МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Г. К. Бахмет, О. А. Мураховська, Н. А. Українець

КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНІ СИСТЕМИ

Частина 1

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2021

УДК 518.9(07)
Б58

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. Т. І. Сморцова,
канд. техн. наук, доц. Г. М. Тимченко

Бахмет, Г. К.
Б58 Конфліктно-керовані системи [Текст] : навч. посіб. Ч. 1 / Г. К. Бахмет, О. А. Мураховська, Н. А. Українець. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2021. – 144 с.

ISBN 978-966-662-863-6

Розглянуто деякі методи розв’язання матричних, позиційних і біматричних ігор. До кожного розділу подано теоретичний матеріал, наведено приклади розв’язання задач, а також запропоновано завдання для роботи в аудиторії та самостійного виконання.

Для студентів вищих навчальних закладів, що вивчають курси «Системний аналіз і керування», «Прикладна математика», «Економічна кібернетика». Може бути корисним для спеціалістів галузі кібернетики.

Іл. 22. Бібліогр.: 36 назв

УДК 518.9(07)

ISBN 978-966-662-863-6

ВСТУП

Конфліктно-керовані ситуації розглядаються в розділі математичної економіки – теорії ігор, де вивчаються конфлікти між сторонами й визначаються оптимальні розв'язки для їх вирішення.

У теорії ігор досліджуються питання поведінки й визначаються оптимальні стратегії для кожного учасника конфліктної ситуації. Конфліктною можна вважати будь-яку ситуацію, коли порушуються інтереси двох і більше учасників, яких називають гравцями. Для кожного гравця існує певний набір стратегій, які він може застосувати. Перетинаючись, стратегії декількох гравців створюють деяку ситуацію, у якій кожен гравець отримує певний результат, що називають виграшем, позитивним або негативним.

При цьому реальну конфліктну ситуацію подають у вигляді гри й досліджують її методами математичної теорії ігор. Звісно, ця математична модель (гра) є достатньо спрощеним та ідеалізованим відображенням конкретного реального явища. Але внаслідок розв'язання гри стає можливим дати учасникам реальної конфліктної ситуації пропозиції та поради щодо вирішення суперечностей, що виникли між ними.

У наш час теорія ігор застосовується в різних областях суспільного життя людей і різних галузях науки. Її результати використовують економісти, політики, соціологи, військові, букмекери та підприємці.

У посібнику розглянуто деякі методи розв'язання матричних, позиційних і біматричних ігор. За кожною темою наведено приклади задач з докладним описом їх розв'язання, а також завдання для практичних занять і самостійної роботи.

Автори бажають висловити вдячність Т. О. Іващенко за висококваліфіковане літературне редагування посібника.

Розділ 1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР

1.1. Подання конфліктної ситуації у вигляді матричної гри

Антагоністична гра – це гра, у якій переговори не мають сенсу. Окремий випадок цієї гри – це скінченна *гра двох осіб з нульовою сумою,* або *матрична гра*. Для таких ігор:

1. Кожен гравець має обмежену кількість стратегій:

$$X = \{i = 1,2,..,m\},\ Y = \{j = 1,2,..,n\}.$$

Ці стратегії називають *чистими стратегіями*.

2. Гра задається матрицею $A = \left(a_{ij}\right)$, розмірність якої $m \times n$, де a_{ij} – це виграш 1-го гравця, коли він вибирає стратегію i, а 2-й гравець вибирає стратегію j. Це можна записати в такому вигляді:

$$\begin{array}{c|cccccc}
X \quad Y & 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \\
\hline
1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{array}.$$

У цьому випадку виграш 1-го гравця дорівнює програшу 2-го гравця. Якщо $a_{ij} < 0$, то це означає, що 1-й гравець платить 2-му гравцю суму $\left|a_{ij}\right|$.

Гра полягає в такому. 1-й і 2-й гравці вибирають кожен одну зі своїх стратегій i та j. Після цього гра закінчується, і 1-й гравець отримує виграш a_{ij}, а 2-й гравець відповідно програє a_{ij} (тобто виграє $-a_{ij}$).

Матриця А називається *платіжною*, а також *матрицею гри*.

Наведемо приклади ігор двох осіб з нульовою та ненульовою сумою.

Приклад 1.1. Теніс, шахи – це ігри двох осіб з нульовою сумою, у яких програш одного з гравців є виграшем іншого, а ціною гри є кількість очок, що отримує гравець, або умови проходження в наступний тур.

Приклад 1.2. Футбол – це гра, у якій одна проти одної виступають коаліції – дві команди по 11 гравців у кожній. За певних умов цю гру можна розглядати як гру двох осіб з нульовою сумою.

Приклад 1.3. На фінансових ринках ф'ючерси та опціони вважаються іграми з нульовою сумою, оскільки контракти являють собою домовленості між двома сторонами, і якщо один інвестор програє, то багатство передається іншому інвестору.

Приклад 1.4. На фондовому ринку торгівля часто розглядається як гра з нульовою сумою. Однак, оскільки торгівля здійснюється на основі майбутніх очікувань, а трейдери мають різні переваги щодо ризику, торгівля може бути взаємовигідною. Інвестування на більш тривалий термін є позитивною сумою, оскільки потоки капіталу сприяють виробництву, робочим місцям, які потім забезпечують виробництво, і робочим місцям, що забезпечують заощадження та доходи, які дозволяють вкладати інвестиції для продовження циклу.

Приклад 1.5. Ситуації, які можна розглядати як ігри двох осіб з нульовою сумою, є типовими у практичній діяльності менеджерів, маркетологів, спеціалістів рекламних служб, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо.

Приклад 1.6. Гра в монети є прикладом гри з нульовою сумою. У грі беруть участь два гравці A і B, які одночасно кладуть монети на стіл. Виграш залежить від того, збігаються сторони монет чи ні. Якщо сторони монет збігаються, то гравець A виграє й утримує монети гравця B; якщо вони не збігаються, то гравець B виграє й утримує монети гравця A.

Приклад 1.7. Три фірми діють на ринку, причому жодна з них не має повного контролю над ним. У цьому випадку, якщо кожен з гравців діє самостійно, то це – гра трьох осіб, якщо ж двоє з гравців вирішують об’єднатися, то це – гра двох осіб.

Приклад 1.8. Більшість транзакцій – це ігри з ненульовою сумою, оскільки кінцевий результат може бути корисним для обох сторін.

Основною метою розв’язання задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методів теорії ігор.

Якщо виграш 1-го гравця та програш 2-го гравця є різними, то матрична гра може бути подана як *біматрична гра*, і її можна записати двома матрицями:

$X \; Y$	1	2	…	j	…	n
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…,
i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

$X \; Y$	1	2	…	j	…	n
1	b_{11}	b_{12}	…	b_{1j}	…	b_{1n}
2	b_{21}	b_{22}	…	b_{2j}	…	b_{2n}
…	…	…	…	…	…	… .
i	b_{i1}	b_{i2}	…	b_{ij}	…	b_{in}
…	…	…	…	…	…	…
m	b_{m1}	b_{m2}	…	b_{mj}	…	b_{mn}

Біматричних гра – це скінченна гра двох гравців з ненульовою сумою, у якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця. Отже, у кожній матриці рядок відповідає стратегії 1-го гравця, стовпець – стратегії 2-го гравця, на перетині рядка і стовпця в першій матриці знаходиться виграш 1-го гравця, у другій матриці – виграш 2-го гравця.

Приклад 1.9. У грі беруть участь два гравці. Кожен гравець може записати незалежно один від одного цифру 1, 2 або 3. У цьому разі:

- якщо різниця між числами, що записали 1-й та 2-й гравці, є додатною, то 1-й гравець виграє кількість очок, що дорівнює різниці між числами;
- якщо різниця є від'ємною, то виграє 2-й гравець;
- якщо різниця між числами дорівнює нулю, то гра закінчується внічию.

Розв'язання. Запишемо стратегії гравців:

– 1-й гравець має три стратегії: x_1 – записати цифру 1; x_2 – записати цифру 2; x_3 – записати цифру 3.

– 2-й гравець теж має три стратегії: y_j – записати цифру j $\{j=1,2,3\}$.

Матриця гри в цьому випадку має такий вигляд:

X Y	$y_1=1$	$y_2=2$	$y_3=3$
$x_1=1$	0	–1	–2
$x_2=2$	1	0	–1
$x_3=3$	2	1	0

Приклад 1.10. Гра «Дотримання угоди». Нехай дві країни, які займаються рибальством в одних і тих самих водах, домовилися про взаємне обмеження лову для того, щоб зберегти рибні запаси. При цьому сторони не контролюють одна одну. Це виключає санкції за порушення угоди. Стратегії сторін полягають у тому, щоб дотримуватися угоди чи ні.

Стратегії сторін:

– С – дотримуватись договору;

– Н – не дотримуватись договору.

Правила гри:

– якщо обидві сторони дотримуються угоди, то вони отримують прибуток у 10 одиниць;

– якщо вони не дотримуються угоди, то їх прибуток зменшиться до 6 одиниць;

– якщо перша сторона дотримується угоди, а друга – не дотримується, то перша одержить 5 одиниць, а друга (яка порушила) – 11 одиниць.

Розв’язання. Це біматрична гра. Її можна подати двома матрицями:

Матриця 1-ї країни

1–й гравець	***2–й гравець C***	***H***
C	***10***	***5***
H	***11***	***6***

Матриця 2-ї країни

1–й гравець	***2–й гравець C***	***H***
C	***10***	***11***
H	***5***	***6***

Але цю гру можна записати також у вигляді однієї матриці:

1–й гравець	***2–й гравець C***	***H***
C	***10; 10***	***5; 11***
H	***11; 5***	***6; 6***

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке антагоністична гра?
2. Чим характеризується та як задається матрична гра?
3. Що визначають елементи платіжної матриці $\boldsymbol{A}$?
4. Навести приклади ігор двох осіб з нульовою та ненульовою сумою.
5. Дати означення стратегії гравця.
6. Що таке біматрична гра і як вона задається?
7. Якщо знак елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ матриці гри є від’ємним, то що це означає: а) для 1-го гравця; б) для 2-го гравця?
8. Якою є мета 1-го гравця: максимізувати свій виграш чи максимізувати програш 2-го гравця?
9. Якою є мета 2-го гравця: мінімізувати свій програш чи максимізувати програш 1-го гравця?
10. Які дії гравців визначає матриця гри: найкращі чи найгірші?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.1.1. У грі беруть участь два гравці. Кожен з гравців вибирає одне з чисел: 0 або 1. Після цього 1-й гравець отримує від 2-го гравця суму вибраних чисел. Записати матрицю гри.

1.1.2. Два студенти, які беруть участь у грі, незалежно один від одного вибирають одне з чисел: 3, 4 або 5. Якщо обидва вибрали одне й те саме число, то 1-й студент виграє кількість очок, яка дорівнює вибраному числу. Інакше виграє 2-й студент та отримує від 1-го кількість очок, яка відповідає максимальному з вибраних чисел. Скласти матрицю гри.

1.1.3. Два гравці незалежно один від одного вибирають одне з чисел: -3, -1, 1, 3. Числа, вибрані гравцями, позначимо відповідно x та y. Величина виграшу 1-го гравця визначається виразом $x + y + xy$. Скласти матрицю гри.

1.1.4. Два учасники гри вибирають по одному з натуральних чисел між 1 і 8. Якщо число, вибране одним з учасників, на одиницю більше числа, вибраного іншим, то цей гравець програє 2 очки. Якщо вибір одного з учасників більше хоча б на 2 одиниці, то цей учасник виграє 1 очко. У разі, коли вибрані гравцями числа збігаються, гра закінчується внічию. Скласти матрицю гри.

1.1.5. Два гравці незалежно один від одного вибирають по одному числу з множини натуральних чисел. Якщо сума вибраних чисел є парною, то 1-й гравець отримує від 2-го гравця кількість очок, яка дорівнює загальній кількості вибраних чисел, а якщо сума є непарною, то він платить 2-му гравцеві кількість очок, яка дорівнює загальній кількості вибраних чисел плюс один. Розглянути випадок, коли найбільше число дорівнює 10.

1.1.6. Гра «Пошук». У грі беруть участь два гравці: 1-й гравець ховається, а 2-й гравець його шукає. У розпорядженні 1-го гравця є два притулки, будь-який з яких він може вибрати на власний розсуд. Умови гри: якщо 2-й гравець знайде 1-го в притулку, де 1-й гравець сховався, то 1-й платить йому штраф – 1 очко; якщо ж 2-й гравець не знайде 1-го (тобто шукатиме в іншому притулку), то він сам повинен заплатити 1-му такий самий штраф. Побудувати матрицю гри.

1.1.7. Кожен з двох гравців називає один з трьох предметів: камінь, ножиці, папір. Правила гри такі: «папір» перемагає «камінь», «камінь» – «ножиці», «ножиці» – «папір». Гравець, який вибирає предмет, що «виграє», отримує від супротивника одиницю. Якщо обидва гравці вибирають однакові предмети, то гра закінчується внічию. Побудувати матрицю цієї гри.

1.1.8. Гравці вибирають одне з цілих чисел від 1 до k. Якщо перший вибрав i, а другий – j, то перший отримує $i - j$ одиниць виграшу, якщо $i \geq j$, та сплачує $i + j$ одиниць виграшу, якщо $i < j$. Розглянути випадок, коли $k = 7$. Побудувати матрицю гри.

1.1.9. Кожен із двох партнерів, не знаючи вибору іншого, викладає монету гербом або цифрою вгору. Якщо сторони монет збігаються, то обидві монети забирає 1-й гравець, інакше їх забирає 2-й гравець. Побудувати матрицю гри.

1.1.10. Гра «Двопальцева Морра». Кожен із двох гравців показує іншому один або два пальці та одночасно називає кількість пальців, яку, на його думку, може показати супротивник. Якщо один із гравців угадає, то він виграє суму, що дорівнює кількості пальців, показаних обома супротивниками, інакше – нічия. Побудувати матрицю гри.

1.1.11. Гра полковника Блотто (загальна назва великого класу тактичних військових ігор «Оборона міста»). Дві воюючі армії ведуть боротьбу за два пункти. Перша армія (під командуванням полковника Блотто) складається з чотирьох полків; друга (під командуванням капітана Кіже) має три полки. Армія, яка посилає більше полків на той або інший пункт, займає його і знищує всі спрямовані на цей пункт сили противника. При цьому вона отримує одиницю як за зайнятий пункт, так і за кожен знищений полк супротивника. Полковник Блотто і капітан Кіже мають вирішити, як розподілити сили, щоб виграти якомога більше очок. Скласти матрицю гри.

1.1.12. Гра Блотто. Дві армії ведуть боротьбу за два міста. Капітан Кіже має в своєму розпорядженні 2 полки, а полковник Блотто – $\boldsymbol{k}$ полків, де $\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{2}$. Скласти матриці гри для $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{2..5}$.

1. З'ясувати, чи існує таке $\boldsymbol{k}$, при якому полковник Блотто може гарантувати собі безпрограшну гру при будь-якому виборі своїх стратегій. Дати пояснення.

2. Дати рекомендації полковнику Блотто щодо вибору стратегій, застосування яких:

а) не призведе до програшу;

б) може забезпечити йому максимальний виграш.

1.1.13. Гра Блотто. Дві армії ведуть боротьбу за два міста. Капітан Кіже має в своєму розпорядженні 3 полки, а полковник Блотто – а) 3 полки, б) 6 полків. Скласти матрицю гри для обох випадків. Проаналізувати матриці і дати рекомендації обом гравцям щодо вибору найкращих стратегій, а також указати стратегії, які кожному з них застосовувати невигідно.

1.1.14. Гра Блотто. Дві армії ведуть боротьбу за 3 міста. Скласти матрицю гри у випадку, коли:

а) полковник Блотто командує чотирма полками, а капітан Кіже – трьома;

б) полковник Блотто командує п’ятьма полками, а капітан Кіже – чотирма;

в) полковник Блотто командує п’ятьма полками, а капітан Кіже – п’ятьма.

1. Вказати безпрограшні стратегії полковника Блотто.

2. Дати рекомендації капітану Кіже, які стратегії йому застосовувати вигідно, а які – ні.

1.1.15. Гра «Сімейна суперечка». Чоловік і дружина (відповідно 1-й і 2-й гравці) домовляються про те, щоб провести родинний вечір разом, від-

відавши кінотеатр або футбольний матч. Спільні відвідини кінотеатру дають чоловікові помірне задоволення (що оцінюється числом 1), а дружині – велике задоволення (що оцінюється числом 2). Спільні відвідини футболу дають задоволення у зворотних оцінках (чоловікові – 2, дружині – 1). Нарешті, відсутність домовленості нікому задоволення не дає (виграш, що дорівнює нулю). Записати матрицю гри.

1.1.16. Гра «Обмін закритими портфелями». Дві людини зустрічаються й обмінюються закритими портфелями, уважаючи, що один з них містить гроші, інший – товар. Кожен гравець може поважати операцію й покласти в портфель товар, про який домовилися, або обдурити партнера, віддавши йому порожній портфель. Якщо кожен з гравців вибрав «поважати операцію», то обидва отримують $\boldsymbol{C}$ очок. Якщо один вирішив «обдурити», а іншій «поважати операцію», то 1-й отримує $\boldsymbol{D}$ очок, 2-й – $\boldsymbol{c}$ очок. Якщо обидва вибрали «обдурити», то кожен отримує по $\boldsymbol{d}$ очок.

Значення змінних $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ можуть бути будь-якого знаку, але між ними має дотримуватися така нерівність: $\boldsymbol{D} > \boldsymbol{C} > \boldsymbol{d} > \boldsymbol{c}$ (це правило встановив Дуглас Хофштадтер). Цей приклад є класичним описом так званої «дилеми ув'язненого». Скласти матрицю гри.

1.1.17. Гра «Два гравці та банкір». Кожен з гравців має дві картки: на одній написано «співробітничати», на іншій – «зрадити» (це стандартна термінологія гри «Дилема ув'язненого»). Кожен гравець кладе одну з карток перед банкіром написом униз. Ніхто з гравців не знає, що вибрав інший гравець. Банкір відкриває картки і каже про виграш. Якщо обидва вибрали «співробітничати», то кожен отримує по 2 очки. Якщо один вибрав «зрадити», інший – «співробітничати», то 1-й отримує 3 очки, 2-й – 0. Якщо обидва вибрали «зрадити», то кожен отримує по 1 очку. Побудувати матрицю гри.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1.1.1. Гра в «парне – непарне число». Один з гравців затискає в руці парну або непарну кількість дрібних предметів, а інший – намагається цю парність відгадати. У разі відгадування він отримує від 1-го гравця одну одиницю, інакше сам платить одиницю 1-му гравцеві. Побудувати матрицю гри.

1.1.2. Кожен з двох гравців вибирає одне з натуральних чисел, що належать проміжку $\left[1;7\right]$. Вибрані гравцями числа позначимо відповідно $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$. Числа порівнюються. Якщо $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$, то 1-й гравець виграє $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{2}$ очок, якщо ж $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ очок виграє 2-й гравець. Скласти матрицю гри.

1.1.3. Два гравці незалежно один від одного вибирають одне з чисел, які належать проміжку $[\boldsymbol{1;5}]$. Числа, вибрані гравцями, позначимо відповідно $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$. Виграшем 1-го гравця є значення виразу $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$, якщо воно парне. Інакше воно є виграшем 2-го гравця. Скласти матрицю гри.

1.1.4. Задано впорядковану множину чисел $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$. Один з гравців вибирає якесь з цих чисел, а інший – відгадує його індекс. Якщо 2-й гравець відгадав індекс вибраного числа, то він отримує кількість очок, яка дорівнює порядковому номеру цього числа, інакше він програє цю кількість очок 1-му гравцеві. Скласти матрицю гри.

1.1.5. Два гравці незалежно один від одного вибирають одне з чисел: 2, 1 або -2. Якщо обидва вибирають одне й те саме число, то 1-й гравець платить 2-му суму, яка дорівнює вибраному числу плюс 3. В іншому випадку 1-й гравець отримує від 2-го суму, що дорівнює числу, яке вибрав 2-й гравець, помноженому на 2.

1.1.6. Гра «Камінь – мішок – ножиці». Кожен із двох гравців може вибрати один із трьох предметів: «камінь», «мішок», «ножиці», причому «мішок» перемагає «камінь», «ножиці» – «мішок», «камінь» – «ножиці». Гравець, який вибрав предмет, що виграє, отримує одиницю виграшу. Якщо гравці вибирають однакові предмети, то гра закінчується внічию. Побудувати матрицю гри.

1.1.7. Побудувати матрицю **гри «Камінь – вода – ножиці – скло – папір»**. Два гравці одночасно називають один з п'яти вказаних предметів. Відомо, що вода змочує камінь і папір, ножиці коштують дорожче, ніж вода і камінь, скло є крихкішим, ніж вода і ножиці, папір є гнучкішим, ніж ножиці і скло, а камінь є товщим, ніж скло і папір. Гравець, який вибирає предмет, що «виграє», отримує від суперника 5 одиниць виграшу; якщо обидва гравці виберуть однакові предмети, то гра закінчується внічию.

1.1.8. Кожен із двох партнерів, не знаючи вибору іншого, викладає монету гербом або цифрою вгору. Збіг гербів на вибраному боці монет дає подвійний виграш 1-му гравцеві, збіг цифр дає подвійний виграш 2-му гравцю. Розбіжність сторін монет при виборі цифри 1-м гравцем тягне за собою потрійний штраф 1-го гравця, а при виборі цифри 2-м гравцем 1-й гравець має потрійний виграш. Побудувати матрицю гри.

1.1.9. Гравці називають один з чотирьох предметів: (α), (β), (γ), (δ), причому (α) перемагає (β), (γ) і (δ); (β) перемагає (γ) і (δ), а (γ) перемагає (δ). Гравець, який назвав виграшний (порівняно із супротивником) предмет, отримує $\boldsymbol{k}$ одиниць виграшу. Якщо обидва гравця називають однаковий предмет, то гра закінчується внічию. Побудувати матрицю гри.

1.1.10. У **грі «Трипальцева Морра»** гравець показує один, два або три пальці й одночасно намагається вгадати кількість пальців, показаних супротивником. Інші правила – як у «двопальцевій Морра» (див. завд. 1.1.10 практичних завдань підрозд. 1.1). Побудувати матрицю гри.

1.1.11. Гра полковника Блотто (див. завд. 1.1.11 практичних завдань підрозд. 1.1). Скласти матрицю гри у випадку, коли полковник Блотто командує п'ятьма полками, а капітан Кіже – чотирма.

1.1.12. Гра Блотто. Дві армії ведуть боротьбу за два міста. Капітан Кіже має в своєму розпорядженні 3 полки, а полковник Блотто – $\boldsymbol{k}$ полків, де $\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{3}$. Скласти матриці гри для $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{3..6}$.

1. З'ясувати, чи існує таке $\boldsymbol{k}$, при якому полковник Блотто може гарантувати собі безпрограшну гру при будь-якому виборі своїх стратегій. Дати пояснення.

2. Дати рекомендації полковнику Блотто щодо вибору стратегій, застосування яких:

а) не призведе до програшу;

б) може забезпечити йому максимальний виграш.

1.1.13. Гра Блотто. Дві армії ведуть боротьбу за два міста. Капітан Кіже має в своєму розпорядженні 4 полки, а полковник Блотто – а) 4 полки, б) 6 полків. Скласти матрицю гри для обох випадків. Проаналізувати матриці і дати рекомендації обом гравцям щодо вибору найкращих стратегій, а також указати стратегії, які кожному з них застосовувати невигідно.

1.1.14. Гра Блотто. Дві армії ведуть боротьбу за 3 міста. Скласти матрицю гри у випадку, коли:

а) полковник Блотто командує п’ятьма полками, а капітан Кіже – трьома;

б) полковник Блотто командує шістьма полками, а капітан Кіже – п’ятьма;

в) полковник Блотто командує шістьма полками, а капітан Кіже – чотирма.

1. Вказати безпрограшні стратегії полковника Блотто.

2. Дати рекомендації капітану Кіже, які стратегії йому застосовувати вигідно, а які – ні.

1.1.15. Гра «Залік». Гравцями є студент і викладач. Студент, що прийшов складати залік, може бути добре підготовленим до нього або погано підготовленим. Викладач, що приймає залік, може поставити залік студентові або не поставити. Ситуації, що виникають у цій грі, дають гравцям різне моральне задоволення, яке можна оцінити балами: 0, 1, 2, 3. Скласти матрицю гри. Оцінки морального задоволення взяти за виграші гравців.

1.1.16. Дві фірми, що конкурують, визначають для себе, скільки коштів витрачати на рекламу. Ефективність реклами й прибуток кожної фірми зменшується зі збільшенням витрат на рекламу конкурента. Обидві фірми приймають рішення збільшити витрати на рекламу, при цьому їх частки ринку і, можливо, обсяги продажів є незмінними, а прибуток зменшується. Межею гонки рекламних бюджетів є прибуток, утім, вони можуть намагатися деякий час працювати і в збиток. Фірми можуть піти на угоду про зменшення витрат на рекламу, але завжди є стимул його порушити. Скласти матрицю гри.

1.1.17. Гра «Перехрестя». Два автомобілісти (гравці) рухаються по двох перетинних дорогах та одночасно під'їжджають до перехрестя. Кожен з них може зупинитися, пропускаючи іншого, або їхати далі. Передбачимо, що кожен з гравців уважає за краще зупинитися, ніж постраждати в аварії, і проїхати перехрестя, не зупиняючись, якщо інший зробив зупинку. У завданні вводиться до розгляду невід'ємне число ε. Воно відповідає незадоволенню гравця, який спостерігає за іншим гравцем, що проїжджає перехрестя, тоді як сам він зупинився. Побудувати матрицю гри.

1.2. Розв'язання матричної гри в чистих стратегіях

Розглянемо матричну гру, платіжна матриця якої має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & & \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & & & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Треба визначити оптимальні стратегії гравців і ціну гри. Наведемо відповідний приклад.

Приклад 1.11. Нехай матриця гри має вигляд

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Запишемо цю матрицю у вигляді таблиці стратегій:

	y_1	y_2	y_3
x_1	8	4	2
x_2	3	3	4
x_3	2	2	7

У цій таблиці x_i – i-та стратегія 1-го гравця; y_j – j-та стратегія 2-го гравця.

Звідси для 1-ї стратегії 1-го гравця (x_1) виграшами будуть значення 8, 4, 2 залежно від вибраної стратегії 2-го гравця. Тоді для стратегії x_1, тобто для $L(x_1, y) = \{8, 4, 2\}$, число 2 є гарантованим виграшем; це найменший елемент множини виграшів 1-го гравця.

Для стратегії x_2, тобто для $L(x_2, y) = \{3, 3, 4\}$, гарантований виграш дорівнює 3.

Для стратегії x_3, тобто для $L(x_3, y) = \{2, 2, 7\}$, гарантований виграш дорівнює 2.

Отже, гарантований виграш $A(x_k)$ для стратегії x_k – це найменший елемент множини $L(x_k, y)$:

$$A(x_k) = \min_{y} L(x_k, y).$$

Але 1-й гравець має вибрати таку стратегію (x_1, x_2, x_3), щоб гарантований виграш $A(x_k)$ був найбільшим, тобто

$$\alpha = \max_{x_k} A(x_k) = \max_{x_k} \min_{y} L(x_k, y),$$

де α – максимальний гарантований виграш, який називають *нижньою чистою ціною гри.*

Так само має поводитися 2-й гравець. Відмінність 2-го гравця від 1-го полягає в тому, що він вибирає стратегію відносно програшу: для стратегії y_1, тобто для $L(x, y_1) = \{8, 3, 2\}$, гарантованим максимальним програшем є значення 8; для стратегії y_2, тобто для $L(x, y_2) = \{4, 3, 2\}$, гарантований програш дорівнює 4; для стратегії y_3, тобто для $L(x, y_3) = \{2, 4, 7\}$, гарантований програш дорівнює 7.

Отже, гарантований програш $B(y_k)$ для стратегій y_k – це найбільший елемент множини $L(x, y_k)$:

$$B(y_k) = \max_{x} L(x, y_k).$$

Тоді, щоб гарантований програш 1-го гравця був мінімальним, необхідно, щоб

$$\beta = \min B(y_k) = \min_{y_k} \max_{x} L(x, y_k),$$

де β – мінімальний гарантований програш 2-го гравця, і його називають *верхньою чистою ціною гри*.

Таблицю, яка містить розглянуті гарантовані виграші 1-го гравця й гарантовані програші 2-го гравця, можна записати в такому вигляді:

	y_1	y_2	y_3	$A(x_k)$
x_1	8	4	2	2
x_2	3	3	4	$\mathbf{3}^*$
x_3	2	2	7	2
$B(y_k)$	8	$\mathbf{4}^*$	7	

Зірочками в таблиці позначено нижню та верхню чисту ціну гри.

Для α і β правильними є такі *твердження*:

1. Нижня ціна гри не перевищує верхньої ціни гри.
2. Виграш, який може забезпечити собі 1-й гравець, не перевищує програшу, яким може обмежитись 2-й гравець.

У тому випадку, коли нижня чиста ціна гри дорівнює верхній чистій ціні гри, величину

$$C = \alpha^* = \beta^*$$

називають *чистою ціною гри*.

Стратегії, що забезпечують чисту ціну гри C, називають *оптимальними стратегіями гравців*. Елемент матриці $\left(x_i^*, y_j^*\right)$, який визначає чисту ціну гри C, називають *сідловою точкою*.

Оптимальні стратегії, які намічаються на початку гри, називають ще *чистими стратегіями*.

Гру, яка має чисту ціну, називають *грою із сідловою точкою*.

Якщо $\alpha = \beta$, то матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях: $\left(x_i^*, y_j^*\right)$ – пара оптимальних чистих стратегій гравців і ціна гри $C = \alpha^* = \beta^*$.

Якщо $\alpha \neq \beta$, то матрична гра не має розв'язку в чистих стратегіях.

Отже, маємо схему знаходження сідлової точки платіжної матриці гри:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \min\limits_{j=1..n} a_{1j} = \alpha_1 \\ \dots \\ \to \min\limits_{j=1..n} a_{ij} = \alpha_i \qquad \max\limits_{i=1..m} \alpha_i = \alpha \\ \dots \\ \to \min\limits_{j=1..n} a_{mj} = \alpha_m \end{array}$$

$$\max_{i=1..m} a_{i1} = \beta_1 \quad \dots \quad \beta_j \quad \dots \quad \max_{i=1..m} a_{in} = \beta_n$$

$$\min_{j=1..n} \beta_j = \beta$$

Приклад 1.12. Задано матрицю гри

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Визначити стратегії гравців і ціну гри.

Розв'язання. Таблиця вибору стратегій має такий вигляд:

	y_1	y_2	y_3	y_4	$A(x)$
x_1	8	3	6	1	1
x_2	1	2	2	3	1
x_3	6	$\boxed{3}$	3	4	3^*
x_4	5	1	2	7	1
$B(y)$	8	3^*	6	7	

Це гра із сідловою точкою. Ціна гри:

$$C = \alpha^* = \beta^* = 3.$$

Оптимальною стратегією 1-го гравця є його 3-тя стратегія x_3. Оптимальною стратегією 2-го гравця є його 2-га стратегія y_2.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке таблиця стратегій гравців?
2. Як визначити, використовуючи таблицю стратегій гравців, гарантований виграш 1-го гравця для будь-якої його стратегії x_j?
3. Дати означення нижньої чистої ціни гри.
4. Як визначити гарантований програш 2-го гравця для будь-якої його стратегії y_k?
5. Що таке верхня чиста ціна гри?
6. Яку величину називають чистою ціною гри?
7. Які стратегії гри називають оптимальними?
8. Що таке сідлова точка?
9. Чи може гра мати декілька сідлових точок?
10. Дати означення чистих стратегій гравців.
11. Як визначається гра із сідловою точкою?
12. Чи існують оптимальні чисті стратегії? Обґрунтувати відповідь.
13. Навести алгоритм знаходження сідлової точки платіжної матриці гри.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

У задачах 1.2.1–1.2.4 знайти нижню й верхню ціни гри, визначити чисту ціну гри, сідлові точки й оптимальні стратегії, якщо вони існують.

1.2.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$ **1.2.2.** $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

1.2.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$ **1.2.4.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

У задачах 1.2.5–1.2.7 розглянути матриці ігор, побудовані раніше (це розв'язки практичних завдань підрозд. 1.1), і з'ясувати, чи мають ті ігри сідлові точки. У разі позитивної відповіді вказати чисту ціну гри й оптимальні стратегії.

1.2.5. Задача 1.1.1.

1.2.6. Задача 1.1.2.

1.2.7. Задача 1.1.3.

1.2.8. Показати, що матрична гра з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, де $a_{ij}=i-j$, має розв'язок у чистих стратегіях, і знайти його.

1.2.9. Довести, що матриця $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, де $a_{ij}\le a_{i\,j+1}$, $i,j=1..n$, має сідлову точку.

1.2.10. Довести, що матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ і $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, де $b_{ij}=a_{ij}+const$, $i=1..m$, $j=1..n$, мають сідлові точки одночасно.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

У задачах 1.2.1–1.2.5 знайти нижню й верхню ціни гри, визначити чисту ціну гри, сідлові точки й оптимальні стратегії, якщо вони існують.

1.2.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$ **1.2.2.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$

1.2.3. $A=\begin{pmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 10 & 24 & 9 \end{pmatrix}$. **1.2.4.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

1.2.5. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У задачах 1.2.6–1.2.8 розглянути матриці ігор, які було вже побудовано (це розв'язки завдань для самостійної роботи підрозд. 1.1), і з'ясувати, чи мають ті ігри сідлові точки. У разі позитивної відповіді вказати чисту ціну гри й оптимальні стратегії.

1.2.6. Задача 1.1.1. **1.2.7.** Задача 1.1.3. **1.2.8.** Задача 1.1.5.

1.2.9. Показати, що матрична гра з матрицею $A=(a_{ij})_{m\times n}$, де $a_{ij}=f(i)+g(j)$ і $f(i)$, $g(j)$ – деякі функції, має розв'язок у чистих стратегіях, і знайти його.

1.2.10. Нехай $v(A)$ і $v(B)$ – сідлові точки матричних ігор з матрицями A і B відповідно. Навести приклади матриць A і B, таких, що для них виконуються нерівності:

а) $v(A+B)>v(A)+v(B)$;
б) $v(A+B)<v(A)+v(B)$;
в) $v(A+B)=v(A)+v(B)$.

1.3. Розв'язання матричної гри у змішаних стратегіях

1.3.1. Визначення виграшу 1-го гравця

Матрична гра не завжди має сідлові точки, тобто нижнє й верхнє значення гри можуть бути різними. У цьому випадку стратегії мають послідовно змінюватися випадковим чином. Стратегію, яка визначається випадковим вибором, називають *змішаною стратегією*.

Нехай у множинах чистих стратегій $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ і $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ чисті стратегії використовуються з певною ймовірністю: стратегії x_i – з імовірністю ξ_i, стратегії y_j – з імовірністю η_j.

Повний набір імовірностей використання чистих стратегій називають *простором змішаних стратегій*. Його можна записати у такому вигляді:

	y_1 η_1	y_2 η_2	… …	y_n η_n
x_1 ξ_1	$L(x_1,y_1)$	$L(x_1,y_2)$	…	$L(x_1,y_n)$
x_2 ξ_2	$L(x_2,y_1)$	$L(x_2,y_2)$	…	$L(x_2,y_n)$
…	…	…	…	…
x_m ξ_m	$L(x_m,y_1)$	$L(x_m,y_2)$	…	$L(x_m,y_n)$

При цьому для ξ_i і η_j мають виконуватися такі умови:

$$\xi_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m}\xi_i = 1, \quad \eta_j \ge 0, \quad \sum_{j=1}^{n}\eta_j = 1.$$

При використанні змішаної стратегії гра набуває ймовірнісного характеру й характеризується математичним сподіванням функції виграшів чистих стратегій $L(x,y)$:

$$L(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L(x_i,y_j)\xi_i\eta_j.$$

Функцію $L(\xi,\eta)$ називають *ціною гри* й позначають через v.

Якщо ввести позначення $E = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$, $H = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, де A – матриця гри, то у матричному вигляді можна записати

$$L(\xi,\eta) = E\,A\,H^T.$$

Приклад 1.13. Визначити виграш 1-го гравця у грі, яку задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

якщо $E = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ і $H = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання. Виграш 1-го гравця визначається формулою

$$L(\xi,\eta) = EAH^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{17}{12}.$$

Відповідь. Виграш 1-го гравця становить $17/12$.

1.3.2. Перевірка оптимальності стратегій гравців

Якщо v – ціна ігри, то для змішаних стратегій правильними є такі **твердження**:

1. Для того щоб E була оптимальною змішаною стратегією 1-го гравця, необхідно й достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i \ge v \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(суми по стовпцях),}$$

які в матричній формі мають вигляд

$$E^* A_j \ge v,$$

де $E^* = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, A_j – вектор-стовпець матриці гри.

2. Для того щоб H була оптимальною змішаною стратегією 2-го гравця, необхідно й достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_i \le v \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{(суми по рядках),}$$

або у матричному вигляді

$$A_i H^{*T} \le v,$$

де $H^* = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, A_i – вектор-рядок матриці гри.

3. Знайдені розв’язки мають бути невід’ємними (оскільки це ймовірності): $\xi_i \ge 0$, $\eta_j \ge 0$, а також задовольняти умови

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1,$$

бо вони утворюють повні групи подій.

Приклад 1.14. Перевірити, чи є стратегії $E=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$ і $H=\left(\frac{4}{5},0,\frac{1}{5}\right)$ оптимальними у грі з матрицею $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Нехай $H^*=H$, $E^*=E$.
Виграш 1-го гравця (як і програш 2-го гравця) визначаємо так:

$$E^*AH^{*T}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ 0\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}=3.$$

Перевіримо нерівності ситуації рівноваги, тобто з'ясуємо, чи виконуються такі умови:

1. $A_iH^{*T}\le E^*AH^{*T}$, де $i=1,2$, A_i – рядки матриці;

$$A_1H^{*T}\le E^*AH^{*T}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}^T=\frac{3}{5}\le 3;$$

$$A_2H^{*T}\le E^*AH^{*T}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}^T=\frac{3}{5}\le 3.$$

Як бачимо, нерівності виконуються.

2. $E^*AH^{*T}\le E^*A_j$, де $j=1,2,3$; A_j – стовпці матриці;

$$E^*AH^{*T}\le E^*A_1\Leftrightarrow E^*A_1\ge E^*AH^{*T}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\ge 3$$

– неправильно;

$$E^*AH^{*T}\le E^*A_2\Leftrightarrow E^*A_2\ge E^*AH^{*T}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\frac{7}{5}\ge 3$$

– неправильно;

$$E^*AH^{*T}\le E^*A_3\Leftrightarrow E^*A_3\ge E^*AH^{*T}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\ge 3$$

– неправильно.

Нерівності не виконуються.

Оскільки одна група нерівностей не виконується, то стратегії E і H не є оптимальними.

Відповідь. Задані стратегії E і H не є оптимальними.

1.3.3. Знаходження розв’язку у змішаних стратегіях матричної гри з матрицею довільного порядку

Основні співвідношення для оптимальних змішаних стратегій 1-го й 2-го гравців мають такий вигляд:

$$L(A) = E^* A H^{*T};$$

$$A_i H^{*T} \le E^* A H^{*T} \le E^* A_j;$$

$$\xi_i \ge 0, \quad \eta_j \ge 0; \quad \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1,$$

де A_i – рядки матриці, A_j – стовпці матриці.

Приклад 1.15. Знайти розв’язок матричної гри, яку задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

1. Запишемо нерівності, які визначають оптимальну змішану стратегію 1-го гравця:

$$E A_j \ge v,$$

де $E = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Для цього випадку

$$(\xi_1 \ \ \xi_2 \ \ \xi_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ge v, \quad (\xi_1 \ \ \xi_2 \ \ \xi_3)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ge v, \quad (\xi_1 \ \ \xi_2 \ \ \xi_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \ge v,$$

і кінцевий запис має такий вигляд:

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \ge v, \\ -\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 \ge v, \\ -\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 \ge v. \end{cases}$$

2. Запишемо нерівності, що визначають оптимальну змішану стратегію 2-го гравця:

$$A_i H^{*T} \le v,$$

де $H^* = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $A_1 = (1 \ \ -1 \ \ -1)$, $A_2 = (-1 \ \ -1 \ \ 3)$, $A_3 = (-1 \ \ 2 \ \ -1)$.

Тоді відповідні нерівності можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} \le v, \quad \begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} \le v, \quad \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} \le v,$$

або

$$\begin{cases} \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 \le v, \\ -\eta_1 - \eta_2 + 3\eta_3 \le v, \\ -\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 \le v. \end{cases}$$

3. Урахуємо також додаткові умови:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1,$$
$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1.$$

Для того щоб розв'язати задачу, нерівності замінюємо рівняннями. Отже, для 1-го гравця маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - v = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - v = 0, \\ -\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 - v = 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \end{cases}$$

розв'язками якої є $\xi_1 = \frac{6}{13}$, $\xi_2 = \frac{3}{13}$, $\xi_3 = \frac{4}{13}$, $v = -\frac{1}{13}$.

Для 2-го гравця маємо:

$$\begin{cases} \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - v = 0, \\ -\eta_1 - \eta_2 + 3\eta_3 - v = 0, \\ -\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 - v = 0, \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1, \end{cases}$$

звідки отримаємо розв'язок: $\eta_1 = \frac{6}{13}$, $\eta_2 = \frac{4}{13}$, $\eta_3 = \frac{3}{13}$.

Відповідь. Ціна гри $v = -\frac{1}{13}$; оптимальними змішаними стратегіями гравців є $\xi_1 = \frac{6}{13}$, $\xi_2 = \frac{3}{13}$, $\xi_3 = \frac{4}{13}$, $\eta_1 = \frac{6}{13}$, $\eta_2 = \frac{4}{13}$, $\eta_3 = \frac{3}{13}$.

Отже, розв'язок цієї задачі отримано шляхом заміни систем нерівностей системами відповідних рівностей і розв'язанням цих систем. Маємо приклад найпростішого знаходження оптимальних змішаних стратегій гравців і ціни гри. В основному для матричних ігор з довільними матрицями знаходження розв'язків у змішаних стратегіях є більш трудомістким.

Приклад 1.16. Знайти розв'язок матричної гри, заданої матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Відповідно до наслідку з теореми про оптимальні змішані стратегії оптимальні змішані стратегії $E^0 = \left(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0\right)$ і $H^0 = \left(\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0\right)$ 1-го й 2-го гравців мають задовольняти співвідношенням

$$\begin{cases} E^0 A_j \geq v, \quad j = 1..n, \\ A_i H^{0T} \leq v, \quad i = 1..m, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j = 1 \end{cases} \text{ при виконанні умов } \begin{cases} \xi_i \geq 0, \ i = 1..3, \\ \eta_j \geq 0, \ j = 1..3. \end{cases}$$

Запишемо відповідні системи для ξ_i і η_j, де $i, j = 1..3$:

$$\begin{cases} 2\xi_2 + \xi_3 \geq v, \\ \xi_1 + 2\xi_3 \geq v, \\ 2\xi_1 + \xi_2 \geq v, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_2 + 2\eta_3 \leq v, \\ 2\eta_1 + \eta_3 \leq v, \\ \eta_1 + 2\eta_2 \leq v, \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1. \end{cases}$$

Будемо шукати розв'язки систем, замінивши в них усі нерівності на рівності. Розглянемо першу систему:

$$\begin{cases} 2\xi_2 + \xi_3 = v, \\ \xi_1 + 2\xi_3 = v, \\ 2\xi_1 + \xi_2 = v, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \end{cases} \quad \text{або по-іншому:} \quad \begin{cases} 2\xi_2 + \xi_3 - v = 0, \\ \xi_1 + 2\xi_3 - v = 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 - v = 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1. \end{cases}$$

Це система відносно чотирьох невідомих: ξ_i, де $i = 1..3$, та v. Розв'яжемо її, наприклад, методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\{IV \leftrightarrow I\}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\left\{\begin{matrix} II - I \\ III - 2\,II \end{matrix}\right\}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\left\{\begin{matrix} III + II \\ IV + 2\,II \end{matrix}\right\}}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} IV + III \\ III/(-1) \end{matrix}\right\} \qquad \{IV/(-3)\}$$

Звідси знайдемо невідомі: $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1/3$ та $v = 1$.

Отримані розв'язки ξ_i $(i = 1..3)$ системи є невід'ємними, тому вони визначають оптимальну змішану стратегію 1-го гравця: $E^0 = \left(1/3, 1/3, 1/3\right)$. Також знайдено ціну гри: $v = 1$.

Перейдемо до другої системи відносно η_j $(j = 1..3)$. Запишемо її, уважаючи, що $v = 1$, і розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\begin{cases} \eta_2 + 2\eta_3 = 1, \\ 2\eta_1 + \eta_3 = 1, \\ \eta_1 + 2\eta_2 = 1, \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1, \end{cases} \quad \text{або по-іншому:} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\{IV\uparrow\} \qquad \left\{\begin{matrix} IV - I \\ III - 2I \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} IV + II \\ III/(-1) \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} III - 2I \\ I - II \end{matrix}\right\}$$

Звідси $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 1/3$.

Оскільки $\eta_j \geq 0$, то знайдено оптимальну змішану стратегію 2-го гравця: $H^0 = \left(1/3, 1/3, 1/3\right)$.

Ураховуючи вид матриці гри, отримали однакові змішані стратегії гравців.

Відповідь. Розв'язок матричної гри: пара оптимальних змішаних стратегій гравців $E^0 = \left(1/3, 1/3, 1/3\right)$ і $H^0 = \left(1/3, 1/3, 1/3\right)$, ціна гри $v = 1$.

Приклад 1.17. Знайти оптимальні стратегії та ціну матричної гри, заданої матрицею $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оптимальні змішані стратегії 1-го та 2-го гравців $E^0 = \left(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0\right)$ і $H^0 = \left(\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0\right)$ мають задовольняти співвідношенням

$$\begin{cases} E^0 A_j \ge v, \quad j = 1..n, \\ A_i H^{0T} \le v, \quad i = 1..m, \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1 \end{cases} \text{при виконанні умов } \begin{cases} \xi_i \ge 0, \ i = 1..3, \\ \eta_j \ge 0, \ j = 1..3. \end{cases}$$

Запишемо відповідні системи для ξ_i і η_j, де $i, j = 1..3$:

$$\begin{cases} 3\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 \ge v, \\ -2\xi_1 + 4\xi_2 + 2\xi_3 \ge v, \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 + 6\xi_3 \ge v, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\eta_1 - 2\eta_2 + 4\eta_3 \le v, \\ -\eta_1 + 4\eta_2 + 2\eta_3 \le v, \\ 2\eta_1 + 2\eta_2 + 6\eta_3 \le v, \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1. \end{cases}$$

Будемо шукати розв'язок систем, замінивши в них усі нерівності на рівності. Розглянемо першу систему:

$$\begin{cases} 3\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - v = 0, \\ -2\xi_1 + 4\xi_2 + 2\xi_3 - v = 0, \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 + 6\xi_3 - v = 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1. \end{cases}$$

Для її розв'язання скористуємось методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left\{ \begin{matrix} II - 3I \\ III + 2I \\ IV - 4I \end{matrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{matrix} II \times (-1) \\ III + 3IV \\ (-2)IV + II \end{matrix} \right\}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\{III/(-2)\}$, $\{IV-III\}$

Оскільки кількість рівнянь системи є меншою від кількості невідомих, система є невизначеною, тобто має більш ніж один розв’язок.

Отже, заміна всіх нерівностей на рівності не дала змоги знайти розв’язок задачі. Зробимо по-іншому. Змінимо знак «$\geq$» першої нерівності першої системи на знак «$>$», а інші нерівності запишемо у вигляді рівностей (рівнянь). Оскільки $3\xi_1-\xi_2+2\xi_3>v$ (тобто для $j=1$ виконується строга нерівність $E^0A^j>v$), то $\eta_1=0$. Підставивши $\eta_1=0$ у другу систему, будемо розв’язувати її відносно η_j ($j=2,3$) та v. Однак ця система є несумісною.

Діючи аналогічним чином, отримаємо такі системі:

$$\begin{cases} 3\xi_1-\xi_2+2\xi_3=v, \\ -2\xi_1+4\xi_2+2\xi_3=v, \\ 4\xi_1+2\xi_2+6\xi_3>v, \\ \xi_1+\xi_2+\xi_3=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\eta_1-2\eta_2+4\eta_3<v, \\ -\eta_1+4\eta_2+2\eta_3=v, \\ 2\eta_1+2\eta_2+6\eta_3=v, \\ \eta_1+\eta_2+\eta_3=1. \end{cases}$$

Зі строгих нерівностей випливає, що $\eta_3=0$ і $\xi_1=0$, отже, маємо такі системи:

$$\begin{cases} -\xi_2+2\xi_3=v, \\ 4\xi_2+2\xi_3=v, \\ \xi_2+\xi_3=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\eta_1+4\eta_2=v, \\ 2\eta_1+2\eta_2=v, \\ \eta_1+\eta_2=1. \end{cases}$$

Розв’яжемо першу систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\begin{Bmatrix} II+I \\ III-4I \end{Bmatrix}$ $\qquad$ $\{(3III+2II)/(-5)\}$

Звідси $v=2$, $\xi_3=1$, $\xi_2=0$, тобто знайдено ціну гри v і оптимальну стратегію 1-го гравця: $E^0=(0,0,1)$.

Розв'яжемо другу систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} II + I \\ III - 2I \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} II - III \\ III / (-1) \end{Bmatrix}$$

Звідси $\eta_2 = {}^{3}\!/_{5}$, $\eta_1 = {}^{2}\!/_{5}$, тобто знайдено оптимальну стратегію 2-го гравця: $H^0 = \left({}^{2}\!/_{5}, {}^{3}\!/_{5}, 0\right)$.

Відповідь. Розв'язок гри – це пара оптимальних змішаних стратегій гравців $E^0 = (0, 0, 1)$ і $H^0 = \left({}^{2}\!/_{5}, {}^{3}\!/_{5}, 0\right)$ і ціна гри $v = 2$.

Розв'язання прикладу 1.17 виявилося більш трудомістким порівняно з розв'язанням прикладів 1.15 і 1.16 через послідовний перебір замін окремих нерівностей рівностями та розв'язання більшої кількості систем рівнянь. Проте відповідно до основної теореми матричних ігор будь-яка матрична гра має принаймні один оптимальний розв'язок у загальному випадку, у змішаних стратегіях та відповідну ціну гри.

Алгоритм розв'язання матричної гри у змішаних стратегіях

1. В обох системах (позначимо їх (С1) і (С2)) замінимо всі нерівності на рівності, крім одного (будь-якого) (наприклад, першого в системі (С1)) (оскільки розв'язок системи зі знаком «$=$» не підходить). Знак нестрогої нерівності ($\geq (\leq)$) цієї нерівності замінимо на знак строгої нерівності ($> (<)$). Тоді відповідна змінна системи (С2), а саме, змінна η_1, буде дорівнювати нулю. Тепер будемо розв'язувати систему (С2).

2. Якщо система буде несумісною або ж один з розв'язків (або декілька) буде від'ємним, то повертаємося до п. 1 і вибираємо іншу нерівність.

Якщо ж розв'язок системи (С2) буде знайдено, то отримаємо значення невідомих η_j $(j = 1..n)$ і ціну гри v. Підставляючи значення v у (С1), будемо шукати розв'язок системи (С1) відносно ξ_i, $i = 1..m$.

Якщо розв'язок (С1) існує, то отримаємо розв'язок вихідної задачі; якщо інакше, то повертаємося до п. 1 і вибираємо іншу нерівність (знак якої змінюємо), а замість інших нерівностей записуємо рівняння і т. д.

Якщо ж після перебору всіх варіантів розв'язок не знайдено, то в обох системах залишаємо вже дві нерівності (змінюючи їх знаки), а решту записуємо у вигляді рівнянь і розв'язуємо відповідні системи, і т. д. Розв'язок матричної гри у змішаних стратегіях обов'язково буде знайдений.

1.3.4. Симетричні ігри. Діагональні ігри

Квадратну матрицю $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ називають *кососиметричною* (або *антисиметричною*), якщо

$$a_{ij}=-a_{ji}\quad \forall\, i,j,$$

тобто $A=-A^T$.

Матрична гра називається *симетричною*, якщо її матриця є кососиметричною.

Ціна симетричної гри дорівнює нулю, тобто $v=0$, а оптимальні змішані стратегії E^0 і H^0 1-го і 2-го гравців збігаються.

Приклад 1.18. Знайти розв'язок симетричної гри, заданої матрицею

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ є кососиметричною, тому ця матрична гра є симетричною. Отже, ціна цієї гри дорівнює нулю, тобто $v=0$, а оптимальні змішані стратегії 1-го і 2-го гравців мають бути однаковими. Позначимо їх $E^0=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)$. Тоді для знаходження ξ_i, де $i=1..3$, треба розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} -\xi_2+2\xi_3\ge 0, \\ \xi_1-3\xi_3\ge 0, \\ -2\xi_1+3\xi_2\ge 0, \\ \xi_1+\xi_2+\xi_3=1. \end{cases}$$

Замінивши спочатку в цій системі всі нерівності рівностями, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -\xi_2+2\xi_3=0, \\ \xi_1-3\xi_3=0, \\ -2\xi_1+3\xi_2=0, \\ \xi_1+\xi_2+\xi_3=1. \end{cases}$$

Оскільки кількість рівнянь отриманої системи більше за кількість невідомих, викреслимо одне з рівнянь, наприклад 3-тє. Унаслідок цього одержимо систему

$$\begin{cases} -\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ \xi_1 - 3\xi_3 = 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1. \end{cases}$$

Виразивши з перших двох рівнянь змінні ξ_1 і ξ_2 через змінну ξ_3, підставивши їх у 3-тє рівняння, отримаємо рівність $6\xi_3 = 1$. Звідси знайдемо $\xi_3 = 1/6$, а також $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 1/3$. Таким чином, отримано розв'язок цієї симетричної матричної гри:

$$E^0 = H^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \; v = 0 .$$

Відповідь. Розв'язок гри – це пара оптимальних змішаних стратегій гравців $E^0 = H^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ і ціна гри $v = 0$.

Матрична гра називається *діагональною*, якщо її матриця є діагональною. *Діагональна матриця* – це квадратна матриця, усі елементи якої, що стоять поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чи завжди матрична гра має сідлові точки?
2. Чи можуть бути різними нижнє й верхнє значення матричної гри?
3. Як змінюються стратегії гравців, якщо матрична гра не має сідлових точок?
4. Яку стратегію називають змішаною стратегією гравця?
5. Дати означення простору змішаних стратегій.
6. У якому вигляді можна подати простір змішаних стратегій?
7. Записати умови, яким мають задовольняти ймовірності ξ_i та η_j.
8. Що являє собою ціна гри при використанні змішаних стратегій?
9. Як визначити виграш 1-го гравця для матричної гри при використанні змішаних стратегій?
10. Що таке оптимальні змішані стратегії?
11. Навести необхідні й достатні умови оптимальності змішаних стратегій 1-го й 2-го гравців.
12. Чи є наслідком означення оптимальних змішаних стратегій їх існування?
13. Описати алгоритм розв'язання матричної гри у змішаних стратегіях.
14. Чи завжди існує розв'язок матричної гри?
15. Яку матрицю називають кососиметричною?
16. Дати означення симетричної і діагональної гри.
17. Указати особливості знаходження розв'язку симетричної гри.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

У задачах 1.3.1–1.3.3 визначити виграш 1-го гравця для матричної гри з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, якщо 1-й гравець вибрав стратегію $E=\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\right)$, а 2-й гравець – стратегію $H=\left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\right)$.

1.3.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $E=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $H=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1.3.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $E=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $H=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$.

1.3.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $E=\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $H=\left(\frac{1}{8}, 0, \frac{5}{8}, \frac{1}{4}\right)$.

У задачах 1.3.4–1.3.7 перевірити, чи є оптимальними стратегії $E^*=\left(\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_m^*\right)$ і $H^*=\left(\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*\right)$ у матричній грі з матрицею $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$.

1.3.4. $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $H^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1.3.5. $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $E^*=\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $H^*=\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$.

1.3.6. $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $E^*=\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $H^*=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1.3.7. $B=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, $E^*=\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $H^*=\left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0\right)$.

У задачах 1.3.8–1.3.14 знайти оптимальні змішані стратегії та ціну матричної гри, заданої матрицею $C = \left(c_{i\,j}\right)_{m\times n}$.

1.3.8. $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **1.3.9.** $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **1.3.10.** $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.3.11. $C = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. **1.3.12.** $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. **1.3.13.** $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.3.14. Розглянути матрицю гри «Камінь, ножиці, папір» (див. завдання 1.1.7 практичних завдань підрозд. 1.1).

У задачах 1.3.15, 1.3.16 знайти оптимальні змішані стратегії та ціну матричної гри, заданої матрицею $D = \left(d_{i\,j}\right)_{n\times n}$.

1.3.15. $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **1.3.16.** $D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

У задачах 1.3.1–1.3.3 визначити виграш 1-го гравця для матричної гри з матрицею $A = \left(a_{i\,j}\right)_{m\times n}$, якщо 1-й гравець вибрав стратегію $E = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\right)$, а 2-й гравець – стратегію $H = \left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\right)$.

1.3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $H = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

1.3.2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $H = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{6}, \frac{5}{12}\right)$.

1.3.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, 0\right)$, $H = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

У задачах 1.3.4–1.3.7 перевірити, чи є оптимальними стратегії $E^* = \left(\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_m^*\right)$ і $H^* = \left(\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*\right)$ у матричній грі з матрицею $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$.

1.3.4. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $H^* = (0, 1, 0)$.

1.3.5. $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$, $H^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

1.3.6. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $H^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

1.3.7. $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $E^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $H^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0\right)$.

У задачах 1.3.8–1.3.13 знайти оптимальні змішані стратегії та ціну матричної гри, заданої матрицею $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$.

1.3.8. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. **1.3.9.** $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. **1.3.10.** $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3.11. $C = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. **1.3.12.** $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **1.3.13.** $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

У задачах 1.3.14, 1.3.15 знайти оптимальні змішані стратегії та ціну матричної гри, заданої матрицею $D = \left(d_{ij}\right)_{n\times n}$.

1.3.14. $D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -7 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. **1.3.15.** $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3.16. Знайти оптимальні стратегії і ціну діагональної гри з додатними елементами на діагоналі.

1.4. Методи розв’язання матричної гри порядку 2×2

Нехай матричну гру порядку 2×2 задано матрицею виграшів 1-го гравця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Знаходження розв’язку гри починається з пошуку сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо гра не має сідлової точки у чистих стратегій, то треба шукати сідлову точку у змішаних стратегіях.

1. Позначимо змішані стратегії через $E = (\xi_1, \xi_2)$ і $H = (\eta_1, \eta_2)$. Оптимальна змішана стратегія 1-го гравця визначається нерівностями

$$E\,A_j \geq v,$$

де A_j – вектор-стовпець матриці гри.

Запис рівнянь, що відповідають нерівностям, та умов невід’ємності ймовірностей дає систему лінійних рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 - v = 0, \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 - v = 0, \\ \xi_1 + \xi_2 = 1. \end{cases}$$

Якщо розглянути визначник системи

$$\Delta_\xi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -1 \\ a_{12} & a_{22} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a_{21} + a_{22} + a_{11} - a_{12},$$

то її розв’язок можна записати у вигляді

$$\xi_1 = \frac{1}{\Delta_\xi}\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & -1 \\ 0 & a_{22} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\Delta_\xi}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & -1 \\ a_{12} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad v = \frac{1}{\Delta_\xi}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Звідси

$$\xi_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{22} + a_{11} - a_{21} - a_{12}}, \; \xi_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{22} + a_{11} - a_{21} - a_{12}}, \; v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22} + a_{11} - a_{21} - a_{12}}.$$

2. Оптимальна змішана стратегія 2-го гравця визначається нерівностями

$$A_i\,H^{*T} \leq v,$$

де $H^* = (\eta_1, \eta_2)$, A_i – вектор-рядок матриці гри. Відповідна система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 - v = 0, \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 - v = 0, \\ \eta_1 + \eta_2 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язком є

$$\eta_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} + a_{11} - a_{21} - a_{12}}, \quad \eta_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{22} + a_{11} - a_{21} - a_{12}}.$$

Розв'язок матричної гри порядку 2×2 у матричному вигляді:

$$E^* = \frac{J A^*}{\left| J A^* J^T \right|}; \quad H^{*T} = \frac{A^* J^T}{\left| J A^* J^T \right|}; \quad v = \frac{|A|}{\left| J A^* J^T \right|},$$

де A^* – матриця, союзна до матриці A (елементи дорівнюють алгебраїчним доповненням транспонованої матриці);

$|A|$ – визначник матриці A;

$\left| J A^* J^T \right|$ – визначник добутку матриць;

$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ – вектор-рядок одиниць.

Приклад 1.19. Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну матричної гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = -4, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1.$$

Запишемо союзну матрицю A^* для матриці A: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислимо добутки матриць

$$J A^* J^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix},$$

$$J A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* J^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

та визначники

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 = -7, \quad \left| J A^* J^T \right| = |(-4)| = -4.$$

Тоді отримаємо оптимальні змішані стратегії гравців

$$E^* = \frac{J\,A^*}{\left|J\,A^* J^T\right|} = \frac{\begin{pmatrix}-3 & -1\end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

$$H^{*T} = \frac{A^* J^T}{\left|J\,A^* J^T\right|} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\ -3\end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}, \quad H^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right),$$

,

і ціну гри $v = \dfrac{|A|}{\left|J\,A^* J^T\right|} = \dfrac{-7}{-4} = \dfrac{7}{4}$.

Відповідь. $E^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $H^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $v = \frac{7}{4}$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У якому випадку шукають сідлову точку у змішаних стратегіях?
2. Описати процес знаходження розв'язку матричної гри порядку 2×2.
3. Записати формули для обчислення оптимальних стратегій гравців матричної гри порядку 2×2.
4. Дати означення матриці A^*.
5. Який виграш (елемент або елементи матриці гри) може отримати 1-й гравець, якщо він вибирає i-ту стратегію ($i = 1, 2$)?
6. Який виграш може отримати 2-й гравець, якщо він вибирає j-ту стратегію ($j = 1, 2$)?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

У задачах 1.4.1–1.4.3 знайти оптимальні змішані стратегії та ціну гри з матрицею $A = \left(a_{i\,j}\right)_{2\times 2}$.

1.4.1. $A = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 5 & -4\end{pmatrix}$. **1.4.2.** $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. **1.4.3.** $A = \begin{pmatrix}-1 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

У задачах 1.4.4–1.4.6 розглянути матриці ігор, побудовані раніше (це розв'язки практичних завдань підрозд. 1.1), для кожної матриці знайти оптимальні змішані стратегії та ціну гри.

1.4.4. Задача 1.1.1. **1.4.5.** Задача 1.1.6. **1.4.6.** Задача 1.1.9.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

У задачах 1.4.1–1.4.3 знайти оптимальні змішані стратегії та ціну гри з матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2}$.

1.4.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. **1.4.2.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. **1.4.3.** $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

У задачах 1.4.4, 1.4.5 розглянути матриці ігор, які було вже побудовано (це розв'язки завдань для самостійної роботи підрозд. 1.1), для кожної матриці знайти оптимальні змішані стратегії та ціну гри.

1.4.4. Задача 1.1.1. **1.4.5.** Задача 1.1.8.

1.4.6. Розглянути гру, задану матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Знайти розв'язок цієї гри у трьох випадках: 1) $a < 1$; 2) $1 < a < 3$; 3) $a > 3$.

1.5. Спрощення матричної гри за допомогою домінування стратегій

Домінування в теорії ігор – ситуація, при якій одна зі стратегій деякого гравця дає більший виграш, ніж інша, при будь-яких діях його опонентів.

Застосування принципу домінування дозволяє зменшити кількість стратегій гравців, тобто розмірність матриці A, і тим самим спростити її.

Уважають, що для заданої матриці *A*:

– *i-й рядок строго домінує k-й рядок*, якщо

$$a_{ij} > a_{kj} \text{ для усіх } j,$$

тобто i-та стратегія 1-го гравця дає більший виграш, ніж його k-та стратегія при будь-яких діях 2-го гравця;

– *i-й рядок слабо домінує k-й рядок*, якщо

$$a_{ij} > a_{kj} \text{ принаймні для одного } j,$$

$$a_{ij} \ge a_{kj} \text{ для усіх інших } j,$$

тобто i-та стратегія 1-го гравця забезпечує йому більший виграш, ніж його k-та стратегія, принаймні при одній стратегії (j) 2-го гравця, а при усіх інших стратегіях 2-го гравця i-та і k-та стратегії забезпечують 1-му гравцю однакові виграші. Іншими словами, i-та стратегія 1-го гравця приводить до не гіршого результату, ніж його k-та стратегія.

При цьому i-ту стратегію називають *домінуючою*, а k-ту стратегію – *домінованою*.

Уважають, що для заданої матриці A:

– $\boldsymbol{j}$ *-й стовпець строго домінує* $\boldsymbol{l}$ *-й стовпець*, якщо

$$\boldsymbol{a_{ij}} < \boldsymbol{a_{il}} \text{ для всіх } \boldsymbol{i},$$

тобто $\boldsymbol{l}$ -та стратегія 2-го гравця не дає кращого результату, ніж його $\boldsymbol{j}$ -та стратегія, при будь-якій стратегії ($\boldsymbol{i}$) 1-го гравця;

– $\boldsymbol{j}$ *-й стовпець слабо домінує* $\boldsymbol{l}$ *-й стовпець*, якщо

$$\boldsymbol{a_{ij}} < \boldsymbol{a_{il}} \text{ принаймні для одного } \boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{a_{ij}} \le \boldsymbol{a_{il}} \text{ для усіх інших } \boldsymbol{i},$$

тобто $\boldsymbol{l}$ -та стратегія 2-го гравця дає гірший результат, ніж його $\boldsymbol{j}$ -та стратегія, принаймні при одній стратегії ($\boldsymbol{i}$) 1-го гравця, а при усіх інших стратегіях 1-го гравця $\boldsymbol{j}$ -та і $\boldsymbol{l}$ -та стратегії забезпечують 2-му гравцю однакові програші.

При цьому $\boldsymbol{j}$ -ту стратегію називають *домінуючою*, а $\boldsymbol{l}$ -ту стратегію – *домінованою*.

Стратегії $\boldsymbol{i}$ і $\boldsymbol{j}$ відповідно 1-го і 2-го гравців називають *нетранзитивними*, якщо стратегія $\boldsymbol{i}$ не домінує стратегію $\boldsymbol{j}$ і стратегія $\boldsymbol{j}$ не домінує $\boldsymbol{i}$. Це означає, що незалежно від вибору стратегій іншим гравцем виграші гравцеві може забезпечувати як вибір стратегії $\boldsymbol{i}$, так і вибір $\boldsymbol{j}$.

Отже, у матриці гри *доміновані* стратегії 1-го й 2-го гравців можна викреслити і замість них у відповідних змішаних стратегіях гравців поставити нулі. Після цього гравці можуть використовувати тільки ті стратегії, які не домінуються.

Нехай задано вектор змішаних стратегій гравця $\boldsymbol{E} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$. *Розширенням елемента* ξ *на* $\boldsymbol{i}$ *-му місці* називають вектор

$$\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i-1}, 0, \xi_i, \ldots, \xi_m\}.$$

Запис нового вектора потрібно розуміти так, що елементів стало $\boldsymbol{m+1}$, а індекс $\boldsymbol{m}$ у новому векторі показує, що це $\boldsymbol{m}$ -й елемент заданого вектора.

Приклад 1.20. Знайти змішані стратегії гравців у грі з матрицею

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для заданої матриці 2-й стовпець домінує 4-й (усі елементи 2-го стовпця менше відповідних елементів 4-го стовпця), тобто 2-й гравець не буде використовувати 4-ту стратегію, і на неї можна не звертати уваги. Отже, матрицю можна розглядати у вигляді

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці 3-й рядок домінує 1-й (усі елементи 3-го рядка більше відповідних елементів 1-го рядка), тобто 1-й гравець не буде використовувати свою 1-шу стратегію, і на неї можна не звертати уваги. Отже, тепер матрицю можна розглядати у вигляді

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

У цій матриці 2-й стовпець домінує 3-й (усі елементи 2-го стовпця менше відповідних елементів 3-го стовпця), тобто 2-й гравець не буде використовувати 3-тю стратегію, і на неї можна не звертати уваги. Отже, матрицю можна розглядати у вигляді

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким чином, використовуючи співвідношення переваги, задану матрицю перетворили в матрицю $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Цю матрицю вже було розглянуто в підрозд. 1.4 (приклад 1.19). Розв'язок відповідної гри має вигляд

$$E^*=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\quad H^*=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right).$$

Далі, використовуючи розширення змішаних стратегій, для заданої матриці гри

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 5 & 3\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

одержимо:

$E=\left(0,\ \frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ (1-ша стратегія 1-м гравцем не використовувалася);

$H=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0,\ 0\right)$ (3-тя й 4-та стратегії 2-м гравцем не використовувалися).

Ціна гри $v=\frac{7}{4}$.

Відповідь. $E=\left(0,\ \frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$, $H=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0,\ 0\right)$, $v=\frac{7}{4}$.

Приклад 1.21. Знайти змішані стратегії гравців у грі з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо домінування рядків і стовпців матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \text{1-й рядок} > \text{2-й рядок} \rightarrow \\ \rightarrow x_2 = 0 \\ \text{1-й рядок} > \text{3-й рядок} \rightarrow \\ \rightarrow x_3 = 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} \text{2-й рядок} < \text{1-й рядок} \rightarrow y_1 = 0 \\ \text{2-й рядок} < \text{4-й рядок} \rightarrow y_4 = 0 \\ \text{2-й рядок} < \text{5-й рядок} \rightarrow y_5 = 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Оптимальні стратегії гравців мають такий вигляд:

$$E^* = \left(x_{01}, 0, 0, x_{04}\right), \; H^* = \left(0, y_{02}, y_{03}, 0, 0\right).$$

Отже, застосування домінування рядків і стовпців дало змогу зменшити розмір матриці гри:

$$A_{4\times5} \rightarrow A_{2\times2}.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дати означення домінування k-го рядка над i-м рядком для заданої матриці A.
2. Що означає: i-й рядок строго (слабо) домінує k-й рядок?
3. Що означає: j-й стовпець строго (слабо) домінує l-й стовпець?
4. У якому випадку гравець використовує тільки ті стратегії, які вже не можна домінувати?
5. Для чого використовують домінування рядків і стовпців у матриці гри?
6. Яким чином домінування рядків і стовпців впливає на розмірність матриці гри?
7. Чи завжди домінування рядків і стовпців спрощує матрицю гри?
8. Дати означення розширення елемента вектора змішаних стратегій на i-му місці.
9. Які стратегії називають нетранзитивними?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

У задачах 1.5.1–1.5.9, використовуючи означення домінування рядків і стовпців, спростити матриці ігор і знайти їх розв'язок.

1.5.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$. **1.5.2.** $A=\begin{pmatrix}-10 & 0 & 6\\ 0 & 10 & 7\end{pmatrix}$. **1.5.3.** $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}$.

1.5.4. $A=\begin{pmatrix}0 & 15\\ 8 & 0\\ -10 & 20\\ 10 & 12\end{pmatrix}$. **1.5.5.** $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. **1.5.6.** $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & 5 & 1\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

1.5.7. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dots & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. **1.5.8.** $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\\ 0 & 0\\ -3 & -2\\ -4 & 5\end{pmatrix}$.

1.5.9. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & -3 & -4\\ -2 & 1 & 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

У задачах 1.5.1–1.5.8, використовуючи означення домінування рядків і стовпців, спростити матриці ігор і знайти їх розв'язок.

1.5.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$. **1.5.2.** $A=\begin{pmatrix}24 & 0\\ 0 & 8\\ 4 & 5\end{pmatrix}$. **1.5.3.** $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

1.5.4. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$. **1.5.5.** $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ 4 & 7 & 3\\ 8 & 7 & 2\end{pmatrix}$. **1.5.6.** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

1.5.7. $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & -2 & -8 \\ 3 & -6 & 0 & 8 & -9 \end{pmatrix}$. **1.5.8.** $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.5.9. Нехай матриця гри має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_3 \\ a_1 & a_6 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_3 \end{pmatrix},$$

причому елементи матриці задовольняють нерівностям

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 .$$

Довести, що для оптимальних стратегій і ціни гри правильними є співвідношення:

$$x_3 = y_2 = 0 , \quad x_1 > 1/2 , \quad x_1 > y_1 > x_2 , \quad a_3 < v < a_4 .$$

1.6. Спрощення елементів матриці гри

Нехай задано матричну гру Γ_A з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ і ціною гри v_A. Тоді оптимальні змішані стратегії гравців матричної гри Γ_B з матрицею *B*, яку можна подати як

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu, \quad \text{де } \lambda \neq 0 ,$$

збігаються з оптимальними змішаними стратегіями відповідних гравців у матричній грі Γ_A, а ціна гри Γ_B має вигляд

$$v_B = \lambda v_A + \mu .$$

Використовуючи це твердження, можна спрощувати елементи матриці гри.

Приклад 1.22. Знайти розв'язок гри, використовуючи спрощення елементів для заданої матриці

$$A=\begin{pmatrix} 200 & 300 \\ 600 & 100 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо нову матрицю, для якої

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu, \text{ де } \lambda = 0{,}01 , \quad \mu = -1 .$$

Тоді матриця B набуває вигляду

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці запишемо її визначник і союзну матрицю

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10\,, \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо добутки матриць

$$J\,B^* J^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix},$$

$$J B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B^* J^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

і визначник

$$\left| J\,B^* J^T \right| = |-6| = -6\,.$$

Тоді знайдемо оптимальні змішані стратегії гравців

$$E^* = \frac{JB^*}{\left| J\,B^* J^T \right|} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$H^{*T} = \frac{B^* J^T}{\left| J\,B^* J^T \right|} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \quad H^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

і ціну гри з матрицею В

$$v_B = \frac{|B|}{\left| J\,B^* J^T \right|} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}\,.$$

Ціну гри з матрицею А визначимо за формулою

$$v_A = \frac{v_B - \mu}{\lambda} = \frac{5/3 + 1}{0{,}01} = \frac{800}{3}\,.$$

Відповідь. Ціна гри $v_A = \dfrac{800}{3}$, оптимальні змішані стратегії гравців: $E^* = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3} \right)$, $H^* = \left(\dfrac{5}{6}, \dfrac{1}{6} \right)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Описати процес спрощення елементів матриці гри.
2. Для матриць якого вигляду треба використовувати спрощення їх елементів?
3. Чи змінюються оптимальні змішані стратегії після спрощення матриці гри?
4. Як пов’язані між собою ціни гри початкової та спрощеної матриць гри?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

У задачах 1.6.1–1.6.5, використовуючи спрощення елементів матриці гри, знайти розв'язок гри, заданої матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

1.6.1. $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$. **1.6.2.** $A = \begin{pmatrix} 300 & 400 \\ 700 & 200 \end{pmatrix}$. **1.6.3.** $A = \begin{pmatrix} 36 & 54 \\ 18 & 27 \\ -45 & 72 \end{pmatrix}$.

1.6.4. $A = \begin{pmatrix} 25 & 85 \\ 35 & 65 \end{pmatrix}$. **1.6.5.** $A = \begin{pmatrix} 12 & 42 & 30 \\ 18 & 24 & 36 \\ 36 & 84 & 54 \end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

У задачах 1.6.1–1.6.5, використовуючи спрощення елементів матриці гри, знайти розв'язок гри, заданої матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

1.6.1. $A = \begin{pmatrix} 9 & -36 \\ -27 & -45 \end{pmatrix}$. **1.6.2.** $A = \begin{pmatrix} 100 & 400 \\ 200 & 800 \end{pmatrix}$. **1.6.3.** $A = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,6 \\ 2,7 & 3,6 \end{pmatrix}$.

1.6.4. $A = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 \\ -18 & 18 & -36 \\ -27 & 54 & -45 \end{pmatrix}$. **1.6.5.** $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 & 12/5 \\ 8/5 & 6/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.

1.7. Графічний метод розв'язання ігор розміром 2×n і m×2

Розглянемо матричну гру порядку 2×n. У цій грі 1-й гравець має дві чисті стратегії, а 2-й гравець – n чистих стратегій. При цьому платіжна матриця гри має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання почнемо зі знаходження сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо вона є, то розв'язок гри знайдено. Якщо її немає, то шукаємо розв'язок гри у змішаних стратегіях. Розв'язок гри будемо шукати графічно.

Для змішаних стратегій $E = \left\{\xi_1, \xi_2\right\}$, $H = \left\{\eta_1, \ldots, \eta_n\right\}$ гравців і ціни гри v запишемо систему

$$\begin{cases} a_{1j}\xi_1 + a_{2j}\xi_2 \geq v, \\ a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n \leq v, \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n \leq v, \\ \xi_2 = 1 - \xi_1, \\ \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n = 1, \end{cases}$$

де $\xi_1, \xi_2 \geq 0$, $\eta_j \geq 0$, $j = 1..n$.

Замінимо нерівності рівностями:

$$a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n = v,$$
$$a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n = v.$$

Позначимо через $M_j(\xi_1)$ ($j = 1..n$) ліві частини перших нерівностей системи, записаних відносно ξ_1 і ξ_2:

$$M_j(\xi_1) = a_{1j}\xi_1 + a_{2j}\xi_2 = \left(a_{1j} - a_{2j}\right)\xi_1 + a_{2j}, \quad j = 1..n.$$

Тут $M_j(\xi_1)$ – середній виграш 1-го гравця при умові, що він застосовує свою змішану стратегію, а 2-й гравець – свою j-ту чисту стратегію.

Зобразимо декартову прямокутну систему координат: на осі абсцис будемо відкладати значення ξ_1, на осі ординат – $M_j(\xi_1)$. Оскільки $M_j(\xi_1)$ лінійно залежить від ξ_1, то кожному значенню j, де $j = 1..n$, відповідає пряма (рис. 1.1).

Метою 2-го гравця є мінімізація виграшу 1-го гравця шляхом вибору своїх стратегій. Тому обчислимо

$$\min_j M_j(\xi_1) = M(\xi_1),$$

де $M(\xi_1)$ визначає нижню обвідну всіх прямих, що відповідають стратегіям 2-го гравця. Це ламана, повернена опуклістю вверх. Позначимо її жирною лінією.

Мета 1-го гравця – максимізувати свій виграш шляхом вибору ξ_1. Тому обчислимо

$$\max_{\xi_1} M(\xi_1) = M\left(\xi_1^0\right).$$

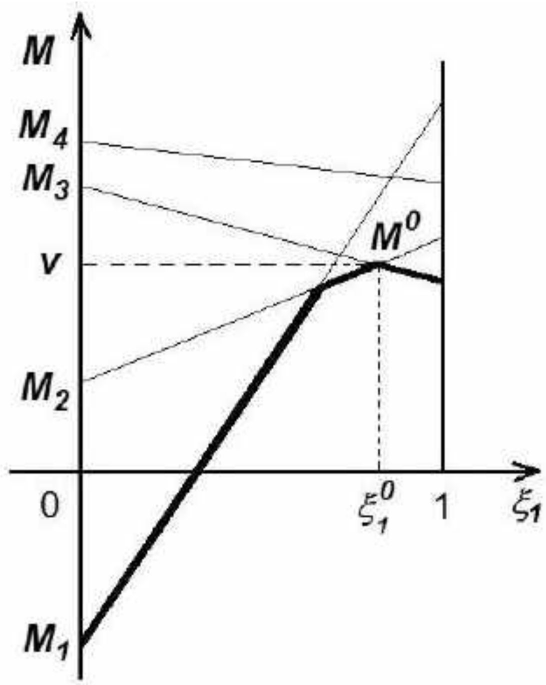


Рис. 1.1

Це максимальне значення $M\left(\xi_1^0\right)$ отримано при $\xi_1 = \xi_1^0$. Позначимо його на рис. 1.1 точкою M^0.

Ціна гри дорівнює ординаті точки M^0:

$$v = \min_j \max_{\xi_1} M_j(\xi_1) = M(\xi_1^0).$$

Так графічно наближено визначили оптимальну змішану стратегію $E^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$ 1-го гравця й пару чистих стратегій 2-го гравця, які при перетині утворюють точку M^0: це 2-га і 3-тя стратегії. Для цих стратегій нерівності стають рівностями

$$M_j(\xi_1) = v, \quad j = 2, 3.$$

Тепер можна розв'язати систему й визначити точні значення ξ_1^0 і v.

Далі для тих j, для яких $M_j(\xi_1)$ не утворюють точки M^0, візьмемо $\eta_j = 0$. А для тих j, для яких $M_j(\xi_1)$ утворюють точку M^0, визначимо η_j, розв'язуючи систему рівнянь.

У цьому випадку система має вигляд

$$\begin{cases} a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3 = v, \\ a_{22}\eta_2 + a_{23}\eta_3 = v, \end{cases}$$

а $\eta_1 = \eta_4 = 0$. Розв'язати її можна, узявши $\eta_2 = 1 - \eta_3$.

Приклад 1.23. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для заданої гри запишемо функції $M_j(\xi_1)$ ($j = 1..4$):

$$M_1(\xi_1) = (a_{11} - a_{21})\xi_1 + a_{21} = -2\,\xi_1 + 4,$$
$$M_2(\xi_1) = (a_{12} - a_{22})\xi_1 + a_{22} = 2\,\xi_1 + 1,$$
$$M_3(\xi_1) = (a_{13} - a_{23})\xi_1 + a_{23} = -5\,\xi_1 + 6,$$
$$M_4(\xi_1) = (a_{14} - a_{24})\xi_1 + a_{24} = 5\,\xi_1.$$

Побудуємо прямі – графіки функцій $M_j(\xi_1)$ ($j = 1..4$) (рис. 1.2). Бачимо, що максиміном є точка перетину прямих $M_2(\xi_1)$ і $M_3(\xi_1)$, тобто

$$2\xi_1 + 1 = -5\xi_1 + 6 \quad \Rightarrow \quad \xi_1^0 = \frac{5}{7} \text{ і відповідно } \xi_2^0 = 1 - \xi_1^0 = \frac{2}{7}.$$

Отже, знайдено оптимальні стратегії 1-го гравця $E^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$ і ціна гри:

$$v = M_2\left(\xi_1^0 = \frac{5}{7}\right) = M_3\left(\xi_1^0 = \frac{5}{7}\right) = 2 \cdot \frac{5}{7} + 1 = -5 \cdot \frac{5}{7} + 6 = \frac{17}{7}.$$

Також визначено, що точку M^0 при перетині утворюють пара чистих стратегій 2-го гравця, а саме 2-га та 3-тя стратегії.

Для $j=1$ і $j=4$ прямі $M_j(\xi_1)$ не утворюють точки M^0, тому візьмемо $\eta_1=0$ і $\eta_4=0$. А для $j=2$ і $j=3$ визначимо η_j, розв'язуючи систему рівнянь

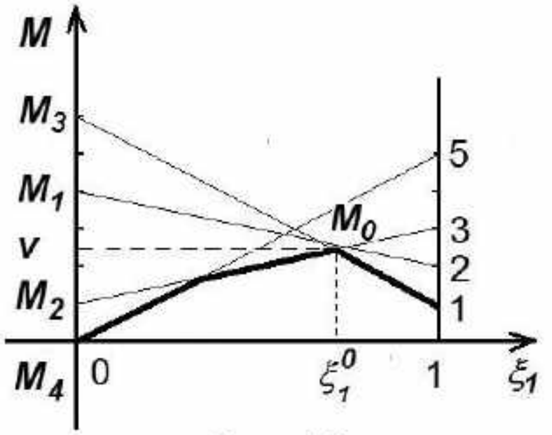


Рис. 1.2

$$\begin{cases} 3\eta_2+\eta_3=\dfrac{17}{7}, \\ \eta_2+6\eta_3=\dfrac{17}{7}. \end{cases}$$

Уважаючи, що $\eta_2=1-\eta_3$, знайдемо $\eta_2=\dfrac{5}{7}$, $\eta_3=\dfrac{2}{7}$. Звідси оптимальні стратегії 2-го гравця $H^*=\left(0,\dfrac{5}{7},\dfrac{2}{7},0\right)$.

Відповідь. Розв'язок гри: пара оптимальних стратегій 1-го і 2-го гравців $E^*=\left(\dfrac{5}{7},\dfrac{2}{7}\right)$, $H^*=\left(0,\dfrac{5}{7},\dfrac{2}{7},0\right)$ і ціна гри $v=\dfrac{17}{7}$.

Окремий випадок. Якщо при деякому $j=j_0$ стратегії 2-го гравця утворюють точку M^0 і при цьому $a_{1j_0}=a_{2j_0}$, то максимальне значення нижньої обвідної зображується відрізком, паралельним до осі $O\xi_1$ (рис. 1.3).

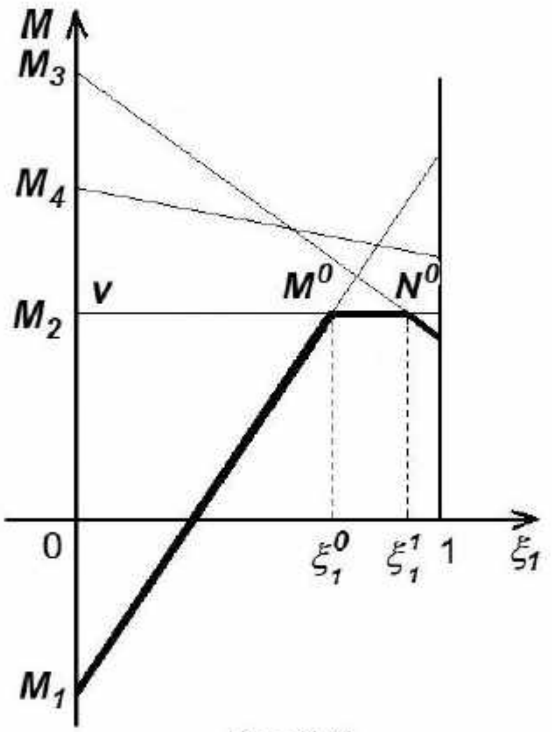


Рис.1.3

У цьому випадку 1-й гравець має нескінченно багато оптимальних значень ξ_1^0, а ціна гри $v=a_{1j_0}=a_{2j_0}$. Тут $j_0=2$, відрізок M^0N^0 зображує максимальне значення нижньої обвідної, оптимальні значення ξ_1 належать проміжку $\left[\xi_1^0,\xi_1^1\right]$, а 2-й гравець має оптимальну чисту стратегію $j=j_0$.

Розглянемо матричну гру порядку m×2. У цій грі 2-й гравець має дві чисті стратегії, а 1-й – m чистих стратегій. При цьому платіжна матриця гри має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Змішані стратегії $E=\{\xi_1,\dots,\xi_m\}$, $H=\{\eta_1,\eta_2\}$ гравців визначаються аналогічно, як для випадку ігор порядку 2×n. Знайдемо їх і ціну гри v з системи

$$\begin{cases} a_{i1}\eta_1+a_{i2}\eta_2\le v, \\ a_{11}\xi_1+a_{21}\xi_2+\dots+a_{m1}\xi_n\ge v, \\ a_{12}\xi_1+a_{22}\xi_2+\dots+a_{m2}\xi_m\ge v, \\ \eta_2=1-\eta_1, \\ \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_m=1, \end{cases}$$

де $\eta_1,\eta_2\ge 0$, $\xi_i\ge 0$, $i=1..m$.

Замінимо нерівності рівностями:

$$a_{11}\xi_1+a_{21}\xi_2+\dots+a_{m1}\xi_n=v,$$
$$a_{12}\xi_1+a_{22}\xi_2+\dots+a_{m2}\xi_m=v.$$

Позначимо через $N_i(\eta_1)$, $i=1..m$ ліві частини перших нерівностей системи, записаних відносно η_1 і η_2:

$$N_i(\eta_1)=a_{i1}\eta_1+a_{i2}\eta_2=(a_{i1}-a_{i2})\eta_1+a_{i2},\ i=1..m.$$

Тут $N_i(\eta_1)$ – це середній виграш 1-го гравця при умові, що він застосовує свою i-ту чисту стратегію, де $i=1..m$, а 2-й гравець – свою змішану стратегію $H=(\eta_1,\eta_2)$.

На осі абсцис будемо відкладати значення η_1 $(\eta_1\in[0,1])$, на осі ординат – значення середнього виграшу $N_i(\eta_1)$ 1-го гравця (рис. 1.4).

1-й гравець прагне максимізувати свій середній виграш, тому для нього запишемо

$$\max_i N_i(\eta_1)=N(\eta_1).$$

Функція $N(\eta_1)$ визначає верхню обвідну всіх прямих, що відповідають стратегіям 1-го гравця. Це ламана, повернена опуклістю вниз. Позначимо її жирною лінією.

2-й гравець прагне мінімізувати $N(\eta_1)$ шляхом вибору своєї стратегії η_1, тобто знайдемо

$$\min_{\eta_1} N(\eta_1) = N(\eta_1^0) = v .$$

На рис. 1.4 значення $N(\eta_1^0)$ позначено точкою N^0. Іншими словами, треба визначити дві стратегії ξ_{i_0} і ξ_{i_1} 1-го гравця та ймовірність η_1 для 2-го гравця, при яких виконується рівність

$$\min_{\eta_1} \max_i \left[(a_{i1} - a_{i2}) \eta_1 + a_{i2} \right] = v$$

або

$$a_{i_0 1}\eta_1 + a_{i_0 2}(1 - \eta_1) = v ,$$
$$a_{i_1 1}\eta_1 + a_{i_1 2}(1 - \eta_1) = v .$$

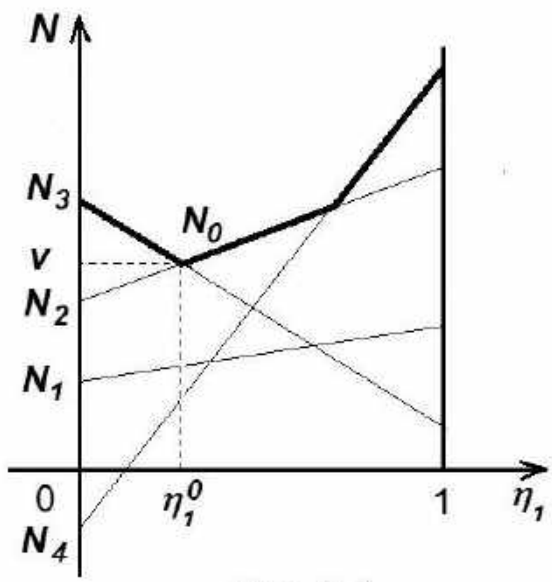


Рис. 1.4

У цьому випадку $i_0 = 2$, $i_1 = 3$, ціна гри – це ордината точки N^0, імовірність η_1^0 – це абсциса точки N^0. Для інших чистих стратегій 1-го гравця в оптимальній змішаній стратегії мають виконуватися співвідношення

$$\xi_i = 0, \quad a_{i1}\eta_1 + a_{i2}(1 - \eta_1) > v \quad (i \neq i_0, i \neq i_1).$$

Таким чином, розв'язуючи систему, знайдемо оптимальну змішану стратегію 2-го гравця $H = (\eta_1, \eta_2)$ і ціну гри v. Оптимальну змішану стратегію 1-го гравця знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{i_0 1}\xi_{i_0} + a_{i_1 1}\left(1 - \xi_{i_0}\right) = v, \\ a_{i_0 2}\xi_{i_0} + a_{i_1 2}\left(1 - \xi_{i_0}\right) = v, \\ \xi_{i_1} = 1 - \xi_{i_0}. \end{cases}$$

Якщо при розв'язанні системи знайдено v, то для отримання оптимальної змішаної стратегії 1-го гравця достатньо розв'язати тільки одне з рівнянь системи.

Отже, графічний метод можна застосовувати для розв'язання матричних ігор, у яких хоча б один з гравців має тільки дві стратегії. Як окремий випадок може бути розглянута матрична гра 2×2.

Приклад 1.24. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

і дати геометричну інтерпретацію одержаного розв'язку.

Розв'язання. Перевіримо, чи є в заданій матриці сідлова точка: $\alpha = max(2;4) = 4$, $\beta = min(6;5) = 5$. Отже, $\alpha \neq \beta$. Розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії, а ціна гри $4 \le v \le 5$.

Нехай для гравця *A* стратегія задається вектором $E^* = \left(\xi_1^*, \xi_2^*\right)$. Тоді при застосуванні гравцем В чистої стратегії B_1 або B_2 гравець А одержить середній виграш, який дорівнює ціні гри, тобто

$$\begin{cases} 2\xi_1^* + 6\xi_2^* = v & (\text{при стратегії } B_1), \\ 5\xi_1^* + 4\xi_2^* = v & (\text{при стратегії } B_2), \end{cases}$$

а також $\xi_1^* + \xi_2^* = 1$.

Розв'язок цієї системи: $\xi_1^* = \dfrac{2}{5}$, $\xi_2^* = \dfrac{3}{5}$, $v = \dfrac{22}{5}$.

Знайдемо оптимальну стратегію для гравця *B*. Нехай для цього гравця вона задається вектором $H^* = \left(\eta_1^*, \eta_2^*\right)$. Тоді

$$\begin{cases} 2\eta_1^* + 5\eta_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ 6\eta_1^* + 4\eta_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ \eta_1^* + \eta_2^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \eta_1^* = \frac{1}{5}, \ \eta_2^* = \frac{4}{5}.$$

Відповідь. $E^* = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ і $H^* = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ – оптимальні змішані стратегії гравців, $v = \dfrac{22}{5}$ – ціна гри.

Геометрична інтерпретація розв'язку цієї гри є такою.

У системі координат EOH на осі OE відкладемо відрізок одиничної довжини A_1A_2 (рис. 1.5). Кожній точці цього відрізка поставимо у відповідність деяку змішану стратегію $E = \left(\xi_1, \xi_2\right) = \left(\xi_1, 1 - \xi_1\right)$. Наприклад, точці $A_1(0;0)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_2(1;0)$ – стратегія A_2. У точках A_1 і A_2 проводимо перпендикуляри і на одержаних прямих відкладаємо виграші гравців. Якщо гравець *A* застосовує стратегію A_1, то його виграш при стратегії B_1 гравця *B* дорівнює 2, а при стратегії B_2 він дорівнює 5. Цим числам на осі OH відповідають точки B_1 і B_2.

Якщо ж гравець А застосовує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1' гравця В дорівнює 6, а при стратегії B_2 – 4. Цим числам відповідають точки B_1' і B_2'.

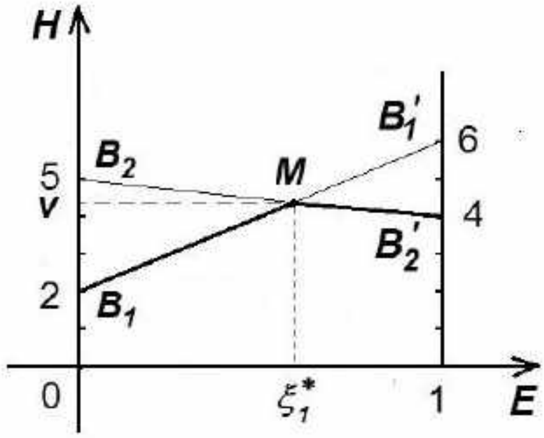


Рис. 1.5

З'єднуючи між собою точки B_1 і B_1', B_2 і B_2', одержимо дві прямі, відстань до яких від осі OE визначає середній виграш при будь-якому співвідношенні відповідних стратегій.

Ординати точок, які належать ламаній B_1MB_2', визначають мінімальний виграш гравця А при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина буде максимальною в точці M, а отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $E^* = \left(\xi_1^*, \xi_2^*\right)$, а її ордината дорівнює ціні гри v. Координатами точки M будуть координати точок перетину прямих B_1B_1' та B_2B_2'. Відповідні три рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 2\xi_1^* + 6\xi_2^* = v, \\ 5\xi_1^* + 4\xi_2^* = v, \\ \xi_1^* + \xi_2^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \xi_1^* = \frac{2}{5},\ \xi_2^* = \frac{3}{5},\ v = \frac{22}{5}.$$

Аналогічно отримана стратегія для гравця *B* зводиться до такої системи рівнянь

$$\begin{cases} 2\eta_1^* + 5\eta_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ \eta_1^* + \eta_2^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \eta_1^* = \frac{1}{5},\ \eta_2^* = \frac{4}{5}.$$

Отже, $E^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ і $H^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, – оптимальні змішані стратегії, $v = \frac{22}{5}$ – ціна гри.

Відповідь. $E^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ і $H^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$; $v = \frac{22}{5}$.

Отже, основними етапами знаходження розв'язку матричної гри порядку 2×n або m×2 графічним методом є:

1. Побудова прямих, які відповідають стратегіям 2-го (1-го) гравця.
2. Визначення нижньої (верхньої) межі виграшу.
3. Знаходження двох стратегій 2-го (1-го) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.

Приклад 1.25. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Будуємо пряму B_1B_1', яка проходить через точки $B_1(0;7)$ та $B_1'(1;10)$, пряму B_2B_2' – через точки $B_2(0;9)$ та $B_2'(1;6)$, пряму B_3B_3' – через точки $B_3(0;8)$ та $B_3'(1;9)$ (рис. 1.6).

Ламана B_1KB_2' відповідає нижній межі виграшу гравця В:

$$\begin{cases} 7\xi_1^* + 10\xi_2^* = v, \\ 9\xi_1^* + 6\xi_2^* = v, \\ \xi_1^* + \xi_2^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \xi_1^* = \frac{2}{3}, \ \xi_2^* = \frac{1}{3}, \ v = 8.$$

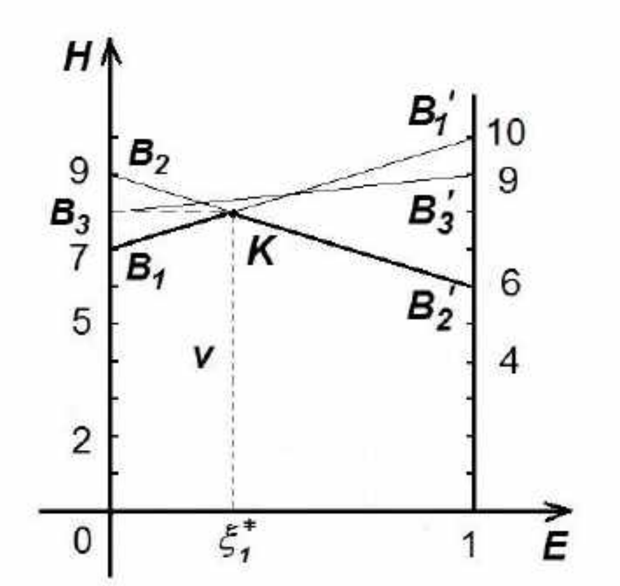


Рис. 1.6

Для визначення оптимальної стратегії гравця *B* маємо систему

$$\begin{cases} 7\eta_1^* + 9\eta_2^* + 8\eta_3^* = 8, \\ 10\eta_1^* + 6\eta_2^* + 9\eta_3^* = 9, \\ \eta_1^* + \eta_2^* + \eta_3^* = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\eta_1^* = \frac{1}{2}, \ \eta_2^* = \frac{1}{2}, \ \eta_3^* = 0.$$

Отже, оптимальні стратегії гри $E^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ і $H^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; ціна гри $v = \frac{43}{8}$.

Відповідь. $E^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $H^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $v = \frac{43}{8}$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулювати мету 1-го гравця у матричній грі порядку 2×n.
2. Що характеризує функція $M(\xi)$?
3. У якій системі координат графічно зображають функції $M(\xi)$?
4. Яким чином мають бути зображені множини E та H змішаних стратегій на площині?
5. Описати графічний метод розв'язання матричної гри порядку 2×n.
6. Чому після побудови графіків функцій $M_j(\xi_1)$, де $j = 1..n$, вибирають найбільший загальний мінімум?
7. Чим характеризується процес побудови розв'язку матричної гри порядку m×2?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

У задачах 1.7.1–1.7.5 за допомогою графічного методу знайти оптимальні стратегії та ціну гри, заданої матрицею $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

1.7.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **1.7.2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1.7.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. **1.7.4.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$. **1.7.5.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$.

У задачах 1.7.6–1.7.8 спростити матрицю $B = (b_{ij})_{m\times n}$ гри та знайти її розв'язок графічним методом.

1.7.6. $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \\ 4 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. **1.7.7.** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 4 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. **1.7.8.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

У задачах 1.7.1–1.7.5 за допомогою графічного методу знайти оптимальні стратегії та ціну гри, заданої матрицею $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

1.7.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **1.7.2.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1.7.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 6 \\ 5 & 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. **1.7.4.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 7 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$. **1.7.5.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

У задачах 1.7.6, 1.7.7 спростити матрицю $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ гри та знайти її розв'язок графічним методом.

1.7.6. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1.7.7.** $B=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

1.8. Розв'язання матричних ігор методами лінійного програмування

1.8.1. Задача лінійного програмування

Задача лінійного програмування – це задача максимізації (мінімізації) лінійної функції з невід'ємними числовими коефіцієнтами при певних лінійних обмеженнях.

Лінійну функцію з невід'ємними коефіцієнтами називають *цільовою функцією.*

Загальний вигляд задачі

В аналітичному вигляді задано:

а) цільову функцію

$$F(x)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots+c_mx_m;$$

б) обмеження:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+\ldots+a_{m1}x_m\le b_1, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3+\ldots+a_{m2}x_m\le b_2, \\ \ldots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+a_{3n}x_3+\ldots+a_{mn}x_m\le b_n, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0, \\ \ldots \\ x_m\ge 0. \end{cases}$$

Необхідно визначити

$$F(x) \to max.$$

Зауваження. Задачу лінійного програмування можна подати і в інших варіантах, але їх завжди можна звести до формального вигляду. Треба мати на увазі, що можливими є такі випадки:

Відмінність від загальної задачі	**Що можна зробити**
Поставлено умову не максимізувати функцію мети, а мінімізувати	Мінімізація є рівносильною максимізації функції мети, взятої з протилежним знаком
Обмеження можуть мати форму рівностей	Рівності можна замінити двома протилежними нерівностями: $x = 3 \Rightarrow (x \ge 3) \wedge (x \le 3)$
Деякі змінні можуть бути від'ємними	Змінні можна виразити у вигляді різниці двох невід'ємних змінних: $x_1 = -3 \Rightarrow (x_2 = 2) \wedge (x_3 \le 5) \Rightarrow$ $x_1 = x_2 - x_3$

1.8.2. Зв'язок матричної гри з задачею лінійного програмування

1-й гравець має стратегію

$$E = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m).$$

Виграш 1-го гравця відносно кожної стратегії 2-го гравця – це

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i \ge \alpha, \quad j = 1..n.$$

Задача 1-го гравця – це максимізація α:

$$\alpha \to max$$

при умовах

$$\alpha - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i \le 0, \quad j = 1..n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \quad \xi_i \ge 0, \; i = 1..m.$$

2-й гравець має стратегію

$$H = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n).$$

Виграш 2-го гравця відносно кожної стратегії 1-го гравця – це

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j \le \beta, \; i = 1..m.$$

Задача 2-го гравця – це мінімізація β:

$$\beta \to min$$

при умовах

$$\beta - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j \ge 0, \quad i = 1..m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1, \quad \eta_j \ge 0, \quad j = 1..n.$$

Отже, одержано запис задачі лінійного програмування у двох варіантах. Сформулюємо це інакше.

Розглянемо матричну гру, яка задається матрицею $A_{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для оптимальної стратегії першого гравця $U^* = \left(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\right)$ і ціни гри v мають виконуватися нерівності

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \ge v \quad j = 1..n.$$

Нехай для визначеності $v > 0$. Це завжди можна зробити, оскільки додавання до всіх елементів матриці A однієї і тієї ж константи *C* не приводить до змінення оптимальних стратегій, а тільки збільшує ціну гри на *C*. Поділивши обидві частини цієї нерівності на v, одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\frac{u_i^*}{v} \ge 1 \quad j = 1..n.$$

Якщо позначити $y_i^* = \dfrac{u_i^*}{v}$, то $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* \ge 1 \quad (j = 1..n)$, $y_i^* \ge 0 \; (i = 1..m)$.

З умови $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^* = 1$ випливає, що $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^* = \dfrac{1}{v}$.

Оскільки 1-й гравець прагне одержати максимальний виграш, то він повинен забезпечити мінімум величини $1/v$. З урахуванням цього визначення оптимальної стратегії 1-го гравця зводиться до знаходження

$$f^* = \sum_{i=1}^{m} y_i \to min$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1 \quad (j = 1..n),$$

$$y_i \ge 0 \ (i = 1..m).$$

Аналогічні міркування показують, що знаходження оптимальної стратегії 2-го гравця зводиться до задачі: знайти

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j \to max$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1 \quad (i = 1..m),$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1..n), \quad x_j = \frac{z_j}{v}.$$

Отже, щоб знайти розв'язок цієї гри, яка визначається матрицею A, треба скласти таку пару двоїстих задач і знайти їх розв'язок.

Пряма задача: знайти $f = \sum_{j=1}^{n} x_j \to max$ при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1 \ (i = 1..m), \ x_j \ge 0 \ (j = 1..n).$$

Двоїста задача: знайти $f^* = \sum_{i=1}^{m} y_i \to min$ при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1 \quad (j = 1..n), \ y_i \ge 0 \ (i = 1..m).$$

Використовуючи розв'язок пари двоїстих задач, одержуємо формули для визначення стратегій і ціни гри:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v y_i^*; \quad z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{i=1}^{m} x_j^*} = v x_j^*; \quad v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}; \ i = 1..m, \ \ j = 1..n.$$

Отже, процес знаходження розв’язку гри з використанням методів лінійного програмування складається з таких етапів:

1. Складають пару задач лінійного програмування, еквівалентних заданій матричній грі.

2. Визначають оптимальні плани пари двоїстих задач.

3. Використовуючи співвідношення між планами двоїстих задач і оптимальними стратегіями та ціною гри, знаходять розв’язок гри.

1.8.3. Зведення матричної гри до пари двоїстих задач лінійного програмування

Кожна гра може бути подана як задача лінійного програмування. Нехай гру задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

1-й гравець оптимальною стратегією забезпечує собі при будь-яких діях 2-го гравця виграш, не менший від ціни гри:

$$\begin{cases} a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + a_{31}\varepsilon_3 \geq v, \\ a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{32}\varepsilon_3 \geq v, \\ a_{13}\varepsilon_1 + a_{23}\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_3 \geq v, \\ a_{14}\varepsilon_1 + a_{24}\varepsilon_2 + a_{34}\varepsilon_3 \geq v. \end{cases}$$

Невідомою є величина $v > 0$. Перепишемо систему, поділивши всі її обмеження на v:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + a_{31}t_3 \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + a_{32}t_3 \geq 1, \\ a_{13}t_1 + a_{23}t_2 + a_{33}t_3 \geq 1, \\ a_{14}t_1 + a_{24}t_2 + a_{34}t_3 \geq 1, \end{cases}$$

де $t_i = \frac{\varepsilon_i}{v}$ при умові $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$. Поділивши обидві частини цієї рівності на v, отримаємо $\frac{\varepsilon_1}{v} + \frac{\varepsilon_2}{v} + \frac{\varepsilon_3}{v} = \frac{1}{v}$, звідки $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{v}$.

Оптимальна стратегія 1-го гравця має максимізувати ціну гри v, а отже, функція

$$Ft = t_1 + t_2 + t_3 = \sum_{i=1}^{3} t_i$$

має набувати мінімального значення.

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\begin{cases} Ft = \sum_{i=1}^{3} t_i \to min, \\ \sum_{i=1}^{3} a_{ij} t_i \geq 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю задачу, знаходять t_i та $1/v$, а потім $\varepsilon_i = v t_i$.

Аналогічно для 2-го гравця:

$$\begin{cases} Fp = \sum_{j=1}^{4} p_j \to max, \\ \sum_{j=1}^{4} a_{ij} p_j \leq 1, \end{cases}$$

де $p_j = \dfrac{\eta_j}{v}$.

Оскільки 2-й гравець повинен мінімізувати ціну гри, його функція мети має максимізуватися.

Приклад 1.26. Знайти стратегії гравців у грі з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Для стратегій 1-го гравця й ціни гри виконуються умови

$$\begin{cases} \xi_1 + 4\xi_2 > v, \\ 2\xi_1 + \xi_2 > v, \end{cases}$$

де $\xi_1 + \xi_2 = 1$.

Поділимо кожне рівняння на ціну гри:

$$\begin{cases} \dfrac{\xi_1}{v} + 4\dfrac{\xi_2}{v} > 1, \\ 2\dfrac{\xi_1}{v} + \dfrac{\xi_2}{v} > 1. \end{cases}$$

Уведемо нові змінні $t_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{v}$ і $t_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{v}$ та отримаємо систему

$$\begin{cases} t_1 + 4t_2 > 1, \\ 2t_1 + t_2 > 1. \end{cases}$$

Для переходу до рівностей додаємо зліва до виразів фіктивні змінні $z_1 \geq 0$ і $z_2 \geq 0$. Отримаємо рівняння вигляду

$$\begin{cases} t_1 + 4t_2 - z_1 = 1, \\ 2t_1 + t_2 - z_2 = 1. \end{cases}$$

Як опцію мети вибираємо

$$F = t_1 + t_2 = \frac{\xi_1}{v} + \frac{\xi_2}{v} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{v} = \frac{1}{v} \to min .$$

Постановка задачі: Для рівнянь

$$\begin{cases} t_1 + 4t_2 - z_1 = 1, \\ 2t_1 + t_2 - z_2 = 1 \end{cases}$$

визначити t_1 і t_2 так, щоб $F = t_1 + t_2 \to min$, причому $t_1 \geq 0$ і $t_2 \geq 0$.

Розв'язання (алгебраїчне). Розв'язуємо рівняння відносно t_1 і t_2:

$$\begin{cases} t_1 + 4t_2 - z_1 = 1, \\ 2t_1 + t_2 - z_2 = 1, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} t_1 = \frac{3}{7} - \frac{1}{7} z_1 + \frac{4}{7} z_2, \\ t_2 = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} z_1 - \frac{1}{7} z_2. \end{cases}$$

Тоді $F = t_1 + t_2 = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} z_1 + \frac{3}{7} z_2$.

Для найменшого значення F беремо $z_1 = 0$ і $z_2 = 0$.

Отже, функція мети $F = \frac{4}{7}$, але $F = \frac{1}{v} = \frac{4}{7}$, звідки $v = \frac{7}{4}$. Знаючи ціну гри, визначаємо змішані стратегії 1-го гравця:

– для $t_1 = \frac{3}{7}$ маємо $\xi_1 = t_1 v = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{3}{4}$;

– для $t_2 = \frac{1}{7}$ маємо $\xi_2 = t_2 v = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.

Відповідь. $E = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $v = \frac{7}{4}$.

Приклад 1.27. Знайти розв'язок гри, яка визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Пряма задача буде такою: знайти

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \to max$$

при умовах

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1..3.$$

Двоїста задача: знайти

$$f^* = y_1 + y_2 + y_3 \to min$$

при умовах

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + y_3 \geq 1, \\ y_2 \geq 1; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0,\ i = 1..3.$$

У прямій задачі обмеження-нерівності замінюємо на обмеження-рівності:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 1. \end{cases}$$

Базисними векторами будуть P_4, P_5, P_6. Симплекс-таблиця має такий вигляд:

Базис	C_σ	P_0	1	1	1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	1	$1/2$	$1/2$	1	0	$1/2$	0	0
P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
P_6	0	$1/2$	$3/2$	0	0	$-1/2$	0	1
		$3/2$	$1/2$	0	0	$1/2$	1	0

Бачимо, що пряма задача має оптимальний план $X^* = \left(0;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$, а двоїста – оптимальний план $Y^* = \left(\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right)$. Тоді ціна гри $v = \frac{1}{1/2 + 1} = \frac{2}{3}$, а оптимальні стратегії гравців $U^* = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0\right)$, $Z^* = \left(0;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Отже, для будь-якої матричної гри можна записати симетричну пару двоїстих задач. Має місце й обернене твердження: для будь-якої симетричної пари двоїстих задач можна записати матричну гру.

Нехай задано симетричну пару двоїстих задач — пряма задача: $f = CX$; двоїста задача: $f^* = BY$. Тоді цій парі задач ставлять у відповідність гру, що визначається матрицею

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.28. Побудувати гру, що відповідає такій парі двоїстих задач:

– пряма задача:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0;$$

– двоїста задача:

$$f^* = 10y_1 + 12y_2 \to min,$$
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 \ge 2, \\ y_1 + 3y_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$y_1,\ y_2 \ge 0.$$

Розв'язання. У цьому випадку $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 10 & 12 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Отже, матриця D матиме такий вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що якщо кожна матрична гра має оптимальні стратегії, то не кожна задача лінійного програмування має розв'язки.

1.8.4. Розв'язання матричної гри симплекс-методом

Зробимо всі попередні перетворення, як у підрозд. 1.8.3. Побудуємо таблицю відносно заданих даних у такому вигляді:

	B	t_1	t_2	z_1	z_2
z_1	1	a_{11}	a_{12}	1	0
z_2	1	a_{21}	a_{22}	0	1
F	0	-1	-1	0	0

У цьому випадку це

	B	t_1	t_2	z_1	z_2
z_1	1	1	4	1	0
z_2	1	2	1	0	1
F	0	-1	-1	0	0

Вибираємо опорну клітинку. Для цього:

1. У рядку F вибираємо від'ємне значення. Тут два від'ємних значення -1, тому вибираємо перший стовпець з t_1.

2. Вибираємо той рядок, у якому число, отримане як частка від ділення коефіцієнта при B на значення t_1, буде найменшим. У цьому випадку для першого рядка маємо 1, а для другого – $1/2$. Тому вибираємо другий рядок. У цьому випадку опорною клітинкою є $a_{21} = 2$:

	B	t_1	t_2	z_1	z_2
z_1	1	1	4	1	0
z_2	1	○ 2	1	0	1
F	0	-1	-1	0	0

3. Рядок з опорним елементом ділимо на значення клітинки (2), а в стовпці записуємо нулі:

	B	t_1	t_2	z_1	z_2
z_1		0			
z_2	$1/2$	1	$1/2$	0	$1/2$
F		0			

4. Використовуючи перетворення Жордана, заповнюємо порожні клітинки.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Як формулюється задача лінійного програмування?
2. Як звести матричну гру до задачі лінійного програмування?
3. Описати процес знаходження розв'язку матричної гри з використанням методів лінійного програмування.
4. Що таке двоїсті задачі лінійного програмування?
5. Що визначає цільова функція?
6. Чи кожна задача лінійного програмування має розв'язки?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

У задачах 1.8.1–1.8.8 шляхом зведення до пари двоїстих задач лінійного програмування знайти оптимальні змішані стратегії та ціну матричної гри, заданої платіжною матрицею $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a}_{ij}\right)_{m\times n}$.

1.8.1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. **1.8.2.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 0 & 5\end{pmatrix}$. **1.8.3.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

1.8.4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$. **1.8.5.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$. **1.8.6.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

1.8.7. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6 & 1\\ 1 & 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$. **1.8.8.** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 5\\ -2 & 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

За допомогою симплекс-методу знайти оптимальні стратегії та ціну гри, заданої матрицею $\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b}_{ij}\right)_{m\times n}$ (задачі 1.8.9–1.8.14).

1.8.9. $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. **1.8.10.** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}$. **1.8.11.** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

1.8.12. $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & 6\end{pmatrix}$. **1.8.13.** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 7\end{pmatrix}$. **1.8.14.** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -9\\ 12 & 5\end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

У задачах 1.8.1–1.8.8 шляхом зведення до пари двоїстих задач лінійного програмування знайти оптимальні змішані стратегії та ціну матричної гри, заданої платіжною матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$.

1.8.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. **1.8.2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. **1.8.3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

1.8.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **1.8.5.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **1.8.6.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.8.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **1.8.8.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

За допомогою симплекс-методу знайти оптимальні стратегії та ціну гри, заданої матрицею $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$ (задачі 1.8.9–1.8.11).

1.8.9. $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. **1.8.10.** $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. **1.8.11.** $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.9. Наближене розв’язання матричних ігор. Метод Брауна – Робінсон

Одним із найпростіших наближених методів розв’язання матричної гри є метод Брауна – Робінсон (процес пошуку наближеного розв’язку описав у своїй роботі Г. Браун, а збіжність процесу довела Дж. Робінсон).

Метод Брауна – Робінсон являє собою ітеративну процедуру, що дає змогу знайти наближений розв’язок матричної гри. Суть методу та його математичне моделювання є достатньо простими, але обґрунтування методу є досить складним і виходить за межі цього посібника. Ідея цього методу полягає в такому. Імітується багаторазове повторення гри та набирається статистика, що показує, які стратегії максимізують виграш, і таким чином приблизно визначається оптимальна стратегія.

Основну концепцію, на якій базується метод, можна сформулювати так: “майбутнє схоже на минуле”. Пояснимо це на прикладі.

Нехай дехто планує літню відпустку й хоче знати, яке буде літо в цьому регіоні – холодне, середнє чи спекотне. Приблизно оцінити це можна таким чином: підняти статистику за минулий час (наприклад, за останні 50 років) та обчислити відносні частоти того, яке було літо. Ці відносні частоти можна приблизно вважати ймовірнісним прогнозом на майбутнє літо.

Виявляється, що цей принцип можна застосувати і до матричної гри. Розглядаються два фіктивні гравці, які грають у матричну гру, на першому кроці вони вибирають якісь рядок і стовпець відповідно, а на кожному наступному кроці кожен з гравців вибирає рядок/стовпець, що є найкращою відповіддю на змішану стратегію опонента, яка відповідає відносним частотам його ходів на попередніх кроках. Після моделювання n кроків уважають, що оптимальні стратегії гравців наближено дорівнюють відносним частотам вибору рядків/стовпців протягом цих n кроків.

Цей метод легко автоматизувати в будь-якому програмному середовищі, тому іноді доцільніше використовувати його, ніж зводити до задач лінійного програмування чи застосовувати симплекс-метод. Для зупинення ітераційного процесу комп'ютерного моделювання гри необхідно вказати кількість ітерацій. Додатковою умовою зупинки є досягнення положення рівноваги, при якому всі виграші гравців збігаються.

Доведено, що, якщо кількість кроків прямує до нескінченності, ”емпірична” ціна гри збігається до шуканого значення вихідної матричної гри в будь-якому разі. Якщо матрична гра має єдиний розв’язок, то й частоти вибору рядків/стовпців збігаються до цього розв’язку. Якщо ж розв’язок матричної гри – не єдиний (тоді множина розв’язків є замкненою й опуклою), то послідовність обчислених частот може навіть “блукати” уздовж множини розв’язків, наближуючись до неї.

Ітераційний процес веде гравців до мети повільно, збіжність є немонотонною. При цьому швидкість збіжності зменшується зі збільшенням розмірності матриці та кількості стратегій гравців. Однак поряд з таким недоліком можна виділити й переваги методу: складність та обсяг обчислень порівняно слабо зростають у міру збільшення кількості стратегій гравців (m та n). До того ж трудомісткість методу знижується, якщо під час розіграшів визначати не лише номер чергової чистої стратегії, а й те, скільки разів поспіль вона має застосовуватись.

Існує два способи реалізації процедури Брауна – Робінсон. В одному з них на кожному кроці фіктивні гравці здійснюють свій вибір “одночасно”, в іншому – послідовно. Якщо нічого невідомо про розв’язок матричної гри, то перші ходи гравців рекомендується вибирати як найкращу відповідь на змішану стратегію опонентів $\left(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right)$. Продемонструємо ці способи на прикладі.

Приклад 1.29. Розв'язати матричну гру з платіжною матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ методом Брауна – Робінсон.

Розв'язання. Ця матриця не має сідлової точки. Зробимо п'ять кроків двома зазначеними способами.

Перший спосіб. Одночасний вибір гравців.

Спочатку припускаємо, що змішані стратегії обох гравців – це $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, і знайдемо найкращу відповідь кожного з гравців на таку стратегію опонента:

$$\arg\max\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = 1, \quad \arg\max\left(\frac{1+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = 1.$$

Нехай P_i, Q_i – вектори абсолютних частот вибору стратегій 1-го і 2-го гравців на i -й ітерації, отже, $P_1 = (1, 0)$, $Q_1 = (1, 0)$.

На 2-му кроці алгоритму знайдемо найкращу відповідь 1-го гравця на 1-шу чисту стратегію 2-го та найкращу відповідь 2-го гравця на 1-шу чисту стратегію 1-го:

$$BR_1(Q_1) = \arg\max(1, 2) = 2, \quad BR_2(P_1) = \arg\min(1, 3) = 1.$$

Знайдені найкращі відповіді додамо до відповідних компонент P_1 та Q_1:

$$P_2 = (1, 1), \ Q_2 = (2, 0).$$

На 3-му кроці маємо

$$BR_1(Q_2) = \arg\max(1, 2) = 2, \quad BR_2(P_1) = \arg\min\left(\frac{1+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = 1,$$

отже, $P_3 = (1, 2)$, $Q_3 = (3, 0)$.

На 4-му кроці маємо

$$BR_1(Q_3) = \arg\max(1, 2) = 2,$$

$$BR_2(P_3) = \arg\min\left(\frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2}{3}, \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 1}{3}\right) = 1 \text{ або } 2.$$

Якщо раптом шуканий мінімум/максимум досягається одразу для декількох компонент, то можна збільшувати будь-яку з них. Збільшимо, наприклад, першу, отже, $P_4 = (1, 3)$, $Q_4 = (4, 0)$.

На 5-му та 6-му кроках маємо:

$$BR_1(Q_4) = \arg\max(1, 2) = 2,$$

$$BR_2(P_1) = \arg\min\left(\frac{1\cdot 1 + 3\cdot 2}{4}, \frac{1\cdot 3 + 3\cdot 1}{4}\right) = 2,$$

$$P_5 = (1, 4), \ Q_5 = (4, 1);$$

$$BR_1(Q_5) = \arg\max\left(\frac{4\cdot 1 + 3}{5}, \frac{4\cdot 2 + 1}{5}\right) = 2,$$

$$BR_2(P_1) = \arg\min\left(\frac{1\cdot 1+4\cdot 2}{5}, \frac{1\cdot 3+4\cdot 1}{5}\right) = 2,$$

отже, $P_5 = (5, 1)$, $Q_5 = (4, 2)$.

Звичайно шістьох кроків для розв'язання задачі замало, але зупинимось на цьому. Наближені значення оптимальних стратегій гравців:

$$P = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right),\ Q = \left(\frac{4}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),\ v = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}.$$

Дoречі, у цьому прикладі сталося так, що навіть за таку малу кількість ітерацій стратегію 2-го гравця та ціну гри визначено точно.

Другий спосіб. Послідовний вибір гравців.

Припускаємо, що 2-й гравець вибрав змішану стратегію $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а 1-й – найкращу відповідь на неї $\arg\max\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = 1$, тобто 1-шу чисту стратегію, а саме $P_1 = (1, 0)$, $BR_2(P_1) = \arg\min(1, 3) = 1$, отже, $Q_1 = (1, 0)$.

На 2-му кроці маємо $BR_1(Q_1) = \arg\max(1, 2) = 2$, отже, $P_2 = (1, 1)$, $BR_2(P_2) = \arg\min\left(\frac{1+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = 1$, отже, $Q_2 = (2, 0)$.

На 3-му кроці маємо

$$BR_1(Q_2) = \arg\max(1, 2) = 2, \quad P_3 = (1, 2),$$

$$BR_2(P_2) = \arg\min\left(\frac{1\cdot 1+2\cdot 2}{3}, \frac{1\cdot 3+2\cdot 1}{3}\right) = 1 \text{ або } 2.$$

Візьмемо, наприклад, значення 1 у $BR_2(P_2)$, тоді $Q_3 = (3, 0)$.

На 4-му кроці маємо

$$BR_1(Q_3) = \arg\max(1, 2) = 2,\ P_4 = (1, 3),$$

$$BR_2(P_2) = \arg\min\left(\frac{1\cdot 1+3\cdot 2}{4}, \frac{1\cdot 3+3\cdot 1}{4}\right) = 2,$$

тоді $Q_4 = (3, 1)$.

На 5-му й 6-му кроках маємо:

$$BR_1(Q_4) = \arg\max\left(\frac{3\cdot 1+1\cdot 3}{4}, \quad \frac{3\cdot 2+1\cdot 1}{4}\right) = 2,\ P_5 = (1, 4);$$

$$BR_2(P_4) = \arg\min\left(\frac{1\cdot 1+4\cdot 2}{5}, \quad \frac{1\cdot 3+4\cdot 1}{5}\right) = 2, \text{ тоді } Q_5 = (3, 2);$$

$$BR_1(Q_5) = \arg\max\left(\frac{3\cdot 1+2\cdot 3}{5}, \quad \frac{3\cdot 2+2\cdot 1}{5}\right) = 1,\ P_4 = (2, 4);$$

$$BR_2(P_4) = \arg\min\left(\frac{2\cdot 1 + 4\cdot 2}{6}, \quad \frac{2\cdot 3 + 4\cdot 1}{6}\right) = 1 \text{ або } 2.$$

Візьмемо, наприклад, значення 1 у $BR_2(P_4)$, тоді $Q_6 = (4, 2)$. А також

$$P = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \; Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \; v = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}.$$

Знайдений наближений розв’язок насправді є точним.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що являє собою метод Брауна – Робінсон?
2. На якій ідеї базується метод Брауна – Робінсон?
3. Скласти схему використання методу Брауна – Робінсон для розв’язання матричної гри.
4. Яким величинам дорівнюють оптимальні стратегії гравців на n-му кроці?
5. Які умови використовуються для зупинення ітераційного процесу методом послідовних наближень?
6. У якому випадку «емпірична» ціна гри збігається до шуканого значення вихідної матричної гри?
7. Як поводять себе частоти вибору рядків/стовпців, коли матрична гра має єдиний розв'язок?
8. Указати переваги й недоліки методу Брауна – Робінсон порівняно з методами лінійного програмування та симплекс-методом.
9. Описати два способи реалізації процедури Брауна – Робінсон.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

У задачах 1.9.1–1.9.10 методом послідовних наближень Брауна – Робінсон розв’язати матричну гру, задану матрицею $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

1.9.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. **1.9.2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. **1.9.3.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

1.9.4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. **1.9.5.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **1.9.6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.9.7. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 6 \\ -5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. **1.9.8.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ -3 & 5 & 6 \\ 8 & -6 & -6 \end{pmatrix}$.

1.9.9. $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **1.9.10.** $A=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & -7 \\ -1 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

У задачах 1.9.1–1.9.10 методом послідовних наближень Брауна – Робінсон розв’язати матричну гру, задану матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

1.9.1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **1.9.2.** $A=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. **1.9.3.** $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.9.4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **1.9.5.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **1.9.6.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.9.7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \\ -3 & -7 & 3 \end{pmatrix}$. **1.9.8.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

1.9.9. $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **1.9.10.** $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Розділ 2. МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ПОЗИЦІЙНИХ ІГОР

Розширенням матричних ігор є *позиційні ігри*, у яких може брати участь скінченна кількість гравців, а інформація, якою володіють гравці, може змінюватися від одного ходу до іншого. Аналіз позиційних ігор за допомогою визначення інформаційних множин кожного гравця показує, що в загальному випадку втрата інформації зменшує ціну гри.

У багатьох практично важливих конфліктних ситуаціях, маючи у своєму розпорядженні ту чи іншу інформацію щодо їх попереднього розвитку, сторони-учасниці здійснюють свій вибір не раз і назавжди, а послідовно в часі, крок за кроком. Тим самим, вони використовують стратегії, що відображають як динаміку конфлікту, так і ступінь власної інформованості щодо фактичної обстановки в розвитку цього конфлікту.

2.1. Структура й означення позиційної гри

Позиційні ігри є одним із класів ігор, що описують конфлікти, динаміка яких впливає на поведінку учасників.

Позиційною називають безкоаліційну гру, що являє собою процес послідовного прийняття рішень гравцями в умовах мінливої в часі і, узагалі кажучи, неповної інформації.

Сама гра полягає в послідовному переході від одного стану до іншого, який здійснюється або шляхом вибору гравцями однієї з можливих дій відповідно до правил гри, або випадковим чином унаслідок випадкового ходу.

Прикладами позиційних ігор є шахи, шашки, хрестики-нулики, доміно та ін. Цікаво, що право вибору першого ходу в цих іграх часто визначається випадковим чином.

Стани гри називають *вузлами* або *позиціями гри*, звідси й пішла назва таких ігор – позиційні ігри.

Можливі вибори гравців у кожній позиції називають *альтернативами*, а остаточні позиції – *вершинами*. При цьому вузлам гри відповідають ситуації, у яких гравці здійснюють свій вибір альтернатив – роблять ходи, а вершинам – ситуації завершення гри із зазначенням виграшів гравців.

В антагоністичних іграх у вершинах указують виграш 1-го гравця, який відповідає програшу 2-го.

Безліч усіх позицій у таких іграх подають у вигляді деревоподібної упорядкованої множини – *дерева гри* (рис. 2.1, *а*).

Номер або буква в кружку вказує, хто з гравців робить черговий хід у заданій позиції. При цьому символом «0» позначається *випадковий хід*, який здійснюється не гравцем, а деяким випадковим механізмом, який іноді називають природою.

Наприклад, у грі, дерево якої зображено на рис. 2.1, *а*, беруть участь два гравці А і В, на кожному ході вони мають вибір з двох альтернатив (1 і 2), а 1-й хід проводиться випадково.

Виходячи з графічного зображення гри, можна зазначити, що процес гри полягає в переході від початкової позиції до остаточної (тобто до вершини) через проміжні позиції, які безпосередньо йдуть одна за одною.

Ламана, що складається з послідовно з'єднаних і розташованих одна за одною позицій дерева і зв'язує вихідну позицію з будь-якою його вершиною, називається *гілкою дерева* і визначає партію гри. На рис. 2.1, б одну з гілок виділено жирною лінією. Кількість різних партій дорівнює кількості вершин дерева.

Описану модель називають *моделлю гри в позиційній або розгорнутій формі*. Термін «розгорнута форма» означає, що таку гру можна розглядати як процес вибору рішень гравцями, що розгортається в часі.

Розглядають позиційні ігри з повною інформацією і позиційні ігри з неповною інформацією.

У *позиційних іграх з неповною інформацією* (прикладом може бути доміно) гравець, що робить хід, не знає точно, у якій саме позиції дерева гри він знаходиться. Гравець знає лише деяку множину позицій, що містить його фактичну позицію. Таку множину позицій називають *інформаційною множиною* і позначають через $\boldsymbol{U_p}\ \left(\boldsymbol{p = 1..r}\right)$.

Позиції, що належать одній інформаційній множині, обводять однією пунктирною лінією. Таким чином, у грі з неповною інформацією гравець, що робить свій хід, знає, у якій інформаційній множині він знаходиться, але не знає, у якій саме позиції цієї множини.

Так, поняття дерева гри містить об'єднання позицій цього дерева в інформаційні множини, які відображають поінформованість гравців про всі вибори, що передують поточному ходу.

У *позиційних іграх з повною інформацією* кожен гравець, який знаходиться в будь-якому вузлі дерева і робить наступний хід, точно знає ту позицію дерева гри, у якій він знаходиться, і ходи, зроблені раніше. Тому кожна інформаційна множина складається з одного вузла. Прикладами таких ігор можуть бути шахи, шашки.

Приклад 2.1. Шахи – це антагоністична позиційна гра з повною інформацією.

У цій грі функція виграшів гравця А (білих) визначається так:

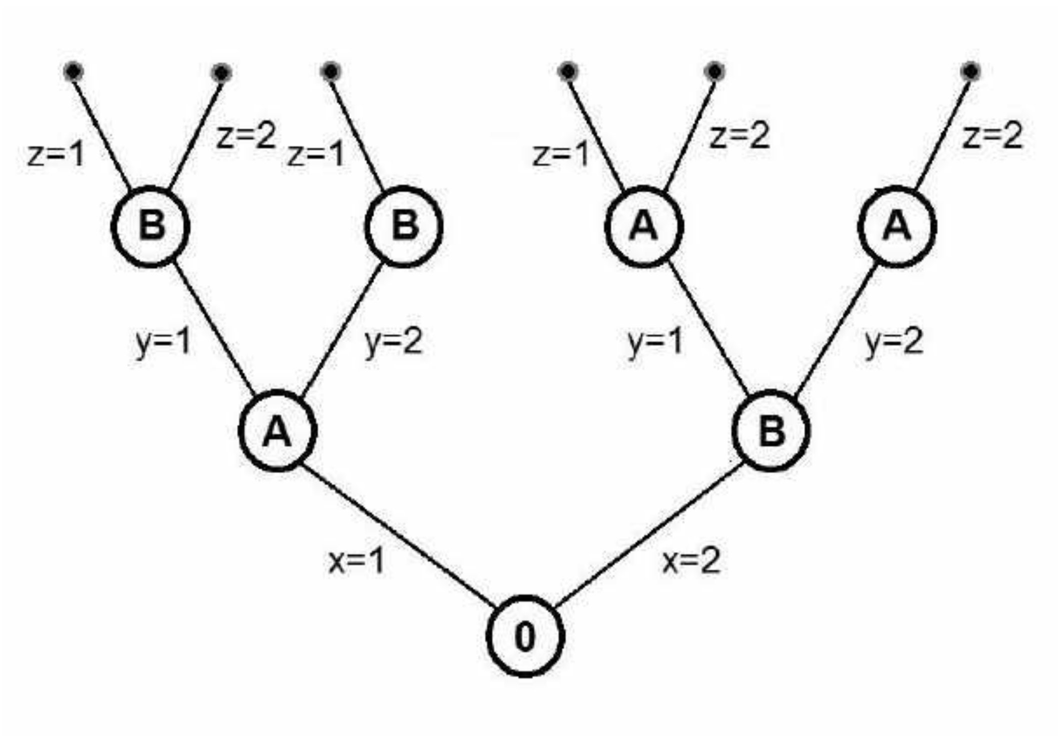
- +1 для партій, що виграються;
- 0 для партій, які закінчуються внічию;
- -1 для партій, що програються.

Функція виграшів гравця В (чорних) відрізняється від функції виграшів білих тільки знаком.

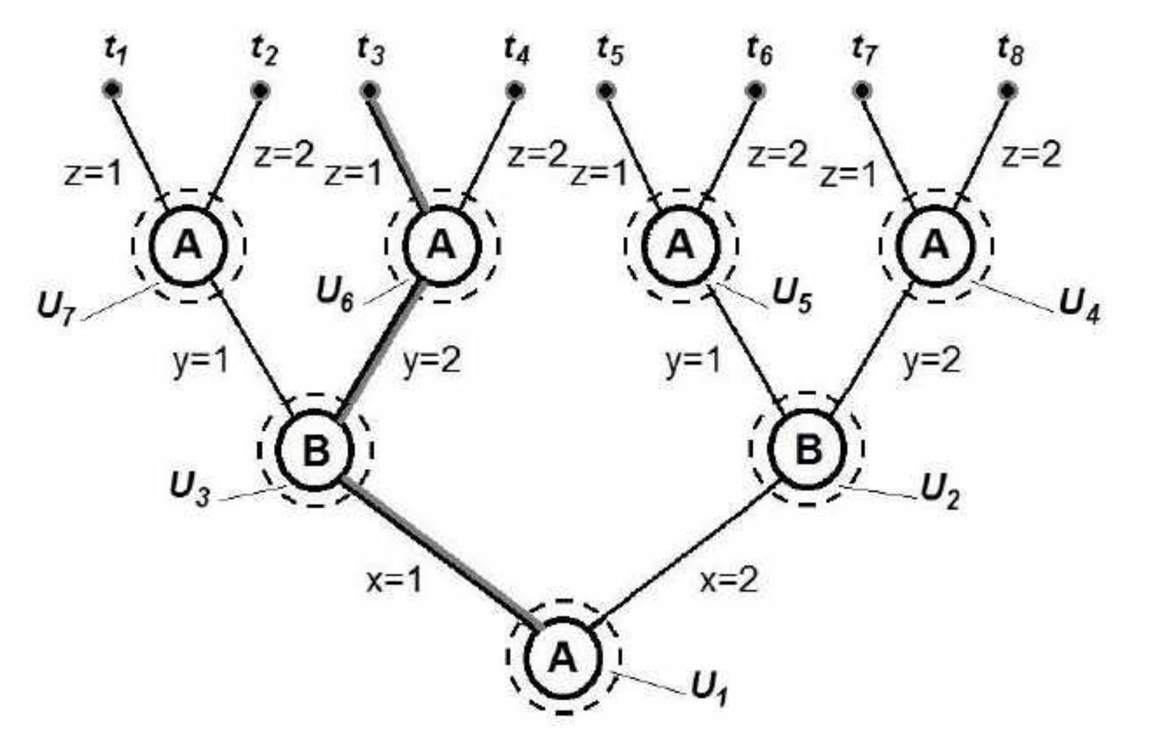
Структура дерева гри

Позиційну гру можна зобразити графічно у вигляді дерева.

*Дерево **T** позиційної гри* – це плоска фігура, що складається зі скінченної кількості вузлів і відрізків, що з'єднують ці вузли.



а



б

Рис. 2.1

1. *Вузол* позначається цифрою, що відповідає номеру гравця, який робить хід, або буквою, що означає його ім'я.

2. Розглядаються *рівні гри*, кількість яких дорівнює кількості всіх ходів гравців. Кожному ходу відповідає набір вузлів одного рівня.

3. Нижній рівень відповідає 1-му ходу одного з гравців. Нижній рівень має один вузол – *основу дерева*. Дерево будують від низу до верху, починаючи з основи.

4. Кожен вузол з'єднується з вузлом попереднього рівня лише одним відрізком.

5. *Відрізком* (*альтернативою*) позначають вибір гравця на заданому ході.

6. Біля відрізків записують значення, що відповідають зробленому вибору гравця.

7. Якщо у грі здійснюється випадковий хід, то вузол цього ходу позначають через (0).

8. Закінчення відрізків останнього рівня називають *вершинами дерева* і позначають $\boldsymbol{t_i}\ \left(\boldsymbol{i=1..k}\right)$.

9. *Гілка дерева* – це ламана, що з'єднує основу дерева з будь-якою його вершиною й проходить послідовно через вузли різних рівнів.

10. Кожна гілка відображає партію гри.

11. У грі кількість гілок дорівнює кількості вершин.

12. На дереві пунктиром виділяють *інформаційні множини вузлів кожного гравця* $\boldsymbol{U_p}\ \left(\boldsymbol{p=1..r}\right)$.

13. Інформаційній множині належать тільки такі вузли гравця, які не розрізняються для нього, тобто вузли, для кожної пари яких гравець не може вказати, у якій точці дерева він знаходиться.

Гравець у кожен момент гри знає, у якій інформаційній множині він знаходиться, але не знає, у якій саме позиції, тобто в якому вузлі інформаційної множини. У цьому сенсі інформаційні множини визначають інформованості гравців. Вузли, що належать одній інформаційній множині, обводять замкненою пунктирною лінією.

Означення позиційної гри

Позиційною грою будемо називати скінченну гру n гравців, до складу якої входять:

1. Дерево $\boldsymbol{T}$ гри.

2. $\boldsymbol{n}$ дійсних функцій $\boldsymbol{L_i\left(t_j\right)}\ \left(\boldsymbol{i=1..n,\ j=1..k}\right)$, що являють собою функції виграшів гравців і залежать від вершини $\boldsymbol{t_j}$, у якій закінчується партія гри.

Отже, $L_i\left(t_j\right)$ – це сума, яка має бути сплачена і-му гравцю після закінчення гри в точці t_j, $j=1..k$.

3. Набір чисел 0, 1, 2, …, n, таких, що кожному вузлу дерева T ставиться у відповідність число, що вказує, який гравець робить черговий хід у певному вузлі. При цьому замість набору чисел 1, 2, …, n можна використати набір букв $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а число 0 означає, що у відповідному вузлі здійснюється випадковий хід.

4. Вузлу, що належить до випадкового ходу, ставиться у відповідність повний набір імовірностей $\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\right)$ застосування альтернатив, де k – кількість наявних альтернатив на певному ході (у певному вузлі). Альтернативам відповідають відрізки, що виходять з вузла.

5. Має місце розподіл вузлів по інформаційних множинах U_p $\left(p=1..r\right)$:

а) усі вузли інформаційної множини відповідають одному гравцеві;

б) усі вузли інформаційної множини мають однакову кількість альтернатив, які нумерують справа наліво;

в) якщо у вузлі поставлено «0», то інформаційна множина складається тільки з одного вузла;

г) одна гілка дерева перетинає будь-яку інформаційну множину тільки в одному вузлі.

Стратегією і-го гравця, де $i=1..n$, назвемо функцію, визначену для кожної інформаційної множини, що відповідає і-му гравцеві, і значення якої для кожної такої інформаційної множини являє собою одну з альтернатив, які має і-й гравець. Таким чином, стратегія вказує гравцеві, що потрібно робити на певному ході, маючи будь-яку можливу інформацію.

Порівняно з іграми, які можна записати в матричному вигляді (матричними іграми), позиційні ігри мають інший спосіб подання і є в певному сенсі розширенням матричних ігор. А саме, у позиційних іграх:

1) можуть брати участь більше двох гравців;

2) кожен гравець може робити послідовно скінченну кількість ходів, причому перед кожним наступним ходом гравець повинен приймати рішення залежно від наявності інформації;

3) деякі з послідовних ходів можуть бути випадковими.

2.2. Нормалізація позиційної гри. Випадок двоходової гри

Заздалегідь певну послідовність ходів гравця, вибрану ним залежно від інформації про ходи іншого гравця й ходи гравця 0 (природи), називають *чистою стратегією цього гравця*.

Якщо у грі немає випадкових ходів, вибір гравцем А і гравцем В чистих стратегій однозначно визначає результат гри – приводить до остаточної позиції, де гравець А й отримує свій виграш. Ця обставина дає змогу зводити позиційну гру до матричної.

Процес зведення позиційної гри до матричної називається *нормалізацією позиційної гри*.

Якщо розглядаються позиційні ігри з повною інформацією, то вони мають розв'язки у чистих стратегіях. Для розв'язання позиційних ігор з неповною інформацією використовують змішані стратегії.

Покажемо на деяких прикладах, як позиційну гру звести до матричної гри. Розглянемо приклади ігор, що складаються з двох ходів, які послідовно роблять гравці A і B, які беруть участь у грі. Починає гру гравець A, він вибирає одну з двох можливих альтернатив – число x, що дорівнює або 1 (1-ша альтернатива), або 2 (2-га альтернатива). Гравець B на хід гравця A відповідає своїм ходом, вибираючи одну з двох можливих альтернатив – число y, що дорівнює або 1 (1-ша альтернатива), або 2 (2-га альтернатива). Унаслідок цього гравець A отримує винагороду або змушений платити штраф.

Приклад 2.2. Розглянемо двоходову гру (рис. 2.2).

1-й хід. Гравець A вибирає число $\boldsymbol{x}$ з множини двох чисел $\{1,2\}$.

2-й хід. Гравець B, знаючи вибір числа $\boldsymbol{x}$ гравцем A на 1-му ході, вибирає число $\boldsymbol{y}$ з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Функція $L(x,y)$ виплат гравцеві A за рахунок гравця B задається так:

$$L(1,1)=1, \quad L(1,2)=-1, \quad L(2,1)=-2, \quad L(2,2)=2.$$

Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Розв'язання. На рис. 2.2 показано дерево гри й інформаційні множини.

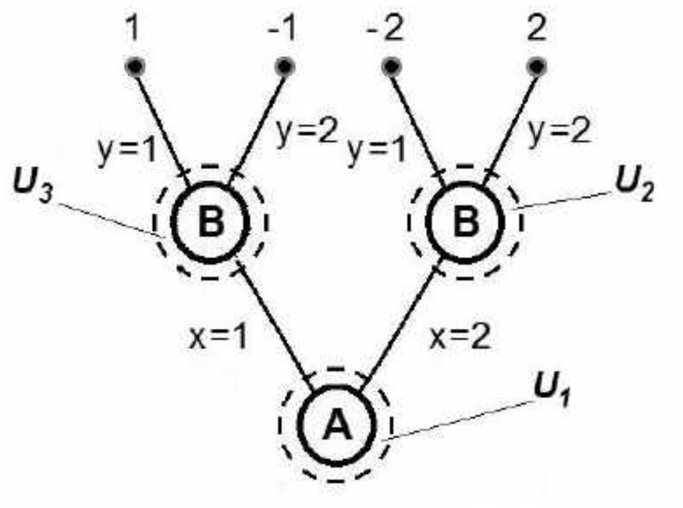


Рис. 2.2

Опишемо стратегії гравців. Стратегію гравця A можна задати одним числом $\boldsymbol{x}$, що показує, яку альтернативу, 1-шу чи 2-гу, вибрав гравець.

Отже, гравець A має дві чисті стратегії:

A_1 – вибрати $x=1$,

A_2 – вибрати $x=2$.

Беручи до уваги, що гравцю B відомий вибір гравця A на 1-му ході, його стратегію зручно описувати впорядкованою парою

$$(y_1, y_2).$$

Тут y_1 $(y_1 = 1,2)$ – альтернатива, яку вибирає гравець В за умови, що гравець А вибрав першу альтернативу $x = 1$, а y_2 $(y_2 = 1,2)$ – альтернатива, яку вибирає гравець В за умови, що гравець А вибрав другу альтернативу $x = 2$.

Наприклад, вибір гравцем *В* стратегії $(2,1)$ означає, що якби на 1-му ході гравець *А* вибрав $x = 1$, то гравець *В* на своєму ході має вибрати $y = 2$.

Якщо ж на 1-му ході гравець *А* вибирає $x = 2$, то, згідно з цією стратегією, гравець *В* на своєму ході має вибрати $y = 1$.

Таким чином, гравець *В* має чотири чисті стратегії:

B_1 – $(1,1)$, $y = 1$ при будь-якому виборі x;

B_2 – $(1,2)$, $y = x$ при будь-якому виборі x;

B_3 – $(2,1)$, $y \neq x$ при будь-якому виборі x;

B_4 – $(2,2)$, $y = 2$ при будь-якому виборі x.

Покажемо тепер, як розраховуються виграші гравця *А* залежно від стратегій, що він використовує.

Нехай, наприклад, гравець *А* вибрав стратегію A_1 – (1), а гравець *В* – стратегію B_2 – $(1,2)$. Тоді $x = 1$, а із стратегії $(1,2)$ випливає, що $y = 1$. Звідси

$$L(x,y) = L(1,1) = 1.$$

Інші виграші розраховуються аналогічно.

Результати розрахунків зазвичай записують або у вигляді таблиці виграшів гравця *А*

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
A_1	$x = 1$	$L(1,1)$	$L(1,1)$	$L(1,2)$	$L(1,2)$
A_2	$x = 2$	$L(2,1)$	$L(2,2)$	$L(2,1)$	$L(2,2)$

або у вигляді матриці гри

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають стратегіям гравця А, а стовпці – стратегіям гравця *В*.

Отримана матриця має сідлову точку. Оптимальними стратегіями гравців є такі стратегії:

$$A_1 - (1) \text{ і } B_3 - (2,1).$$

Таким чином, гравець А на 1-му ході вибирає $x = 1$, а гравець В на 2-му ході вибирає $y = 2$.

Ціна гри $v = -1$.

У цьому прикладі кожен вузол дерева гри обведений окремою пунктирною лінією, тобто належить окремій інформаційній множині. Як це можна пояснити, виходячи з умови задачі? Кожен гравець, знаходячись у конкретному вузлі, володіє всією інформацією про попередні ходи, як свої, так і про ходи супротивника. Тому він точно знає, на якій гілці дерева і на якому ході (тобто рівні гри) він знаходиться. Отже, розглянута гра є грою з повною інформацією. А у таких іграх кількість інформаційних множин збігається з кількістю вузлів дерева гри.

Відповідь. Оптимальні стратегії гравців А і В – це їх чисті стратегії $A_1 - (1)$, $B_3 - (2,1)$; ціна гри $v = -1$.

Приклад 2.3. Розглянемо гру, яку описано в прикладі 2.2, але з тією лише відмінністю, що на 2-му ході гравець В не володіє частиною інформації.

1-й хід. Гравець А вибирає число x з множини двох чисел $\{1,2\}$.

2-й хід. Гравець В, не знаючи вибору числа x гравцем А на 1-му ході, вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Функція $L(x,y)$ виплат гравцеві А за рахунок гравця В задається так:

$$L(1,1) = 1,\quad L(1,2) = -1,\quad L(2,1) = -2,\quad L(2,2) = 2.$$

Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Розв'язання. Відмінність цієї задачі від прикладу 2.2 – у зображенні інформаційних множин (див. рис. 2.3).

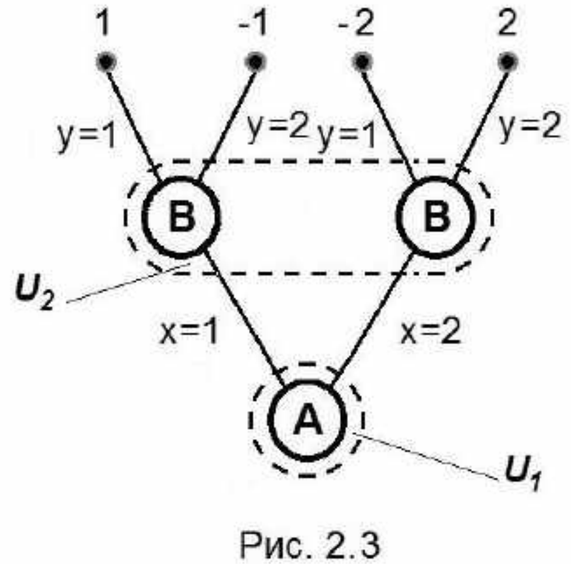


Рис. 2.3

Гравець В, який робить свій хід, не знає, у якій саме вершині дерева він знаходиться, тобто він не знає, який вибір альтернативи зробив на 1-му ході гравець А. Тому вибір гравця В не залежить від того, яку альтернативу вибрав гравець А: $x = 1$ або $x = 2$.

Отже, обидва вузли, що належать гравцеві В і розташовані на 2-му рівні (який відповідає 2-му ходу), об'єднуються в одну інформаційну множину U_2.

Таким чином, гравець В має на своєму ході дві альтернативи: $y=1$ і $y=2$ незалежно від вибору гравця А.

Стратегії гравця А такі ж самі, як і в попередньому прикладі:

$$A_1 \text{ – вибрати } x=1,$$
$$A_2 \text{ – вибрати } x=2.$$

Оскільки вибір гравця *A* для гравця *B* є невідомим, тобто гравець *B* не знає, у якій саме з двох позицій він знаходиться, то в нього такі ж самі дві стратегії:

$$B_1 \text{ – вибрати } y=1,$$
$$B_2 \text{ – вибрати } y=2.$$

Запишемо відповідну таблицю виграшів гравця А

		B_1	B_2
		$y=1$	$y=2$
A_1	$x=1$	$L(1,1)$	$L(1,2)$
A_2	$x=2$	$L(2,1)$	$L(2,2)$

а також матрицю гри

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця не має сідлової точки. Застосовуючи змішані стратегії, знайдемо оптимальні стратегії гравців:

$$P=\left(2/3, 1/3\right) \text{ та } Q=\left(1/2, 1/2\right).$$

Ціна гри $v=0$.

Відповідь. $P=\left(2/3, 1/3\right)$, $Q=\left(1/2, 1/2\right)$; $v=0$.

Зауваження 1. На прикладах 2.2 і 2.3 наочно видно, що результат зведення позиційної гри до матричної безпосередньо залежить від ступеня інформованості гравців. Зокрема, відсутність у гравця В відомостей про вибір, який зробив гравець А, приводить до зменшення кількості його можливих стратегій.

Порівнюючи відповіді, отримані в прикладах 2.2 і 2.3, помічаємо, що зниження рівня інформованості гравця (у цьому випадку – гравця В) робить для нього результат гри менш сприятливим.

Зауваження 2. Приклади 2.2 і 2.3 не вичерпують усіх можливих варіантів навіть у цьому, найпростішому випадку двоходових позиційних ігор.

2.3. Розв'язання позиційних ігор з неповною інформацією. Випадок триходової гри

Розглянемо тепер кілька прикладів зведення матричних ігор до позиційних ігор, що складаються з трьох ходів, звертаючи при цьому основну увагу на один з найбільш важливих кроків нормалізації – опис стратегій гравців.

Приклад 2.4. Розглянемо триходову гру.

1-й хід робить гравець А: він вибирає число x з множини двох чисел $\{1,2\}$.

2-й хід робить гравець В: знаючи вибране гравцем А число x, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

3-й хід робить гравець А: не знаючи про вибране гравцем В число y на 2-му ході й забувши вибране ним самим на 1-му ході число x, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Після цього гравець А отримує винагороду $L(x,y,z)$ за рахунок гравця В:

$$L(1,1,1)=-2,\quad L(2,1,1)=3,$$
$$L(1,1,2)=4,\quad L(2,1,2)=0,$$
$$L(1,2,1)=1,\quad L(2,2,1)=-3,$$
$$L(1,2,2)=-4,\quad L(2,2,2)=5.$$

Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Розв'язання. На рис. 2.4 показано дерево гри й інформаційні множини.

Нормалізуємо цю гру.

Оскільки гравцеві В вибір гравця А на 1-му ході відомий, то у гравця В ті ж чотири стратегії, що і в прикладі 2.2:

$$B_1-(1,1),\quad B_2-(1,2),$$
$$B_3-(2,1),\quad B_4-(2,2).$$

Гравець А на 3-му ході не знає попередніх виборів – ні свого вибору на 1-му ході, тобто значення x, ні вибору гравця В на 2-му ході, тобто значення y. Тому кожна стратегія гравця А складається просто з пари чисел (x,z), де x ($x=1,2$) – альтернатива, яку вибирає гравець А на 1-му ході, а z ($z=1,2$) – альтернатива, яку вибирає гравець А на 3-му ході.

Наприклад, вибір гравцем А стратегії $(2,1)$ означає, що на 1-му ході він вибирає $x=2$, а на 3-му ході – $z=1$.

Таким чином, гравець А має чотири стратегії:

$$A_1-(1,1),\quad A_2-(1,2),$$
$$A_3-(2,1),\quad A_4-(2,2).$$

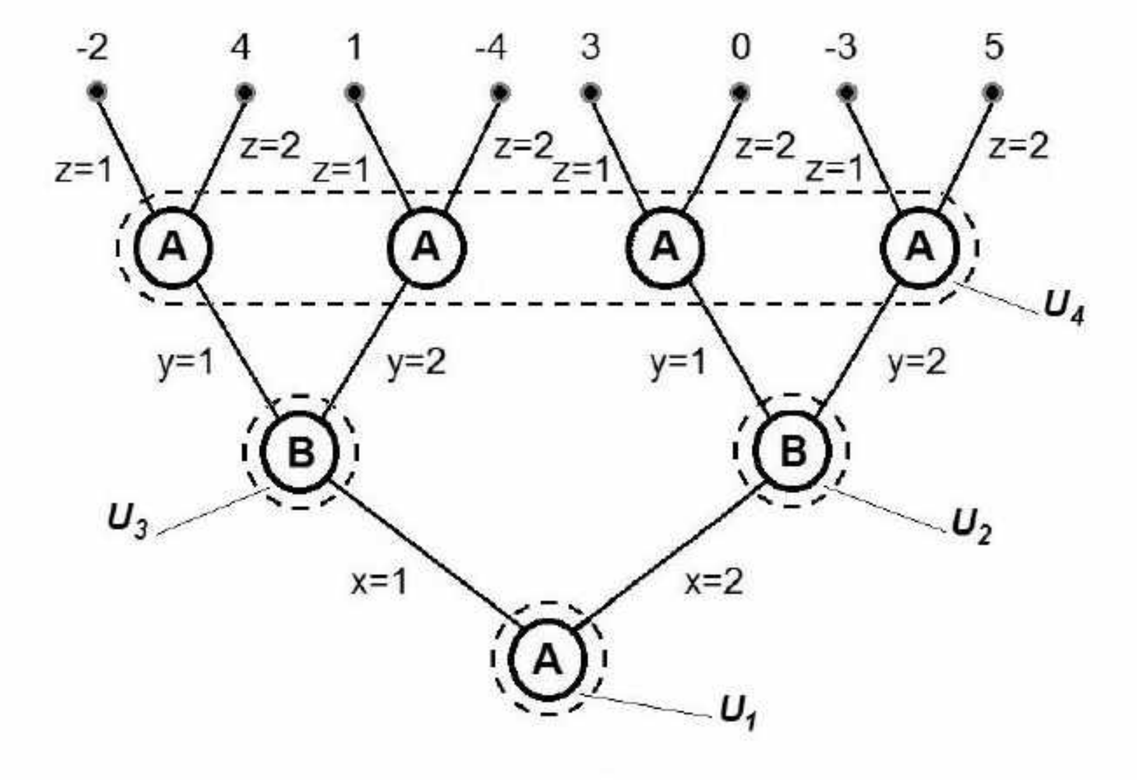


Рис. 2.4

Покажемо тепер, як розраховуються виграші гравця А залежно від стратегій, які застосовуються в цій грі.

Нехай, наприклад, гравець А вибрав стратегію A_2 – $(1,2)$, а гравець В – стратегію B_3, тобто $(2,1)$. Тоді $x = 1$, звідки випливає, що $y = 2$.

Значення $z = 2$ вибрано гравцем А незалежно від вибору гравця В. Обчислюючи значення функції виграшів для цього набору, отримаємо

$$L(x, y, z) = L(1, 2, 2) = -4.$$

Унаслідок таких міркувань можна отримати й інші п'ятнадцять виграшів гравця А, тобто значень функції $L(x, y, z)$ для усіх пар стратегій A_i $(i = 1..4)$ і B_j $(j = 1..4)$ гравців гри. Це дає змогу побудувати таблицю виграшів гравця А:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
A_1	$(1,1)$	$L(1,1,1)$	$L(1,1,1)$	$L(1,2,1)$	$L(1,2,1)$
A_2	$(1,2)$	$L(1,1,2)$	$L(1,1,2)$	$L(1,2,2)$	$L(1,2,2)$
A_3	$(2,1)$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,1)$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,1)$
A_4	$(2,2)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,2)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,2)$

і записати матрицю гри

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що усі вузли 3-го рівня, який відповідає 3-му ходові гравця А, об'єднані в одну інформаційну множину U_4. Це пояснюється умовами задачі. Гравець А, знаходячись на 3-му рівні, не знає, на якій гілці дерева він знаходиться, тому що він не знає вибору гравця В на 2-му ході і не пам'ятає свого вибору на 1-му ході (таке може бути, наприклад, тоді, коли гравець А – це команда з двох людей, одна людина з них робить 1-й хід, а 2-га, незалежно від 1-ої, робить 3-й хід).

Приклад 2.5. Розглянемо триходову гру.

1-й хід робить гравець А: він вибирає число x з множини двох чисел $\{1,2\}$.

2-й хід робить гравець В: не знаючи про вибір гравця А на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

3-й хід робить гравець А: він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$, не знаючи ні значення x, ні значення y.

Після цього відбувається розподіл виграшів таким же чином, як і в прикладі 2.4. Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Розв'язання. Графічно цю гру зображено на рис. 2.5.

Гравець *A* має ті ж самі чотири стратегії, як і в прикладі 2.4:

$$A_1 - (1,1),\quad A_2 - (1,2),\quad A_3 - (2,1),\quad A_4 - (2,2).$$

Гравець *B* має всього дві стратегії:

B_1 – вибрати $y = 1$,

B_2 – вибрати $y = 2$.

У цьому випадку при досить слабкій інформованості гравців таблиця виграшів гравця А і відповідна матриця будуються зовсім просто:

		B_1	B_2
		$y=1$	$y=2$
A_1	$(1,1)$	$L(1,1,1)$	$L(1,2,1)$
A_2	$(1,2)$	$L(1,1,2)$	$L(1,2,2)$
A_3	$(2,1)$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,1)$
A_4	$(2,2)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,2)$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Оптимальні змішані стратегії гравців мають вигляд

$$P=\left(0,\ {}^{9}\!/_{13},\ 0,\ {}^{4}\!/_{13}\right),\quad Q=\left({}^{5}\!/_{13},{}^{8}\!/_{13}\right),$$

а ціна гри $v={}^{20}\!/_{13}$.

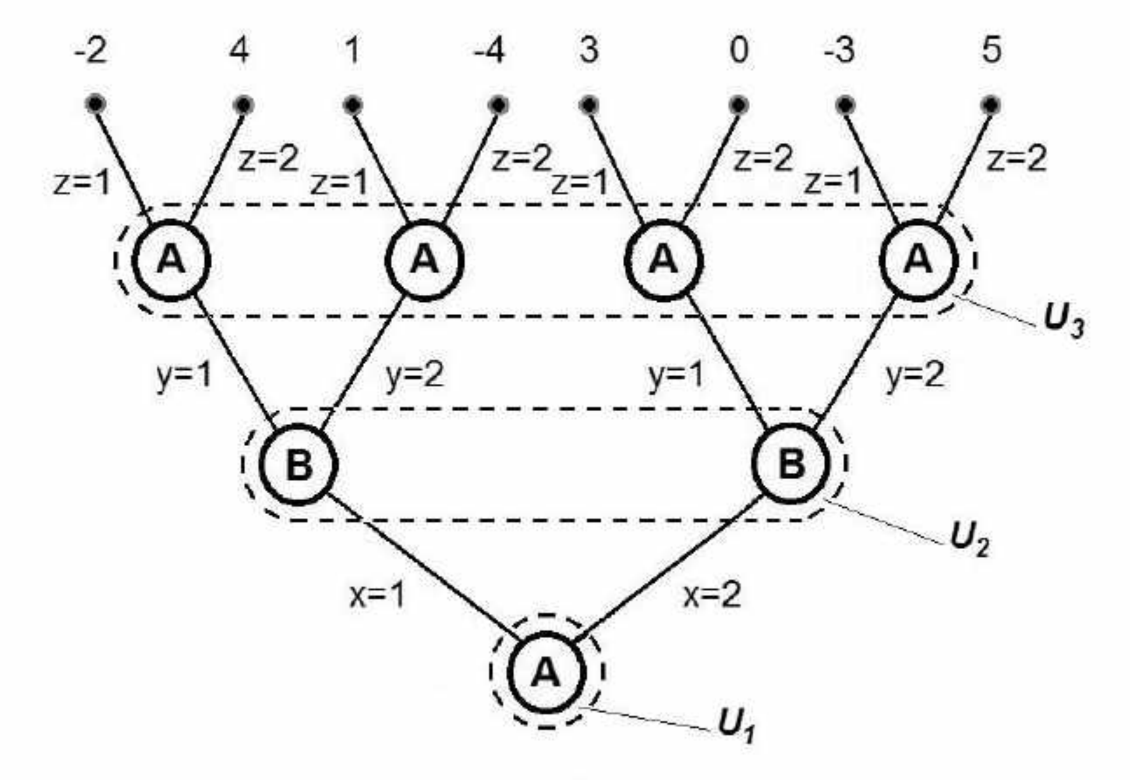


Рис. 2.5

Порівняно з грою, описаною в прикладі 2.4, у цій задачі гравець В, що робить 2-й хід, не має інформації про вибір гравця А на 1-му ході. Тому відповідні вузли 2-го рівня об'єднані в одну інформаційну множину U_2.

Зауважимо також, що зменшення інформованості гравців призводить до зменшення кількості їх стратегій.

Отже, за відсутності інформації приймати рішення гравцям складніше.

Відповідь. Оптимальні стратегії гравців А і В: $P=\left(0,\ {}^{9}\!/_{13},\ 0,\ {}^{4}\!/_{13}\right)$ і $Q=\left({}^{5}\!/_{13},{}^{8}\!/_{13}\right)$; ціна гри $v={}^{20}\!/_{13}$.

У наступному прикладі інформаційні множини мають інший вигляд.

Приклад 2.6. Розглянемо триходову гру.

1-й хід робить гравець А: він вибирає число x з множини двох чисел $\{1, 2\}$.

2-й хід робить гравець В: не знаючи про вибір гравця А на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1, 2\}$.

3-й хід робить гравець А: він вибирає число z з множини двох чисел $\{1, 2\}$, знаючи вибір y гравця В на 2-му ході, але не пам'ятаючи власного вибору x на 1-му ході.

Після цього гравці розплачуються за правилом, наведеним у прикладі 2.4. Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Розв'язання. Цю гру графічно зображено на рис. 2.6.

Оскільки для гравця В невідомий вибір гравця А на 1-му ході, то, виконуючи свій хід, він не знає, у якій саме з двох можливих позицій він знаходиться. Тому гравець В має всього дві стратегії:

$$B_1 \text{ – вибрати } y = 1,\ B_2 \text{ – вибрати } y = 2.$$

При описі стратегій гравця А потрібно виходити з того, що до 3-го ходу гравець А втратив відомості про власний вибір на 1-му ході, але він знає вибір гравця В на 2-му ході. Тому вибір числа z гравцеві А слід пов'язати з відомим йому до 3-го ходу значенням y. Найзручніше це зробити за аналогією з розрахунком стратегій гравця В у прикладах 2.2 і 2.4, тобто за допомогою впорядкованої пари

$$(z_1, z_2).$$

Тут z_1 $(z_1 = 1, 2)$ – альтернатива, яку вибирає гравець А за умови, що гравець В вибрав 1-шу альтернативу $y = 1$, а z_2 $(z_2 = 1, 2)$ – альтернатива, яку вибирає гравець А за умови, що гравець В вибрав 2-гу альтернативу $y = 2$.

Чисту стратегію гравця *A* в цій грі можна записати так:

$$(x, (z_1, z_2)).$$

Тут x ($x = 1, 2$) – альтернатива, яку гравець *A* вибирає на 1-му ході, z_1 $(z_1 = 1, 2)$ – альтернатива, яку гравець *A* вибирає на 3-му ході, якщо на 2-му ході гравець *B* вибрав 1-шу альтернативу ($y = 1$), z_2 $(z_2 = 1, 2)$ – альтернатива, яку гравець *A* вибирає на 3-му ході, якщо на 2-му ході гравець *B* вибрав 2-гу альтернативу ($y = 2$).

Наприклад, вибір гравцем *A* стратегії $(2, (2, 1))$ означає, що на 1-му ході гравець А вибирає $x = 2$, а на 3-му – $z = 2$, якщо гравець *B* вибрав $y = 1$, та $z = 1$, якщо гравець *B* вибрав $y = 2$.

Таким чином, гравець А має вісім чистих стратегій:

$$A_1 - \left(1,(1,1)\right),\ A_2 - \left(1,(1,2)\right),\ A_3 - \left(1,(2,1)\right),\ A_4 - \left(1,(2,2)\right),$$
$$A_5 - \left(2,(1,1)\right),\ A_6 - \left(2,(1,2)\right),\ A_7 - \left(2,(2,1)\right),\ A_8 - \left(2,(2,2)\right).$$

Покажемо тепер, як залежно від стратегій, що використовуються, визначаються елементи таблиці виграшів гравця *A*.

Нехай, наприклад, гравець *A* вибрав стратегію $A_3 - \left(1,(2,1)\right)$, а гравець *B* – стратегію $B_2 - (2)$. Тоді $x = 1$, $y = 2$, а з $(2,1)$ випливає, що $z = 1$. Звідси

$$L(x,y,z) = L(1,2,1) = 1.$$

За цією ж схемою обчислюються й інші елементи таблиці. Отже, отримуємо:

		B_1	B_2
		(1)	(2)
A_1	$\left(1,(1,1)\right)$	$L(1,1,1)$	$L(1,2,1)$
A_2	$\left(1,(1,2)\right)$	$L(1,1,1)$	$L(1,2,2)$
A_3	$\left(1,(2,1)\right)$	$L(1,1,2)$	$L(1,2,1)$
A_4	$\left(1,(2,2)\right)$	$L(1,1,2)$	$L(1,2,2)$
A_5	$\left(2,(1,1)\right)$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,1)$
A_6	$\left(2,(1,2)\right)$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,2)$
A_7	$\left(2,(2,1)\right)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,1)$
A_8	$\left(2,(2,2)\right)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,2)$

Відповідна матриця гри має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \\ 4 & 1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Оптимальні змішані стратегії гравців і ціна гри відповідно є такими:

$$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0},\ \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{5}},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0},\ \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{5}},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0}\right),\ \boldsymbol{Q}=\left(\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{5}},\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}\right),\ \boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{17}}{\boldsymbol{5}}.$$

Дерево гри й інформаційні множини зображено на рис. 2.6.

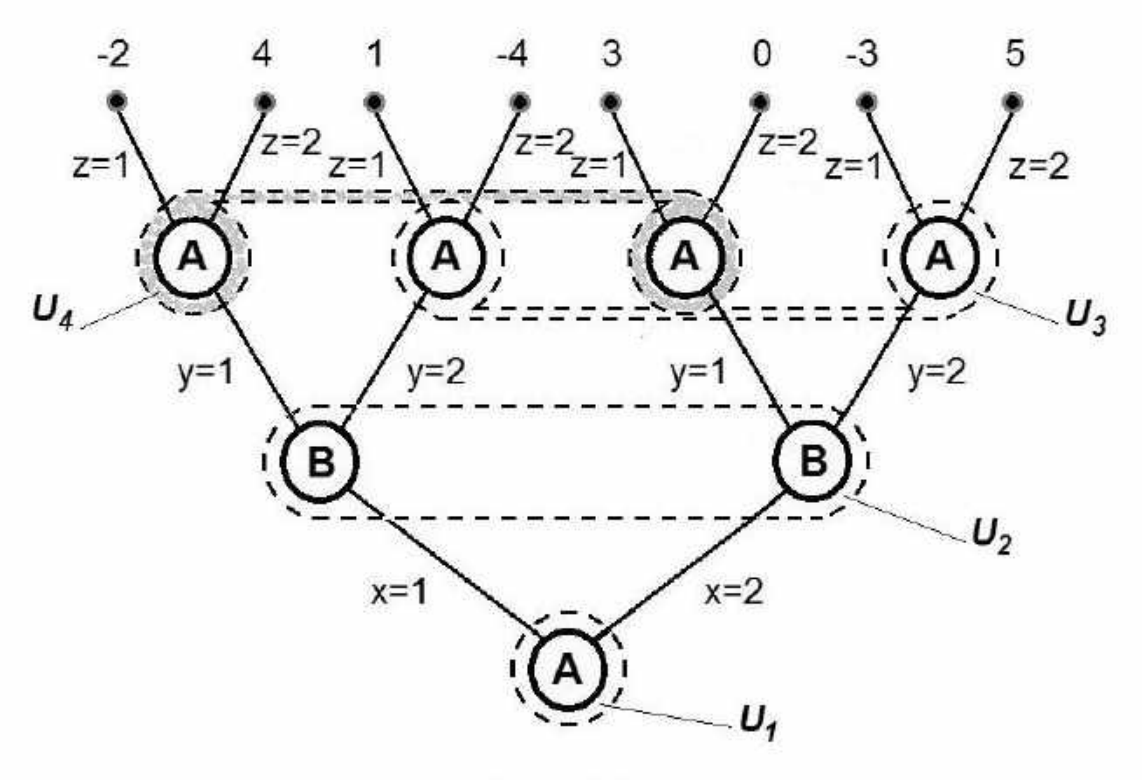


Рис. 2.6

Відповідь. $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0},\ \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{5}},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0},\ \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{5}},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0}\right),\ \boldsymbol{Q}=\left(\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{5}},\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}\right);\ \boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{17}}{\boldsymbol{5}}.$

2.4. Позиційні ігри з випадковими ходами

Приклад 2.7. Розглянемо позиційну гру з випадковим ходом.

1-й хід здійснюється випадково: гравець *O* вибирає число $\boldsymbol{x}$, що дорівнює 1 з ймовірністю 0,5 і дорівнює 2 з такою ж імовірністю.

2-й хід робить гравець А: він вибирає число $\boldsymbol{y}$ з множини двох чисел $\{\boldsymbol{1,2}\}$, не знаючи результатів випадкового вибору на 1-му ході.

3-й хід робить гравець В: він вибирає число $\boldsymbol{z}$ з множини двох чисел $\{\boldsymbol{1,2}\}$, знаючи про те, яке саме число $\boldsymbol{x}$ випадково вибрав гравець *O* на 1- му ході, і не знаючи вибору $\boldsymbol{y}$ гравця А на 2-му ході.

Після цього гравці розплачуються, використовуючи функцію $\boldsymbol{L(x,y,z)}$, таку ж саму, що і в попередніх прикладах.

Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Розв’язання. Дерево цієї гри показано на рис. 2.7.

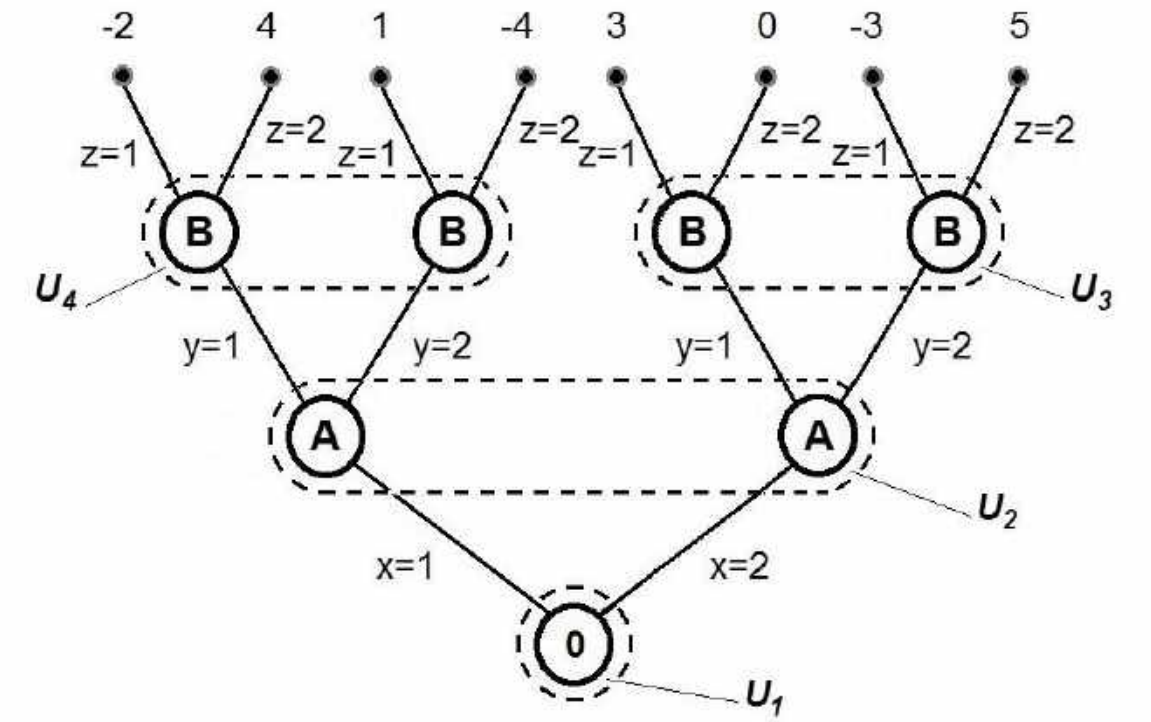


Рис. 2.7

Нижній вузол позначається "0", оскільки перший хід є випадковим. Цей вузол вважається окремою інформаційною множиною, і тому він обведений курсивом.

Опишемо стратегії гравців.

Оскільки гравцеві А результат випадкового випробування невідомий, то він має всього дві стратегії:

$$A_1 - (1),\ A_2 - (2).$$

При побудові своїх стратегій гравцеві В природно скористатися наявною в нього інформацією про результат 1-го ходу. Це дасть йому змогу описати свою стратегію впорядкованою парою

$$(z_1, z_2).$$

Тут z_1 $(z_1 = 1, 2)$ – альтернатива, яку вибирає гравець *B* за умови, що $x = 1$, а z_2 $(z_2 = 1, 2)$– альтернатива, яку вибирає гравець *B* за умови, що $x = 2$. Отже, гравець *O* має чотири стратегії:

$$B_1 - (1,1),\ B_2 - (1,2),\ B_3 - (2,1),\ B_4 - (2,2).$$

Покажемо тепер, як визначаються елементи таблиці виграшів гравця А.

Нехай, наприклад, гравець А вибрав стратегію $A_1 - (1)$, а гравець *В* – стратегію $B_3 - (2,1)$.

Розрізняють два випадки:

$$x = 1 \text{ та } x = 2.$$

Якщо $x = 1$, то стратегія B_3 вказує гравцеві *В* його вибір $z = 2$. А оскільки $y = 1$, то

$$L(x, y, z) = L(1,1,2) = 4.$$

Якщо $x = 2$, то стратегія B_3 вказує гравцеві *В* його вибір $z = 1$. А оскільки $y = 1$, то

$$L(x, y, z) = L(2,1,1) = 3.$$

Оскільки 1-ша й 2-га альтернативи на 1-му ході вибираються з імовірностями 0,5 та 0,5, то й вказані вище виграші виникають з тими ж імовірностями і, отже, середній виграш гравця А при цих стратегіях визначається так:

$$4 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 = 3{,}5.$$

Аналогічним чином розраховуються інші середні виграші:

• при $x = 1$ отримуємо

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
A_1	(1)	$L(1,1,1)$	$L(1,1,1)$	$L(1,1,2)$	$L(1,1,2)$
A_2	(2)	$L(1,2,1)$	$L(1,2,1)$	$L(1,2,2)$	$L(1,2,2)$

або

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix};$$

• при $x = 2$

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
A_1	(1)	$L(2,1,1)$	$L(2,1,2)$	$L(2,1,1)$	$L(2,1,2)$
A_2	(2)	$L(2,2,1)$	$L(2,2,2)$	$L(2,2,1)$	$L(2,2,2)$

або

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Остаточно матриця гри набуває такого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 3,5 & 2 \\ -1 & 3 & -3,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, розглянемо приклад позиційної гри з випадковим розігруванням права 1-го ходу.

Приклад 2.8. Розглянемо позиційну гру з випадковим ходом.

1-й хід робить гравець О, вибираючи число x, що дорівнює числу 1 з імовірністю $2/3$ і числу 2 з імовірністю $1/3$.

Якщо $x = 1$, то на *2-му ході* гравець А вибирає число y з множини двох чисел $\{1, 2\}$, знаючи результат випадкового вибору на 1-му ході, а на *3-му ході* гравець В вибирає число z з множини двох чисел $\{1, 2\}$, знаючи x, але не знаючи y.

Якщо $x = 2$, то на *2-му ході* гравець В вибирає число y з множини двох чисел $\{1, 2\}$, знаючи результат випадкового вибору на 1-му ході, а на *3-му ході* гравець А вибирає число z з множини двох чисел $\{1, 2\}$, знаючи x, але не знаючи y.

Після цього гравці розплачуються, використовуючи функцію $L(x, y, z)$, таку ж саму, що і в попередніх прикладах.

Розв'язання. Цю гру графічно зображено на рис. 2.8.

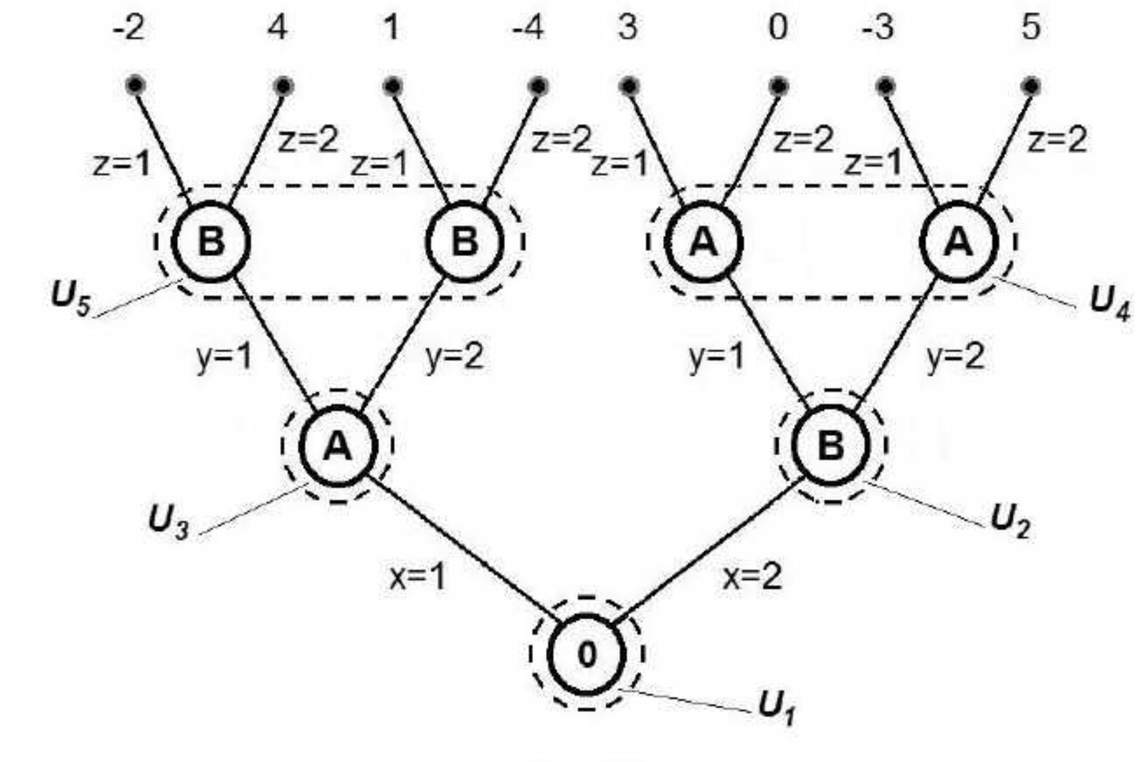


Рис. 2.8

Чисту стратегію гравця А в цій грі можна описати впорядкованою парою

$$(y, z),$$

де y $(y = 1, 2)$ – вибір гравця *A* на 2-му ході, якщо на 1-му ході вибрано $x = 1$, а z $(z = 1, 2)$ – вибір гравця *A* на 3-му ході, якщо на 1-му ході вибрано $x = 2$.

Наприклад, стратегія $(1, 2)$ означає, що на 2-му ході гравець *A* вибирає $y = 1$, а на 3-му ході – $z = 2$.

Отже, гравець А має чотири стратегії:

$$A_1 - (1,1),\ A_2 - (1,2),\ A_3 - (2,1),\ A_4 - (2,2).$$

Гравець В має такі ж самі чотири стратегії:

$$B_1 - (1,1),\ B_2 - (1,2),\ B_3 - (2,1),\ B_4 - (2,2).$$

Покажемо тепер, як можна знайти елементи матриці виграшів гравця А.

Нехай, наприклад, гравець А застосовує стратегію $A_2 - (1, 2)$, а гравець *B* – стратегію $B_3 - (2, 1)$.

Розрізняють два випадки:

$$x = 1 \text{ і } x = 2.$$

За умовою при $x = 1$ гравець А має можливість зробити тільки 2-й хід (вибрати y), а гравець В – тільки 3-й (вибрати 2).

При $x = 2$ їх можливості міняються місцями: гравцеві В надано право 2-го ходу (вибрати y), а гравцеві А – 3-го (вибрати z).

Якщо $x = 1$, то стратегія A_2 вказує гравцеві А на 2-му ході взяти $y = 1$, а стратегія B_3 вказує гравцеві В при 3-му ході взяти $z = 1$. Таким чином,

$$L(x, y, z) = L(1, 1, 1) = -2.$$

Якщо $x = 2$, то стратегія B_3 вказує гравцю *B* на 2-му ході взяти $y = 2$, а стратегія A_2 вказує гравцю *A* на 3-му ході взяти $z = 2$. Таким чином,

$$L(x, y, z) = L(2, 2, 2) = 5.$$

Оскільки 1-ша й 2-га альтернативи на 1-му ході вибираються з імовірностями $2/3$ і $1/3$, то й знайдені виграші виникають з тими ж імовірностями. Отже, математичне сподівання виграшу гравця А при таких стратегіях розраховується так:

$$-2 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Аналогічним чином можна визначити усі інші елементи матриці виграшів гравця А.

Отже:

• при $x = 1$

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
A_1	$(1,1)$	$L(1,1,1)$	$L(1,1,2)$	$L(1,1,1)$	$L(1,1,2)$
A_2	$(1,2)$	$L(1,1,1)$	$L(1,1,2)$	$L(1,1,1)$	$L(1,1,2)$
A_3	$(2,1)$	$L(1,2,1)$	$L(1,2,2)$	$L(1,2,1)$	$L(1,2,2)$
A_4	$(2,2)$	$L(1,2,1)$	$L(1,2,2)$	$L(1,2,1)$	$L(1,2,2)$

або

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix};$$

• при $x = 2$

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
A_1	$(1,1)$	$L(2,1,1)$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,1)$	$L(2,2,1)$
A_2	$(1,2)$	$L(2,1,2)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,2)$	$L(2,2,2)$
A_3	$(2,1)$	$L(2,1,1)$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,1)$	$L(2,2,1)$
A_4	$(2,2)$	$L(2,1,2)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,2)$	$L(2,2,2)$

або

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо шукану матрицю гри

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 11 & -7 & 5 \\ -4 & 8 & 1 & 11 \\ 5 & -5 & -1 & -11 \\ 2 & -8 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Графічне зображення і функція виграшів повністю визначають позиційну гру. У розглянутих вище прикладах 2.4–2.8 користувалися однією й тією ж функцією і одним і тим же деревом гри. Відмінність полягала лише в маркуванні вершин дерева та інформаційних множинах. При побудові останніх необхідно дотримуватися двох правил:

1) в одну інформаційну множину можуть входити позиції тільки одного гравця;

2) ланцюг, що визначає партію гри, може мати з інформаційною множиною не більше однієї спільної позиції.

При таких обмеженнях інформаційні множини можуть мати досить незвичний вигляд (як, наприклад, на рис. 2.6, який ілюструє приклад 2.6).

2.5. Позиційні ігри з повною інформацією

Позиційна гра називається *грою з повною інформацією*, якщо в кожній позиції будь-якої її партії гравець, що робить хід, знає, які альтернативи були вибрані на попередніх ходах. У графічному описі кожна вершина дерева такої гри є окремою інформаційною множиною.

Прикладами позиційних ігор з повною інформацією можуть бути хрестики-нулики, шашки та шахи.

Основна особливість позиційної гри з повною інформацією полягає в тому, що матриця виграшів, яка їй відповідає, завжди має сідлову точку, тобто у грі з повною інформацією існують оптимальні чисті стратегії і, отже, рівноважна ситуація.

Сказане означає, що в шахах (хрестиках-нуликах, шашках) уже в початковій позиції або є спосіб виграшу за білих, або спосіб виграшу за чорних, або як та, так і інша сторона здатна форсувати нічию.

Проте відоме доведення існування рівноважної ситуації є неконструктивним і не дає ефективних прийомів фактичного розв’язання гри.

І таких способів (стратегій) у шахах не знайдено досі, і навіть невідомо, яка з перелічених можливостей має місце насправді.

Зовсім інша справа із грою «хрестики-нулики»: стратегій у ній небагато, і її розібрано повністю – існують оптимальні чисті стратегії, які ведуть гравців до нічиєї.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 2.9. **«Викладання монет на стіл»**. Два гравці по черзі кладуть монети однакових розмірів на звичайний стіл, щоразу вибираючи довільне доступне місце для монети, при цьому взаємне накривання монет не допускається. Той з гравців, хто покладе монету, яка не залишає місця для нових монет, виграє.

Розв’язання. Це гра з повною інформацією. Існує цілком певна стратегія, що забезпечує виграш того з гравців, хто починає гру. А саме, той гравець, який починає гру, повинен покласти першу монету точно в центр столу і на кожен хід супротивника відповідати симетричним ходом. Результат гри від стратегії 2-го гравця не залежить.

Приклад 2.10. **«Переговори»**. У переговорах беруть участь дві сторони A і B. В ідеалізованому варіанті це може мати, наприклад, такий вигляд. Спочатку сторона A висловлює одну з кількох пропозицій, яка може зацікавити сторону B. Потім сторона B, ознайомившись з пропозицією сторони A, висловлює одну з кількох зустрічних пропозицій, яка може, на її думку, зацікавити сторону A. Своєю чергою, сторона A, ознайомившись з реакцією сторони B на зроблені пропозиції, висловлює їй нову пропозицію, унісши при цьому одне з декількох можливих коригувань у свою початкову пропозицію з урахуванням думки сторони B, і т. д.

Якщо предмет переговорів є складним, то такий обмін ходів може затягнутися. Однак будь-які переговори неодмінно закінчуються, і на фініші існує функція виграшів.

Спробуємо змоделювати короткий переговорний процес триходовою позиційною грою.

Припустимо, що переговори закінчуються через три ходи, на кожному з яких відповідна сторона має можливість вибору з двох альтернатив, і опишемо відповідну позиційну гру.

1-й хід робить сторона A: вона вибирає одну з двох можливих пропозицій – число x з множини двох чисел $\{1,2\}$.

2-й хід робить сторона B: вона вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$, знаючи число x, яке запропонувала сторона A.

3-й хід робить сторона A: вона вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$, знаючи про пропозицію сторони B на 2-му ході і пам'ятаючи власну пропозицію на 1-му ході.

Після цього сторона A або отримує винагороду (наприклад, у вигляді кредиту від сторони B), або виплачує стороні B штраф.

Усі ці можливості описуються функцією виграшів $L(x,y,z)$, яка задається так:

$$L(1,1,1)=a,\ \ L(2,1,1)=e,$$
$$L(1,1,2)=b,\ \ L(2,1,2)=f,$$
$$L(1,2,1)=c,\ \ L(2,2,1)=g,$$
$$L(1,2,2)=d,\ \ L(2,2,2)=h.$$

Розв'язання. Цю гру графічно зображено на рис. 2.9.

Очевидно, що описана позиційна гра є грою з повною інформацією. Почнемо з опису можливих стратегій гравця B.

Оскільки гравцеві В вибір гравця А на 1-му ході відомий, то гравець В має ті ж чотири стратегії, що і в прикладі 2.2:

$$B_1-(1,1),\ B_2-(1,2),\ B_3-(2,1),\ B_4-(2,2).$$

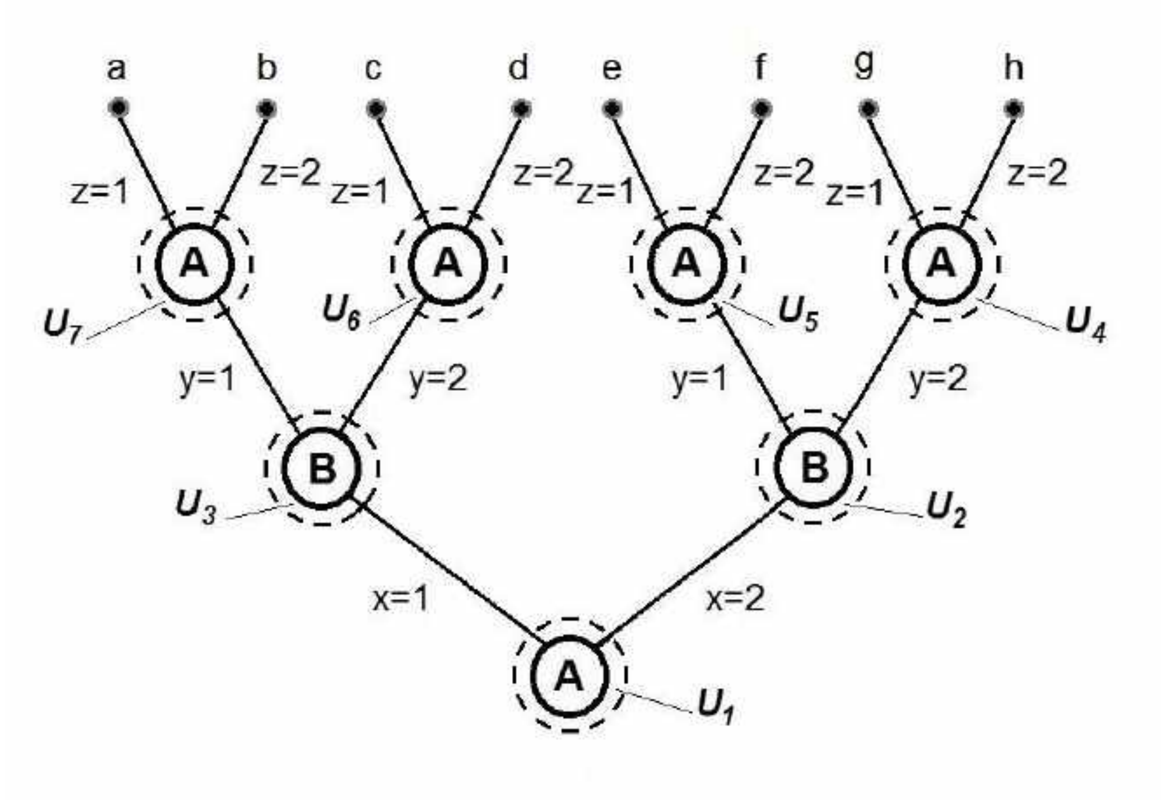


Рис. 2.9

З описом можливих стратегій гравця А справа йде трохи складніше – їх вісім.

Чисті стратегії гравця А в цій грі описуються впорядкованою трійкою

$$\left(x,\left(z_1,z_2\right)\right).$$

Тут x ($x=1,2$) – альтернатива, яку гравець *А* вибирає на 1-му ході, z_1 $\left(z_1=1,2\right)$ – альтернатива, яку гравець *А* вибирає на 3-му ході, якщо на 2-му ході гравець *В* вибрав 1-шу альтернативу ($y=1$), і z_2 $\left(z_2=1,2\right)$ – альтернатива, яку гравець *А* вибирає на 3-му ході, якщо на 2-му ході гравець *В* вибрав 2-гу альтернативу ($y=2$).

Наприклад, вибір гравцем А стратегії $\left(1,(2,1)\right)$ означає, що на 1-му ході гравець А вибирає $x=1$, а на 3-му $z=2$, якщо гравець В вибрав $y=1$, і $z=1$, якщо гравець В вибрав $y=2$.

Таким чином, у гравця А вісім чистих стратегій:

$$A_1-\left(1,(1,1)\right),\ A_2-\left(1,(1,2)\right),\ A_3-\left(1,(2,1)\right),\ A_4-\left(1,(2,2)\right),$$

$$A_5-\left(2,(1,1)\right),\ A_6-\left(2,(1,2)\right),\ A_7-\left(2,(2,1)\right),\ A_8-\left(2,(2,2)\right).$$

Покажемо тепер, як залежно від стратегій, що застосовуються гравцями, визначаються елементи таблиці виграшів гравця А.

Нехай, наприклад, гравець А вибрав стратегію A_6 – $(2,(1,2))$, а гравець *B* – стратегію B_3 – $(2,1)$. Тоді $x = 2$. З $(2,1)$ випливає, що $y = 1$, а з $(2,(1,2))$ випливає, що $z = 1$. Звідси

$$L(x,y,z) = L(2,1,1) = e.$$

За цією ж схемою можна визначити всі інші значення $L(x,y,z)$, унаслідок чого отримаємо таблицю виграшів

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
A_1	$(1,(1,1))$	$L(1,1,1)$	$L(1,1,1)$	$L(1,2,1)$	$L(1,2,1)$
A_2	$(1,(1,2))$	$L(1,1,1)$	$L(1,1,1)$	$L(1,2,2)$	$L(1,2,2)$
A_3	$(1,(2,1))$	$L(1,1,2)$	$L(1,1,2)$	$L(1,2,1)$	$L(1,2,1)$
A_4	$(1,(2,2))$	$L(1,1,2)$	$L(1,1,2)$	$L(1,2,2)$	$L(1,2,2)$
A_5	$(2,(1,1))$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,1))$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,1)$
A_6	$(2,(1,2))$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,2)$	$L(2,1,1)$	$L(2,2,2)$
A_7	$(2,(2,1))$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,1)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,1)$
A_8	$(2,(2,2))$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,2)$	$L(2,1,2)$	$L(2,2,2)$

а також матрицю гри

$$A = \begin{pmatrix} a & a & c & c \\ a & a & d & d \\ b & b & c & c \\ b & b & d & d \\ e & g & e & g \\ e & h & e & h \\ f & g & f & g \\ f & h & f & h \end{pmatrix}.$$

Унаслідок того, що розглянута позиційна гра є грою з повною інформацією, отримана матриця має сідлову точку при будь-якій функції виграшів. У цьому легко переконатися, якщо довільно вибирати значення параметрів a, b, c, d, e, f, g, h.

При збільшенні кількості ходів у позиційній грі з повною інформацією стратегії будуються за аналогічною схемою.

Розглянемо, наприклад, чотириходову позиційну гру.

Приклад 2.11. *1-й хід* робить гравець А: він вибирає число x з множини двох чисел $\{1,2\}$.

2-й хід робить гравець В: він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$, знаючи число x, вибране гравцем А на 1-му ході.

3-й хід робить гравець А: він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$, знаючи число y, що вибрав гравець В на 2-му ході, і пам'ятаючи свій вибір числа x на 1-му ході.

4-й хід робить гравець В: він вибирає число u з множини двох чисел $\{1,2\}$, знаючи число z, що вибрав гравець А на 3-му ході, пам'ятаючи свій вибір числа y на 2-му ході і знаючи вибір гравця А на 1-му ході – число x.

Після цього гравці А і В розплачуються відповідно із заданою функцією виграшів $L(x,y,z,u)$.

Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Розв'язання. У цій грі гравець А має такі ж самі стратегії, що і в задачі, розглянутій вище: кожна з них задається трійкою вигляду

$$(x,(z_1,z_2)),$$

і загальна їх кількість дорівнює восьми.

Що стосується стратегій гравця В, то в цій грі їх шістнадцять, і кожна з них задається четвіркою вигляду

$$((y_1,y_2),(u_1,u_2)).$$

Матриця виграшів гравця А в цій грі має розмір 8х16.

Покажемо, як визначаються її елементи залежно від стратегій, застосованих гравцями.

Нехай, наприклад, гравець А вибрав стратегію A' – $(2,(2,1))$, а гравець В – стратегію B' – $((2,1),(1,2))$. Тоді $x=1$, $y=2$, а $z=1$.

З того, що $(u_1,u_2)=(1,2)$, отримаємо, що $u=1$. Звідси випливає, що шуканий елемент матриці виплат має вигляд $L(1,2,1,1)$.

Інші елементи матриці обчислюються аналогічно.

Оскільки ця позиційна гра також є грою з повною інформацією, то одержана матриця буде мати сідлову точку.

2.6. Позиційні ігри з непротилежними інтересами

У розглянутих прикладах основну увагу було приділено опису процесу нормалізації позиційної гри – побудові дерева гри й інформаційних множин, опису стратегій гравців та обчисленню елементів платіжної матриці. Наступний природний крок – визначення ціни гри і знаходження оптимальних стратегій гравців – проводиться методами, про які розповідалося в розд. 1, тобто методами розв’язання матричних ігор.

Досить детально розглянуто позиційні ігри двох осіб, де були явно виражені інтереси одного з гравців (гравця А). Слід, однак, мати на увазі, що в одних випадках інтереси гравця В можуть бути повністю протилежними інтересам гравця А, тоді як в інших ситуаціях цілком може виявитися, що те, що добре для одного гравця, не обов'язково погано для іншого. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 2.12. *1-й хід*. Гравець А вибирає число x з множини двох чисел $\{1,2\}$.

2-й хід. Гравець В вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$, знаючи вибір числа x гравцем А.

Функції виплат гравцям А та В – $L_A(x,y)$ та $L_B(x,y)$ відповідно – задаються так:

$$L_A(1,1)=1,\ L_A(1,2)=-1,\ L_A(2,1)=-2,\ L_A(2,2)=2,$$
$$L_B(1,1)=2,\ L_B(1,2)=1,\ L_B(2,1)=1,\ L_B(2,2)=2.$$

Розв’язання. Дерево гри показано на рис. 2.10.

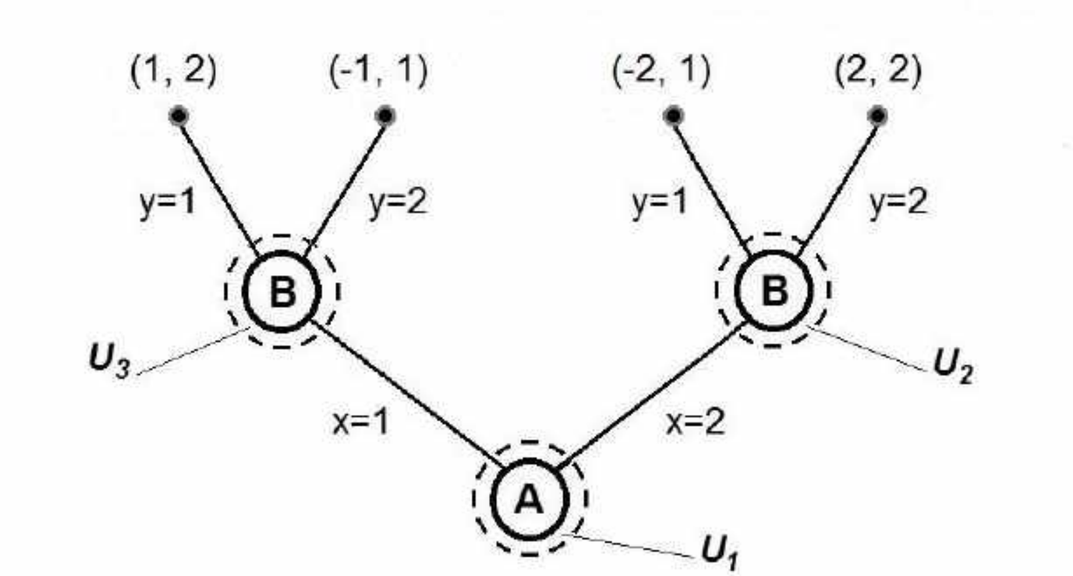


Рис. 2.10

Результат гри залежить від того, які наміри у гравця В – максимізувати свій виграш:

$$L_B(x,y) \to max,$$

чи максимізувати свій відносний виграш:

$$L_B(x,y) | L_A(x,y) \to max.$$

У першому випадку це досягається так:

при $x=1 \quad y=1$ та $L_B(1,1)=2 \quad (L_A(1,1)=1)$;

при $x=2 \quad y=2$ та $L_B(2,2)=2 \quad (L_A(2,2)=2)$,

у другому випадку так:

при $x=1 \quad y=2$ та $L_B(1,2)-L_A(1,2)=1-(-1)=2$;

при $x=2 \quad y=1$ та $L_B(2,1)-L_A(2,1)=1-(-2)=3$.

Приклад 2.13. *1-й хід*. Гравець А вибирає число x з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Якщо $x=1$, то кожен з гравців отримує свій виграш, що дорівнює 2.

Якщо $x=2$, то право *2-го ходу* отримує гравець В, де він і вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

При $y=1$ виграш гравця А дорівнює 1, а гравця В – 4. При $y=2$ обидва гравці отримують однакову кількість балів – по 3.

Розв'язання. Дерево гри показано на рис. 2.11.

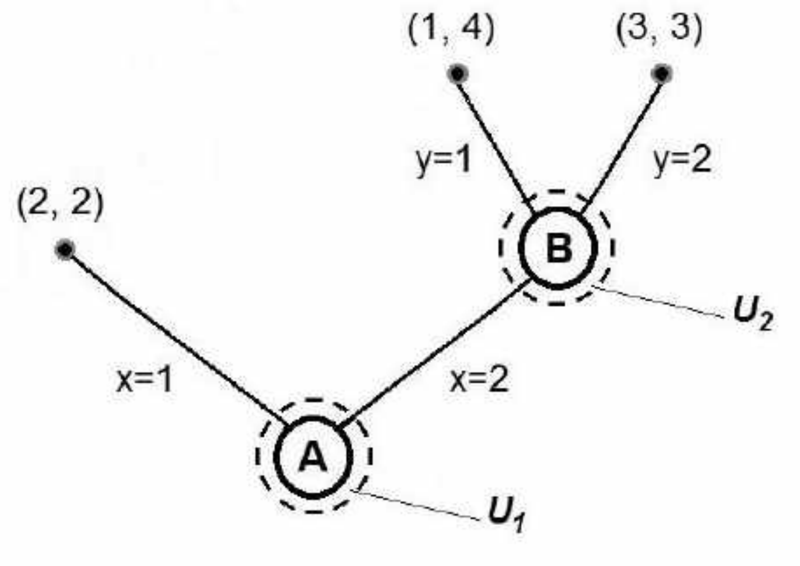


Рис. 2.11

У разі, коли кожен з гравців прагне до отримання максимального виграшу і будь-які види кооперації заборонені, результат гри ясний – гравець А вибирає $x=1$, і гра закінчується. Але при $x=2$ і $y=2$ кожен з гравців отримує по 3 (такий результат краще найпростішого $(1,1)$), і, якщо допустити угоду між гравцями, ця обставина цілком може змінити результат гри.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чим характеризується позиційна гра?
2. Опишіть структуру позиційної гри.
3. Що таке дерево гри?
4. Дайте означення позиційної гри.
5. Що означає нормалізація матричної гри?
6. Що визначає інформаційна множина?
7. Як інформованість гравців впливає на результат гри?
8. Чи впливає інформованість гравців на розмірність матриці гри та на ціну гри?
9. Наведіть різні випадки інформованості гравців.
10. Чим характеризується позиційна гра з випадковими ходами?
11. Що можна сказати про розв'язок позиційної гри з повною інформацією?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

2.1.1. Визначити ціну й оптимальні стратегії такої гри. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число x з двох чисел $\{1, 2\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: не знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на 1-му ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1, 2\}$;

- 3-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число вибрав 2-й гравець і яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1, 2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають такі значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
$L(x, y, z)$	-2	-1	3	4	5	2	2	6

Визначити всі інформаційні множини гравців.

2.1.2. Визначити ціну й оптимальні стратегії такої гри. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число x з двох чисел $\{1, 2\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: не знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на 1-му ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1, 2\}$;

- 3-й хід робить 1-й гравець: не знаючи, яке число вибрав 2-й гравець і яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають такі значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
$L(x,y,z)$	-2	-1	3	4	5	2	2	6

Визначити всі інформаційні множини гравців. Порівняти результат задачі з результатом задачі 2.1.1. Як впливає інформованість гравців на ціну гри?

2.1.3. Визначити ціну й оптимальні стратегії такої гри. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на 1-му ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$;

- 3-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число вибрав 2-й гравець і яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають такі значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
$L(x,y,z)$	-2	-1	3	4	5	2	2	6

Визначити всі інформаційні множини гравців.

2.1.4. Визначити ціну й оптимальні стратегії такої гри. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$;

- 3-й хід робить 1-й гравець: не знаючи, яке число вибрав 2-й гравець і яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають такі значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
$L(x,y,z)$	-2	-1	3	4	5	2	2	6

Визначити всі інформаційні множини гравців. Порівняти результат задачі з результатом задачі 2.1.3. Як впливає інформованість гравців на ціну гри?

2.1.5. Гра складається з трьох ходів:

- 1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з однаковими ймовірностями $0,5$;
- 2-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$;
- 3-й хід робить 2-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ – функція, визначена значеннями

$$L(1,1,1)=-2,\ L(1,2,2)=-4,\ L(1,1,2)=4,\ L(2,1,1)=3,$$
$$L(2,2,1)=-3,\ L(1,2,1)=1,\ L(2,1,2)=0,\ L(2,2,2)=-5.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри й оптимальні стратегії гравців.

2.1.6. Гра складається з трьох ходів:

- 1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з однаковими ймовірностями $0,5$;
- 2-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$;
- 3-й хід робить 2-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, і не знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ – функція, визначена значеннями

$$L(1,1,1)=-2,\ L(1,2,2)=-4,\ L(1,1,2)=4,\ L(2,1,1)=3,$$
$$L(2,2,1)=-3,\ L(1,2,1)=1,\ L(2,1,2)=0,\ L(2,2,2)=-5.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри й оптимальні стратегії гравців.

Порівняти результат задачі з результатом задачі 2.1.5 і зробити висновки щодо впливу наявності інформованості гравців на результат гри.

2.1.7. Гра складається з трьох ходів:

- 1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з імовірностями $2/3$ та $1/3$;
- 2-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$;
- 3-й хід робить 2-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ – функція, визначена значеннями

$$L(1,1,1)=-1,\ L(1,2,2)=-3,\ L(1,1,2)=5,\ L(2,1,1)=4,$$
$$L(2,2,1)=-2,\ L(1,2,1)=2,\ L(2,1,2)=1,\ L(2,2,2)=6.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри й оптимальні стратегії гравців.

2.1.8. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$;
- 2-й хід проводиться випадково: вибирається число y, що дорівнює 1 або 2 з імовірностями $0,2$ та $0,8$;
- 3-й хід: якщо на 1-му ході було вибрано число 1, то 2-й гравець, знаючи числа x і y, вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$; якщо на 2-му ході було вибрано число 2, то 1-й гравець, знаючи числа x і y, вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ – функція, визначена значеннями

$$L(1,1,1)=-1,\ L(1,2,2)=-3,\ L(1,1,2)=5,\ L(2,1,1)=4,$$
$$L(2,2,1)=-2,\ L(1,2,1)=2,\ L(2,1,2)=1,\ L(2,2,2)=6.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри й оптимальні стратегії гравців.

2.1.9. Навести приклад двоходової гри, побудувати дерево гри, зазначити на ньому допустимі й недопустимі інформаційні множини (зобразити кілька різних ситуацій). Для недопустимих інформаційних множин пояснити, чому вони є недопустимими.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.1.1. Визначити ціну й оптимальні стратегії такої гри. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число $\boldsymbol{x}$ з двох чисел $\{\boldsymbol{1,2}\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: не знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на 1-му ході, він вибирає число $\boldsymbol{y}$ з двох чисел $\{\boldsymbol{1,2}\}$;

- 3-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і не знаючи, яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число $\boldsymbol{z}$ з двох чисел $\{\boldsymbol{1,2}\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають такі значення:

$\boldsymbol{x}$	1	1	1	1	2	2	2	2
$\boldsymbol{y}$	1	1	2	2	1	1	2	2
$\boldsymbol{z}$	1	2	1	2	1	2	1	2
$\boldsymbol{L(x,y,z)}$	-2	-1	3	4	5	2	2	6

Визначити всі інформаційні множини гравців.

2.1.2. Визначити ціну й оптимальні стратегії такої гри. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число $\boldsymbol{x}$ з двох чисел $\{\boldsymbol{1,2}\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: не знаючи, яке число $\boldsymbol{x}$ вибрав 1-й гравець на 1-му ході, він вибирає число $\boldsymbol{y}$ з двох чисел $\{\boldsymbol{1,2}\}$;

- 3-й хід робить 1-й гравець: не знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і знаючи, яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число $\boldsymbol{z}$ з двох чисел $\{\boldsymbol{1,2}\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають такі значення:

$\boldsymbol{x}$	1	1	1	1	2	2	2	2
$\boldsymbol{y}$	1	1	2	2	1	1	2	2
$\boldsymbol{z}$	1	2	1	2	1	2	1	2
$\boldsymbol{L(x,y,z)}$	-2	-1	3	4	5	2	2	6

Визначити всі інформаційні множини гравців. Порівняти результат задачі з результатом задачі 2.1.1. Як впливає інформованість гравців на ціну гри?

2.1.3. Визначити ціну й оптимальні стратегії такої гри. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на 1-му ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$;

- 3-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і не знаючи, яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають такі значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
$L(x,y,z)$	-2	-1	3	4	5	2	2	6

Визначити всі інформаційні множини гравців.

2.1.4. Визначити ціну й оптимальні стратегії такої гри. Гра складається з трьох ходів, які виконують два гравці:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на 1-му ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$;

- 3-й хід робить 1-й гравець: не знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і знаючи, яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають такі значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
$L(x,y,z)$	-2	-1	3	4	5	2	2	6

Визначити всі інформаційні множини гравців. Порівняти результат задачі з результатом задачі 2.1.3. Як впливає інформованість гравців на ціну гри?

2.1.5. Гра складається з трьох ходів:

- 1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з однаковими ймовірностями $0,5$;

- 2-й хід робить 1-й гравець: не знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$;

- 3-й хід робить 2-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ – функція, визначена значеннями:

$$L(1,1,1)=-2,\ L(1,2,2)=-4,\ L(1,1,2)=4,\ L(2,1,1)=3,$$
$$L(2,2,1)=-3,\ L(1,2,1)=1,\ L(2,1,2)=0,\ L(2,2,2)=-5.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри й оптимальні стратегії гравців.

2.1.6. Гра складається з трьох ходів:

- 1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з однаковими ймовірностями $0,5$;

- 2-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$;

- 3-й хід робить 2-й гравець: не знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, і знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ – функція, визначена значеннями:

$$L(1,1,1)=-2,\ L(1,2,2)=-4,\ L(1,1,2)=4,\ L(2,1,1)=3,$$
$$L(2,2,1)=-3,\ L(1,2,1)=1,\ L(2,1,2)=0,\ L(2,2,2)=-5.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри й оптимальні стратегії гравців.

Порівняти результат задачі з результатом задачі 2.1.5 та зробити висновки щодо впливу наявності інформованості гравців на результат гри.

2.1.7. Гра складається з трьох ходів:

- 1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з імовірностями $2/3$ та $1/3$;

- 2-й хід робить 1-й гравець: знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$;

- 3-й хід робить 2-й гравець: не знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, і знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ – функція, визначена значеннями

$$L(1,1,1)=-1,\ L(1,2,2)=-3,\ L(1,1,2)=5,\ L(2,1,1)=4,$$
$$L(2,2,1)=-2,\ L(1,2,1)=2,\ L(2,1,2)=1,\ L(2,2,2)=6.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри та оптимальні стратегії гравців.

2.1.8. Гра складається з чотирьох ходів:

- 1-й хід робить 1-й гравець: він вибирає число x з чисел $\{1,2,3,4\}$;

- 2-й хід робить 2-й гравець: знаючи, парне чи непарне число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$;

- 3-й хід: якщо на 2-му ході вибрано число $y=1$, то випадково вибирається число z з множини двох чисел $\{1,2\}$, причому $z=1$ вибирається з імовірністю $0,1$, а $z=2$ – з імовірністю $0,9$; якщо на 2-му ході вибрано число $y=2$, то 1-й гравець, знаючи числа x і y, вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$;

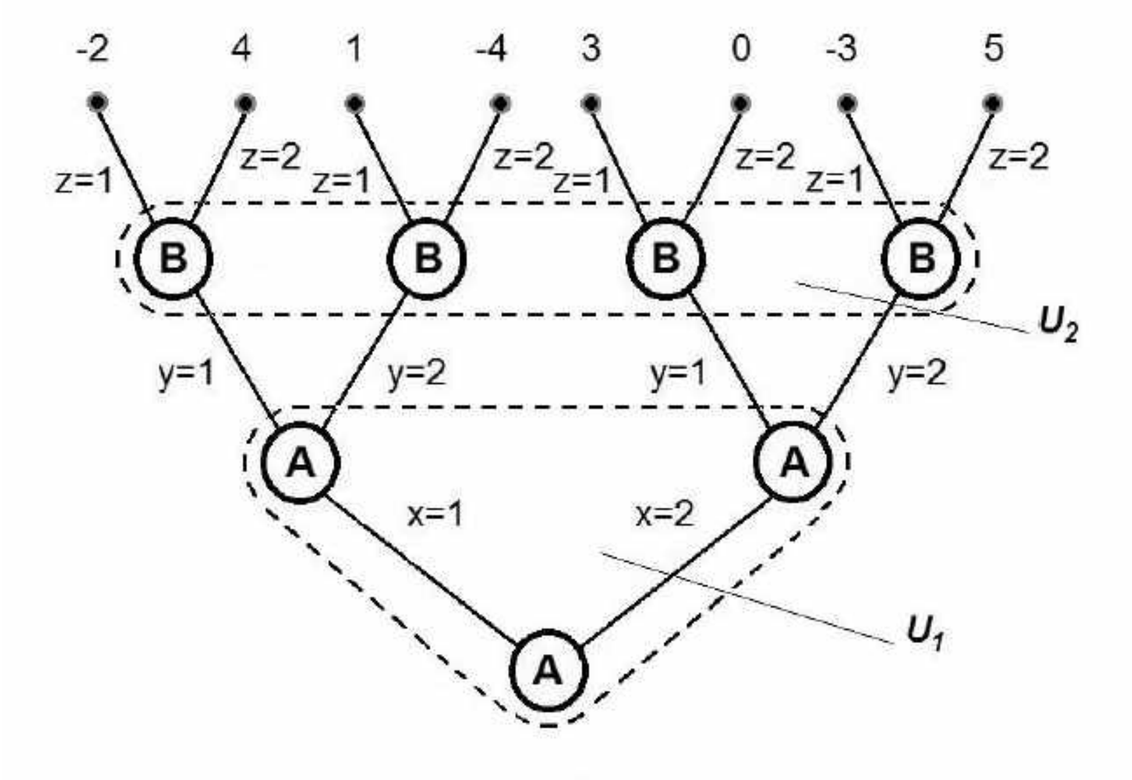
- 4-й хід робить 1-й гравець: знаючи значення y, но не знаючи чисел x і z, він вибирає число w з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Дати графічне зображення гри. Визначити інформаційні множини.

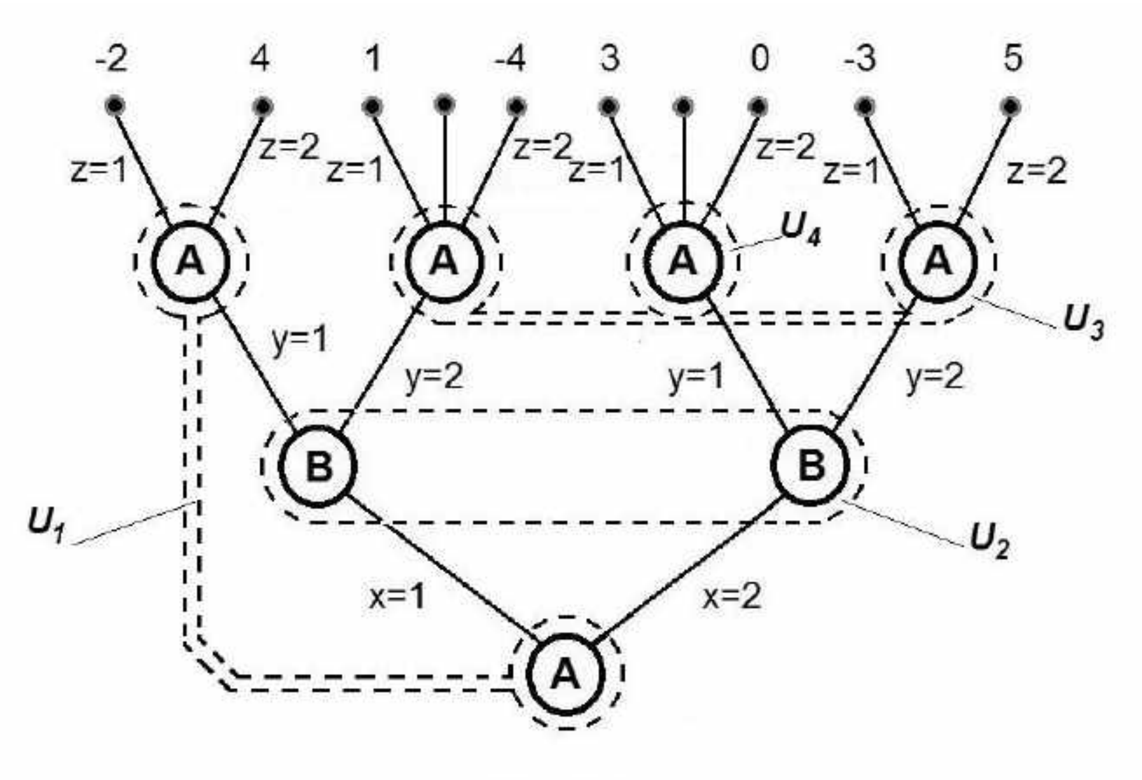
2.1.9. Навести приклад двоходової гри, побудувати дерево гри, зазначити на ньому допустимі й недопустимі інформаційні множини (зобразити кілька різних ситуацій). Для недопустимих інформаційних множин пояснити, чому вони є недопустимими.

2.1.10. Навести приклад триходової гри, побудувати дерево гри, зазначити на ньому допустимі й недопустимі інформаційні множини (зобразити кілька різних ситуацій). Для недопустимих інформаційних множин пояснити, чому вони є недопустимими.

2.1.11. Чи допустимі інформаційні множини, зображені на рис. 2.12 та рис. 2.13? Відповідь обґрунтувати.

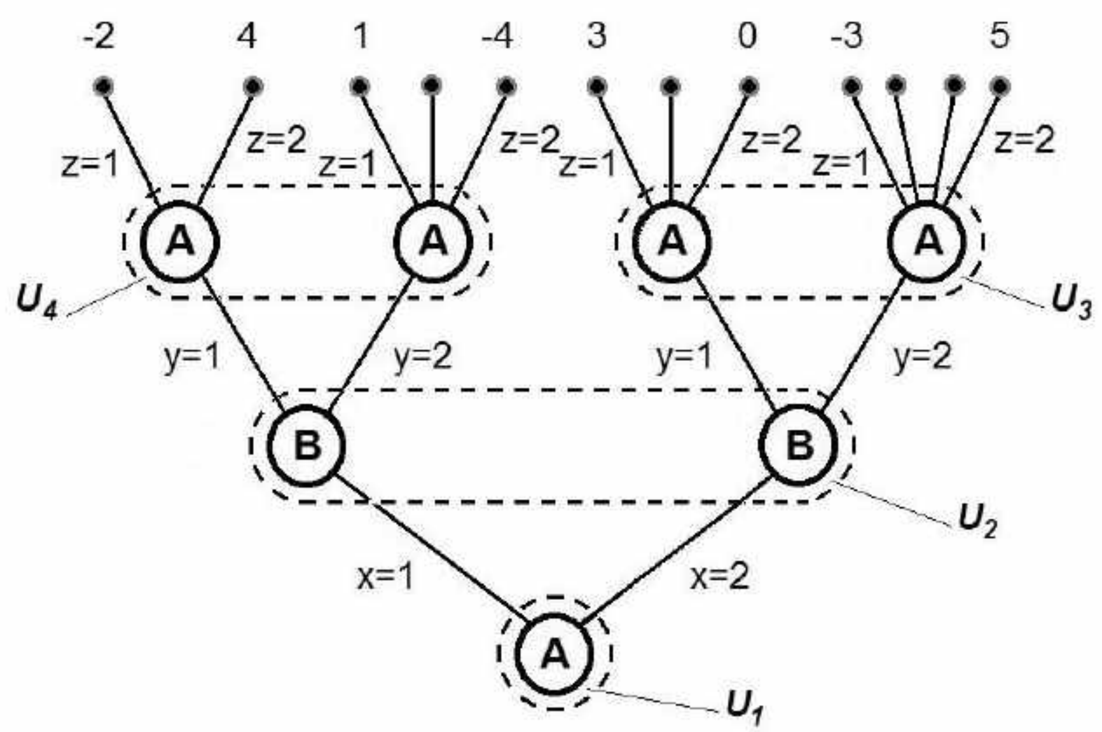

-2
4
1
-4
3
0
-3
5
z=1
z=2
z=1
z=2
z=1
z=2
z=1
z=2
B
B
B
B
U2
y=1
y=2
y=1
y=2
A
A
x=1
x=2
U1
A

а

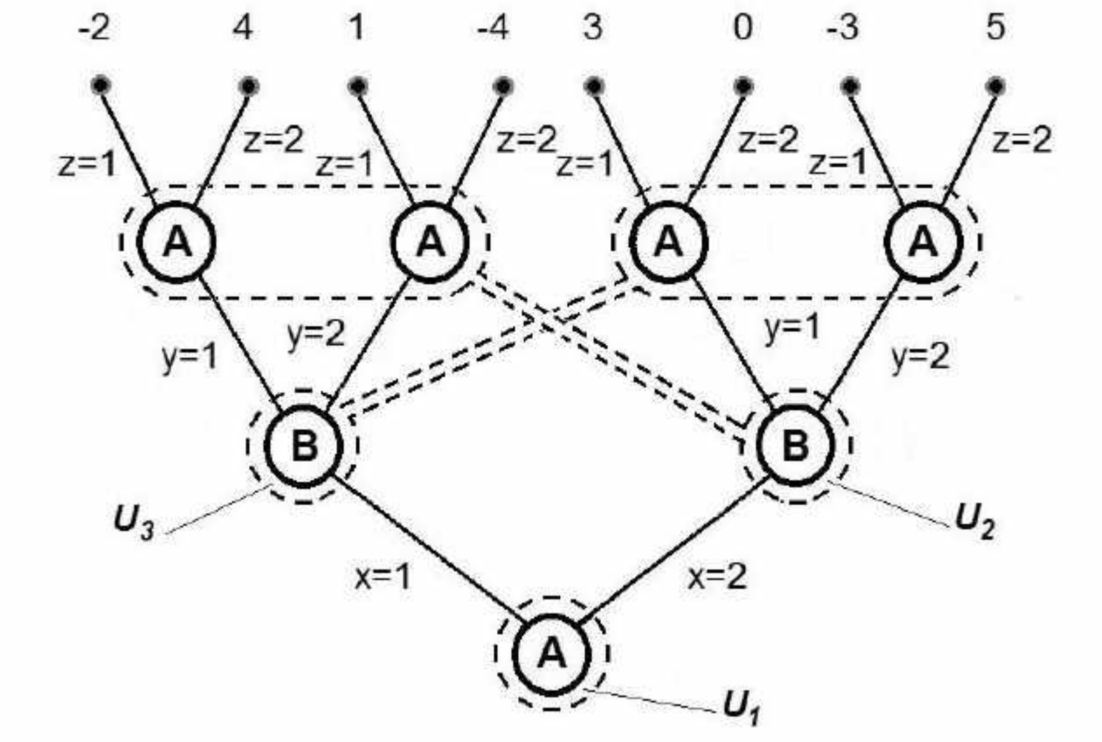

-2
4
1
-4
3
0
-3
5
z=1
z=2
z=1
z=2
z=1
z=2
z=1
z=2
A
A
A
A
U4
U3
y=1
y=2
y=1
y=2
B
B
U1
U2
x=1
x=2
A

б

Рис. 2.12


-2
4
1
-4
3
0
-3
5
z=1
z=2
z=1
z=2
z=1
z=2
z=1
z=2
A
A
A
A
U4
U3
y=1
y=2
y=1
y=2
B
B
U2
x=1
x=2
A
U1

а


-2
4
1
-4
3
0
-3
5
z=1
z=2
z=1
z=2
z=1
z=2
z=1
z=2
A
A
A
A
y=1
y=2
y=1
y=2
B
B
U3
U2
x=1
x=2
A
U1

б

Рис. 2.13

Розділ 3. БІМАТРИЧНІ ІГРИ

3.1. Знаходження точки рівноваги за Нешем

Розглянемо скінченну безкоаліційну гру двох осіб. Таку гру називають *біматричною* та позначають $\boldsymbol{\Gamma(A,B)} = \langle \{X,Y\},\{A,B\} \rangle$.

Зазвичай у такій грі задають дві матриці однакової розмірності виграшів 1-го та 2-го гравців. Рядки цих матриць відповідають стратегіям 1-го гравця, а стовпці – стратегіям 2-го гравця. При цьому в першій матриці задаються виграші 1-го гравця, а в другій – 2-го. Іноді застосовується інша форма запису, а саме матриця, де на місці кожного елемента стоять два числа, записані через кому. Тут перше й друге числа означають виграші 1-го й 2-го гравців відповідно. Зазначимо, що матрична (антагоністична) гра є окремим випадком біматричної, у цьому випадку $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$.

Для біматричних ігор стандартним чином, аналогічно випадку матричної гри, визначається мішане розширення. Розв'язками біматричної гри є точки рівноваги за Нешем, які, згідно з означенням точок рівноваги, визначаються таким чином. Ситуацію $(x^*, y^*) \in X \times Y$ у біматричній грі називають *точкою рівноваги за Нешем*, якщо виконуються нерівності

$$x^{*T} A y^* \ge x^T A y^* \quad \forall x \in X ,$$

$$x^{*T} A y^* \ge x^{*T} A y \quad \forall y \in Y .$$

Ця система нерівностей означає, що стратегія 1-го гравця $x^* \in X$ є його найкращою відповіддю на дії 2-го гравця. Аналогічно стратегія 2-го гравця $y^* \in Y$ є його найкращою відповіддю на дії 1-го. Фактично рівноважна ситуація $(x^*, y^*) \in X \times Y$ при найкращих відповідях обох гравців переходить сама в себе. Використуємо цю властивість для знаходження точки рівноваги.

Для будь-якого $y \in Y$ знайдемо ті $x \in X$, які надають найбільшого значення функції $f_1(x, y)$. Це позначається так:

$$x \in \arg\max_{x \in X} f_1(x,y) .$$

Аналогічно для всіх $x \in X$ знайдемо ті $y \in Y$, які надають найбільшого значення функції $f_2(x, y)$. Це позначається так:

$$y \in \arg\max_{y \in Y} f_2(x,y) .$$

Таким чином, задаються відображення $x = x^{max}(y)$ та $y = y^{max}(x)$, узагалі кажучи, багатозначні.

Розглянемо ті пари стратегій $(x, y) \in X \times Y$, які є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} x = x^{max}(y), \\ y = y^{max}(x). \end{cases}$$

Такі ситуації, і лише такі є точками рівноваги за Нешем, тобто точка $(x^*, y^*) \in X \times Y$ є нерухомою точкою багатозначного відображення в себе.

Приклад 3.1. «Сімейна суперечка». Ця біматрична гра задається матрицею

1–й гравець	***2–й гравець Ф***	***Б***
Ф	***2; 1***	***0; 0***
Б	***0; 0***	***1; 2***

Розв'язання. У цій грі є дві ситуації рівноваги в чистих стратегіях:

$$(x^*, y^*) = ((1,0),(1,0)),\ (x^0, y^0) = ((0,1),(0,1)) \in X \times Y.$$

Визначимо найкращу реакцію 1-го гравця на дії 2-го та найкращу реакцію 2-го гравця на дії 1-го. Нехай $x = (\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, $y = (\beta, 1-\beta)$, $\beta \in [0,1]$. Кожна стратегія 1-го (2-го) гравця однозначно відповідає значенню параметра $\alpha \in [0,1]$ $(\beta \in [0,1])$, і система рівнянь для визначення точок рівноваги набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha \in \arg \max\limits_{\alpha \in [0;1]} \{(Ay)_1, (Ay)_2\} = \arg \max\limits_{\alpha \in [0;1]} \{2\beta, 1-\beta\}; \\ \beta \in \arg \max\limits_{\beta \in [0;1]} \left\{\left(x^T B\right)_1, \left(x^T B\right)_2\right\} = \arg \max\limits_{\beta \in [0;1]} \{\alpha, 2-2\alpha\}. \end{cases}$$

Розв'язки рівнянь мають такий вигляд:

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \beta \in \left[0, \tfrac{1}{3}\right), \\ [0,1], & \beta = \tfrac{1}{3}, \\ 1, & \beta \in \left(\tfrac{1}{3}, 1\right], \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} 0, & \alpha \in \left[0, \tfrac{2}{3}\right), \\ [0,1], & \alpha = \tfrac{2}{3}, \\ 1, & \alpha \in \left(\tfrac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Графіки цих розв'язків зображено на рис. 3.1.

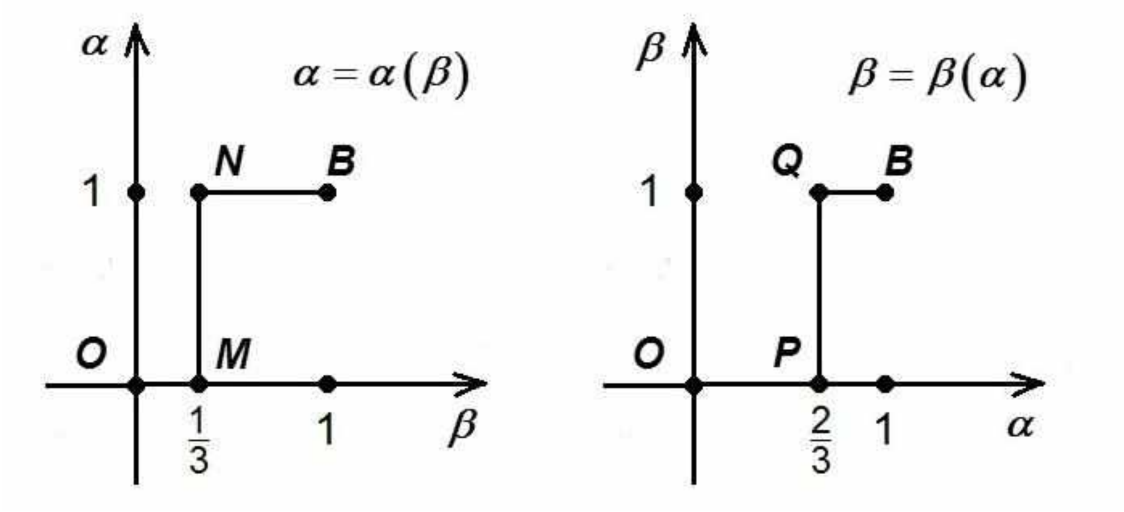


Рис. 3.1

Для знаходження точок рівноваги побудуємо два ці графіки в одній системі координат (рис. 3.2).

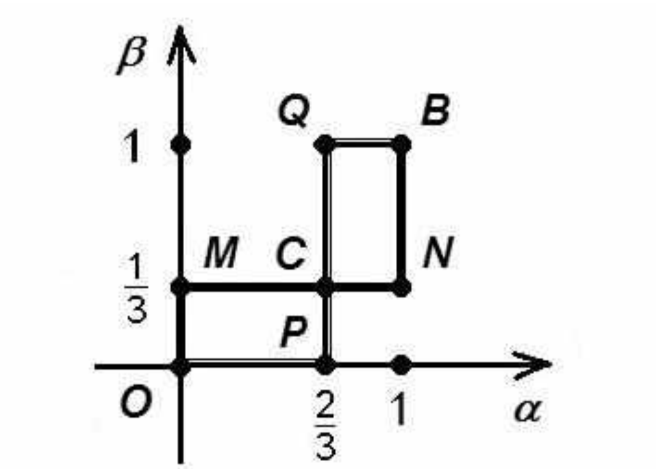


Рис. 3.2

У заданих багатозначних відображеннях буде три спільні точки, а саме $\boldsymbol{O}(0,0)$, $\boldsymbol{B}(1,1)$ та $\boldsymbol{C}\left(2/3, 1/3\right)$. Точки $\boldsymbol{O}$ та $\boldsymbol{B}$ відповідають уже знайденим ситуаціям рівноваги в чистих стратегіях, точка $\boldsymbol{C}\left(2/3, 1/3\right)$ указує на наявність рівноваги у змішаних стратегіях. Таким чином, у грі “Сімейна суперечка” є три точки рівноваги:

$$\left(x^*, y^*\right) = \left((1,0), (1,0)\right), \quad f\left(x^*, y^*\right) = (2,1),$$

$$\left(x^0, y^0\right) = \left((0,1), (0,1)\right), \quad f\left(x^0, y^0\right) = (1,2),$$

$$\left(x^1, y^1\right) = \left(\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)\right), \quad f\left(x^1, y^1\right) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Остання точка рівноваги у змішаних стратегіях пропонує подружній парі вибирати похід на футбол або балет випадково й незалежно. Якщо вибирати улюблену розвагу з імовірністю $\tfrac{2}{3}$, то обидва в середньому отримають однакову користь, що дорівнює 1. Таким чином, у симетричній грі досягнуто справедливість, але при цьому кожен отримає менше користі, ніж у будь-якому випадку рівноваги в чистих стратегіях, тобто справедливість досягнуто ціною втрати ефективності.

Розглянемо інший спосіб розв'язання цього прикладу. Нехай гравці вибирають свої змішані стратегії $x = (\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, $y = (\beta, 1-\beta)$, $\beta \in [0,1]$. Тоді функції виграшу мають вигляд

$$f_1(\alpha, \beta) = 2\alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta),\ f_2(\alpha, \beta) = \alpha\beta + 2(1-\alpha)(1-\beta),$$

а точки рівноваги шукають у квадраті $(\alpha, \beta) \in [0,1] \times [0,1]$.

Оскільки функції $f_1(\alpha, \beta)$ і $f_2(\alpha, \beta)$ є неперервними та диференційовними за своїми параметрами, то необхідною умовою наявності рівноваги всередині квадрата (тобто рівноваги у змішаних стратегіях) є умови

$$\frac{\partial f_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f_2(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0,$$

звідки маємо $\alpha = \tfrac{2}{3}$, $\beta = \tfrac{1}{3}$.

Перевіримо достатні умови рівноваги:

– $f_1\left(\alpha, \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{2}{3}$ (тобто $\alpha = \tfrac{2}{3}$ є найкращою відповіддю при $\beta = \tfrac{1}{3}$, точніше, однією з безлічі найкращих відповідей);

– аналогічно $f_2\left(\tfrac{2}{3}, \beta\right) = \tfrac{2}{3}$ (тобто $\beta = \tfrac{1}{3}$ також є найкращою відповіддю при $\alpha = \tfrac{2}{3}$).

Будемо шукати точки рівноваги на межі квадрата.

Нехай $\alpha = 0$, тоді $f_2(0, \beta) = 2(1-\beta)$ набуває максимуму при $\beta = 0$, а якщо $\beta = 0$, то функція $f_1(\alpha, 0) = 1-\alpha$ набуває максимуму при $\alpha = 0$. Маємо точку рівноваги $(0,0)$.

Нехай $\alpha = 1$, тоді $f_2(1, \beta) = \beta$ набуває максимуму при $\beta = 1$, а якщо $\beta = 1$, то функція $f_1(\alpha, 1) = 2\alpha$ набуває максимуму при $\alpha = 1$. Маємо точку рівноваги $(1,1)$.

Узагалі для гри “Сімейна суперечка” дуже важливим моментом є те, чи допускається можливість попередніх переговорів. Якщо так, то внаслідок переговорів може бути досягнута одна з точок рівноваги: $(\boldsymbol{0,0})$ або $(\boldsymbol{1,1})$ (або не досягнута – усе залежить від здатності гравців іти на компроміс). Якщо ж попередніх переговорів не було (подружжя розвели по різних кімнатах і не дали домовитись), то не зрозуміло, якої саме стратегії дотримуватись кожному з них. Якщо навіть чоловік згоден піти на компроміс заради жінки й вибирає балет, то може статись так, що жінка поведе себе так само щодо чоловіка й вибере футбол, отже, результатом гри буде $(\boldsymbol{0,0})$.

У художній літературі подібну ситуацію (бажання йти на компроміс без попередньої домовленості) описано в оповіданні О. Генрі “Дары волхвов”. У зарубіжній літературі задача “Сімейна суперечка” має назву “battle of sexes” (у буквальному перекладі – війна статей) та абревіатуру BoS. У деяких нових джерелах ця вже класична абревіатура заради політкоректності розшифровується як “Bach or Stravinski”, і йдеться про двох друзів, які люблять класичну музику, але один з них більше любить Баха, а інший – Стравінського.

Наступний приклад демонструє випадок біматричної гри 2×2, у якій існує єдина точка рівноваги у змішаних стратегіях.

Приклад 3.2. Розв’язати біматричну гру, задану двома матрицями виграшів 1-го та 2-го гравців:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв’язання. У цій грі є чотири ситуації в чистих стратегіях, жодна з яких не задовольняє умову рівноваги за Нешем. Розглянемо мішане розширення гри $\boldsymbol{\Gamma(A,B)}$. Позначимо множини стратегій гравців:

$$\boldsymbol{X}=\left\{(\alpha,\boldsymbol{1}-\alpha)\in \boldsymbol{R^2}\,\middle|\,\alpha\in[\boldsymbol{0;1}]\right\},$$

$$\boldsymbol{Y}=\left\{(\beta,\boldsymbol{1}-\beta)\in \boldsymbol{R^2}\,\middle|\,\beta\in[\boldsymbol{0;1}]\right\}.$$

Знайдемо ситуацію рівноваги як нерухому точку відповідного багатозначного відображення множини ситуацій у себе.

Визначимо найкращу реакцію 1-го гравця на дії 2-го та найкращу реакцію 2-го гравця на дії 1-го. Нехай $\boldsymbol{x}=(\alpha,\boldsymbol{1}-\alpha)$, $\alpha\in[\boldsymbol{0,1}]$, $\boldsymbol{y}=(\beta,\boldsymbol{1}-\beta)$, $\beta\in[\boldsymbol{0,1}]$. Кожна стратегія 1-го (2-го) гравця однозначно відповідає значенню параметра $\alpha\in[\boldsymbol{0,1}]$ $(\beta\in[\boldsymbol{0,1}])$, і система рівнянь для визначення точок рівноваги набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha \in \arg\max\limits_{\alpha\in[0;\,1]} \left\{ (Ay)_1, (Ay)_2 \right\} = \arg\max\limits_{\alpha\in[0;\,1]} \left\{ 2-4\beta, -1+4\beta \right\}, \\ \beta \in \arg\max\limits_{\beta\in[0;\,1]} \left\{ \left(x^T B\right)_1, \left(x^T B\right)_2 \right\} = \arg\max\limits_{\beta\in[0;\,1]} \left\{ 6\alpha-2, 1-4\alpha \right\}. \end{cases}$$

Розв'язки рівнянь мають вигляд

$$\alpha = \begin{cases} 1, \; \beta \in \left[0, \; 3/8\right), \\ [0,1], \; \beta = 3/8, \\ 0, \; \beta \in \left(3/8, 1\right], \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 0, \; \alpha \in \left[0, \; 3/10\right), \\ [0,1], \; \alpha = 3/10, \\ 1, \; \alpha \in \left(3/10, 1\right]. \end{cases}$$

Для знаходження точок рівноваги побудуємо графіки розв'язків рівнянь в одній системі координат (рис. 3.3).

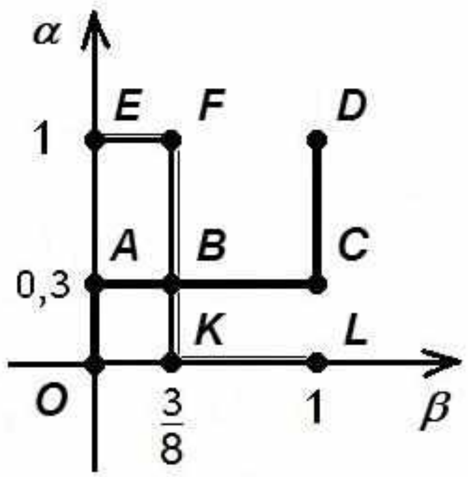


Рис. 3.3

Тут функцію найкращої відповіді 1-го гравця $\alpha(\beta)$ зображено ламаною $EFBKL$, а функцію найкращої відповіді 2-го гравця $\beta(\alpha)$ – ламаною $OABCD$. Графіки мають єдину спільну точку, що відповідає ситуації рівноваги і є розв'язком гри у змішаних стратегіях $\left(x^*, y^*\right) \in X \times Y$, $X \times Y = [0;1]^2 \times [0;1]^2$ де стратегії $x^* = \left(3/10, 7/10\right)$, $y^* = \left(3/8, 5/8\right)$. Обчислимо виграші гравців у ситуації рівноваги:

$$f_1\left(x^*, y^*\right) = x^{*T} A y^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} = 0,5;$$

$$f_2\left(x^*, y^*\right) = x^{*T} B y^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} = -0,2 .$$

Відповідь. $x^* = \left({}^{3}\!/_{10}, {}^{7}\!/_{10} \right)$, $y^* = \left({}^{3}\!/_{8}, {}^{5}\!/_{8} \right)$, $f\left(x^*, y^*\right) = (0,5; -0,2)$.

Аналогічно випадку матричної гри, для біматричної гри також правильною є *теорема існування розв'язку біматричної гри*, у якій стверджується, що для будь-якого розширення біматричної гри існує принаймні одна точка рівноваги за Нешем принаймні у змішаних стратегіях. Алгоритм доведення цієї теореми є аналогічним алгоритму доведення твердження для матричної гри.

Відмінністю біматричної гри від матричної є те, що в матричній грі ціна гри визначається однозначно, а множина точок рівноваги є опуклою й замкненою. У біматричній грі множина точок рівноваги може бути незв'язною (наприклад, множина окремих точок), і кожній з таких відповідає "своя" функція виграшу гравців (наприклад, у грі "Сімейна суперечка" було дві точки рівноваги в чистих стратегіях та одна – у змішаних стратегіях).

Наведемо деякі важливі означення, які будуть використовуватися далі.

3.2. Домінування стратегій

Нехай 1-й і 2-й гравці дотримуються деяких змішаних стратегій $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ та $y = \left(y_1, y_2, ..., y_m\right)$.

У загальному випадку стратегії неможливо порівняти між собою: в одних ситуаціях кращою є одна, в інших – інша (звичайно, тут під ситуаціями слід розуміти вибір іншими гравцями своїх стратегій). Однак можливі випадки, коли одна стратегія є безумовно кращою за інші.

Стратегія x_i гравця *сильно домінує* стратегію x_i', якщо для будь-якого x_{-i} з X_{-i} виконується нерівність $f_i\left(x_i, x_{-i}\right) > f_i\left(x_i', x_{-i}\right)$. Якщо в означенні знак «>» замінити на «≥», то кажуть про *слабе домінування*.

Стратегію x_i гравця називають *(слабо) домінуючою* або *домінантною*, якщо вона (слабо) домінує будь-яку стратегію з X_i.

Стратегію x_i гравця називають *домінованою*, якщо над нею домінує якась інша стратегія з X_i.

Використання гравцем його домінантної стратегії є раціональним при будь-яких припущеннях. Якщо гравець має таку стратегію, то йому не треба знати функції виграшу інших гравців і робити припущення про їх можливу поведінку та ситуацію, що може скластися внаслідок цього, – просто треба застосувати свою домінантну стратегію. При припущенні про раціональну поведінку якогось гравця іншим гравцям треба припустити, що цей гравець застосовує свою домінантну стратегію, та виключити його зі списку гравців.

Застосування домінантних стратегій, на перший погляд, здається очевидним і безспірним. Можна показати, що якщо гравець має домінантну стратегію, то ця стратегія належить точці рівноваги за Нешем (як його чиста стратегія). Але розглянемо приклад, який суперечить тезі про безумовну перевагу домінантних стратегій.

Приклад 3.3. Розглянемо біматричну гру, задану матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 1 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. На перший погляд, усе зрозуміло – 2-га стратегія 1-го гравця домінується 1-ю, отже, виключається. 1-му гравцю треба завжди вибирати 1-шу стратегію, а 2-му – 2-гу, таким чином, маємо єдину точку рівноваги за Нешем $(1,2)$, $f(1,2)=(1,1)$.

Припустимо тепер, що гра відбувається багаторазово. Тоді, звичайно, 1-й гравець дуже бажає, щоб 2-й гравець грав 1-й, а не 2-й стовпець, примусити його це робити не може, але виявляється, що може стимулювати. Наприклад, нехай 1-й гравець дотримується змішаної стратегії $(0,9;\ 0,1)$. Тоді, якщо 2-й гравець дотримується своєї 1-ї стратегії, то середній виграш 2-го гравця становить $100 \times 0,1 = 10$, а якщо 2-ї – то $0,1 \times 9 = 0,9$. Отже, 2-й гравець буде дотримуватись своєї 1-ї стратегії, що забезпечить 1-му гравцю виграш $0,9 \times 101 + 0,1 \times 100 = 100,9$. Зрозуміло, що це значно краще, ніж виграш 1, який відповідає точці рівноваги за Нешем. Але знайдена значно краща для обох гравців ситуація не є точкою рівноваги. Дійсно, якщо 1-й гравець почне сприймати поведінку 2-го гравця (вибір ним 2-го стовпця) як екзогенну ("дану від Бога") і забуде, що така поведінка 2-го гравця диктується його (1-го гравця) поведінкою, то він почне знову дотримуватись своєї 1-ї чистої стратегії, щоб одержувати середній виграш 101. Тоді з плином часу 2-й гравець почне дотримуватись своєї 2-ї стратегії, і ситуація перейде в зазначену точку рівноваги.

Так, деякі промисловці вважають витрати на екологію й природозбереження зайвими або такими, що нав'язані урядом, забуваючи про те, що належний стан природи є необхідною умовою можливості використання природних ресурсів і, отже, одержання ними прибутку.

Ситуацію $x_N = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають *ситуацією в домінантних стратегіях*, якщо для будь-якого гравця i стратегія x_i є домінантною.

Якщо такі рівноваги існують, то їх можна вважати розв'язками гри. Насправді такі ситуації трапляються нечасто. Одним з прикладів є гра «Дилема злодія».

Приклад 3.4. Розглянемо гру «Аукціон другої ціни (аукціон Вікрі)».

Нехай деякий предмет продається на аукціоні та є два покупці – А та В, для яких цінність (ціна) предмета дорівнює $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, нехай для визначеності $\boldsymbol{a > b}$. Найпростішим аукціоном закритого типу є такий: покупці в закритому вигляді пропонують ціну. Предмет дістається тому, хто назвав максимальну ціну. Для визначеності: якщо запропоновано однакові ціни, то предмет одержує 1-й покупець. Тут функції виграшу гравців мають вигляд

$$f_1(x,y)=\begin{cases} a-x, & x\ge y,\\ 0, & x<y; \end{cases} \quad f_2(x,y)=\begin{cases} b-y, & y>x,\\ 0, & y\le x. \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо цінність предмета для покупця В дорівнює $\boldsymbol{b}$, то йому немає сенсу називати більшу ціну, ніж $\boldsymbol{b}$. А метою покупця А є вгадати, яку ціну призначить В, і визначити таку саму ціну, таким чином, у цьому випадку він не має домінантної стратегії.

Однак можливим є й інший спосіб організації аукціону. У ньому переможець визначається, як і раніше (тобто той, хто визначив максимальну ціну), але при цьому він платить ціну, запропоновану 2-м покупцем. У цьому випадку функції виграшу гравців мають вигляд

$$f_1(x,y)=\begin{cases} a-y, & x\ge y,\\ 0, & x<y; \end{cases} \quad f_2(x,y)=\begin{cases} b-x, & y>x,\\ 0, & y\le x. \end{cases}$$

У цьому випадку обидва покупці мають домінантну стратегію, а саме – назвати ціну, що дорівнює цінності предмета для нього. Такий самий ефект зберігається у випадку довільної кількості покупців.

Щодо використання слабо домінантних стратегій, то тут треба зробити застереження, яке ілюструється таким прикладом.

Приклад 3.5. Розглянемо біматричну гру «Взаємна люб'язність», задану матрицями

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для 1-го гравця обидві можливі стратегії є рівнозначними, і, отже, кожна з них слабо домінує іншу. 1-му гравцю байдуже, яку з двох стратегій вибирати, але його вибір не є байдужим 2-му гравцю. Якщо 1-й гравець поводить себе люб'язно щодо 2-го гравця, то він має вибрати 1-й рядок. Аналогічно 2-й гравець при умові люб'язності щодо 1-го гравця має вибирати 1-й стовпець. Таким чином, $f(1,1)=(1,1)$.

Такий принцип люб'язності є основою етики людських відносин – робити те, що є корисним для інших, але не для особи, що її робить (але й не потребує від неї додаткових витрат або зусиль, наприклад, дати переписати диски з фільмами, музикою, подарувати непотрібну тобі, але потрібну іншому річ, тощо), колись якусь люб'язність виявлять і до тебе.

3.3. Видалення домінованих стратегій

Зрозуміло, що раціональний гравець ніколи не буде використовувати доміновані стратегії, тому вони можуть бути виключені з розгляду. Його логіка є простою та зрозумілою – нащо отримувати менше, якщо при заміні домінованої стратегії на ту, що її домінує, при будь-якій поведінці інших гравців можна отримати більше. Легко показати, що домінована стратегія не входить у рівновагу за Нешем. Дійсно, заміна цієї стратегії на ту, що її домінує, суперечить умові, що відхилятись від цієї стратегії невигідно.

Розглянемо так званий випадок повної інформованості. Це означає, що кожен з гравців є раціональним і вважає інших гравців раціональними. Крім того, усі гравці знають функції виграшу один одного, знають, що всі це знають, і т. д. Розглянемо метод виключення на прикладі.

Приклад 3.6. Розглянемо біматричну гру, задану матрицями

$$A, B = \begin{pmatrix} (4;\,3) & (2;\,7) & (0;\,4) \\ (5;\,5) & (5;\,-1) & (-4;\,-2) \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. У 1-го гравця домінування немає. 2-га стратегія 2-го гравця (сильно) домінує 3-тю, тому 2-й гравець може виключити свою 3-тю стратегію з розгляду. Якщо 1-й гравець знає функції виграшу 2-го й припускає його раціональність, то він розуміє, що 2-й гравець не буде застосовувати свою 3-тю стратегію, тому гра спрощується до вигляду

$$\begin{pmatrix} (4;\,3) & (2;\,7) \\ (5;\,5) & (5;\,-1) \end{pmatrix}.$$

Тепер 2-га стратегія 1-го гравця домінує 1-шу, і він виключає свою 1-шу стратегію. Це розуміє 2-й гравець, тому він серед двох елементів, що залишилися $\big((5;\,5),(5;\,-1)\big)$, вибирає стовпець, що максимізує його виграш (тобто 1-й). Таким чином, маємо розв'язок гри $(2,1)$, $f(2,1)=(5,5)$.

Застосований метод має назву «*метод послідовного виключення строго домінованих альтернатив».* Ігри, де такий процес доводить до успіху, називають такими, що *мають розв'язок за домінуванням*. В іншому разі може залишатись по декілька стратегій у кожного з гравців. Такі стратегії називають *такими, що вижили,* або *обґрунтованими стратегіями.*

Важливим є той факт, що множина обґрунтованих стратегій не залежить від послідовності виключення строго домінованих стратегій.

Ще раз підкреслимо, що такий метод базується на припущенні раціональної поведінки всіх гравців. Якщо якийсь із гравців відхиляється від раціональної поведінки, то це може призвести до негативних наслідків для всіх. Наприклад, якщо 2-й гравець поведе себе нераціонально й вибере 3-тю стратегію (а 2-й гравець про це не буде знати), то це призведе до ситуації $(-4,-2)$, тобто до програшу обох гравців. Таку ситуацію ілюструє народне прислів'я "Краще з розумним загубити, ніж з дурнем знайти".

У сучасному місті пішохід, переходячи вулицю, має дивитись не тільки на світлофор (і виходити з припущення, що всі водії є раціональними, отже, вони не порушують правил дорожнього руху), але й відстежувати реальну ситуацію на дорозі.

3.4. Пошук розв'язку біматричної гри в цілком змішаних стратегіях

Нехай задано матриці A та B, які є квадратними (n×n) і невиродженими. Припустимо, що гра з заданою парою матриць має точку рівноваги в цілком змішаних стратегіях $\left(x^*, y^*\right)$. Нехай v_x, v_y – виграші 1-го й 2-го гравців у точці рівноваги. Тоді за теоремою про активні стратегії

$$\forall i = 1..n \quad v_x = e_i A y^*, \quad v_y = x^* B e_i^T,$$

отже, Ay^* – це вектор-стовпець, кожна компонента якого дорівнює v_x, а x^*B – це вектор-рядок, кожна компонента якого дорівнює v_y.

Нехай J_x та J_y – це вектор-стовпець та вектор-рядок з n компонентами, кожна компонента якого дорівнює 1. Тоді $Ay^* = v_x J_x$, $x^*B = v_y J_y$, звідси $y^* = v_x A^{-1} J_x$, $x^* = v_y J_y B^{-1}$, оскільки за припущенням матриці A та B є невиродженими.

Помножимо першу рівність зліва на J_y, а другу рівність справа на J_x, тоді в лівих частинах обох рівностей матимемо суму компонент вектора стратегії (імовірностей), яка дорівнює 1. Маємо $1 = v_x J_y A^{-1} J_x$, $1 = v_y J_y B^{-1} J_x$, звідки

$$v_x = \frac{1}{J_y A^{-1} J_x}, \quad v_y = \frac{1}{J_y B^{-1} J_x},$$

тобто виграш гравця в точці рівноваги дорівнює величині, оберненій до суми елементів матриці A^{-1}:

$$x^* = \frac{J_y B^{-1}}{J_y B^{-1} J_x}, \quad y^* = \frac{A^{-1} J_x}{J_y A^{-1} J_x}.$$

Компоненти вектора x^* дорівнюють сумі елементів відповідного за номером стовпця матриці B^{-1}, поділеній на суму всіх елементів матриці B^{-1}, а компоненти вектора y^* дорівнюють сумі елементів відповідного за номером рядка матриці A^{-1}, поділеній на суму всіх елементів матриці A^{-1}. Зазначимо, що стратегії гравців залежать від платіжної матриці опонента і не залежать від власної платіжної матриці.

Якщо якась з платіжних матриць A і B є виродженою, то, можливо, можна уникнути виродженості й перейти до невиродженої матриці шляхом додавання до всіх елементів деякої константи (що, по суті, означає додатковий платіж гравцю, який не впливає на точки рівноваги). Потім треба буде відняти додану константу від величини виграшу гравця.

Загалом цей метод є деякою мірою "авантюрним", оскільки спочатку припускається існування розв'язку, а потім він шукається. Виходячи з наведених формул, критерієм існування розв'язку є те, що всі суми елементів матриць A^{-1} по рядках і B^{-1} по стовпцях мають однаковий знак (окремо перевіряємо для A^{-1} та для B^{-1}).

Розглянемо *біматричну гру 2×2*. У цій грі можливі три ситуації:

1. Один з гравців має домінуючу стратегію, тоді ця стратегія є домінуючою і для всіх його змішаних стратегій, і шляхом виключення домінованих стратегій приходимо до єдиної точки рівноваги.

2. Гра не має точок рівноваги в чистих стратегіях. Це може бути, якщо

$$\left(a_{11} < a_{21},\ a_{12} > a_{22},\ b_{11} > b_{12},\ b_{21} < b_{22}\right) \vee$$
$$\vee \left(a_{11} > a_{21},\ a_{12} < a_{22},\ b_{11} < b_{12},\ b_{21} > b_{22}\right).$$

Тоді гра має єдину точку рівноваги в суто змішаних стратегіях

$$x^* = \left(\frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}},\quad \frac{b_{11} - b_{12}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} \right),$$

$$y^* = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\quad \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \right)$$

з виграшами

$$v_x = \frac{\Delta_A}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\quad v_y = \frac{\Delta_B}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}.$$

3. Гра має дві точки рівноваги в чистих стратегіях. Це може бути, якщо

$$\left(a_{11} < a_{21},\ a_{12} > a_{22},\ b_{11} < b_{12},\ b_{21} > b_{22}\right) \vee$$
$$\vee \left(a_{11} > a_{21},\ a_{12} < a_{22},\ b_{11} > b_{12},\ b_{21} < b_{22}\right).$$

Тоді у грі виникає ще одна точка рівноваги у змішаних стратегіях, і точка рівноваги обчислюється за формулами другого випадку.

Приклад 3.7. (Був розв'язаний геометрично, див. приклад 3.2):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Гра не має точок рівноваги в чистих стратегіях. Знайдемо точку рівноваги у змішаних стратегіях:

$$x^* = \left(\frac{1-(-2)}{4+1-(-2)-(-3)}, \frac{4-(-3)}{4+1-(-2)-(-3)} \right) = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10} \right),$$

$$y^* = \left(\frac{-1-2}{-2-1-3-2}, \frac{-2-3}{-2-1-3-2} \right) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right),$$

$$v_x = \frac{(-2)(-1)-3\cdot 2}{-2-1-3-2} = \frac{1}{2}, \quad v_y = \frac{4\cdot 1-(-2)(-3)}{4+1-(-2)-(-3)} = -\frac{1}{5}.$$

Відповідь збігається з одержаною вище.

Приклад 3.8. Розглянемо гру «Сімейна суперечка»:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Ця гра, як уже зазначалося вище (див. приклад 3.1), має дві точки рівноваги в чистих стратегіях і має бути точка рівноваги у змішаних стратегіях. Знайдемо її:

$$x^* = \left(\frac{2-0}{1+2}, \frac{1-0}{1+2} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

$$y^* = \left(\frac{1-0}{2+1}, \frac{2-0}{2+1} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right),$$

$$v_x = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad v_y = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь збігається з одержаною вище.

Приклад 3.9. Розглянемо гру, задану матрицями

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. У цій грі немає точок рівноваги в чистих стратегіях. Спробуємо відшукати рівновагу в змішаних стратегіях.

Виявляється, що матриця $\boldsymbol{B}$ є виродженою. Збільшимо всі її елементи на 1 і розглянемо матрицю $\boldsymbol{B'}$, яка вже не буде виродженою:

$$B' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матриці, обернені до матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B'}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B')^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо суми елементів матриці A^{-1} по рядках і матриці $(B')^{-1}$ по стовпцях: $SA_1 = 1$, $SA_2 = 1$, $SA_3 = 2$, $SB_1' = \frac{1}{5}$, $SB_2' = \frac{1}{5}$, $SB_3' = \frac{3}{5}$.

Усі SA_i і SB_i' мають (між собою) однаковий знак, отже, рівновага в суто змішаних стратегіях існує:

$$v_x = \frac{1}{SA_1 + SA_2 + SA_3} = \frac{1}{4}, \quad v_y' = \frac{1}{SB_1' + SB_2' + SB_3'} = 1;$$

$$x^* = v_y'\left(SB_1', SB_2', SB_3'\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

$$y^* = v_x\left(SA_1, SA_2, SA_3\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Не забуваємо, що елементи матриці $\boldsymbol{B}$ було збільшено на 1, отже, $v_y = v_y' - 1 = 0$.

Для знайдених суто змішаних стратегій перевіримо виконання теореми про активні стратегії: $A\left(y^*\right)^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$, $x^*B = (0, 0, 0)$.

Отже, точку рівноваги в суто змішаних стратегіях знайдено правильно.

Приклад 3.10. Розглянемо гру, задану матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. У цій грі немає точок рівноваги в чистих стратегіях. Спробуємо відшукати рівновагу в змішаних стратегіях. Обернені матриці мають вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & -3 & 9 \\ 7 & 4 & -12 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix}.$$

Тут суми елементів матриці A^{-1} по рядках, а матриці B^{-1} по стовпцях мають різні знаки (щоб дійти висновку, що розв'язку в суто змішаних стратегіях не існує, достатньо чогось одного). Протилежними за сумою елементів відносно інших є 3-й рядок матриці A^{-1} і 3-й стовпець матриці B^{-1}. Перевіримо, чи є стратегії пасивними. Дійсно, 3-й рядок матриці A слабо домінується півсумою 1-го й 2-го рядків, і можна підібрати коефіцієнти так, щоб домінування було сильним:

$$(1,3,1) \le \frac{1}{2}(3,2,0) + \frac{1}{2}(1,4,3),$$

$$(1,3,1) < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(3,2,0) + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(1,4,3).$$

Аналогічна ситуація має місце для 3-го стовпця матриці B:

$$(0,2,1)^T \le \frac{1}{2}(-2,4,3)^T + \frac{1}{2}(3,0,0)^T,$$

$$(0,2,1)^T < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(-2,4,3) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(3,0,0).$$

Отже, 3-ті чисті стратегії обох гравців є домінованими, отже, їх можна видалити й перейти до матричної гри з матрицями

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця пара матриць підпадає під другий випадок розібраного прикладу, отже,

$$x^* = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, 0\right), \quad y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), \quad v_x = \frac{12}{5}, \quad v_y = \frac{4}{3}.$$

Для знайдених змішаних стратегій перевіримо виконання теореми про активні стратегії:

$$A\left(y^*\right)^T = \left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}, \frac{11}{5}\right)^T, \quad x^*B = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{9}\right).$$

У кожному з обчислених векторів 1-ша й 2-га компоненти збігаються й дорівнюють виграшу 1-го/2-го гравця (що відповідає їх чистим активним стратегіям – 1-й і 2-й), а 3-тя компонента є найменшою (що відповідає 3-м пасивним стратегіям). Отже, розв'язок знайдено правильно.

3.5. Біматрична гра зі збіжними матрицями

Розглянемо випадок, коли платіжні матриці гравців збігаються, тобто $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. Тоді максимальним елементам матриць відповідають точки рівноваги, які до того ж є домінантами за Парето.

Якщо можливі попередні переговори гравців, то узгодження стратегій є очевидним – домовитись вибирати рядок і стовпець, що відповідають будь-якому з максимальних елементів.

Якщо матриця $\boldsymbol{A}$ має єдиний максимальний елемент, то розв'язок є також очевидним і без попереднього узгодження.

Якщо існує декілька максимальних елементів, а попередніх переговорів немає, то задача стає нетривіальною навіть у простих випадках. Наприклад, нехай

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

З формальної точки зору ця гра має дві точки рівноваги в чистих стратегіях $(1,2)$, $F(1,2)=(1,1)$ і $(2,1)$, $F(2,1)=(1,1)$ та одну точку рівноваги у змішаних стратегіях $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Але, як насправді вести себе кожному з гравців, не зрозуміло.

Якщо припустити, що переговори є можливими, але до того, як гравці знатимуть платіжну матрицю, можна досягти конвенції, наприклад такої: нехай 1-й гравець вибирає рядок з мінімальним номером, у якому є максимальний елемент, а 2-й гравець вибирає відповідний стовпець.

Якщо $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ – одиничні матриці порядку $n\times n$, то тоді змістовна постановка задачі є такою: двом гравцям пропонують вибрати число від 1 до n та кожному з них обіцяють виграш, якщо ці числа будуть збігатися. Тут з формальної точки зору гра має n точок рівноваги (i,i), але розумною стратегією гравців буде вибір 1.

Близькою до цієї є задача про зустріч. Нехай двоє друзів дізнаються, що вони знаходяться в одному місті, хочуть зустрітись, але не мають можливості домовитись про це. Тоді рекомендується зустрічатись о 12-й годині біля головної пам'ятки цього міста (у Києві, мабуть, майдан Незалежності, стовп нульового кілометра).

3.6. Видалення домінованих стратегій у змішаному розширенні біматричної гри

Змішане розширення біматричної гри вводиться аналогічно випадку матричної гри.

Під *змішаною стратегією 1-го гравця* будемо розуміти «імовірнісний» вектор $P=\left(p_1,p_2,\dots,p_m\right)$, який задовольняє обмеженням

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1..m.$$

Фактично це означає, що 1-й гравець вибирає i-й рядок з імовірністю p_i.

Аналогічно *змішана стратегія 2-го гравця* описується вектором $Q=\left(q_1,q_2,\dots,q_n\right)$, який задовольняє обмеженням

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \ge 0,\ j = 1..n,$$

і фактично це означає, що 2-й гравець вибирає j-й стовпець з імовірністю q_j.

Припускаючи, що гравці є байдужими до ризику (у противному випадку згідно з теоремою Фон-Неймана – Моргенштерна виграші можна замінити на їх корисності), отримуємо функцію виграшу у такому вигляді:

$$f(\vec{P},\vec{Q}) = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}\right) = \left(PAQ^T, PBQ^T\right).$$

Ця функція є білінійною відносно імовірностей, тобто

$$f\left(\vec{P},\vec{Q}\right) = \sum_{i=1}^{m} p_i f\left(e_i,\vec{Q}\right) = \sum_{j=1}^{n} q_j f\left(\vec{P},e_j\right),$$

де e_i, e_j – чисті стратегії гравців.

Для змішаного розширення гри під *домінованою стратегією гравця* розуміють стратегію, яка може домінуватися не тільки однією його іншою стратегією, а й симплекс-комбінацією інших стратегій.

Якщо деяка стратегія є *строго домінованою*, то вона не входить до рівноваги за Нешем. Більш того, покажемо, що у випадку рівноваги у змішаних стратегіях домінована стратегія може входити до відповідної змішаної стратегії лише з нульовим коефіцієнтом, отже, доміновану стратегію раціональний гравець узагалі може виключити з розгляду (викреслити).

Теорема. Нехай P^*, Q^* – точка рівноваги в біматричній грі у змішаних стратегіях та e_i-домінована стратегія 1-го гравця. Тоді ця стратегія входить до P^* з нульовою ймовірністю, тобто i-та компонента P^* дорівнює нулю.

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ і $p_i > 0$.

За припущенням e_i – домінована стратегія 1-го гравця, отже, існує такий набір чисел α_k, що

$$f\left(e_i, Q^*\right) < \sum_{k \neq i} \alpha_k f\left(e_k, Q^*\right),$$

де $\alpha_k > 0$, $\sum_k \alpha_k = 1$, тоді

$$f\left(P^*, Q^*\right) = \sum_k p_k f\left(e_k, Q^*\right) = p_i f\left(e_i, Q^*\right) + \sum_{k \neq i} p_k f\left(e_k, Q^*\right) <$$
$$< p_i \sum_{k \neq i} \alpha_k f(e_k, Q^*) + \sum_{k \neq i} p_k f\left(e_k, Q^*\right) =$$
$$= \sum_{k \neq i} \left(p_i \alpha_k + p_k\right) f\left(e_k, Q^*\right) = f\left(P^0, Q^*\right).$$

В останній рівності коефіцієнти у співмножнику $p_i \alpha_k + p_k$ набувають значень від 0 до 1, а їх сума дорівнює 1, отже, можна трактувати їх як імовірності вибору рядків, а відповідну змішану стратегію позначити через P^0.

В одержаному ланцюжку нерівностей розглянемо перший та останній члени $f\left(P^*, Q^*\right) < f\left(P^0, Q^*\right)$, що суперечить припущенню, що P^*, Q^* – точка рівноваги, отже, $p_i = 0$. Звичайно ця теорема справджується і для 2-го гравця й доводиться аналогічно.

Приклад 3.11. Нехай у біматричній розширеній грі матриця виграшів 1-го гравця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Показати, що його змішана стратегія $\left(1/3, 1/3, 1/3\right)$ є домінованою, і знайти стратегію, що домінує її.

Розв'язання. Оскільки задана змішана стратегія містить усі компоненти з додатними ймовірностями, згідно з доведеною вище теоремою вона буде домінованою, якщо принаймні одна з чистих стратегій є домінованою.

Домінованою не може бути 1-ша стратегія (1-ша компонента 1-го рядка містить максимальний елемент 1-го стовпця). Аналогічно 2-га стратегія також не може бути домінованою.

Напівсума 1-го та 2-го рядків слабо домінує 3-й рядок. Але якщо дещо збільшити коефіцієнт у 2-му рядку (і відповідно зменшити в 1-му), то матиме місце строге домінування:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} < \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{5} & \frac{28}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{8}{15} & 0 \end{pmatrix}.$$

Наступний приклад демонструє застосування методу послідовного виключення строго домінованих альтернатив з урахуванням можливості виключення в розширеній грі.

Приклад 3.12. Розглянемо біматричну гру, задану матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. У межах чистих стратегій 1-й гравець не має домінованих рядків, 2-й гравець не має домінованих стовпців. Розглянемо мішане розширення гри.

1-й і 2-й рядки не можуть бути домінованими, оскільки містять максимальні елементи стовпців. 3-й рядок домінується комбінацією 1-го та 2-го рядків, наприклад такою:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} < \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{5} & \frac{28}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix},$$

отже, його можна викреслити. І оскільки гравці спираються на раціональну поведінку один одного, то викреслювання відбувається в обох матрицях, і отже, переходимо до пари матриць

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2-й і 3-й стовпці матриці $B^{(1)}$ не можуть бути домінованими, а 1-й стовпець домінується комбінацією 2-го й 3-го стовпців:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T < \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}^T + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} & \frac{21}{5} \end{pmatrix}^T.$$

Зауважимо, що у вихідній матриці $\boldsymbol{B}$ 1-й стовпець не домінувався. Викреслюємо 1-й стовпець:

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & 5\end{pmatrix},\quad B^{(2)}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

1-й рядок матриці виграшів 1-го гравця домінується 2-м рядком, викреслюємо 1-й рядок. При цьому в рядку, що залишився, 2-й гравець серед елементів $(3 \quad 5)$ вибирає найбільший – 5. Таким чином, знайдено розв'язок гри в чистих стратегіях: $(2,3)$, $f(2,3)=(5,5)$.

Зазначимо, що точка $(2,3)$ є точкою рівноваги вихідної гри в чистих стратегіях, оскільки елемент $(2,3)$ є одночасно максимальним елементом 3-го стовпця матриці $\boldsymbol{A}$ та максимальним елементом 2-го рядка матриці $\boldsymbol{B}$.

3.7. Видалення слабо домінованих стратегій

Сама процедура послідовного видалення слабо домінованих стратегій аналогічна видаленню домінованих стратегій, але наслідки цього можуть суттєво різнитися. А саме, множина стратегій, яка витримує послідовне видалення слабо домінованих стратегій (тобто множина стратегій, які залишаються), може залежати від порядку видалення стратегій.

Приклад 3.13. Розглянемо біматричну гру:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Позначимо три стратегії 1-го гравця через $\boldsymbol{В}$, $\boldsymbol{С}$ та $\boldsymbol{Н}$ (верх, середина, низ відповідно), а дві стратегії 2-го – через $\boldsymbol{Л}$ та $\boldsymbol{П}$ (ліво та право).

Якщо спочатку видалити $\boldsymbol{В}$ (слабо домінується $\boldsymbol{С}$), а потім $\boldsymbol{Л}$ (слабо домінується $\boldsymbol{П}$), то приходимо до одного з двох рівнозначних наслідків $(С,П)$ або $(Н,П)$, $f(С,П)=f(Н,П)=(2,1)$.

Якщо ж спочатку видалити $\boldsymbol{Н}$ (слабо домінується $\boldsymbol{С}$), а потім $\boldsymbol{П}$ (слабо домінується $\boldsymbol{Л}$), то приходимо до одного з двох рівнозначних наслідків $(В,Л)$ або $(С,Л)$, $f(В,Л)=f(С,Л)=(1,1)$.

До яких несподіваних результатів може приводити видалення слабо домінованих стратегій, показує наступний приклад.

Приклад 3.14. «Спонсорський грант». Нехай дехто пропонує матеріально допомогти двом гравцям за таким правилом. Він пропонує кожному з гравців попросити будь-яку цілу кількість грошових одиниць від 1 до $\boldsymbol{n}$ (наприклад, від 1 до 100 дол.) і дає кожному з гравців суму, мінімальну з їх прохань. (Якщо на цьому етапі «поставити крапку», то задача стає дуже простою, а саме: зрозуміло, що для кожного з гравців стратегія попросити більшу суму слабо домінує стратегію попросити меншу, тому за умови раціональної поведінки гравців має скластися ситуація (n, n), яка домінує за Парето над усіма іншими, $f(n, n) = (n, n)$. Усе просто – проси більше й отримаєш не менше.)

Припустимо тепер, що спонсор робить додатковий трансфер (який можна назвати «покаранням жадібності»), а саме якщо гравці попросили різні суми, то він віднімає від виграшу того, хто попросив більше, і додає до виграшу того, хто попросив менше, тобто деяку суму s. Якщо обидва гравці попросили однакову суму з допустимого діапазону $[1; n]$, то кожен з них її отримує, і трансферу не відбувається.

Розв'язання. Розглянемо випадок $s = 1$. Тоді матриці виграшу гравців є такими: $A_{ij} = min(i, j) + \chi(i < j) - \chi(i > j)$, $B = A^T$.

Ця гра має n точок рівноваги за Нешем у чистих стратегіях (i, i), $f(i, i) = (i, i)$, $i = 1..n$. З огляду на здоровий глузд у такій грі має бути вибрана ситуація (n, n), $f(n, n) = (n, n)$ (це точка, домінантна за Парето). Але подивимось, що відбудеться, якщо брати до уваги видалення слабо домінованих стратегій.

Для 1-го гравця $(n-1)$-й рядок домінує n-й рядок, отже, 1-й гравець може його видалити. Оскільки гра є симетричною, то 2-й гравець видаляє n-й стовпець, і гравці таким чином переходять до матриць розмірністю $(n-1) \times (n-1)$.

Аналогічно видаляються $(n-1)$-й рядок і $(n-1)$-й стовпець і так далі, остаточно гра зводиться до ситуації $(1, 1)$, тобто начебто гравцям треба попросити лише 1 дол. та одержати цей більш ніж скромний виграш:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n \end{pmatrix}, \quad B = A^T.$$

Якщо ж сума трансферу становить 2 або більше, то гра взагалі матиме єдину точку рівноваги в чистих стратегіях $(1, 1)$. Але зрозуміло, що якщо сума трансферу є значно меншою, ніж максимальний потенційний виграш, то раціональною стратегією буде просити максимальну суму і, якщо можливі попередні переговори, повідомляти про це іншого гравця та отримати максимальну суму (можливо, мінус незначні втрати). Тут «раціональність» слід розуміти з огляду на здоровий глузд, але це суперечить теорії ігор!

Так у чому ж полягає відмінність наслідків видалення домінованих і слабо домінованих стратегій? Якщо після видалення домінованих стратегій залишаються всі точки рівноваги (див. підрозд. 3.6), то після видалення слабо домінованих стратегій може статись так, що деякі точки рівноваги будуть зникати (про це свідчать два попередніх приклади), але при цьому залишиться принаймні одна точка рівноваги в чистих або змішаних стратегіях. Доведемо це.

Теорема. Нехай задано змішане розширення гри в нормальній формі. Тоді після одного або декількох видалень слабо домінованих стратегій у грі залишається принаймні одна точка рівноваги у змішаних стратегіях.

Доведення. Нехай у мішаному розширенні гри

$$\Gamma = \left\langle N, \{co(X_i)\}_{i \in N}, \{f_i(x)\}_{i \in N} \right\rangle$$

i-й гравець має n_i чистих стратегій, а одна з чистих стратегій слабо домінує іншу. Для визначеності припустимо, що k-та стратегія n_i-го гравця слабо домінує його n_i-ту чисту стратегію, тобто $\forall x_{-i}$ $f_i(e_k, x_{-i}) \geq f_i(e_{ni}, x_{-i})$ (тут e_k – k-та чиста стратегія i-го гравця).

Видалимо n_i-ту стратегію i-го гравця й розглянемо гру, що залишилася. У цій грі згідно з теоремою Неша існує точка рівноваги, принаймні у змішаних стратегіях. Позначимо її: $x^* = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$, де x_i можуть бути змішаними. Наприклад, нехай $x_i = (p_1, p_2, ..., p_{ni-1})$. «Повернемо» видалену n_i-ту стратегію i-го гравця й покажемо, що точка x^* є точкою рівноваги для вихідної гри.

Дійсно, спочатку зазначимо, що умова рівноваги автоматично зберіглася для всіх гравців, крім i-го (дійсно, «нова» n_i-та стратегія з'явилася лише в i-го гравця, а не в них). Розглянемо довільну стратегію xx_i, яка містить ненульову останню n_i-ту компоненту, і покажемо, що x_i є не гіршою за неї: $f_i(x_i) \geq f_i(xx_i)$. Дійсно, нехай $xx_i = (q_1, q_2, ..., q_{ni-1}, q_{ni})$, тоді внаслідок лінійності функцій виграшу маємо

$$f_i(xx_i) = q_1 f_i(e_1) + ... + q_{ni} f(e_{ni}) \leq q_1 f_i(e_1) + q_2 f_i(e_2) + ...$$

$$... + (q_{ni} + q_k) f(e_k) + ... + q_{ni-1} f(e_{ni-1}) \leq$$

$$\leq p_1 f(e_1) + ... + p_{ni-1} f(e_{ni-1}) = f_i(x_i).$$

Тут для зручності застосовано скорочену форму запису. Так, узагалі замість $f_i(e_i)$ треба писати $f_i(e_i, x_{-i})$. У ланцюжку перша нерівність є правильною внаслідок припущення, що k-та стратегія домінує n_i-ту, тобто $f_i(e_k) \ge f_i(e_{ni})$, друга – унаслідок припущення, що x_i є точкою рівноваги для гри з «викресленим» рядком.

Зауваження. Якщо якась стратегія гравця слабо домінується опуклою лінійною комбінацією інших рядків, то зберігаються всі висновки щодо видалення такої стратегії. Доведення цього твердження в основному повторює наведені вище міркування.

Приклад 3.15. Покажемо, як видалення слабо домінованої стратегії може видалити точку рівноваги в чистих стратегіях, але зберігає рівновагу у змішаних стратегіях. Дійсно, нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Ця гра має точку рівноваги в чистих стратегіях $(3, 2)$, $f(3, 2) = (1, 2)$. 3-тя чиста стратегія 1-го гравця слабо домінується 2-ю стратегією. При її видаленні зникає і вказана точка рівноваги, але зберігається точка рівноваги у змішаних стратегіях $x = \left(1/2, 1/2, 0\right)$, $y = \left(1/2, 1/2\right)$, $f(x, y) = (0, 0)$. У грі, що залишилася, немає точок рівноваги в чистих стратегіях, але вказана точка рівноваги у змішаних стратегіях зберігається.

Приклад 3.16. Розглянемо приклад видалення слабо домінованих стратегій для випадку трьох гравців.

Нагадаємо телешоу «Слабое звено». У ньому гравці спочатку відповідають на запитання, а потім одночасно голосують проти інших гравців, визначаючи, хто був найгіршим. Той, хто набере максимальну кількість голосів «проти», залишає гру, усі інші переходять до наступного туру. Після ігрового туру та перед голосуванням визначається гравець, який за об'єктивними даними грав найкраще, він одержує звання «сильное звено» і певні привілеї під час голосування, а саме: якщо деякі з гравців наберуть однакову кількість голосів «проти», то він вирішує, хто залишить гру. Теоретично може скластися ситуація, коли «сильное звено» набирає максимальну кількість голосів «проти» і залишає гру.

Розв'язання. Нехай у черговому турі залишилося три гравці. Тоді з формальної точки зору гра має такий вигляд:

$$N = \{1, 2, 3\},\ X_1 = \{2, 3\},\ X_2 = \{1, 3\},\ X_3 = \{1, 2\}.$$

Визначимо функції виграшу гравців таким чином. Нехай функція виграшу – це індикатор того, чи проходить гравець до наступного туру, тобто виграш гравця дорівнює нулю, якщо він залишає гру, та одиниці, якщо він проходить до наступного туру. Не порушуючи загальності міркувань, припустимо, що «сильным звеном» виявився 1-й гравець і подивимося на гру з точки зору 3-го гравця.

Можливі ситуації й відповідні функції виграшу 3-го гравця наведемо в таблиці:

x_1	x_2	x_3		f_3	
2	1	1	2	1	1
2	3	1	2	1	1
3	1	1	2	1	0
3	3	1	2	0	0

Розберемо послідовно по рядках, чому функції виграшу 3-го гравця є саме такими:

– 1-й рядок – 1-й гравець голосує проти 2-го, а 2-й – проти 1-го, отже, виженуть того, проти кого проголосує 3-й гравець, але він у будь-якому разі залишається;

– 2-й рядок – 1-й гравець голосує проти 2-го, 2-й – проти 3-го. Якщо 3-й гравець проголосує проти 2-го, то 2-го виженуть, якщо проти 1-го, то всі гравці матимуть по одному голосу «проти» і згідно з пріоритетом голосу 1-го гравця виженуть 2-го. Отже, у будь-якому разі 1-й гравець залишається;

– 3-й рядок – 1-й гравець голосує проти 3-го, 2-й – проти 1-го. Якщо 3-й гравець проголосує проти 1-го, то 1-й гравець набере два голоси «проти» і його виженуть (отже, 3-й залишиться), а якщо проти 2-го, то всі гравці одержать по одному голосу «проти» і згідно з пріоритетом голосу 1-го гравця виженуть 2-го. Отже, у цій ситуації краще голосувати проти 1-го гравця;

– 4-й рядок – 1-й і 2-й гравці голосують проти 3-го гравця, отже, його виженуть у будь-якому разі, незалежно від того, проти кого він проголосував.

Таким чином, 1-ша стратегія 3-го гравця слабо домінує 2-гу, отже, він вибере її. Таким чином, для гравця, що не є «сильным звеном», голосувати проти «сильного звена» є слабо домінуючою стратегією.

Але такі самі висновки є правильними і для 2-го гравця, отже, за умови раціональної поведінки всіх гравців виженуть, як це не парадоксально, 1-го гравця.

Спектром змішаної стратегії $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (позначається $[x]$) називають таку множину чистих стратегій e_i, яка відповідає додатним компонентам вектора x: $[x] = \{e_i \mid x_i > 0\}$.

Чисту стратегію називають *активною*, якщо вона належить спектру (іншими словами, гравець вибирає її з додатною ймовірністю), і *пасивною* в іншому разі.

Змішану стратегію називають *цілком змішаною*, якщо всі n чистих стратегій, що утворюють її, є активними (іншими словами, належать спектру).

Теорема про активні стратегії. Нехай (x^*, y^*) – точка рівноваги в біматричній грі. Нехай x', y' – довільні змішані стратегії 1-го й 2-го гравців, такі, що їх спектри є підмножинами спектрів x^* і y^* відповідно.

Тоді правильними є рівності

$$f_1(x', y^*) = f_1(x^*, y^*),\ f_2(x^*, y') = f_2(x^*, y^*).$$

Іншими словами, якщо в точці рівноваги один з гравців відхиляється від вибраної стратегії, залишаючись у межах своїх активних стратегій, то це не впливає на його функцію виграшу.

Доведення. Нехай (x^*, y^*) – точка рівноваги. Покажемо спочатку, що виграш 1-го гравця не зміниться при зміні його стратегії на будь-яку чисту стратегію, що належить спектру x^*, тобто

$$e_i \in [x^*] \Rightarrow f_1(e_i, y^*) = f_1(x^*, y^*).$$

Зрозуміло, що для жодної з чистих стратегій e_i не може виконуватися рівність $f_1(e_i, y^*) > f_1(x^*, y^*)$, оскільки це суперечить припущенню, що (x^*, y^*) – точка рівноваги. Отже, для всіх чистих стратегій зі спектра x^*

$$f_1(e_i, y^*) \le f_1(x^*, y^*).$$

Покажемо, що всі нерівності насправді є рівностями.

Дійсно, нехай для деякого i має місце строга нерівність:

$$f_1(e_i, y^*) < f_1(x^*, y^*).$$

Тоді маємо ланцюжок

$$f_1(x^*, y^*) = \sum_{i \in [x^*]} x_i f_1(e_i, y^*) < \sum_{i \in [x^*]} x_i f_1(x^*, y^*) = f_1(x^*, y^*),$$

з якого випливає суперечна нерівність, отже,

$$\forall i \in \left[x^*\right] \quad f_1\left(e_i, y^*\right) = f_1\left(x^*, y^*\right).$$

Оскільки рівності виконуються для всіх чистих стратегій зі спектра x^*, то вони будуть виконуватися, якщо зліва замість однієї чистої стратегії буде стояти їх імовірнісна суперпозиція.

Для 2-го гравця теорема доводиться аналогічно.

Зауваження. З теореми про активні стратегії випливає, що якщо точки рівноваги містять змішані стратегії, то ці стратегії не є строгими. Тобто, якщо один з гравців відхиляється від точки рівноваги, знаходячись у межах своїх активних стратегій, а опонент дотримується точки рівноваги, то середній виграш гравця, що відхилився від рівноваги, залишається таким самим, а середній виграш опонента може збільшуватися або зменшуватися.

Продемонструємо це на прикладі.

Приклад 3.17. Розглянемо біматричну гру, для якої вище було знайдено точку рівноваги (див. приклад 3.7):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для цієї гри $x^* = \left(3/10,\ 7/10\right)$, $y^* = \left(3/8,\ 5/8\right)$, $f\left(x^*, y^*\right) = (0{,}5;\ -0{,}2)$.

Нехай 1-й гравець відхиляється від своєї змішаної стратегії (розглянемо, наприклад, дві його чисті стратегії), а 2-й гравець – ні. Тоді

$$e_1 A y^{*T} = \frac{1}{2}, \quad e_1 B y^{*T} = -\frac{3}{8} < -\frac{1}{5},$$

$$e_2 A y^{*T} = \frac{1}{2}, \quad e_2 B y^{*T} = -\frac{1}{8} > -\frac{1}{5};$$

$$x^* A e_1^T = \frac{3}{2} > \frac{1}{2}, \quad x^* B e_1^T = -\frac{1}{5} < \frac{1}{2},$$

$$x^* A e_2^T = -\frac{1}{10}, \quad x^* B e_2^T = -\frac{1}{5};$$

$$f(e_1, y^*) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right), \quad f\left(e_2, y^*\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right),$$

$$f\left(x^*, e_1\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}\right), \quad f\left(x^*, e_2\right) = \left(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}\right).$$

3.8. Обережна поведінка (обережні стратегії)

Розглянемо ситуацію, у якій гравцю абсолютно невідомі переваги інших гравців. У цьому випадку він не може зробити ніяких припущень щодо стратегій інших гравців і має орієнтуватися на найгірший для себе наслідок.

Нехай гравець i вибирає стратегію x_i. Тоді його виграш у найгіршій для нього ситуації, тобто гарантований виграш, має вигляд

$$f_i(x_i) = \min_{x-i} f_i(x_i, x_{-i}).$$

Виходячи з таких міркувань, гравець повинен вибрати з найбільшим гарантованим виграшем

$$\max_{xi} f_i(x_i) = \max_{xi} \min_{x-i} f_i(x_i, x_{-i}).$$

Це число позначається α_i.

Стратегію s_{*i}, що забезпечує максимум функції $u_i(.)$, називають *обережною стратегією гравця* i, а число α_i – *гарантованим результатом* або *максиміном*.

Вибір обережної стратегії можна називати песимістичним. Гравець, що дотримується цієї стратегії, поводиться раціонально (вибирає свою стратегію, що максимізує його функцію виграшу), але при припущенні, що всі інші гравці думають не про те, як максимізувати власний виграш (зробити найкраще собі), а як мінімізувати його виграш (зробити найгірше йому). Нагадаємо, що для антагоністичної гри це одне й те ж саме.

Суть обережної стратегії можна пояснити на простому прикладі.

Приклад 3.18. Нехай задано біматричну гру з такими платіжними матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Цей приклад називають *координацією зусиль*. Нехай є деяка мета, якої можна досягти лише скоординованими зусиллями двох осіб. Наприклад, нехай є бізнес-план, який полягає у виробництві продукції та її транспортуванні до місця, де на неї є стабільний попит. Нехай 1-й гравець відповідає за виробництво, а 2-й – за транспорт.

Розв'язання. Кожен з гравців має дві стратегії: 1-ша – не працювати, 2-га – працювати. 2-га стратегія потребує від кожного з гравців певних зусиль і капіталовкладень. 1-ша стратегія не потребує цього, але й не дає прибутку. Вибір 2-ї стратегії вигідний обом гравцям, оскільки лише тоді вони отримають прибуток, який перекриває їх капіталовкладення.

Якщо ж один з гравців вибирає 1-шу стратегію, а інший – 2-гу, то той, що вибрав 1-шу стратегію, нічого не набуває і не втрачає, а інший гравець втрачає одиницю. Тому в цій грі 1-ша стратегія, яка є гарантією від утрат, і буде обережною стратегією. Вибирати 2-гу стратегію слід тільки у тому випадку, коли є впевненість у надійності іншого гравця. Ситуація $(1,2)$ або $(2,1)$ означає, що партнер підвів.

Якщо всі гравці поводять себе обережно, то цю ситуацію називають *рівновагою в обережних стратегіях* (x_{*N}). Зазначимо, що в цьому випадку виграші можуть бути більшими, ніж песимістичні сподівання, тобто

$$f_i\left(x_{*N}\right) \geq \alpha_i .$$

Поряд з числом α_i цікаво розглянути інше число – *мінімакс*

$$\beta_i = \min_{x-i} \max_{xi} f_i\left(x_i, x_{-i}\right).$$

Фізичний зміст цього числа (β_i) – це мінімальний (гарантований) виграш i-го гравця у випадку, якщо всі гравці, крім i-го, зробили свої вибори й повідомили про них 1-го гравця, а він, використовуючи цю інформацію, максимізує свою функцію виграшу в ситуації, що склалася (і яка йому відома заздалегідь).

Звідси зрозуміло, що виконується нерівність

$$\max_{xi} \min_{x-i} f_i\left(x_i, x_{-i}\right) = \alpha_i \leq \beta_i = \min_{x-i} \max_{xi} f_i\left(x_i, x_{-i}\right).$$

Цю нерівність можна довести формально, не заглиблюючись у зміст α і β.

Нехай задано функцію від двох змінних – x і y. Тоді для будь-яких x і y виконується нерівність

$$min_2 f\left(x,.\right) \leq f\left(x,y\right) \leq max_1 f\left(.,y\right),$$

де $min_2 f\left(x,.\right)$ означає мінімум за другим аргументом, а $max_1 f\left(.,y\right)$ – максимум за першим.

Нехай A означає множину «лівих» чисел (тобто, чисел вигляду $min_2 f\left(x,.\right)$ при всіх можливих значеннях x), а B – множину «правих» чисел (тобто чисел вигляду $max_1 f\left(.,y\right)$ при всіх можливих значеннях y). Але тоді й максимум (або супремум) «лівих» чисел менше або дорівнює мінімуму (або інфімуму) «правих».

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дати означення біматричної гри.
2. Як визначається розв’язок біматричної гри?
3. Яким нерівностям мають задовольняти стратегії гравців $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$, що утворюють точку рівноваги за Нешем у біматричній грі?
4. Що означає домінування стратегій?
5. Дати означення сильно домінуючої, слабо домінуючої та домінованої стратегій.
6. Чи входить домінована стратегія у рівновагу за Нешем?
7. У чому полягає метод послідовного виключення строго домінованих альтернатив?
8. Які стратегії називають обґрунтованими стратегіями?
9. Назвати три випадки знаходження точок рівноваги у біматричній грі 2×2.
10. Як знаходити розв'язок біматричної гри зі збіжними матрицями?
11. Чи залежить множина стратегій, яка витримує послідовне видалення слабо домінованих стратегій, від порядку видалення стратегій?
12. У чому полягає відмінність наслідків видалення домінованих і слабо домінованих стратегій?
13. Чи може видалення слабо домінованої стратегії видалити точку рівноваги в чистих стратегіях, але зберегти точку рівноваги у змішаних стратегіях? Навести приклад.
14. Дати означення спектра змішаної стратегії.
15. Чим відрізняються активна й пасивна стратегії?
16. Яка стратегія називається цілком змішаною?
17. Сформулювати теорему про активні стратегії.
18. При яких умовах гравці вибирають обережні стратегії?
19. Чи є вибір обережної стратегії оптимістичним?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

3.1.1. Розв’язати біматричну гру, задану двома матрицями виграшів 1-го та 2-го гравців:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.1.2. Застосовуючи метод виключення домінованих стратегій, розв’язати біматричну гру

$$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} (2;\,1) & (0;\,5) & (-2;\,2) \\ (3;\,3) & (3;\,-3) & (-6;\,-4) \end{pmatrix}.$$

3.1.3. Розв’язати біматричну гру «Дотримання угоди» (розглянути матрицю гри, побудовану в прикладі 1.10 підрозд. 1.1).

3.1.4. Знайти розв’язок біматричної гри, заданої матрицями

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

У задачах 3.1.5, 3.1.6 знайти точки рівноваги за Нешем у чистих і змішаних стратегіях, сильно та слабо домінуючі стратегії для біматричних ігор, заданих наведеними матрицями.

3.1.5. $A,B=\begin{pmatrix} (3;\,2) & (2;\,0) \\ (1;\,0) & (3;\,5) \end{pmatrix}.$ **3.1.6.** $A,B=\begin{pmatrix} (-1;\,6) & (2;\,7) \\ (-2;\,3) & (3;\,1) \end{pmatrix}.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

3.1.1. Розв’язати біматричну гру, задану двома матрицями виграшів 1-го та 2-го гравців:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.1.2. Застосовуючи метод виключення домінованих стратегій, розв’язати біматричну гру

$$A,B=\begin{pmatrix} (5;\,4) & (3;\,8) & (1;\,5) \\ (6;\,6) & (6;\,0) & (-3;\,-1) \end{pmatrix}.$$

3.1.3. Розв’язати біматричну гру «Два гравці та банкір» (див. умову задачі 1.1.17 практичних завдань підрозд. 1.1).

3.1.4. Знайти розв’язок біматричної гри, заданої матрицями

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

У задачах 3.1.5, 3.1.6 знайти точки рівноваги за Нешем у чистих і змішаних стратегіях, сильно та слабо домінуючі стратегії для біматричних ігор, заданих наведеними матрицями.

3.1.5. $A,B=\begin{pmatrix} (-1;\,4) & (2;\,5) \\ (1;\,1) & (1;\,0) \end{pmatrix}.$ **3.1.6.** $A,B=\begin{pmatrix} (2;\,2) & (2;\,3) \\ (1;\,3) & (3;\,2) \end{pmatrix}.$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Базова

Алипрантис, К. Д. Игры и принятие решений / К. Д. Алипрантис, С. К. Чакрабарти. – М. : Изд. дом ВШЭ, 2016. – 544 с.

Воробьев, Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1984. – 496 с.

Доценко, С. І. Теорія ігор : навч. посіб. / С. І. Доценко. – Київ : Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2013. – 88 с.

Зайченко, О. Ю. Дослідження операцій : зб. задач / О. Ю. Зайченко, Ю. П. Зайченко. – Київ : Слово, 2007. – 472 с.

Зайченко, Ю. П. Дослідження операцій / Ю. П. Зайченко. – Київ : Слово, 2006. – 816 с.

Катренко, А. В. Дослідження операцій : підручник / А. В. Катренко. – Львів : Магнолія-2006, 2009. – 350 с.

Колобашкина, Л. Основы теории игр : учеб. пособие / Л. Колобашкина. – М. : Бином, 2014. – 200 с.

Костевич, Л. С. Теория игр. Исследование операций / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – Минск : Вышейш. шк., 2008. – 368 с.

Крушевский, А. В. Теория игр / А. В. Крушевский. – Киев : Вища шк., 1977. – 216 с.

Кутковецький, В. Я. Дослідження операцій : навч. посіб. / В. Я. Кутковецький. – Миколаїв : Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2003. – 260 с.

Мак-Кинси, Дж. Введение в теорию игр / Дж. Мак-Кинси. – М. : Физматгиз, 1960. – 420 с.

Оуэн, Г. Теория игр / Г. Оуэн. – М. : ЛКИ, 2010. – 212 с.

Писарук, Н. Н. Введение в теорию игр / Н. Н. Писарук. – Минск : БГУ, 2015. – 256 с.

Протасов, И. Д. Теория игр и исследование операций / И. Д. Протасов. – М. : Гелиос АРВ, 2006. – 368 с.

Шиян, А. А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті : навч. посіб. / А. А. Шиян. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 164 с.

Додаткова

Василенко, В. А. Теорія і практика розробки управлінських рішень : навч. посіб. / В. А. Василенко. – Київ : ЦУЛ, 2003. – 420 с.

Диксит, А. Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни / А. Диксит, Б. Нэлбафф. – М. : МИФ, 2014. – 464 с.

Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках : учебник / А. В. Захаров. – М. : Изд. дом ВШЭ, 2015. – 304 с.

Кобзарь, А. И. Теория игр: играют все / А. И. Кобзарь, В. Н. Тикменов, И. В. Тикменова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 272 с.

Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен. – М. : Мир, 1985. – 200 с.

Невежин, В. Исследование операций и принятие решений в экономике / В. Невежин, С. Кружилов, Ю. Невежин. – М. : Форум, 2012. – 400 с.

Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. – М. : Наука, 1970. – 708 с.

Светлов, В. Введение в единую теорию анализа и разрешения конфликтов / В. Светлов. – М. : Либроком, 2013. – 304 с.

Ульянченко, О. В. Дослідження операцій в економіці : підручник / О. В. Ульянченко. – Суми : Довкілля, 2010. – 594 с.

Шеллинг, Т. Стратегия конфликта / Т. Шеллинг. – М. : ИРИСЭН, 2007. – 376 с.

Шикин, Е. В. От игр к играм. Математическое введение / Е. В. Шикин. – М. : КомКнига, 2006. – 114 с.

Bonanno, G. Game Theory / G. Bonanno. – University of California, Davis, 2015. – 578 p.

Carmichael, F. A Guide to Game Theory / F. Carmichael. – FT Prentice Hall, 2005. – 286 p.

Fisher, L. Rock, Paper, Scissors: Game Theory in Everyday Life / Len Fisher. – Basic Books, 2008. – 278 p.

Leyton-Brown, K. Essentials of Game Theory: A Concise, Multidisciplinary Introduction / K. Leyton-Brown, Y. Shoham. – Morgan & Claypool publishers, 2008. – 88 p.

Osborne, M. J. Publicly-available solutions for an Introduction to Game Theory / M. J. Osborne. – University of Toronto, 2012. – 89 p.

Peters, H. Game Theory: A Multi-Leveled Approach / H. Peters. – Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 363 p.

Prisner, E. Game Theory Through Examples / E. Prisner. – Washington : MAA, 2014. – 287 p.

Навчальні посібники

Бахмет, Г. К. Конфликтно управляемые системы : учеб. пособие / Г. К. Бахмет, С. С. Куреннов, Н. А. Украинец. – Харьков : ХАИ, 2007. – 102 с.

Бахмет, Г. К. Конфліктні керовані ситуації : практикум / Г. К. Бахмет, В. А. Ванін, Н. А. Українець. – Харків : ХАІ, 2011. – 36 с.

Бахмет, Г. К. Конфліктні керовані ситуації. Неперервні задачі : практикум / Г. К. Бахмет, Н. А. Українець. – Харків : ХАІ, 2012. – 40 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

Бахмет Геннадій Костянтинович
Мураховська Олена Анатоліївна
Українець Наталія Анатоліївна

КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНІ СИСТЕМИ

Частина 1

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2021
Підписано до друку 30.12.2021
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Папір офс.   Офс. друк
Ум. друк. арк. 8. Обл.-вид. арк. 9. Наклад 100 пр.
Замовлення 322. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu

Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001