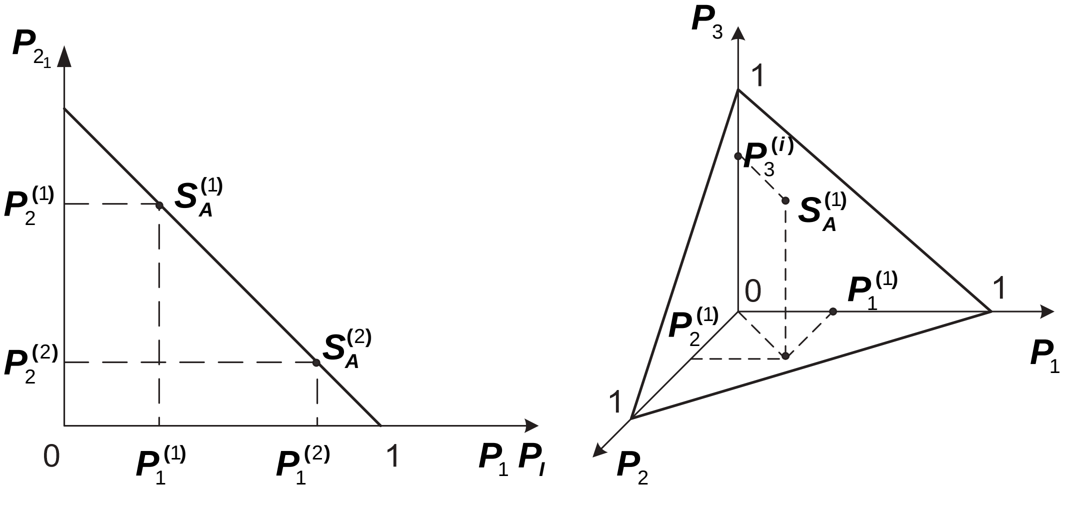
$$S_A = \{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots,\ p_m\}, \tag{3.10}$$

де p_i, $i = (1, m)$, – імовірність використання гравцем ***A*** чистої стратегії A_i, а змішаною стратегією гравця ***B*** – стратегія

$$S_B = \{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots,\ q_n\}, \tag{3.11}$$

де q_j, $j = (1, n)$, – імовірність використання гравцем ***B*** чистої стратегії B_j.

Сукупність змішаних стратегій кожного з гравців є незліченною множиною. Це підтверджується такою геометричною інтерпретацією змішаних стратегій. Припустимо, що гравець ***A*** має дві чистих стратегії A_1 і A_2. Накреслимо систему координат $p_1 0 p_2$ (рис. 3.1, *а*).



а *б*

Рис. 3.1

Оскільки значення ймовірностей $\boldsymbol{p_1}$ і $\boldsymbol{p_2}$ можуть змінюватися тільки від 0 до 1, відкладемо на осях координат відрізки одиничної довжини і з'єднаємо їх кінці відрізком прямої. Тоді кожна точка цього відрізка (наприклад, $\boldsymbol{S_A^{(1)}}$) буде відповідати одній зі змішаних стратегій гравця ***A***. Однак з огляду на те, що множина точок відрізка прямої є незліченною, незліченною є й множина змішаних стратегій гравця ***A***.

Якщо кількість чистих стратегій гравця ***A*** дорівнює трьом, то множина змішаних стратегій являє собою частину площини в тривимірному просторі, обмеженою рівнобічним трикутником (рис. 3.1, *б*). Кожна точка цієї площини (наприклад, $\boldsymbol{S_A^{(1)}}$) буде відповідати одній зі змішаних стратегій гравця ***A***. У загальному випадку, коли гравець ***A*** має ***m*** чистих стратегій, множиною його змішаних стратегій є частина гіперплощини в ***m***-вимірному просторі. Усе наведене вище також стосується й гравця ***B***.

З рис. 3.1 випливає, що чисті стратегії є частковими випадками змішаної стратегії. Дійсно, за означенням, за наявності чистої стратегії передбачається невипадковий вибір одного з допустимих варіантів дій і використання його до закінчення гри. Іншими словами, імовірність використання стратегії $\boldsymbol{A_i}$ (якщо її вибрано) у грі з чистими стратегіями дорівнює одиниці.

Тоді стратегію $\boldsymbol{A_i}$ можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{A_i} = \{0; 0; \ldots; 1; \ldots; 0\},$$

де одиниця є на позиції $\boldsymbol{p_i}$ розподілу ймовірностей (див. формулу (3.10)).

Аналогічно чисту стратегію $\boldsymbol{B_j}$ можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{B_j} = \{0; 0; \ldots; 1; \ldots; 0\},$$

де одиниця є на позиції $\boldsymbol{q_j}$ розподілу ймовірностей (див. формулу (3.11)).

Оскільки застосування будь-якої чистої стратегії в складі змішаної є випадковою подією, то випадковим буде і результат гри. У цьому сенсі використання змішаних стратегій, здавалося б, має ускладнювати становище гравців.

Дійсно, використовуючи змішану стратегію в одноразовому акті гри, гравець ***A***, наприклад, може отримати виграш, що відповідає мінімальному елементу матриці гри, тобто менший виграш, ніж він отримав би, застосовуючи максимінну стратегію.

Однак йдеться про те, що, переходячи до змішаних стратегій, кожному з гравців тепер необхідно оцінювати свій виграш (або програш) із застосуванням математичного сподівання (середнього значення) результату гри за виразом

$$\alpha(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p_i q_j. \tag{3.12}$$

З огляду на те, що кожен елемент α_{ij} матриці гри належить до значення суми з певною вагою $p_i q_j$, при формуванні змішаної стратегії гравець ***A*** буде намагатися зробити ваговий коефіцієнт для мінімального елемента якомога меншим (вибрати якомога менше значення p_i), а гравець ***B*** – якомога більшим. Тепер антагоністичне протиріччя гравців виявляється у виборі відповідних розподілів імовірностей.

Результат гри $\alpha(S_A, S_B)$ є функцією змінніх p_i і q_j. Оскільки множини $\{p_i\}$ і $\{q_j\}$ є незліченними множинами, функція $\alpha(S_A, S_B)$ є неперервною функцією змінних p_i і q_j.

У наведеному вище означенні змішаної стратегії передбачається багаторазове повторення гри. Випадкове чергування чистих стратегій реалізується шляхом несподіваного переходу від одного способу дій до іншого при черговому повторенні гри. Як же можна реалізувати змішану стратегію, якщо гра після закінчення більше не повторюється?

У такій ситуації як змішану стратегію використовують так звану фізичну суміш чистих стратегій. Фізична суміш чистих стратегій являє собою одночасне їх використання у відсотковому співвідношенні, яке визначається ймовірністю виникнення чистих стратегій у змішаній.

Якщо повернутися до гри, заданої табл. 3.1, то змішану стратегію $S_A = \{0{,}3; 0{,}5; 0{,}2\}$ гравця ***A*** можна трактувати як одночасне застосування під час бойових дій 30 % стаціонарних установок, 50 % установок повітряного базування й 20 % пересувних установок наземного базування від загальної кількості установок радіоелектронної протидії.

Припустимо, що перехід до змішаних стратегій у матричних іграх без сідлового елемента, дає змогу гравцю ***A*** забезпечити собі виграш, більший за α, гравцю ***B*** – програш, менший за β. Переконаємося в цьому на прикладі гри, матрицю якої наведено табл. 3.1.

Нехай гравець ***A*** використовує змішану стратегію $S_A^{(1)} = \{0{,}3; 0{,}5; 0{,}2\}$, а гравець ***B*** **–** змішану стратегію $S_B^{(1)} = \{0{,}4; 0{,}6\}$. Тоді відповідно до (3.12) виграш гравця ***A*** (програш гравця ***B***)

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A}, \boldsymbol{S_B}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{\alpha_{ij} p_i q_j} = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 +$$

$$+ 6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 4{,}14.$$

Таким чином, переходячи до змішаних стратегій, гравець ***A*** забезпечує собі виграш, більший за нижню ціну гри, а гравець ***B*** – програш, менший за верхню ціну гри. Чи може гравець ***A*** збільшити свій виграш? Змінимо стратегію гравця ***A*** на стратегію $\boldsymbol{S_A^{(2)}} = \{0{,}2; 0{,}7; 0{,}1\}$ при такій самій стратегії гравця ***B***. Тоді виграш гравця ***A***

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A}, \boldsymbol{S_B}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{\alpha_{ij} p_i q_j} = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 +$$

$$+ 6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 4{,}72.$$

Отже, змінення стратегії гравця ***A*** привела до збільшення його виграшу. Отже, шляхом підбору значень імовірностей $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}$ можна спробувати поліпшити результат гравця ***A*** та знайти його оптимальну змішану стратегію. Однак фактично такий шлях пошуку оптимальної змішаної стратегії не приводить до успіху, оскільки кількість змішаних стратегій кожного гравця є нескінченною, і їх просте перебирання є неможливим. Під час пошуку оптимальних змішаних стратегій доцільно керуватися принципом мінімаксу.

Дійсно, перехід від стратегії $\boldsymbol{S_A^{(1)}}$ до стратегії $\boldsymbol{S_A^{(2)}}$ у розглядуваному прикладі приводить до збільшення виграшу гравця ***A*** в умовах незмінної стратегії $\boldsymbol{S_B^{(1)}}$ гравця ***B***. Однак збільшення виграшу гравця ***A*** є еквівалентним збільшенню програшу гравця ***B***, якому це не вигідно. Тому гравець ***B*** буде намагатися знайти таку змішану стратегію, яка зменшила би виграш гравця ***A***.

Позначимо через $\boldsymbol{\{S_A\}}$ множину змішаних стратегій гравця ***A***, а через $\boldsymbol{\{S_B\}}$ – множину змішаних стратегій гравця ***B***. Якщо гравець ***A*** застосовує свою змішану стратегію $\boldsymbol{S_A}$, то, орієнтуючись на найгірший випадок, він може забезпечити собі гарантований виграш

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A}) = \boldsymbol{min}_{\{\boldsymbol{S_B}\}}\ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A}, \boldsymbol{S_B}), \qquad (3.13)$$

де $\alpha(S_A, S_B)$ **–** результат гри у разі використання пари змішаних стратегій S_A і S_B.

Пошук мінімуму значення $\alpha(S_A, S_B)$ здійснюється на множині $\{S_B\}$ значень змішаних стратегій гравця ***B***. Серед множини своїх стратегій гравець ***B*** вибирає таку, яка забезпечить йому максимальну величину $\alpha(S_A)$, тобто

$$\alpha_\text{с} = max_{\{S_A\}}\,\alpha(S_A) = \underset{\{S_\text{A}\}}{max}\, min_{\{S_B\}}\ \alpha(S_A, S_B). \qquad (3.14)$$

Величина $\alpha_\text{с}$ є нижньою ціною гри у змішаних стратегіях. Зі свого боку, гравець ***B***, застосовуючи стратегії з множини $\{S_B\}$, у гіршому випадку забезпечить собі програш

$$\beta(S_B) = min_{\{S_A\}}\ \alpha(S_A, S_B). \qquad (3.15)$$

Серед своїх стратегій $\{S_B\}$ гравець ***B*** скористається тією, яка забезпечить йому мінімальну величину $\beta(S_B)$, тобто

$$\beta_\text{с} = min_{\{S_B\}}\,\beta(S_B) = \underset{\{S_B\}}{min}\, max_{\{S_A\}}\ \alpha(S_A, S_B). \qquad (3.16)$$

Величина $\beta_\text{с}$ є верхньою ціною гри у змішаних стратегіях.

Установимо, у якому співвідношенні знаходяться $\alpha_\text{с}$ і $\beta_\text{с}$. Для цього скористуємося такими міркуваннями, як і при викладенні співвідношення (3.8). З (3.13) випливає, що

$$\alpha(S_A) \le \alpha(S_A, S_B), \qquad (3.17)$$

а з (3.15) –

$$\beta(S_B) \ge \alpha(S_A, S_B). \qquad (3.18)$$

Об'єднавши вирази (3.17) і (3.18), отримаємо

$$\alpha(S_A) \le \beta(S_B). \qquad (3.19)$$

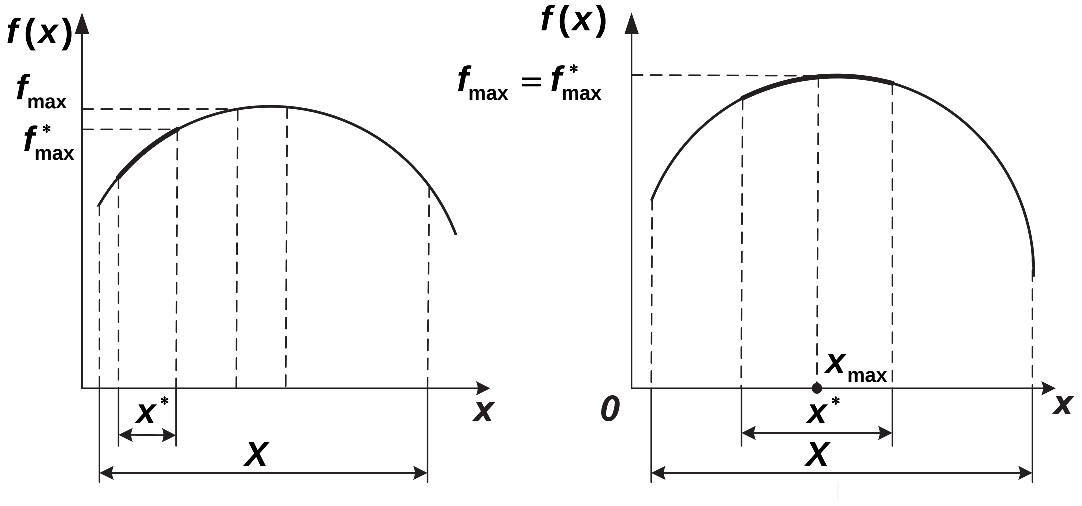
Співвідношення (3.19) справджується для будь-якої пари S_A і S_B, тому вибираючи як S_A таку стратегію, при використанні якої $\alpha(S_A) = \alpha_\text{с}$, а як S_B таку стратегію, при використанні якої $\beta(S_B) = \beta_\text{с}$, остаточно отримаємо

$$\alpha_\text{с} \le \beta_\text{с}. \qquad (3.20)$$

Визначимо, у якому співвідношенні перебувають величини $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{max}_{\{\mathrm{A_i}\}}\,\boldsymbol{\alpha_\mathrm{i}}$, $\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{c} = \boldsymbol{max}_{\{S_A\}}\,\alpha(\boldsymbol{S_A})$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{min}_{\{B_j\}}\,\boldsymbol{\beta_j}$, $\boldsymbol{\beta}_\mathrm{c} = \boldsymbol{min}_{\{S_B\}}\,\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{S_B})$.

Множина чистих стратегій $\{\boldsymbol{A_i}\}$ є підмножиною множини змішаних стратегій $\{\boldsymbol{S_A}\}$, аналогічно як множина чистих стратегій $\{\boldsymbol{B_j}\}$ є підмножиною множини змішаних стратегій $\{\boldsymbol{S_A}\}$. З іншого боку, $\boldsymbol{\alpha_\mathrm{i}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{A_i})$ є функцією аргументу $\boldsymbol{A_i}$ і на множині $\{\boldsymbol{A_i}\}$ збігається з функцією α($\boldsymbol{S_A}$), оскільки чиста стратегія $\boldsymbol{A_i}$ є частковим випадком змішаної стратегії $\boldsymbol{S_A}$. Те ж саме можна сказати й про область значень функції $\boldsymbol{\beta_j} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{B_j})$.

Скористаємося означенням поняття звуження функції. Якщо функцію ***f(x)*** визначено на множині $\boldsymbol{X}$, то її звуженням на множині $\boldsymbol{X}^*$ (яка є підмножиною множини $\boldsymbol{X}$, тобто $\boldsymbol{X}^* \cap X$) називають функцію $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$, визначену на множині $\boldsymbol{X}^*$. Вона збігається на цій множині з функцією ***f(x)***. На рис. 3.2 і 3.3 тонкою лінією зображено функцію ***f(x)***, а стовщеною – її звуження $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$ на множині $\boldsymbol{X}^* \cap X$.



а б

Рис. 3.2

Розглянемо рис. 3.2. Якщо значення аргументу $\boldsymbol{x_{max}}$, при якому функція ***f(x)*** набуває максимуму, не належить до множини $\boldsymbol{X}^*$ (рис. 3.2, *а*), то, як випливає з рисунка, виконується відношення

$$\boldsymbol{f_{max}} > \boldsymbol{f^*_{max}},$$

або

$$\boldsymbol{max_X}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{max_{X^*}}\,\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}). \tag{3.21}$$

У тому випадку, коли $\boldsymbol{x_{max}}$ одночасно належить множинам $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{X}^*$ (рис. 3.2, *б*) справджується рівність

$$\boldsymbol{f_{max}} = \boldsymbol{f^*_{max}},$$

або

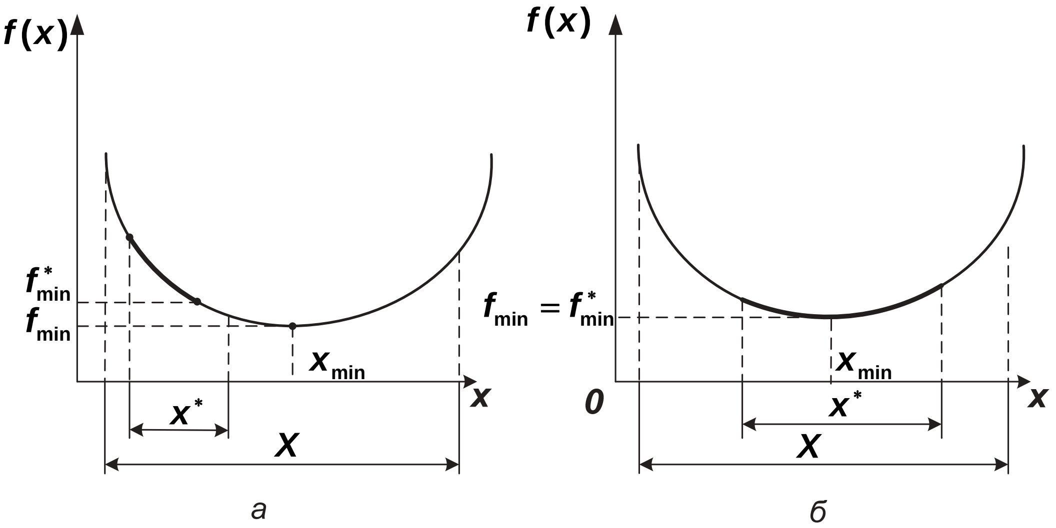
$$\boldsymbol{max_X\, f(x)} = \boldsymbol{max_{X^*}\, f^*(x)}. \tag{3.22}$$

Об'єднавши (3.21) і (3.22), отримаємо співвідношення, яке зв'язує максимуми функції $\boldsymbol{f(x)}$ та її звуження $\boldsymbol{f^*(x)}$:

$$\boldsymbol{max_X\, f(x)} \geq \boldsymbol{max_{X^*}\, f^*(x)}. \tag{3.23}$$

Аналогічно для функцій на рис. 3.3 має місце таке співвідношення:

$$\boldsymbol{min_X\, f(x)} \leq \boldsymbol{min_{X^*}\, f^*(x)}. \tag{3.24}$$



а *б*

Рис. 3.3

Виходячи з викладеного вище, можна зробити висновок, що функція $\boldsymbol{\alpha_i}$ є звуженням функції $\alpha\boldsymbol{(S_A)}$ на множині $\boldsymbol{\{A_i\}}$, а функція $\boldsymbol{\beta_j}$ – звуженням функції $\boldsymbol{\beta(S_B)}$ на множині $\boldsymbol{\{B_j\}}$. Тоді з урахуванням (3.23) і (3.24) можна записати

$$\max_{\{S_A\}} \alpha(S_A) \;\geq\; \max_{\{A_i\}} \alpha_i,$$

$$\min_{\{S_A\}} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{S_B}) \ \leq \ \min_{\{B_j\}} \boldsymbol{\beta_j},$$

або з урахуванням (3.14) і (3.16)

$$\boldsymbol{\alpha_c} \geq \boldsymbol{\alpha}; \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{\beta_c} \leq \boldsymbol{\beta}. \tag{3.26}$$

Об'єднавши (3.20), (3.25) і (3.26), отримаємо співвідношення

$$\boldsymbol{\alpha} \ \leq \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{c}} \ \leq \ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{c}} \leq \boldsymbol{\beta}, \tag{3.27}$$

яке зв'язує нижню й верхню ціну гри чистих і змішаних стратегій.

3.4. Теореми матричних ігор

Вище було сказано, що матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях, коли $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, тобто коли матриця гри має *сідловий* елемент, або, що те є тим самим, виконується умова (2.9). Якщо сідлового елемента немає, то гра характеризується нестабільністю і неможливо знайти пару таких чистих стратегій, які найбільшою мірою задовольняли б цілям гравців у цій грі. Якщо це так, то можна спробувати пошукати розв'язок гри в змішаних стратегіях. Однак перш ніж переходити до пошуку такого розв'язку, необхідно з'ясувати, чи існує він взагалі.

Для цього застосуємо *основну теорему* матричних ігор (або теорему про мінімакс), яка формулюється так: для матричної гри з будь-якою матрицею величини

$$\boldsymbol{\alpha_c} = \boldsymbol{max}_{\{S_A\}}\, \boldsymbol{min}_{\{S_B\}}\, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A},\ \boldsymbol{S_B}) \text{ і } \boldsymbol{\beta_c} = \boldsymbol{min}_{\{S_B\}}\, \boldsymbol{max}_{\{S_A\}}\, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A},\ \boldsymbol{S_B})$$

існують і є однаковими [4].

Іншими словами, будь-яка матрична гра має розв'язок у чистих або змішаних стратегіях. Стратегії $\boldsymbol{S_A^*}$ і $\boldsymbol{S_B^*}$, які задовольняють умову

$$\max_{\{S_A\}} \min_{\{S_B\}} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A}, \boldsymbol{S_B}) = \min_{\{S_B\}} \max_{\{S_A\}} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A}, \boldsymbol{S_B}), \tag{3.28}$$

називають оптимальними змішаними стратегіями.

Доведення основної теореми матричних ігор є дуже громіздким [4, 6], тому наводити його не будемо, а обмежимося деякими поясненнями результатів, що випливають з цієї теореми. Насамперед слід зазначити, що навіть якщо нижня ціна гри $\boldsymbol{\alpha}$ не дорівнює верхній ціні гри $\boldsymbol{\beta}$, все одно існує ситуація рівноваги, яка забезпечується вже змішаними стратегіями $\boldsymbol{S_A^*}$ і $\boldsymbol{S_B^*}$, відхилятися від яких у грі обом гравцям недоцільно. Будь-яке відхилення гравців від стратегії $\boldsymbol{S_A^*}$ або $\boldsymbol{S_B^*}$ неминуче призведе до зменшення виграшу одного з них і збільшення програшу іншого.

З аналізу (3.28) випливає, що оптимальний розв'язок гри в змішаних стратегіях відповідає сідловій точці функції $\boldsymbol{\alpha(S_A^*, S_B^*)}$ (рис. 3.4).

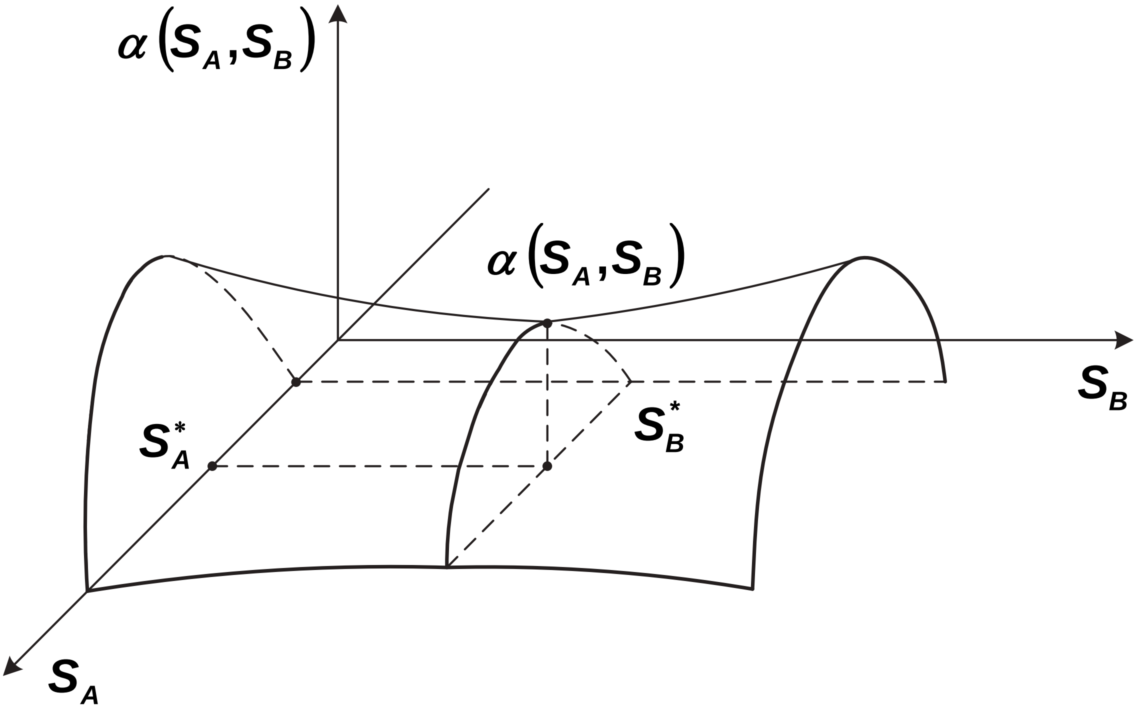


Рис. 3.4

На відміну від розв'язку гри в чистих стратегіях, який відповідав сідловому елементу матриці гри, тут йдеться саме про сідлову точку, оскільки функція $\boldsymbol{\alpha(S_A , S_B)}$ є неперервною функцією змінних $\boldsymbol{S_A}$ і $\boldsymbol{S_B}$.

Нарешті, як випливає з (3.19), маємо такий результат гри при використанні оптимальних змішаних стратегій:

$$\boldsymbol{\alpha(S_A^*, S_B^*) = \alpha_c = \beta_c}.$$

У теорії матричних ігор величину

$$\boldsymbol{v = \alpha(S_A^*, S_B^*)} \tag{3.29}$$

називають ціною гри.

В основній теоремі матричних ігор стверджується, що розв'язок будь-якої матричної гри існує, причому цей розв'язок може бути або в чистих (при $\alpha = \beta$), або в змішаних (при $\alpha \neq \beta$) стратегіях. Тепер необхідно знайти спосіб обчислення цього розв'язку. Це можна зробити з допомогою теореми *про активні стратегії* [4].

Нагадаємо, що змішаною стратегією гравця ***A*** є стратегія

$$S_A = \{p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_m\},$$

де p_1 – імовірність використання гравцем чистої стратегії A_1;

p_2 – імовірність використання гравцем чистої стратегії A_2;

p_i – імовірність використання гравцем чистої стратегії A_i і т. д.

Однак при формуванні своєї змішаної стратегії гравець ***A*** може скористатися не всіма своїми чистими стратегіями, а тільки їх частиною. Так, для організації радіоелектронної протидії гравець ***A*** в розглянутому вище прикладі може скористатися тільки стаціонарними установками та мобільними установками наземного базування, хоча в його розпорядженні є ще й установки повітряного базування. Тоді однією з можливих змішаних стратегій гравця ***A*** є стратегія $S_A = \{0{,}3; 0; 0{,}7\}$. Оскільки установки повітряного базування при формуванні змішаної стратегії не використовуються, то ймовірність p_2 використання чистої стратегії A_2 у змішаній стратегії S_A дорівнює нулю.

Чисті стратегії, які належать до змішаної стратегії гравця з імовірностями, що є відмінними від нуля, називають активними стратегіями. Відповідно до цього означення в розглядуваному прикладі активними є стратегії A_1 і A_3.

У загальному випадку для стратегії $S_A = \{p_1, p_2, \dots, p_k, 0, \dots, 0\}$ активними є стратегії $A_1, A_2, \dots, A_k$, а для стратегії $S_B = \{q_1, q_2, \dots, q_l, 0, \dots, 0\}$ – стратегії $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_l$.

Теорема про активні стратегії: якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш (програш) залишається незміннім і дорівнює ціні гри незалежно від того, яку стратегію (чисту чи змішану) застосовує його противник, якщо він тільки не виходить за межі своїх активних стратегій.

Для доведення цієї теореми припустимо, що $S_A^* = \{p_1^*, p_2^*, \dots, p_k^*, \dots, p_n^*\}$ – оптимальна змішана стратегія гравця ***A***, а $S_B^* = \{q_1^*, q_2^*, ..., q_j^*, ..., q_l^*\}$ – оптимальна змішана стратегія гравця ***B***. Зауважимо, що в змішаній стратегії S_B^* гравець ***B*** використовує тільки активні стратегії $B_1, B_1, \dots, B_j$ із загальної кількості стратегій $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_l, ..., B_i$. Тоді відповідно до (3.29) маємо такий результат гри:

$$\alpha(S_A^*, S_B^*) = v. \qquad (3.30)$$

З іншого боку, результат гри при використанні гравцями оптимальних змішаних стратегій S_A^* і S_B^* можна записати так:

$$\alpha(S_A^*, S_B^*) = \alpha(S_A^*, B_1)q_1^* + \alpha(S_A^*, B_2)q_2^* + \dots$$

$$\dots + \alpha(S_A^*, B_l)q_l^* = \sum_{j=1}^{l} \alpha(S_A^*, B_j)q_j^*. \qquad (3.31)$$

де $\alpha(S_A^*, B_j)$ – результат гри при використанні гравцем ***A*** оптимальної змішаної стратегії S_A^*, а гравцем ***B*** – чистої стратегії B_j.

Об'єднавши вирази (3.30) і (3.31), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha(S_A^*, B_j)q_j^* = v. \qquad (3.32)$$

Кількість активних чистих стратегій у змішаній стратегії S_B^* гравця ***B*** дорівнює l (стратегії $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_l$), тому справджується таке співвідношення:

$$q_1^* + q_2^* + \dots + q_j^* + \dots + q_l^* = \sum_{j=1}^{l} q_j^* = 1. \qquad (3.33)$$

Із зіставлення виразів (3.32) і (3.33) випливає, що співвідношення (3.32) буде виконуватися тільки за умови

$$\alpha(S_A^*, B_j) = v, \qquad (3.34)$$

що легко перевіряється шляхом підставлення (3.34) у (3.32) з урахуванням (3.33). Однак вираз (3.34) означає, що якщо гравець ***A*** використовує оптимальну змішану стратегію S_A^*, то його виграш буде дорівнювати v при будь-якій відповідній активній (чистій) стратегії гравця ***B***, що й доводить теорему. У тому випадку, коли гравець ***B*** вийде за межі своїх активних стратегій, умову (3.33) не буде виконано, а отже, не буде виконано й умову (3.34).

На закінчення зазначимо, що можна довести, що кількість активних стратегій кожного з гравців ***A*** і ***B*** у грі з матрицею $n \times m$ не може перевищувати найменше із чисел ***m*** і ***n***. Це означає, що якщо, наприклад, гравець ***A*** має чотири чисті стратегії, а гравець ***B*** – дві (гра 4 × 2), то кількість активних стратегій і гравця ***A***, і гравця ***B*** буде на більше двох [4].

3.5. Аналітичний метод розв'язання матричних ігор

Теорема про активні стратегії, доведена вище, дає змогу безпосередньо розв’язати різні матричні ігри. Найпростіші з них – ігри 2 × 2 – можна розв’язувати аналітичним методом. Припустимо, що реальну конфліктну ситуацію наведено матричною грою 2 × 2 (табл. 3.6).

Таблиця 3.6

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	α_{11}	α_{12}
A_2	α_{21}	α_{22}

Якщо матриця гри не містить сідлового елемента, то розв'язок гри слід шукати в змішаних стратегіях. Зазначимо, що при формуванні змішаних стратегій S_A і S_B кожен з гравців має не більше двох чистих стратегій.

Позначимо через p_1 імовірність використання чистої стратегії A_1, а через p_2 – чистої стратегії A_2 у змішаній стратегії S_A гравця ***A***. Тоді оптимальну змішану стратегію гравця ***A*** можна записати так:

$$S_A^* = \{p_1^*, p_2^*\}.$$

Нехай гравець ***B*** у відповідь на оптимальну змішану стратегію S_A^* гравця ***A*** застосовує чисту стратегію B_1. Тоді відповідно до теореми про активні стратегії виграш гравця ***A*** має дорівнювати ціні гри, тобто

$$\alpha(S_A^*, B_1) = v. \qquad (3.35)$$

Однак у змішаній стратегії S_A^* чиста стратегія A_1 виникає з імовірністю p_1^*, а чиста стратегія A_2 – з імовірністю p_2^*.

Тому виграш гравця ***A***

$$\alpha(S_A^*, B_1) = \alpha(A_1, B_1)p_1^* + \alpha(A_2, B_2)p_2^* = \alpha_{11}p_1^* + \alpha_{21}p_2^*. \quad (3.36)$$

Об'єднавши (3.35) і (3.36), отримаємо

$$\alpha_{11}p_1^* + \alpha_{21}p_2^* = v. \quad (3.37)$$

Розглянемо іншу ситуацію, коли у відповідь на змішану стратегію S_A^* гравця ***A*** гравець ***B*** застосовує стратегію B_2. У цьому випадку гравець ***A*** відповідно до теореми про активні стратегії забезпечить собі виграш, що дорівнює ***v***, тобто

$$\alpha(S_A^*, B_2) = v.$$

З іншого боку,

$$\alpha(S_A^*, B_2) = \alpha_{12}p_1^* + \alpha_{22}p_2^*,$$

або

$$\alpha_{12}p_1^* + \alpha_{22}p_2^* = v. \quad (3.38)$$

Прирівнявши ліві частини виразів (3.37) і (3.38), отримаємо

$$\alpha_{12}p_1^* + \alpha_{22}p_2^* = \alpha_{11}p_1^* + \alpha_{21}p_2^*. \quad (3.39)$$

Випадкові події, що виявляються у виникненні чистих стратегій A_1 і A_2 у змішаній стратегії S_A^*, становлять повну групу подій, тобто

$$p_1^* + p_2^* = 1. \quad (3.40)$$

Виразимо з (3.40) імовірність p_2^* через p_1^*:

$$p_2^* = 1 - p_1^*. \quad (3.41)$$

Підставимо цей вираз у (3.39):

$$\boldsymbol{\alpha_{11}p_1^*} + \boldsymbol{\alpha_{21}}\,(1 - \boldsymbol{p_2^*}) = \boldsymbol{\alpha_{12}p_1^*} + \boldsymbol{\alpha_{22}}\,(1 - \boldsymbol{p_1^*}).$$

Розв'язавши це рівняння відносно $\boldsymbol{p_1^*}$, отримаємо

$$\boldsymbol{p_1^*} = \frac{\boldsymbol{\alpha_{22} - \alpha_{12}}}{\boldsymbol{\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22}}}\,. \tag{3.42}$$

Скориставшись (3.42), із (3.41) отримаємо вираз для $\boldsymbol{p_2^*}$:

$$\mathbf{p_2^*} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{11}} - \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{12}}}{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{11}} - \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{12}} - \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{21}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{22}}}\,. \tag{3.43}$$

Нарешті, підставивши (3.42) і (3.43) у (3.37) або (3.38), знайдемо вираз для ціни гри:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21}}}{\boldsymbol{\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22}}}. \tag{3.44}$$

Вирази (3.42) і (3.43) є розрахунковими співвідношеннями при визначенні оптимальної змішаної стратегії $\boldsymbol{S_A^*} = \{\boldsymbol{p_1^*}, \boldsymbol{p_1^*}\}$ гравця ***A***.

Перейдемо до виведення аналітичних співвідношень для визначення оптимальної змішаної стратегії $\boldsymbol{S_B^*}$ гравця ***B***. Нехай гравець ***B*** використовує оптимальну змішану стратегію

$$\boldsymbol{S_B^*} = \{\boldsymbol{q_1^*}, \boldsymbol{q_1^*}\},$$

а гравець ***A*** – чисту стратегію $\boldsymbol{A_1}$. Відповідно до теореми про активні стратегії програш гравця ***B***

$$\boldsymbol{\alpha(A_1\,, S_B^*) = v}.$$

Однак, з іншого боку,

$$\boldsymbol{\alpha(A_1\,, S_B^*)} = \boldsymbol{\alpha_{11}q_1^*} + \boldsymbol{\alpha_{21}q_2^*} = \boldsymbol{v}. \tag{3.45}$$

Аналогічно для випадку, коли гравець ***B*** застосовує оптимальну змішану стратегію $\boldsymbol{S_B^*}$, а гравець ***A*** – чисту стратегію $\boldsymbol{A_2}$, можна записати

$$\alpha_{21}q_1^* + \alpha_{22}q_2^* = \text{v}. \qquad (3.46)$$

Прирівнявши ліві частини (3.45) і (3.46) і розв’язавши отримане рівняння з урахуванням умови

$$q_1^* + q_2^* = 1,$$

отримаємо

$$q_1^* = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22}}, \qquad (3.47)$$

$$q_2^* = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22}}. \qquad (3.48)$$

Таким чином, співвідношення (3.47) і (3.48) дають змогу визначити оптимальну змішану стратегію гравця ***B***. У цілому ж співвідношення (3.43)–(3.48) дають розв'язок гри 2 × 2 у змішаних стратегіях.

Приклад 3.1. Для нанесення ударів по об'єктах противника одна з протидійних сторін має у своєму розпорядженні літаки бомбардувальної та штурмової авіації. Друга протидійна сторона для захисту своїх об'єктів використовує зенітно-ракетні комплекси двох типів.

При нанесенні ударів літаками бомбардувальної авіації і протидії їм зенітно-ракетних комплексів першого типу середня кількість знищених об'єктів дорівнює одиниці, а при протидії зенітно-ракетними комплексами другого типу середня кількість знищених об'єктів дорівнює чотирьом. Якщо ж удари завдаються літаками штурмової авіації, то середня кількість знищених об'єктів під час протидії ракетних комплексів першого й другого типів становить відповідно 3 і 2. Необхідно знайти такі стратегії застосування авіації й засобів протиповітряної оборони, які максимальною мірою задовольняли б цілям сторін під час бойових дій.

Розв'язання. Тут має місце конфліктна ситуація, яку можна змоделювати матричною грою. Подамо нападника гравцем ***A***, а оборонця – гравцем ***B***. Мета гравця ***A*** – знищити якомога більше об'єктів противника, мета гравця ***B*** – максимально зберегти свої об'єкти. Очевидно, знищення об'єктів противника є виграшем для гравця ***A*** (відповідно програшем для гравця ***B***).

Гравець ***A*** має такі стратегії:

$\boldsymbol{A_1}$ – нанести удар літаками бомбардувальної авіації;

$\boldsymbol{A_2}$ – нанести удар літаками штурмової авіації.

Зі свого боку гравець ***B*** має такі стратегії:

B₁ – для захисту об'єктів застосувати зенітно-ракетні комплекси першого типу;

B₂ – для захисту об'єктів застосувати зенітно-ракетні комплекси другого типу.

Ефективність застосування авіації гравцем ***A*** за умови протидії гравця ***B*** описується матрицею (табл. 3.7). Таким чином, розглядуваний конфлікт можна змоделювати матричною грою 2 × 2.

Таблиця 3.7

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	1	4
A_2	3	2

Розпочинаючи розв'язання гри, насамперед перевіримо, чи не має гра розв'язку в чистих стратегіях. Для цього знайдемо нижню й верхню ціну гри (табл. 3.8).

Таблиця 3.8

Ai	B_j		α_i
	B_1	B_2	
A_1	1	4	1
A_2	3	2	$\boxed{2}$
β_j	$\boxed{3}$	4	

Оскільки нижня ціна гри (α = 2) не дорівнює верхній ціні гри (β = 3), матриця не має сідлового елемента і, отже, гра не має розв'язку в чистих стратегіях. Тому розв'язок гри будемо шукати в змішаних стратегіях, і оскільки матриця гри має розмірність 2 × 2, скористаємося аналітичним методом.

Визначимо оптимальну змішану стратегію гравця ***A***. Скориставшись виразом (3.42), знайдемо

$$p_1^* = \frac{1-4}{1-4-3+2} = 0{,}25.$$

Значення ймовірності p_2^* знайдемо з допомогою виразу

$$p_2^* = \frac{1 - 4}{1 - 4 - 3 + 2} = 0{,}75.$$

Отже, оптимальною змішаною стратегією гравця ***A*** є стратегія

$$S_A^* = \{0{,}25,\ 0{,}75\}.$$

Аналогічно, скориставшись виразами (3.47) і (3.48), знайдемо q_1^* і q_2^*:

$$q_1^* = \frac{2 - 4}{1 - 4 - 3 + 2} = 0{,}5.$$

$$q_2^* = \frac{1 - 3}{1 - 4 - 3 + 2} = 0{,}5.$$

Таким чином, оптимальна стратегія гравця ***B***

$$S_B^* = \{0{,}5;\ 0{,}5\}.$$

Відповідно до виразу (3.44) ціна гри

$$v = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 4}{1 - 4 - 3 + 2} = 2{,}5.$$

Розв'язком цієї гри є змішані стратегії й ціна гри:

$$S_A^* = \{0{,}25;\ 0{,}75\},\ S_B^* = \{0{,}5;\ 0{,}5\},\ v = 2{,}5.$$

Таким чином, оптимальною стратегією нападника (гравця ***A***) є змішана стратегія, згідно з якою група, яка завдає удару по об'єктах противника, має на 25 % складатися з літаків бомбардувальної авіації і на 75 % – з літаків штурмової авіації.

Для захисту своїх об'єктів оборонець (гравець ***B***) має побудувати систему протиповітряної оборони, у якій зенітно-ракетні комплекси першого типу й зенітно-ракетні комплекси другого типу мають становити по 50 %.

Використання цих стратегій під час бойових дій приведе до знищення в середньому 2,5 об'єкта, що становить гарантований виграш гравця ***A*** (гарантований програш гравця ***B***).

Відхилення від цих стратегій негайно приведе або до зменшення виграшу гравця ***A***, або до збільшення програшу гравця ***B***.

3.6. Графічний метод розв'язання матричних ігор

Аналітичними методами досить просто розв'язувати ігри 2 × 2. Разом з тим, ігри, матриці яких мають велику розмірність, настільки просто розв'язувати не вдається. Однак у деяких випадках, а саме коли матриця гри має розмірність 2 × m або n × 2, гру можна просто геометрично інтерпретувати, а отже, для її розв'язання можна використовувати графічний метод [1, 2, 6].

Розглянемо геометричну інтерпретацію найпростішої гри 2 × 2, а її результати поширимо на випадки ігор 2 × m і n × 2.

Нехай гру задано табл. 3.9.

Таблиця 3.9

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	α_{11}	α_{12}
A_2	α_{21}	α_{22}

Накреслимо систему координат (рис. 3.5), по осі абсцис відкладемо значення ймовірності p_1 використання чистої стратегії A_1 у змішаній стратегії S_A. По осі ординат – значення $\alpha(S_A, B_j)$ виграшу гравця ***A*** при використанні гравцями стратегій S_A і B_j (тобто змішаної – гравцем ***A*** і чистої – гравцем ***B***).

Припустимо, що гравець ***A*** використовує чисту стратегію A_1 а гравець ***B*** – чисту стратегію B_1, Так, чиста стратегія A_1 є окремим випадком змішаної стратегії, тобто

$$A_1 = S_A^{(1)} = \{1; 0\}.$$

Тоді ймовірність p_1 у цьому випадку дорівнює одиниці.

Відкладемо це значення на осі абсцис і в цій точці (точка ***M***) відновимо перпендикуляр до осі абсцис (пунктирна лінія).

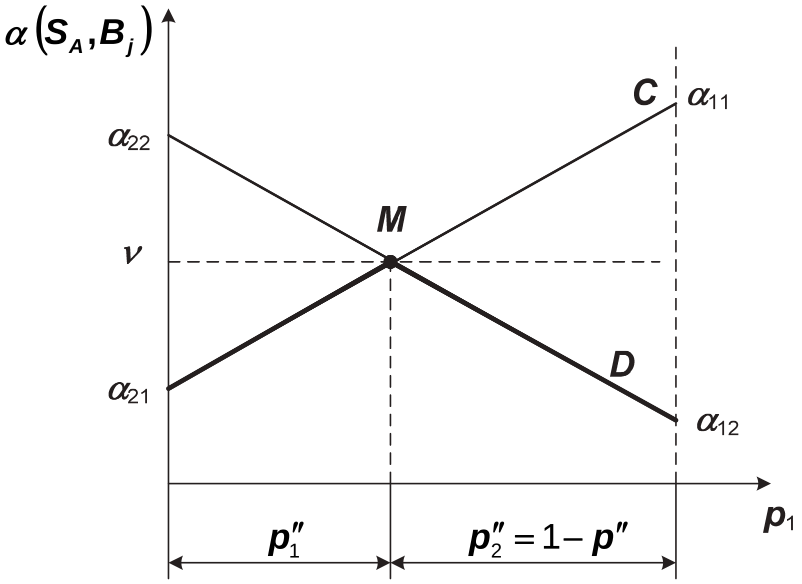


Рис. 3.5

З матриці гри (див. табл. 3.9) випливає, що результат гри (виграш гравця ***A***) при використанні пари стратегій $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{B_1}$ або $\boldsymbol{\alpha(S_A^{(1)}, B_1)}$

$$\boldsymbol{\alpha(S_A^{(1)}, B_1) = \alpha(A_1, B_1) = \alpha_{11}}.$$

Відкладемо його значення на перпендикулярі, наведеному до осі абсцис у точці ***M*** (див. рис. 3.5).

Розглянемо тепер ситуацію, коли гравець ***A*** застосовує чисту стратегію $\boldsymbol{A_2}$, а гравець ***B*** – чисту стратегію $\boldsymbol{B_1}$. У цьому випадку при $\boldsymbol{p_1} = 0$ результатом гри буде

$$\boldsymbol{\alpha(S_A^{(2)}, B_1) = \alpha(A_2, B_1) = \alpha_{21}}.$$

Це значення відкладемо на осі абсцис. З'єднаємо точки $\boldsymbol{\alpha_{11}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{21}}$ відрізком прямої ***CC'***. Очевидно, будь-яка точка відрізка відповідає парі стратегій $\boldsymbol{S_A, B_1}$. Проекція цієї точки на вісь обсцис дає значення $\boldsymbol{p_1}$, а отже, і $\boldsymbol{p_2} = 1 - \boldsymbol{p_1}$, тобто дає змішану стратегію $\boldsymbol{S_A} = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}\}$, а проекція на вісь ординат – значення виграшу гравця ***A*** при застосуванні пари стратегій $\boldsymbol{S_A}$ і $\boldsymbol{B_1}$, тобто $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S_A}, \boldsymbol{B_1})$.

Аналогічно побудуємо відрізок прямої ***DD'***, який відповідає парі стратегій $\boldsymbol{S_A}$ і $\boldsymbol{B_2}$. Якщо гравець ***A*** використовує стратегію $\boldsymbol{A_1}$ (стратегію $\boldsymbol{S_A^{(1)}} = \{1; 0\}$), а гравець ***B*** – стратегію $\boldsymbol{B_2}$, то результат гри

$$\boldsymbol{\alpha(S_A^{(1)}, B_2) = \alpha(A_1, B_2) = \alpha_{12}}.$$

При використанні ж гравцями стратегій A_2 і B_2 результат гри відповідно до матриці (див. табл. 3.9) буде таким:

$$\alpha(S_A^{(1)}, B_2) = \alpha(A_2, B_2) = \alpha_{22}.$$

Відкладемо ці значення на графіку (див. рис. 3.5), з'єднаємо точки ***D*** і ***D'*** відрізком прямої. Виділимо потовщенням ламану лінію ***CMD'***. Проекція кожної точки цієї лінії на вісь ординат являє собою мінімальний гарантований виграш (нижню межу виграшу) гравця ***A***. Однак відповідно до принципу мінімаксу гравець ***A*** сформує таку стратегію, яка забезпечить йому максимальне значення мінімального гарантованого виграшу

З графіка (див. рис. 3.5) випливає, що такій стратегії відповідає точка ***M***. Її проекція на вісь абсцис дає оптимальні значення p_1^* і p_2^*, а отже, і стратегію S_A^*, а проекція на вісь ординат – ціну гри ***v***. Таким чином, графічно можна визначити стратегію S_A^*.

Знайдемо графічним методом оптимапьну змішану стратегію гравця ***B***. Для цього побудуємо систему координат, по осі абсцис відкладемо значення ймовірності q_1, з якою чиста стратегія виникає в змішаній стратегії S_B, а по осі ординат – значення програшу $\alpha(A_1, B_1)$ гравця ***B*** при використанні гравцями стратегій A_i та S_B (рис. 3.6).

Розглянувши випадки застосування гравцями стратегій A_1, B_1; A_1, B_2 і відклавши на графіку значення

$$\alpha(A_1, S_B^{(1)}) = \alpha(A_1, B_1) = \alpha_{11},$$

$$\alpha(A_1, S_B^{(2)}) = \alpha(A_1, B_2) = \alpha_{12},$$

побудуємо відрізок прямої (***DD'***), який відповідає парі стратегій A_1, S_B.

Аналогічно припустимо, що гравці застосовують стратегії A_2, B_1 і A_2, B_2, і відкладаємо на графіку значення

$$\alpha(A_2, S_B^{(1)}) = \alpha(A_2, B_1) = \alpha_{21},$$

$$\alpha(A_2, S_B^{(2)}) = \alpha(A_2, B_2) = \alpha_{22}.$$

Стовщена ламана лінія на рис. 3.6 відповідає максимальному гарантованому програшу (верхній межі програшу) гравця ***B*** при будь-якій відповідній стратегії гравця ***A***.

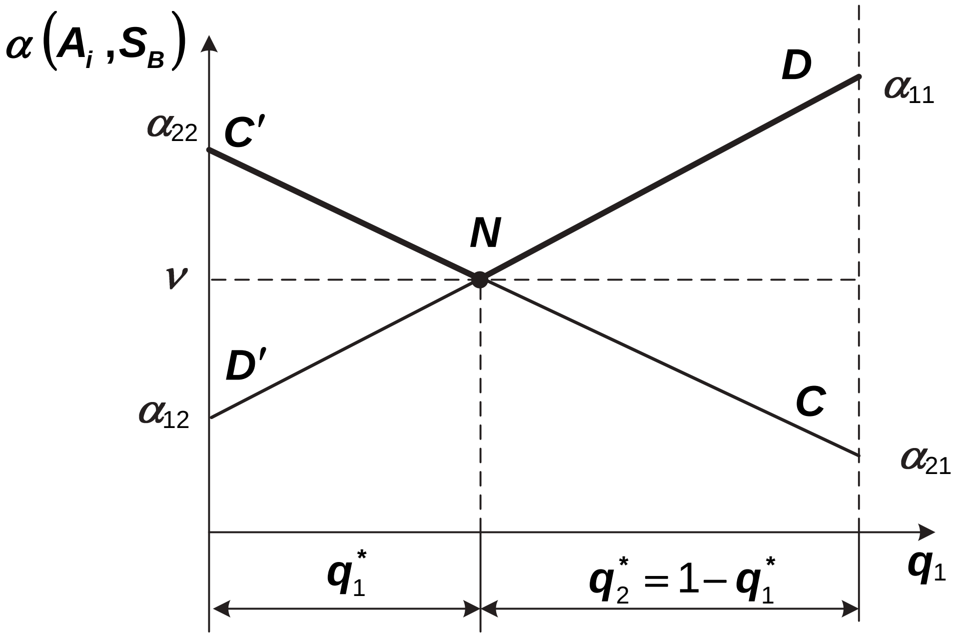


Рис. 3.6

Відповідно до принципу мінімаксу гравець ***B*** вибере таку змішану стратегію, яка забезпечить йому мінімальне значення максимального гарантованого програшу. Відповідно до рис. 3.6 такій стратегії відповідає точка ***N***. Її проекція на вісь абсцис дає змогу графічно знайти значення q_1^* і q_2^*, а проекція на вісь ординат – значення ціни гри ***v***.

Отже, шляхом графічного будування можна розв'язати гру 2 × 2, тобто знайти оптимальні змішані стратегії S_A^* і S_B^* гравців. Зауважимо, що для цього не обов'язково будувати два графіки. Розглянемо, наприклад, як можна скористатись рис. 3.6 для визначення стратегії S_B^*.

Якщо гравець ***A*** застосовує чисту стратегію A_1, а гравець ***B*** – оптимальну змішану стратегію S_B^*, то відповідно до теореми про активні стратегії результат має вигляд

$$\alpha(A_1, S_B^*) = v = \alpha_{11} q_1^* + \alpha_{12} q_2^*,$$

або з урахуванням того, що $q_2^* = 1 - q_1^*$,

$$v = \alpha_{11} q_1^* + \alpha_{12}(1 - q_1^*) = (\alpha_{11} - \alpha_{12}) q_1^* + \alpha_{12}. \qquad (3.49)$$

З іншого боку, з рис. 3.6 випливає, що величина ***v*** (величина відрізка ***KF***) дорівнює різниці величин відрізків ***DF*** і ***DK***, але величина відрізка ***CF*** дорівнює α_{11}, а відрізка ***DF*** – α_{12}. Ці особливості дають змогу визначити ціну гри таким чином:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_{11} - \boldsymbol{CK}; \tag{3.50}$$

$$\boldsymbol{v} = \alpha_{12} + \boldsymbol{DK}. \tag{3.51}$$

Прирівнявши праві частини (3.50) і (3.51), отримаємо

$$\alpha_{11} - \boldsymbol{CK} = \alpha_{12} + \boldsymbol{DK},$$

звідки

$$\alpha_{11} - \alpha_{12} = \boldsymbol{CK} + \boldsymbol{DK}. \tag{3.52}$$

З урахуванням (3.52) вираз (3.49) набуває вигляду

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{CK} + \boldsymbol{DK})\, q_1^* + \alpha_{12}. \tag{3.53}$$

Прирівнявши праві частини (3.51) і (3.53), отримаємо

$$(\boldsymbol{CK} + \boldsymbol{DK})\, q_1^* + \alpha_{12} = \alpha_{12} + \boldsymbol{DK},$$

звідки

$$q_1^* = \frac{DK}{CK+DK}. \tag{3.54}$$

Підставлення (3.54) у вираз $q_2^* = 1 - q_1^*$ дає

$$q_2^* = \frac{CK}{CK+DK}. \tag{3.55}$$

Таким чином, графік, зображений на рис. 3.6, дає змогу без додаткових побудов знайти S_A^* і S_B^*, тобто отримати розв'язок гри 2 × 2. Застосовуючи аналогічні міркування, можна знайти S_A^* за графіком на рис. 3.6.

Проілюструємо графічний метод розв’язання гри 2 × 2 на прикладі.

Приклад 3.2. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею (див. табл. 3.7).

Розв'язання. Вище вже було отримано розв'язок цієї гри аналітичним методом. Спробуємо її розв'зати графічно й порівняти отримані результати.

Побудуємо систему координат (рис. 3.7), по осі абсцис якої будемо відкладати значення p_1, а по осі ординат – значення $\alpha(S_A, B_j)$.

Якщо гравець ***A*** використовує чисту стратегію A_1 (стратегія S_A(1; 0)), а гравець ***B*** – чисту стратегію B_1, то виграш гравця ***A*** (результат гри)

$$\alpha(S_A^{(1)}, B_1) = \alpha_{11} = 1.$$

Відкладемо це значення на перпендикулярі, опущеному до осі абсцис у точці $p_1 = 1$. Очевидно, значенню α_{11} відповідає точка ***C*** на рис. 3.7.

При використанні гравцями стратегій A_2 і B_1 результат гри має вигляд

$$\alpha(S_A^{(2)}, B_1) = \alpha_{21} = 3.$$

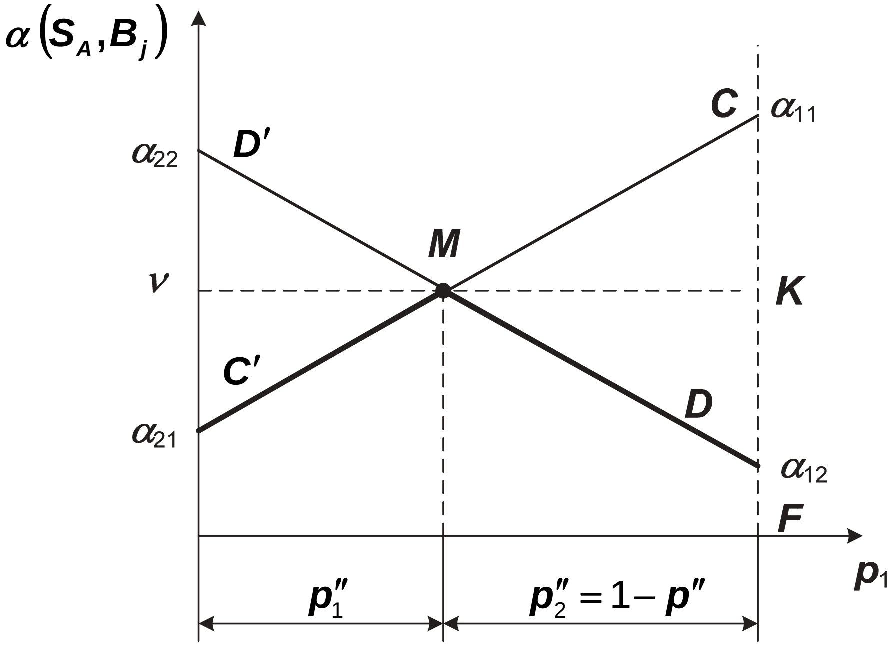


Рис. 3.7

Відкладемо це значення на осі ординат (точка ***C'***), оскільки вісь ординат відповідає значенню $p_1 = 0$. З'єднаємо ці точки відрізком прямої, кожна точка якого відповідає будь-якій парі стратегій S_A і B_1.

Аналогічно побудуємо відрізок ***DD'*** прямої, кожна точка якого відповідає парі стратегій S_A і B_1. Виділимо потовщеною ламаною лінією нижню межу гарантованого виграшу гравця ***A***. Оскільки згідно з принципом мінімаксу гравець ***A*** вибирає в грі таку стратегію S_A^*, яка забезпечить йому максимальне значення мінімального гарантованого виграшу. З рис. 3.7 випливає, що такій стратегії відповідає точка ***M***. Спроектувавши цю точку на вісь абсцис, отримаємо

$$p_1^* = 0{,}25;\ p_2^* = 1 - p_1^* = 0{,}75.$$

З рисунка також випливає, що ціна гри **v** = 2,5. Таким чином, оптимальною змішаною стратегією гравця **A** є стратегія S_A^* = {0,25; 0,75}.

Для знаходження оптимальної змішаної стратегії гравця **B** скористаємося виразами (3.54) і (3.55). З рис. 3.7 випливає, що довжини відрізків **СК** і **ДК** становлять по 1,5 одиниці. Підставивши значення довжин відрізків **СК** і **ДК** у вирази (3.54) і (3.55), отримаємо

$$q_1^* = \frac{1,5}{1,5+1,5} = 0,5;$$

$$q_2^* = \frac{1,5}{1,5+1,5} = 0,5.$$

Таким чином, оптимальною змішаною стратегиєю гравця **B** є стратегія

$$S_B^* = \{0,5;\ 0,5\}.$$

Таким чином, результати розв’язання гри 2 × 2 аналітичним і графічним методами повністю збіглися.

Як уже підкреслювалося вище, графічний метод можна використовувати при розв’язанні ігор 2 × **n** і **m** × 2. Узагальнимо отримані результати.

Розглянемо гру, матрицю якої задано табл. 3.10.

Таблиця 3.10

A_i	B_j					
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1j}	…	α_{1n}
A_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2j}	…	α_{2n}

Оскільки гравець **A** має дві чисті стратегії, а гравець **B** – **n** чистих стратегій, розглядувана гра являє собою матрицю гри 2 × **n**. Для графічного розв'язання такої гри також побудуємо систему координат (рис. 3.8), по осі абсцис якої будемо відкладати значення p_1, а по осі ординат – значення $\alpha(S_A, B_j)$.

Якщо гравець **A** використовує стратегію A_1, а гравець **B** – стратегію B_1, розв'язок гри буде таким:

$$\alpha(S_A^{(1)}, B_1) = \alpha_{11}.$$

Відкладемо ці значення на перпендикулярі, опущеному до осі абсцис у точці p_1 = 1. У тому випадку, коли гравець ***A*** застосовує стратегію A_2, а гравець ***B*** – стратегію B_1, результат гри буде мати вигляд

$$\alpha(S_A^{(2)}, B_1) = \alpha_{21}.$$

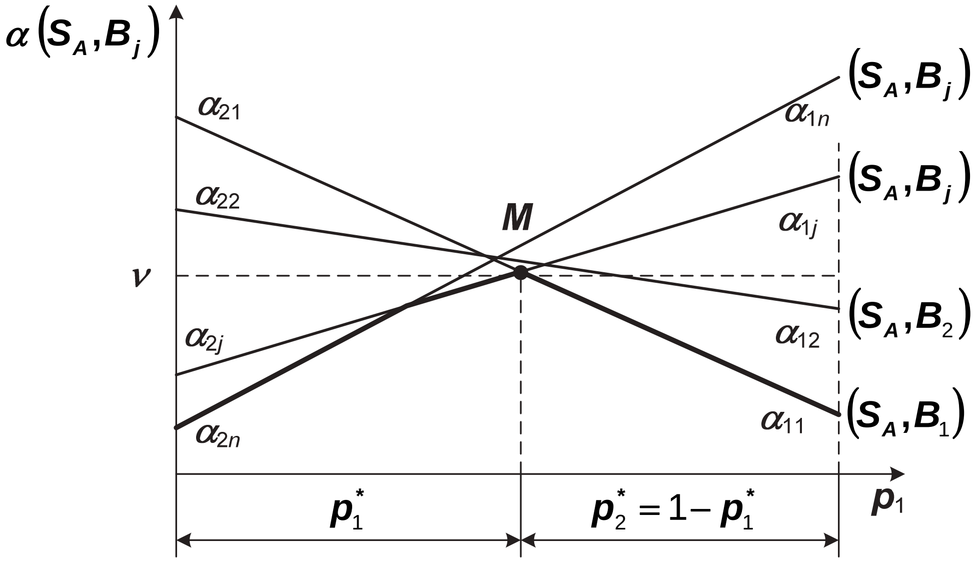


Рис. 3.8

Це значення відкладемо на осі ординат. З'єднаємо точки відрізком прямої, кожна точка якої відповідає парі стратегій S_A і B_1. Позначимо це на рисунку. Аналогічно побудуємо відрізки, які відповідають парам стратегій S_A і B_2; S_A і B_j, …, S_A і B_n. Виділимо стовщеною лінією нижню межу виграшу гравця ***A***. Відповідно до принципу мінімаксу гравець ***A*** сформує таку змішану стратегію, яка забезпечить йому максимальне значення мінімального гарантованого виграшу. Такій стратегії, як випливає з рис. 3.8, відповідає точка ***M***. Спроектувавши цю точку на вісь абсцис, знайдемо значення p_1^* і p_2^*, а отже, і стратегію S_A^*.

З рис. 3.8 видно, що у формуванні змішаної стратегії S_B гравця ***B*** беруть участь лише дві чистих стратегії B_2 і B_j (у точці ***M*** перетинаються відрізки, які відповіднають парам (S_A, B_2) і (S_A, B_j), що є активними стратегіями). Це підтверджує наведене вище положення, що в грі з матрицею $m \times n$ кількість активних стратегій кожного з гравців не може перевищувати найменше з чисел m або n. Оскільки у цій грі найменше з чисел m і n дорівнює двом, то й кількість активних стратегій кожного з гравців дорівнює двом.

Таким чином, оптимальною змішаною стратегією гравця ***B*** буде стратегія

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B}}^{*} = \{0,\ \boldsymbol{q}_{2}^{*}, 0, \ldots, \boldsymbol{q}_{j}^{*}, \ldots, 0\}.$$

Як же знайти значення $\boldsymbol{q}_2^*$ і $\boldsymbol{q}_j^*$? Оскільки у формуванні стратегії $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B}}^*$ беруть участь тільки дві стратегії ***B₂*** і $\boldsymbol{B_j}$, гру 2 × ***n*** можно звести до гри 2 × 2 з матрицею (табл. 3.11).

Таблиця 3.11

$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{B_j}$	
	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_j}$
$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{\alpha_{12}}$	$\boldsymbol{\alpha_{1j}}$
$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{\alpha_{22}}$	$\boldsymbol{\alpha_{2j}}$

Цю гру можна розв’язати як аналітичним, так і графічним методом. При розв’язанні аналітичним методом у виразах (3.42)–(3.44), (3.47)–(3.48) необхідно замість значення $\boldsymbol{\alpha_{11}}$ користуватися значенням $\boldsymbol{\alpha_{12}}$, замість $\boldsymbol{\alpha_{12}}$ – $\boldsymbol{\alpha_{1j}}$, замість $\boldsymbol{\alpha_{21}}$ – $\boldsymbol{\alpha_{22}}$, замість $\boldsymbol{\alpha_{22}}$ – $\boldsymbol{\alpha_{2j}}$ матриці (див. табл. 3.10).

Гру ***m*** × 2, задану матрицею (табл. 3.12), розв'язують аналогічно.

Таблиця 3.12

$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{B_j}$	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$
$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{\alpha_{11}}$	**2**
$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{\alpha_{21}}$	$\boldsymbol{\alpha_{22}}$
…	**…**	**…**
$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{\alpha_{i1}}$	$\boldsymbol{\alpha_{i2}}$
…	**…**	**…**
$\boldsymbol{A_m}$	$\boldsymbol{\alpha_{m1}}$	$\boldsymbol{\alpha_{m2}}$

Графіки для цього випадку показано на рис. 3.9. На відміну від попередньої задачі тут стовщеною лінією виділено верхню межу програшу гравця ***B***. Оптимальній змішаній стратегії $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B}}^*$ відповідає точка ***N***, що характеризує мінімальне значення мінімального гарантованого програшу гравця ***B***. Для визначення оптимальної змішаної стратегії гравця ***A*** необхідно перейти до гри 2 × 2 і розв’язати її або аналітичним, або графічним методом.

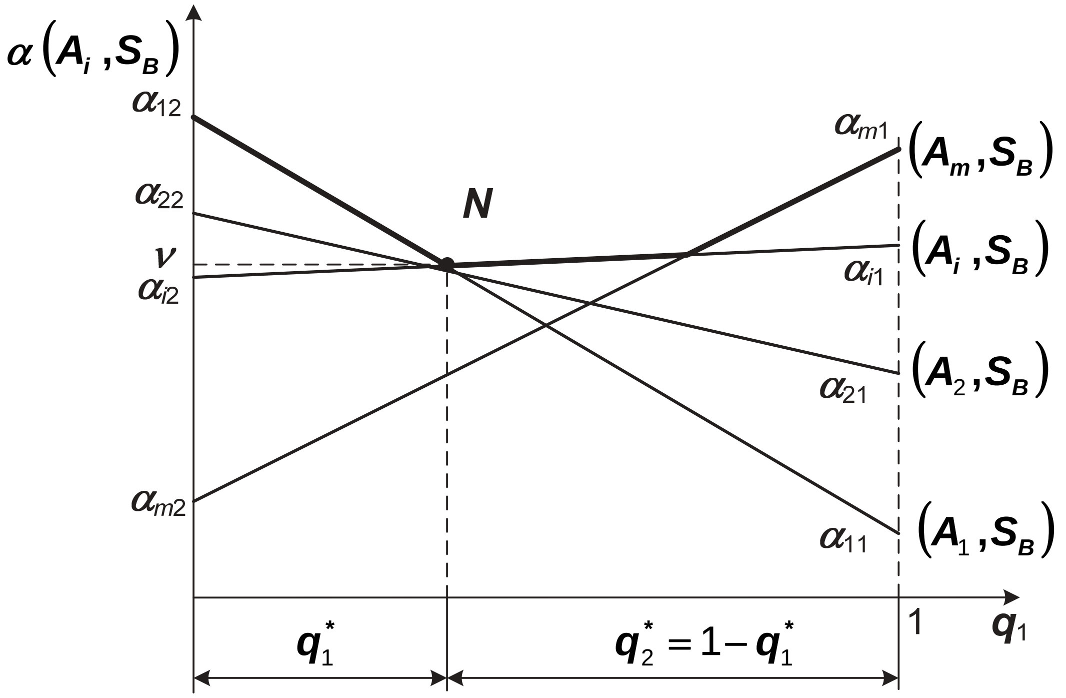


Рис. 3.9

Приклад 3.3. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею (табл. 3.13).

Таблиця 3.13

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	4	3	1	0

Розв'язання. Насамперед зазначимо, що ця гра належить до гри 2 × ***n***, де ***n*** = 4. Далі з аналізу матриці випливає, що нижня ціна гри ***α*** = 1, а верхня ціна гри ***β*** = 3. Оскільки нижня ціна гри не дорівнює верхній, матриця не має сідлових елементів і розв'язок гри слід шукати в змішаних стратегіях. З огляду на те, що матриця гри має розмірність 2 × ***n***, графічне будування будемо проводити з метою пошуку стратегії S_A^*.

Розглядаючи по черзі випадки застосування гравцями пар стратегій (S_A, B_1), (S_A, B_2), (S_A, B_3) і (S_A, B_4), побудуємо на графіку (рис. 3.10) сім'ю відрізків прямих, кожен з яких характеризує виграш гравця ***A*** при використанні гравцями відповідних пар перелічених стратегій.

Виділимо стовщеною лінією нижню межу виграшу (функцію мінімального гарантованого виграшу) гравця ***A***. Очевидно, оптимальній змішаній стратегії гравця ***A*** відповідає точка ***M***.

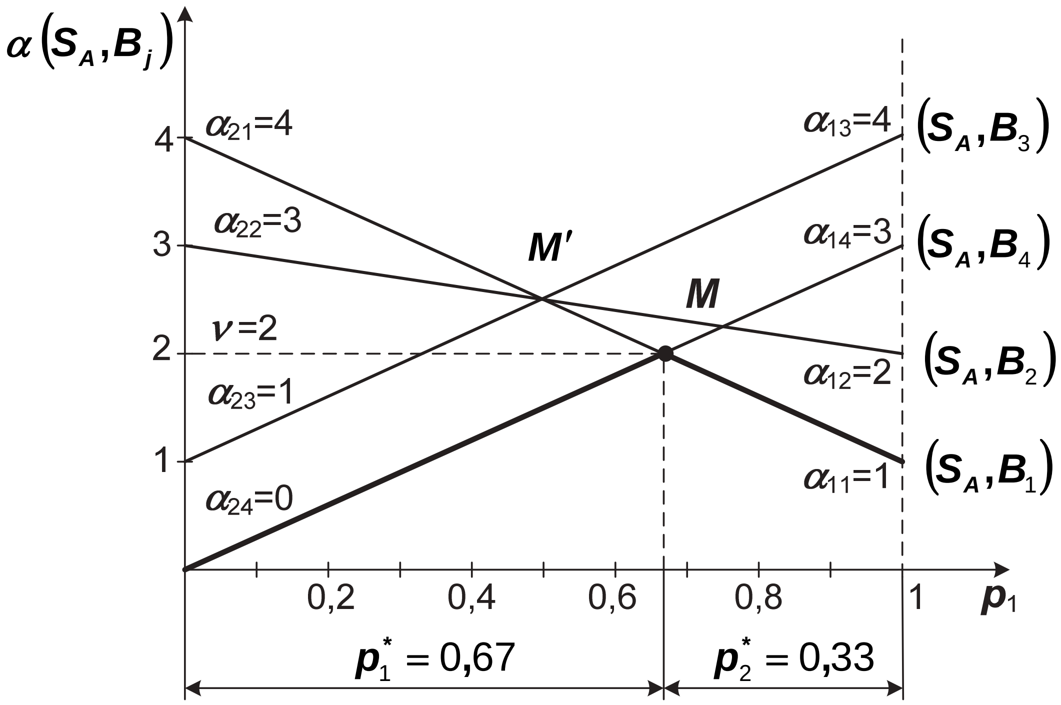


Рис. 3.10

Тоді, виходячи з рис. 3.10,

$$p_1^* = 0{,}67;\ p_2^* = 0{,}33;\ \boldsymbol{v} = 2.$$

Таким чином, оптимальною змішаною стратегією гравця ***A*** буде стратегія

$$S_A^* = \{0{,}67;\ 0{,}33\}.$$

З рис. 3.10 також випливає, що активними стратегіями гравця ***B*** є стратегії B_1 і B_4. Отже, оптимальною змішаною стратегією гравця ***B*** буде стратегія

$$S_B^* = \{q_1^*;\ 0;\ 0;\ q_4^*\}.$$

Для того щоб знайти значення q_1^* і q_4^*, перейдемо до гри 2 × 2, де чистими стртегіями гравця ***A*** є стратегії A_1 і A_2, а чистими стртегіями гравця ***B*** – стратегії B_1 і B_4 (табл. 3.14).

Скористаємося для розв'язання цієї гри аналітичним методом. Вирази (3.42)–(3.44) для матриці (див. табл. 3.14) набудуть вигляду

$$p_1^* = \frac{\alpha_{24} - \alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{14} - \alpha_{21} + \alpha_{21}};$$

$$\boldsymbol{p_2^*} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{14}}{\alpha_{11} - \alpha_{14} - \alpha_{21} + \alpha_{21}};$$

$$\boldsymbol{q_1^*} = \frac{\alpha_{24} - \alpha_{14}}{\alpha_{11} - \alpha_{14} - \alpha_{21} + \alpha_{21}};$$

$$\boldsymbol{q_2^*} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{14} - \alpha_{21} + \alpha_{21}};$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\alpha_{11} \cdot \alpha_{24} - \alpha_{14} \cdot \alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{14} - \alpha_{21} + \alpha_{21}}.$$

Таблиця 3.14

A_i	B_j	
	B_2	B_j
A_1	1	3
A_2	1	0

Підставивши в ці вирази значення відповідних елементів матриці (див. табл. 3.14), отримаємо

$$\boldsymbol{p_1^*} = \frac{0-4}{1-4-3+0} = 0{,}67;$$

$$\boldsymbol{p_2^*} = \frac{1-3}{1-4-3+0} = 0{,}33;$$

$$\boldsymbol{q_1^*} = \frac{0-3}{1-4-3+0} = 0{,}5;$$

$$\boldsymbol{q_2^*} = \frac{1-4}{1-4-3+0} = 0{,}5;$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{1 \cdot 0 - 4 \cdot 3}{1-4-3+0} = 2.$$

Таким чином, розв'язок гри, заданої матрицею (див. табл. 3.14) будуть стратегії

$$\boldsymbol{S_B^*} = \{0{,}674;\ 0{,}33\};\ \boldsymbol{S_B^*} = \{0{,}5;\ 0;\ 0;\ 0{,}5);\ \ \boldsymbol{v} = 0{,}2.$$

На практиці при розв’язанні ігор 2 × ***n*** і ***m*** × 2 графічними будуваннями для обчислення значень p_1^* і p_2^* користуються рідко. Графічні будування необхідні для того, щоб визначити, які стратегії гравця ***B*** (у разі гри 2 × ***n***) або стратегії гравця ***A*** (у разі гри ***m*** × 2) є активними. Після цього гру 2 × ***n*** (або ***m*** × 2) зводять до гри 2 × 2, яку розв’язують аналітичним методом, як це було зроблено вище.

Результати, наведені на рис. 3.10, дають змогу більш глибоко розібратися в суті теореми про активні стратегії.

Програш гравця ***B*** (що дорівнює за значенням виграшу гравця ***A***) досягає ***v*** при використанні його активних стратегій B_1 і B_4. Якщо гравець ***B*** вийде за межі своїх активних стратегій і перейде до формування своєї змішаної стратегії з використанням, наприклад, стратегій B_1 і B_3, то цьому випадку відповідає точка ***M'***.

З рис. 3.10 видно, що вихід гравця ***B*** за межі своїх активних стратегій негайно призводить до збільшення його програшу. Тому ситуація рівноваги, тобто коли виграш одного гравця дорівнює програшу другого й дорівнює ціні гри ***v***, досягається тільки в тому випадку, якщо гравці не виходять за межі своїх активних стратегій, що й підтверджується теоремою.

Зазначимо ще одну важливу обставину, що випливає з аналізу рис. 3.10. При будь-якій змішаній стратегії гравця ***A*** чиста стратегія B_3 гравця ***B*** забезпечує йому більший виграш, ніж чиста стратегія B_4 (відрізок прямої, якому відповідає стратегія (S_A, B_3), розташовується вище від відрізка, якому відповідає стратегія (S_A, B_4)).

Це означає, що стратегія гравця B_3 є напевно невигідною стратегією гравця ***B***. Її можна виключити з гри, зменшивши тим самим розмірність матриці, і, таким чином, спростити гру. Розглянемо, як це можна здійснити.

3.7. Спрощення матричних ігор

Нехай матричну гру задано матрицею (табл. 3.15). Порівняємо між собою пару чистих стратегій A_i і A_k гравця ***A*** при використанні всіх можливих стратегій гравцем ***B***. Запишемо рядки матриці гри, які відповідають стратегіям A_i і A_k:

$$\begin{aligned} A_i &\to (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ij}, \alpha_{il}, \dots, \alpha_{in}); \\ A_k &\to (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kj}, \alpha_{kl}, \dots, \alpha_{kn}). \end{aligned} \qquad (3.56)$$

Таблиця 3.15

A_i	B_j						
	B_2	B_2	…	B_j	B_l	…	B_n
A_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1j}	α_{1l}	…	α_{1n}
A_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2j}	α_{2l}	…	α_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	α_{i1}	α_{i2}	…	α_{ij}	α_{il}	…	α_{in}
A_k	α_{k1}	α_{k2}	…	α_{kj}	α_{kl}	…	α_{kn}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mj}	α_{ml}	…	α_{mn}

Якщо $\alpha_{i1} = \alpha_{k1}$, $\alpha_{i2} = \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{ij} = \alpha_{kj}, \alpha_{il} = \alpha_{kl}, \ldots, \alpha_{in} = \alpha_{kn}$, або більш стисло

$$\alpha_{ij} = \alpha_{kj},\ j = \overline{1, n}, \tag{3.57}$$

то стратегія A_k є стратегією, яка дублює стратегію A_i (або навпаки). Це означає, що при застосуванні гравцем ***A*** стратегії A_k під час дії у відповідь будь-якої чистої або змішаної стратегії гравця ***B*** дає той самий результат, що й при застосуванні стратегії A_i.

Таким чином, одну зі стратегій, наприклад стратегію A_k, можна виключити зі складу чистих стратегій гравця **А**. Це здійснюється шляхом викреслювання рядка A_k матриці гри.

Розглянемо випадок, коли

$$\alpha_{ij} \geq \alpha_{kj},\ j = \overline{1, n}. \tag{3.58}$$

За такої умови застосування гравцем ***A*** стратегії A_k дає виграш, заздалегідь менший, ніж при застосуванні стратегії A_i. Природно, що мати таку стратегію у складі чистих стратегій гравцю **А** невигідно і її можна виключити. Тому стратегію A_k, яка задовольняє умову (3.58), називають заздалегідь невигідною стратегією.

Аналогічно можна знайти дублювальні й напевно невигідні стратегії гравця ***B***. Для цього порівнюють елементи відповідних стовпців. Стратегії B_j і B_l будуть взаємно дублюювальними, якщо

$$\alpha_{ij} = \alpha_{il},\ j = \overline{1, m}. \tag{3.59}$$

Якщо ж

$$\alpha_{ij} \le \alpha_{il},\ j = \overline{1,m}, \qquad (3.60)$$

то стратегія B_l є напевно невигідною порівняно зі стратегією B_j. При застосування будь-якої зворотної стратегії гравця A настає програш більший, ніж при використанні стратегії B_j.

Зменшення кількості стратегій гравців шляхом виключення невигідних або дублювальних стратегій називають спрощенням (або редукцією) матричної гри. За результатами спрощення розмірність матриці гри може істотно зменшитися.

Процедура спрощення гри полягає в такому. Спочатку елементи першого рядка порівнюються з відповідними елементами друго горядка. Якщо виконується умова (3.57) або (3.58), то один з рядків матриці викреслюється.

Якщо хоча б для одного елемента першого рядка умова (3.58) не виконується, то стратегію A_1 не можно вважати напевно невигідною відносно стратегії A_2. Далі елементи першого рядка послідовно порівнюються з елементами третього, четвертого, …, m-го рядків. При виконанні умов (3.57) або (3.58) відповідні рядки викреслюються з матриці. Після цього переходять до порівняння другого рядка матриці з третім та наступними.

Виключаючи дублювальні й напевно невигідні стратегії гравця ***A*** переходять до пошуку й виключення дублювальних і напевно невигідних стратегій гравця ***B***. З цією метою елементи першого стовпця порівнюють з елементами другого й наступних стовпців, перевіряючи при цьому умови (3.59) і (3.60). Далі процедура повторюється для інших стовпців зліва направо доти, доки не буде перевірено умови (3.59) і (3.60) для останньої пари стовпців.

Приклад 3.4. Розглянемо гру, матрицю якої задано табл. 3.16. Матриця має розмірність 4 × 4, гравці мають по чотири чистих стратегії. Спробуємо спростити цю гру.

Таблиця 3.16

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0.25	0,5	1,0	0,75
A_2	0	0,5	0,75	0,5
A_3	0.25	0,5	10	0,75
A_4	1,0	0,75	0,25	0

Розв'язання. Процедуру спрощення почнемо з порівняння елементів першого рядка матриці з елементами другого (табл. 3.16). Оскільки 0,25 > 0, 0,5 = 0,5, 1,0 > 0,75, 0,75 > 0,5, то умова (3.58) виконується. Це означає, що стратегія $\boldsymbol{A_2}$ є напевно невигідною і її можна виключити з подальшого розгляду (викреслити строчку $\boldsymbol{A_2}$). Далі порівняємо елементи першого й третього рядків. Для цих рядків виконується умова (3.57), тобто $\boldsymbol{A_3}$ дублює стратегію $\boldsymbol{A_1}$.

Стратегію $\boldsymbol{A_3}$ також можна виключити з розгляду, тобто викреслити з матриці. При порівнянні елементів першого й четвертого рядків виявляється, що 0,25 < 1,0, 0,5 < 0,75, але 1,0 > 0,25 і 0,75 > 0, тобто умови (3.57) і (3.58) не виконуються.

Таким чином, стратегія $\boldsymbol{A_4}$ не є напевно невигідною відносно стратегії $\boldsymbol{A_1}$ і виключати її зі складу стратегій гравця ***А*** не можна. Тепер матриця гри буде мати вигляд, як табл. 3.17.

Таблиця 3.17

$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{B_j}$			
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$
$\boldsymbol{A_1}$	0.25	0,5	1,0	0,75
$\boldsymbol{A_4}$	1,0	0,75	0,25	0

Почнемо пошук і виключення дублювальних і напевно невигідних стратегій гравця ***В***. З порівняння елементів першого й другого стовпців (0,25 < 0,5 та 1,0 > 0,75) випливає, що жодна зі стратегій ($\boldsymbol{B_1}$ або $\boldsymbol{B_2}$) не є дублювальною або напевно невигідною відносно іншої (умови (3.59) і (3.60) не виконуються). Такий самий висновок можна зробити за результатами порівняння елементів першого стовпця з елементами третього й четвертого стовпців, а також елементів другого стовпця з елементами третього й четвертого.

Порівняємо елементи третього й четвертого стовпців. Оскільки 0,25 < 1,0 та 0 < 0,25, то виконується умова (3.60): стратегія $\boldsymbol{B_3}$ є напевно невигідною відносно стратегії $\boldsymbol{B_4}$. Тому її можна виключити з розгляду (викресливши стовпець $\boldsymbol{B_3}$). Матриця гри після спрощення буде мати вигляд, як табл. 3.18.

Таким чином, за результатами проведення процедури спрощення гри вдалося зменшити розмірність матриці гри з 4 × 4 до 2 × 3. Цей результат суттєво спрощує розв’язання матриці гри, даючи змогу використати, наприклад, графічний метод.

Таблиця 3.18

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_4
A_1	0.25	0,5	0,75
A_4	1,0	0,75	0

3.8. Розв'язання гри $m \times n$

За результатами спрощення гри, як було показано вище, часто вдається суттєво зменшити розмірність матриці. Разом з тим, у багатьох випадках і після спрощення гри значення m і n залишаються великими, в усякому разі, $m > 2$ і $n > 2$.

Розглянутими вище методами таку гру не можна розв'язати, тому необхідно знайти інші методи. Спробуємо знайти метод, який дасть змогу розв'язати матрицю гри розмірністю $m \times n$.

Припустимо, що гравець A використовує в грі змішану стратегію $S_A = \{p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m\}$, а його противник – одну з чистих стратегій B_1, B_2, ..., B_j, ..., B_n. Розглянемо пару стратегій S_A і B_1. Тоді при застосуванні гравцем A стратегії S_A, а гравцем B оберненої стратегії B_1 виграш гравця A

$$\alpha(S_A, B_1) = \alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \ldots + \alpha_{i1}p_i + \alpha_{k1}p_k + \ldots + \alpha_{m1}p_m.$$

Якщо S_A – оптимальна змішана стратегія гравця A, то відповідно до теореми про активні стратегії його виграш має становити величину, яка дорівнює ціні v гри. Однак це матиме місце тільки тоді, коли S_A буде оптимальною стратегією. Здійснюючи пошук оптимальної змішаної стратегії (шукаючи значення p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_m), гравець A може сподіватися на виграш, не менший за ціну гри, тобто

$$\alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \ldots + \alpha_{i1}p_i + \alpha_{k1}p_k + \ldots + \alpha_{m1}p_m \geq v.$$

Подібні висновки можна зробити й для інших пар стратегій

$$(S_A, B_2), \ldots, (S_A, B_j), \ldots, (S_A, B_n).$$

Тоді можна записати:

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \ldots + \alpha_{i1}p_i + \ldots + \alpha_{m1}p_m \ge v; \\
\alpha_{12}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \ldots + \alpha_{i2}p_i + \ldots + \alpha_{m2}p_m \ge v; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{1j}p_1 + \alpha_{2j}p_2 + \ldots + \alpha_{ij}p_i \ldots + \alpha_{mj}p_m \ge v; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{1n}p_1 + \alpha_{2n}p_2 + \ldots + \alpha_{in}p_i + \ldots + np_m \ge v.
\end{gathered} \tag{3.61}$$

З іншого боку, оскільки випадкові події, що виникають при застосуванні чистих стратегій A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m у змішаній стратегії S_A гравця ***A*,** утворюють повну групу подій, то має місце рівність

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_i + p_k + \ldots + p_m = 1. \tag{3.62}$$

Розділимо обидві частини кожної нерівності (3.61) на v і позначимо через x_i частку $\frac{p_i}{v}$**.** Тоді систему рівнянь (3.61) можна записати таким чином:

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + x_{i1}x_i + \ldots + x_{m1}x_m \ge 1; \\
\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{i2}x_i + \ldots + \alpha_{m2}x_m \ge 1; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{1j}x_1 + \alpha_{2j}x_2 + \ldots + \alpha_{ij}x_i + \ldots + \alpha_{mj}x_m \ge 1; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_i + + \ldots + \alpha_{mn}x_m \ge 1.
\end{gathered} \tag{3.63}$$

Аналогічно перетворимо й рівняння (3.62):

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i + x_k + \ldots + x_m = \frac{1}{v}. \tag{3.64}$$

У зв'язку з тим, що $p_1 \ge 0$, $p_2 \ge 0$, …, $p_i \ge 0$, …, $p_m \ge 0$, а також $v \ge 0$, величини x_1, $x_2, \ldots, x_i$, …, x_m є додатними.

Розв'язок гри зводиться до пошуку такої змішаної стратегії S_A гравця ***A***, використання якої забезпечувало б йому максимальний виграш. Іншими словами, гравець ***A*** при формуванні своєї змішаної стратегії буде пробувати знайти такі значення p_1, p_2, …, p_i, …, p_m, які максимізували би значення ***v***.

З іншого боку, пошук значень p_1, p_2, …, p_i, …, p_n є еквівалентним пошуку значень $x_1, x_2, \dots, x_i$, …, x_m, які мінімізують значення виразу (3.64). Тоді задачу пошуку оптимальної змішаної стратегії гравця ***A*** можна сформулювати таким чином: знайти такі невід'ємні значення $x_1, x_2, \dots, x_i$, …, x_m, які б задовольняли обмеженню (2.63) і перетворювали на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_i + x_k + \dots + x_m. \qquad (3.65)$$

Оскільки обмеження (3.63) являють собою лінійні нерівності, а цільова функція дорівнює сумі змінних $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$, то ця задача належить до класу задач лінійного програмування. Розв'язання цієї задачі, наприклад, симплекс-методом, дає змогу знайти оптимальні значення x_1^*, x_2^*, …, x_i^*, …, x_m^*, а також $L_{min} = \frac{1}{v}$. Тоді легко обчислити і значення p_1^*, p_2^*, …, p_i^*, …, p_m^*, а отже й визначити стратегію S_A^* гравця ***A***.

Оптимальну змішану стратегію гравця ***B*** можна знайти шляхом подібних міркувань. Нехай гравець ***B*** використовує під час гри змішану стратегію $S_B = \{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_m\}$, а гравець ***A*** – одну з чистих стратегій A_1, A_2, …, A_i, …, A_n. При використанні гравцем ***B*** змішаної стратегії S_B і гравцем ***A*** відповідно стратегії A_1 програш гравця ***B***

$$\alpha(A_1, S_B) = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \dots + \alpha_{1j}q_j + \dots + \alpha_{1n}q_n.$$

Зазвичай гравець ***B*** прагне вибором значень $q_1, q_2 \dots$, q_j, …, q_n, (вибором своєї змішаної стратегії S_B) зменшити значення програшу $\alpha(A_1, S_B)$, принаймі програти не більше, ніж ***v***, тобто

$$\alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \dots + \alpha_{1j}q_j + \dots + \alpha_{1n}q_n \le v.$$

Застосовуючи подібні міркування для пар стратегій $\boldsymbol{A_2, S_B}$; ... ; $\boldsymbol{A_i, S_B}$; ...; $\boldsymbol{A_m, S_B}$, можна отримати таку систему нерівностей:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \ldots + \alpha_{1j}q_j + \ldots + \alpha_{1n}q_n \le \nu;\\
&\alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \ldots + \alpha_{2j}q_j + \ldots + \alpha_{2n}q_n \le \nu;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{i1}q_1 + \alpha_{i2}q_2 + \ldots + \alpha_{ij}q_j + \ldots + \alpha_{in}q_n \le \nu;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{m1}q_1 + \alpha_{m2}q_2 + \ldots + \alpha_{mj}q_j + \ldots + \alpha_{mn}q_n \le \nu.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Оскільки випадкові події виникнення чистих стратегій $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$, ..., $\boldsymbol{B_j}$, ..., $\boldsymbol{B_n}$ у змішаній стратегії $\boldsymbol{S_B}$ утворюють повну групу подій, то

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_j + \ldots + q_n = 1. \tag{3.67}$$

Розділивши обидві частини (3.66) і (3.67) на $\boldsymbol{\nu}$ і позначивши $y_j = \frac{q_j}{\nu}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1j}y_j + \ldots + \alpha_{1n}y_n \le 1;\\
&\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2j}y_j + \ldots + \alpha_{2n}y_n \le 1;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{i1}y_1 + \alpha_{i2}y_2 + \ldots + \alpha_{ij}y_j + \ldots + \alpha_{in}y_n \le 1;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{m1}y_1 + \alpha_{m2}y_2 + \ldots + \alpha_{mj}y_j + \ldots + \alpha_{mn}y_n \le 1.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$L(\overline{y}) = y_1 + y_2 + \ldots + y_j + \ldots + y_n = \frac{1}{\nu}. \tag{3.69}$$

Зауважимо, що величини $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_j}, \ldots, \boldsymbol{y_n}$ є невід'ємними.

Гравець ***B*** прагне вибором своєї змішаної стратегії мінімізувати свій програш, що є еквівалентним збільшенню величини $\frac{1}{\nu}$.

Тому задача визначення оптимальної змішаної стратегії гравця ***B*** формулюється таким чином: необхідно знайти такі невід'ємні значення змінних $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n$, які задовольняють системі обмежень (3.68) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.69). Така задача належить до класу задач лінійного програмування, і її можна розв’язати симплекс-методом.

Проаналізуємо шлях визначення оптимальних змішаних стратегій гравців у матричній грі.

1. Матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях (3.63) і (3.68) є взаємно транспонованими матрицями.

2. Кількість змінних і обмежень у задачі визначення оптимальної змішаної стратегії гравця ***A*** дорівнюють відповідно ***m*** і ***n***, а в задачі визначення оптимальної змішаної стратегії гравця ***B*** – відповідно ***n*** і ***m***.

3. До системи обмежень (3.63) належать нерівності вигляду «≥» , а до системи обмежень (3.68) – нерівності вигляду «≤».

4. Значення коефіцієнтів при x_i у цільовій функції (3.65) дорівнюють значенням правих частин нерівностей (3.68) і навпаки.

5. Визначення оптимальної змішаної стратегії гравця ***A*** являє собою задачу мінімізації, а визначення оптимальної змішаної стратегії гравця ***B*** – задачу максимізації відповідної цільової функції.

Таким чином, визначення змішанних стратегій гравців у матричній грі утворюють двоїсту пару задач лінійного програмування [8]. Ця обставина істотно полегшує розв'язання матричної гри. Симплекс-методом можна знайти, наприклад, оптимальну змішану стратегію гравця ***A***, а потім, використовуючи взаємно однозначну відповідність між вихідною і двоїстою задачами лінійного програмування, – оптимальну змішану стратегію гравця ***B***.

Приклад 3.5. Для керування військами під час бойових дій одна зі сторін може використовувати рухомі пункти керування трьох видів: ПК-1 – ПК-3. Розвідка противника для виявлення й ідентифікації пунктів керування, має в своєму розпорядженні розвідувальні комплекси РК-1 – РК-5. Значення середнього часу виявлення й ідентифікації (у хвилинах) пунктів керування різними розвідувальними комплексами наведено в табл. 3.19.

Таблиця 3.19

Вид ПК	Вид РК				
	РК-1	РК-2	РК-3	РК-4	РК-5
ПК-1	4	3	1	4	5
ПК-2	1	5	6	7	2
ПК-3	3	2	3	8	3

Необхідно знайти оптимальний варіант використання пунктів керування й розвідувальних комплексів сторонами конфлікту під час бойових дій.

Розв'язання. Проаналізуємо задачу. При підготовці до бойових дій і під час бойових дій сторона, яка використовує пункти керування, намагається максимально приховати їх розташування. Метою цієї сторони є забезпечення якомога більшого часу на виявлення пунктів керування. Протилежна сторона, навпаки, має докладати всіх зусиль, щоб якомога швидше розкрити дислокацію пунктів керування для подальшого їх вогневого ураження.

Таким чином, взаємодія сторін є конфліктом, який можна описати матричною грою. Позначимо одну зі сторін гравцем ***A***. Його можливими стратегіями будуть стратегії $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, що означає використання відповідно пунктів керування ПК-1, ПК-2, ПК-3.

Друга сторона є гравцем ***B***, який має чисті стратегії $\boldsymbol{B_1}$ **–** $\boldsymbol{B_5}$, що відповідають використанню розвідувальних комплексів РК-1 – РК-5. Матрицю гри з урахуванням узятих позначень дій сторін наведено табл. 3.20.

Знайдемо нижню й верхню ціну гри:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{max_i\,\alpha_i} = \boldsymbol{max_i\,min_j\,\alpha_{ij}}\,;$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{min_j\,\alpha_j} = \boldsymbol{min_j\,max_i\,\alpha_{ij}}.$$

Таблиця 3.20

A_i		B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	4	3	1	4	5	1
A_2	1	5	6	7	2	1
A_3	3	2	3	8	3	$\boxed{2}$
β_i	$\boxed{4}$	5	6	8	5	

З таблиці (3.20) випливає, що для цієї матричної гри $\boldsymbol{\alpha}$ = 2, $\boldsymbol{\beta}$ = 4. Оскільки нижня ціна гри не дорівнює верхній, то розв'язку гри в чистих стратегіях не існує і його необхідно шукати в змішаних стратегіях.

Визначимо, чи не існує серед стратегій гравців дублювальних або напевно невигідних стратегій. Порівнюючи рядки матриці гри й перевіряючи умови (3.57) і (3.58), переконуємося, що серед чистих стратегій гравця ***A*** дублювальних і напевно невигідних стратегій немає.

Що стосується гравця ***B***, то з порівняння стратегій B_1 і B_4, а також B_1 і B_5 випливає, що стратегії B_4 і B_5 відносно стратегії B_1 є напевно невигідними (для них виконується умова (3.60)) і їх можна виключити з множини стратегій гравця ***B***. Тоді остаточно матрицю гри можна подати у вигляді табл. 3.21.

Таблиця 3.21

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	4	3	1
A_2	1	5	6
A_3	3	2	3

Таким чином, використовуючи процедуру спрощення, удалося звести гру 3 × 5 до гри 3 × 3. Аналітичний або графічний методи для розв'язання цієї гри є непридатними, тому для пошуку оптимальних змішаних стратегій гравців скористаємося методом лінійного програмування.

Визначимо оптимальну змішану стратегію гравця ***A***. Відповідно до (3.61) запишемо

$$\begin{aligned} 4p_1 + p_2 + 3p_3 &\geq v; \\ 3p_1 + 5p_2 + 2p_3 &\geq v; \\ p_1 + 6p_2 + 3p_3 &\geq v. \end{aligned} \tag{3.70}$$

З іншого боку, згідно з (3.62)

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \tag{3.71}$$

Розділивши обидві частини (3.70) і (3.71) на v і позначивши $x_1 = \frac{p_1}{v}$, $x_2 = \frac{p_2}{v}$ та $x_3 = \frac{p_3}{v}$, отримаємо таку задачу лінійного програмування: знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, які задовольняють обмеженням

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\geq 1, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\geq 1 \end{aligned} \tag{3.72}$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v}. \qquad (3.73)$$

Перейдемо від задачі лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями (3.72) до основної задачі лінійного програмування, для чого з лівої частини кожної нерівності (3.72) віднімемо додатні змінні x_4, x_5 та x_6:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_5 &= 1; \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_6 &= 1. \end{aligned} \qquad (3.74)$$

Задача лінійного програмування має шість змінних і три рівняння-обмеження. Розв'язок знайдемо табличним симплекс-методом.

Як вільні змінні виберемо x_1, x_2 та x_3. Тоді для базисних змінних можна записати

$$\begin{aligned} x_4 &= -1 + 4x_1 + x_2 + 3x_3, \\ x_5 &= -1 + 3x_1 + 5x_2 + 2x_3, \\ x_6 &= -1 + x_1 + 6x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

Подамо обмеження й цільову функцію у формі, призначеній для заповнення симплекс-таблиці:

$$\begin{aligned} x_4 &= -1 - (4x_1 + x_2 + 3x_3); \\ x_5 &= -1 - (-3x_1 + 5x_2 + 2x_3); \\ x_6 &= -1 - (-x_1 + 6x_2 + 3x_3); \\ L(\overline{x}) &= 0 - (-x_1 - x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Використовуючи алгоритм симплекс-методу, наведений у [8], знайдемо оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування. Послідовність симплекс-таблиць для різних кроків розв’язання задачі подано табл. 3.22–3.25.

Таблиця 3.22

Базові змінні	Вільні змінні			
	ВЧ	$\overline{x_1}$	x_2	x_3
$L(\overline{x})$	0	–1	–1	–1
↑ x_4	–1	$\boxed{-4}$	–1	–3
x_5	–1	–3	–5	–2
x_6	–1	–1	–6	–3

Таблиця 3.23

Базові змінні	Вільні змінні			
	ВЧ	x_4	$\overline{x_2}$	x_3
$L(\overline{x})$	1/4	–1/4	–3/4	–1/4
x_1	1/4	–1/4	1/4	3/4
↑ x_5	–1/4	–3/4	$\boxed{-17/4}$	1/4
x_6	–3/4	–1/4	–23/4	–9/4

Таблиця 3.24

Базові змінні	Вільні змінні			
	ВЧ	x_4	x_5	$\overline{x_3}$
$L(\overline{x})$	5/17	–2/17	–3/17	–5/17
x_1	4/17	–5/17	1/17	13/17
x_2	1/17	3/17	–1/17	–1/17
↑ x_6	–7/17	13/17	–23/17	$\boxed{-44/17}$

Таблиця 3.25

Базові змінні	Вільні змінні			
	ВЧ	x_4	x_5	x_6
$L(\overline{x})$	15/44	–9/44	–1/44	–5/44
x_1	5/44	3/44	–13/44	13/44
x_2	3/44	7/44	–9/44	–1/44
x_3	7/44	13/44	23/44	–17/44

Таким чином, оптимальним розв’язком задачі буде

$$x_1^* = \frac{5}{44};\ x_2^* = \frac{3}{44};\ x_1^* = \frac{3}{44};\ L_{min}\,(\overline{x}) = \frac{15}{44}.$$

З огляду на те, що відповідно до (3.73)

$$L_{min}\left(\overline{x^*}\right) = \frac{1}{\nu},$$

знайдемо значення ціни гри:

$$v = \frac{1}{L_{min}\left(\overline{x^*}\right)} = \frac{44}{15} \approx 2{,}933.$$

Легко переконатися, що для розглядуваної задачі

$$\alpha < v < \beta.$$

З рівнянь

$$x_1^* = \frac{p_1^*}{\nu};\ x_2^* = \frac{p_2^*}{\nu};\ x_3^* = \frac{p_3^*}{\nu}$$

знайдемо значення p_1^*, p_2^*, p_3^*:

$$p_1^* = x_1^*\ \nu \approx 0{,}33,$$

$$p_2^* = x_2^*\ \nu \approx 0{,}2,$$

$$p_3^* = x_3^*\ \nu \approx 0{,}47.$$

Отже, оптимальною змішаною стратегією гравця ***A*** є стратегія S_A^* = (0,33; 0,2; 0,47).

Це означає, що стратегія гравця ***A***, яка забезпечує йому середній час прихованої роботи ***t*** = 2,983 хв, полягає в такому. Увесь планований період бойових дій розбивається на кілька проміжків часу.

Протягом одного проміжку часу керування ведеться з одного пункту. Після закінчення цього проміжку керування передається іншому пункту, який здійснює керування протягом наступного проміжку, і т. д. Керування між пунктами передається випадковим (для противника) чином. При цьому загальний час роботи ПК-1 має становити 33 % часу ведення бойових дій, а загальний час роботи ПК-2 та ПК-3 – відповідно 20 і 47 %.

Для отримання оптимальної змішаної стратегії гравця ***B*** відповідно до (3.66) і (3.67) запишемо

$$\begin{aligned} &4q_1 + 3q_2 + q_3 \le \mathbf{v}; \\ &q_1 + 5q_2 + 6q_3 \le \mathbf{v}; \\ &3q_1 + 2q_2 + q_3 \le \mathbf{v}, \end{aligned} \qquad (3.75)$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1. \qquad (3.76)$$

Розділивши обидві частини (3.75) і (3.76) на ***v*** та позначивши $y_1 = \frac{q_1}{v}$, $y_2 = \frac{q_2}{v}$ і $y_3 = \frac{q_3}{v}$, отримаємо задачу лінійного програмування: знайти значення невід'ємних змінних y_1, y_2 та y_3, які задовольняють обмеженням

$$\begin{aligned} &4y_1 + 3y_2 + y_3 \le 1, \\ &y_1 + 5y_2 + 6y_3 \le 1, \\ &3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1 \end{aligned} \qquad (3.77)$$

і перетворюють на максимум цільову функцію

$$L(\overline{y}) = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{v}. \qquad (3.78)$$

Задачу (3.77)–(3.78) можна розв’язати симплекс-методом, як це було зроблено для задачі (3.72)–(3.73). Однак задачі (3.72)–(3.73) і (3.77)–(3.78) утворюють пару двоїстих задач лінійного програмування. Тому розв’язок задачі (3.77)–(3.78) можна отримати відразу, користуючись графом відповідності між змінними x_i і y_j (рис. 3.11).

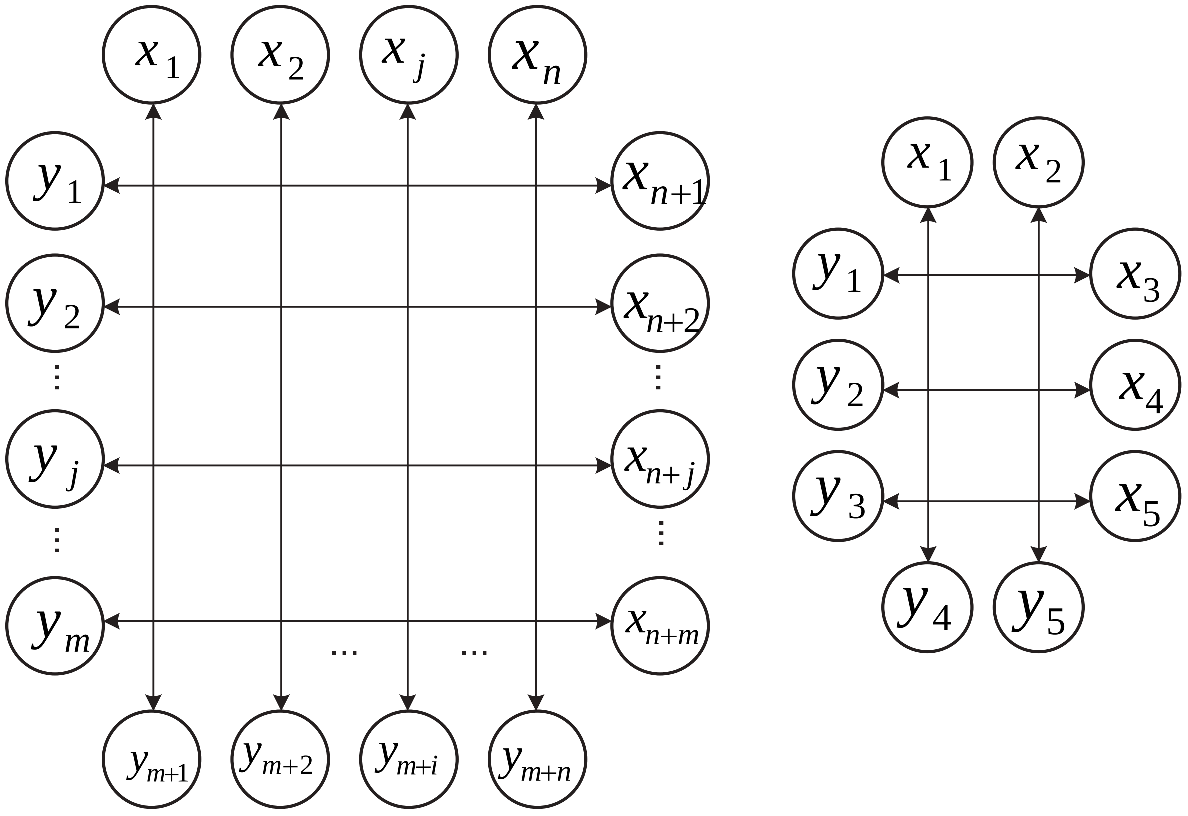


Рис. 3.11

Побудуємо кінцеву симплекс-таблицю (табл. 3.26) задачі (3.77)–(3.78).

Таблиця 3.26

Базові змінні	Вільні змінні			
	ВЧ	y_4	y_5	y_6
$L(\overline{x})$	–15/44	–5/44	-3/44	–7/44
y_1	9/44	3/44	–7/44	–13/44
y_2	1/44	13/44	9/44	–23/44
y_3	5/44	–13/44	1/44	17/44

При будуванні кінцевої симплекс-таблиці двоїстої задачі (3.77)–(3.78) необхідно керуватися таким [8].

1. Вихідна симплекс-таблиця задачі (3.72)–(3.73) має $m + 1 = 4$ рядки та $n + 1 = 4$ стовпці.
2. Рядки симплекс-таблиці задачі (2.72)–(2.73) відповідають стовпцям симплекс-таблиці (2.77)–(2.78) і навпаки.
3. Елементи відповідного рядка таблиці задачі (3.72)–(3.73) і стовпця задачі (3.77)–(3.78) мають протилежні знаки.
4. Вільні змінні задачі (3.72)–(3.73) відповідають базисним змінним задачі (3.77)–(3.78) і навпаки.

Наприклад, змінна x_1, як випливє з табл. 3.25, є базисною в розв'язку задачі (3.72)–(3.73). У задачі (3.77)–(3.78) цій змінній згідно з рис. 3.11 буде відповідати вільна змінна y_4. Тоді елементи рядка при x_1, узяті з протилежним знаком, утворять елементи стовпця при y_4 і т. д.

Однак симплекс-метод є орієнтованим на пошук мінімуму цільової функції. З метою використання симплекс-методу для розв'язання задачі (3.77)–(3.78) пошук максимуму цільової функції $L(\overline{y})$ необхідно замінити пошуком мінімуму цільової функції $L'(\overline{y}) = -L(\overline{y})$. Тоді в першій клітинці симплекс-таблиці 3.26 запишеться значення $\mathrm{L}'_{\mathrm{min}}(\overline{\mathrm{y}}^*) = -L_{max}(\overline{\mathrm{y}}^*)$.

З аналізу табл. 3.26 випливає, що оптимальним розв'язком задачі буде такий:

$$y_1^* = \frac{9}{44};\ y_2^* = \frac{1}{44};\ y_3^* = \frac{5}{44};\ L_{max}(\overline{y}^*) = -L'_{min}(\overline{y}^*) = \frac{15}{44}.$$

Ураховуючи, що $L_{max}(\overline{y}^*) = \frac{1}{v}$, знайдемо ціну гри:

$$v = \frac{1}{L_{max}(\overline{y}^*)} = \frac{44}{15} \approx 2{,}933.$$

Оскільки

$$y_1^* = \frac{q_1^*}{v};\ y_1^* = \frac{q_2^*}{v};\ y_1^* = \frac{q_3^*}{v},$$

то отримаємо

$$q_1^* = y_1^* v = 0{,}6,$$

$$q_2^* = y_2^* v = 0{,}07,$$

$$q_3^* = y_3^* v = 0{,}23.$$

Таким чином, оптимальною стратегією гравця ***B*** є стратегія

$$S_B^* = (0{,}6;\ 0{,}07;\ 0{,}23).$$

Оптимальна стратегія сторони ***B*** полягає в такому: для визначення та ідентифікації пунктів керування противника 60 % часу ведення бойових дій має використовуватися комплекс РК-1, 7 % часу – розвідувальний комплекс РК-2 та 33 % часу – розвідувальний комплекс РК-3.

Перемикання комплексів здійснюється за випадковим для противника законом. Середній час визначення та ідентифікації пунктів керування при застосуванні такої стратегії буде становити 2,933 хв.

Наведемо рекомендації для розв’язання ігрових задач:

1. Перевірити, чи не має гра розв'язок у чистих стратегіях. Для цього, аналізуючи матрицю гри, знайти значення нижньої та верхньої ціни гри. В умовах рівності нижньої та верхньої цін гра має розв'язок у чистих стратегіях. У протилежному випадку розв'язок доцільно шукати в змішаних стратегіях.
2. Перевірити, чи є в множині чистих стратегій дублювальні або напевно невигідні стратегії. Якщо такі стратегії є, то їх доцільно виключити, викреслюючи відповідні рядки або стовпці матриці, зменшуючи тим самим розмірність матриці (спростити гру).
3. Якщо розмірність матриці гри після її спрощення становить 2 × 2, то для розв’язання гри доцільно скористатися аналітичним методом.
4. При розмірності матриці гри 2 × n або m × 2, де n, m – довільні цілі у кількості більше двох, розв’язати гру можна графічним методом. Графічний метод можна використати для зведення гри 2 × n або m × 2 до гри 2 × 2 з наступним її розв’язанням аналітичним методом.
5. У випадку довільної розмірності m × n для розв’язання гри необхідно скористатися методом лінійного програмування. При цьому симплекс-методом достатньо розв’язати тільки задачу визначення оптимальної змішаної стратегії одного з гравців. Змішану стратегію противника легко визначити шляхом використання принципу двоїстості задач лінійного програмування.

3.9. Метод ітерацій

Розглянуті вище методи дають змогу отримати розв'язок гри, тобто обчислити точні значення ймовірностей чистих стратегій, з яких формується оптимальна змішана стратегія. Однак у деяких випадках розмірність матриці гри виявляється настільки великою, що її розв'язок симплекс-методом є важким навіть з використанням сучасної комп'ютерної техніки. У таких випадках доцільно використовувати методи наближеного розв'язку гри, одним з яких є ітеративний метод Брауна, або просто метод ітерацій [1, 2, 7].

Зміст методу ітерацій полягає в тому, що відповідно до заданої матриці гра багаторазово повторюється. Під час кожного ходу (ітерації) кожен з гравців вибирає одну зі своїх чистих стратегій, використання якої забезпечує йому максимальний виграш (або мінімальний програш) на цій ітерації з урахуванням усіх попередніх кроків.

Таким чином, підставою для вибору чистої стратегії гравцем A на k-й ітерації є нагромаджений виграш, а гравцем B – нагромаджений програш за всі попередні повторення гри, включаючи ***k***-й крок. Розіграння гри припиняється на заданій заздалегідь ***N***-й ітерації, після чого підраховується частота використання тієї чи іншої стратегії гравця, яка береться за ймовірність її використання при формуванні змішаної стратегії.

Припустимо, що гру задано матрицею, наведеною табл. 3.27.

Таблиця 3.27

A_i	B_j						
	B_1	B_2	…	B_p	B_q	…	B_n
A_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1p}	α_{1q}	…	α_{1n}
A_1	α_{21}	α_{22}	…	α_{2p}	α_{2q}	…	α_{2n}
…	…	…	…	α_{11}	…	…	…
A_l	α_{l1}	α_{l2}	…	α_{lp}	α_{lq}	…	α_{ln}
A_r	α_{r1}	α_{r2}	…	α_{rp}	α_{rq}	…	α_{rn}
A_s	α_{s1}	α_{s2}	…	α_{sp}	α_{sq}	…	α_{sn}
			…			…	
A_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mp}	α_{mq}	…	α_{mn}

Гра розпочинається з того, що один з гравців робить перший хід, вибираючи одну зі своїх чистих стратегій. Оскільки до початку гри виграш гравця ***A*** і відповідно програш гравця ***B*** дорівнюють нулю, на першому кроці здійснюється вибір довільної чистої стратегії. Нехай перший хід робить гравець ***A***, вибираючи чисту стратегію $A_l^{(1)}$. Тут верхній індекс означає номер ходу (номер ітерації). Гравець ***B***, знаючи вибір гравця ***A*** й аналізуючи матрицю гри (аналізуючи елементи рядка A_l матриці), під час першого ходу вибирає таку відповідну стратегію $B_q^{(1)}$, яка забезпечила б йому мінімальний програш у відповідь на $A_l^{(1)}$. Іншими словами, гравець ***B*** вибирає стратегію $B_q^{(1)}$, якщо виконується умова

$$\alpha(A_l^{(1)}, B_q^{(1)}) = min_{\{B_j\}}\, \alpha(A_l^{(1)}, B_j^{(1)}),$$

де $\alpha(A_l^{(1)}, B_j^{(1)})$ – результат першого ходу гри при використанні гравцями стратегій $A_l^{(1)}$ і $B_j^{(1)}$.

Якщо

$$\gamma_1(B_j^{(1)}) = \alpha(A_l^{(1)}, B_j^{(1)}) \tag{3.79}$$

трактувати як сумарний (нагромаджений) програш гравця ***B*** за перший крок, то він вибирає стратегію $B_q^{(1)}$ при виконанні умови

$$\gamma_1(B_q^{(1)}) = min_{\{B_j\}}\, \gamma_1(B_j^{(1)}).$$

При виборі стратегії на другому кроці гравець ***A*** повинен урахувати всі попередні кроки супротивника. Однак гравець ***B*** зробив тільки один крок, під час якого вибрав стратегію $B_q^{(1)}$. У відповідь на $B_q^{(1)}$ гравець ***A***, аналізуючи елементи стовпця $B_q^{(1)}$ матриці гри, вибрав таку стратегію $A_s^{(2)}$, яка забезпечить йому максимальний виграш. Таким чином, стратегія $A_s^{(2)}$ вибирається за умови

$$\alpha(A_s^{(2)}, B_q^{(1)}) = max_{\{A_j\}}\, \alpha(A_i^{(2)}, B_q^{(1)})$$

або

$$\gamma_2(A_s^{(2)}) = max_{\{\mathrm{A_j}\}}\, \gamma_2(A_i^{(2)}).$$

Розглянемо, як же діятиме гравець ***B*** при виборі своєї стратегії на другому кроці. Приймаючи рішення про вибір стратегії, гравець ***B*** має інформацію про те, що його противник під час першого кроку вибрав стратегію $A_l^{(1)}$, а під час другого кроку – стратегію $A_s^{(2)}$. Тому гравець ***B*** аналізуватиме свою стратегію $B_j^{(2)}$ з урахуванням програшу, завданого йому гравцем ***A*** за два кроки.

Поелементне підсумовування рядків A_l і A_s матриці гри і дає сумарний (нагромаджений) програш гравця ***B*** для кожної його стратегії $B_j^{(2)}$ при здійсненні його противником двох кроків, тобто

$$\gamma_2(B_j^{(2)}) = \alpha(A_l^{(1)}, B_j^{(1)}) + \alpha(A_s^{(2)}, B_j^{(2)}),$$

або з урахуванням (3.79)

$$\boldsymbol{\gamma_2(B_j^{(2)}) = \alpha(A_s^{(2)}, B_j^{(2)}) + \gamma_1(B_j^{(1)})}.$$

Тоді для досягнення мінімального програшу при здійсненні свого другого кроку гравець ***B*** вибирає стратегію $\boldsymbol{B_p^{(2)}}$, для якої виконується умова

$$\boldsymbol{\gamma_2(B_p^{(2)}) = min_{\{B_j\}}\, \gamma_2(B_j^{(2)}) = min_{\{B_j\}} \left[\alpha\left(A_s^{(2)}, B_j^{(2)}\right) + \gamma_1\left(B_j^{(1)}\right)\right]}.$$

Відповідно з урахуванням попередніх двох кроків супротивника гравець ***A*** під час третього кроку вибирає стратегію $\boldsymbol{A_r^{(3)}}$, виходячи з умови

$$\boldsymbol{\gamma_3(A_r^{(3)}) = max_{\{A_i\}}[\alpha(A_i^{(3)},\ B_p^{(2)}) + \gamma_2(A_i^{(2)})]}.$$

Продовжуючи аналогічно міркувати, можна дійти висновку, що під час ***k***-го кроку гравець ***B*** вибере стратегію $\boldsymbol{B_q^{(k)}}$, виходячи з умови

$$\boldsymbol{\gamma_k(B_q^{(k)}) = min_{\{B_j\}} \left[\alpha\left(A_l^{(k)}, B_j^{(k)}\right) + \gamma_{k-1}\left(B_j^{(k-1)}\right)\right]}, \tag{3.80}$$

а гравець ***A*** **–** стратегію $\boldsymbol{A_s^{(k)}}$, виходячи з умови

$$\boldsymbol{\gamma_k(A_s^{(k)}) = max_{\{A_i\}} \left[\alpha\left(A_i^{(k)}, B_q^{(k-1)}\right) + \gamma_{k-1}\left(A_i^{(k-1)}\right)\right]}. \tag{3.81}$$

Припустимо, що розв'язання гри закінчується ***N***-м кроком. Тоді за умови вибору гравцем ***B*** стратегії $\boldsymbol{B_q^{(N)}}$ його нагромаджений виграш

$$\boldsymbol{\gamma_N(B_q^{(N)}) = min_{\{B_j\}} \left[\alpha\left(A_l^{(N)}, B_j^{(N)}\right) + \gamma_{N-1}\left(B_j^{(N-1)}\right)\right]},$$

а за умови вибору гравцем ***A*** стратегії $\boldsymbol{A_s^{(N+1)}}$ його нагромаджений виграш

$$\boldsymbol{\gamma_{N+1}(A_s^{(N+1)}) = max_{\{A_i\}}[\alpha(A_i^{(N+1)}, B_q^{(N-1)}) + \gamma_N(A_i^{(N)})]}.$$

Нагадаємо, що гравець ***A*** зробив перший хід у грі й наприкінці ***N***-го кроку має намір вибрати стратегію для (***N*** + 1)-го ходу. З урахуванням цього його нагромаджений виграш позначено як $\boldsymbol{\gamma_{N+1}(A_s^{(N+1)})}$. Оскільки у грі зроблено ***N*** кроків, оцінку виграшу гравця ***A*** можна отримати, поділивши значення нагромадженого виграшу на кількість зроблених кроків, тобто

$$\boldsymbol{\nu_A = \frac{1}{N}\gamma_{N+1}(A_s^{(N+1)})}. \tag{3.82}$$

Відповідно оцінка програшу гравця ***B***

$$\boldsymbol{\nu_B = \frac{1}{N}\gamma_N(B_q^{(N)})}. \tag{3.83}$$

Тоді ціну гри можна визначити таким чином:

$$\boldsymbol{\nu = \frac{1}{2}(\nu_A + \nu_B) = \frac{1}{2N}[\gamma_{N+1}(A_s^{(N+1)}) + \gamma_N(B_q^{(N)})]}. \tag{3.84}$$

Тепер залишається визначити, на якому кроці слід припинити розв'язання гри методом ітерацій. В основній теоремі теорії матричних ігор стверджується, що будь-яка матрична гра має розв'язок в чистих або змішаних стратегіях. Це означає, що при використанні гравцями своїх оптимальних змішаних стратегій виграш гравця ***A*** і програш гравця ***B*** дорівнюють ціні гри ***ν***. Тоді при розв’язанні гри методом ітерацій слід очікувати, що зі збільшенням кількості кроків ***k*** величина $\boldsymbol{\nu_A}$ буде прямувати до величини $\boldsymbol{\nu_B}$, або (що те ж саме) величина

$$\boldsymbol{\delta_k = \frac{1}{k}[\gamma_{k+1}(A_s^{(k+1)}) - \gamma_k(B_q^{(k)})]} \tag{3.85}$$

буде прямувати до нуля.

Тому, задаючи величину $\boldsymbol{\delta}_{\text{тр}}$, що характеризує необхідну точність розв'язання, і порівнюючи на кожній ітерації величини $\boldsymbol{\delta}_{\text{тр}}$ і $\boldsymbol{\delta_k}$, гру припиняють при виконанні умови

$$\boldsymbol{\delta_k} \le \boldsymbol{\delta}_{\text{тр}}. \tag{3.86}$$

Після закінчення розігрування гри на ***N***-му кроці проводиться підрахунок кількості $\boldsymbol{N_{A_i}}$ чистих стратегій $\boldsymbol{A_i}$ і кількості $\boldsymbol{N_{B_j}}$ чистих стратегій $\boldsymbol{B_j}$, використаних гравцями під час гри.

Величини

$$p_i^* = \frac{N_{A_i}}{N}, \tag{3.87}$$

$$q_j^* = \frac{N_{B_j}}{N}, \tag{3.88}$$

беруться як значення ймовірностей використання гравцями відповідних чистих стратегій при формуванні своїх оптимальних змішаних стратегій у цій грі.

Розглянемо приклад розв'язання гри методом ітерацій.

Приклад 3.6. Розв'язати методом ітерацій гру, матрицю якої наведено табл. 3.28, при $\delta_{\text{тр}}$ = 0,1. Сторона ***А*** надає послуги (стратегії) ***А₁, А₂, А₃*** (продаж комп'ютерів, мобільних телефонів, оргтехніки тощо). Сторона ***В*** надає аналогічні послуги. Матриця гри має розмір 3 × 3.

Таблиця 3.28

Стратегії	B_1	B_2	B_3	α
A_1	7	4	2	2
A_2	1	5	6	1
A_3	4	3	4	$\boxed{3}$
β	7	$\boxed{5}$	6	

Розв'язання. З аналізу матриці випливає, що нижня ціна гри

$$\alpha = max_i\, \alpha_i = max_i\, min_j\, \alpha_{ij} = 3,$$

а верхня

$$\beta = min_j\, \beta_j = min_j\, max_i\, \beta_{ij} = 5.$$

Сідлової точки в матриці гри немає, тому ціна гри 3 ≤ ***v*** ≤ 5. Оптимальний розв'язок гри – змішані стратегії гравців ***А*** (S_A^* = {p_1^*, p_2^*, p_3^*}) і ***В*** (S_B^* = {q_1^*, q_2^*, q_3^*}).

Знайдемо розв'язок гри методом ітерацій. Побудуємо табл. 3.29 для пошуку розв'язку (у таблиці наведено такі позначення стовпців: ***k*** – номер кроку, через A_i **–** чиста стратегія гравця ***А*** на ***k***-му кроці; стовпці B_1**,** B_2 **і** B_3 призначено для запису сумарного програшу гравця ***В*** для кожної з його чистих стратегій, B_j **–** чиста стратегія гравця ***В*** на ***k***-му кроці, наступні три стовпці призначено для запису сумарного виграшу гравця ***A*** для кожної з його чистих стратегій $A_1,\ A_2,\ A_3$). Для контролю умови (3.85) уводиться останній стовпець.

Розігрування починається з того, що на першому кроці гравець ***A*** вибирає чисту стратегію A_1. Програш гравця ***B*** відповідно до табл. 3.28 при стратегіях B_1, B_2 і B_3 дорівнютиваме 7, 4 і 2.

Запишемо ці значення на перетині стовпців B_1, B_2, B_3 та першого рядка табл. 3.29. Очевидно, на першому кроці у відповідь на стратегію A_1 гравця ***A*** гравець ***B*** на першому кроці вибере таку стратегію, яка забезпечить йому мінімальний програш, тобто стратегію B_3. Значення мінімального програшу виділимо, а стратегію B_3 запишемо на перетині першого рядка й стовпця B_j.

Тепер гравець ***A*** повинен вибрати свою стратегію на другому кроці. Відповідаючи на стратегію B_3 стратегіями $A_1,\ A_2,\ A_3,$ гравець ***A*** з урахуванням першого кроку може з абезпечити собі виграш відповідно 2, 6 або 4.

Природно, на другому кроці гравець ***A*** вибере стратегію $A_2,$ яка дасть йому максимальний виграш, який дорівнює 6 (це значення в табл. 3.29 виділено). Стратегію A_2 запишемо на перетині другого рядка й стовпця A_i.

Свою стратегію на другому кроці гравець ***B*** має вибрати з урахуванням того, що його противник зробив уже два кроки, вибравши при цьому відповідно стратегії A_1 та A_2.

Сумарний програш за два кроки для кожної зі стратегій B_1, B_2 і B_3 визначається підсумовуванням значень, записаних на перетині першого рядка й стовпців B_1, B_2 і B_3 табл. 3.29 і відповідних значень рядка A_2 табл. 3.28. Значення сумарного програшу, які дорівнюють 8, 9 і 8, записують у другий рядок табл. 3.29 на перетині зі стовпцями B_1, B_2 і B_3. Мінімальне значення сумарного програшу (виділено квадратом) відповідає стратегії $B_1,$ яку й вибирає гравець ***B*** на другому кроці.

При виборі стратегії на третьому кроці гравець ***A*** має врахувати, що його супротивник зробив два кроки, за результатами яких було вибрано стратегії B_3 та B_1. Для визначення сумарного виграшу гравця ***A*** з урахуванням попередніх двох ходів противника підсумуємо значення, записані на перетині другого рядка й стовпців $A_1,\ A_2,\ A_3$ (табл. 3.29) і відповідного стовпця B_1 (див. табл. 3.28). Отримані значення становлять відповідно 15, 13 і 10. Запишемо їх на перетині третього рядка і стовпців $A_1,\ A_2,\ A_3$.

Таблиця 3.29

k	A_i	$\mathbf{В}_1$	$\mathbf{В}_2$	$\mathbf{В}_3$	$\mathbf{В}_j$	A_1	A_2	A_3	$\boldsymbol{\delta}$
1	A_1	7	4	$\boxed{2}$	$\mathbf{В}_3$	2	$\boxed{6}$	4	4
2	A_2	$\boxed{8}$	9	8	$\mathbf{В}_1$	$\boxed{9}$	7	4	0,5
3	A_1	15	13	$\boxed{10}$	$\mathbf{В}_3$	11	$\boxed{13}$	12	1
4	A_2	$\boxed{16}$	18	16	$\mathbf{В}_1$	$\boxed{18}$	14	16	0,5
5	A_2	$\boxed{17}$	23	22	$\mathbf{В}_1$	$\boxed{25}$	15	20	1,4
6	A_1	$\boxed{24}$	28	24	$\mathbf{В}_1$	$\boxed{32}$	16	24	1,66
7	A_1	31	32	$\boxed{26}$	$\mathbf{В}_3$	$\boxed{34}$	22	28	1,14
8	A_1	38	36	$\boxed{28}$	$\mathbf{В}_3$	$\boxed{36}$	28	32	1
9	A_1	45	40	$\boxed{30}$	$\mathbf{В}_3$	$\boxed{38}$	34	36	0,88
10	A_1	52	44	$\boxed{32}$	$\mathbf{В}_3$	$\boxed{40}$	40	40	0,8
11	A_1	59	48	$\boxed{34}$	$\mathbf{В}_3$	42	$\boxed{46}$	44	1,09
12	A_2	60	53	$\boxed{40}$	$\mathbf{В}_3$	44	$\boxed{52}$	48	1
13	A_2	61	58	$\boxed{46}$	$\mathbf{В}_3$	46	$\boxed{58}$	52	0,92
14	A_2	62	63	$\boxed{52}$	$\mathbf{В}_3$	48	$\boxed{64}$	56	0,85
15	A_2	63	68	$\boxed{62}$	$\mathbf{В}_3$	50	$\boxed{70}$	60	0,8
16	A_2	$\boxed{64}$	73	64	$\mathbf{В}_1$	57	$\boxed{71}$	64	0,44
17	A_2	$\boxed{65}$	78	70	$\mathbf{В}_1$	64	$\boxed{72}$	68	0,41
18	A_2	$\boxed{66}$	83	76	$\mathbf{В}_1$	71	$\boxed{73}$	72	0,38
19	A_2	$\boxed{67}$	88	82	$\mathbf{В}_1$	$\boxed{78}$	74	76	0,63
20	A_1	74	$\boxed{72}$	84	$\mathbf{В}_2$	$\boxed{82}$	79	79	0,5
21	A_1	81	$\boxed{76}$	84	$\mathbf{В}_2$	$\boxed{86}$	84	82	0.47
22	A_1	88	$\boxed{80}$	86	$\mathbf{В}_2$	$\boxed{90}$	89	85	0,45
23	A_1	95	$\boxed{84}$	88	$\mathbf{В}_2$	$\boxed{94}$	94	88	0,43
24	A_1	102	$\boxed{88}$	90	$\mathbf{В}_2$	98	$\boxed{99}$	91	0,375
25	A_2	103	$\boxed{93}$	96	$\mathbf{В}_2$	102	103	94	0,4
26	A_2	104	$\boxed{98}$	102	$\mathbf{В}_2$	106	$\boxed{108}$	97	0,38
27	A_2	105	$\boxed{103}$	108	$\mathbf{В}_2$	110	$\boxed{113}$	100	0,37
28	A_2	$\boxed{106}$	108	114	$\mathbf{В}_1$	$\boxed{117}$	114	104	0,39
29	A_1	113	$\boxed{112}$	116	$\mathbf{В}_2$	$\boxed{121}$	119	107	0,31
30	A_1	120	$\boxed{116}$	118	$\mathbf{В}_2$	$\boxed{125}$	124	110	0,3
31	A_1	127	$\boxed{120}$	120	$\mathbf{В}_2$	$\boxed{129}$	129	113	0,29
32	A_1	134	124	$\boxed{122}$	$\mathbf{В}_3$	131	$\boxed{135}$	117	0,4
33	A_2	135	$\boxed{129}$	129	$\mathbf{В}_2$	135	$\boxed{142}$	129	0,33
34	A_2	136	$\boxed{134}$	135	$\mathbf{В}_2$	139	$\boxed{145}$	132	0,32

Закінчення табл. 3.29

k	A_i	**B₁**	**B₂**	**B₃**	**Bj**	A_1	A_2	A_3	δ
35	A_2	$\boxed{137}$	139	141	**B₁**	$\boxed{146}$	146	136	0,26
36	A_1	144	$\boxed{143}$	143	**B₂**	150	$\boxed{151}$	139	0,32
37	A_2	$\boxed{145}$	148	149	**B₁**	157	152	143	0,32
38	A_1	152	152	$\boxed{151}$	**B₃**	$\boxed{159}$	158	147	0,21
39	A_1	159	156	$\boxed{153}$	**B₃**	161	$\boxed{164}$	151	0,28
40	A_2	160	161	$\boxed{159}$	**B₃**	163	$\boxed{170}$	155	0,27
41	A_2	$\boxed{161}$	166	165	**B₁**	170	$\boxed{171}$	159	0,24
42	A_2	$\boxed{162}$	171	171	**B₂**	174	$\boxed{175}$	163	0,31
43	A_2	$\boxed{163}$	176	177	**B₁**	$\boxed{181}$	176	167	0,41
44	A_1	$\boxed{170}$	180	179	**B₁**	$\boxed{188}$	177	171	0,41
45	A_1	$\boxed{177}$	184	181	**B₁**	$\boxed{195}$	178	175	0,4

Відповідно до умови (3.80) (максимуму сумарного виграшу) на третьому кроці гравець ***А*** вибирає стратегію A_1. Аналогічно заповнюють інші рядки табл. 3.29. При її заповненні можливими є ситуації, коли умовам (3.80) і (3.81) можуть відповідати кілька значень сумарного виграшу або сумарного програшу. Для спрощення розрахунків на комп'ютері доцільно використовувати перше максимальне значення в послідовності значень сумарного виграшу гравця ***А*** (перше мінімальне значення в послідовності значень сумарного програшу гравця ***В***).

Для контролю виконання умови (3.86) в останній стовпець табл. 3.29 записують значення δ_k, яке розраховують за виразом (3.85). Сенс цього розрахунку полягає в тому, що визначають різницю між правим і лівим значеннями, обведеними квадратами в кожному рядку. Потім ця різниця ділиться на номер кроку. На 38-му кроці отримуємо значення δ_{38} = 0,21. Підрахуємо кількість використаних стратегій A_1, A_2, A_3 (N_{A_1} = 19, N_{A_2} = 19, N_{A_3} = 0) і стратегій B_1, B_2, B_3 (N_{B_1} = 11, N_{B_2} = 14, N_{B_3} = 13).

Знайдемо частоту використання гравцем ***А*** стратегій A_1, A_2, A_3:

$$p_1^* = \frac{N_{A_1}}{N} = \frac{19}{38} = 0{,}5;$$

$$p_2^* = \frac{N_{A_1}}{N} = \frac{19}{38} = 0{,}5;$$

$$p_3^* = \frac{N_{A_1}}{N} = \frac{0}{38} = 0.$$

Визначимо змішану стратегію гравця ***A***:

$$\boldsymbol{S_A^*} = \{\boldsymbol{p_1^*};\ \boldsymbol{p_2^*};\ \boldsymbol{p_3^*}\} = \{0{,}5;\ 0{,}5;\ 0\}.$$

Знайдемо частостоту використання гравцем ***B*** стратегій ***B₁***, ***B₂***, ***B₃***:

$$\boldsymbol{q_1^*} = \frac{\boldsymbol{N_{A_1}}}{\boldsymbol{N}} = \frac{\boldsymbol{11}}{\boldsymbol{38}} = 0{,}29;$$

$$\boldsymbol{q_2^*} = \frac{\boldsymbol{N_{A_1}}}{\boldsymbol{N}} = \frac{\boldsymbol{14}}{\boldsymbol{38}} = 0{,}37;$$

$$\boldsymbol{q_3^*} = \frac{\boldsymbol{N_{A_1}}}{\boldsymbol{N}} = \frac{\boldsymbol{13}}{\boldsymbol{38}} = 0{,}34.$$

Визначимо змішану стратегію гравця ***B***:

$$\boldsymbol{S_B^*} = \{\boldsymbol{q_1^*};\ \boldsymbol{q_2^*};\ \boldsymbol{q_3^*}\} = \{0{,}29;\ 0{,}37;\ 0{,}34\}.$$

Обчислимо ціну гри:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2N}}\left(\boldsymbol{\gamma_{N+1}(A_s^{N+1})} + \boldsymbol{\gamma_N(B_q^N)}\right) = \frac{1}{2\cdot 38}(159 + 151) = \frac{310}{76} = 4{,}08.$$

З аналізу таблиці випливає, що зі збільшенням кількості ходів ***N*** точність розв’язання гри методом ітерацій підвищується. З іншого боку, у разі використання комп'ютера для розв'язання гри підвищення точності призводить до збільшення витрат обчислювальних ресурсів, зокрема машинного часу. Тому на практиці необхідно прагнути до розумного компромісу, що дає змогу забезпечити прийнятну точність результатів розв'язання гри при істотній економії ресурсів.

3.10. Модель комплектації оброблювального центру

Передбачається організувати оброблювальний центр (ОбЦ) колективного користування, який може бути оснащено станками чотирьох типів [8]. На оброблення будуть прийматися деталі, що належать до одного з п'яти видів оброблення (шліфування, свердління, різання тощо).

Причому заздалегідь не можна вказати час надходження деталей.

Процес оброблення деталей зводиться до вирішення відповідного завдання, і це потребує певного часу, що залежить від характеристик верстата, складності оброблення, розміру деталі тощо.

Витрати, пов'язані з діяльністю ОбЦ, оплачують замовники, яким подаються рахунки за проведені роботи. Платежі – умовна вартість оброблення деталей – наведено в табл. 3.30.

Таблиця 3.30

Тип станка (стратегії **A**)	Вид завдання (стратегії **B**)				
	1((B_1))	2(B_2)	3(B_3)	4(B_4)	5(B_5)
1(A_1)	200	400	600	400	700
2(A_2)	300	400	600	500	800
3(A_3)	400	500	600	500	800
4(A_4)	700	300	500	200	100

Розглянемо ситуацію, що виникла, як ігрову. Сторона **A** (власник ОбЦ) має чотири стратегії 1–4 (за кількістю типів верстатів). Вона намагається збільшити надходження коштів від замовників шляхом прискорення оброблення деталей і навіть застосування дорогих станків там, де можна було б застосувати більш дешеві верстати.

Сторона **B** (замовники – користувачі ОбЦ) намагається розумно витрачати кошти, відмовляється від надмірних вимог до термінів виконання робіт з метою економії, коректно формулює замовлення, вибирає ті з них, які становлять першочерговий інтерес (стратегії 1–5).

За цих умов табл. 3.30 є по суті матрицею гри. З її дослідження випливає, що для сторони **A** стратегія **A_1** є напевно невигідною порівняно зі стратегією **A_2** (розміри виграшів у першому рядку табл. 3.30 не перевищують виграшів, наведених у другому).

Так само стратегія 2 поступається стратегії 3, і вихідні умови гри спрощуються (табл. 3.31).

Таблиця 3.31

Стратегії **A**	Стратегії **B**				
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_3	400	500	600	500	800
A_4	700	300	500	200	100

Зауважимо, що для сторони ***B*** стратегія ***B₃*** є невигідною порівняно зі стратегією ***B₂***, а стратегія ***B₂*** – порівняно зі стратегією ***B₄***. Отже, маємо аналізувати гру 2 × 3, задану табл. 3.32.

Таблиця 3.32

Стратегії ***A***	Стратегії ***B***		
	B₁	***B₄***	***B₅***
A₃	400	500	800
A₄	700	200	100

Складемо рівняння для середнього виграшу ***v*** гравця ***A*** в разі застосування грацем ***B*** стратегій ***B₁, B₄*** та ***B₅***:

$400\boldsymbol{p_3}$ + $700\boldsymbol{p_4}$ = $\boldsymbol{v_1}$ (при застосуванні гравцем ***B*** стратегії ***B₁***);
$500\boldsymbol{p_3}$ + $200\boldsymbol{p_4}$ = $\boldsymbol{v_4}$ (при застосуванні гравцем ***B*** стратегії ***B₄***);
$800\boldsymbol{p_3}$ + $100\boldsymbol{p_4}$ = $\boldsymbol{v_5}$ (при застосуванні гравцем ***B*** стратегії ***B₅***),

а також рівняння-обмеження ймовірностей застосування стратегій гравцем ***A***:

$$\boldsymbol{p_3} + \boldsymbol{p_4} = 1,$$

де $\boldsymbol{p_3}$, $\boldsymbol{p_4}$ – імовірності застосування стороною ***A*** стратегій ***A₃*** і ***A₄*** відповідно.

Підставивши останній вираз у формули для $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}$, отримаємо

$$\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{-}\ 300\boldsymbol{p_3} + 700,$$

$$\boldsymbol{v_4} = \boldsymbol{-}\ 300\boldsymbol{p_3} + 200,$$

$$\boldsymbol{v_5} = \boldsymbol{-}\ 700\boldsymbol{p_3} + 100.$$

Графік функції $\bar{\boldsymbol{v}}$ = ***min(***$\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}$ ***)*** показано на рис. 3.12. Очевидно,

$$\boldsymbol{p_3^*} = 5/6;\ \boldsymbol{p_4^*} = 1 - \boldsymbol{p_3^*} = 1/6;\ \bar{\boldsymbol{v}} = 450.$$

Таким чином, знайдена між $\boldsymbol{p_3^*}$ і $\boldsymbol{p_4^*}$ пропорція $\left(\frac{\boldsymbol{p_4^*}}{\boldsymbol{p_3^*}}\right)$ = 0,2 свідчить про доцільність комплектації ОбЦ тільки верстами 3-го й 4-го типів, причому кількість верстатів 3-го типу має в п'ять разів перевершувати кількість верстатів 4-го типу.

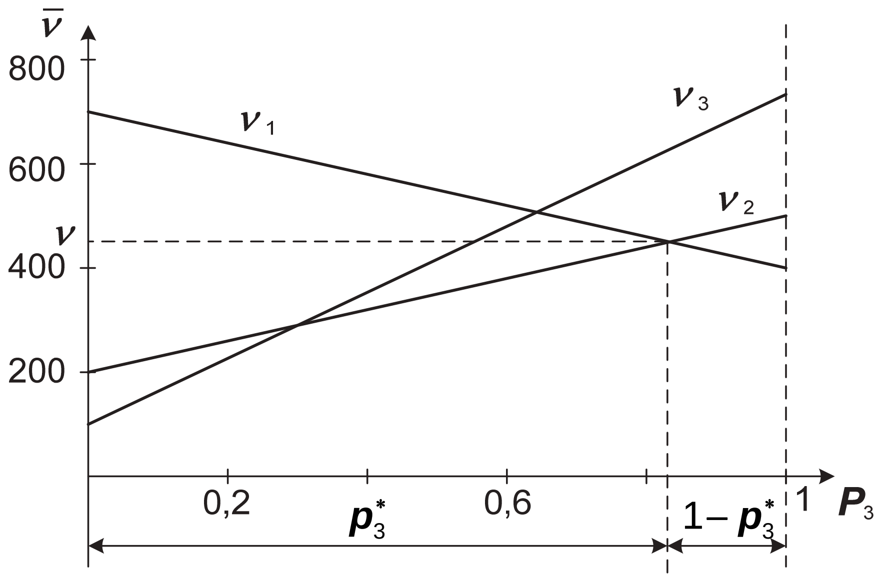


Рис. 3.12

Окрім того, ОбЦ слід орієнтувати на оброблення деталей 1, 4 та 5-го виду, тобто робити його більш спеціалізованим (інакше зменшиться гарантований виграш $\bar{v}$ = 450). Абсолютна кількість тих або інших верстатів обчислюється іншими методами, наприклад шляхом оцінювання ітенсивності надходження замовлень на оброблення деталей.

Теорія антагоністичних ігор не зачіпає всіх аспектів проблеми розумного поводження в конфліктних ситуаціях. Багато конфліктів, що виникають під час діяльності різних систем, мають неантагоністичний характер і часто завершуються укладенням прийнятних угод між їх учасниками. З огляду на це становлять інтерес так звані багатокрокові (кооперативні) ігри, що відрізняються великою різноманітністю змісту.

Контрольні запитання

1. Які стратегії гравців ***A*** і ***B*** є найкращими?
2. Назвіть умови розв'язання гри в чистих стратегіях.
3. Дайте означення сідлового елемента.
4. Наведіть ознаку змішаної стратегії.
5. Наведіть приклад фізичного змішування чистих стратегій.
6. Яка змішана стратегія є оптимальною?
7. Наведіть зміст аналітичного розв’язання матричних ігор.
8. Наведіть зміст графічного розв’язання матричних ігор.
9. Яким чином здійснюється спрощення матричної гри?
10. Наведіть зміст розв’язання матричних ігор методом ітерацій.
11. Яким чином визначають частоту застосування стратегій?

12. Яким чином визначають нагромаджений виграш гравця при застосуванні методу ітерацій?

13. Яким чином визначають необхідну точність $\boldsymbol{\delta}_{\text{тр}}$ розв'язку гри методом ітерацій?

14. Наведіть методи розв'язання гри $\boldsymbol{m \times n}$.

15. Наведіть рекомендації для розв’язання ігрових задач.

4. СТАТИСТИЧНІ ІГРИ

4.1. Основні поняття теорії статистичних ігор

Розглянуті вище конфліктні ситуації характеризувалися тим, що одному з гравців протистоїть розумний противник, який намагається перешкодити йому в досягненні мети. Водночас на практиці часто трапляються ситуації, коли гравцеві доводиться приймати рішення в умовах неповної інформації, зумовленої не активною протидією противника, а недостатнім знанням обстановки, у якій проводиться операція.

Наприклад, при плануванні маршу військового підрозділу заздалегідь точно не відомо, у яких метеорологічних умовах він буде проходити. У подібних ситуаціях також має місце конфлікт, але в цьому конфлікті гравцеві протистоїть природа, тобто сукупність зовнішніх умов, у яких проводиться операція.

Слід зазначити, що природа певною мірою є нейтральною, у тому сенсі, що не прагне звернути собі на користь помилки й прорахунки, яких припускається гравець. Спрощену модель такої конфліктної ситуації також можна трактувати як гру, але тільки гру з природою. Такі ігри отримали назву статистичних ігор.

Прикладами статистичних ігор можуть бути організація випуску продукції при освоєнні нового, недостатньо вивченого ринку збуту, вибір виду зброї для його застосування в різних географічних і кліматичних умовах, організація роботи контрольно-вимірювальної лабораторії при невідомій інтенсивності надходження приладів тощо.

Отже, у статистичних іграх людині протистоїть природа, яка не чинить їй цілеспрямованого опору. Природа розвивається за своїми законами, які людина або не знає, або знає недостатньо. Під час своєї діяльності людина активно вивчає закони розвитку природи, намагаючись обернути ці знання собі на користь. Природа вивчається шляхом проведення будь-яких дій, які називають експериментами.

При прийнятті рішень в іграх з природою можна обмежитися лише тією інформацією, яку було нагромаджено на основі попереднього досвіду проведення операцій.

Так, наприклад, при виборі типу стрілецької зброї для застосування в певній місцевості з певними кліматичними умовами можна обмежитися відомостями про ефективність прийняття зброї в районах зі схожими кліматичними умовами. Такі ігри дістали назву статистичних ігор без експерименту.

Перейдемо до розгляду основних понять теорії статистичних ігор. Як і в будь-якій грі учасників статистичної гри називають гравцями. Людей (або групу осіб), що беруть участь у статистичній грі, будемо називати гравцем $\boldsymbol{A}$, а природу – гравцем $\boldsymbol{\Pi}$.

Стратегією $\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{i} = \overline{1,\ m}$, гравця $\boldsymbol{A}$ будемо називати один з варіантів дій і правило їх вибору під час кожного особистого ходу залежно від ситуації, що склалася в грі. Очевидно, стратегія $\boldsymbol{A_i}$ є чистою стратегією гравця $\boldsymbol{A}$. Сукупність усіх стратегій $\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{i} = \overline{1,\ m}$, становить множину стратегій гравця $\boldsymbol{A}$.

Під стратегією природи будемо розуміти сукупність зовнішніх умов, у яких доводиться приймати рішення. Наприклад, марш військового підрозділу може відбуватися вдень або вночі, при ясній або похмурій погоді, плюсовій або мінусовій температурі повітря і т. д.

Однак сукупність зовнішніх умов визначає стан природи. Тому в подальшому стратегію природи будемо ототожнювати з її станом $\boldsymbol{\Pi_j}$. Сукупність станів $\boldsymbol{\Pi_j}$, $\boldsymbol{j} = \overline{1,\ n}$, становить множину станів природи. Якщо множина стратегій гравця $\boldsymbol{A}$ і множина станів природи $\boldsymbol{\Pi_j}$ є розрахунковими кінцевими множинами, то статистична гра є скінченною. За аналогією з матричними іграми будемо таку гру називати грою $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{m}$ – кількість чистих стратегій гравця $\boldsymbol{A}$, а $\boldsymbol{n}$ – кількість станів природи. Скінченна статистична гра $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ описується матрицею гри (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Стратегії гравця ***A***	Стратегії природи ***П***					
	Π_1	Π_2	…	Π_j	…	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	**…**	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Тут $\boldsymbol{a_{ij}}$ є виграшем гравця $\boldsymbol{A}$ при використанні ним чистої стратегії $\boldsymbol{A_i}$, якщо природа перебуває у стані $\boldsymbol{\Pi_j}$.

Зазначимо, що йдеться тільки про виграш гравця ***А***, оскільки казати про виграш природи не має сенсу. Іншими словами, стастистична гра задається в один бік – на користь гравця ***А***, а матриця гри являє собою матрицю його виграшів.

Таким чином, скінченна статистична гра вважається заданою, якщо визначено множини стратегій гравця ***А***, станів природи й матрицю виграшів гравця ***А***. Розглянемо приклад статистичної гри.

Приклад 4.1. Планується марш військового підрозділу з району постійної дислокації до району зосередження, куди ведуть чотири маршрути. Умови проведення маршу (ясна суха погода, дощ або снігопад) визначаються випадковим моментом часу отримання наказу про марш. З попереднього досвіду відомо, що економія пального під час пересування за першим маршрутом при ясній погоді становить 7 од., під час дощу – 5 од., у снігопад – 2 од.; під час пересування за другим маршрутом – відповідно 8, 4 і 1 од., під час пересування за третім маршрутом – відповідно 7, 6 і 3 од. і під час пересування за четвертим маршрутом – відповідно 6, 5 і 4 од. Потрібно вибрати такий маршрут пересування військового підрозділу, який забезпечував би максимальну економію пального.

Розв'язання. У розглядуваній ситуації має місце конфлікт між особою, яка приймає рішення (командиром підрозділу (гравцем ***А***)), і природою.

Гравець ***А*** має у своєму розпорядженні чотири варіанти дій (чотири стратегії) – прямувати за першим, другим, третім або четвертим маршрутом. Позначимо ці стратегії через A_1, A_2, A_3 і A_4. З іншого боку, до моменту отримання наказу на передислокацію природа може перебувати в одному з трьох станів: $П_1$ – ясна суха погода, $П_2$ – дощ і $П_3$ – снігопад. Кожна пара стратегій (A_i, $П_j$) приводить до цілком певної економії пального, що становить виграш гравця ***А***. Складемо матрицю виграшів гравця ***А*** (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Стратегії гравця ***А***	Стратегії природи ***П***		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	7	5	2
A_2	8	4	1
A_3	7	6	3
A_4	6	5	4
β_j	8	6	4

Таким чином, визначивши множини стратегій гравця, станів природи й матрицю виграшів, було формалізувано конфліктну ситуацію й отримано кінцеву статистичну гру 4 × 3. При прийнятті рішення (у розглядуваному прикладі – при виборі маршруту) гравцеві ***A*** не відомо, у якому стані перебуватиме природа в кожному конкретному випадку.

Можна казати лише про те, з якою ймовірністю q_j, $j = \overline{1,n}$, природа перебуватиме в стані Π_j. Тоді сукупність імовірностей q_j, $j = \overline{1,n}$, можна трактувати як змішану стратегію природи $S_\text{п} = \{q_1,\ q_2, \ldots, q_n\}$.

Отже, можна стверджувати, що в статистичних іграх з боку природи використовуються лише змішані стратегії, а гравець ***A*** може застосовувати як чисті, так і змішані стратегії. У матричних іграх гравці використовують змішані стратегії для приховання своїх задумів від противника. У статистичних іграх така необхідність відпадає, оскільки немає сенсу приховувати свої задуми від «нерозумної» природи. Зауважимо, що при розв'язанні гри з природою, коли ймовірності станів природи q_1, q_2, ..., q_n, є відомими, завжди можна застосувати тільки чисті стратегії. Дійсно, якщо застосовувати якусь змішану стратегію

$$S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

тобто стратегію A_1 з імовірністю p_1, стратегію A_2 з імовірністю p_2 і т. д., то средній виграш, усереднений за умовами (станами природи) і чистими стратегіями, буде таким:

$$\overline{\overline{\alpha}} = p_1\overline{\alpha}_1 + p_2\overline{\alpha}_2 + \ldots + p_m\overline{\alpha}_m,$$

де

$$\overline{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, q_j$$

– математичне сподівання виграшу з урахуванням імовірностей усіх можливих станів природи (умов виконання операції).

Значення $\overline{\overline{\alpha}}$ – зважений середній виграш значень $\overline{\alpha}_i$, що відповідають чистим стратегіям. Однак відомо, що будь-яка середня величина не може бути більшою за максимальну з осреднюваних величин:

$$\overline{\overline{\alpha}} \le max_i\, \overline{\alpha}_i.$$

Тому використання змішаної стратегії S_A з різними ймовірностями p_1, p_2, ..., p_m не може бути для гравця ***A*** вигіднішим, ніж використання чистої стратегії A^*.

Таким чином, у статистичних іграх гравець A використовує зазвичай чисті стратегії, що підтверджується наведеним вище прикладом. Отже, розв'язання статистичної гри полягає в тому, щоб знайти оптимальну чисту стратегію гравця A, тобто таку стратегію, яка забезпечить йому максимальний виграш у цій грі.

Розглянемо таку ситуацію. Нехай гравець A має m можливих стратегій: A_1, A_2, ..., A_m. Щодо *«стратегії природи»* можна зробити n припущень $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$. Нехай виграш α_{ij} при кожній парі стратегій (A_i, $П_j$) задано матрицею (див. табл. 4.1). Потрібно вибрати таку стратегію гравця A, яка є кращою (більш вигідною) порівняно з іншими.

З першого погляду може здатися, що поставлена задача є простішою за ігрову конфліктну, оскільки не містить протидії. Дійсно, особі, яка приймає рішення в грі з природою, легше, оскільки вона, найпевніше, отримає в цій грі більше вигод, ніж у грі проти свідомого супротивника, проте їй важче обгрунтувати рішення, яке дасть найбільший виграш.

Річ у тому, що в ігровій конфліктній ситуації припущення щодо діаметрально протилежних інтересів противника немов знімає невизначеність. Якщо ж такого припущення зробити не можна, то невизначеність виявляється набагато сильніше.

Найбільш простим випадком вибору рішення в умовах невизначеності є випадок, коли якась зі стратегій гравця A перевершує інші («домінує» над ними), як це показано в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

A_i	$П_j$			
	$П_1$	$П_2$	$П_2$	$П_4$
A_1	1	2	3	5
A_2	1	4	4	5
A_3	3	4	4	1
A_4	7	4	2	2

У цій таблиці виграш при використанні стратегії A_2 при будь-якому стані природи $П_j$ є не меншим, ніж виграш при використанні будь-якої іншої стратегії. Це означає, що стратегія A_2 є кращою («домінує» над усіма іншими), і нею рекомендується користуватися під час гри.

Якщо ж у матриці немає домінантної стратегії, то все ж необхідно переглянути її з огляду на стратегії, напевно невигідні для гравця A, гірші, ніж принаймні одна з інших, або дублювальних, які треба відкинути.

Наприклад, у табл. 4.4 можна відкинути стратегії A_1 і A_2, що є невигідними порівняно з A_4, і стратегію A_5 – порівняно з A_3.

Таблиця 4.4

A_i	$П_j$				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	5	3	4	2	1
A_2	5	3	2	1	1
A_3	1	2	5	4	3
A_4	7	6	7	3	1
A_5	1	2	3	4	3

Унаслідок цього матриця зведеться до матриці 2 × 5 (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

A_i	$П_j$				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_3	1	2	5	4	3
A_4	7	6	7	3	1

Звернемо увагу на таке: у грі проти розумного супротивника можна було б відкинути стратегію $П_3$ як невигідну порівняно з $П_4$, а $П_4$ – порівняно з $П_5$. Однак у «грі проти природи» цього робити не можна, оскільки природа не вибирає свою стратегію (стан).

Надалі ми будемо припускати, що аналіз матриці й відсіювання свідомо невигідних і дублювальних стратегій уже зроблено. Чим же доцільно керуватися під час прийняття рішення в ситуації невизначеності, якщо жодна стратегія не домінує над іншими? Ясно, що слід виходити з матриці виграшів $\|\alpha_{ij}\|$. Іноді картина ситуації, яку дає матриця виграшів, містить свого роду «спотворення».

Припустимо, що виграш при застосуванні стратегії A_i і стані природи $П_j$ є більшим, ніж при застосуванні стратегії A_k і стані природи $П_l$:

$$\alpha_{ij} > \alpha_{kl}.$$

Однак перший виграш може бути більшим від другого не внаслідок застосування більш вдалої стратегії, а через те, що стан природи ***П**$_j$* є «вигіднішим» ніж стан ***П**$_l$*. Наприклад, для якої-небудь економічної операції стан «немає стихійних лих» узагалі є більш сприятливим, ніж стан «повінь», «землетрус» тощо. Звичайно, бажаним буде введення таких показників, які не просто давали б виграш у кожній ситуації, а й описували б «удалість» або «невдалість» застосування певної стратегії в певній ситуації, з урахуванням того, наскільки взагалі ця ситуація є сприятливою.

Перш ніж розглянути приц写 вибору стратегій при розв'язанні статистичних ігор, зазначимо, що задання гри матрицею виграшів не є єдиним. На практиці статистичні ігри часто задають матрицю ризиків.

Ризиком гравця ***А*** при використанні ним стратегії ***А**$_i$* називають різницю між виграшем, який гравець отримав би, якби він знав поточний стан ***П**$_k$* природи (і застосував би іншу стратегію), і виграшем, який він отримає від застосування стратегії ***А**$_i$* в умовах стану ***П**$_j$* природи.

Позначимо через ***r**$_{ij}$* ризик гравця при використанні ним стратегії ***А**$_i$* в умовах, коли природа перебуває в стані ***П**$_j$*. Якби гравець ***А*** знав точно стан природи ***П**$_j$*, то з множини своїх стратегій він вибрав би таку, яка забезпечила б йому максимальний виграш, тобто

$$\boldsymbol{\beta_j} = \boldsymbol{max_i\, \alpha_{ij}}. \tag{4.1}$$

Однак застосовуючи стратегію ***А**$_i$* в тих самих умовах, гравець ***А*** отримує виграш ***α**$_{ij}$*. Отже, при використанні пари стратегій (***А**$_i$*, ***П**$_j$*) ризик гравця ***А***

$$\boldsymbol{r_{ij}} = \boldsymbol{\beta_j} - \boldsymbol{\alpha_{ij}} = \boldsymbol{max_i\, \alpha_{ij}} - \boldsymbol{\alpha_{ij}}. \tag{4.2}$$

З виразу 4.1 випливає, що ризик є додатною величиною.

Приклад 4.2. Побудувати матрицю ризиків для статистичної гри, розглянутої в прикладі 4.1.

Розв'язання. Розглянемо стан ***П**$_1$* природи (перший стовпець табл. 4.2). Якби гравець знав точно, що при виборі ним своєї стратегії природа буде перебувати саме в цьому стані, він вибрав би стратегію ***А**$_2$*, яка забезпечила б йому максимальний виграш, що дорівнює 8. Однак якщо він не знає точно стану природи, то застосовує стратегію ***А**$_1$*. Його ризик від незнаня стану природи $\boldsymbol{r_{11}}$ = 8 – 7 = 1.

Для розглянутого прикладу планування маршу військового підрозділу ця величина являє собою ризик перевитрати пального при виборі першого маршруту в ясну погоду. Дійсно, якби командир підрозділу знав наказ на марш надійде в ясну погоду, він вибрав би другий маршрут, при проходженні по якому економія пального була б максимальною.

Вибравши ж перший маршрут, він ризикує перевитрачати одну одиницю пального порівняно з оптимальним варіантом пересування. Аналогічно визначаються інші значення елементів матриці ризиків.

Для будування матриці ризиків зробимо таке. Додамо до матриці виграшів (див. табл. 4.2) один рядок і позначимо його через β_j. Аналізуючи кожний стовпець матриці виграшів, знайдемо елемент стовпця, який має максимальне значення, і запишемо його в рядок β_j. Далі відповідно до (4.1), визначивши різницю між максимальним значенням і конкретним значенням елемента α_{ij} стовпця, заповнимо клітинки матриці ризиків (табл. 4.6).

Таким чином, статистичну гру можна також задати, якщо визначено множини $\{A_i\}$, $i = \overline{1,m}$, $\{П_j\}$, $j = \overline{1,n}$, і матрицю ризиків. При такому способі задання гри її розв'язання полягає у визначенні такої чистої стратегії, яка забезпечувала б гравцю мінімальний ризик.

Таблиця 4.6

Стратегії гравця **A**	Стратегії природи **П**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	1	1	2
A_2	0	2	3
A_3	1	0	1
A_3	2	1	0

Найбільш просто вирішується задача вибору розв'язку в умовах невизначеності, коли умови виконання операції (стан природи) $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$ є невідомими, але відомими є значення їх імовірностей:

$$q_1 = P(П_1);\ q_2 = P(П_2);\ \ldots;\ q_n = P(П_n);\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

У цьому випадку як показник ефективності природно взяти середнє значення $\overline{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, q_j$, або математичне сподівання виграшу, з урахуванням імовірностей всіх можливих умов.

Очевидно, $\overline{\alpha}_i$ є не чим іншим, як зваженим середнім виграшів i-го рядка, узятих з вагами q_1, q_2, ..., q_n. Як оптимальну природно вибрати таку зі стратегій $A^* = A_i$, для якої величина $\overline{\alpha}_i$ перетворюється на максимум. З допомогою такого прийому вибір рішення в умовах невизначеності перетворюється на задачу про вибір рішення в умовах визначеності, тільки прийняте рішення є оптимальним не в кожному окремому випадку, а в середньому.

Приклад 4.3. Планується операція в заздалегідь невідомих метеорологічних умовах; варіанти цих умов: $\boldsymbol{П_1}$, $\boldsymbol{П_2}$, $\boldsymbol{П_3}$, $\boldsymbol{П_4}$. Згідно з довідкою метеозведень за багато років частоти (імовірності) цих варіантів становлять відповідно: $\boldsymbol{q_1}$ = 0,1; $\boldsymbol{q_2}$ = 0,2; $\boldsymbol{q_3}$ = 0,5; $\boldsymbol{q_4}$ = 0,2.

Можливі варіанти організації операції в різних метеоумовах дають різну вигоду. Значення «доходу» для кожного рішення в різних умовах наведено в табл. 4.7.

Таблиця 4.7

$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{П_j}$				
	$\boldsymbol{П_1}$	$\boldsymbol{П_2}$	$\boldsymbol{П_3}$	$\boldsymbol{П_4}$	$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}}$
$\boldsymbol{A_1}$	1	4	5	9	5,2*
$\boldsymbol{A_2}$	3	8	4	2	4,5
$\boldsymbol{A_3}$	4	6	6	2	5,0
$\boldsymbol{q_j}$	0,1	0,2	0,5	0,2	

В останньому рядку наведено значення ймовірності станів природи, в останньому стовпці – середні виграші $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}}$. З нього видно, що оптимальною стратегією гравця $\boldsymbol{A}$ є його стратегія $\boldsymbol{A^*}$ = $\boldsymbol{A_1}$, що дає середній виграш $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}}$ = 5,2 (позначено зірочкою).

Розв'язання. При виборі оптимальної стратегії в невідомих умовах з відомими ймовірностями можна користуватися не тільки середнім виграшем

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{q_j}\, \boldsymbol{\alpha_{ij}},$$

але й середнім ризиком

$$\overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{q_j}\, \boldsymbol{r_{ij}},$$

який, зрозуміло, потрібно перетворити не на максимум, а на мінімум. Стратегія, що максимізує середній виграш $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}}$, використовується так само, як і стратегія, що мінімізує середній ризик $\overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$. Доведемо це. Для цього обчислимо обидва ці показники і складемо їх:

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}} + \overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{q_j}\, \boldsymbol{\alpha_{ij}} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{q_j}\, (\boldsymbol{\beta_j} - \boldsymbol{\alpha_{ij}}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{q_j}\, \boldsymbol{\beta_j}. \tag{4.3}$$

Ця сума (середнє зважене значення максимумів стовпців) для цієї матриці є величиною постійною. Позначимо її через $\boldsymbol{C}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{q_j}\, \boldsymbol{\beta_j} = \boldsymbol{C}.$$

Тоді

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}} + \overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{C},$$

звідки середній ризик

$$\overline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{C} - \overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}}. \tag{4.4}$$

Очевидно, ця величина перетворюється на мінімум тоді ж, коли $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}}$ – на максимум. Отже, стратегія, вибрана за умови мінімального середнього ризику, збігається зі стратегією, вибраною за умови максимального середнього виграшу.

Імовірності умов (станів природи) $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, ..., $\boldsymbol{q_n}$ можна визначити зі статистичних даних, пов'язаних з попереднім виконанням подібних операцій або просто з проведенням спостережень над станами природи. Наприклад, якщо транспортному підприємству за певний проміжок часу належить виконати не цілком відомий обсяг перевезень, то дані про розподіл умов можна взяти з досвіду попередніх років. Якщо, як і в попередньому прикладі, успіх операції залежить від метеоумов, то дані про них можна взяти зі статистики метеозведень.

Однак часто трапляються випадки, коли на початку операції немає уявлення про можливі стани природи; всі відомості зводяться до переліку варіантів станів, а оцінити їх імовірності неможливо. Так, наприклад, навряд чи вдасться розумно оцінити ймовірність того, що протягом найближчих $\boldsymbol{k}$ років буде запропоновано й реалізовано прогресивний технічний винахід.

Зрозуміло, у подібних випадках імовірності умов (станів природи) можна оцінити суб'єктивно: деякі з них уявляються більш, а інші – менш правдоподібними. Для того щоб суб'єктивні уявлення про більшу чи меншу «правдоподібність» тієї чи іншої гіпотези перетворювати на числові оцінки, можуть застосовуватися різні технічні прийоми. Так, якщо не можна віддати перевагу жодній з гіпотез, якщо вони всі є рівноправними, то цілком природним буде призначити їх імовірності такими, що дорівнюють одна одній:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}.$$

Це – так званий «принцип недостатнього обґрунтування» Лапласа [4]. Інший випадок, що часто трапляється, – коли є уявлення про те, які умови є більш імовірними, а які – менше, тобто можна разкласти наявні гіпотези в порядку убування їх правдоподібності: найправдоподібнішою є, наприклад, перша гіпотеза ($П_1$), потім друга ($П_2$) і т. д.

Нехай найменш правдоподібною є n-та гіпотеза ($П_n$). Однак наскільки кожна з них є ймовірнішою за іншу – не відомо. У цьому випадку можна, наприклад, призначити ймовірності гіпотез пропорційними членам спадної арифметичної прогресії з кроком, що дорівнює одиниці:

$$q_1 : q_2 : \ldots : q_n = n : (n - 1) : \ldots : 1,$$

або, ураховуючи, що $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$,

$$q_i = \frac{2(n-i+1)}{n(n+1)}, \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Іноді вдається, виходячи з досвіду й здорового глузду, оцінити й більш тонкі відмінності між ступенями правдоподібності гіпотез.

Подібні методи суб'єктивного оцінювання ймовірності-правдоподібності різних гіпотез про стан природи можуть іноді допомогти під час вибору рішення. Однак не можна забувати, що оптимальне рішення, вибране на основі суб'єктивних імовірностей, неминуче виявиться теж суб'єктивним. Ступінь суб'єктивності рішення можна зменшити, якщо замість імовірностей q_1, q_2, ..., q_n, призначених незалежно одна від одної однією особою, увести середні значення таких імовірностей, призначених незалежно одна від одної групою кваліфікованих осіб (експертів). З досвіду застосування подібних методів випливає, що найчастіше оцінки експертів (прийняті одним незалежно від інших) виявляються далеко не настільки суперечливими, як це можна було припустити заздалегідь, і вивести з них деякі передумови для прийняття розумного рішення цілком можливо.

Вище було висвітлено питання про вибір рішення на основі об'єктивно обчислених або суб'єктивно призначених імовірностей станів природи. Цей підхід у теорії рішень – не єдиний. Крім нього існують ще кілька критеріїв, або підходів, до вибору оптимального рішення в умовах невизначеності.

4.2. Критерії вибору стратегій в умовах невизначеності

Розглянемо питання вибору критерію при розв'язанні статистичних ігор без проведення експерименту. У випадку недостатньої інформації гравця щодо умов проведення операції (стану природи) при виборі стратегій велике значення має суб'єктивний фактор. Розглянемо правила (критерії) вибору стратегій у тих випадках, коли значення ймовірностей станів природи є невідомими, а гравець ***A*** не береться їх оцінити. Таких критеріїв існує декілька. Розглянемо найбільш поширені з них.

Максимінний критерій Вальда. За цим критерієм гравець ***A*** вибирає стратегію в припущенні, що природа перебуває в ненайвигіднішому для нього стані. Згідно з цим критерієм як оптимальну стратегію гравець ***A*** вибирає таку, при якій мінімальний виграш є максимальним, тобто за будь-яких умов виграш гарантовано буде не меншим, ніж максимінний. Іншими словами, оптимальною стратегією гравця ***A*** буде така стратегія $\boldsymbol{A_k^*}$, для якої значення мінімального виграшу буде максимальним серед усіх інших стратегій:

$$\boldsymbol{\alpha(A_k^*) = max_i\, min_j\, \alpha_{ij}}. \tag{4.5}$$

Якщо керуватися цим критерієм, то треба завжди орієнтуватися на гірші умови й вибирати ту стратегію, для якої в гірших умовах виграш буде максимальним. Користуючись таким критерієм в іграх з природою, ми нібито ставимо замість цієї безособової й незацікавленої інстанції активного й зловмисного супротивника. Очевидно, такий підхід може бути продиктовано тільки крайнім песимізмом в оцінюванні обстановки – «завжди треба розраховувати на гірше!», – але як один з можливих підходів заслуговує на розгляд.

Приклад 4.4. Відповідно до критерію Вальда знайти оптимальну стратегію гравця **A** в грі, заданій матрицею виграшів (табл. 4.8).

Таблиця 4.8

Стратегії гравця ***A***	Стратегії природи ***П***			α_i
	$П_1$	***$П_2$***	***$П_3$***	
A_1	7	5	2	2
A_2	8	4	1	1
A_3	7	6	3	3
A_4	6	5	4	3
β_j	8	6	4	$\boxed{4}$

Розв'язання. Додамо до табл. 4.8 стовпець α_i, у клітинки якого запишемо значення мінімального елемента кожного рядка. Серед елементів цього стовпця виберемо максимальний (його обведено квадратом). Таким чином, відповідно до критерію мінімаксу (критерію Вальда) у розглянутій грі оптимальною є статегія A_4. При виборі цієї стратегії гравець ***А*** може бути впевненим, що при довільному стані природи (за будь-яких погодних умов проведення маршу підрозділу до району нової дислокації) він забезпечить собі виграш не менше 4 од.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Згідно з цим критерієм рекомендується в умовах невизначеності вибирати ту стратегію, при якій величина ризику набуває найменшого значення в найнесприятливішій ситуації (коли ризик є максимальним). Якщо гру задано матрицею ризиків, то для кожної стратегії A_i шукається величина максимального ризику:

$$\rho_i = max_j \, r_{ij}.$$

Оптимальну стратегію визначимо з умови

$$\rho\,(A_k^*) = \quad min_i \, \rho_i = \quad min_i \max_j r_{ij}. \tag{4.6}$$

У цьому випадку до матриці ризиків додають стовпець обчислених значень ρ_i, у який записують значення максимального елемента кожного рядка. Мінімальний елемент стовпця ρ_i відповідає оптимальній стратегії гравця ***А***. Зміст критерію Севіджа полягає в тому, щоб уникнути великого ризику під час прийняття рішення. Критерій Севіджа, як і критерій Вальда, – це критерій крайнього песимізму, але тільки песимізм тут розуміється інакше: гіршим оголошується не мінімальний виграш, а максимальна втрата виграшу порівняно з тим, чого можна було б досягти в певних умовах (максимальний ризик).

Приклад 4.5. Відповідно до критерію Севіджа знайти оптимальну стратегію гравця ***А*** в грі, заданій матрицею ризиків (табл. 4.9).

Таблиця 4.9

Стратегії гравця ***А***	Стратегії природи ***П***			ρ_i
	П₁	***П₂***	***П₃***	
A_1	1	1	2	2
A_2	0	2	3	3
A_3	1	0	1	$\boxed{1}$
A_3	2	1	0	2

Розв'язання. Додамо до табл. 4.9 стовпець $\boldsymbol{\rho_i}$, у клітинки якого запишемо значення максимального елемента кожного рядка матриці ризиків. Серед елементів стовпця $\boldsymbol{\rho_i}$ виберемо мінімальний (його обведено квадратом). Таким чином, відповідно до критерію Севіджа в розглянутій грі оптимальною є статегія ***A₃***. При виборі цієї стратегії гравець ***A*** може бути впевненим, що при будь-якому стані природи (за будь-яких погодних умов проведення маршу підрозділу до району нової дислокації) він ризикує перевитратити не більше однієї одиниці пального відносно тієї ситуації, у якій він би точно знав стан природи.

Критерій «здорового оптимізму». Цей критерій є протилежним критерію мінімаксу (критерію Вальда). За цим критерієм визначається правило вибору оптимальної стратегії гравця ***A*** в припущенні, що природа перебуває в найвигіднішому для нього стані.

Відповідно до цього критерією аналізується кожний рядок $\boldsymbol{A_i}$ матриці виграшів і шукається максимальний елемент у рядку:

$$\widehat{\alpha}_i = max_j\, \alpha_{ij}$$

Тоді оптимальною буде та стратегія $\boldsymbol{A_k}$, для якої виконується умова

$$\widehat{\alpha}\ (A_k^*) \ = \ max_i\, \widehat{\alpha}_i = max_i\, max_j\, \alpha_{ij}. \tag{4.7}$$

Приклад 4.6. Для гри, заданої матрицею виграшів (табл. 4.10), знайти оптимальну стратегію гравця за критерієм «здорового оптимізму».

Розв'язання. Згідно з виразом (4.7) оптимальною буде стратегія $\boldsymbol{A_2^*}$.

Якщо гра задається матрицею ризиків, то в кожному рядку матриці визначається мінімальний елемент:

$$\widehat{\rho}_i = min_j\, r_{ij}.$$

Таблиця 4.10

Стратегії гравця ***A***	Стратегії природи ***П***			$\widehat{\alpha}_i$
	П₁	***П₂***	***П₃***	
A₁	7	5	2	7
A₂	8	4	1	$\boxed{8}$
A₃	7	6	3	7
A₃	6	5	4	6

Оптимальною є стратегія $\boldsymbol{A_k}$, для якої виконується умова

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}\,(\boldsymbol{A_k^*}) = \boldsymbol{min_i}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{min_i}\,\boldsymbol{min_j}\,\boldsymbol{\rho_{ij}}. \qquad (4.8)$$

Приклад 4.7. Для гри, заданої матрицею ризиків (табл. 4.11), знайти оптимальну стратегію гравця за критерієм «здорового оптимізму».

Таблиця 4.11

Стратегії гравця ***А***	Стратегії природи ***П***			$\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{i}}$
	П₁	***П₂***	***П₃***	
А₁	1	1	2	1
А₂	0	2	3	$\boxed{0}$
А₃	1	0	1	$\boxed{0}$
А₃	2	1	0	$\boxed{0}$

Розв'язання. Оптимальним стратегіям відповідають мінімальні значення елементів стовпця $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{i}}$ (у табл. 4.11 такі значення обведено квадратами). Таким чином, для цієї гри гравець ***А*** відповідно до критерію «здорового оптимізму» має три оптимальні стратегії, а саме стратегії $\boldsymbol{A_2^*, A_3^*}$ та $\boldsymbol{A_4^*}$.

Критерій Гурвиця. Розглянуті вище критерії відображають крайні позиції гравця ***А*** під час оцінювання станів природи. За критерієм Гурвиця рекомендується в умовах невизначеності при виборі рішення не керуватися ні крайнім песимізмом (завжди розраховуй на гірше!), ні крайнім, легковажним оптимізмом (все буде якнайкраще!). У першому випадку гравець бере значення ймовірності несприятливого стану природи таким, що дорівнює одиниці, у другому випадку – нулю.

Більш реалістична позиція, яка полягає в тому, що гравець намагається оцінити значення $\boldsymbol{\chi}$ імовірності несприятливого та значення $(1 - \boldsymbol{\chi})$ імовірності сприятливого стану природи й відповідно до цього вибрати оптимальну стратегію. Ці міркування стали основою критерію Гурвиця.

Припустимо, що природа з імовірністю $\boldsymbol{\chi}$ може перебувати в несприятливому стані. Тоді відповідно до критерію мінімаксу в разі використання стратегії $\boldsymbol{A_i}$ виграш гравця ***А***

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{i}_{\text{нс}}} = \boldsymbol{\chi\alpha_i} = \boldsymbol{\chi min_j\,\alpha_{ij}}. \qquad (4.9)$$

У разі сприятливого для гравця стану природи (відповідно до критерію «здорового оптимізму») при використання стратегії A_i його виграш

$$\widetilde{\alpha}_{i_c} = (1 - \chi)\widehat{\alpha}_i = (1 - \chi)max_j\ \alpha_{ij}. \qquad (4.10)$$

Тоді виграш гравця при довільному стані природи буде дорівнювати сумі виразів (4.9)–(4.10):

$$\widetilde{\alpha}_i = \chi\alpha_i + (1 - \chi)\alpha_i = \chi min_j\ \alpha_{ij} + (1 - \chi)max_j\ \alpha_{ij}.$$

Гравець ***А*** відповідно до критерію Гурвиця вибере таку стратегію A_k^*, яка забезпечить йому максимальне значення виграшу. Отже, оптимальною буде така стратегія A_k^*, для якої виконується умова

$$\widetilde{\alpha}\ (A_k^*) = max_i\widetilde{\alpha}_i\ =\ \max_i\left\{\chi\ min_j\ \alpha_{ij}\right\} +$$

$$+(1 - \chi)maxj\alpha ij\}\max i[\chi\alpha i + (1 - \chi)\alpha i]. \qquad (4.11)$$

Проаналізуємо структуру виразу (4.11). При χ = 1 критерій Гурвіца перетворюється на песимістичний критерій Вальда, а при χ = 0 – на критерій «крайнього оптимізму», при застосуванні якого рекомендується вибирати ту стратегію, для якої в найкращих умовах виграш буде максимальним. При 0 < χ < 1 виходить щось середнє між крайнім песимізмом і крайнім оптимізмом (коефіцієнт χ виражає хіба що «міру песимізму» дослідника). Цей коефіцієнт доцільно вибирати із суб'єктивних міркувань – чим небезпечнішою є ситуація, тим більшим є бажання в ній «підстраховуватися» і тим ближче до одиниці вибирається значення χ.

Приклад 4.8. Визначити оптимальну стратегію гравця ***А*** згідно з критерієм Гурвиця для гри, заданої табл. 4.2, при χ = 0,3. Побудуємо нову матрицю виграшів, до якої додамо три стовпці α_i, $\widehat{\alpha}_i$, $\widetilde{\alpha}_i$ (табл. 4.12).

Таблиця 4.12

Стратегії гравця ***А***	Стратегії природи ***П***			α_i	$\widehat{\alpha}_i$	$\widetilde{\alpha}_i$
	П₁	***П₂***	***П₃***			
А₁	7	5	2	2	7	5,5
А₂	8	4	1	1	8	$\boxed{5,9}$
А₃	7	6	3	3	7	5,8
А₄	6	5	4	4	6	5,4

У стовпці $\boldsymbol{\alpha_i}$ запишемо мінімальне, а в стовпці $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ **–** максимальне значення елементів кожного рядка матриці. Далі відповідно до формули (4.9) розрахуємо значення елементів стовпця $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$. Максимальний елемент цього стовпця й буде відповідати оптимальній (за критерієм Гурвиця) стратегії гравця ***А*.**

Для роглянутого прикладу оптимальною є стратегія $\boldsymbol{A_2^*}$, якій відповідає максимальний елемент стовпця $\widetilde{\alpha}_i$ (його обведено квадратом). Зазначимо, що стратегія $\boldsymbol{A_2^*}$ у розглядуваному випадку є оптимальною як за критерієм «здорового оптимізму», так і за критерієм Гурвиця. Це пояснюється тим, що при $\boldsymbol{\chi}$ = 0,3 імовірність прийняття гравцем легковажного рішення є більшою.

Якщо гра задається матрицею ризиків, то критерій Гурвиця можна записати таким чином:

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}\,(\boldsymbol{A_k^*}) = \boldsymbol{min_i}\,[\boldsymbol{\chi max_j r_{ij}} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\chi})\boldsymbol{min_j\, r_{ij}}] =$$
$$= \boldsymbol{min_i}\,[\boldsymbol{\chi\rho_i} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\chi})\ \widehat{\boldsymbol{\rho}}_i]. \qquad (4.12)$$

Для визначення оптимальної стратегії за критерієм Гурвиця до матриці ризиків додаються три стовпці: $\boldsymbol{\rho_i}$ і $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_i$, у яких записується відповідно мінімальне й максимальне значення елементів кожного рядка, та $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_i$, у який записують значення $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_i$, знайдене при заданому $\boldsymbol{\chi}$ за виразом

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_i = \chi\boldsymbol{\rho_i} + \mathbf{(}1 \mathbf{-} \chi\mathbf{)}\,\widehat{\boldsymbol{\rho}}_i = [\boldsymbol{\chi max_j r_{ij}} + (1 - \boldsymbol{\chi})\boldsymbol{min_j\, r_{ij}}]. \qquad (4.13)$$

Мінімальний елемент стовпця $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_i$ і буде відповідати оптимальній (за критерієм Гурвиця) стратегії гравця ***А*.**

Приклад 4.9. Визначити оптимальну стратегію гравця ***А*** згідно з критерієм Гурвиця для гри, заданої таблицею ризиків (див. табл. 4.6), при $\boldsymbol{\chi}$ = 0,3. Побудуємо нову матрицю виграшів, до якої додамо три стовпці $\boldsymbol{\rho_i}$, $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_i$ і $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_i$ (табл. 4.13).

Таблиця 4.13

Стратегії гравця ***А***	Стратегії природи ***П***			$\boldsymbol{\rho_i}$	$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_i$	$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_i$
	П₁	***П₂***	***П₃***			
А₁	1	1	2	1	2	1,3
А₂	0	2	3	3	0	0,9
А₃	1	0	1	1	0	$\boxed{0{,}3}$
А₃	2	1	0	0	2	0,6

Оптимальною стратегією гравця ***A*** в цьому випадку є відповідно до виразу (4.12) стратегія $\boldsymbol{A_3^*}$.

Розглянемо, як залежить величина максимального виграшу гравця (за критерієм Гурвиця), а отже, і вибір оптимальної стратегії у грі, заданій матрицею виграшів (див. табл. 4.12) від значення величини $\boldsymbol{\chi}$.

У табл. 4.14 наведено значення $\boldsymbol{\widetilde{\alpha}(A_k^*) = max_i \widetilde{\alpha}_i}$ при зміненні значення $\boldsymbol{\chi}$ від 0 до 1 та відповідні цим значенням стратегії $\boldsymbol{A_k^*}$.

Таблиця 4.14

$\boldsymbol{\chi}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\boldsymbol{\widetilde{\alpha}\ (A_k^*)}$	8	7,3	6,6	5,9	5,4	5,0	4,8	4,6	4,4	4,2	4,0
$\boldsymbol{A_k^*)}$	$\boldsymbol{A_2^*}$	$\boldsymbol{A_2^*}$	$\boldsymbol{A_2^*}$	$\boldsymbol{A_2^*}$	$\boldsymbol{A_3^*}$	$\boldsymbol{A_3^*, A_4^*}$	$\boldsymbol{A_4^*}$	$\boldsymbol{A_4^*}$	$\boldsymbol{A_4^*}$	$\boldsymbol{A_4^*}$	$\boldsymbol{A_4^*}$

З аналізу табл. 4.14 випливає, що в цій грі оцінювання гравцем значення величини $\boldsymbol{\chi}$ від 0 до 0,3 свідчить про його оптимістичне ставлення до прийняття рішення, від 0,6 до 1 – про обережне його ставлення до прийняття рішення, від 0,4 до 0,6 – про реалістичність його ставлення до прийняття рішення. Незважаючи на те, що вибір критерію, як і вибір параметра $\boldsymbol{\chi}$ в критерії Гурвиця, є суб'єктивним, все ж може бути корисно переглянути ситуацію з огляду на ці критерії. Якщо рекомендації, що випливають з різних критеріїв, збігаються, то це добре, можна сміливо вибирати рекомендовані рішення.

Якщо ж, як це часто трапляється, рекомендації суперечать одна одній, то завжди має сенс замислитися над цим і прийняти остаточне рішення з урахуванням його сильних і слабких сторін. Аналіз матриці гри з природою під кутом зору різних критеріїв часто дає краще уявлення про ситуацію, переваги й недоліки кожного рішення, ніж безпосередній розгляд матриці, особливо, з великими розмірами.

Приклад 4.10 [3]. Розглянемо гру з природою 4 × 3 (чотири стратегії гравця – ***A₁***, ***A₂***, ***A₃***, ***A₄*** і три варіанти умов (станів природи) – ***П₁***, ***П₂***, ***П₃***. Матрицю виграшів наведено в табл. 4.15.

Знайти оптимальний розв'язок (стратегію), користуючись критеріями Вальда, Севіджа і Гурвиця.

Розв'язання 1 (*за критерієм Вальда*). У кожному рядку матриці беремо найменший виграш (табл. 4.16). Максимальна величина $\boldsymbol{\alpha_i}$ (її обведено квадратом) дорівнює 0,25, тобто за критерієм Вальда оптимальною є стратегія ***A₃***.

Таблиця 4.15

A_i	**$П_j$**		
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**
A_1	0,2	0,3	0,15
A_2	0,75	0,2	0,35
A_3	0,25	0,8	0,25
A_4	0,85	0,05	0,45

Таблиця 4.16

A_i	**$П_j$**			α_i
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	
A_1	0,2	0,3	0,15	0,15
A_2	0,75	**0,2**	0,35	0,2
A_3	0,25	0,8	0,25	$\boxed{0{,}25}$
A_4	0,85	0,6	0,45	0,05

Розв'язання 2 (за *критерієм Севіджа)*. Будуємо матрицю ризиків і розміщуємо в правому додатковому стовпці значення максимального ризику в кожному рядку ρ_i (табл. 4.17).

Мінімальне значення ρ_i дорівнює 0,6 (його обведено квадратом). Таким чином, за критерієм Севіджа, оптимальною є стратегія **A_2** або **A_3**.

Таблиця 4.17

A_i	**$П_j$**			ρ_i
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	
A_1	0,55	0,5	0,3	0,65
A_2	0,1	0,6	0,1	$\boxed{0{,}6}$
A_3	0,6	0	0,2	$\boxed{0{,}6}$
A_4	0	0,75	0	0,75

Розв'язання 3 (за *критерієм Гурвиця* при χ = 0,6). Записуємо в правих трьох стовпцях матриці (табл. 4.18) «песимістичну» оцінку виграшу α_i, «оптимістичну» $\hat{\alpha}_i$ і їх середнє зважене значення за формулою (4.13):

$$\tilde{\alpha}_i = 0{,}6\alpha_i + 0{,}4\hat{\alpha}_i.$$

Максимальне значення $\tilde{\alpha}_i$ (його обведено квадратом) відповідає стратегії $\boldsymbol{A_3}$.

Отже, за критерієм Гурвиця з знезначною перевагою в бік песимізму (χ = 0,6) оптимальною є стратегія $\boldsymbol{A_3}$. Таким чином, усі три критерії свідчать на користь стратегії $\boldsymbol{A_3}$, яку й необхідно вибрати.

Таблиця 4.18

A_i	$П_j$			α_i	$\hat{\alpha}_i$	$\tilde{\alpha}_i$
	$П_1$	$П_2$	$П_3$			
A_1	0,2	0,3	0,15	0,15	0,3	0,21
A_2	0,75	0,2	0,35	0,2	0,75	0,42
A_3	0,25	0,8	0,25	0,25*	0,8	$\boxed{0{,}47}$
A_4	0,85	0,05	0,45	0,05	0,85	0,37

Приклад 4.11. Розглянемо гру з природою 3 × 4 з матрицею виграшів, наведеною в табл. 4.19.

Таблиця 4.19

A_i	$П_j$			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	3	4	5
A_2	5	4	1	2
A_3	7	2	8	1

Вибрати оптимальну стратегію за критеріями Вальда, Севіджа і Гурвиця.

Розв'язання 1 (За критерієм Вальда) (табл. 4.20).

Таблиця 4.20

A_i	$П_j$				α_i
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
A_1	2	3	4	5	$\boxed{2}$
A_2	5	4	1	2	1
A_3	7	2	8	1	1

Оптимальною є стратегія **A_1**.

Розв'язання 2 (за критерієм Севіджа) (табл. 4.21).

Таблиця 4.21

A_i	$П_j$				ρ_i
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
A_1	5	1	4	0	5
A_2	2	0	7	3	7
A_3	0	2	0	4	$\boxed{4}$

Оптимальною є стратегія **A_3.**

Розв'язання 3 (за критерієм Гурвиця при $\chi = 0{,}5$) (табл. 4.22).

Таблиця 4.22

A_i	$П_j$				α_i	$\hat{\alpha}_i$	$\tilde{\alpha}_i$
	$П_1$	$П_2$					
A_1	2	3	4	5	2	5	3,5
A_2	5	4	1	2	1	5	3
A_3	7	2	8	1	1	8	$\boxed{4{,}5}$

Оптимальною є стратегія **A_3**.

Таким чином, критерії Севіджа і Гурвиця свідчать на користь стратегії **A_3**, тоді як за критерієм Вальда оптимальною є стратегія **A_1**. Якщо в особи, яка приймає рішення, немає особливих підстав для крайнього песимізму, то вона може зупинитися на стратегії **A_3**.

Якщо ж під час здійснення експерименту немає можливості добувати нову інформацію, то при застосуванні різних критеріїв можуть випливати суперечливі рекомендації, як це показано в прикладі 4.15.

Критерій Лапласа. У розглянутому вище критерії Гурвиця враховано ймовірності сприятливого й несприятливого станів природи, але в статистичній грі кількість станів природи Π_j становить $\boldsymbol{n}$. У випадку, коли значення ймовірностей $\boldsymbol{q_j}$ станів природи є невідомими і немає підстав уважати одні стани більш імовірними, ніж інші, гравець може визначати ймовірності станів однаковими, тобто

$$\boldsymbol{q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}}.$$

Це припущення є основою критерія Лапаса.

Суть критерію ґрунтується на тому, що для кожної стратегії $\boldsymbol{A_i}$ гравця $\boldsymbol{A}$ розраховується його виграш у припущенні, що у відповідь на стратегію гравця природа відповідає змішаною стратегією

$$\boldsymbol{S_п = \{ \frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \ldots, \frac{1}{n}; \ldots; \frac{1}{n} \}},$$

тобто

$$\boldsymbol{\alpha(\mathrm{A}_i, S\Pi) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, q_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}}. \tag{4.14}$$

Оптимальну стратегію $\boldsymbol{A_k^*}$ знайдемо з умови

$$\boldsymbol{\alpha(A_k^*, S\Pi) = max_i\, \alpha(\mathrm{A}_i, S_\Pi) = max_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}}. \tag{4.15}$$

Приклад 4.12. Знайдемо оптимальну за критерієм Лапласа стратегію для гри, наведеної таблицею виграшів (див. табл. 4.2).

Розвязання. Оскільки природа в цій грі характеризується трьома станами, то відповідно до критерію Лапласа

$$\boldsymbol{q_1 = q_2 = q_3} = \frac{1}{3}.$$

За формулою (4.14), користуючись матрицею виграшів (див. табл. 4.2), знайдемо значення виграшів для кожної пари стратегій $(\mathrm{A}_i, \boldsymbol{S}\Pi)$:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{A}_1, \boldsymbol{S}\text{п}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha_{11}} + \boldsymbol{\alpha_{12}} + \boldsymbol{\alpha_{13}}) = \frac{1}{3}(7 + 5 + 2) = 4{,}67;$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{A}_2, \boldsymbol{S}\text{п}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha_{21}} + \boldsymbol{\alpha_{22}} + \boldsymbol{\alpha_{23}}) = \frac{1}{3}(8 + 4 + 1) = 4{,}33;$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{A}_3, \boldsymbol{S}\text{п}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha_{31}} + \boldsymbol{\alpha_{32}} + \boldsymbol{\alpha_{33}}) = \frac{1}{3}(7 + 6 + 3) = 5{,}33;$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{A}_4, \boldsymbol{S}\text{п}) \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha_{41}} + \boldsymbol{\alpha_{42}} + \boldsymbol{\alpha_{43}}) = \frac{1}{3}(6 + 5 + 4) = 5.$$

Таким чином, згідно з виразом (4.15) оптимальною стратегією гравця буде стратегія $\boldsymbol{A_3^*}$. Її застосування забезпечує максимальний виграш порівняно з іншими стратегіями.

При використанні матриці ризиків критерій Лапласа запишемо таким чином:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A_k^*}, \boldsymbol{S}\text{п}) = \boldsymbol{min_i}\, \boldsymbol{r}(\mathrm{A}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{S}_{\text{п}}) = \boldsymbol{min_i} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{r_{ij}}. \qquad (4.16)$$

Тут

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A_k^*}, \boldsymbol{S}\text{п}) = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{r_{ij}}\, \boldsymbol{q_j} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{r_{ij}} \qquad (4.17)$$

– значення ризику при використанні пари стратегій $(\mathrm{A}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{S}\text{п})$.

Якщо гру задано матрицею ризиків (див. табл. 4.6), то необхідно згідно з формулою (4.17) розрахувати значення ризиків для кожної пари стратегій $(\mathrm{A}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{S}\text{п})$:

$$\boldsymbol{r}(\mathrm{A}_1, \boldsymbol{S}\text{п}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r_{11}} + \boldsymbol{r_{12}} + \boldsymbol{r_{13}}) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 2) = 1{,}33;$$

$$\boldsymbol{r}(\mathrm{A}_2, \boldsymbol{S}\text{п}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r_{21}} + \boldsymbol{r_{22}} + \boldsymbol{r_{23}}) = \frac{1}{3}(0 + 2 + 3) = 1{,}67;$$

$$\boldsymbol{r}(\mathrm{A}_3, \boldsymbol{S}\text{п}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r_{31}} + \boldsymbol{r_{32}} + \boldsymbol{r_{33}}) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 1) = 0{,}67;$$

$$\boldsymbol{r}(\mathrm{A}_4, \boldsymbol{S}\text{п}) \frac{1}{3}(\boldsymbol{r_{41}} + \boldsymbol{r_{42}} + \boldsymbol{r_{43}}) = \frac{1}{3}(2 + 1 + 0) = 1.$$

У цьому випадку стратегія $\boldsymbol{A_3^*}$ також є оптимальною, тобто забезпечує мінімальний ризик порівняно з іншими стратегіями.

Критерій максимального середнього виграшу (мінімального середнього ризику). Застосування цього критерію є доцільним при наявності у гравця найбільш повної інформації про стани природи.

Іншими словами, гравцю ***А*** відомі значення ймовірностей q_i, $i = \overline{1,n}$, тобто відома змішана стратегія природи:

$$S_n = \{ q_1,\ q_2, \dots, q_j, \dots, q_n \}.$$

Для кожної пари стратегій $(\mathrm{A}_i, S\text{п})$ середнє значення виграшу

$$\alpha(\mathrm{A}_i, S\text{п}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, q_j, \tag{4.18}$$

а середній ризик

$$r(\mathrm{A}_i, S\text{п}) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, q_j. \tag{4.19}$$

Оптимальна змішана стратегія A_k^* за умови максимального середнього виграшу

$$\alpha(A_k^*, S\text{п}) = max_i\, \alpha(\mathrm{A}_i, S_\text{п}) = max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} q_j, \tag{4.20}$$

а за умови мінімального середнього ризику

$$r(A_k^*, S\text{п}) = min_i\, r(\mathrm{A}_i, S_\text{п}) = min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, q_j. \tag{4.21}$$

Приклад 4.13. Користуючись умовами прикладу 4.1, знайти оптимальну стратегію гравця ***А***, якщо відомо значення ймовірностей станів природи: q_1 = 0,5; q_2 = 0,3; q_3 = 0,2.

Розв'язання. Відповідно до критерію максимального середнього виграшу за виразом (4.18) знайдемо значення середнього виграшу для кожної пари стратегій $(\mathrm{A}_i, S\text{п})$:

$$\alpha(\mathrm{A}_1, S\text{п}) = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 = 7 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 = 5{,}4;$$

$$\alpha(\mathrm{A}_2, S\text{п}) = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 = 8 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 = 5{,}4;$$

$$\alpha(\mathrm{A}_3, S\text{п}) = \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 = 7 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 = 5{,}9;$$

$$\alpha(\mathrm{A}_4, S\text{п}) = \alpha_{41}q_1 + \alpha_{42}q_2 + \alpha_{43}q_3 = 6 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 = 5{,}3.$$

Застосування стратегії A_3^* забезпечує максимальний середній виграш, тому відповідно до виразу (4.20) ця стратегія є оптимальною.

Знайдемо оптимальну стратегію за критерієм мінімального середнього ризику. Для цього обчислимо відповідно до виразу (4.21) середні значення ризиків для кожної пари стратегій $(\mathrm{A}_i, S\text{п})$:

$$r(\mathrm{A}_1, S\text{п}) = r_{11}q_1 + r_{12}q_2 + r_{13}q_3 = 1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}2;$$

$$r(\mathrm{A}_2, S\text{п}) = r_{21}q_1 + r_{22}q_2 + r_{23}q_3 = 0 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}2;$$

$$r(\mathrm{A}_3, S\text{п}) = r_{31}q_1 + r_{32}q_2 + r_{33}q_3 = 1 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}7;$$

$$r(\mathrm{A}_4, S\text{п}) = r_{41}q_1 + r_{42}q_2 + r_{43}q_3 = 2 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 = 1{,}3.$$

Відповідно до виразу (4.21) і критерію мінімального середнього ризику оптимальною стратегією гравця ***A*** в розглянутій грі є стратегія A_3^*.

Гравець, схильний до ризику під час прийняття рішень, може скористатися критерієм «здорового оптимізму». Обережний гравець вибере критерій мінімаксу. Гравець, що думає реалістично, скористається кількома критеріями, наприклад Гурвиця й Лапласа. У розглянутих прикладах застосування критерію Гурвиця при χ = 0,4...0,5 і критерію Лапласа визначають одну й ту саму оптимальну стратегію A_3^*. Якщо гравцю відомо значення ймовірностей станів природи або він може адекватно їх оцінити близько до дійсних оцінок, йому доцільно скористатись критеріями максимального середнього виграшу або мінімального середнього ризику.

4.3. Планування експерименту в умовах невизначеності

При прийнятті рішення в статистичних іграх для уточнення своїх знань щодо станів природи в грі можна провести експеримент. Якщо б була можливість необмеженого експериментування, то гравець ***A*** міг би отримати інформацію про стан природи і приймати рішення (діяти) у стані повної визначеності.

У статистичних іграх з проведенням експерименту використовується додаткова інформація, отримана під час його проведення. Так, наприклад, при виборі типу стрілецької зброї можна обмежитися виконанням серії пострілів у ціль для вивчення ефективності цієї зброї в умовах саме цієї місцевості. Очевидно, чим більше серій пострілів буде зроблено по цілі, тим більше відомостей буде отримано про доцільність використання певного типу зброї, а отже, тим вищою буде гарантія прийняття правильного рішення.

Однак проведення експерименту потребує певних матеріальних, часових та інших витрат. У деяких випадках ці витрати можуть виявитися настільки великими, що не справдять того виграшу, який очікується від проведення експерименту в повному обсязі. Тоді доцільно або взагалі відмовитися від проведення експерименту, використовуючи при прийнятті рішення модель гри без експерименту, або провести експеримент обмеженого обсягу з прийнятними витратами. Такий експеримент дістав назву одиничного експерименту, а гру стали називати грою з проведенням одиничного експерименту.

Необхідно виконати деяку операцію в недостатньо з'ясованих умовах. Чи має сенс для уточнення умов в невизначеній ситуації проводити деякий експеримент? Звичайно це питання постає тільки тоді, коли витрати на експеримент є істотними й порівнюються з тим збільшенням виграшу, яке можна отримати, дізнавшись про стан природи більш точно. Якщо ж витрати на експеримент є незначними, то відповідь на це запитання буде завжди позитивною.

Розглянемо випадок «ідеального» експерименту ***E***, проведення якого дає змогу абсолютно точно визначити стан природи Π_j у поточній ситуації. Нехай задано матрицю виграшів $\|\alpha_{ij}\|$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) і є відомими ймовірності $q_1, q_2, \ldots, q_n$ різних станів $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Нехай витрати на проведення експерименту ***E*** становлять ***C*** одиниць. Порівняємо значення середнього виграшу без проведення експерименту ***E*** і середнього виграшу з його проведенням.

Як було зазначено раніше, якщо не проводити додатково ніякого експерименту, то потрібно як розв'язок вибрати ту стратегію $A^* = A_i$, яка набуває максимального середнього виграшу:

$$max_i\{q_1\alpha_{i1} + q_2\alpha_{i2} + \ldots + q_n\alpha_{in}\}. \qquad (4.22)$$

Це й буде виграшем без проведення експерименту ***E***.

Тепер припустимо, що під час проведення експеримену ***E*** було з'ясовано, який зі станів $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ є дійсним станом природи. Якщо це виявився стан Π_1, то необхідно застосовувати ту стратегію A_i, для якої

$$max_i\alpha_{i1} = \alpha_1$$

і виграш становитиме α_1. Якщо дійсним станом природи виявився стан Π_2, то виграш становитиме α_2, і т. д. Узагалі при дійсному стані природи Π_j виграш дорівнюватиме максимальному виграшу в j-му стовпці:

$$max_i\alpha_{ij} = \alpha_j.$$

Однак заздалегідь треба вирішити, чи буде проводитися експеримент ***E***. Який стан $\boldsymbol{\Pi_j}$ з множини ***П*** станів природи насправді має місце і яким буде виграш $\boldsymbol{\beta_j}$, не відомо. Тому доцільно усереднити цей виграш значеннями ймовірностей $\boldsymbol{q_j}$:

$$q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n.$$

З урахуванням вартості експерименту (яку потрібно відняти від виграшу) середній виграш із застосуванням ідеального експерименту ***E*** буде таким:

$$q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n - C. \qquad (4.23)$$

Отже, експеримент можна проводити, якщо величина (4.23) є більшою, ніж (4.22); якщо ж, навпаки, більшою є величина (4.22), то проводити експеримент ***E*** не потрібно. Можна дещо змінити правило, зробивши його більш простим. Експеримент ***E*** буде корисним, якщо

$$max_i\{q_1\alpha_{i1} + q_2\alpha_{i2} + \ldots + q_n\alpha_{in}\} < q_1\alpha_1 + \\ + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n - C. \qquad (4.24)$$

Перенесемо ***C*** у ліву частину, а «максимум» з лівої частини – у праву, змінивши знак перед сумою і замінивши «максимум» на «мінімум». Тоді умова (4.24) перепишеться у вигляді

$$C < min_i\{q_1(\beta_1 - \alpha_{i1}) + q_2(\beta_2 - \alpha_{i2}) + \ldots + q_n(\beta_n - \alpha_{in})\},$$

або

$$C < min_i \textstyle\sum_{j=1}^{n} q_j(\alpha_j - \alpha_{ij}). \qquad (4.25)$$

Однак різниця $\boldsymbol{\beta_j - \alpha_{ij}}$ є ризиком $\boldsymbol{r_{ij}}$, а сума в правій частині – середнім очікуваним ризиком:

$$\overline{r}_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} q_j\, r_{ij}.$$

Експеримент ***E*** також потрібно проводити, якщо витрати на його здійснення є меншими від мінімального середнього ризику

$$C = min_i\, \overline{r}_i. \qquad (4.26)$$

В іншому випадку слід утриматися від проведення експерименту й застосувати ту стратегію ***A****, для якої набувається цей мінімум середнього ризику.

Приклад 4.14. Розглянемо гру з природою 3 × 4, матрицю якої наведено табл. 4.23.

Таблиця 4.23

A_i	$П_j$			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Імовірності станів природи $П_1$, $П_2$, ..., $П_4$ є такими: q_1 = 0,1, q_2 = 0,2, q_3 = 0,5, q_4 = 0,2. Визначити, чи є доцільним «ідеальний» експеримент, вартість якого (у тих же одиницях, у яких виражено й виграш) дорівнює двом.

Розв'язання. Переходимо від матриці виграшів до матриці ризиків (табл. 4.24).

Таблиця 4.24

A_i	$П_j$				$\bar{r}_i$
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
A_1	3	4	1	0	1,6
A_2	1	0	2	6	2,3
A_3	0	2	0	7	1,8

У правому додатковому стовпці проставлено значення середнього ризику. Мінімальне з цих значень дорівнює 1,6. Тому проведення експерименту з вартістю 2 од. є недоцільним. Отже, було розглянуто випадок «ідеального» експерименту ***E***, унаслідок якого обстановка повністю з'ясовується.

Тепер розглянемо випадок неідеального експерименту ***E***, який не приводить до з'ясування в точності стану природи $П_j$, а лише дає якісь непрямі свідчення на користь тих чи інших станів. У найбільш загальному вигляді можна припустити, що експерherimент ***E*** призводить до виникнення однієї з ***k*** несумісних подій B_1, B_2, …, B_k, причому ймовірності цих подій (результатів експерименту) залежать від умов, у яких він відбувається: Π_1, Π_2, ... або Π_n.

Позначимо умовну ймовірність виникнення події B_l в умовах Π_j через $P(B_l/\Pi_j)$, (j = 1,2, …, n; l = 1, 2, …, k) і будемо вважати, що всі ці умовні ймовірності нам відомі. Після виконання експерименту ***E***, що дав результат B_l, необхідно буде переглянути ймовірності невідомих умов. Стани природи Π_1, Π_2, ..., Π_n будуть характеризуватися не попередніми (апріорними) імовірностями

$$q_1, q_2, \dots, q_n,$$

а новими, «апостеріорними» ймовірностями станів природи

$$\widetilde{q}_{1l}, \widetilde{q}_{2l}, \dots, \widetilde{q}_{nl},$$

тобто умовними ймовірностями станів Π_1, Π_2, …, Π_n, якщо експеримент дав результат B_l. Значення цих апостеріорних імовірностей знаходимо за формулою Бейєса [4]:

$$\widetilde{q}_{jl} = \frac{q_j\, P(B_l / \Pi j)}{\sum_{j=1}^{n} q_j\, P(B_l / \Pi j)}, \ (j = 1, \dots, n). \qquad (4.27)$$

Оскільки значення апріорних імовірностей станів природи q_1, q_2, … , q_n замінюємо новими, апостеріорними ймовірностями $\widetilde{q}_{1l}, \widetilde{q}_{2l}, \dots, \widetilde{q}_{nl}$, то й оптимальну стратегію ***A**** в загальному випадку буде замінено новою оптимальною стратегією $\widetilde{\mathrm{A}}_l^*$, обчисленою з урахуванням апостеріорних імовірностей (за умови настання події B_l).

Приклад 4.15. В умовах, як у прикладі 4.14, з апріорними ймовірностями q_1 = 0,1, q_2 = 0,2, q_3 = 0,5, q_4 = 0,2 проводиться експеримент для уточнення обстановки. Нехай цей експеримент має три можливих результати: B_1, B_2, B_3. Умовні ймовірності цих результатів $P(B_i/\Pi_j)$ для різних станів природи Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 наведено в матриці умовних імовірностей (табл. 4.25).

Нехай відомо, що при проведенні експерименту ***E*** було одержано результат B_1. Обчислити значення апостеріорних імовірностей $\widetilde{q}_{j1}$. За результатами експерименту вказати нову оптимальную стратегію A_1^*.

Таблиця 4.25

B_i	**$П_j$**			
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	**$П_4$**
B_1	0,2	0,9	0,4	0,3
B_2	0,1	0,1	0,5	0,3
B_3	0,7	0	0,1	0,4

Розв'язання. За формулою (4.27) розрахуємо значення апостеріорних імовірностей станів природи:

$$\tilde{q}_{11} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}2}{0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}5\cdot 0.4+0{,}2\cdot 0{,}3} = \frac{0{,}02}{0{,}46} \approx 0{,}043;$$

$$\tilde{q}_{21} = \frac{0{,}18}{0{,}46} \approx 0{,}392;$$

$$\tilde{q}_{31} = \frac{0{,}2}{0{,}46} \approx 0{,}435;$$

$$\tilde{q}_{41} = \frac{0{,}06}{0{,}46} \approx 0{,}13.$$

Обчислимо середні виграші $\bar{\bar{\alpha}}_i^{(1)}$ при кожній стратегії з урахуванням знайдених апостеріорних імовірностей і занесемо до табл. 4.26.

Таблиця 4.26

A_i	**$П_j$**				$\bar{\bar{\alpha}}_i^{(1)}$
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	**$П_4$**	
A_1	1	4	5	9	4,96
A_2^*	3	8	4	3	$\boxed{5{,}2}$
A_3	4	6	6	2	5,09
$\tilde{q}_{i1}$	0,043	0,392	0,435	0,13	

В останньому рядку таблиці наведено значення апостеріорних імовірностей, у правому, додатковому стовпці – середні виграші при нових значеннях імовірностей станів природи, обчислені за формулою

$$\overline{\overline{\alpha}}_i^{(1)} = \widetilde{q}_{11}\,\alpha_{i1} + \widetilde{q}_{21}\,\alpha_{i2} + \widetilde{q}_{31}\,\alpha_{i3} + \widetilde{q}_{41}\,\alpha_{i4}.$$

Таким чином, з урахуванням результату ***B₁*** експерименту ***E*** оптимальною стратегією буде вже не ***A₁***, а ***A₂***. Для того щоб заздалегідь вирішити, чи варто проводити експеримент ***E***, потрібно заздалегідь провести подібні розрахунки для всіх результатів експериментів.

Приклад 4.16. В умовах, як у прикладах 4.14 і 4.15, виробити правило розв'язання для визначення стратегії, яку необхідно вибирати при певному результаті експерименту. З'ясувати, наскільки середній виграш при проведенні експерименту ***E*** є більшим від середнього виграшу без виконання експерименту.

Розв'язання. Обчислимо значення інших апостеріорних імовірностей усіх станів природи $\widetilde{q}_{j2}$, $\widetilde{q}_{j3}$ (***j*** = 1, 2, 3, 4) за умови, що експеримент дає результати ***B₂***, ***B₃*** відповідно. Обчислення проведемо за формулою (4.27):

$$\widetilde{q}_{12} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}1}{0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}5\cdot 0.5+0{,}2\cdot 0{,}3} \approx 0{,}029;$$

$$\widetilde{q}_{22} = \frac{0{,}02}{0{,}34} \approx 0{,}059; \quad \widetilde{q}_{32} = \frac{0{,}25}{0{,}34} \approx 0{,}375; \quad \widetilde{q}_{42} = \frac{0{,}06}{0{,}34} \approx 0{,}177;$$

$$\widetilde{q}_{13} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}7}{0{,}1\cdot 0{,}7+0{,}2\cdot 0+0{,}5\cdot 0.1+0{,}2\cdot 0{,}4} \approx 0{,}35; \qquad \widetilde{q}_{23} = \frac{0}{0{,}2} = 0;$$

$$\widetilde{q}_{33} = \frac{0{,}05}{0{,}2} \approx 0{,}25; \quad \widetilde{q}_{43} = \frac{0{,}08}{0{,}2} \approx 0{,}4.$$

Зведемо значення всіх нових (апостеріорних) імовірностей станів природи при кожному з результатів експериментів ***B₁***, ***B₂***, ***B₃*** у табл. 4.27.

Таблиця 4.27

Bᵢ	***Пⱼ***			
	П₁	***П₂***	***П₃***	***П₄***
B₁	0,043	0,392	0,435	0,13
B₂	0,029	0,059	0,735	0,177
B₃	0,35	0	0,25	0,4

Тепер для кожного з результатів експерименту B_2, B_3 необхідно знайти середні виграші й усереднити їх з вагами, що дорівнюють новим апостеріорним імовірностям. Оптимальну стратегію обведемо квадратом. Результати розрахунків для подій B_2 і B_3 відповідно зведемо в табл. 4.28 і 4.29. У нижньому рядку кожної з таблиць наведено значення апостеріорних імовірностей станів, а в правому стовпці – середні виграші.

Таблиця 4.28

A_i	$П_j$				$\bar{\bar{\alpha}}_i^{(2)}$
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
A_1^*	1	4	5	9	$\boxed{5{,}53}$
A_2	3	8	4	3	4,03
A_3	4	6	6	2	5,23
$\tilde{q}_{j2}$	0,029	0,059	0,735	0,177	

Таблиця 4.29

A_i	$П_j$				$\bar{\bar{\alpha}}_i^{(3)}$
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
A_1^*	1	4	5	9	$\boxed{5{,}20}$
A_2	3	8	4	3	3,25
A_3	4	6	6	2	3,7
$\tilde{q}_{i3}$	0,35	0	0,250	0,4	

Тепер на основі табл 4.25–4.29 можна сформулювати правило розв’язання: якщо експеримент ***E*** дав результат B_1, то доцільно застосовувати стратегію A_2; якщо B_2 або B_3 – то стратегію A_1.

Якщо експеримент дав результат B_1 то середній виграш буде дорівнювати 5,2; якщо B_2 – то 5,53, а якщо B_3, – то 5,2.

Середнє значення середнього виграшу за цим правилом розв'язання можна обчислити так: знайдемо повну ймовірність виникнення події B_1:

$$p(B_1) = q_1 p(B_1/П_1) + q_2 p(B_1/П_2) + q_3 p(B_1/П_3) + q_4 p(B_1/П_4) =$$

$$= 0{,}1 \cdot 02 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}46.$$

Аналогічно знайдемо значення ймовірностей виникнення подій B_2 і B_3:

$$p(B_2) = q_1p(B_2/П_1) + q_2p(B_2/П_2) + q_3p(B_3/П_3) + q_4p(B_3/П_4) =$$

$$= 0{,}1\cdot0{,}1 + 0{,}2\cdot0{,}1 + 0{,}5\cdot0{,}5 + 0{,}2\cdot0{,}3 = 0{,}34;$$

$$p(B_3) = q_1p(B_3/П_1) + q_2p(B_3/П_2) + q_3p(B_3/П_3) + q_4p(B_3/П_4) =$$

$$= 0{,}1\cdot0{,}7 + 0{,}2\cdot0 + 0{,}5\cdot0{,}1 + 0{,}2\cdot0{,}4 = 0{,}20.$$

За цим правилом розв’язання повний середній виграш

$$\overline{\overline{\alpha}}^* = p(B_1)max\overline{\overline{\alpha}}_i^{(1)} + p(B_2)max\overline{\overline{\alpha}}_i^{(2)} + p(B_3)max\overline{\overline{\alpha}}_i^{(3)} =$$

$$= 0{,}46\cdot5{,}20 + 0{,}34\cdot5{,}53 + 0{,}20\cdot5{,}20 = 5{,}345.$$

Порівняємо цей виграш з тим, який можна було б отримати, якби не проводився експеримент (у табл. 4.13 $\overline{\overline{\alpha}}^* = 5{,}20$).

Таким чином, виконання експерименту збільшило середній виграш на 5,345 – 5,20 = 0,145. Звідси випливає висновок: якщо вартість експерименту менше за 0,145, то виконання його є доцільним, якщо ж перевищує 0,145 – то недоцільним.

Розрахунки доцільності проведення експерименту, зрозуміло, можуть провадитися, виходячи не із середнього виграшу, а із середнього ризику; при цьому буде отримано ті ж самі результати.

Аналогічно можна заздалегідь підрахувати, чи вигідно кілька разів проводити експеримент E. Нехай є можливість зробити два незалежних повторення E_1, E_2 експерименту E, що характеризується умовними ймовірностями результатів: $p(B_l/П_j)$ (j = 1, 2, …, n; l = 1,2, ..., k) при поточному стані природи $П_j$. Це рівносильно проведенню складного експерименту E з результатом B_{ls} (l = 1, 2, …, k; s = 1, 2, …, k). B_{ls} – це подія, яка полягає в тому, що перший експеримент дав результат B_l, а другий – B_s. За правилом перемноження ймовірностей незалежних подій умовні ймовірності цих результатів

$$p(B_{ls}/П_j) = p(B_l/П_j)p(B_s/П_j). \tag{4.28}$$

Таким чином, задача зводиться до раніше розглянутої, тільки в експерименті буде вже не k можливих результатів, а k^2. Така задача має місце, коли повторне проведення експериментів планується заздалегідь.

Однак коли йдеться про проведення кількох випробувань для уточнення відомостей про дійсні умови в ситуації, що розглядається, вигідніше не встановлювати кількість випробувань заздалегідь, а вирішувати після кожного випробування, чи варто проводити наступне. Виявляється, що такий метод у деяких випадках дає помітну економію в ресурсах, що витрачаються на експеримент.

4.4. Статистичні ігри з проведенням одиничних експериментів

Розгляднемо статистичні ігри з проведенням одиничного експерименту. З одного боку, одиничний експеримент дає змогу отримати певну інформацію про стан природи, а з іншого – не потрібно значних витрат на його проведення. Одиничним експериментом будемо називати експеримент, обсяг і порядок якого є заздалегідь визначеними.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок проведення одиничного експерименту й ідею використання його результатів для прийняття рішення. Потім перейдемо до більш складних моделей статистичних ігор з проведенням одиничного експерименту.

Припустимо, що створено нову стрілецьку зброю і необхідно винести рішення про прийняття її на озброєння. Під час розроблення зброї на підставі минулого досвіду і з урахуванням нових технічних рішень можна розрахувати ефективність (наприклад, точність стрільби) зброї. Цю оцінку ефективності може бути враховано при прийнятті рішення.

Водночас аналітична оцінка ефективності дає зазвичай недостатньо підстав для винесення такого рішення. Тоді для отримання додаткової інформації організовують випробування дослідного зразка зброї, яке з огляду на теорію статистичних ігор, і є одиничним експериментом.

Розглянемо найпростіший одиничний експеримент. Нехай експеримент являє собою проведення серії з l пострілів по мішені в стрілецькому тирі. Результатом довільного i-го пострілу може бути або подія c (ураження мішені), або подія $\overline{c}$ (промах, мішень не уражено). Тоді результатом експерименту може бути, наприклад, послідовність подій

$$y_k = (c, c, \overline{c}, \ldots, \overline{c}, \ldots, c, \overline{c}).$$

Усього може бути $N = 2^l$ різних результатів експерименту, тобто множина результатів експерименту Y містить 2^l елементи, причому $y_k \in Y$, $k = \overline{1, 2^l}$.

Припустимо, що одиничний експеримент полягає в проведенні трьох пострілів, тобто $l = 3$. Запишемо всі можливі елементи множини результатів експерименту:

$$\boldsymbol{y_1} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}), \qquad \boldsymbol{y_2} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{c}}); \ \boldsymbol{y_3} = (\boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c}); \ \boldsymbol{y_4} = (\overline{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c});$$

$$\boldsymbol{y_5} = (\boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{c}}); \boldsymbol{y_6} = (\overline{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{c}}); \ \boldsymbol{y_7} = (\overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c}); \ \boldsymbol{y_8} = (\overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{c}}).$$

Як зазначалося вище, основною метою проведення експерименту є надання допомоги гравцеві ***А*** у виборі відповідної стратегії. У цьому випадку гравець має дві стратегії: ***A_1*** – визнати стрілецьку зброю ефективною та прийняти її на озброєння; ***A_2*** — визнати стрілецьку зброю неефективною.

Оскільки кількість результатів експерименту є завжди більшою за кількість стратегій, гравець ***А*** повинен вибрати правило, згідно з яким за результатами $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}}$ експерименту він вибирає ту чи іншу стратегію.

Віднесемо перші чотири можливих результати експерименту до підмножини ***Y_1***, а інші чотири – до підмножини ***Y_2***, тобто

$$\boldsymbol{Y_1} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}; \ \boldsymbol{Y_2} = \{y_5, y_6, y_7, y_8\}.$$

Тоді логічно припустити, що якщо після трьох пострілів у мішень було влучено не менше двох разів, то зброю можна визнати ефективною, і, навпаки, неефективною, якщо з трьох пострілів було зроблено два або три промахи по мішені. Отже, правило вибору стратегії можна сформулювати таким чином: якщо конкретний результат експерименту $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}}$ належить підмножині ***Y_1***, то вибирається стратегія ***A_1***, якщо ж підмножині ***Y_2*** – то стратегія ***A_2***.

Правило, за яким вибирається стратегія ***A_i*** при будь-якому результаті $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}}$ експерименту, називають *розв'язувальною функцією*

$$\gamma(\hat{y}_k) = A_i.$$

Для розглядуваного випадку розв'язувальна функція має вигляд

$$\gamma(\hat{y}_k) = \begin{cases} \boldsymbol{A_1}, \text{якщо } \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}} \in \boldsymbol{Y_1}, \\ \boldsymbol{A_2}, \text{якщо } \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}} \in \boldsymbol{Y_2}. \end{cases} \qquad (4.29)$$

Приклад 4.17. Нехай унаслідок проведення серії з трьох пострілів отримано такий результат: $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{c}})$. Необхідно прийняти рішення щодо ефективності випробовуваної стрілецької зброї.

Розв'язання. Оскільки результат одиничного експерименту $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}}$ у цьому випадку належить до підмножини ***Y_2***, то відповідно до розв'язувальної функції (4.29) вибирається стратегія A_2, тобто стрілецька зброя визнається неефективною.

З наведеного вище можна зробити висновок, що основна ідея використання результатів одиничного експерименту в статистичних іграх полягає в такому. Множина Y результатів експерименту розбивається на m неперетинних підмножин Y_i. Якщо конкретний результат $\hat{y}_k$ експерименту потрапляє до підмножини Y_i, то вибирається стратегія A_i. Це пояснюється рис. 4.1.

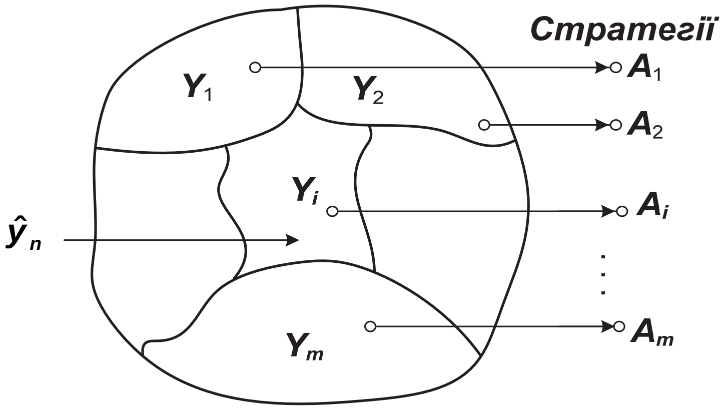


Рис. 4.1

Розглянутий вище варіант розбиття множини Y результатів експерименту на підмножини не є єдиним. Можна запропонувати й інші варіанти, наприклад:

$$Y_1 = \{y_1\},$$

$$Y_2 = \{y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8\}.$$

У загальному випадку кожному варіанту розбиття множини Y на підмножини відповідає своя розв'язувальна функція. Тоді завдання гравця A буде полягати в тому, щоб з множини розв'язувальних функцій вибрати таку Y, яка забезпечила би вибір оптимальної стратегії в статистичній грі.

Розглянутий приклад дає змогу усвідомити суть проведення одиничного експерименту й використання його результатів під час вибору стратегії гравцем. Основним завданням проведення одиничного експерименту є отримання додаткової інформації щодо стану природи.

Розглянемо, як можна отримати цю додаткову інформацію. Перед проведенням експерименту гравець A в кращому разі володіє значеннями ймовірностей $q_i = p(\Pi_i)$ того, що природа перебуває в стані Π_i.

Ці значення ймовірностей гравець може оцінити, виходячи зі свого попереднього досвіду. Такі ймовірності називають апріорними ймовірностями станів Π_i природи.

Проводячи одиничний експеримент, гравець ***A*** отримує можливість, зокрема, уточнити значення ймовірностей $p(\Pi_i)$. Оскільки результат $\hat{y}_k$ експерименту є випадковим, то можна казати про ймовірність настання подій (Π_j, $\hat{y}_k$), тобто $p(\Pi_j, y_k)$. Як відомо, ця ймовірність

$$p(\Pi_j, y_k) = p(\Pi_i)p(y_k/\Pi_j). \tag{4.30}$$

Імовірність

$$p(\Pi_j/y_k) = \frac{\mathrm{p}(\Pi i)\, p(yk/\Pi j)}{p(y_k)}$$

називають апостеріорною ймовірністю, яка характеризує ймовірність того, що природа перебувала в стані Π_j, якщо за результатом експерименту отримано результат y_k. Очевидно, апостеріорна ймовірність $p(\Pi_j/y_k)$ дає більше інформації про стан природи, ніж апріорна $p(\Pi_j)$.

Вираз (4.30) являє собою формулу Байєса. Кількісний зв'язок між можливим результатом експерименту й станом природи Π_j описується ймовірністю $p(y_k/\Pi_j)$, яка являє собою умовну ймовірність того, що результатом експерименту буде y_k, якщо природа перебуває в стані Π_j. Для всіх можливих результатів експериментів має місце матриця $\| p(y_k/\Pi_j) \|$ умовних імовірностей.

Скориставшись формулою повної ймовірності

$$p(y_k) = \sum_{j=1}^{n} p(\Pi_j)p(y_k/\Pi_j),$$

отримаємо

$$p(\Pi_j/y_k) = \frac{p(\Pi_j)p(y_k/\Pi_j)}{\sum_{j=1}^{n} p(\Pi_j)p(y_k/\Pi_j)},$$

$$\| p(y_k/\Pi_j) \| = \begin{pmatrix} p(y_1/\Pi_1)\ p(y_1/\Pi_2) \dots p\left(\frac{y_1}{\Pi_n}\right) \\ p(y_2/\Pi_1)\, p(y_2/\Pi_2) \dots p(y_2/\Pi_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p(y_m/\Pi_1)\, p(y_m/\Pi_2) \dots p(y_m/\Pi_n) \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Значення елементів матриці $\| p(y_k/\Pi_j) \|$ або задаються заздалегідь, або визначаються під час експерименту.

Таким чином, використовуючи результати одиничного експерименту, можна уточнити ймовірності станів $\boldsymbol{\Pi_j}$ природи, а потім, використовуючи, наприклад, критерій максимального середнього виграшу (або мінімального середнього ризику), знайти оптимальну стратегію гравця ***A***.

4.5. Байєсовський принцип вибору стратегій у статистичних іграх з проведенням одиничних експериментів

Як було зазначено вище, стратегія в грі з проведенням одиничного експерименту вибирається відповідно до деякого правила, яке має назву вирішальної функції. Розглянемо, що являє собою вирішальна функція, яка дає змогу вибрати оптимальну стратегію відповідно до критерію мінімального середнього ризику.

Як відомо, гравець ***A*** в статистичній грі має сукупність стратегій $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$,…, $\boldsymbol{A_i}$, …, $\boldsymbol{A_m}$. Унаслідок проведення одиничного експерименту з результатом $\boldsymbol{\hat{y}_k}$ він вибирає стратегію

$$\boldsymbol{A_i = \gamma(\hat{y}_k)}.$$

Оскільки станів природи він не знає, то вибір стратегії $\boldsymbol{A_i}$ при конкретному стані $\boldsymbol{\Pi_j}$ природи призводить до втрат (ризику), які позначимо через

$$\boldsymbol{r(A_i, \Pi\mathrm{j}) = r[\gamma(\hat{y}_k), \Pi_j]}.$$

Очевидно, середні втрати (середній ризик)

$$\boldsymbol{\rho[\gamma(\hat{y}_k)]} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}\,[\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\hat{y}_k}),\ \Pi_{\boldsymbol{j}}]\boldsymbol{p}(\Pi_{\boldsymbol{j}}/\boldsymbol{\hat{y}_k}). \qquad (4.32)$$

У цьому виразі фігурують апостеріорні ймовірності $\boldsymbol{p}(\Pi_{\boldsymbol{j}}/\boldsymbol{\hat{y}_k})$.

Підставивши (4.30) в (4.32), отримаємо

$$\boldsymbol{\rho[\gamma(\hat{y}_k)]} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}[\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\hat{y}_k}),\Pi_{\boldsymbol{j}}]\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\hat{y}_k}/\Pi_{\boldsymbol{j}})\boldsymbol{p}(\Pi_{\boldsymbol{j}})}{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}[\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\hat{y}_k}/\ \Pi_{\boldsymbol{j}}]\boldsymbol{p}(\Pi_{\boldsymbol{j}})}. \qquad (4.33)$$

Тоді відповідно до критерію мінімального середнього ризику оптимальною стратегією буде $\boldsymbol{A_i^*} = \boldsymbol{\gamma^*(\hat{y}_k)}$, при застосуванні якої величина втрат буде мінімальною, тобто

$$\boldsymbol{\rho(A_i^*) = \rho[\gamma^*(\hat{y}_k)] = min_{\{\gamma(\hat{y}_k)\}}\, \rho[\gamma(\hat{y}_k)]}. \qquad (4.34)$$

Стратегию ***А****, правило выбору якої визначається виразом (4.34), називають байєсовською стратегією [11].

Припустимо, що природа може перебувати в одному з двох станів: Π_1 або Π_2. Апріорні ймовірності станів мають вигляд

$$p(\Pi_1) = q_1,\ p(\Pi_2) = q_2 = 1 - q_1.$$

Будемо вважати, що гравець ***А*** має дві стратегії A_1 і A_2. При цьому, якщо гравець ***А*** вибирає стратегію A_1 (стан природи Π_1) або стратегію A_2 (стан природи Π_2), то його втрати дорівнюють нулю.

Поєднання (A_1, Π_2) і (A_2, Π_1) призводить до втрат відповідно α і β. Матрицю втрат (матрицю ризиків) у цьому випадку можна задати табл. 4.30.

Таблиця 4.30

A_i	Π_j	
	Π_1	Π_2
A_1	0	α
A_2	β	0

Визначимо величину середніх утрат при виборі гравцем стратегій A_1 і A_2. Відповідно до виразу (4.33) і з урахуванням матриці втрат отримаємо

$$\rho_1[\gamma(\hat{y}_k)] = \frac{\alpha p(\hat{y}_k/\Pi_2)p(\Pi_2)}{p(\hat{y}_k/\Pi_1)p(\Pi_1)+ p(\hat{y}_k/\Pi_2)p(\Pi_2)},$$

$$\rho_2[\gamma(\hat{y}_k)] = \frac{\beta p(\hat{y}_k/\Pi_1)p(\Pi_1)}{p(\hat{y}_k/\Pi_1)p(\Pi_1)+ p(\hat{y}_k/\Pi_2)p(\Pi_2)}.$$

Тоді згідно з (4.29) гравцеві ***А*** необхідно вибрати стратегію A_1, якщо

$$\rho_1[\gamma(\hat{y}_k)] < \rho_2[\gamma(\hat{y}_k)], \tag{4.35}$$

або стратегію A_2 – в іншому випадку.

Підставивши в (4.29) вирази для $\rho_1[\gamma(\hat{y}_k)]$ і $\rho_2[\gamma(\hat{y}_k)]$, після нескладних перетворень отримаємо таку розв’язувальну функцію:

$$\gamma(\hat{y}_k) = \begin{cases} A_1, \text{ якщо } \dfrac{p(\hat{y}_k/\Pi_1)}{p(\hat{y}_k/\Pi_2)} > \dfrac{\alpha p(\Pi_2)}{\beta p(\Pi_1)}; \\ A_2, \text{ якщо } \dfrac{p(\hat{y}_k/\Pi_1)}{p(\hat{y}_k/\Pi_2)} < \dfrac{\alpha p(\Pi_2)}{\beta p(\Pi_1)}. \end{cases} \qquad (4.36)$$

Функцию $\gamma(\hat{y}_k)$ називають функцією правдоподібності, а відношення

$$\lambda(\hat{y}_k) = \frac{p(\hat{y}_k/\Pi_1)}{p(\hat{y}_k/\Pi_2)} \qquad (4.37)$$

– відношенням правдоподібності.

Таким чином, згідно з байєсовським принципом вибору стратегій у грі з проведенням одиничного експерименту за конкретним наслідком $\hat{y}_k$ експерименту обчислюється відношення правдоподібності, значення якого потім зіставляється з величиною

$$\lambda_0 = \frac{\alpha p(\Pi_2)}{\beta p(\Pi_1)}. \qquad (4.38)$$

Величина λ_0 опосредковано визначає межу між підмножинами Y_1 та Y_2 множини результатів експерименту, які відповідають стратегіям A_1 та A_2 гравця A.

Приклад 4.18. Відомо, що в партії зі 100 одиниць стрілецької зброї в середньому 15 одиниць не підготовлено до нормального бою (мають знижену точністю стрільби). Для перевірки партії береться довільно один екземпляр зброї, з якого виконуються три постріли. З попереднього досвіду відомо також, що ймовірність триразового враження мішені при трьох пострілах зі зброї нормального бою становить 0,7, а зі зброї, не підготовленої до нормального бою, дорівнює нулю; імовірності дворазового враження мішені при трьох пострілах становить відповідно 0,2 і 0,05; імовірність одноразового враження – відповідно 0,5 і 0,35 і, нарешті, імовірність промаху при трьох пострілах – відповідно 0,05 і 0,6.

Унаслідок проведення стрільби з узятого довільно екземпляра зброї мішень уражено два рази. Необхідно обґрунтувати рішення, чи приймати всю партію на озброєння, чи забракувати її, якщо матеріальні втрати при прийняттіі бракованої партії на озброєння становлять 6 ум. од., а при бракуванні партії, яка відповідає тактико-технічним вимогам, – 1 ум. од.

Розв'язання. Зазначимо, що в розглянутому прикладі вплив природи виявляється у відповідності характеристик зброї тактико-технічним вимогам. Іншими словами, тут стан $\boldsymbol{П_1}$ відповідає наявності в партії зброї, яку підготовлено до нормального бою, а стан $\boldsymbol{П_2}$ – наявності зброї, яку не підготовлено до нормального бою. Тоді апріорні ймовірності станів $\boldsymbol{П_1}$ і $\boldsymbol{П_2}$ будуть відповідно такими $\boldsymbol{p\ (П_1)} = 0{,}85$; $\boldsymbol{p(П_2)} = 0{,}15$.

Особа, яка приймає рішення (гравець ***A***), має дві стратегії:

$\boldsymbol{A_1}$ – прийняти партію стрілецької зброї на озброєння;

$\boldsymbol{A_2}$ – забракувати партію стрілецької зброї.

З метою прийняття обґрунтованого рішення проводиться одиничний експеримент, який полягає у випадковому виборі одного екземпляра зброї та проведенні з нього трьох пострілів. Можливими наслідками одиничного експерименту є такі події:

– промах при всіх трьох пострілах;

– одноразове враження мішені;

– дворазове враження мішені;

– триразове враження мішені.

Зауважимо, що тут оцінюється тільки кількість уражень мішені при трьох пострілах, а не результат стрільби при кожному пострілі. Тоді матриця умовних імовірностей $\| \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}}/\Pi_{\boldsymbol{j}}) \|$, де $\boldsymbol{k} = \overline{0,3}$, $\boldsymbol{j} = \overline{1,3}$, матиме такий вигляд:

$$\| \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}}/\Pi_{\boldsymbol{j}}) \| = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_0}/\Pi_1) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_1}/\Pi_1) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_2}/\Pi_1) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_3}/\Pi_1) \\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_0}/\Pi_2) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_1}/\Pi_2) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_2}/\Pi_2) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y_3}/\Pi_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}35 & 0{,}05 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай результатом цього експерименту є подія $\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{2}}$. Використовуючи матрицю $\| \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}}/\Pi_{\boldsymbol{j}}) \|$, знайдемо відношення правдоподібності (4.37):

$$\boldsymbol{\lambda(\widehat{y}_2)} = \frac{\boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{y}}_2/\Pi_1)}{\boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}}/\Pi_2)} = \frac{0{,}2}{0{,}05} = 4.$$

При прийнятті неправильного рішення (щодо взяття бракованої партії на озброєння або щодо бракування партії, що відповідає тактико-технічним вимогам) матимуть місце матеріальні втрати. У першому випадку ці втрати зумовлені низькою ефективністю застосування зброї в бойових умовах, у другому – пов'язані з витратами часу й коштів на підготовку зброї до нормального бою. Матрицю втрат (матрицю ризиків) для розглянутого прикладу наведено в табл. 4.31.

Таблиця 4.31

Стратегії гравця ***A***	Стратегії природи ***П***	
	***П*₁**	***П*₂**
***A*₁**	0	6
***A*₂**	1	0

Відповідно до (4.38)

$$\lambda_0 = \frac{\alpha \cdot p(\Pi_2)}{\beta \cdot p(\Pi_1} = \frac{6 \cdot 0,15}{1 \cdot 0,85} = 1,06.$$

Оскільки $\lambda(\hat{y}_2) > \lambda_0$, то відповідно до (4.36) гравець ***A*** вибирає стратегію A_1, тобто що партія зброї береться на озброєння. Розглянемо, яку стратегію вибрав би гравець ***A***, якби він не проводив одиничного експерименту. Для цього скористаємося критерієм мінімального середнього ризику (4.21). Розрахуємо середній ризик $r(A_i, S_п)$ для кожної пари стратегій ($A_i, S_п$) з урахуванням імовірностей станів природи $p(П_1)$ = 0,85, $p(П_2)$ = 0,15:

$$r(A_1, S_п) = r_{11} p(П_1) + r_{12} p(П_2) = 0 \cdot 0,85 + 6 \cdot 0,15 = 0,9;$$

$$r(A_2, S_п) = r_{21} p(П_1) + r_{22} p(П_2) = 1 \cdot 0,85 + 0 \cdot 0,15 = 0,85.$$

Тоді відповідно до (4.36) гравець вибрав би стратегію A_2, тобто партію стрілецької зброї було би забраковано. Чому ж проведення одиничного експерименту дало змогу гравцеві ***A*** прийняти протилежне рішення? Вище неодноразово підкреслювалося, що проведення одиничного експерименту дає змогу гравцеві ***A*** уточнити стан $П_j$ природи, у цьому випадку – середню кількість одиниць зброї в партії, яка не відповідає тактико-технічним вимогам. Не проводячи експерименту, гравець ***A*** орієнтується на те, що зі ста одиниць зброї в партії в середньому 15 одиниць не підготовлено до нормального бою.

Це становить, на його думку, високий відсоток і є з урахуванням матеріальних втрат підставою для бракування всієї партії. Розглянемо, як зміниться ситуація після проведення одиничного експерименту. Скористаємося виразом (4.31) та обчислимо ймовірність $p(\Pi_j / y_k)$ з урахуванням того, що результатом одиничного експерименту є подія $\hat{y}_2$:

$$p(\Pi_1 / \hat{y}_2) = \frac{p(\Pi_1)\, p(\hat{y}_2 / \Pi_1)}{p(\hat{y}_2 / \Pi_1) p(\Pi_1) + p(\hat{y}_2 / \Pi_2) p(\Pi_2)} = \frac{0,85 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,85 + 0,05 \cdot 0,15} = 0,96;$$

$$\boldsymbol{p}(\Pi_2/\hat{\boldsymbol{y}}_2) = \frac{\boldsymbol{p}(\Pi_2)\,\boldsymbol{p}(\hat{\boldsymbol{y}}_2/\Pi_2)}{\boldsymbol{p}(\hat{\boldsymbol{y}}_2/\Pi_1)\boldsymbol{p}(\Pi_1)+\boldsymbol{p}(\hat{\boldsymbol{y}}_2/\Pi_2)\boldsymbol{p}(\Pi_2)} = \frac{0{,}15\cdot 0{,}05}{0{,}2\cdot 0{,}85+0{,}05\cdot 0{,}15} = 0{,}04.$$

Одиничний експеримент дає змогу уточнити ймовірність станів ***p(П₁)***, ***p(П₂)***.

З результатів експерименту випливає, що в цій партії зброї лише чотири зразки не відповідають тактико-технічним вимогам. Це дає змогу гравцеві ***А*** прийняти обґрунтоване рішення. Отже, проведення експерименту дає змогу зменшити ступінь невизначеності щодо умов проведення операції. Разом з тим, як підкреслювалося на початку цього розділу, проведення будь-якого експерименту, у тому числі й одиничного, потребує певних витрат.

Очевидно, експеримент має сенс проводити тільки в тому випадку, коли виграш від використання його результатів буде перевищувати витрати на його проведення. Доцільність проведення експерименту визначається під час його планування.

Для планування експерименту необхідно:

– мати критерій вибору стратегій у статистичній грі;

– передбачати всі можливі наслідки експерименту;

– оцінювати матеріальні витрати на проведення експерименту.

Тоді планування експерименту буде полягати в тому, щоб відповідно до вибраного критерію оцінити для кожного можливого результату очікуваний виграш і усереднити його за всіма можливими результатами. Якщо середній виграш перевищує витрати на проведення експерименту, то його проведення є доцільним, і навпаки. Очевидно, оцінки середнього виграшу й витрат має бути виражено в однакових одиницях.

Розглянуті матричні й статистичні ігри є найпростішими моделями конфліктних ситуацій, що трапляються на практиці. Конфлікт є різноманітним, що підтверджує й наведена в посібнику класифікація ігор.

Конфліктні ситуації, що трапляються в різних областях цілеспрямованої діяльності, не завжди мають антагоністичний характер. Дуже часто учасники конфліктів, дбаючи про свої інтереси, висловлюють готовність вступити в переговори один з одним, укласти якісь угоди і навіть об'єднати зусилля в надії отримати з цього вигоду. Для розв’язання таких конфліктів застосовують багатокрокові ігри.

Контрольні запитання

1. Наведіть основні поняття теорії статистичних ігор.
2. Що називають ризиком?
3. Наведіть критерії вибору стратегій в іграх без експерименту.
4. Наведіть умови використання критерію Вальда.

5. Наведіть умови використання критерію «здорового оптимізму».

6. Наведіть умови використання критерію Севіджа.

7. Наведіть умови використання критерію Гурвиця.

8. Обґрунтуйте доцільність використання критерію максимального середнього виграшу (мінімального середнього ризику).

9. Обґрунтуйте умови доцільності проведення експерименту.

10. Дайте означення одиничного експерименту.

11. Яку функцію називають функцією правдоподібності?

12. Як визначається розв'язувальна функція?

13. Розкрийте байєсовський принцип вибору стратегій у статистичних іграх з проведенням одиничного експерименту.

14. Наведіть приклади статистичних ігор.

5. БАГАТОКРОКОВІ ІГРИ

5.1. Основні означення

Один з найбільш важливих і цікавих висновків теорії ігор полягає в тому, що певні форми кооперування «гравців» при зовнішньо різних їх прагненнях дійсно мають сенс. Це пояснюється, зокрема, великою цінністю інформації, яку може передати один учасник гри іншому, підвищенням значення рішень, прийнятих спільно, ефектом хоча б часткового об'єднання ресурсів тощо.

Практика виробничої, економічної, політичної діяльності підтверджує доцільність (а іноді – необхідність) подібних дій. З формального погляду має сенс насамперед розглянути кінцеві ігри двох осіб з довільною сумою, у яких немає умови нульової суми.

Ці ігри називають також біматричними, оскільки вони визначаються або двома матрицями, які вказують платежі з кожного боку (табл. 5.1, 5.2), або однією блоковою матрицею (табл. 5.3), елементами якої є пари, або блоки, (α_{ij}, β_{ij}).

Таблиця 5.1

Стратегії гравця **A**	Стратегії гравця **B**					
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1j}	…	α_{1n}
A_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2j}	…	α_{2n}
...	...	...	…	...	...	...
A_i	α_{i1}	α_{i2}	…	α_{ij}	…	α_{in}
...	…	…	…	…	...	...
A_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mj}	…	α_{mn}

Таблиця 5.2

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***					
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	β_{11}	β_{12}	…	β_{1j}	…	β_{1n}
A_2	β_{21}	β_{22}	…	β_{2j}	…	β_{2n}
...	...	...	…	…	...	...
A_i	β_{i1}	β_{i2}	…	β_{ij}	…	β_{in}
...	...	...	…	…	...	...
A_m	B_{m1}	β_{m2}	…	β_{mj}	…	β_{mn}

Таблиця 5.3

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***					
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	α_{11}, β_{11}	α_{12}, β_{12}	…	α_{1j}, β_{1j}	…	α_{1n}, β_n
A_2	α_{21}, β_{21}	α_{22}, β_{21}	…	α_{2j}, β_{2j}	…	α_{2n}, β_{2n}
...	...	...	…	…		
A_i	α_{i1}, β_{i1}	α_{i2}, β_{i2}	…	α_{ij}, β_{ij}	…	α_{ij}, β_{ij}
...	...	...	…	…	...	...
A_m	α_{m1}, β_{m1}	α_{m2}, β_{m2}	…	α_{mj}, β_{mj}	…	α_{mn}, β_{mn}

Існують два різновиди біматричних ігор – безкоаліційні (некооперативні) ігри, у яких забороненою є будь-яка співпраця сторін, і кооперативні ігри, при проведенні яких допускається така співпраця. Очевидно, кооперативні ігри являють собою більш складні об'єкти дослідження (хоча б тому, що форми кооперації можуть бути найрізноманітнішими). Їх вивченню має передувати вивчення безкоаліційних ігор.

5.2. Біматричні безкоаліційні ігри

Розвиток будь-якої безкоаліційної гри двох осіб відбувається за правилами, що обговорювалися раніше. Сторони конфлікту ***A*** і ***B*** використовують незалежно один від одного якісь свої стратегії (чисті або змішані), унаслідок чого отримують певні виграші (програші), що залежать від конкретних значень α_{ij}, β_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, і характеру виконуваних ними дій.

Можна припустити, що наведена загальна схожість моделей поширюється і на трактування поняття оптимальності рішень, і на методологію їх пошуку. На жаль, нечасто вдається передбачити результати біматричних ігор, і одна з головних причин цього полягає зазвичай у тому, що немає зв'язку між платежами (виграшами) сторін. Як наслідок, послаблюється вплив однієї сторони на іншу, для кожної з них виникає можливість діяти більш самостійно, орієнтуючись тільки на свій виграш, хоча подібна самостійність у деяких випадках (обман, зрада) може вийти дорого.

Важливе значення, як і раніше, мають ситуації рівноваги, які характеризуються тим, що жодній зі сторін не вигідно порушувати їх. Формально це означає таке.

Якщо є можливість багаторазового повторення «ходів» у грі (табл. 5.2), то, звичайно, існує множина змішаних стратегій $\boldsymbol{S_A^*} = \boldsymbol{\{p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*\}}$, $\boldsymbol{S_B^*} = \boldsymbol{\{q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*\}}$, які застосовують сторони з метою досягнення середніх виграшів:

$$\boldsymbol{\gamma_A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p_i\, q_j},$$

$$\boldsymbol{\gamma_B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} p_i\, q_j}.$$

Відповідно чисті стратегії виявляються окремим випадком і окремо не розглядаються. Якщо серед наведених стратегій $\boldsymbol{S_A}$ та $\boldsymbol{S_B}$ є стратегії $\boldsymbol{S_A^*} = \boldsymbol{\{p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*\}}$ та $\boldsymbol{S_B^*} = \boldsymbol{\{q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*\}}$, що задовольняють вимоги

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p_i\, q_j^* \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, p_i^*\, q_j^*},$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\, p_i^* q_j \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\, p_i^* q_j^*}, \qquad (5.1)$$

то стратегії $\boldsymbol{S_A^*}$ і $\boldsymbol{S_B^*}$ є рівноважними [3].

У теорії стверджується, що кожна біматрична гра має хоча б одну ситуацію рівноваги, яка визначається нерівностями (5.1). Однак це твердження не можна застосувати безпосередньо для пошуку змішаних стратегій $\boldsymbol{S_A^*}$ і $\boldsymbol{S_B^*}$.

У тих же випадках, коли вдається знайти змішані стратегії $\boldsymbol{S_A^*}$ і $\boldsymbol{S_B^*}$ (наприклад, шляхом угадування або перебирання всіх варіантів), отриманий результат може виявитися неоптимальним і навіть містити невизначеність [10]. Щоб переконатися в цьому, достатньо розглянути простий приклад. Задано матрицю (табл. 5.4), що визначає конкретну гру, у якій чисті стратегії утворюють ситуації рівноваги (перевірка проводиться шляхом підстановки цих даних у формули (5.1)).

Таблиця 5.4

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***	
	B₁	***B₂***
A₁	(5, 2)	(0, 0)
A₂	(0, 0)	(2, 5)

Чисті стратегії $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{B_1}$, а також $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{B_2}$ утворюють ситуації рівноваги (див. вираз (5.1)). Застосування першої пари стратегій дає виграші $\hat{\boldsymbol{\nu}}_A$ = 5; $\hat{\boldsymbol{\nu}}_B$ = 2, а другої пари – виграші $\hat{\boldsymbol{\nu}}_A$ = 2; $\hat{\boldsymbol{\nu}}_B$ = 5. Очевидно, що перша ситуація є кращою для сторони ***A***, а друга – для сторони ***B***, і залишається незрозумілим, який розв'язок мають отримати учасники гри.

Якщо гравець ***B*** звертається до стратегії $\boldsymbol{B_2}$, то гравець ***A*** може або дотримуватися стратегії $\boldsymbol{A_2}$ і отримати виграш $\hat{\boldsymbol{\nu}}_A$ = 2, або звернутися до стратегії $\boldsymbol{A_1}$, змушуючи гравця ***B*** перейти до стратегії $\boldsymbol{B_1}$ пара($\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{B_1}$) дає $\hat{\boldsymbol{\nu}}_A$ = $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_B$ = 0, і стороні ***B*** вигідніше замінити $\boldsymbol{B_2}$ на $\boldsymbol{B_1}$ з метою отримання виграшу $\hat{\boldsymbol{\nu}}_B$ = 2, але це відразу збільшить $\hat{\boldsymbol{\nu}}_A$ до п'яти.

У разі успіху розглянутий «маневр» гравця ***A*** утворить ситуацію ($\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{B_1}$), яка буде сприятливою для аналогічного «маневру» сторони ***B***, і т. д. Унаслідок цього важко зрозуміти який результат можуть отримати гравці ***A*** і ***B*** і як вони повинні діяти.

Цей висновок не залежить від того, якими стратегіями (чистими або змішаними) створено ситуації рівноваги. Може здатися, що невдала спроба знайти розв'язок гри (див. табл. 5.4) пояснюється неоднозначністю вибору змішаних стратегій $\boldsymbol{S_A^*}$ і $\boldsymbol{S_B^*}$. У цьому сенсі цікавим є ще один приклад.

Приклад 5.1 [15]. Для біматричної гри (табл. 5.5), у якій гравці ***A*** і ***B*** мають домінантні стратегії $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{B_1}$, рівновага має місце при $\boldsymbol{S_A^*}$ = $\{0, 1\}$ і $\boldsymbol{S_B^*}$ = $\{0, 1\}$. Гарантований результат для кожної зі сторін дорівнює одиниці. Водночас перехід кожної сторони до неправильних стратегій (згідно з виразом (5.1)) $\boldsymbol{S_A}$ = $\boldsymbol{\{}1, 0\boldsymbol{\}}$ і $\boldsymbol{S_B}$ = $\{1, 0\}$ дає виграш по шість одиниць.

Здавалося б, такий результат вигідно зберігати, однак відповідні домовленості заборонено правилами гри, і в цих умовах кожній стороні доводиться побоюватися «маневрів» противника, виражених у несподіваних змінах поведінки з метою досягнення ще більшої переваги.

Подібна «зрада» спільних інтересів могла б дати ініціатору виграш дев'ять одиниць, після чого потерпіла сторона застосувала би відповідні заходи (її виграш зменшився до нуля) і пошук прийнятних рішень став би проблематичним.

Таблиця 5.5

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***	
	B₁	***B₂***
A₁	(6, 6)	(0, 9)
A₂	(9, 0)	(1, 1)

Таким чином, основні висновки, яких можна дійти, полягають у такому:

– існування ситуацій рівноваги в безкоаліційних іграх не визначає, взагалі кажучи, їх розв'язків, і однозначних рекомендацій для учасників конфлікту поки немає;

– у багатьох випадках є корисними (і навіть необхідними) контакти й угоди між учасниками ігор, тому моделі, що допускають можливість кооперування, є кращими;

– при прикладному поставленні завдань не виключається використання теорії безкоаліційних ігор, і питання щодо доцільності пошуку ситуацій рівноваги, їх подальшого аналізу й урахування в рішеннях має досліджуватися в кожному випадку спеціально.

Приклад 5.2 [4]. Промислові підприємства ***A*** і ***B***, які знаходяться біля водосховища, беруть з нього воду для промислових потреб. Після використання води в технологічних процесах викидають її назад у водосховище. Якщо сумарний об'єм забрудненої води не перевищує деякої межі, то здійснюється її природе очищення та зберігається загальний водний ресурс. У протилежному випадку водосховище забруднюється більш інтенсивно.

Постає проблема відновлення води й виплати штрафів. Для недопущення забруднення водоймища доцільно будувати очисні споруди, розраховані на певний об'єм очищуваної води. Вартість одного очищувального блока є відомою, тому необхідно виробити розумну політику щодо збереження стану водоймища. Суть конфлікту між підприємствами зводиться до забезпечення самим собі сприятливих умов діяльності шляхом вільної витрати природної води, відмови від її повного очищення і т. д. Однак це негативно впливає на стан водосховища та функціонування виробництва і якість продукції обох підприємств. Виникає зацікавленість підприємств щодо пошуку рішень, які є прийнятними для сторін конфлікту, хоча між ними може й не бути домовленості.

Розв'язання. Розглянемо ситуацію у вигляді безкоаліційної гри двох граців та отримаємо на її основі необхідні результати. Візьмемо кількість води, яку споживає кожне підприємство, за одиницю. Будемо вважати, що кожний очищувальний блок відновлює 25 % використаної води.

Кількість очищуваваної води на підприємстві ***A*** становить (1 – x_A) на підприємстві ***B*** – (1 – x_B) (0 ≤ x_A ≤ 1, 0 ≤ x_B ≤ 1). Тоді можливими стратегіями гравця ***A*** будуть такі:

A₁ **–** очищення всієї використаної води, тобто $x_A = 0$;

A₂ **–** очищення 75 % об'єму використаної води, тобто $x_A = 1/4$;

A₃ **–** очищення 50 % об'єму використаної води, тобто $x_A = 1/2$;

A₄ **–** очищення 25 % об'єму використаної води, тобто $x_A = 3/4$;

A₅ **–** вода не очищується, тобто $x_A = 1$.

Можливі стратегії граця ***B***:

B₁ **–** очищення всієї використаної води, тобто $x_B = 0$;

B₂ **–** очищення 75 % об'єму використаної води, тобто $x_B = 1/4$;

B₃ **–** очищення 50 % об'єму використаної води, тобто $x_B = 1/2$;

B₄ **–** очищення 25 % об'єму використаної води, тобто $x_B = 3/4$;

B₅ **–** вода не очищується, тобто $x_B = 1$.

Витрати на придбання, монтаж та експлуатацію очищувального блока становить $\varkappa$, а витрати кожного підприємства на очищення водоймища у випадку його забруднення (включаючи штрафи) – ς грошових одиниць. Гранично допустимий викид брудної води встановлено на рівні δ = 1/3. Таким чином, утрати підприємств ***A*** і ***B*** відповідно

$$4\varkappa(1 - x_A), \;\; x_A + x_B \le \boldsymbol{\delta};$$

$$\mathbf{4}\boldsymbol{\varkappa}(1 - x_A) + \boldsymbol{\varsigma}, \;\; x_A + x_B > \delta;$$

$$4\varkappa(1 - x_B), \;\; x_A + x_{\mathrm{B}} \le \boldsymbol{\delta};$$

$$\mathbf{4}\boldsymbol{\varkappa}(1 - x_{\mathrm{B}}) + \boldsymbol{\varsigma}, \;\; x_A + x_{\mathrm{B}} > \delta.$$

Ці формули дають змогу визначити для заданих x_A та x_B розміри платежів (програшів), з яких можна скласти ігрову матрицю, наведену в табл. 5.6. Ця матриця характеризує стан конфлікту. Результати аналізу програшів залежать від співвідношень між $\varkappa$ та ς.

Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. Витрати на відновлення водосховища та виплату штрафів є незначними відносно вартості одного очисного блоку ($\varsigma \ll \varkappa$).

Випадок 2. Витрати на відновлення водосховища та виплату штрафів є більшими від вартості блоків для очищення води ($\varsigma \gg 4\varkappa$).

Таблиця 5.6

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***				
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	$(4\varkappa,\ 4\varkappa)$	$(3\varkappa,\ 4\varkappa)$	$(4\varkappa+\varsigma\,,$ $2\varkappa+\varsigma)$	$(4\varkappa+\varsigma,$ $\varkappa+\varsigma)$	$4\varkappa+\varsigma,$ $\varsigma)$
$\boldsymbol{A_2}$	$(3\varkappa,\ 4\varkappa)$	$(3\varkappa+\varsigma,$ $(3\varkappa+\varsigma)$	$(3\varkappa+\varsigma\,,$ $2\varkappa+\varsigma)$	$(3\varkappa+\varsigma,$ $\varkappa+\varsigma)$	$(3\varkappa+\varsigma,$ $\varsigma)$
$\boldsymbol{A_3}$	$(2\varkappa+\varsigma,$ $(4\varkappa+\varsigma)$	$(2\varkappa+\varsigma,$ $(3\varkappa+\varsigma)$	$(2\varkappa+\varsigma\,,$ $2\varkappa+\varsigma)$	$(2\varkappa+\varsigma,$ $\varkappa+\varsigma)$	$(2\varkappa+\varsigma,$ $\varsigma)$
$\boldsymbol{A_4}$	$(\varkappa+\varsigma,$ $(4\varkappa+\varsigma)$	$(\varkappa+\varsigma,$ $(3\varkappa+\varsigma)$	$(\varkappa+\varsigma,$ $(2\varkappa+\varsigma)$	$(\varkappa+\varsigma,$ $(\varkappa+\varsigma)$	$(\varkappa+\varsigma,$ (ς)
$\boldsymbol{A_5}$	$(\varsigma, 4\varkappa+\varsigma)$	$(\varsigma, 3\varkappa+\varsigma)$	$(\varsigma, 2\varkappa+\varsigma)$	$(\varsigma,\ \ \varkappa+\varsigma)$	(ς, ς)

Випадок 3. Витрати на відновлення водосховища та виплату штрафів є рівнозначними вартості блоків для очищення води, хоча дещо її перевищують, наприклад, $\boldsymbol{\varsigma \approx 5\,\varkappa}$).

Для випадку 1 ігрова матриця перетворюється на табл. 5.7.

Таблиця 5.7

Стратегії гравця А	Стратегії гравця ***B***				
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	$(4\varkappa, 4\varkappa)$	$(3\varkappa, 4\varkappa)$	$(4\varkappa, 2\varkappa)$	$(4\varkappa, \varkappa)$	$(4\varkappa, 0)$
$\boldsymbol{A_2}$	$(3\varkappa, 4\varkappa)$	$(3\varkappa, 3\varkappa)$	$(3\varkappa, 2\varkappa)$	$(3\varkappa, \varkappa)$	$(3\varkappa, 0)$
$\boldsymbol{A_3}$	$(2\varkappa, 4\varkappa)$	$(2\varkappa, 3\varkappa)$	$(2\varkappa\ , 2\varkappa)$	$(2\varkappa, \varkappa)$	$(2\varkappa, 0)$
$\boldsymbol{A_4}$	$(\varkappa, 4\varkappa)$	$(\varkappa, 3\varkappa)$	$(\varkappa, 2\varkappa)$	$(\varkappa, \varkappa)$	$(\varkappa, 0)$
$\boldsymbol{A_5}$	$(\mathbf{0}, 4\varkappa)$	$(\mathbf{0}, 3\varkappa)$	$(\mathbf{0}, 2\varkappa)$	$(\mathbf{0}, \varkappa)$	$(0, 0)$

Домінантною для гравця ***B*** буде стратегія $\boldsymbol{B_5}$ (йдеться про програші сторони ***B***, які необхідно зменшувати).

Аналогічно домінантною для гравця ***A*** буде стратегія $\boldsymbol{A_5}$ (йдеться про програші сторони ***A***, які необхідно зменшувати). Таким чином, єдиною ситуацією рівноваги є $\boldsymbol{S_A^*}$ = (0, 0, 0, 0, 1) ≡ $\boldsymbol{A_5}$ та $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B}}^*$ = (0, 0, 0, 0, 1) ≡ $\boldsymbol{B_5}$. Ця ситуація є ситуацією рівноваги. Нехтувати нею недоцільно через небезпечність свого програшу.

Отже, розв'язком гри буде пара стратегій $\boldsymbol{A_5}$, $\boldsymbol{B_5}$.

Для випадку 2 ігрова матриця (табл. 5.6) перетворюється на матрицю, задану табл. 5.8.

Таблиця 5.8

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***				
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	$(0,0)$	$(0,0)$	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)
A_2	$(0,0)$	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)
A_3	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)
A_4	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)
A_5	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)

У цій матриці має місце домінування першого стовпця й першого рядка. Розв'язком гри є пара стратегій **A_1**, **B_1**. Дії сторін зводяться до встановлення недорогих очисних блоків.

Для випадку 3 ігрова матриця (табл. 5.6) перетворюється на табл. 5.9.

Таблиця 5.9

Стратегії гравця А	Стратегії гравця ***B***				
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	$(0,0)$	$(0,0)$	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)
A_2	$(0,0)$	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)
A_3	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)
A_4	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)
A_5	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)	(ς,ς)

У цій матриці має місце домінування першого стовпця й першого рядка. Розв'язком гри є пара стратегій **A_1**, **B_1**. Дії сторін зводяться до встановлення недорогих очисних блоків.

Для випадку 3 нескладний перерахунок даних табл. 5.6 дає змогу виявити домінантні та напевно невигідні стратегії. Такими стратегіями є **A_3**, **A_4**, **B_3**, **B_4**. З урахуванням цього гра є більш простою, її можна задати табл. 5.10.

Таблиця 5.10

Стратегії гравця А	Стратегії гравця ***B***		
	B_1	**B_2**	**B_5**
A_1	$(4\varkappa,4\varkappa)$	$(4\varkappa,3\varkappa)$	$(9\varkappa,5\varkappa)$
A_2	$(3\varkappa,4\varkappa)$	$(8\varkappa,8\varkappa)$	$(8\varkappa,5\varkappa)$
A_5	$(5\varkappa,9\varkappa)$	$(5\varkappa,8\varkappa)$	$(5\varkappa\ ,5\varkappa)$

Задачу (пошук стану рівноваги) будемо розв'язувати з допомогою формул (5.1). Під час розв’язання будемо мати на увазі таке:

– знаки нерівності у формулах (5.1) змінюються на протилежні, тому що йдеться про програші сторін;

– спочатку доцільно провети аналіз використання чистих стратегій як більш пристосованих до змісту задачі (змішані стратегії мали б цінність при багаторазовому повторенні розглядуваних ситуацій);

– для спрощення досліджень кожний елемент отриманої матриці (див. табл. 5.9) можна зменшити в $\boldsymbol{\varkappa}$ разів (що не змінить зміст кінцевих висновків) (табл. 5.11).

Таблиця 5.11

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***		
	B₁	***B₂***	***B₅***
A₁	(4, 4)	(4, 3)	(9, 5)
A₂	(3, 4)	(8, 8)	(8, 5)
A₅	(5, 9)	(5, 8)	(5 , 5)

З аналізу табл. 5.11 випливає, що підтримувати рівновагу могли би пари стратегій (***A₁***, ***B₁***), (***A₁***, ***B₂***), (***A₂***, ***B₁***), (***A₅***, ***B₅***). Перевіримо ці твердження, скориставшись формулами (5.1). Для пари стратегій ***A₁***, ***B₁*** мають місце значення ймовірностей їх застосування $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{1}}^{*}$ = 1, $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{1}}^{*}$ = 1 (значення ймовірностей застосування інших стратегій – $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{2}}^{*}$ = $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{5}}^{*}$ = 0, $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{2}}^{*}$ = $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{5}}^{*}$ = 0), і нерівності (5.1) набудуть такого вигляду:

$$4 \leq 4\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{1}} + 3\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{2}} + 5\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{5}};$$

$$4 \leq 4\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{1}} + 3\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{2}} + 5\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{5}}.$$

Умови виконання нерівностей не виконуються при значеннях імовірностей $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{1}} = 0$; $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{5}} = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{5}} = 1$, тобто стратегії ***A₁*** і ***B₁*** слід відкинути.

Парі тратегій (***A₁***, ***B₂***) відповідають значення ймовірностей їх застосування $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{1}}^{*}$ = 1, $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{2}}^{*}$ = 1 (значення ймовірностей застосування інших стратегій $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{2}}^{*}$ = $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{5}}^{*}$ = 0, $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{1}}^{*}$ = $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{5}}^{*}$ = 0), і нерівності (5.1) набувають такого вигляду:

$$4 \leq 4\boldsymbol{p_1} + 8\boldsymbol{p_2} + 5\boldsymbol{p_5};$$

$$4 \leq 4\boldsymbol{q_1} + 3\boldsymbol{q_2} + 5\boldsymbol{q_5}.$$

Ці нерівності зберігаються при будь-яких сприятливих відношеннях між $\boldsymbol{p_i}$ і $\boldsymbol{q_j}$, тобто застосування стратегій ***A₁*** і ***B₂*** утворюють ситуацію рівноваги.

Для пари стратегій (***A₂***, ***B₁***) мають місце значення ймовірностей їх застосування $\boldsymbol{p_2^*}$ = 1, $\boldsymbol{q_1^*}$ = 1, і нерівності (5.1) набудуть такого вигляду:

$$3 \leq 4\boldsymbol{p_1} + 3\boldsymbol{p_2} + 5\boldsymbol{p_5};$$

$$4 \leq 4\boldsymbol{q_1} + 8\boldsymbol{q_2} + 5\boldsymbol{q_5}.$$

Таким чином, пара стратегій (***A₂***, ***B₁***) є стійкою.

Парі стратегій (***A₅***, ***B₅***) відповідають значення ймовірностей їх застосування $\boldsymbol{p_5^*}$ = 1**,** $\boldsymbol{q_5^*}$ = 1, і нерівності (5.1) набудуть такого вигляду:

$$5 \leq 9\boldsymbol{p_1} + 3\boldsymbol{p_2} + 5\boldsymbol{p_5};$$

$$5 \leq 9\boldsymbol{q_1} + 8\boldsymbol{q_2} + 5\boldsymbol{q_5}.$$

Таким чином, пара стратегій (***A₅***, ***B₅***) є стійкою. Однак цей результат є найменш цікавим, оскільки втрати сторін становлять по $5\boldsymbol{\varkappa}$ одиниць.

З аналізу отриманих результатів випливає, що стороні ***B*** більш вигідним є варіант (***A₁***, ***B₂***), а стороні ***A*** – варіант (***A₂***, ***B₁***). Тому необхідна певна домовленість між гравцями, але в безкоаліційній грі домовленість є неможливою.

Дієвим засобом розв’язання гри є зменшення значення $\boldsymbol{\delta}$ (гранично допустимого викиду). Якщо, наприклад, узяти $\boldsymbol{\delta}$ = 0,2, то табл. 5.10 при значеннях $\boldsymbol{\varsigma = 5\,\varkappa}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ = **1** перетвориться на табл. 5.12.

Таблиця 5.12

Стратегії гравця ***A***	Стратегії гравця ***B***		
	***B*₁**	***B*₂**	***B*₅**
***A*₁**	(4, 4)	(9, 8)	(9, 5)
***A*₂**	(8, 9)	(8, 8)	(8, 5)
***A*₅**	(5, 9)	(5, 8)	(5 , 5)

Для нових умов стійким розв'язком, який випливає з аналізу табл. 5.11, є пара стратегій ($\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{B_1}$).

Доцільною також є така універсальна рекомендація. Якщо встановити $\boldsymbol{x_A} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{\delta}/2$, то витрати учасників гри будуть дорівнювати 4 $\boldsymbol{\varkappa}$**(**1 **–** $\boldsymbol{\delta}$/2**)**. Можливість відповідного вибору значень $\boldsymbol{x_A}$, $\boldsymbol{x_B}$, $\boldsymbol{\delta}$ дає змогу більш ефективно знаходити прийнятні розв'язки гри.

Зроблені зауваження цілком стосуються й конфлікту з ***N*** учасниками, які мають однакові інтереси у грі, але діють поза коаліцією (***N*** > 2). Таким чином, теорія безкоаліційних ігор ефективно застосовується в дослідженні операцій і допомагає вивчати важливі проблеми організації виробництва, використання природних ресурсів, удосконалення складних систем. Водночас згідно з нею необхідним є кооперування учасників того чи іншого конфлікту й отримання кожним з них унаслідок цього певних вигод.

5.3. Проблеми та форми кооперування

Перехід сторін конфлікту до різних форм співпраці (кооперування) створює якісно нові ситуації порівняно з тим, що було розглянуто в підрозд. 5.2. Можна назвати три рівні взаємодії, що допускаються в іграх з ***N*** учасниками:

– обмін інформацією про хід гри;

– спільний вибір стратегій на основі загальної домовленості й взаємної інформованості;

– об'єднання активних засобів (ресурсів) з відповідною сумісною координацією дій.

На кожному ступені кооперування передбачається передання якихось відомостей одними учасниками гри іншим. Найбільш простим з точки зору дослідника виявляється випадок добровільного надання точної інформації, що можна вважати складовою частиною застосовуваних стратегій. Про характер відомостей важко домовитися заздалегідь поза зв'язком з конкретним завданням, проте ясно, що вони можуть стосуватися і цільових настанов сторін конфлікту, і їх готовності піти на компроміс, і непередбачуваних обставин, що заважають будь-якій стороні досягти бажаного результату [5].

Розглянуті загальні умови сприятливого розвитку ігор може бути порушено переданням неправильної (спотвореної) інформації їх учасникам, причому найбільший ефект такі дії дають в антагоністичних іграх, де одна зі сторін виявляється жертвою власної довірливості. Наочним прикладом цього є будь-який обман («військова хитрість»), що вводить в оману навіть обережного противника, що має часто власні, достовірні, але неповні дані про обстановку. Важливо зауважити, що необхідною передумовою для обману є точне знання мети противника, тому в реальних конфліктах (насамперед антагоністичних) мету доводиться приховувати, зменшуючи тим самим небезпеку бути ошуканим.

Надалі будемо припускати, що відомості, якими обмінюються учасники конфлікту, мають об'єктивну цінність. Це дасть змогу зосередити увагу на більш високих рівнях кооперації та відповідних підходах до проблеми пошуку розв’язків.

Поширеним видом колективних дій учасників деякої коаліції є вибір ними своїх стратегій з урахуванням поведінки тих, хто не увійшов до неї. При такому способі співпраці передбачається вироблення єдиного критерію (цільової установки) коаліції, одержуваного, зокрема, осередненням критеріїв її учасників, після чого коаліція може розглядатися як самостійна оперувальна сторона.

Важливим фактором, що визначає характер кооперування, є так звані побічні платежі, якими обмінюються сторони конфлікту в бажанні або утворити якусь коаліцію, або приєднатися до вже наявної коаліції, або протистояти їй.

У цьому сенсі поняття «побічний платіж» можна інтерпретувати як «вступний внесок», «податок на кооперацію», «штраф за вихід з кооперації», «плата за небажання співпрацювати» і т. ін. Очевидно, у всіх подібних випадках йдеться про зміни в той чи інший бік виграшів, указаних в початкових умовах гри (ігрових матрицях), тому побічні платежі стають частиною застосовуваних стратегій і впливають на результат конфлікту.

Як приклад розглянемо таку ситуацію. Сторони конфлікту ***A***, ***B***, ***C*** мають вирішити проблему кооперування, оскільки співробітництво будь-яких двох з них неминуче спричиняє додатковий програш третьої сторони в розмірі 20 одиниць з відрахуванням їх на користь створеної коаліції (побічний платіж). Отриманий таким чином дохід ділиться порівну між учасниками гри, що об'єдналися, і її можливими результатами стають:

1) виграші сторін ***A***, ***B*** по 10 одиниць, програш ***C*** – 20 одиниць (коаліція ***A*** і ***B***);

2) виграші сторін ***A***, ***C*** по 10 одиниць, програш – 20 одиниць (коаліції ***A*** і ***C***);

3) виграші сторін ***B***, ***C*** по 10 одиниць, програш ***A*** – 20 одиниць (коаліція ***B*** і ***C***);

4) дорівнюють нулю виграші й програші, якщо коаліцій не утворено.

Кожен варіант кооперування навряд чи буде стійким, тому що завжди є небезпека відмови ***A***, ***B*** або ***C*** від досягнутих домовленостей і утворення нових коаліцій. Те ж саме можна сказати про варіант 4, який у цьому сенсі нічим не відрізняється від варіантів 1–3.

Деяку ясність у розглянуту ситуацію вносить передбачуваність неоднакових пропорцій у розподілі побічного платежу. Нехай ***B*** у разі об'єднання з ***C*** отримає 15 одиниць виграшу, а ***C*** – тільки 5 одиниць. Може здатися, що позиції ***B*** покращилися порівняно з початковими умовами кооперування, обіцяний прибуток дорівнює 10, проте це не так. Коаліція ***B*** і ***C*** майже виключається, оскільки ***A*** і ***C*** бажають повернутися до варіанта 2, що дасть їм по 10 одиниць виграшу за рахунок ***B***. Отже, сторона ***B*** потрапляє в більш важке, ніж раніше, становище, і причиною цього є стимул ***A*** і ***C*** до кооперування.

Ідею побічних платежів можна виразити також у домовленостях щодо об'єднання ресурсів учасниками коаліції, створенні недоторканних запасів, відрахування коштів на придбання дорогого устаткування і т. д.

Розвиток цієї ідеї в різних ігрових моделях дає змогу знаходити прийнятні рішення, що достатньою мірою відповідають інтересам сторін конфлікту. Щоб перейти від загального обговорення проблем кооперування до аналізу конкретних питань теорії кооперативних ігор, необхідно ввести кілька нових понять, яких не було раніше.

Якщо в деякому конфлікті беруть участь ***N*** сторін (або ***N*** осіб), то їх сукупність, що позначається {***N***}, є множиною всіх учасників гри. Будь-яка непорожня підмножина $\{\overline{\boldsymbol{n}}\}$ множини {***N***} буде являти собою коаліцію, утворену $\overline{\boldsymbol{n}}$ учасниками. Очевидно, загальна кількість способів складання коаліцій становить $\sum_{\overline{\boldsymbol{n}}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{N}}^{\overline{\boldsymbol{n}}} \approx \mathbf{2}^{\boldsymbol{N}}$.

Якщо результат, одержуваний коаліцією $\{\overline{\boldsymbol{n}}\}$ у цій грі, має кількісне вираження, то виникає проблема вибору найкращої в якомусь сенсі стратегії $\boldsymbol{S}_{\{\overline{\boldsymbol{n}}\}}^{*}$. Зазвичай до $\boldsymbol{S}_{\{\overline{\boldsymbol{n}}\}}^{*}$ ставиться вже відома вимога щодо забезпечення максимального гарантованого середнього виграшу, що зберігає незмінне значення при будь-яких допустимих діях інших учасників гри, які залишилися за межами $\{\overline{n}\}$.

Така постановка питання дає змогу розглядати ***v*** як функцію, задану на множині всіх коаліцій $\{\overline{n}\}$, які можуть виникнути (хоча б теоретично) в кооперативній грі ***N*** осіб, тобто $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\{\overline{n}\})$. Функцію $\boldsymbol{v}(\{\overline{n}\})$ називають *характеристичною функцією* гри.

Слід зауважити, що суть кооперативних ігор полягає насамперед у пошуку стійких коаліцій, які забезпечують своїм учасникам найбільші додаткові виграші порівняно з тими, які було б отримано в індивідуальних діях. У цьому полягає принципова відмінність кооперативних ігор від безкоаліційних, пов'язаних тільки з проблемою пошуку оптимальних (бажаних) стратегій.

Важливим наслідком цих відмінностей є можливість (і навіть доцільність) відмови від матричної форми задання кооперативних ігор та заміни її так званою позиційною формою, коли передбачається знання $\{\boldsymbol{N}\}$ і $\boldsymbol{v}(\{\boldsymbol{N}\})$. Це справджується, оскільки з допомогою характеристичної функції оцінюють коаліції з огляду на їх граничні (найкращі) показники, уже отримані під час реалізації стратегій $\boldsymbol{S}^{*}_{\{\overline{n}\}}$. Властивості характеристичних функцій мають відображати загальну закономірність того чи іншого конфлікту, а не його його особливості.

Природно вважати, що $\boldsymbol{v}(0) = 0$ (якщо немає коаліції ($\{\overline{n}\} = 0$), то немає й результату). Далі для будь-яких двох неперетинних підмножин $\{\overline{n}\}_1$, $\{\overline{n}\}_2$, включених до $\{\boldsymbol{N}\}$, виконується умова

$$\boldsymbol{v}(\{\overline{n}\}_1) + \boldsymbol{v}(\{\overline{n}\}_2) \le \boldsymbol{v}((\{\overline{n}\}_1 \cup \{\overline{n}\}_2),$$

тобто об'єднання $\{\overline{n}\}_1$ і $\{\overline{n}\}_2$ у нову коаліцію може тільки збільшити їх виграші (властивість супераддитивності).

У цих припущеннях відображено ідею корисності кооперування, і в подальшому має сенс її дотримуватися, конкретизуючи тим самим проблеми, що вивчаються. Умова супераддитивності легко узагальнюється (за індукцією) на випадок довільних коаліцій $\{\overline{n}\}_1, \ldots, \{\overline{n}\}_M$, об'єднанням яких є $\{\boldsymbol{N}\}$, тобто $\sum_{\mu=1}^{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\gamma}(\overline{\{n\}}_{\mu}) \le \boldsymbol{\gamma}(\{\boldsymbol{N}\})$, $\bigcap_{\mu=1}^{\boldsymbol{M}} \overline{\{n\}}_{\mu} = \varnothing$.

Гру, у який припускається можливість отримання однакових рішень $\sum_{\mu=1}^{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\nu}(\{\overline{n}\}_{\mu})$ і $\boldsymbol{v}(\{\boldsymbol{N}\})$, називають несуттєвою. Якщо має місце строга нерівність, то відповідну гру називають суттєвою.

Після того як ту чи іншу кооперативну гру буде проведено, постане питання про поділ загального виграшу $\boldsymbol{v}(\{\boldsymbol{N}\})$ між усіма її учасниками. Очевидно, умова може бути довільною, але розподіл повинен задовольнити кожну сторону, яка намагається отримати виграш не менший від того, який було б отримано в індивідуальних діях.

Нехай указаний поділ дав учасникам виграші ν_1, ..., ν_i, ..., ν_N. Якби ***i***-й учасник діяв самостійно, то його результат оцінювався б величиною $v(\{1\}_i)$, оскільки в цьому випадку йшлося би про «коаліцію» $\{1\}_i \in \{N\}$. Отже, вступати в коаліцію доцільно тоді, коли виконано умову індивідуальної раціональності, а саме $\nu_i \geq v(\{1\}_i)$.

Вектор $Д = (\nu_1, ..., \nu_i, ..., \nu_N)$, який задовольняє вимоги $\sum_{i=1}^{N} \nu_i =$ $= v(\{N\}),\ \nu_i \geq v(\{1\}_i),\ i = \overline{1,N}$, називають поділом у грі N осіб з характеристичною функцією $v\{\overline{n}\}$.

Таким чином, результатом кооперативної гри є поділ як результат угод між сторонами конфлікту. Головне питання полягає в тому, який із поділів буде вважатися розв'язком. Однозначну відповідь можна дати тільки для випадку несуттєвої гри, у якій $\sum_{\mu=1}^{M} \nu(\{\overline{n}\}_{\mu}) = v(\{N\})$ (за означенням), і, отже, єдиним поділом є $Д = [\nu(\{1\}_1), \dots, \nu(\{1\}_N)]$.

У будь-якій суттєвій грі з кількістю учасників $N \geq 2$ кількість поділів є нескінченною, і проблема пошуку рішень ускладнюється. Проте існують можливості розроблення деяких принципів зіставлення отриманих результатів і вибору серед них найкращих.

5.4. Поділи в кооперативних іграх

Важливе значення у формуванні розв’язків кооперативних ігор належить ідеї домінування поділів. Ґрунтуючись на цій ідеї, дослідник може порівнювати одні поділи з іншими і давати відповідні рекомендації оперувальній стороні, до якої він належить.

Нехай $Д_1 = [\nu(\{1\}_1), \dots, \nu(\{1\}_{N_1})]$, $Д_2 = [\nu(\{1\}_2), \dots, \nu(\{1\}_{N_2})]$ – два поділи та $\{\overline{n}\}$ – можлива коаліція в деякій грі з учасниками $\{1\}_i$. Кажуть, що $Д_1$ домінує над $Д_2$ в коаліції $\{\overline{n}\}$ (позначається $Д_1 \to Д_2$), якщо $\nu_{i_1} > \nu_{i_2}$ для кожного $\{1\}_i \in \{\overline{n}\}$ при $\sum_{\{1\}i \in \{\overline{n}\}} \nu_{i_1} \leq v(\{\overline{n}\})$. Ця умова означає здатність коаліції $\{\overline{n}\}$ запропонувати її учасникам $\{1\}_i$ виграші ν_{i_1}, які оцінюються як $\nu_{i_1} \geq v(\{1\}_i)$. Отже, виключено домінування в коаліціях $\{\overline{n}\} \equiv \{1\}_i$, $i = \overline{1,N}$, а також $\{\overline{n}\} \equiv \{N\}$. Це необхідно мати на увазі, розглядаючи таке означення: $Д_1$ домінує над $Д_2$ (позначається $Д_1 \to Д_2$), якщо існує така довільна коаліція $\overline{\{n\}} \in \{N\}$, для якої $Д_1 \to Д_2$.

Розглядаючи відношення «→» на множині поділів у тій чи іншій грі, можна сподіватися знайти також $Д = \widehat{Д}$, які будуть домінувати над усіма іншими поділами. Природно припустити, що учасники гри виявлять інтерес до $\widehat{\text{Д}}$ і визначать тим самим один із варіантів її задовільного розв'язання. З огляду на це будемо називати множину ***С*** недомінантних поділів ***Д*** ядром гри, або ***С***-розв'язком. Таким чином, основу компромісу між сторонами конфлікту становить пошук таких ядер.

Теорема 5.1 [15]. Ядро гри є множиною таких поділів $\widehat{\text{Д}}$, складові яких $\hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{i}}$ $(\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{N}})$ задовольняють умови

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{v}(\{\boldsymbol{N}\});$$

$$\sum_{\{1\}i\,\epsilon\,\{\overline{n}\}} \hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{i}} \geq \boldsymbol{v}(\{\overline{\boldsymbol{n}}\})$$

для всіх $\{\overline{\boldsymbol{n}}\} \in \{\boldsymbol{N}\}$.

Обмежимося доведенням достатності твердження теореми. Нехай деякий поділ $\widehat{\text{Д}}$ = ($\hat{\boldsymbol{\nu}}_{\mathbf{1}}$, ..., $\hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{N}}$) відповідає розглядуваним умовам, а якийсь інший поділ ***Д***$(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_N})$ виявляється таким, що $\hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{i}} < \boldsymbol{v_i}$ при $\{\boldsymbol{1}\}_i \in \{\overline{\boldsymbol{n}}\}$. Це означає, що $\sum_{\{1\}\,i\,\epsilon\,\{\overline{n}\}} \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{i_1}} > \boldsymbol{v}(\{\overline{\boldsymbol{n}}\})$ і, отже, ***Д*** не може домінувати над $\widehat{\text{Д}}$ по коаліціях $\{\overline{\boldsymbol{n}}\}$, навіть якщо $\hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{i}} < \boldsymbol{v_i}$ (домінування виникло би при $\sum_{\{1\}i\,\epsilon\,\{\overline{n}\}} \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{i_1}} \leq \boldsymbol{v}(\{\overline{\boldsymbol{n}}\}$. Таким чином, $\widehat{\text{Д}} \in$ ***С***.

Недоліком рішень, пов'язаних з поділами $\widehat{\text{Д}}$, є невизначеність ситуацій, що виникають при ***С*** = 0 (поділів $\widehat{\text{Д}}$ немає), тому необхідні інші критерії прийнятності отримуваних рішень $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, …, $\boldsymbol{v_l}$. Насамперед слід звернутися до так званих розв’язків за Нейманом-Моргенштерном (або ***НМ***-розв'язків). У них використовується та ж ідея домінування поділів, але на рівні множин. Передбачається існування деякої множини $\{\widehat{\text{Д}}\}$, елементи якої є «рівноцінними» поділами (домінування між ними виключено), але разом з тим будь-який поділ ***Д*** $\in \{\overline{\text{Д}}\}$ домінує хоча б над одним $\widetilde{\text{Д}} \in \{\widetilde{\text{Д}}\}$. Поняття НМ-розв'язку деякою мірою узагальнює поняття ***С***-розв'язку. Так, якщо для деякої гри ***С*** = 0 і НМ-розв'язок існує, то ***С*** міститься в ньому.

Основні труднощі аналізу множин ***С*** і $\{\widetilde{\text{Д}}\}$ полягають у тому, що в загальному випадку не вдається виявити їх властивості. Наприклад, є ігри, що мають або один, або як завгодно багато НМ-розв'язків, або не мають їх зовсім.

Отже, проблема пошуку якихось інших підходів до дослідження кооперативних ігор залишається актуальною. Зокрема, виявляється корисним принцип «справедливого поділу», пов'язаний зі спробами розв'язати той чи інший конфлікт шляхом арбітражу, тобто передання права приймати остаточні рішення якомусь сторонньому «арбітру».

Нехай унаслідок будь-якої домовленості або на основі укладеної угоди для гри з характеристичною функцією $\boldsymbol{v(\{N\})}$ визначено $\boldsymbol{\nu_1^0}$, $\boldsymbol{\nu_1^0}$, $\boldsymbol{\nu_N^0}$, причому зроблено це з такими припущеннями:

1) величини $\boldsymbol{\nu_1^0}, \boldsymbol{\nu_1^0}, \ldots,$ $\boldsymbol{\nu_N^0}$ зберігаються незмінними при будь-якому переставленні учасників гри, тобто один учасник може зайняти місце іншого у відповідній коаліції, не зашкодивши іншим;

2) сума виграшів $\boldsymbol{\nu_1^0}, \boldsymbol{\nu_1^0}, \ldots,$ $\boldsymbol{\nu_N^0}$ дорівнює значенню характеристичної функції при $\boldsymbol{\overline{n}} = \boldsymbol{N}$, тобто $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\nu_i^0} = \boldsymbol{v(\{N\})}$;

3) учасник $\boldsymbol{\{1\}_i}$, $1 \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{N}$, який приєднується до будь-якої коаліції $\{\boldsymbol{\overline{n}}\} \in \{\boldsymbol{N}\}$, але такий, що не дає їй користі, нічого не виграє, тобто $\boldsymbol{\nu_i^0} = 0$ при $\boldsymbol{v(\{\overline{n}\} \cap \{1\}_i) = v\{\overline{n}\}}$;

4) гра, характеристична функція якої $\boldsymbol{v(\{\overline{n}\})}$ є сумою характеристичних функцій двох інших довільних (самостійних) ігор, має дати будь-якому учаснику $\boldsymbol{\{1\}_i}$ виграш, що дорівнює сумі виграшів, які він отримав би в цих (самостійних) іграх.

Цими правилами (або аксіомами) може керуватися дослідник, який вивчає конфліктні ситуації і бере на себе тим самим роль арбітра. Найбільш істотним є те, що аксіоми 1–4 дають змогу отримати в будь-якій грі єдиний вектор (розподіл) $\boldsymbol{Д_0 = (\nu_1^0, \nu_2^0, \ldots, \nu_N^0)}$, що має назву вектора Шеплі [15]. Його складові обчислюються за загальною формулою в явному вигляді. Якщо гарантований середній виграш $\boldsymbol{v(\{\overline{n}\})}$ деякої коаліції $\boldsymbol{\{\overline{n}\} \in \{N\}}$ збільшується до $\boldsymbol{v(\{\overline{n}\} \cap \{1\}_i)}$ після включення до неї «корисного» учасника $\boldsymbol{\{1\}_i}$, то значення $\boldsymbol{\nu_i^0}$ можна знайти за виразом

$$\nu_i^0 = \sum_{\substack{\{\overline{n}\}) \cup \{1\} \in \{N\}, \\ \{1\}\nu \in \{\overline{n}) \cup \{1\}\nu}} \frac{\overline{n}!(N - \overline{n} - 1)}{N!} [v(\{\overline{n}\}) \cup \{1\}_v) -$$

$$- v(\{\overline{n}\})], \qquad (5.2)$$

$$\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1, N}}.$$

Таким чином, виграш $\boldsymbol{i}$-го учасника гри ($\boldsymbol{i = \overline{1, N}}$) залежить від складу всіх коаліцій, яким він дає користь своєю присутністю, а також від розмірів цієї користі, виражених різницями в квадратних дужках формули (5.3). Зауважимо, що в загальному випадку належність $\boldsymbol{Д_0}$ до ядра $\boldsymbol{C}$ не гарантується.

З допомогою формули (5.3) легко перевірити вихідні припущення (аксіоми 1–4). Наприклад, для «некорисного» учасника будь-яка з різниць $\boldsymbol{[v(\{\overline{n}\}) \cap \{1\}_i) - v(\{\overline{n}\})]}$, дорівнює нулю, тобто $\boldsymbol{\nu_i^0} = 0$. Надалі заміна $\boldsymbol{v(\{\overline{n}\})}$ сумою $\boldsymbol{v_1(\{\overline{n}\}) + v_2(\{\overline{n}\})}$ дає $\boldsymbol{\nu_i^0 = \nu_{1i}^0 + \nu_2^0}$.

Через супераддитивність (див. підрозд. 5.3) $v(\{\overline{n}\}) \cap \{1\}_I) \geq v(\{\overline{n}\})$ + + $v(\{1\}_I)$, тому $\nu_I^0 \geq v(\{1\}_I)$ і можна стверджувати, що $Д_0$ є поділом. Додержуючись прийнятої термінології, будемо називати його $Д_0$-розв'язком.

Розглянуті поняття оптимального (переважного) вибору поділів у кооперативних іграх (**С**-розв'язок, НМ-розв'язок, **Д**-розв'язок) по-різному трактують інтереси сторін конфлікту, але завжди дають розумну основу для угод.

При практичному використанні отриманих рекомендацій необхідно враховувати труднощі визначення поділів і їх реальність (прийнятності вихідних передумов, що вводяться з теоретичних виразів). Це дасть змогу обґрунтовано вибрати модель дослідження і більш точно оцінити отримані з її допомогою результати.

Щоб конкретизувати зауваження, що стосуються кооперативних ігор та шляхів їх аналізу, звернемося до задачі розподілу витрат між учасниками будівництва [15]. Аналогічні задачі виникають у різних сферах діяльності, де є можливість об'єднати зусилля сторін, зацікавлених у досягненні загальних цілей.

5.5. Модель фінансування будівництва

Нехай кілька підприємств збираються будувати склад цінної сировини (наприклад, рідкісних металів), яку вони використовуватимуть для виробничих потреб. Витрати на будівництво є деякою зростальною функцією місткості складу, і перед підприємствами постає питання про можливе об'єднання грошових коштів для фінансування будівельних робіт на договірних засадах.

Нехай дозволено звертатися за сировиною лише в окремі моменти часу $t_1, \ldots, t_k$, які не залежать від майбутніх способів її зберігання і є однаковими для всіх підприємств. У проміжках між зазначеними моментами часу запаси сировини мають поповнюватися, тому чергові заявки на них обов'язково задовольняються.

Якщо кількість підприємств становить N і їх потреби змінюються в часі за законами $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, то розрахунковий обсяг складу, призначеного для обслуговування всіх N споживачів, є таким:

$$\max\{\sum_{i=1}^{N} \xi_i(t_1), \ldots, \sum_{i=1}^{N} \xi_i(t_k)\}.$$

Якщо ж якісь підприємства з номерами $i \in H$, $H \in \{1, 2, \ldots, N\}$, відмовляються від ідеї загального будівництва й об'єднуються з метою створення окремого складу, то його має бути розраховано на обсяг, що дорівнює $\max\{\sum_{i\in H}^{N} \xi_i(t_1), \ldots, \sum_{i\in H}^{N} \xi_i(t_k)\}$.

Ці припущення дають змогу, по-перше, казати про можливі коаліції з $\overline{n}$ учасниками (кількість елементів множини ***Н***) і, по-друге, оцінювати витрати кожної такої коаліції як $F[max_t(\sum_{i\epsilon\mathrm{H}}^{N}\xi_i(t)]$, де ***F*** – функція витрат коаліції ***Н*** на будівництво.

Потрібно знайти кількість складів і коаліцій, які будуть їх будувати, а також розподілити відповідним чином витрати на будівництво.

Цю задачу можна інтерпретувати як кооперативну гру $\overline{n}$ осіб, характеристичну функцію якої задано у вигляді

$$v(\{\overline{n}\}) = max_t[\sum_{\{1\}i\epsilon\{\overline{n}\}}\xi_i(t)].$$

Символом $\{1\}_i$ позначено, як і раніше, ***і***-го учасника гри, тобто підприємство з номером ***і***, а $\sum_{\{1\}i\epsilon\{\overline{n}\}}^{N}\xi_i(t)]$ – сумарні потреби коаліції $\{\overline{n}\}$ у сировині в момент часу t. Оскільки $v(\{\overline{n}\})$ – це витрати на будівництво, поняття виграшу (доходу) потрібно пов'язувати з мінімізацією значення v, тобто з економією коштів шляхом кооперування.

Зауважимо тепер, що сформульовані умови узгоджуються з припущеннями. Дійсно, яким би не був поділ ***Д*** = $(v_1, \ldots, v_N)$, його складові $v_1, \ldots, v_N$ збережуть свої значення і дадуть у сумі величину $F[max_t(\sum_{i=1}^{N}v_i(t)] = v(\{N\})$ незалежно від порядку номерів ***і*** та їх відповідності тим, або іншим підприємствам.

Далі, за прийнятим означенням функції $v(\{\overline{n}\})$ учасник $\{1\}_i$, для якого $v_i(t) = 0$, у будівництво нічого не вносить і, таким чином, звільняється від участі в розподілі витрат, утрачаючи місце в готовому складі. Нарешті, будь-який учасник $\{1\}_i$, $i = \overline{1,N}$, у грі з характеристичною функцією вигляду

$$F_1[max_t(\sum_{\{1\}i\,\epsilon\,\{\overline{n}\}}v_i(t))] + F_2[max_t(\sum_{\{1\}i\,\epsilon\,\{\overline{n}\}}v_i(t))]$$

має зберегти ті позиції, які він мав би за інших рівних умов в іграх з характеристичними функціями F_1 і F_2, тобто робити внесок v_i що дорівнює сумі вкладів v_{1_i} та v_{2_i}. Це рівнозначно припущенням про поетапне фінансування будівництва складу при незмінній загальній структурі гри (зберігаються коаліція, пропорції в платежах і т. ін.). Таким чином, можна спробувати знайти Д$_0$-рішення, що базується на принципі «справедливого розподілу».

Нехай для ясності $\boldsymbol{N} = 3$. Тоді можливими коаліціями є такі: $\{1\}_1$ – перше підприємство; $\{1\}_2$ – друге підприємство; $\{1\}_3$ – третє підприємство; $\{2\}_{12}$ – перше і друге підприємства і далі $\{2\}_{13}$, $\{2\}_{23}$, $\{3\}_{123}$. Витрати на будівництво задано в табл. 5.13.

Таблиця 5.13

Коаліція	$\{1\}_1$	$\{1\}_2$	$\{1\}_3$	$\{2\}_{12}$	$\{2\}_{13}$	$\{2\}_{23}$	$\{2\}_{123}$
Значення характеристичної функції, тис. грн	200	300	250	400	390	500	600

З аналізу даних табл. 5.13 випливає, що розширення кооперації знижує питому вартість будівельних робіт. Так, склад, розрахований на всіх споживачів, обходиться в 600 тис. грн, а три індивідуальні склади – в 750 тис. грн. Джерелами економії тут можуть бути зменшення транспортних витрат, поліпшення форм організації праці, зниження накладних витрат і т. ін. Однак навіть у цих умовах остаточні висновки слід робити тільки на основі кількісного оцінювання варіантів кооперування і пов'язаних з ними поділів.

Якщо всі наведені вище коаліції є допустимими, то $\boldsymbol{\{N\}} \in \{3\}_{123}$, а $\{\overline{\boldsymbol{n}}\}$ – або $\{2\}_{12}$, $\{2\}_{13}$, $\{2\}_{23}$, або $\{1\}_1$, $\{1\}_2$, $\{1\}_3$, або $\{0\}$. З формули (5.3) випливає, що

$$\boldsymbol{\nu_i^0} = \frac{2!0!}{3!}[v(\{3\}_{123}) - v(\{2\}_{23})] + \frac{1!1!}{3!}[v(\{2\}_{12}) - v(\{1\}_2)] + \frac{1!1!}{3!}[v(\{2\}_{13}) -$$

$$- v(\{1\}_3)] + \frac{0!2!}{3!}[v(\{1\}_1) - v(\{0\})]$$

або

$$\boldsymbol{\nu_1^0} = (600 - 500)/3 + (400 - 300)/6 + (390 - 250)/6 + (200-0)/3 = 140.$$

Так само знайдемо значення $\boldsymbol{\nu_2^0}$, $\boldsymbol{\nu_3^0}$:

$$\boldsymbol{\nu_2^0} = (600 - 390)/3 + (400 - 200)/6 + (500 - 250)/6 + (300 - 0)/3 = 245;$$

$$\boldsymbol{\nu_3^0} = (600 - 400)/3 + (390 - 200)/6 + (500 - 300)/6 + (250 - 0)/3 = 215.$$

Отримані значення $\boldsymbol{\nu_\nu^0}$ дають у сумі $\boldsymbol{v(\{N\})} = 600$.

Тепер необхідно оцінити розміри внесків, які доведеться робити підприємствам (гравцям), які вирішили об'єднатися в коаліцію $\{2\}_{12}$, $\{2\}_{13}$, $\{2\}_{23}$. Правила розрахунків залишаються такими самими, але числові характеристики варіантів кооперування змінюються. Нехай утворено коаліцію $\{2\}_{12}$. Для неї $\{N\}$ = 2, $\overline{n}$ ∈ 1 або 0. Тому

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(\mathbf{1},\mathbf{2})} = \frac{1!0!}{2!}[\boldsymbol{v}(\{2\}_{12}) - \boldsymbol{v}(\{2\}_{2})] + \frac{0!1!}{2!}[\boldsymbol{v}(\{2\}_{1}) - \boldsymbol{v}(\{0\})] =$$

$$= \frac{1}{2}(400 - 300) + + \frac{1}{2}(200 - 0) = 150,$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{2}(\mathbf{1},\mathbf{2})} = \frac{1!0!}{2!}[\boldsymbol{v}(\{2\}_{12}) - \boldsymbol{v}(\{1\}_{1})] + \frac{0!1!}{2!}[\boldsymbol{v}(\{1\}_{2}) - \boldsymbol{v}(\{0\})] =$$

$$= \frac{1}{2}(400 - 200) + \frac{1}{2}(300 - 0) = 250.$$

Учасник $\{1\}_3$, який залишився поза коаліцією $\{2\}_{12}$, змушений діяти самостійно, витрачаючи кошти в розмірі $\boldsymbol{v}(\{1\}_3) = 250 = \boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{3}(\mathbf{1},\mathbf{2})}$.

Аналогічна картина спостерігається і в разі створення коаліцій $(2\}_{13}$ без участі $\{1\}_2$. Тут

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(\mathbf{1},\mathbf{3})} = (390 - 250)/2 + (200 - 0)/2 = 170,$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{3}(\mathbf{1},\mathbf{3})} = (390 - 200)/2 + (250 - 0)/2 = 220,$$

$$\boldsymbol{v}(\{1\}_2) = \boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(\mathbf{2},\mathbf{3})} = 200 .$$

Нарешті, для коаліції $\{2\}_{23}$, що виключає $\{1\}_1$, отримаємо

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{2}(\mathbf{2},\mathbf{3})} = (500 - 250)/2 + (300 - 0)/2 = 275,$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{3}(\mathbf{2},\mathbf{3})} = (500 - 300)/2 + (250 - 0)/2 = 225,$$

$$\boldsymbol{v}(\{1\}_1) = \boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(\mathbf{2},\mathbf{3})} = 200.$$

Далі потрібно було б аналізувати результати, які отримають коаліції чергового (нижчого) рівня $\{1\}_1$, $\{1\}_2$, $\{1\}_3$, проте в цьому немає необхідності. Відповідні дані наведено в перших трьох стовпцях табл. 5.13. Залишається порівняти всі знайдені величини $\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{i}}$ і зробити остаточні висновки.

Очевидно, $\boldsymbol{\nu_1^0} < \boldsymbol{\nu_{1(1,2)}^0} < \boldsymbol{\nu_{1(1,3)}^0} < \boldsymbol{\nu_{1(2,3)}^0}$. Тому першому підприємству є вигідною участь у загальній коаліції $\{3\}_{123}$. Те ж саме можна сказати про друге й третє підприємства. Отже, розв'язок гри за прийнятих вихідних умов дає перший варіант кооперування, тобто $\{3\}_{123}$. Домінантний поділ $Д_0$ = (140, 245, 215). Отримувані виграші становлять 60 тис. грн для $\{1\}_1$; 55 тис. грн для $\{1\}_2$, 45 тис. грн для $\{1\}_3$.

Слід зазначити, що змінення даних табл. 5.13 призводить не тільки до переоцінювання розмірів платежів учасників гри, а й до розпаду коаліцій. Так, збільшення $\boldsymbol{v}(\{3\}_{123})$ до 750 дає при інших одинакових умовах $\boldsymbol{\nu_1^0}$ = 190, $\boldsymbol{\nu_2^0}$ = 295, $\boldsymbol{\nu_3^0}$ = 265, і коаліція $\{3\}_{123}$ стане неможливою. Від неї відмовиться третє підприємство через збільшення внеску. Перевагу буде формально віддано коаліції $\{2\}_{12}$ з поділом $\boldsymbol{Д_0}$ = (150, 250) при $\boldsymbol{\nu_{3(1,2)}^0}$ = 250, хоча ніщо не заважає підприємствам виробити певні угоди про взаємну допомогу й передати, наприклад, 25 тис. грн до фонду учасника $\{1\}_3$ із заощаджених коаліцією $\{2\}_{12}$ коштів.

Теорія багатокрокових ігор продовжує розвиватися, привертаючи до себе увагу дослідників прикладних проблем. Протиріччя та конфлікти, розв'язані шляхом розумних компромісів, впливають на характер діяльності складних систем, які бажають удосконалитися.

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади ігор з ненульовою сумою.
2. Які ігри мають назву біматричних?
3. Обґрунтуйте умови рівноваги в біматричній грі.
4. Які існують форми кооперування учасників гри?
5. Яку функцію називають характеристичною?
6. Наведіть характеристику однокрокових моделей прийняття рішень.
7. Наведіть принципи формування рішень в кооперативних іграх.
8. Що означають поділи в кооперативних іграх?
9. Наведіть приклади кооперування учасників того чи іншого конфлікту й отримання кожним з них завдяки цьому певних вигод.
10. Наведіть характеристику розв'язання кооперативної гри.
11. Обґрунтуйте зміст узагальненого поняття ситуації рівноваги.
12. Обґрунтуйте умови використання принципу «справедливого поділу», пов'язаного зі спробами розв'язати той чи інший конфлікт шляхом арбітражу.
13. Від яких складових залежить виграш учасника коаліційної гри?
14. Обґрунтуйте коаліцію учасників гри на прикладі фінансування будівництва складу для зберігання ціннної сировини.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища шк., 1995. – 319 с.
2. Медиченко, М. П. Методы оптимального планирования и управления : учеб. пособие. Ч. 3 / М. П. Медиченко. – Харьков : ХВУ, 1995. – 122 с.
3. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М. : Сов. радио, 1982. – 552 с.
4. Дегтярев, Ю. Л. Методы оптимизации / Ю. Л. Дегтярев. – М. : Радио и связь, 1990. – 270 с.
5. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1986. – 352 с.
6. Монахов, В. М. Методы оптимизации / В. М. Монахов. – М. : Просвещение, 1988. – 176 с.
7. Ермольев, Ю. М. Математические методы исследования операций / Ю. М. Ермольев. – Киев : Вища шк., 1999. – 308 с.
8. Благодарний, М. П. Сучасні методи управління та оптимізації / М. П. Благодарний, Ю. В. Білоконська. – Харків : ХАІ, 2018. – 128 с.
9. Антонов, А. В. Системный анализ : учеб. для студентов вузов / А. В. Антонов, В. М. Колодяжный. – М. : Высш. шк., 2008. – 454 с.
10. Кулян, В. Р. Математическое программирование с элементами информационной технологии : учеб. пособие для студентов нематемат. специальностей вузов / В. Р. Кулян, Е. А. Юнишева, А. Б. Жильцов. – Киев : МАУП, 2000. – 124 с.
11. Колодяжный, В. М. Математическое программирование и элементы теории исследования операций / В. М. Колодяжный. – Харьков : ХАИ, 2001. – 230 с.
12. Благодарний, М. П. Спеціальні питання сучасного керування та оптимізації : навч. посіб. для самост. роботи студентів. У 3 ч. Ч. 1. Методи обґрунтування управлінських рішень в умовах повної інформації / М. П. Благодарний. – Харків : ХАІ, 2019. – 176 с.
13. Благодарний, М. П. Оцінка ефективності інженерних рішень: консп. лекцій / М. П. Благодарний, Г. М. Тимонькін. – Харків : ХНАДУ, 2007. – 120 с.
14. Конфліктно-керовані системи. Методичні вказівки до практичних занять. Ч. 1 / Г. К. Бахмет, О. А. Мураховська, Н. А. Українець. – Харків : ХАІ, 2020. – 104 с.

15. Доценко, С. І. Теорія ігор : навч. посіб. / С. І. Доценко. – Київ : Київ. нац. ун-т імені Тараса Шевченка, 2013. – 88 с.
16. Костевич, Л. С. Теория игр. Исследование операций / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – Минск : Вышэйш. шк, 2008. – 368 с.
17. Писарук, Н. Н. Введение в теорию игр / Н. Н. Писарук. – Минск : БГУ, 2015. – 256 с.
18. Калабошкина, Л. Основы теории игр : учеб. пособие / Л. Калабошкина. – М. : Бином. Лаб. знаний, 2014. – 200 с.
19. Шиян, А. А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті : навч. посіб. / А. А. Шиян. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 164 с.
20 Prisner, E. Game Theory Through Exsamples / E. Prisner. – Washington : MAA, 2014. – 287 p.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Благодарний Микола Петрович

СПЕЦІАЛЬНІ ПИТАННЯ СУЧАСНОГО КЕРУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Частина 2

ІГРОВІ МЕТОДИ ОБҐРУНТУВАННЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

Редактор О. Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2021
Підписано до друку 28.05.2021
Формат 60×84 1/16. Папір офс. Офс. друк
Ум. друк. арк. 9,8. Обл.-вид. арк. 11. Наклад 50 пр.
Замовлення 137. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001