МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Т. П. Набокіна, А. В. Кондратьєв, В. І. Парасюк

ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2021

УДК 629.76.02.017.1(075.8)
Н14

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. С. О. Давидов,
канд. техн. наук О. О. Пронцевич

Набокіна, Т. П.

Н14 Основи надійності конструкцій літальних апаратів : навч. посіб. / Т. П. Набокіна, А. В. Кондратьєв, В. І. Парасюк. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т «Харків. авіац. ін-т», 2021. – 112 с.

ISBN 978-966-662-812-4

Викладено теорію математичної надійності, розглянуто інженерні основи розрахунку надійності технічних систем частини курсу лекцій з ефективності й надійності конструкцій літальних апаратів та їх систем, методику оброблення й аналізу статистичних даних випробувань та експлуатації серійних виробів щодо надійності. Описано закони розподілу відмов, інтенсивність відмов та інші показники, необхідні для розрахунку й визначення рівня надійності технічних систем, як тих, що вже експлуатуються, так і новостворених.

Для студентів денного відділення, які навчаються за спеціальністю «Авіаційна та ракетно-космічна техніка».

Іл. 43. Табл. 8. Бібліогр.: 14 назв

УДК 629.76.02.017.1(075.8)

ISBN 978-966-662-812-4

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У навчальному посібнику розглянуто основні поняття теорії надійності й суть відмов, викладено методи розрахунку надійності систем до першої відмови, методи розрахунку надійності елементів конструкції. Існує схемна й фізична надійність технічних систем. Схемна надійність забезпечується шляхом раціонального вибору схеми із застосуванням резервування й полегшення навантажень найменш надійних елементів систем. Фізична надійність визначається фізико-механічними властивостями матеріалу елемента технічної системи, параметрами його роботи та рівнем зовнішніх впливів.

Стисло наведено основні положення теорії ймовірностей стосовно завдань забезпечення надійності, а також залежності між випадковими величинами. У зв'язку з тим, що теорія надійності оперує випадковими величинами, у ній широко використовуються ймовірнісні стохастичні залежності замість функціональних.

Подано методику оброблення й аналізу статистичних даних (матеріалів) випробувань та експлуатації серійних виробів щодо надійності. Ця методика дає змогу для кожного елемента отримати закони розподілу відмов, інтенсивність відмов та інші показники, необхідні для розрахунку й визначення рівня надійності технічних систем, як тих, що знаходяться в експлуатації, так і новостворених.

Викладено ймовірнісний метод, який використовується для оцінювання надійності технічних систем на етапі проектування. Наведено методи проектування силових елементів конструкції заданої надійності. При проектуванні будь-якої системи слід мати на увазі, що її характеристики й параметри є ймовірними за походженням. Очевидно, що чинники, що визначають міцність і навантаження, також є ймовірнісними. Це означає, що при оцінюванні показників надійності на етапі проектування необхідно враховувати ймовірнісний характер параметрів системи.

Навчальний посібник складено на основі аналізу й систематизації літературних джерел з теорії надійності [1–13].

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ Й ЗАЛЕЖНОСТІ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

1.1. Поняття теорії надійності

Надійністю об'єкта *називають властивість об'єкта виконувати задані функції, зберігати в часі і в певних межах значення всіх експлуатаційних показників, що забезпечують виконання необхідних функцій у заданих умовах експлуатації.*

Сучасні технічні засоби складаються з безлічі механізмів, що взаємодіють між собою, апаратів і приладів. Наприклад, у сучасних автоматизованих прокатних комплексах налічується понад мільйон деталей, сучасні системи радіокерування ракетами мають десятки мільйонів елементів, тоді як перші найпростіші машини та радіоприймачі складалися тільки з десятків або сотень деталей. Відмова в роботі хоча б одного відповідального елемента складної системи без резервування може спричинити порушення роботи всієї системи.

Недостатня надійність обладнання призводить до величезних витрат на ремонт, простоїв обладнання, припинення постачання населення електроенергією, водою, газом, транспортними засобами, невиконання відповідальних завдань, іноді до аварій, пов'язаних з великими економічними втратами, руйнуванням великих об'єктів і з людськими жертвами.

На розвиток науки про надійність вплинули такі фактори: а) автоматизація, роботизування технологічних процесів; б) багаторазове ускладнення виробів та їх з'єднання у великі комплекси; в) безперервне форсування машин, зменшення їх металомісткості, підвищення їх силової, теплової й електричної напруженості.

Теорія надійності **–** це наука, що вивчає закономірності розподілу відмов технічних пристроїв і конструкцій, причини й моделі їх виникнення, а також методи забезпечення стабільної роботи об'єктів (конструкцій, виробів, пристроїв, систем і т. ін.) у процесі проектування, виробництва, приймання, транспортування, експлуатації та зберігання. Математичний апарат сучасної теорії надійності базується на результатах таких розділів математики: теорія ймовірностей; математична статистика; теорія випадкових процесів; математична логіка; теорія графів; теорія оптимізації.

У теорії надійності розглядаються такі узагальнені об'єкти:

– **виріб** – *одиниця продукції*, що випускається підприємством, цехом і т. д., наприклад верстат, автомобіль;

– **елемент** – *найпростіша при розгляді складова частина виробу,* яка в задачах надійності може складатися з багатьох деталей;

– **система** – *сукупність* спільно діючих елементів, призначена для самостійного виконання заданих функцій.

Поняття *елемента і системи* трансформуються залежно від поставленого завдання. Машину, наприклад, при встановленні її власної надійності розглядають як систему, що складається з окремих елементів –

механізмів, деталей і т. ін., а при вивченні надійності автоматичної лінії – як елемент.

Вироби поділяють на невідновні, які не можуть бути відновлені споживачем і підлягають заміні, наприклад електричні й електронні лампи і т. ін.; на відновні, які можуть бути відновлені споживачем, наприклад верстат, автомобіль, радіоприймач.

Деякі вироби, що належать до невідновних, іноді відновлюються на спеціалізованих підприємствах. Складні вироби, що складаються з багатьох елементів, зазвичай відновлюють, оскільки відмова часто пов'язана з пошкодженням одного або небагатьох елементів, у той час як інші залишаються роботоздатними. Прості елементи, особливо ті, що закуповуються зі сторони або виготовляються методом масового виробництва, частіше є невідновними.

Основні поняття й терміни надійності стандартизовано. Надійність характеризується такими основними станами й подіями:

Роботоздатність – *стан виробу*, при якому він здатний нормально виконувати задані функції (з параметрами, установленими в технічній документації). Роботоздатність не стосується вимог, що безпосередньо не впливають на експлуатаційні показники, наприклад пошкодження поверхні і т. ін.

Справність – стан виробу, при якому він задовольняє всім вимогам, не тільки основним, але й допоміжним. Справний виріб обов'язково є роботоздатним.

Відмова – *подія, що полягає в повній або частковій втраті роботоздатності*. Відмови підрозділяють на *відмови функціонування*, при яких виконання своїх функцій елементом або об'єктом припиняється (наприклад, поломка зубів шестерні), і *параметричні відмови*, при яких деякі параметри об'єкта змінюються в неприпустимих межах (наприклад, втрата точності верстата).

Причини відмов поділяють на *випадкові й систематичні*.

Випадкові причини – це непередбачені перевантаження, дефекти матеріалу й похибки виготовлення, які не виявлено контролем, помилки обслугового персоналу або збої системи керування. Приклади: тверді включення в середовищі, що обробляється, недопустимі відхилення розмірів заготовок або їх неправильний затиск, раковини, гартівні тріщини. Випадкові фактори переважно спричиняють відмови при діях у несприятливих поєднаннях.

Систематичні причини – це закономірні явища, що призводять до поступового накопичення пошкоджень: вплив середовища, часу, температури, опромінювання – корозія, старіння; навантаження й робота тертя – утома, повзучість, зношення; функціональний вплив – засмічення, залипання, витоки.

За характером розвитку і прояву відмови поділяють на такі:

– *раптові* (поломки від перевантажень, заїдання);

– *поступові за розвитком і раптові за проявом* (утомні руйнування, перегоряння ламп, короткі замикання через старіння ізоляції);

– *поступові* (зношення, старіння, корозія, залипання).

Раптові відмови через несподіваність їх появи є більш небезпечними, ніж поступові. Поступові відмови – це виходи основних характерних параметрів за межі допуску в процесі експлуатації або зберігання.

За причинами виникнення відмови можна також підрозділити на *конструкційні*, спричинені недоліками конструкції, *технологічні*, спричинені недосконалістю або порушенням технології, та *експлуатаційні*, спричинені неправильним використанням виробів.

За фізичною природою відмови можуть бути *пов'язаними з руйнуванням деталей* або їх поверхонь (поломки, викришування, зношення, корозія, старіння) і *непов'язаними з руйнуванням* (засмічення каналів подання палива, мастила або подання робочої рідини в гідроприводах, ослаблення з'єднань, забруднення або ослаблення електроконтактів). Відповідно до цього відмови усувають: а) заміною деталей; б) регулюванням або очищенням.

За своїми наслідками відмови можуть бути *легкими* – такими, що легко усуваються, *середніми*, що не спричиняють руйнування інших вузлів, і *важкими*, що призводять до важких вторинних руйнувань, а іноді й до людських жертв.

За можливістю подальшого використання виробу відмови поділяють на *повні*, що виключають можливість роботи виробу до їх усунення, і *часткові*, при яких виріб може частково використовуватися, наприклад, з неповною потужністю або на зниженій швидкості.

За складністю усунення розрізняють відмови, які можна усунути при технічному обслуговуванні, у порядку середнього або капітального ремонту, і ті, які можна усунути на місці, тобто відмови, які можна усунути в експлуатаційних і стаціонарних умовах, що особливо важливо для транспортних машин. Існують також самоусувні відмови, наприклад, у системах автоматичного подання заготовок на верстатах.

За часом виникнення відмови поділяють на такі: відмови, що виникають у перший період експлуатації і пов'язані з відсутністю часу напрацювання й потраплянням на складання дефектних елементів, які не було відбраковано контролем; відмови при нормальному використанні (за період до прояву зносових відмов).

Відмови деталей і вузлів різних машин і в різних умовах експлуатації можуть мати різні наслідки. Наслідки відмов невеликої кількості *універсальних машин* при наявності ремонтного цеху можуть бути усунені силами підприємства, причому роботу на час ремонту розподіляють між іншими машинами. Відмова *об'єкта, вбудованого в автоматичну лінію, або спеціального верстата*, установленого на заводі в одному екземплярі, пов'язана з простоєм автоматичної лінії. Відмова деталей літального апарата може спричинити аварію з людськими жертвами.

Надійність виробів характеризується *безвідмовністю, довговічністю, ремонтопридатністю і збережуваністю*. Таким чином, надійність характеризується властивостями, які виявляються в експлуатації й дають змогу судити про те, наскільки виріб виправдає надії його виробників і споживачів.

Безвідмовність (або надійність у вузькому розумінні слова) – *здатність об'єкта безперервно зберігати роботоздатність протягом заданого часу або часу напрацювання*. Ця властивість є особливо важливою для машин, відмова в роботі яких пов'язана з небезпекою для життя людей або з перервою в роботі великого комплексу машин, зупинкою автоматизованого виробництва.

Довговічність – здатність об'єкта зберігати роботоздатність до переходу в граничний стан при встановленій системі технічного обслуговування й ремонтів. Граничний стан виробу характеризується неможливістю його подальшої експлуатації, зниженням ефективності або безпеки. Для невідновних виробів поняття довговічності й безвідмовності практично збігаються.

Ремонтопридатність – *пристосованість виробу до виявлення причин виникнення відмов і пошкоджень та запобігання їм, підтримки й відновлення роботоздатності внаслідок технічного обслуговування й ремонту*. З ускладненням систем усе важче стає знаходити причини відмов та елементи, що відмовили. Так, у складних електрогідравлічних системах верстатів пошук причин відмови може становити понад 50 % загального часу відновлення роботоздатності. Тому полегшення пошуку елементів, що відмовили, закладається в конструкцію нових складних автоматичних систем. Важливість ремонтопридатності (пристосованості до обслуговування) машин визначається витратами на ремонт машин у народному господарстві.

Збережуваність – *здатність об'єкта зберігати значення показників безвідмовності, довговічності й ремонтопридатності після зберігання і транспортування*. Ця властивість є особливо важливою для приладів. Так, за американськими джерелами, під час Другої світової війни близько 50 % радіоелектронного обладнання для військових потреб і запасних частин до нього вийшло з ладу в процесі зберігання.

1.2. Показники надійності

Залежно від властивостей виробу розрізняють показники безвідмовності, довговічності, ремонтопридатності й збережуваності.

Показники безвідмовності

Імовірність безвідмовної роботи – імовірність того, що в межах заданого напрацювання відмова не виникне.

Середнє напрацювання до відмови – математичне сподівання напрацювання до відмови невідновного виробу. Оскільки пристрій неможливо відновити, то це просто середній час, протягом якого працюватиме пристрій до того моменту, як зламається.

Напрацювання – тривалість або обсяг роботи об'єкта, яка вимірюється в годинах, мотогодинах, гектарах, кілометрах пробігу, циклах увімкнення-вимкнення та ін.

Середнє напрацювання на відмову – відношення напрацювання відновного об'єкта до виникнення відмови до математичного сподівання кількості його відмов протягом цього напрацювання. Іншими словами, це середня тривалість роботи пристрою між відмовами, тобто це параметр, що показує, яке напрацювання в середньому припадає на одну відмову, і виражається в годинах.

Інтенсивність відмов – показник надійності для невідновних виробів, що дорівнює відношенню середньої кількості відмов в одиницю часу (або напрацювання в інших одиницях) об'єктів до кількості об'єктів, що залишилися роботоздатними.

Параметр потоку відмов – показник надійності відновних виробів, що дорівнює відношенню середньої кількості відмов відновного об'єкта за довільне мале його напрацювання до значення цього напрацювання (відповідає інтенсивності відмов для виробів, які не ремонтуються).

Показники довговічності

Довговічність визначається двома умовами – фізичним і моральним зношенням. Фізичне зношення настає в тому випадку, коли подальший ремонт та експлуатація елемента або системи стають вже невигідними, тому що витрати на обслуговування перевищують дохід під час експлуатації. Моральне зношення означає невідповідність параметрів елемента або системи сучасним умовам їх експлуатації.

Технічний ресурс (або ресурс) – граничний сумарний час безперервної експлуатації технічного об'єкта або граничний обсяг роботи, яку він здатний виконати. Після досягнення межі подальша експлуатація об'єкта має бути припинена. Ресурс виражається в одиницях часу (зазвичай у годинах), довжини (у кілометрах) і в одиницях випуску продукції. Для невідновних виробів поняття технічного ресурсу й напрацювання до відмови збігаються.

Граничний стан – стан об'єкта (виробу), при якому він перестає задовольняти експлуатаційним вимогам, тобто або втрачає здатність чинити опір зовнішнім впливам, або набуває недопустимої деформації або місцевого пошкодження. Подальша експлуатація такої конструкції є неприпустимою або недоцільною.

Термін експлуатації – календарне напрацювання до граничного стану. Виражається зазвичай у роках. Для деталей машин як критерій довговічності використовується технічний ресурс.

Для машин, що експлуатуються в різних умовах і мають більш точний показник, ніж календарний термін служби (зокрема, для транспортних машин – пробіг, для двигунів – мотогодини), також застосовується технічний ресурс. Для інших машин використовується термін служби.

Одним з різновидів показників довговічності є гамма-відсоткові показники – це показники, які дорівнюють або перевищують у середньому задану кількість γ відсотків довговічності для виробів певного типу й характеризують довговічність виробів при заданій імовірності збереження роботоздатності.

Гамма-відсотковий ресурс – це напрацювання, протягом якого об'єкт не досягне граничного стану із заданою ймовірністю, яку виражено у відсотках. Для виробів серійного й масового виробництва, зокрема для виготовлення великогабаритних підшипників, найбільш часто використовують 90-відсотковий ресурс. Для підшипників відповідальних виробів γ-ресурс вибирають у розмірі 95 % і вище. Якщо відмова є небезпечною для життя людей, то γ-ресурс наближають до 100 %.

Показники ремонтопридатності й збережності

Середній час відновлення роботоздатного стану – це математичне сподівання часу відновлення.

Імовірність відновлення роботоздатного стану в заданий час – імовірність того, що час відновлення роботоздатного стану не перевищить заданого.

Терміни зберігання – середній і γ-відсотковий: математичне сподівання зберігання і термін зберігання, який досягається об'єктом із заданою ймовірністю γ, яку виражено у відсотках.

Комплексні показники (застосовуються здебільшого для автоматичних комплексів і складних систем):

– *коефіцієнт технічного використання* ($К_{тв}$) – відношення математичного сподівання часу роботоздатного стану за деякий період експлуатації до суми математичних сподівань часу роботоздатного стану і всіх простоїв для ремонтів і технічного обслуговування;

– *коефіцієнт готовності* ($К_г$) – імовірність того, що об'єкт виявиться в роботоздатному стані в довільний момент часу, крім періодів, у яких експлуатація не передбачається; коефіцієнт визначають як відношення математичних сподівань часу перебування в роботоздатному стані до математичних сподівань суми цього часу й часу позапланових ремонтів.

1.3. Загальні залежності

Істотне розсіювання основних параметрів надійності зумовлює необхідність розглядати її в імовірнісному аспекті.

Параметри надійності використовуються в статистичному трактуванні для оцінювання стану і в імовірнісному трактуванні для прогнозування. Перші виражаються в дискретних числах, їх в теорії ймовірностей і математичній теорії надійності називають *оцінками*. При досить великій кількості випробувань їх беруть за справжні характеристики надійності.

Розглянемо проведені для оцінювання надійності випробування або експлуатацію значної кількості N елементів протягом часу t. Нехай до кінця випробування або терміну експлуатації залишається N_p роботоздатних (тих, що не відмовили) елементів і n елементів, що відмовили.

Тоді відносна кількість відмов визначається формулою $Q(t)=n/N$.

Імовірність безвідмовної роботи оцінюється відносною кількістю роботоздатних елементів:

$$P(t)=\frac{N_p}{N}=\frac{N-n}{N}=1-\frac{n}{N}=1-Q(t). \quad (1.1)$$

Оскільки безвідмовна робота й відмова – взаємно протилежні події, то сума їх імовірностей дорівнює одиниці:

$$P(t)+Q(t)=1. \quad (1.2)$$

Це ж випливає і з наведених вище залежностей.

Для $t=0$ і $n=0$ $Q(t)=0$ і $P(t)=1$.

Для $t=\infty$ і $n=N$ $Q(t)=1$ і $P(t)=0$.

Розподіл відмов за часом характеризується *функцією щільності розподілу* $f(t)$ напрацювання до відмови – відношенням середньої кількості виробів, що відмовили, на одиницю часу до загальної кількості виробів. У статистичному трактуванні $f(t)=\frac{\Delta n}{N\Delta t}=\frac{\Delta Q(t)}{\Delta t}$, в імовірнісному трактуванні $f(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$. Тут Δn і $\Delta Q(t)$ – приріст кількості об'єктів, що відмовили, і відповідно ймовірності відмов за період Δt.

Імовірності відмов і безвідмовної роботи через функцію щільності розподілу $f(t)$ виражаються залежностями

$$Q(t)=\int_0^t f(t)dt; \text{ при } t=\infty \ \ Q(t)=\int_o^\infty f(t)dt=1;$$

$$P(t)=1-Q(t)=1-\int_o^t f(t)dt=\int_t^\infty f(t)dt. \quad (1.3)$$

Інтенсивність відмов $\lambda(t)$ на відміну від щільності розподілу стосується кількості об'єктів N_p, що залишилися роботоздатними, а не загальної кількості об'єктів. Відповідно в статистичному трактуванні

$$\lambda(t)=\frac{\Delta n}{N_p\Delta t} \quad (1.4)$$

і в імовірнісному трактуванні з урахуванням того, що $N_p/N=P(t)$,

$$\lambda(t)=\frac{\Delta n}{N_p\Delta t}\frac{N}{N}=\frac{1}{P(t)}\frac{\Delta n}{N\Delta t}=\frac{f(t)}{P(t)}. \quad (1.5)$$

Знайдемо вираз для ймовірності безвідмовної роботи залежно від інтенсивності відмов, для чого в попередній вираз підставимо $f(t)=-\frac{dP(t)}{dt}$, розділимо змінні й проведемо інтегрування:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\lambda(t)dt; \quad \ln P(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt;$$

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \tag{1.6}$$

Це співвідношення є одним з основних рівнянь математичної теорії надійності. До найважливіших загальних залежностей надійності так само належать залежності надійності систем від надійності елементів.

Приклад 1.1. Визначити надійність (імовірність безвідмовної роботи) найпростішої розрахункової системи, що складається з 10 послідовно з'єднаних елементів (рис. 1.1), з імовірністю безвідмовної роботи 0,9 для кожного елемента. Відмова кожного елемента спричиняє відмову системи, а відмови елементів уважають незалежними.

Розв'язання. Використаємо відому теорему множення ймовірностей, згідно з якою ймовірність добутку, тобто спільного прояву незалежних подій, дорівнює добутку ймовірностей цих подій. Отже, імовірність безвідмовної роботи системи дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи елементів:

$$P_{cm}(t) = P_1(t)P_2(t)...P_n(t). \tag{1.7}$$

Якщо $P_1(t) = P_2(t) = ... = P_n(t)$, то $P_{cm}(t) = P_1^n(t)$. Тому надійність складних систем виходить занадто низькою. Наприклад, якщо система складається з 10 елементів з ймовірністю безвідмовної роботи 0,9, то загальна ймовірність становить $0{,}9^{10} \approx 0{,}35$.

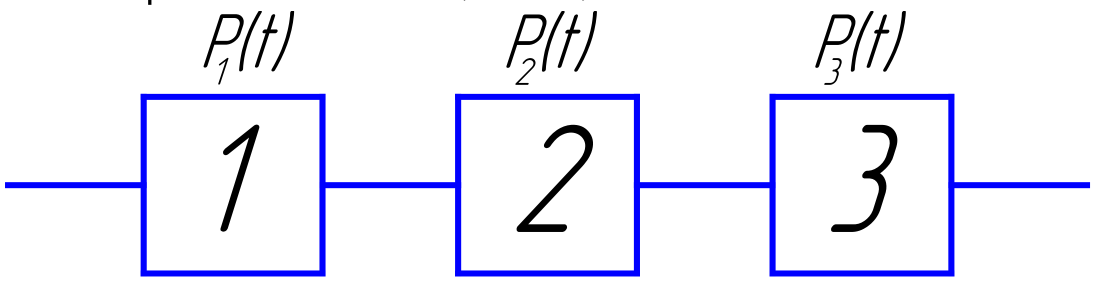


Рис. 1.1. Послідовна система

Зазвичай імовірність безвідмовної роботи елементів є досить високою, тому $P_1(t), P_2(t)..., P_n(t)$ можна виразити через імовірності відмов і скористатися теорією наближених обчислень:

$$P_{cm}(t) = [1 - Q_1(t)][1 - Q_2(t)]...[1 - Q_n(t)] \approx 1 - [Q_1(t) + Q_2(t) + ... + Q_n(t)], \tag{1.8}$$

оскільки добутком двох малих величин можна знехтувати. При $Q_1(t) = Q_2(t) = ... = Q_n(t)$ знаходимо $P_{cm} = 1 - nQ_1(t)$.

Приклад 1.2. Нехай у системі з шести однакових послідовно розташованих елементів $P_1(t) = 0{,}99$. Тоді $Q_1(t) = 1 - P_1(t) = 0{,}01$ і $P_{cm}(t) = P_1^n(t) = 0{,}99^6 \approx 0{,}94$ або $P_{cm} = 1 - nQ_1(t) = 1 - 6 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}94$.

1.4. Надійність у період нормальної експлуатації

У період нормальної експлуатації поступові відмови ще не виявляються і надійність характеризується раптовими відмовами. Ці відмови виникають через несприятливий збіг багатьох обставин і тому мають постійну інтенсивність, яка не залежить від віку виробу:

$$\lambda(t) = \lambda = const, \tag{1.9}$$

де m_t – середнє напрацювання на відмову (зазвичай у годинах); $\lambda = 1/m_t$.

Тоді λ є кількістю відмов у годину і являє собою малий дріб.

Імовірність безвідмовної роботи (1.6) записують у такому вигляді:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(e)dt} = e^{-\lambda t}. \tag{1.10}$$

Ця величина підпорядковується експоненціальному закону розподілу часу безвідмовної роботи і є однаковою в будь-який проміжок часу в період нормальної експлуатації.

Експоненціальним законом розподілу можна записувати час безвідмовної роботи багатьох об'єктів (виробів): відповідальних машин, що експлуатуються в період до істотного прояву поступових відмов; елементів радіоелектронної апаратури; машин з послідовною заміною деталей, що відмовили; машин разом з електро- й гідрообладнанням і системами керування та ін.; об'єктів, що складаються з багатьох елементів (при цьому час безвідмовної роботи кожного елемента може не підпорядковуватися експоненціальному закону; потрібно тільки, щоб відмови одного елемента, що не підпорядковуються цьому закону, не домінували над іншими).

Істотна перевага експоненціального розподілу – простота, оскільки має тільки один параметр. Якщо $\lambda t \le 0{,}1$, то формула для ймовірності безвідмовної роботи спрощується внаслідок розвинення в ряд і нехтування малими членами:

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \ldots \approx 1 - \lambda t. \tag{1.11}$$

Щільність розподілу (у загальному випадку)

$$f(t) = -\frac{dP(t)}{dt} = \left| P(t) = e^{-\lambda t} \right| = -(-\lambda e^{-\lambda t}) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{1.12}$$

Значення ймовірності безвідмовної роботи (рис. 1.2) залежно від $\lambda(t)t \approx t/m_t$ наведемо у вигляді таблиці:

$\lambda(t)t$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$P(t)$	0,368	0,9	0,99	0,999	0,9999

Оскільки при $t/m_t = 1$ імовірність $P(t) \approx 0{,}37$, то 63 % відмов виникає за час $t < m_t$ і тільки 37 % – пізніше. З аналізу наведених значень випливає, що для забезпечення необхідної ймовірності безвідмовної роботи (0,9 або 0,99) можна використовувати тільки малу частку середнього терміну експлуатації (відповідно 0,1 і 0,01). Тобто, якщо термін експлуатації виробу становить 5 років, то з ймовірністю безвідмовної роботи 0,9 середній термін експлуатації виробу становить 0,1 від 5 років, тобто 0,5 року.

Якщо виріб працює при різних режимах, а отже, з інтенсивністю відмов λ_1 (за час t_1) і λ_2 (за час t_2), то

$$P_c(t) = P_1(t)P_2(t) = e^{-(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)}. \tag{1.13}$$

Цю залежність отримаємо з теореми множення ймовірностей.

Для визначення на основі дослідів інтенсивності відмов оцінюють середнє напрацювання до відмови

$$m_t \approx \frac{1}{N}\sum t_i \,, \tag{1.14}$$

де $N-$ загальна кількість спостережень. Тоді $\lambda = 1/m_t$.

Можна також скористатися графічним способом (рис. 1.3) – нанести експериментальні точки в координатах t і $-\lg P(t)$.

Знак «мінус» вибирають тому, що $P(t) < 1$, отже, $\lg P(t)$ – від'ємна величина. Тоді логарифмуємо вираз для ймовірності безвідмовної роботи: $\lg P(t) = -\lambda t \lg e = -0{,}4343\lambda t$, звідки $-\lg P(t) = 0{,}4343\lambda t$, і знаходимо тангенс кута нахилу прямої, проведеної через експериментальні точки: $tg\alpha = 0{,}4343\lambda$, звідки $\lambda = 2{,}3 tg\alpha$. Знаючи параметр λ, з використанням (1.10) можна визначити $P(t)$. При цьому способі немає необхідності доводити до кінця випробування всіх зразків.

Для системи послідовно з'єднаних елементів $P_{cm}(t) = e^{-\sum \lambda_i t}$. Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$, то $P_{cm}(t) = e^{-n\lambda_1 t}$. Таким чином, імовірність безвідмовної роботи системи, що складається з елементів, імовірність безвідмовної роботи яких підпорядковується експоненціальному закону, також підпорядковується експоненціальному закону.

З використанням експоненціального закону розподілу можна визначити середню кількістю виробів n, які вийдуть з ладу до заданого моменту часу, і середню кількість виробів N_p, які залишаться роботоздатними при $\lambda t \le 0{,}1$: $n \approx N\lambda t; N_p = N(1 - \lambda t)$.

Приклад 1.3. Оцінити ймовірність $P(t)$ відсутності раптових відмов механізму протягом $t = 10000\,год$, якщо інтенсивність відмов становить $\lambda = 1/m_t = 10^{-8} год^{-1}$.

Розв'язання. Оскільки $\lambda t = 10^{-8} \cdot 10^4 = 10^{-4} < 0{,}1$, скористаємося наближеною залежністю $P(t) = 1 - \lambda t = 1 - 10^{-4} = 0{,}9999$. Розрахунок за основною залежністю $P(t) = e^{-\lambda t}$ у межах чотирьох знаків після коми дає точну збіжність.

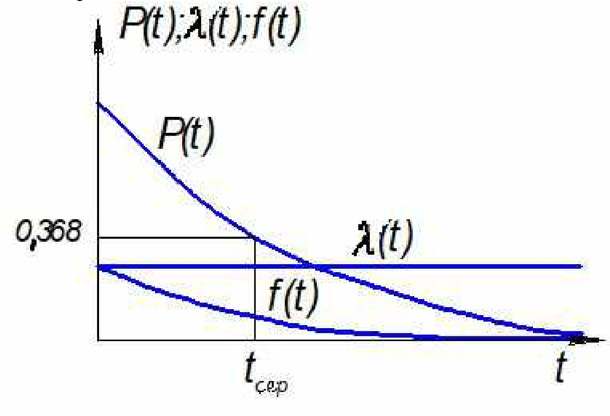


Рис 1.2. Функції ймовірності безвідмовної роботи $P(t)$, густини ймовірності $f(t)$ та інтенсивності відмов $\lambda(t)$ експоненціального розподілу

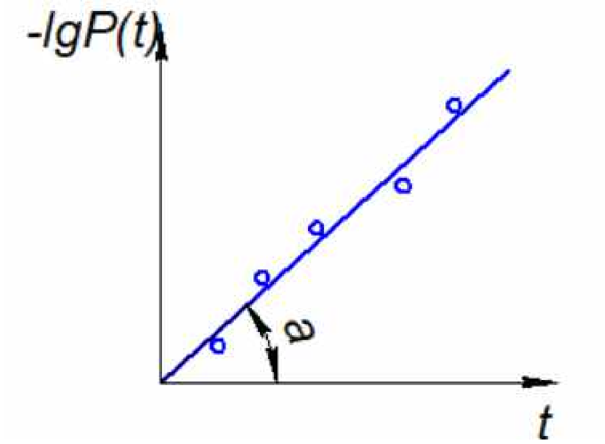


Рис. 1.3. Графічне визначення ймовірності безвідмовної роботи за результатами експерименту

1.5. Надійність у період поступових відмов

Для поступових відмов використовують закони розподілу часу безвідмовної роботи, які призводять спочатку до низької щільності розподілу, потім до максимуму й далі – до падіння, пов'язаного зі зменшенням кількості роботоздатних елементів.

У зв'язку з різноманіттям причин та умов виникнення відмов у цей період для опису надійності застосовують декілька законів розподілу, які встановлюють шляхом апроксимації результатів випробувань або спостережень в експлуатації.

Нормальний розподіл є універсальним, зручним, його широко застосовують для практичних розрахунків (рис.1.4).

Розподіл завжди підпорядковується нормальному закону, якщо на зміну випадкової величини впливає багато приблизно рівнозначних чинників.

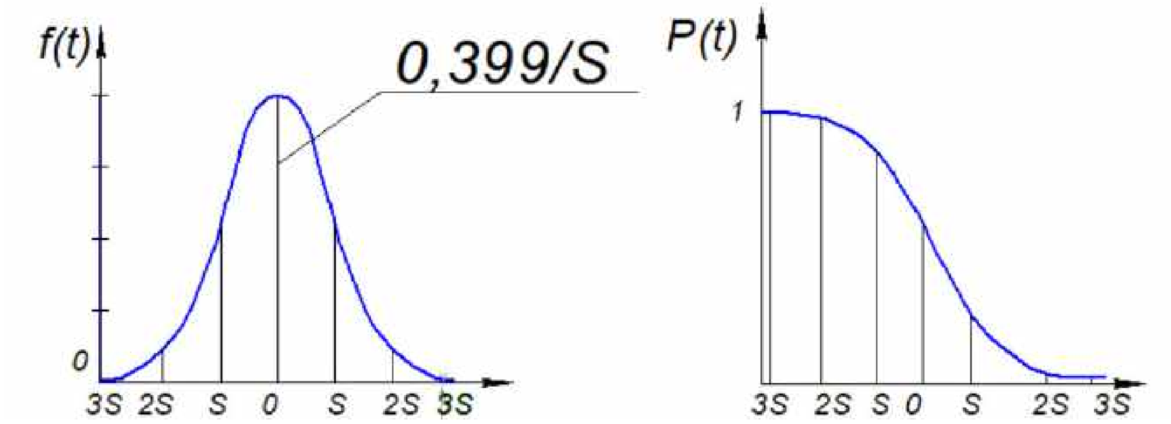


Рис. 1.4. Функція густини ймовірності та інтегральна функція ймовірності нормального розподілу

Нормальний розподіл описує напрацювання до відмови багатьох виробів, як відновних, так і невідновних, розміри й помилки вимірювань деталей і т. д.

Щільність розподілу

$$f(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2S^2}}. \tag{1.15}$$

Розподіл має два незалежних параметри: математичне сподівання m_t і середньоквадратичне відхилення *S.* Значення параметрів m_t і *S* оцінюють за результатами випробувань за формулами

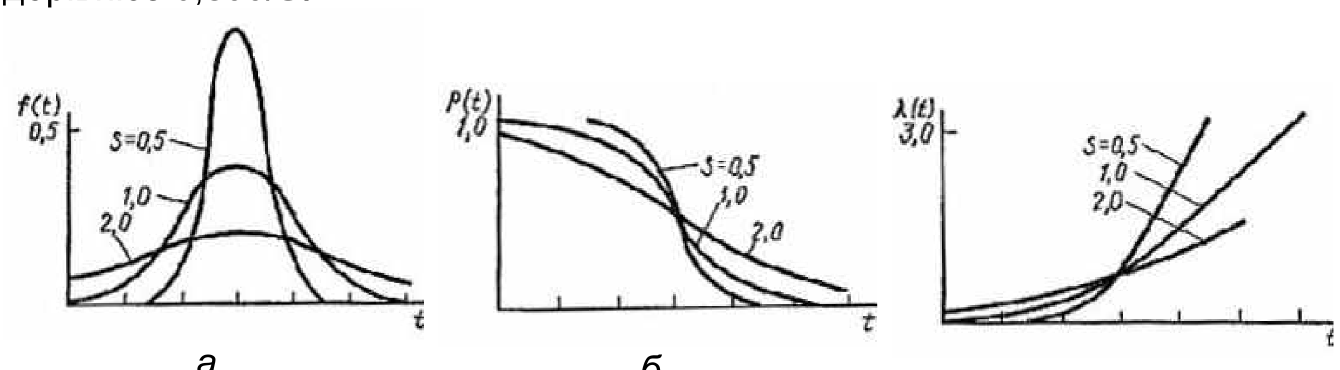
$$m_t \approx \bar{t} = \sum t_i / N;$$

$$S \approx s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (t_i - \bar{t})^2}, \tag{1.16}$$

де $\bar{t}$ і s – оцінки математичного сподівання й середньоквадратичного відхилення.

Зі збільшенням кількості випробувань значення параметрів та їх оцінок зближуються. Іноді зручніше оперувати дисперсією $D = S^2$.

Математичне сподівання визначає на графіку (рис. 1.5) положення петлі, а середньоквадратичне відхилення – ширину графіка. Крива щільності розподілу тим гостріше і вище, чим менше *S.* Протяжність цієї кривої – від $t = -\infty$ до $t = \infty$. Це не є суттєвим недоліком, особливо, якщо $m_t \geq 3S$, оскільки площа, обмежена гілками кривої щільності, які прямують у нескінченність, що виражає відповідну ймовірність відмов, є дуже малою. Так, імовірність відмови за період часу до $m_t - 3S$ становить усього 0,135 % і зазвичай не враховується в розрахунках. Імовірність відмови до $m_t - 2S$ дорівнює 2,175 %. Найбільша ордината кривої щільності розподілу дорівнює 0,399/*S*.



а *б* *в*

Рис. 1.5. Основні характеристики нормального розподілу при різних значеннях середньоквадратичного відхилення: *а* – густина ймовірності $f(t)$; *б* – імовірність безвідмовної роботи $P(t)$; *в* – інтенсивність відмов $\lambda(t)$

Інтегральна функція розподілу має вигляд

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(t)dt. \qquad (1.17)$$

Імовірність відмови та ймовірність безвідмовної роботи є такими:

$$Q(t) = F(t); P(t) = 1 - F(t). \qquad (1.18)$$

Обчислення інтегралів замінюють використанням таблиць. Таблиці для нормального розподілу у функції $(t - m_t)$ і S були б громіздкими, оскільки мали б два незалежні параметри. Використовують таблиці для нормованого нормального розподілу, для якого $m_x = 0$ і $S_x = 1$. Для цього розподілу функція щільності

$$f_o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (1.19)$$

має одну змінну *x*. Параметр *x* є центрованим, оскільки $m_x = 0$, і нормованим, оскільки $S_x = 1$. Функцію щільності розподілу записують у відносних координатах з початком на осі симетрії петлі.

Функція розподілу – інтеграл від щільності розподілу

$$F_o(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_o(x)dx. \qquad (1.20)$$

З цього рівняння випливає, що $F_o(x) + F_o(-x) = 1$, звідки $F_o(-x) = 1 - F_o(x)$.

Для використання таблиць потрібно використовувати спеціальний вираз $u_p = x = (t - m_t)/S$, причому х – це *квантиль нормованого розподілу*, який зазвичай позначають u_p.

Щільність розподілу та ймовірність безвідмовної роботи відповідно *$f(t) = f_0(x)/S$, $Q(t) = F_0(x)$; $P(t) = 1 - F_0(x)$*, де *$f_0(x)$* і *$F_0(x)$* – величини, які визначають за таблицями. Наприклад, у табл. 1.1 наведено безпосередньо значення *P(t)* залежно від *$x = u_p = (t - m_t)/S$* у діапазоні, який використовується.

У літературі з надійності часто замість інтегральної функції розподілу *$F_0(x)$* використовується функція Лапласа $\Phi(x) = \int\limits_{o}^{x} f_o(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{o}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Очевидно, що

$$F_o(x) = \int\limits_{-\infty}^{o} f_o(x)dx + \int\limits_{o}^{x} f_o(x)dx = 0{,}5 + \Phi(x). \qquad (1.21)$$

Імовірність відмови та ймовірність безвідмовної роботи, виражені через функції Лапласа і які різняться межами інтегрування, мають вигляд

$$Q(t) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{t - m_t}{S}\right);$$
$$P(t) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{t - m_t}{S}\right). \qquad (1.22)$$

Порівнюючи вироби з однаковим середнім напрацюванням до відмови й різним середньоквадратичним відхиленням *S,* можна підкреслити, що хоча при великих *S* можемо мати екземпляри з великим терміном довговічності, але чим меншим є *S,* тим набагато кращим є виріб.

Окрім оцінювання ймовірності безвідмовної роботи за відведений час або за задане напрацювання існує обернена задача – визначення часу (або напрацювання), що відповідає заданій імовірності безвідмовної роботи.

Це напрацювання (час) визначають за допомогою квантилів нормованого нормального розподілу $t = m_t + u_p S$.

Таблиця 1.1

Значення функції щільності розподілу для нормального розподілу залежно від *x*

x	0	1	2	3	4
$f_o(x)$	0,3989	0,2420	0,0540	0,0044	0,0001
$F_o(x)$	0,5	0,8413	0,9772	0,9986	0,9999

Значення квантилів наведено в табл. 1.2 залежно від необхідної ймовірності, зокрема від імовірності безвідмовної роботи.

Таблиця 1.2

Значення квантилів u_p залежно від $P(t)$

$P(t)$	0,5	0,8	0,90	0,95	0,9772	0,99	0,999	0,9999
u_p	0	–0,84	–1,282	–1,645	–2	–2,326	–3,090	–3,719

Операції з нормальним розподілом є простішими, ніж з іншими, тому цим розподілом часто замінюють інші розподіли. При малих коефіцієнтах варіації S / m_t нормальний розподіл добре замінює біномний, пуассонівський і логарифмічно нормальний розподіл.

Розподіл суми незалежних випадкових величин $U = X + Y + Z$, який називається композицією розподілів, при нормальному розподілі доданків також є нормальним розподілом.

Математичне сподівання й дисперсія композиції визначаються формулами

$$m_u = m_x + m_y + m_z; \quad S_u^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2, \qquad (1.23)$$

де m_x, m_y, m_z – математичне сподіваня випадкових величин *X,Y,Z*;

S_x^2, S_y^2, S_z^2 – дисперсія цих величин.

Приклад 1.4. Оцінити ймовірність безвідмовної роботи *P(t)* за проміжок часу t = 1,5·10^4 год рухомого з'єднання, яке зношується, якщо ресурс зі зношення відповідає нормальному розподілу з параметрами $m_t = 4 \cdot 10^4$ год, $S = 10^4$ год.

Розв'язання. Знаходимо квантиль $u_p = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4}{10^4} = -2{,}5$; за табл. 1.2 визначаємо, що *P(t)* = 0,99205.

Приклад 1.5. Оцінити 80-відсотковий ресурс $t_{0,8}$ рухомого з'єднання, якщо відомо, що його довговічність обмежена за зношенням. Ресурс підпорядковується нормальному розподілу з параметрами $m_t = 10^4 \, год; S = 6 \cdot 10^3 \, год$.

Розв'язання. За табл. 1.2 для $P(t) = 0{,}8$ $u_p = -0{,}84$. Тоді $t_{0,8} = m_t + u_p S = 10^4 - 0{,}84 \cdot 6 \cdot 10^3 \approx 5 \cdot 10^3 \, год$.

Усічений нормальний розподіл можна отримати з нормального при обмеженні інтервалу змінення випадкової величини. Воно, зокрема, вносить уточнення в розрахунки надійності порівняно з нормальним розподілом при великих значеннях коефіцієнта варіації $V = S / m_t$. Функцію щільності розподілу записують так само, як і щільність нормального розподілу, але з коефіцієнтом пропорційності c:

$$\overline{f(t)} = \frac{c}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_o)^2}{2S^2}}, \tag{1.24}$$

де t_o – випадкова величина, що відповідає максимальному значенню $\overline{f(t)}$, її та називають модою.

З використанням функції F_o нормального розподілу нормованої і центральної випадкових величин, запишемо

$$c = \frac{1}{F_o\left(\dfrac{b-t_o}{S}\right) - F_o\left(\dfrac{a-t_o}{S}\right)}. \tag{1.25}$$

Найчастіше використовується усічений нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ і $b = \infty$. Такий розподіл у задачах надійності відображає неможливість відмов при від'ємних значеннях часу. Тоді

$$c = \frac{1}{F_o(t_o / S)} = \frac{1}{(0{,}5 + \Phi_0(t_0 / S))}. \tag{1.26}$$

Значення *с* можна вибрати залежно від t_o / S:

t_o / S	1	2	3
c	1,189	1,023	1,001

Таким чином, при $t_o > 2S$ коефіцієнт c є дуже близьким до одиниці.

Імовірність безвідмовної роботи й середній ресурс можна також визначити за таблицями:

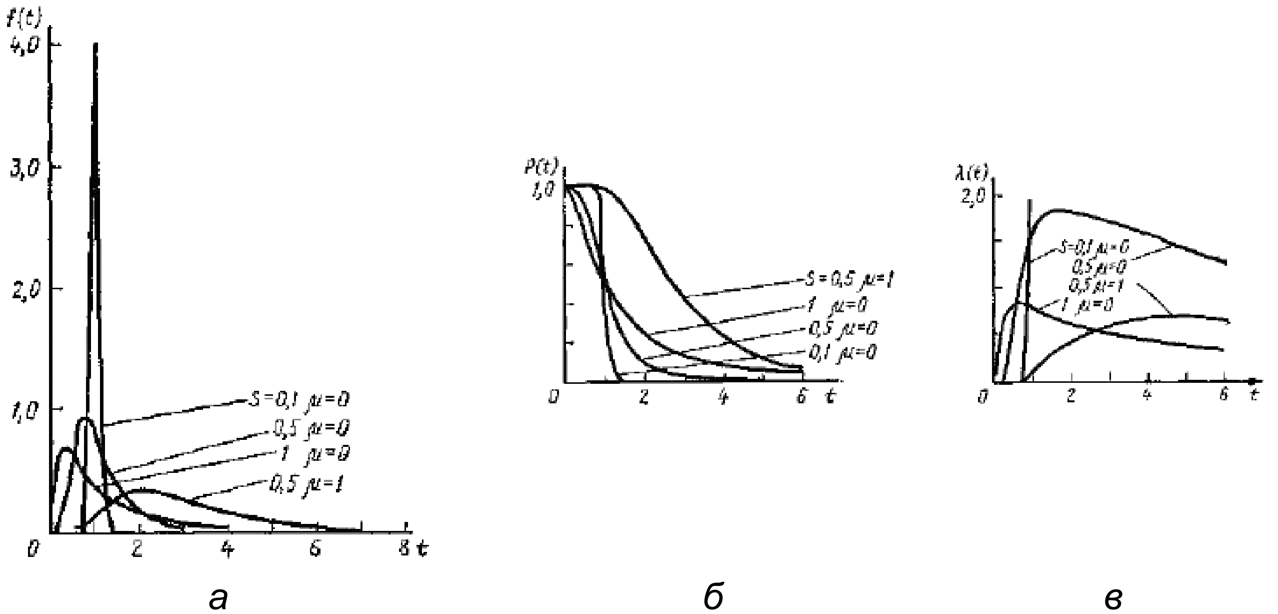
$$P(t) = cF_o\left(\frac{t_o - t}{S}\right), \tag{1.27}$$

$$m_t = t_o + Sf^*(t_o / S), \tag{1.28}$$

де F_0 – інтегральна функція розподілу, що відповідає необхідному квантилю; f^* – функція, яку визначають за таблицями [10].

Прикладом усіченого розподілу може бути розподіл параметра якості виробів після відбракування частини виробів за цим параметром.

У *логарифмічно нормальному розподілі* (рис. 1.6) логарифм випадкової величини розподіляється за нормальним законом. Як розподіл додатних величин цей розподіл більш точно, ніж нормальний, описує напрацювання до відмови деталей, зокрема за втомою. Його успішно застосовують для опису напрацювання електронних ламп та інших виробів.



а *б* *в*

Рис. 1.6. Основні характеристики логарифмічно нормального розподілу при різних параметрах:

а – густина ймовірності $f(t)$; *б* – імовірність безвідмовної роботи $P(t)$; *в* – інтенсивність відмов $\lambda(t)$

Логарифмічно нормальний розподіл застосовується для випадкових величин, що являють собою добуток значної кількості випадкових вихідних величин, подібно до того, як нормальний розподіл застосовується для суми випадкових величин.

Щільність розподілу (див. рис. 1.6) описується залежністю

$$f(t)=\frac{1}{tS\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2S^2}}, \qquad (1.29)$$

де μ и S – параметри, які оцінюються за результатами випробувань.

Так, для випробування N виробів до відмови

$$\mu \approx \mu^* = \frac{\sum \ln t_i}{N};\ S \approx s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum\left(\ln t_i - \mu^*\right)^2}, \qquad (1.30)$$

де μ^* і s – оцінки параметрів μ і S.

Імовірність безвідмовної роботи можна визначити за таблицями для нормального розподілу (залежно від значення квантиля $u_p = (\ln t - \mu)/S$).

Математичне сподівання напрацювання до відмови

$$m_t = e^{\mu + S^2/2}; \qquad (1.31)$$

середньоквадратичне відхилення

$$S_t = \sqrt{e^{2\mu+S^2}\left(e^{S^2}-1\right)}; \qquad (1.32)$$

коефіцієнт варіації $\quad V_t = S_t / m_t = \sqrt{e^{S^2}-1}$. $\qquad$ (1.33)

При $V_t \le 0{,}3$ беруть $V_t \approx S,$ при цьому похибка становить $\le 1\,\%$.

Часто застосовують запис залежностей для логарифмічно нормального розподілу в десяткових логарифмах.

Відповідно щільність розподілу

$$f(t)=\frac{0{,}4343}{tS\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\lg t-\lg t_o)^2}{2S^2}}. \qquad (1.34)$$

Оцінки параметрів $\lg t_o$ і S визначають за результатами випробувань:

$$\lg t_o = \frac{\sum \lg t_i}{N};\ S \approx s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum\left(\lg t_i - \lg t_o^*\right)^2}. \qquad (1.35)$$

Математичне сподівання m_t, средньоквадратичне відхилення S_t і коефіцієнт варіації V_t напрацювання до відмови можна записати так:

$$m_t = t_o e^{2{,}651 S^2};$$

$$S_t = m_t\sqrt{\left(\frac{m_t}{t_o}\right)^2 - 1}; \qquad (1.36)$$

$$V_t = \sqrt{(m_t / t_o)^2 - 1}$$

при $V_t \le 0{,}3$ $V_t \approx 2{,}3S$.

Для ймовірності безвідмовної роботи $P(t) \le 0{,}99$ та при $V_t \le 0{,}3$ логарифмічний нормальний закон можна замінити нормальним законом з параметрами m_t і S_t та щільністю

$$f(t) = \frac{1}{S_t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2S_t^2}}.$$

Імовірність безвідмовної роботи можна знайти з допомогою спеціальних таблиць для цього розподілу або таблиць для нормального розподілу. Квантиль матиме вигляд $u_p = (\ln t - \ln t_0)/S$.

Приклад 1.6. Оцінити ймовірність $P(t)$ відсутності втомних пошкоджень вала протягом $t = 10^4$ *год*, якщо ресурс має логарифмічно нормальний розподіл з параметрами $\lg t_o = 4{,}5$; $S = 0{,}25$.

Розв'язання. $P(t) = F_o\left(\dfrac{\lg t - \lg t_o}{S}\right) = F_o\left(\dfrac{\lg 10^4 - 4{,}5}{0{,}25}\right) = 0{,}9772$.

Розподіл Вейбулла внаслідок змінення параметрів охоплює широкий діапазон випадків змінення ймовірностей. Поряд з логарифмічно нормальним розподілом цей розподіл задовільно описує напрацювання деталей за втомним руйнуванням, напрацювання до відмови електронних ламп. Його застосовують для оцінювання надійності деталей і вузлів машин, а також для оцінювання надійності в період початку напрацювання.

Розподіл Вейбулла характеризується функцією ймовірності безвідмовної роботи і має два основних параметри: параметр форми $m > 0$ і параметр масштабу $t_o > 0$ (рис. 1.7):

$$P(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}, \tag{1.37}$$

де m – параметр форми; t_0 – параметр масштабу.

Інтенсивність відмови

$$\lambda(t) = \frac{m}{t_o} t^{m-1}; \tag{1.38}$$

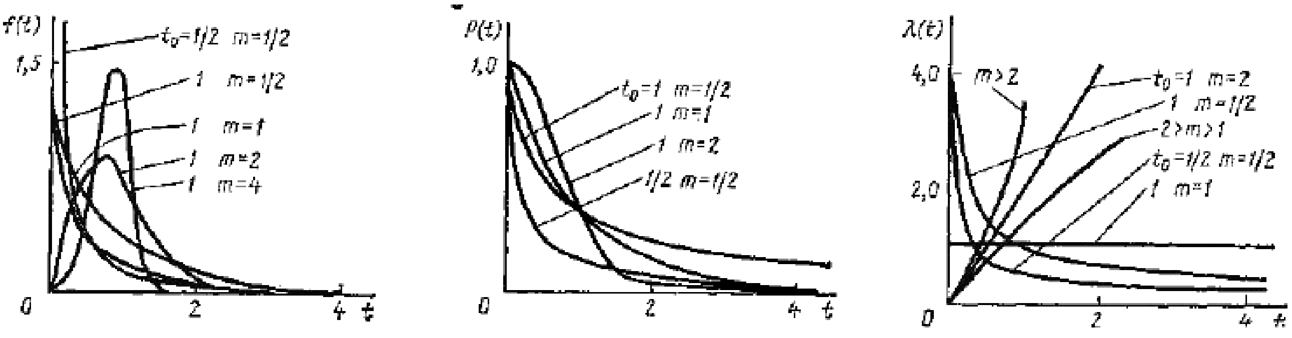
щільність розподілу

$$f(t) = \frac{m}{t_o} t^{m-1} e^{-t^m/t_o}. \tag{1.39}$$

Математичне сподівання й середньоквадратичне відхилення визначаються формулами

$$m_t = b_m t_o^{1/m}; \; S_t = c_m t_o^{1/m}, \tag{1.40}$$

де b_m і c_m – коефіцієнти.



а б в

Рис. 1.7. Основні характеристики розподілу Вейбулла при різних параметрах t_o і m: *а* – густина ймовірності $f(t)$; *б* – імовірність безвідмовної роботи $P(t)$; *в* – інтенсивність відмов $\lambda(t)$

Якщо протягом часу t^* відмов немає, то формули для характеристик надійності дещо модифікуються. Так, імовірність безвідмовної роботи

$$P(t) = e^{-\frac{\left(t-t^*\right)m}{t_o}}. \tag{1.41}$$

Опишемо можливості й універсальність розподілу Вейбулла (див. рис. 1.7):

– при $m<1$ функції $\lambda(t)$ і $f(t)$ від напрацювання до відмови є спадними;

– при $m=1$ розподіл перетворюється на експоненціальне рівняння $\lambda(t)=const$, а $f(t)$ – спадна функція;

– при $m>1$ функція $f(t)$ – одновершинна, функція $\lambda(t)$ – неперервно зростальна при $1<m<2$ з опуклістю вверх, а при $m>2$ – з опуклістю вниз;

– при $m=2$ функція $\lambda(t)$ є лінійною, а розподіл Вейбулла перетворюється на розподіл Релея;

– при $m=3{,}3$ розподіл Вейбулла наближається до нормального.

Графічне оброблення результатів випробувань для розподілу Вейбулла проводимо таким чином: злогарифмуємо вираз для $P(t)$ (1.37):

$\lg P(t) = -\frac{t^m}{t_0}\lg e = -\frac{t^m}{t_0}0{,}4343;$ уведемо позначення $y = -\lg P(t)$,

$y = \frac{t^m}{t_0}0{,}4343;$ злогарифмуємо вираз іще раз:

$\lg y = \lg(\frac{t^m}{t_0}) + \lg 0{,}4343 = m\lg t - \lg t_0 - 0{,}362,$ позначимо $A = \lg t_o + 0{,}362$,

тоді $\lg y = m\lg t - A$.

Відкладаємо результати випробувань на графіку в координатах $\lg t - \lg y$ (рис. 1.8) і проводимо через отримані точки пряму, знаходимо $m = tg\alpha$; $\lg t_o = A - 0{,}362$, де $\alpha -$ кут нахилу прямої до осі абсцис; $A -$ відрізок, що відсікається прямою на осі ординат.

Надійність системи, що складається з послідовно з'єднаних однакових елементів, що підпорядковуються розподілу Вейбулла, також підпорядковується розподілу Вейбулла.

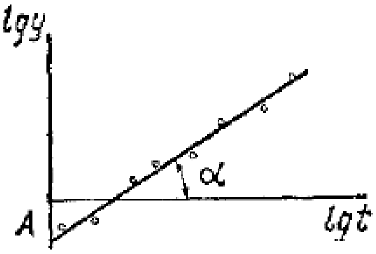


Рис. 1.8. Графічне визначення параметрів розподілу Вейбулла

Приклад 1.7. Оцінити ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$ підшипників протягом $t = 10^4$ *год*, якщо ресурс подшипників описується розподілом Вейбулла з параметрами $t_o = 10^7$ *год*; $m = 1{,}5$.

Розв'язання. $P(t) = e^{-t^m/t_o} = e^{-10^{4^{1,5}}/10^7} = 0{,}905$.

1.6. Спільна дія раптових і поступових відмов

Імовірність безвідмовної роботи виробу за період t, якщо до цього він пропрацював час T, за теоремою множення ймовірностей визначається формулою

$$P(t) = P_в(t) P_n(t), \tag{1.42}$$

де $P_в(t) = e^{-\lambda t}$ і $P_n(t) = P_n(T+t)/P_n(T)$ – імовірності відсутності раптових і поступових відмов відповідно.

Для системи, що складається з послідовно з'єднаних елементів, імовірність безвідмовної роботи за період t можна визначити так:

$$P_{cm}(t) = e^{-t\sum\lambda_i} \prod \frac{P_{ni}(T+t)}{P_{ni}(T)}, \tag{1.43}$$

де $\sum$ і $\prod$ – знаки, що означають суму і добуток. Для нових виробів $T = 0$ і $P_{ni}(T) = 1$.

На рис. 1.9 показано криві ймовірностей відсутності раптових і поступових відмов та ймовірності безвідмовної роботи при спільній дії раптових і поступових відмов. Спочатку, коли інтенсивність поступових відмов є низькою, крива відповідає кривій $P_в(t)$, а потім різко знижується.

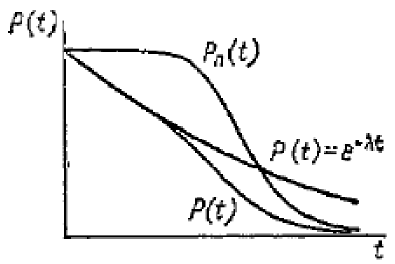


Рис. 1.9. Спільна дія раптових і поступових відмов

У період поступових відмов їх інтенсивність зазвичай є значно вищою, ніж раптових.

2. НАДІЙНІСТЬ НЕВІДНОВНИХ СИСТЕМ

2.1. Функція надійності систем і методи її складання

Забезпечення високого рівня надійності сучасної авіаційно-ракетної техніки пов'язано з використанням методів кількісного оцінювання безвідмовності систем і літального апарата за відомими значеннями безвідмовності елементів.

Під системою розуміють будь-який пристрій, що складається з частин (підсистем) або елементів, надійність яких є відомою. Складні системи поділяють на підсистеми. Системи з огляду на надійність можуть бути послідовними, паралельними й комбінованими. Надійність системи розраховують за функцією надійності системи.

Функцією надійності системи називають алгоритм розрахунку кількісного значення надійності системи за надійністю елементів.

У загальному випадку в функції надійності можуть ураховуватися метод з'єднання елементів, можливі види відмов або можливі шляхи нормального функціонування, залежність елементів за надійністю, послідовність відмов елементів, час виникнення відмов. Існують різні методи складання функції надійності. Складність цих методів підвищується в міру збільшення кількості факторів, що враховуються в функції надійності системи (рис. 2.1).

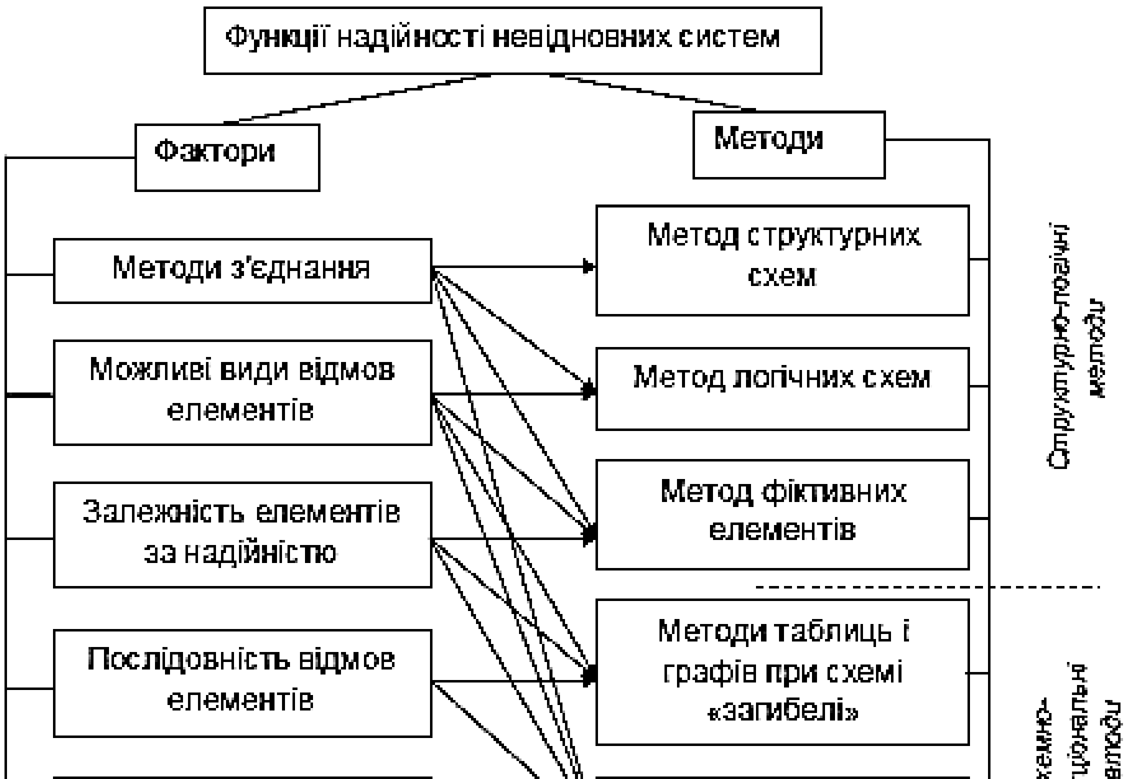


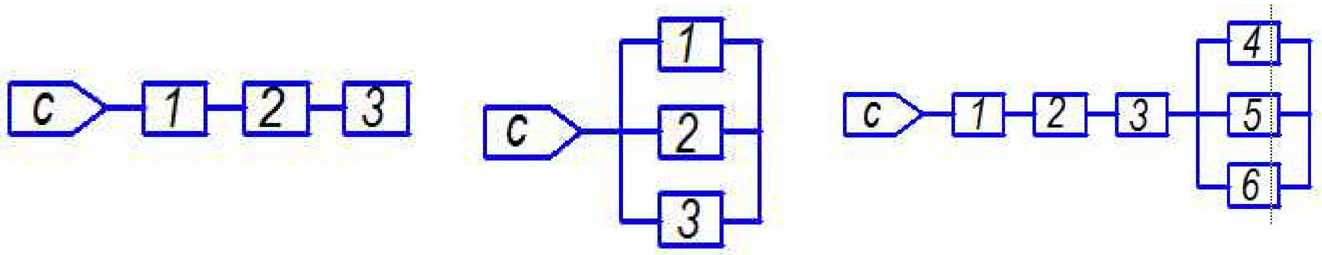
Рис. 2.1. Функції надійності невідновних систем

Послідовним з'єднанням елементів за надійністю називають таке з'єднання, при якому необхідною й достатньою умовою безвідмовної роботи системи є безвідмовна робота всіх її елементів (логічне «і»).

Паралельним з'єднанням елементів з огляду на надійність називають таке з'єднання, при якому необхідною й достатньою умовою безвідмовної роботи системи є безвідмовна робота хоча б одного елемента (логічне «або») або відмова всіх її елементів.

Змішаним (комбінованим) з'єднанням елементів за надійністю називають таке з'єднання, у якому наявними є елементи, з'єднані послідовно, та елементи, з'єднані паралельно.

З'єднання елементів за надійністю зображують структурними схемами або діаграмами безвідмовної роботи (рис. 2.2).



а *б* *в*

Рис. 2.2. Діаграми безвідмовної роботи:
а – при послідовних подіях (елементах); *б* – при паралельних подіях (елементах);
в – при комбінованих подіях (елементах)

Структурна схема є графічним зображенням системи, що відображає її структурні властивості, тобто методи з'єднання елементів або подій. При цьому поняття з'єднання в структурних схемах відрізняється від аналогічного поняття в електричних схемах, принципових і монтажних схемах конструкцій і відображає не фактичний, а умовний зв'язок. При цьому необхідно враховувати й можливі види відмов, які в цьому випадку є подіями.

2.2. Складання функції надійності структурним методом

Метод структурних схем є найпростішим і полягає в тому, що реальна схема відображається у вигляді структурної схеми подій безвідмовної роботи елементів (діаграми безвідмовної роботи), що складається з послідовних і паралельних з'єднань елементів.

Для запису функції надійності системи структурну схему розбивають на такі частини, у яких елементи з'єднані тільки послідовно або тільки паралельно. Потім визначають, як з'єднані частини між собою (послідовно чи паралельно). І поступово об'єднують усі частини в більші доти, доки не утвориться вся система.

Надійність частин системи, що утворюються з елементів, з'єднаних тільки послідовно або тільки паралельно, визначається просто, якщо відомою є надійність вхідних елементів.

Умови розрахунку безвідмовності методом структурних схем:

1. Події, зображені на діаграмі безвідмовної роботи системи, мають бути незалежними.

2. Одна й та сама подія може бути зображена на діаграмі безвідмовної роботи тільки один раз у вигляді одного елемента, тобто повинна дотримуватися ординарність елеменів.

3. Система розглядається такою, що складається тільки з одновідмовних елементів.

4. На діаграмі безвідмовної роботи не має бути подій, що заперечують інші події.

Типова методика розрахунку безвідмовності структурним методом:

1. Визначення основних функцій системи й аналіз залежностей між елементами (при вивченні принципової й монтажної схем).

2. Складання структурної (розрахункової) схеми подій безвідмовної роботи системи та її елементів.

3. Складання розрахункових формул.

4. Збирання й оброблення інформації про відмови елементів системи.

5. Кількісне оцінювання ймовірності безвідмовної роботи системи.

6. Висновки й рекомендації.

2.2.1. Система з послідовним з'єднанням елементів

Система, що складається з незалежних елементів, зв'язаних функціонально таким чином, що відмова будь-якого з них спричиняє відмову системи, буде відображатися розрахунковою структурною схемою (діаграмою) безвідмовної роботи з послідовно з'єднаними подіями безвідмовної роботи елементів системи (рис 2.2, *а*). Імовірність безвідмовної роботи такої системи визначають за формулою (на основі теореми множення сумісних і незалежних подій)

$$H_c = P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t) = \prod_{i=1}^{n} H_i(t), \tag{2.1}$$

де n – кількість елементів або підсистем; $P_i(t) = H_i(t)$ – імовірність безвідмовної роботи надійності *i*-го елемента або підсистеми.

Якщо ймовірність безвідмовної роботи *i*-го елемента підпорядковується експоненціальному закону (тобто елементи мають постійні інтенсивності відмов) і визначається формулою

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t}, \tag{2.2}$$

то з урахуванням (2.1) і (2.2) надійність системи також підпорядковується експоненціальному закону

$$H_c = P_c(t) = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t} = e^{-\lambda_c t}, \tag{2.3}$$

таким чином, при послідовному з'єднанні інтенсивності складаються

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = const \tag{2.4}$$

і надійність системи завжди є меншою за надійність найменш надійного елемента.

Середнє напрацювання системи на відмову T_c визначається як

$$T_c = \int_0^\infty H_c(t)dt = \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t} dt = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}. \tag{2.5}$$

Отриманий вираз показує, що середній час безвідмовної роботи системи з послідовним з'єднанням елементів є величиною, оберненою до суми інтенсивностей відмов окремих елементів.

Якщо всі елементи системи мають однакову функцію надійності $P_i(t) = P(t),$ то $P_c(t) = [P(t)]^n$ і $\lambda_c = n\lambda$, а для експоненціального закону $\lambda_c = n\lambda;$ $T_{0c} = T_0 / n,$ $P_c(t) = e^{-n\lambda t},$ $T_{oc} = 1/\mathrm{n}\,\lambda,$ де T_{0c} – середній час напрацювання на відмову.

Приклад 2.1. Для роботи системи з послідовним з'єднанням елементів при повному навантаженні необхідними є два різнотипні насоси, причому насоси з постійними інтенсивностями відмов λ_1 = 0,0001 год$^{-1}$ та λ_2 = 0,0002 год$^{-1}$. Обчислити середній час безвідмовної роботи системи та ймовірність її безвідмовної роботи протягом 100 год.

Розв'язання. З допомогою виразу (2.3) знайдемо ймовірність безвідмовної роботи H_c заданої системи протягом 100 год:

$$H_c(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T}, \; H_c(100) = e^{-(0{,}0001 + 0{,}0002)\cdot 100} = 0{,}9745.$$

З використанням виразу (2.5) отримаємо

$$T_{0c} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{0{,}0001 + 0{,}0002} = 3333{,}3 \; год.$$

2.2.2. Система з паралельним з'єднанням елементів

Система, що складається з незалежних елементів, зв'язаних функціонально так, що відмова системи відбувається через відмову всіх елементів, буде зображуватися структурною схемою (діаграмою) з паралельно з'єднаними подіями (рис. 2.2, б). При цьому всі елементи системи функціонують і перебувають під навантаженням, а відмови елементів є статистично незалежними.

Безвідмовність (надійність) $H_c(t) = P_c(t)$ системи з паралельним з'єднанням неоднакових елементів визначають як

$$H_c(t) = 1 - \mathop{\Pi}_{i=1}^{n}[1 - P_i(t)] = 1 - \mathop{\Pi}_{i=1}^{n} H_i(t_i), \tag{2.6}$$

де *n* – кількість паралельно з'єднаних елементів, а $P_i(t)$ – безвідмовність *i*-го елемента або підсистеми.

Якщо всі елементи мають одну й ту саму надійність $(P_i(t) = H),$ то формула (2.6) набирає вигляду

$$H_c = 1 - (1 - H)^n. \tag{2.7}$$

Таким чином, надійність системи, що складається з паралельно з'єднаних незалежних за надійністю елементів, завжди є вищою за надійність найбільш надійного елемента.

Якщо інтенсивності відмов є постійними $\lambda_c = const,$ то, використавши (2.2) і виконавши відповідну підстановку (2.6), отримаємо

$$H_c(t) = 1 - \mathop{\Pi}_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t}). \tag{2.8}$$

Отже, якщо надійність кожного елемента підпорядковується експоненціальному закону, то надійність системи цьому закону не підпорядковується.

Середній час безвідмовної роботи системи (середнє напрацювання до відмови системи) T_{0c} знаходимо інтегруванням рівняння (2.8) в інтервалі $[0, \infty]$:

$$T_{oc} = \int_0^\infty H_c(t)dt = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n]dt. \tag{2.9}$$

Проведемо заміну змінних:

$1 - e^{-\lambda t} = x;\ t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-x};\ dt = \frac{dx}{\lambda(1-x)};\ t = 0,\ \ x = 0;\ t = \infty,\ \ x = 1$, тоді

$$T_{0c} = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 (1 + x + \ldots + x^{n-1})dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}. \tag{2.10}$$

Якщо *n* є достатньо великим, то

$$T_{0c} \approx \frac{1}{\lambda}(\ln n + 0{,}577). \tag{2.11}$$

Таким чином визначають середнє напрацювання до відмови системи, яке завжди є більшим від середнього напрацювання елементів.

Приклад 2.2. Два однотипних двигуни працюють у системі з резервуванням, причому якщо один з них виходить з ладу, то інший здатний працювати при повному системному навантаженні.

Знайти середнє напрацювання на відмову й безвідмовність системи протягом 400 год (тривалість виконання завдання) при умові, що інтенсивність відмов двигунів є постійною: λ = 0,0005 год$^{-1}$, відмови двигунів є статистично незалежними, обидва двигуни починають працювати в момент часу t = 0.

Розв'язання. У випадку ідентичних елементів формула (2.8) набуває вигляду

$$H_c(t) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}.$$

Якщо $\lambda = 0{,}0005\,год^{-1}$ і $t = 400\,год,$ то

$$H_c(400) = 2e^{-0{,}0005\cdot 400} - e^{2\cdot 0{,}0005\cdot 400} = 0{,}9761,$$

а середнє напрацювання на відмову знаходимо за формулою (2.10):

$$T_{oc} = \frac{1}{\lambda}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2\cdot 0{,}0005} = 3000\,год.$$

2.2.3. Система зі змішаним з'єднанням елементів

Надійність системи, що складається з незалежних елементів зі змішаним з'єднанням (рис 2.2, *в*), визначають за надійністю двох її послідовно з'єднаних частин: першої частини, що складається з послідовно з'єднаних елементів 1, 2, 3; другої частини, що складається з паралельно з'єднаних елементів 4, 5, 6. Надійність першої частини $H_{1ч} = H_1 H_2 H_3$, а другої – $H_{2ч} = 1-(1-H_4)(1-H_5)(1-H_6)$. Надійність усієї системи визначається формулою

$$H_c = H_{1ч} H_{2ч} = H_1 H_2 H_3 [1-(1-H_4)(1-H_5)(1-H_6)].$$

Прикладом комбінованих систем є частково резервовані системи.

2.3. Резервування. Надійність систем з резервуванням

2.3.1. Загальні поняття. Загальне й поелементне резервування

Резервування – застосування додаткових засобів і (або) можливостей з метою збереження роботоздатного стану об'єкта при відмові одного або декількох його елементів.

Резервування елементів, вузлів і підсистем об'єкта є потужним засобом підвищення безвідмовності й відмовобезпечності проектованих систем літальних апаратів.

При резервуванні елементи поділяють на основні й резервні.

Основний елемент – це елемент структури об'єкта, мінімально необхідний для виконання об'єктом заданих функцій.

Резервний елемент (резерв) – елемент, призначений для забезпечення роботоздатності об'єкта в разі відмови основного елемента.

Кратність резерву – відношення кількості резервних елементів об'єкта до кількості основних елементів об'єкта, виражене дробом, який не скорочується.

Дублювання – резервування з кратністю один до одного.

Залежно від режиму, у якому перебуває резервний елемент, розрізняють: навантажений резерв, полегшений резерв і ненавантажений резерв. Ці поняття застосовуються для розмежування однотипних резервних елементів за рівнем їх безвідмовності, довговічності та збережності.

Навантажений резерв містить один або кілька резервних елементів, що перебувають у режимі основного елемента. При цьому елементи навантаженого резерва мають той самий рівень безвідмовності, довговічності і збережності, що й зарезервований ними основний елемент об'єкта. Розподіл елементів або підсистем на основні й резервні при навантаженому резерві є умовним. Наприклад, при постійному дублюванні, поки дві однакові підсистеми є роботоздатними, неможливо, безумовно, визначити, яка з них є основною, а яка резервною. У такому випадку підсистемам просто присвоюються індивідуальні порядкові номери або інші позначення (зелена, блакитна і т. д.).

Полегшений резерв містить один або кілька резервних елементів, що перебувають у менш навантаженому режимі, ніж основний. При цьому елементи полегшеного резерву мають вищий рівень безвідмовності, довговічності і збережності.

У **ненавантаженому резерві** елементи перебувають у ненавантаженому режимі до початку виконання ними функцій основного елемента. При цьому умовно вважають, що елементи, які перебувають у цьому стані, ніколи не відмовляють і не набувають граничного стану.

Розрізняють загальне й поелементне резервування.

Для оцінювання цих видів резервування розглянемо декілька випадків паралельно-послідовного з’єднання подій у структурній схемі.

1. Загальне резервування. Маємо *m* паралельних ланцюжків, кожний з яких складається з *n* однакових подій (рис. 2.3). Позначимо $P(A)=P$. Імовірність безвідмовної роботи кожного ланцюжка $P_ц = P^n$; $Q_ц = 1-P^n$, а усієї системи $P_c = 1-(1-P^n)^m = 1-Q_ц^m$. При $m \to \infty$ $P_c = 1$, тобто зі збільшенням кількості паралельних ланцюжків або елементів підвищується безвідмовність системи; при $n \to \infty$ $P_c \to 0$; при $n \to \infty$ і $m \to \infty$ $P_c \to 0$.

2. Поелементне резервування. Маємо *n* груп, кожна з яких складається з *m* паралельно з'єднаних подій (рис. 2.4). Імовірність безвідмовної роботи кожної групи $P_{гр} = 1-(1-P)^m$, а системи

$P_c = P_{гр}^n = \left[1-(1-P)^m\right]^n$. При $m \to \infty$ $P_c \to 1$; при $n \to \infty$ $P_c = 0$, а при $m \to \infty$ і $n \to \infty$ $P_c \to 1$.

Звідси можна зробити висновок, що поелементне резервування при збільшенні кількості резервних елементів швидше підвищує безвідмовність системи, ніж загальне резервування.

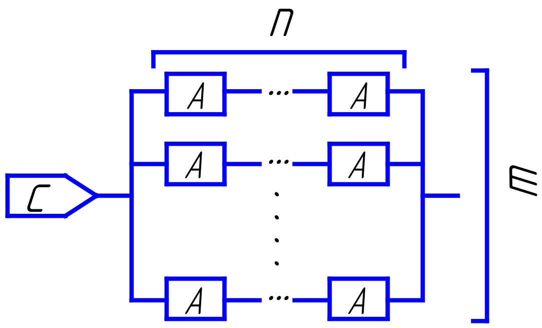


Рис. 2.3. Діаграма безвідмовної роботи *m* паралельних ланцюжків з *n* послідовних подій (загальне резервування)

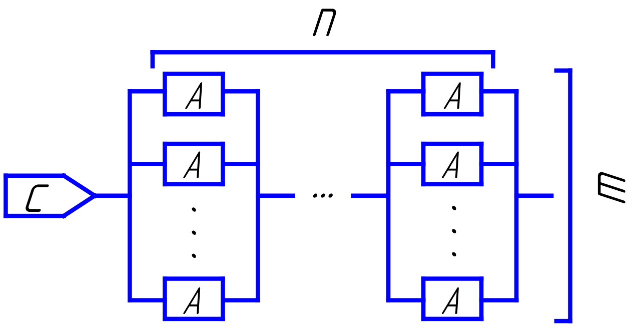


Рис. 2.4. Діаграма безвідмовної роботи *n* послідовних груп з *m* паралельних подій (поелементне резервування)

Резервування може бути структурним, функціональним, тимчасовим, навантажувальним. Так само розрізняють «гаряче» і «холодне» резервування.

«Гаряче» резервування – резервування з постійним приєднанням резервних елементів (див. рис. 2.2). Таке резервування є можливим, коли приєднання резервного елемента несуттєво змінює робочий режим пристрою. Перевагою такого резервування є постійна готовність резервного елемента. Безвідмовність схеми в цьому випадку визначається формулою $H_c = 1-(1-P_i)n$, де P_i – надійність одного пристрою, *n* – кількість резервних елементів з урахуванням основного.

У реальній практиці також використовується «холодне» резервування – резервування роздільне з заміщенням елемента, що відмовив, резервним. При цьому робочий режим основного пристрою не змінюється. Однак при такому резервуванні необхідно витрачати певний час на приєднання резервного елемента й ураховувати ймовірність відмови перемикача.

Важливі системи ЛА, відмови яких впливають на безпеку, іноді резервуються аварійними системами (системи випускання закрилків, випускання шасі, гальмування та ін. розраховуються на одноразове спрацьовування й мають більш просту структуру й меншу масу, ніж основні системи), що приєднуються тільки в разі відмови основних. Сукупність основної та аварійної підсистем з пристроєм, що містить аварійну підсистему після відмови основної, являє собою систему резервування заміщенням.

2.3.2. *Безвідмовність системи при різних видах відмов*

Різні види відмов одного й того ж елемента по-різному впливають на безвідмовність системи.

При паралельному функціональному з'єднанні двох електричних елементів такий вид відмови, як коротке замикання будь-якого з елементів, призводить до відмови всієї системи, а такий вид відмови, як обрив у будь-якому з елементів, спричиняє відмову тільки цього елемента, а система залишається роботоздатною. При послідовному функціонуванні двох елементів обидва види відмов (коротке замикання й обрив) у будь-якому елементі призводять до відмови системи.

Щоб знайти аналітичну залежність безвідмовності системи від безвідмовності елементів при різних видах їх відмов, використовують такий прийом. Кожен елемент, який має два види відмов, подають як два функціональних елементи, кожний з яких має тільки один вид відмови. Тоді, маючи систему з двох паралельно приєднаних елементів, її можна зобразити у вигляді діаграми безвідмовної роботи, що складається з паралельно (обрив) і послідовно (коротке замикання) з'єднаних подій (рис. 2.5).

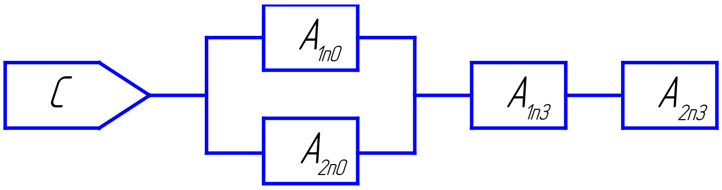


Рис. 2.5. Діаграма безвідмовної роботи системи з двох резервних елементів, схильних до відмов типу обриву й короткого замикання

2.3.3. *Ненавантажений резерв*

При резервуванні подібного роду один елемент перебуває під навантаженням, а решта *n* елементів використовується як ненавантажений резерв. На відміну від системи з паралельним з'єднанням елементів, у якій функціонують усі елементи, елементи ненавантаженого резерву не діють.

Імовірність безвідмовної роботи системи, що складається з $n+1$ елементів (один функціонує, а *n* інших перебувають у стані ненавантаженого резерву до моменту виходу з ладу навантаженого елемента), визначають як

$$H(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}. \qquad (2.12)$$

Цей вираз діє при умовах:

- перемикальний пристрій є ідеальним;
- усі елементи – ідентичні;
- інтенсивності відмов елементів є постійними;
- резервні елементи мають такі ж характеристики, що й нові;

– відмови елементів – статистично незалежні.

Приклад 2.3. Система складається з двох ідентичних пристроїв. Інтенсивності відмов обох пристроїв є постійними. Обчислити ймовірність безвідмовної роботи системи протягом 100 годин при умові, що інтенсивності відмов пристроїв $\lambda = 0{,}001\,год^{-1}$.

Розв'язання. $H = (1+\lambda t)e^{-\lambda t} = (1+0{,}001\cdot 100)e^{-0{,}1} = 0{,}9953.$

2.3.4. Система, що складається з n елементів, серед яких k справних

У такій системі використовують ще одну форму резервування, яка зазвичай реалізується в тих випадках, коли для забезпечення функціонування системи необхідно, щоб певна кількість пристроїв зберігала свою роботоздатність. Окремими випадками цієї системи при $k = n$ і $k = 1$ є відповідно системи з послідовним і паралельним з'єднанням елементів.

Імовірність безвідмовної роботи такої системи знаходять з допомогою біномного розподілу.

Імовірність безвідмовної роботи системи, що є роботоздатною при функціонуванні з незалежних і однакових елементів, має вигляд

$$H_{k/n} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i H^i (1-H)^{n-i}. \tag{2.13}$$

При постійній інтенсивності відмов *λ* елементів цей вираз набирає вигляду

$$H_{k/n}(t) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i (e^{-\lambda t})^i \frac{(1-e^{-\lambda t})^n}{(1-e^{-\lambda t})^i}. \tag{2.14}$$

Приклад 2.4. Припустимо, що $k = 2$, $n = 3$ і $\lambda = 0{,}0001\,год^{-1}$. Тоді ймовірність безвідмовної роботи системи протягом 200 годин визначаємо так:

$$H_{k/n}(200) = 3e^{-2\cdot 0{,}001\cdot 200}\,\frac{(1-e^{-0{,}001\cdot 200})^3}{(1-e^{-0{,}001\cdot 200})^2} + e^{-0{,}001\cdot 200} =$$

$$= 3e^{-2\cdot 0{,}001\cdot 200} - 2e^{-3\cdot 0{,}001\cdot 200} = 0{,}9133.$$

2.4. Метод структурно-логічних схем

Якщо при розрахунку надійності системи окрім методу з'єднань необхідно враховувати й можливі види безвідмовної роботи (або відмов), то для складання функції надійності системи застосовують метод структурно-логічних схем. У цих схемах ураховуються вид з’єднання елементів між собою (послідовне, паралельне, змішане), структура системи, особливості її роботи та можливість безвідмовного стану, і все це описується засобами математичної логіки.

Метод структурно-логічних схем полягає у створенні математичної моделі надійності реально діючої системи. Тут ураховується той факт, що реальна система може мати декілька шляхів безвідмовної роботи, ігнорувати які під час розрахунків не можна, якщо прагнути до адекватного відображення дійсності.

Для визначення принципу побудови одного з видів структурно-логічних схем розглянемо приклад з області конструкції ЛА – гаряче розділення ступенів.

Нехай два піроболти (1пб і 2пб) з'єднують дві частини ЛА (перший і другий ступені) між собою. У момент відокремлення першого ступеня від другого на піроболти подається імпульс електричного струму (+, –) для руйнування піроболтів з допомогою пороху, розташованого в тілі піроболтів (рис. 2.6). При цьому може відбутися відмова як одного, так і іншого піроболта, а також відмова обох піроболтів. Запущені двигуни другого ступеня створюють силу N, здатну з якоюсь імовірністю зруйнувати як будь-який з піроболтів, що відмовили, так і обидва піроболти, що відмовили.

Необхідно визначти, як ураховувати в розрахунку надійності розділення ступенів цю додаткову можливість руйнування піроболтів під дією зовнішніх сил. Слід зауважити, що ті ж самі піроболти є з'єднаними паралельно за надійністю, якщо розглядати їх роботу до моменту розділення ступенів, коли вони виконують функцію з'єднання елементів.

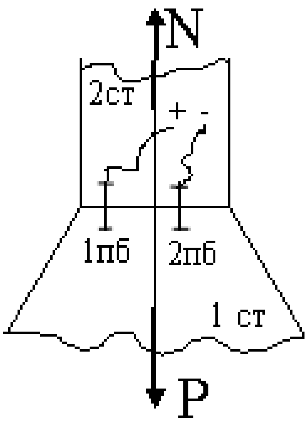


Рис. 2.6. Система розділення ступенів

Тоді для відмови системи розділення двох ступенів необхідною є відмова обох піроболтів.

Позначимо через Y_c випадкову подію, що полягає в тому, що система розділення ступенів працює безвідмовно. Через *A1* і *A2* позначимо випадкові події, які полягають в тому, що від електричного струму працюють нормально відповідно перший і другий піроболти (зруйнуються при поданні імпульсу електричного струму). Через *B1* і *B2* позначимо випадкові події, які полягають в тому, що піроболти (відповідно 1 і 2) зруйнуються під дією зовнішніх сил *P і N*.

Діаграму структурно-логічної схеми розділення ступенів зображено на рис. 2.7, де структурна частина відображає метод з'єднання за надійністю піроболтів (*A1* і *A2* – послідовне з'єднання), а логічна частина вводить у схему ще й деякі фіктивні елементи ($\bar{A}1$, $\bar{A}2$, *B1*, *B2*) і дає вказівку про метод їх з'єднання між собою і в загальній схемі.

Тоді маємо

$$Y_c = (A1 \cap A2) U (\bar{A}1 \cap A2 \cap B1) U (A1 \cap \bar{A}2 \cap B2) U (\bar{A}1 \cap \bar{A}2 \cap B1 \cap B2), \qquad (2.15)$$

де $\bar{A}1$, $\bar{A}2$ – випадкові події, які полягають у відмові відповідно першого й другого піроболтів при поданні імпульсу електричного струму.

З цієї формули отримуємо

$H_c=P(Y_c)=P(A1\cap A2)+P(\bar{A}1\cap A2\cap B1)+P(A1\cap \bar{A}2\cap B2)+P(\bar{A}1\cap \bar{A}2\cap B1\cap B2)=$
$=P(A1)P(A2|A1)+P(\bar{A}1)P(A2|\bar{A}1)P(B1|\bar{A}1\cap A2)+P(A1)P(\bar{A}2|A1)P(B2|A1\cap \bar{A}2)+$
$+P(\bar{A}1)P(\bar{A}2|\bar{A}1)P(B1|\bar{A}1\cap \bar{A}2)P(B2|\bar{A}1\cap \bar{A}2\cap B1).$

Беручи до уваги тільки незалежні з огляду на надійність елементи, знаходимо

$P(A2|A1)=P(A2)=H_2;P(A2|\bar{A}1)=P(A2)=H_2;P(B1|\bar{A}1\cap A2)=P(B1)=h_1;$
$P(\bar{A}2|A1)=P(\bar{A}2)=\bar{H}_2;$ $P(B2|A1\cap \bar{A}2)=P(B2)=h2;$ $P(\bar{A}2|A1)=P(\bar{A}2)=\bar{H}_2;$
$P(B1|\bar{A}1\cap \bar{A}2)=P(B1)=h_1;$ $P(B2|\bar{A}1\cap \bar{A}2\cap B1)=P(B2)=h_2.$

Тоді

$$H_c=H_1H_2+\bar{H}_1H_2h_1+H_1\bar{H}_2h_2+\bar{H}_1\bar{H}_2h_1h_2. \qquad (2.16)$$

Якщо $H_1=H_2=H;$ $\bar{H}_1=\bar{H}_2=\bar{H};$ $h_1=h_2=h$, то

$$H_C=H^2+2\bar{H}Hh+\bar{H}^2h^2. \qquad (2.17)$$

Ці формули дають можливість розглядати надійність системи з урахуванням різних видів нормального функціонування системи розділення ступенів.

Прикад 2.5. Нехай $H = h = 0{,}5$, тоді

$$H_c = (0{,}5)^2+2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5+(0{,}5)^2(0{,}5)^2 = 0{,}5625.$$

Як видно, у цьому випадку збільшення надійності системи буде більш ніж у два рази при урахуванні можливості функціонування системи розділення ще й від зовнішніх сил, що діють на ступені ЛА.

У зв'язку з тим, що $h < 1$, а $H^2+2\bar{H}H+\bar{H}^2=(H+\bar{H})^2 = 1$, остання формула завжди буде давати величину надійності, меншу за одиницю.

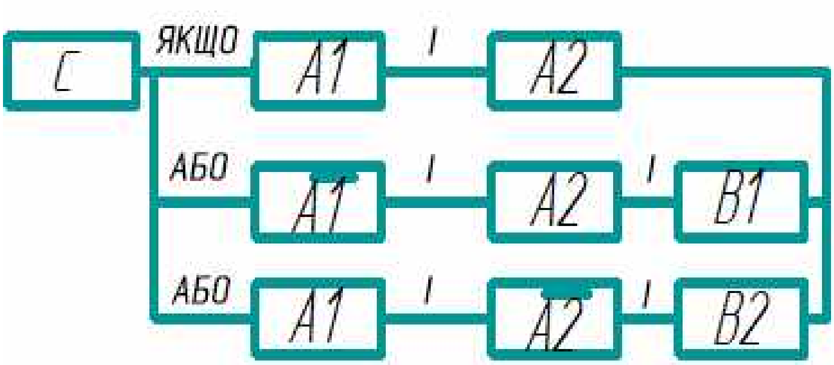


Рис. 2.7. Структурно-логічна схема системи розділення ступенів

Очевидно, що піроболти можна вважати незалежними елементами за надійністю тільки при розгляді їх роботи від подання імпульсу електричного струму. У тому ж випадку, коли робота піроболтів розглядається при дії зовнішніх сил, припущення про їх незалежність за надійністю буде занадто грубим. Справді, при руйнуванні одного піроболта під дією електричного струму або зовнішньої сили значно зміниться надійність іншого (вона зменшиться, оскільки його легше буде зруйнувати зовнішнім силам порівняно з тим випадком, коли обидва піроболти є цілими, а руйнування піроболта в цьому випадку і є його нормальною роботою).

Однак при методі структурно-логічних схем не завжди можна врахувати залежність елементів за надійністю. Для цього потрібно скористатися іншими, більш точними методами складання функцій надійності систем.

2.5. Метод фіктивних елементів при складанні функції надійності

Метод фіктивних елементів дає можливість ураховувати, як з'єднано елементи в системі, різні причини нормального функціонування системи й залежність між елементами за надійністю. Урахування цих факторів здійснюється так само, як і в методі структурно-логічних схем, за тими самими формулами і з урахуванням додаткової залежності за надійністю між елементами.

Метод фіктивних елементів має таку назву тому, що і розрахунок, і структурна схема містять фіктивні елементи, що являють собою ті або інші випадкові події. *Фіктивними елементами* називають такі елементи конструкції, які відображають ту або іншу сторону реальних елементів. У розглянутому вище прикладі такими елементами були випадкові події, одні з яких відображали здатність реальних елементів (піроболтів) спрацьовувати під дією електричного струму, інші – під дією зовнішніх навантажень. У загальному випадку *фіктивним елементом* називають реальний елемент конструкції, що розглядається лише в одному граничному стані (що має лише один вид відмов).

Якщо один і той же елемент може мати й інший вид відмов, то вводять інший фіктивний елемент, який перебуває в іншому граничному стані. Отже, у скількох граничних станах може перебувати елемент, стількома фіктивними елементами його буде замінено.

Усі фіктивні елементи в системі з'єднані послідовно, оскільки відмова будь-якого фіктивного елемента призводить до відмови реального елемента. При утворенні системи з фіктивних елементів і при додаванні до неї реальних зовнішніх сил виявляється залежність за надійністю між фіктивними елементами. Це дає змогу скласти функцію надійності системи й виконати розрахунок. На рис. 2.8 зображено схему системи, що складається з двох елементів конструкції – двох стрингерів, зварених упритул. На цю систему діє стискальна сила *N*, від якої кожен елемент може втратити місцеву стійкість, а обидва елементи разом можуть втратити загальну стійкість.

Справа від знака рівності (від реальної системи) зображено систему, що складається з трьох фіктивних елементів: 1фе і 2фе, здатних втратити місцеву стійкість, і 3фе, здатного втратити загальну стійкість.

При обчисленні ймовірності безвідмовної роботи системи необхідно обчислити умовні ймовірності, що відображають залежність за надійністю між фіктивними елементами. Визначити умовні ймовірності досить складно, оскільки необхідно знати кореляційні моменти й коефіцієнти кореляції між випадковими величинами. Вони можуть бути визначені за звичайними правилами теорії ймовірностей.

У загальному випадку коефіцієнт кореляції можна визначити теоретично за точними формулами, за наближеними формулами шляхом лінеаризації функцій, за методом статистичних випробувань (Монте – Карло) на ПЕОМ.

Наближені методи зручно застосовувати, з їх допомогою можна визначити коефіцієнт кореляції між випадковими величинами.

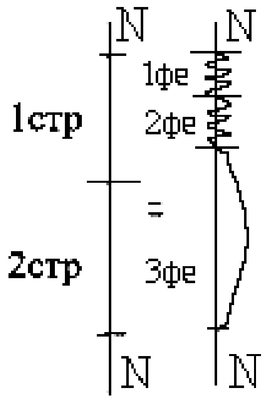


Рис. 2.8. Система з фіктивних елементів

2.6. Схемно-функціональні методи

2.6.1. Метод графів при схемі «загибелі»

Метод графів застосовують для складання функції надійності системи, коли хочуть урахувати метод з'єднання, види відмов (шляхи нормального функціонування), залежність у розумінні надійності, а також послідовність відмов елементів у системі.

Послідовність відмов елементів характеризує черговість роботи елементів у системі при схемному (функціональному) надлишку. Так, наприклад, у схемі, показаній на рис. 2.9, другий елемент перебуває в ненавантаженому резерві відносно першого й може відмовити лише після відмови першого елемента і включення в роботу.

На рис. 2.10 зображено граф станів системи, показаної на рис. 2.9.

Графом станів називають рисунок, на якому стан системи зображено прямокутниками або колами, а можливі переходи системи з одного стану в інший – стрілками, що з'єднують відповідні прямокутники (або кола). Схема «загибелі» має граф станів, зображений на рис. 2.10, коли стрілки напрямлені в одну сторону – у сторону відмови системи.

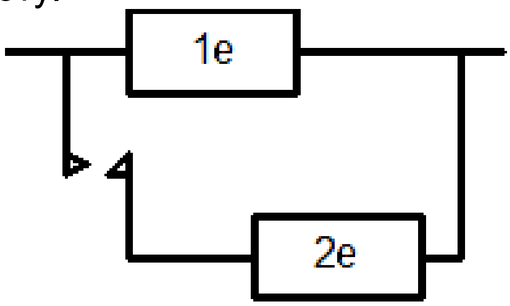


Рис. 2.9. Ненавантажене резервування

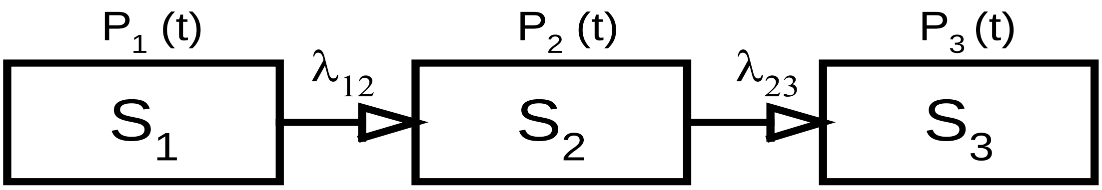


Рис. 2.10. Граф станів системи при схемі «загибелі»

У прикладі, показаному на рис. 2.10, система може перебувати в таких станах: S_1 – працює основний елемент (1е); S_2 – основний елемент відмовив, працює резервний елемент (2е); S_3 – резервний елемент відмовив, не працює вся система.

При розрахунку надійності системи припускають, що на елемент діє найпростіший потік відмов з інтенсивністю λ. Елемент відмовляє в момент, коли відбувається перша подія цього потоку.

Потоком подій називають послідовність однорідних подій, що відбувається одна за одною у випадкові моменти часу.

Послідовність випадкових моментів часу, у які відбуваються відмови, являє собою найпростіший потік подій, а інтервали між подіями є незалежними випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ ($t>0$).

Потік подій називають *найпростішим* (або стаціонарним пуассонівським), якщо він є стаціонарним, без наслідків, ординарним.

Потік подій називають *стаціонарним*, якщо ймовірність попадання тієї або іншої кількості подій у проміжок часу Т залежить тільки від величини проміжку і не залежить від того, де на осі t розташовується цей проміжок.

Потік подій називають потоком *без наслідків*, якщо для будь-яких неперетинних проміжків часу кількість подій, що потрапляють в один із них, не залежить від того, скільки подій потрапило в інший (або інші, якщо розглядати більше двох проміжків).

Потік подій називають *ординарним*, якщо ймовірність потрапляння в елементарний проміжок двох або більше подій є дуже малою порівняно з імовірністю потрапляння однієї події. Таким чином, маємо ряд дискретних станів $S_1, \ldots, S_n$. Перехід системи зі стану у стан може відбуватися в будь-який момент часу (граф стану системи показано на рис. 2.10).

Позначимо через $p_i(t)$ імовірність того, що в момент t система S буде перебувати у стані S_i $(i = 1,\ldots,n)$. Очевидно, що для будь-якого моменту t сума ймовірностей станів $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$, оскільки події, що полягають в тому, що в момент t система перебуває у стані $S_1,\ldots,S_n$, є несумісними й утворюють повну групу подій.

Імовірність переходу системи зі стану у стан точно в момент t буде дорівнювати нулю (так само, як імовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини). Розглянемо густину ймовірності переходу λ_{ij}. Якщо елемент може відмовити лише один раз (той, що не відновлюється), то при описі процесу, що залежить від його функціонування, можна користуватися схемою марковського випадкового процесу. При таких припущеннях надійність системи визначається системою диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів системи.

Система диференціальних рівнянь Колмогорова будується за певними правилами:

- рівнянь стільки, скільки станів має система;
- у лівій частині кожного рівняння записується похідна від імовірності стану;
- права частина містить стільки членів, скільки стрілок зв'язано з цим станом. Якщо стрілка має напрямок «зі стану», то відповідний член має знак «мінус», якщо «у стан», то – знак «плюс»;
- кожен член дорівнює добутку густини ймовірності переходу, що відповідає цій стрілці, та ймовірності того стану, з якого виходить стрілка.

Це правило складання диференціальних рівнянь є загальним і правильним для марковського ланцюга. З його допомогою можна записати диференціальні рівняння для ймовірностей станів безпосередньо за розміченим графом станів.

Система рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів за розміченим графом станів, показаним на рис. 2.10, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} p_1(t); \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{23} p_2(t) + \lambda_{12} p_1(t); \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{23} p_2(t). \end{cases} \qquad (2.18)$$

Інтегрування цієї системи рівнянь дає ймовірності станів як функції часу. Початкові умови беруть залежно від того, яким був початковий стан системи S. Якщо в початковий момент часу система перебувала у стані S_1, то треба брати початкові умови: при $t=0$ $p_1(0)=1$; $p_2(0)=p_3(0)=0$. Припустимо, що відомо густини ймовірності переходу λ_{ij} для всіх пар станів S_i, S_j. Побудуємо граф станів системи (див. рис. 2.10) і над кожною стрілкою проставимо відповідну густину ймовірності переходу $p_i(t)$. Такий граф називають розміченим графом подій системи *S.*

Тоді систему розв'яжемо так. З першого рівняння, розділивши змінні й використавши початкові умови, отримаємо $p_1(t) = e^{-\lambda_{12} t}$.

З другого рівняння отримаємо неоднорідне лінійне рівняння

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} t} - \lambda_{23} p_2(t) \text{ або } \frac{dp_2(t)}{dt} + \lambda_{23} p_2(t) = \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} t}.$$

Знайдемо інтеграл однорідного рівняння: $\dfrac{dp_2(t)}{dt} + \lambda_{23} p_2(t) = 0.$

Розділимо змінні: $\dfrac{dp_2(t)}{p_2(t)} + \lambda_{23} dt = 0$. Звідси знайдемо

$\ln p_2(t) + \lambda_{23} t = c_1$, $\ln p_2(t) = c_1 - \lambda_{23} t$ і $p_2(t) = e^{c_1} e^{-\lambda_{23} t} = c_2 e^{-\lambda_{23} t}$, де $c_2 = e^{c_1}$.

Це загальний розв'язок однорідного рівняння. Змінимо константу: $C_2=U$. Отримаємо $p_2(t)=C_2e^{-\lambda_{23}t}$, $p_2^{'}(t)=U^{'}e^{-\lambda_{23}t}+U(-\lambda_{23})e^{-\lambda_{23}t}$ або $\frac{dp_2(t)}{dt}=\frac{dU}{dt}e^{-\lambda_{23}t}-U\lambda_{23}e^{-\lambda_{23}t}$. Підставимо це значення в загальне диференціальне рівняння для $p_2(t)$: $\frac{dU}{dt}e^{-\lambda_{23}t}-U\lambda_{23}e^{-\lambda_{23}t}+\lambda_{23}Ue^{-\lambda_{23}t}=\lambda_{12}e^{-\lambda_{23}t}$. Отримаємо $\frac{dU}{dt}e^{-\lambda_{23}t}=\lambda_{12}e^{-\lambda_{12}t}$ або $\frac{dU}{dt}=\lambda_{12}e^{(-\lambda_{12}+\lambda_{23})t}$, розділимо змінні: $dU=\lambda_{12}e^{(-\lambda_{12}+\lambda_{23})t}dt$. Отже, $U=\frac{\lambda_{12}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}e^{(-\lambda_{12}+\lambda_{23})t}+c_3$. Це значення підставимо у вираз для $p_2(t)$: $p_2(t)=Ue^{-\lambda_{23}t}=(\frac{\lambda_{12}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}e^{(-\lambda_{12}+\lambda_{23})t}+c_3)e^{-\lambda_{23}t}$. Використаємо початкові умови для знаходження C_3 при t=0, $p_2(0)$=0, $C_3=-\frac{\lambda_{12}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}$ й остаточно запишемо

$$p_2(t)=\left(\frac{\lambda_{12}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}e^{(-\lambda_{12}+\lambda_{23})t}-\frac{\lambda_{12}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}\right)e^{-\lambda_{23}t}=\frac{\lambda_{12}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}\left(e^{-\lambda_{12}t}-e^{-\lambda_{23}t}\right).$$

Після того як знайдено функції $p_1(t)$ і $p_2(t)$, для визначення функції $p_3(t)$ можна не інтегрувати останнє рівняння системи (2.18), а знайти її з умови $p_3(t)=1-(p_1(t)+p_2(t))$. Надійність системи $P_c(t)$ дорівнює сумі всіх станів, при яких система працює:

$$P_c(t)=p_1(t)+p_2(t)=e^{-\lambda_{12}t}+\frac{\lambda_{12}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}e^{-\lambda_{12}t}-\frac{\lambda_{12}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}e^{-\lambda_{23}t}=$$

$$=\frac{\lambda_{23}e^{-\lambda_{12}t}-\lambda_{12}e^{-\lambda_{23}}}{-\lambda_{12}+\lambda_{23}}, \qquad (2.19)$$

або, що те ж саме, $P_c(t)=1-p_3(t)$.

Для ненавантаженого резерву $H_c(t)=P_c(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$.

2.6.2. Метод таблиць

Суть методу таблиць полягає в тому, що проводиться послідовний аналіз надійності роботи виробу з оцінюванням імовірності безвідмовного виконання заданих функцій в умовах появи різних можливих відмов окремих елементів, агрегатів або функціональних систем.

Порядок аналізу й розрахунку надійності:

1. Розбиття виробу на функціональні частини й визначення елементарних (етапних) функцій, які виконуються виробом.

2. Визначення основних елементів функціональних частин і типів (видів) можливих відмов окремих елементів.

3. Визначення послідовних етапів виконання польотного завдання й змінення режимів роботи елементів підсистеми на різних етапах (зліт, набір висоти, маршрут, зниження, приземлення).

4. Визначення впливу (наслідків) відмов елементів на успішне виконання заданих функцій у формі значень коефіцієнтів значущості: 1 – етап (функція) виконується при відмові певного елемента; 0 – етап (функція) не виконується при відмові певного елемента – оцінювання безвідмовної роботи виробу.

5. Складання таблиці різних станів (несумісних подій) окремих елементів, тобто таблиці коефіцієнтів значущості при кожній відмові кожного елемента і на всіх етапах польоту.

6. Складання розрахункових алгебричних рівнянь для аналізу й кількісного визначення ймовірностей виконання окремих функцій або безвідмовної роботи на окремих етапах.

7. Підбір та аналіз статистичних характеристик надійності елементів, необхідних для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи або ймовірності виконання окремих функцій і завдання в цілому.

Вхідні дані для складання формул для розрахунку ймовірностей безвідмовної роботи виробу:

– n – кількість функціональних груп;
– m – кількість агрегатів, підсистем або елементів у функціональній групі;
– S – кількість функцій (або етапів), які виконуються виробом;
– k – кількість можливих видів відмов певної підсистеми, агрегатів або елементів.

Уведемо також такі позначення:

– i – поточне значення виконуваної функції або номера етапу польоту;
– j – поточне значення кількості підсистем, агрегатів або елементів;
– v – поточне значення кількості можливих видів відмов.

У таблиці станів і виконання функцій (табл. 2.1) фіксується вплив кожного виду відмови підсистеми або агрегата (елемента) на виконання функцій кожного етапу польоту. При наявності схемно-функціональної збитковості (відмова підсистеми, агрегата або елемента не спричиняє зриву виконання певної функції або певного етапу польоту) проставляється значення коефіцієнта, що дорівнює одиниці, при відсутності збитковості проставляється нуль.

Імовірність виконання окремих функцій (або етапу польоту) за час t на основі теореми додавання несумісних подій і множення ймовірностей незалежних подій для функціональної групи з функціональною надмірністю з урахуванням можливих видів відмов і взятих коефіцієнтів значущості визначають за формулою

$$P_i(t_i) = \prod_{j=1}^{m} P_j(t_i)\left[1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{\sum_{\upsilon=1}^{k_j} q_{j\upsilon}}{P_j(t_i)}\right], \qquad (2.20)$$

де $P_j(t_i)$ – імовірність безвідмовної роботи j-ї підсистеми, агрегата або елемента за час i-го етапу польоту або при виконанні i-ї функції;

$q_{j\upsilon}(t_i)$ – імовірність відмови υ-го виду j-ї підсистеми, агрегата за час t_i при виконанні функції i.

У формулі (2.20) добуток $P_j(t_i)$ береться для всіх підсистем або агрегатів основної групи, а підсумовування проводиться тільки по тих рядках видів відмов ($1,2,\ldots\upsilon\ldots k_j$), де для функції i у вертикальному стовпці проставлено одиницю.

Таблиця 2.1

Таблиця станів і виконання функцій

Функціональна група	Підсистема (агрегат)	Види (типи) відмов	Виконувані функції						Примітки
			1	2	…	i	…	S	
Група 1	1	1-го виду	0	0		0		0	
		2-го виду	1	0		0		0	
	2	1-го виду	0	0		1		0	
	.	.							
	.	.							
	.	.							
	j	1-го виду	1	1		0		1	
		.							
	.								
	.	v	1	1		0		1	
		k							
			1	0		1		0	
	m	1-го виду							
			1	1		0		1	
. . . Група n									

Таким чином, особливістю методу таблиць є необхідність правильного визначення функціональних груп, підсистем, агрегатів або елементів. Особливо важливо правильно подати функціональні зв'язки між елементами виробу й виконуваними функціями, від цього залежить точність урахування всіх факторів в алгебричних рівняннях, що складаються для кількісного аналізу надійності виробу.

2.6.3. Складання функції надійності системи методом траєкторій

Якщо потрібно врахувати в функції надійності крім усього розглянутого ще й час відмов елементів, то використовується метод траєкторій.

Питання врахування часу відмов елементів виникає в багатьох задачах.

При розгляді завдань, пов'язаних з полегшеним резервуванням, недостатньо вводити надійність системи й елементів для одного заздалегідь фіксованого значення часу *t*, необхідно враховувати весь випадковий процес функціонування системи, тобто траєкторію процесу. *Траєкторією процесу* називають послідовність переходу системи з одного стану в інший.

Так, нехай, наприклад, система складається з паралельно приєднаних елементів 1е і 2е (основного й резервного) (рис. 2.11).

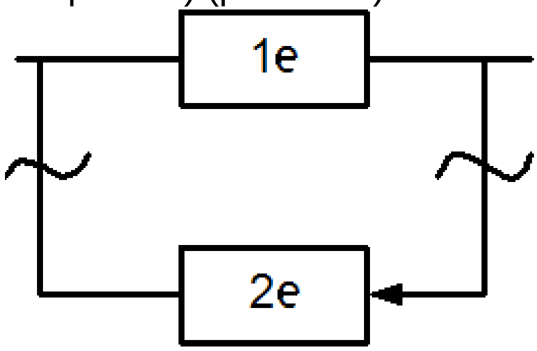


Рис. 2.11. Полегшений резерв

Інтенсивність потоку відмов першого елемента дорівнює $\lambda_1(t)$. При відмові першого елемента відбувається автоматичне й безвідмовне перемикання на резервний елемент (надійність перемикача $p_п = 1$).

Інтенсивність потоку відмов резервного елемента до його включення в роботу – $\lambda_2(t)$ (елемент працює в полегшеному режимі і $\lambda_2(t) < \lambda_1(t)$). Після його включення в роботу в момент відмови першого елемента інтенсивність миттєво збільшується (рис. 2.12) і дорівнює $\lambda_2^*(t/t_1)$, яка залежить не тільки від поточного часу *t*, а й від того терміну t_1, протягом якого елемент працював у полегшеному режимі.

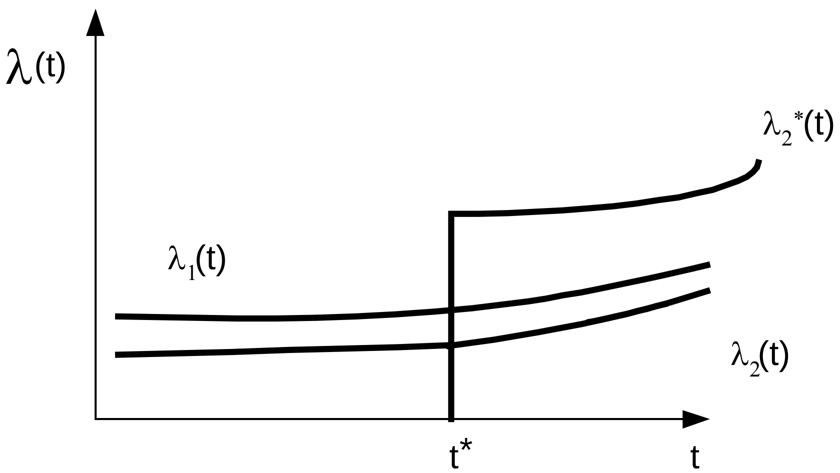


Рис. 2.12. Можлива залежність інтенсивності потоку відмов другого елемента від часу

Тоді надійність системи $P(t)$ можна визначити таким методом.

Розглянемо сукупність двох випадкових величин: T_1 – момент відмови основного елемента; T_2 – момент відмови резервного елемента.

Нехай подія A – безвідмовна робота системи до моменту t – полягає в тому, що хоча б одна з величин набуде значення, більшого від t (хоча б один елемент буде працювати до моменту t). Імовірність протилежної події – відмова системи до моменту t $P\left(\bar{A}\right)=1-P(A)=P(T_1<t;T_2<t)$. Знайдемо загальну щільність розподілу випадкових величин T_1 і T_2, позначивши її $f(t_1,t_2)$. Випадкові величини T_1 і T_2 є залежними:

$$f(t_1,t_2)=f_1(t_1)\,f_2(t_2/t_1),$$

де $f_1(t_1)$ – безумовна щільність розподілу T_1;

$f_2(t_2/t_1)$ – умовна щільність розподілу T_2 (за умови, що величина T_1 набула значення t_1).

Знайдемо обидві щільності. Маємо

$$f_1(t_1)=\lambda_1(t)P_1(t_1),$$

де $P_1(t_1)$ – надійність першого елемента (1е),

$$P_1(t_1)=e^{-\int_0^{t_1}\lambda_1(t)dt}.$$

Звідси $f_1(t_1)=\lambda_1(t_1)e^{-\int_0^{t_1}\lambda_1(t)dt}$.

Знайдемо умовну щільність $f_2(t_2/t_1)$. Умовна інтенсивність відмов резервного елемента при $T_1=t_1$:

$$\lambda_2(t_2/t_1)=\begin{cases}\lambda_2(t_2) \quad при \quad t_2<t_1,\\ \lambda_2(t_2/t_1) \quad при \quad t_2>t_1.\end{cases}$$

При цій інтенсивності відмови знайдемо умовну щільність розподілу часу безвідмовної роботи резервного елемента:

$$f_2(t_2/t_1)=\begin{cases}\lambda_2(t_2)e^{-\int_0^{t_2}\lambda_2(t)dt} \quad при \quad t_2<t_1,\\ \lambda_2(t_2/t_1)e^{-\int_0^{t_1}\lambda_2(t)dt-\int_{t_1}^{t_2}\lambda_2(t/t_1)dt} \quad при \quad t_2>t_1.\end{cases} \tag{2.21}$$

Таким чином, загальна щільність розподілу системи випадкових величин T_1 і T_2 визначається формулою

$$f(t_1,t_2) = f_1(t_1)\, f(t_2/t_1) =$$

$$= \begin{cases} \lambda_1(t_1)\lambda_2(t_2) e^{-\int_0^{t_1}\lambda_1(t)dt - \int_0^{t_2}\lambda_2(t)dt} & при \quad t_2 < t_1, \\ \lambda_1(t_1)\lambda_2(t_2/t_1) e^{-\int_0^{t_1}\lambda_1(t)dt - \int_0^{t_1}\lambda_2(t)dt - \int_{t_1}^{t_2}\lambda_2(t/t_1)dt} & при \quad t_2 > t_1. \end{cases} \qquad (2.22)$$

Імовірність відмови системи до моменту t

$$P(\bar{A}) = P(T_1 < t, T_2 < t) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \,,$$

звідки надійність системи

$$P(t) = P(A) = 1 - \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2. \qquad (2.23)$$

Під час обчислення за формулами (2.21)–(2.23) необхідно мати на увазі, що вираз $f(t_1,t_2)$ має неоднаковий вигляд з різних сторін від прямої $t_2=t_1$ – бісектриси першого координатного кута (рис. 2.13). Області інтегрування рівняння (2.22) позначено цифрами. В області 1 функція $f(t_1,t_2)$ виражається першою з формул (2.22), а в області 2 – другою.

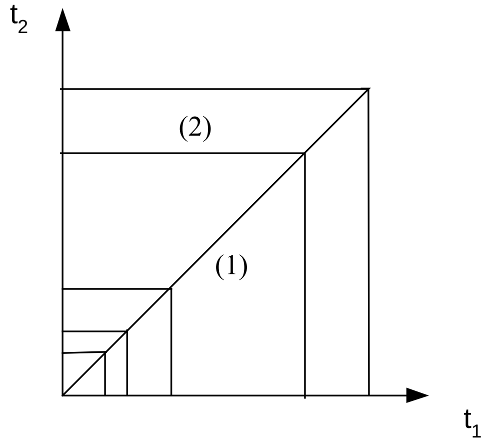


Рис. 2.13. Області інтегрування

Отже,

$$P(t) = 1 - \left\{ \begin{aligned} &\int\int_{(1)} \lambda_1(t)\lambda_2(t) e^{-\int_0^{t_1}\lambda_1(t)dt - \int_0^{t_2}\lambda_2(t)dt}\, dt_1 dt_2 + \\ &+ \iint_{(2)} \lambda_1(t_1)\lambda_2(t_2/t_1) e^{-\int_0^{t_1}\lambda_1(t)dt - \int_0^{t_1}\lambda_2(t)dt - \int_{t1}^{t_2}\lambda_2(t_2/t_1)dt}\, dt_1 dt_2 \end{aligned} \right\}. \qquad (2.24)$$

При заданих конкретних функціях $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ і $\lambda_2(t_2/t_1)$ інтеграл (2.24) можна обчислити в найпростіших випадках аналітично, найчастіше – чисельно.

2.6.4. Метод матриць

У методі матриць при складанні функції надійності системи враховуються метод з'єднання елементів, шляхи нормального функціонування системи, залежність за надійністю між елементами, черговість відмов і час відмов. Для утворення функції надійності системи на основі цього методу креслять структурну схему (діаграму), записують матрицю шляхів нормального функціонування системи на інтервалі *(0, t)* (матриця станів), визначають залежність між елементами за надійністю, указують черговість відмов і час відмов елементів і за формулами розраховують надійність системи.

На конкретному прикладі розглянемо застосування цього методу.

Приклад 2.6. Нехай є система зі змішаним з'єднанням елементів (рис. 2.14). Якби елементи були незалежними за надійністю, то функцію надійності системи було б легко скласти за методом структурних схем і розрахувати її.

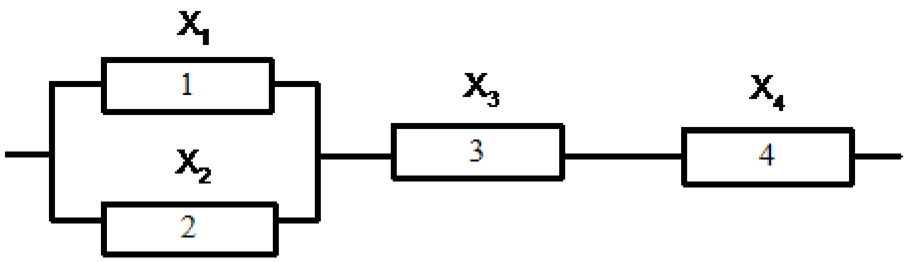


Рис. 2.14. Система зі змішаним з'єднанням елементів

Припустимо, що між елементами існує така залежність, що при відмові першого елемента в момент часу τ_1 або другого в момент часу τ_2 інтенсивності відмов інших елементів стрибкоподібно змінюються так, що інтенсивності відмов матимуть значення

$$\lambda_i(t),\ i = 1,\ldots,4;\ \lambda_i^{(1)}(t/\tau_1),\ i = 2, 3, 4;\ \lambda_i^{(2)}(t/\tau_2),\ i = 1, 3, 4,$$

де індекс t має значення часу, тобто інтенсивності відмов змінюються в часі; $\lambda_i^{(1)}(t/\tau_1)$ – інтенсивність відмов інших елементів при відмові першого елемента в момент часу τ_1; $\lambda_i^{(2)}(t/\tau_2)$ – інтенсивність відмов інших елементів при відмові другого елемента в момент часу τ_2.

Черговість відмов елементів визначається співвідношенням часу τ_1 і τ_2 . Тепер систему, зображену на рис. 2.14, будемо розглядати як таку, що має три шляхи нормального функціонування: усі елементи працюють безвідмовно; відмовив перший елемент, але інші працюють безвідмовно; відмовив другий елемент, але перший, третій і четвертий працюють нормально. Ці шляхи нормального функціонування системи можна зобразити у вигляді матриці сприятливих станів (матриці станів)

$$H_0 : X_1 X_2 X_3 X_4; H_1 : \overline{X}_1 X_2 X_3 X_4; H_2 : X_1 \overline{X}_2 X_3 X_4,$$

де H_0 – стан системи нульового порядку; H_1 – стан системи першого порядку; H_2 – стан системи другого порядку; X_i – випадкова подія, що полягає в безвідмовній роботі *і*-го элемента; $\overline{X}_i$ – випадкова подія, що полягає у відмові *і*-го елемента. Момент появи події $\overline{X}_i$ є випадковим, його позначають через T_i. Тоді стан системи буде визначатися вектором $\{T_i\}$, $i = 1,\ldots,k$, що має *k*-вимірну густину ймовірності $f(\tau_1,\ldots,\tau_2)$, де k – кількість элементів у системі (у цьому випадку 4).

Таким чином, матриця сприятливих станів являє собою набір шляхів нормального функціонування системи.

Щоб отримати розрахункові формули, уводять дві гіпотези.

Перша гіпотеза характеризує той факт, що надійність системи на інтервалі застосування (0, *t*) залежить від моментів "загибелі" елементів на цьому інтервалі і не залежить від можливих відмов у майбутньому інших елементів. Ця властивість системи правильною є не завжди, і тому її можна розглядати тільки як гіпотезу.

Друга гіпотеза характеризує те, що доти, доки значення параметрів залишаються в межах допусків, залежності між ними немає і, отже, немає залежності між їх відмовами. Якщо значення одного з параметрів вийшли за допустимі (сталася відмова елемента), то ця подія впливає на ймовірність відмови інших елементів. При цьому умовні ймовірності відмови елементів, що залишилися на інтервалі часу до появи наступних відмов залежать від попереднього моменту відмови та, отже, від поточного моменту часу.

Таким чином, у нових умовах, створених відмовою елемента, що залишився, елементи відповідно до гіпотези не впливають один на одного, тобто час їх "життя" є статистично незалежним до моменту відмови наступного елемента.

При відмові другого елемента умовна ймовірність відмови інших елементів уже залежить від двох моментів (від моменту відмови першого й другого елементів). В обох випадках повністю зберігається основна закономірність – стрибкоподібна поява залежності в моменти переходу системи з одного стану в інший.

Матричний метод передбачає розбиття *k*-вимірного простору, у якому визначено випадковий вектор $\{T_i\}$, $i = 1,\ldots,k$ на $M = \sum_{i=0}^{k} A_k^i$ неперетинних підмножин, де операція розміщення A_k^i при розбитті *k*-вимірного простору дає змогу вивчати такі системи, надійність яких залежить від порядку зминення в часі станів вхідних параметрів.

Таке розбиття в загальному випадку *k* елементів визначається нерівностями:

$$D_0\text{:}\ \ \tau_1 > t,\ \tau_2 > t,\ \ldots\ldots\ldots\ \tau_k > t;$$
$$D_1\text{:}\ \ \tau_1 \le t,\ \tau_2 > t,\ \ldots\ldots\ldots\ \tau_k > t;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_\alpha\text{:}\ \ \tau_1 > t,\ \ldots\ldots\ \tau_\alpha \le t,\ \ldots\ldots\ \tau_k > t;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.25}$$
$$D_{\alpha\beta}\text{:}\ \tau_1 > t,\ \ldots\ldots\ \tau_\alpha \le \tau_\beta \le t,\ \ldots\ \tau_k > t;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_{12\ldots,k}\text{:}\ \tau_1 \le t_2 \le t_3 \le,\ \ldots\ldots\ldots \le \tau_k \le t;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_{k\ldots21}\text{:}\ \tau_k \le t_{k-1} \le t_{k-2} \le,\ \ldots \le \tau_2 \le \tau_1 \le t.$$

Повна матриця несумісних станів системи має вигляд

$$\begin{bmatrix} H_0 & X_1\ X_2 \cdots & & X_k \\ H_1 & \overline{X}_1\ X_2 \cdots & & X_k \\ H_k & X_1\ X_2 \cdots & & \overline{X}_k \\ H_{\alpha\beta} & X_1\ X_2 \cdots & \overline{X}_\alpha\ \overline{X}_\beta & X_k \\ \cdots & & & \\ H_{12\cdots k} & \overline{X}_1\ \overline{X}_2 \cdots & & \overline{X}_k \\ \cdots & & & \\ H_{k\cdots 21} & \overline{X}_k\ \overline{X}_{k-1} \cdots & & \overline{X}_1 \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Формули для окремих станів запишемо як

$$P(H_0) = \int_t^\infty .\ \ .\ \ .\int_t^\infty f(\tau_1,...,\tau_k)d\tau_1...d\tau_k\ ; \tag{2.27а}$$

$$P(H_\alpha) = \int_0^t .\ \ .\ \ .\int_t^\infty .\ \ .\ \ .\int_t^\infty f(\tau_1,...,\tau_k)d\tau_\alpha d\tau_1...d\tau_k\ , \tag{2.27б}$$

де інтегрування за змінною τ_α ведеться в межах від 0 до t;

$$P(H_{\alpha,\beta}) = \int_0^t \int_{\tau_\alpha}^t \int_t^\infty .\ \ .\ \ .\int_t^\infty f(\tau_1,...,\tau_k)d\tau_\alpha d\tau_\beta d\tau_1...d\tau_k\ , \tag{2.27в}$$

де інтегрування за змінною τ_α ведеться в межах від 0 до t, а за τ_β – у межах від τ_α до t.

Надійність системи оцінюють за формулою

$$H_c = P(H_0) + \sum_\alpha P(H_\alpha) + \sum_{\alpha,\beta} P(H_{\alpha,\beta}) + \ldots, \tag{2.28}$$

що випливає з формули

$$H_c = \sum_{j=0}^{M} \int_{(D_j)} ... \int f(\tau_1,...,\tau_k)d\tau_1...d\tau_k\ ,$$

яка, своєю чергою, є наслідком співвідношення

$$H_c = \int_D^{\infty} ... \int f(\tau_1, ..., \tau_k) d\tau_1 ... d\tau_k .$$

Застосування двох розглянутих гіпотез дає змогу шляхом перетворень позбутися *k*-кратних інтегралів й отримати такі вирази:

$$P(H_0) = e^{-\int_0^k \sum_{i=1}^k \lambda(\nu) d\nu}; \tag{2.29}$$

$$P(H_\alpha) = \int_0^t \lambda_\alpha(\tau_\alpha) \exp[-\int_0^{\tau_\alpha} \sum_{i=1}^k \lambda_i(\nu) d\nu - \int_{\tau_\alpha}^t \sum_{i=1}^k \lambda_i^{(\alpha)}(\nu / \tau_\alpha) d\nu] d\tau_\alpha \text{ при } i \neq \alpha.$$

Розрахункові формули набувають вигляду

$$H_c = P_0(t) + P_1(t) + P_2(t); \quad P_0(t) = \exp[-\int_0^t \sum_{i=1}^4 \lambda_i(\nu) d\nu];$$

$$P_1(t) = \int_0^t \lambda_1(\tau_1) \exp[-\int_0^{\tau_1} \sum_{i=1}^4 \lambda_i(\nu) d\nu - \int_{\tau_1}^t \sum_{i=2}^4 \lambda_i(\nu / \tau_1) d\nu] d\tau_1;$$

$$P_2(t) = \int_0^t \lambda_2(\tau_2) \exp[-\int_0^{\tau 2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i(\nu) d\nu - \int_{\tau 2}^t (\lambda_1^{(2)}(\nu / \tau_2) + \lambda_3^{(2)}(\nu / \tau_2) + \lambda_4^{(2)}(\nu / \tau_2)) d\nu] d\tau_2.$$

Ці формули дають можливість розрахувати надійність системи методом матриць.

3. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ Й АНАЛІЗУ КІЛЬКІСНИХ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ

3.1. Статистичний контроль параметрів розподілу випадкової величини

3.1.1. Принцип статистичного контролю параметрів розподілу випадкової величини

Розглянуті раніше ймовірнісні характеристики є мірою властивості будь-якої множини. При статистичному контролі таку множину розглядають як *генеральну сукупність.*

Іноді вважають, що генеральна сукупність є нескінченною, проте в багатьох практичних завданнях доцільно виділити скінченну генеральну сукупність. Уважаємо, що є випадкова величина *x* з вихідним законом розподілу *F(x)*, який визначається вектором числових характеристик θ_x (в окремому випадку θ_x – параметр, наприклад, для експоненціального розподілу $\theta_x = \lambda$, де $\lambda = \dfrac{1}{m_x}$, а для нормального розподілу $\theta_x = \{m_x, \sigma_x\}$). Для **статистичного оцінювання** невідомого параметра θ_x проводять *репрезентативну* (таку, що добре відображає генеральну сукупність) вибірку $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Наприклад: припустимо, що для оцінювання величини показника надійності *P(t)* проводять пуски десяти з 1000 літальних апаратів. Результати десяти пусків являють собою вибірку, і якщо умови експерименту повно відображають оцінювані властивості генеральної сукупності, то вибірку можна вважати репрезентативною.

За даними вибірки можна отримати найкращу **статистичну оцінку** θ_x^* параметра θ_x. Оскільки вибірка (результати випробувань) має випадковий характер, то і статистична оцінка θ_x^* – випадкова. Як будь-яка випадкова величина, вона може характеризуватися законом розподілу $F^*(\theta_x^*)$ і числовими характеристиками цього закону (математичним сподіванням $m(\theta_x^*)$, дисперсією $D(\theta_x^*)$ і т. д.). Відомо, що розрахункові формули для отримання оцінок θ_x^* залежатимуть від вихідного розподілу $F(x)$, вибірки $(x_1, x_2, ..., x_n)$, а також вимог, що ставляться до оцінки.

Зазвичай прагнуть отримати незміщені ефективні та ймовірні оцінки. Для незміщеної оцінки її математичне сподівання є істинним значенням оцінюваного параметра:

$$m(\theta_x *) = \theta_x. \tag{3.1}$$

Ефективна оцінка для цього обсягу вибірки має мінімальну дисперсію

$$D(\theta_x *) = \min. \tag{3.2}$$

Імовірна оцінка θ_x^* зі збільшенням обсягу вибірки n збігається за ймовірністю з істинним значенням θ_x. Інакше це можна сформулювати так. Оцінка θ_x^* є ймовірною, якщо для будь-яких скільки завгодно малих додатних чисел ε і η існує таке n_1, що при $n >> n_1$ виконується нерівність

$$Вер\{ |\theta_x^* - \theta_x| < \varepsilon\} > 1 - \eta \ (n > n_1). \tag{3.3}$$

Таким чином, зі збільшенням обсягу вибірки n значення густини ймовірності $f(\theta_X^*, n)$ наближається до істинного значення $\theta_X = m(\theta_X *)$, тобто дисперсія оцінки $D(\theta_X *)$ зі збільшенням обсягу вибірки наближається до нуля (рис. 3.1). Коли випробувано всю генеральну сукупність, випадкова величина θ_x^* перетворюється на невипадкову (детерміновану) θ_x. Таким чином, після випробування всієї генеральної сукупності можна абсолютно точно визначити її властивості. У реальних умовах вибірка є істотно меншою від генеральної, тому необхідно визначити достовірність оцінки, для чого найчастіше знаходять *довірчий інтервал*, або *довірчі межі*, які з високою *довірчою ймовірністю*, або *коефіцієнтом довіри*, покривають невідоме істинне значення шуканого параметра.

Достовірність оцінки визначається або двостороннім *довірчим інтервалом*, що містить *нижню* $\theta_{xн}^*$ і *верхню* $\theta_{xв}^*$ *довірчі межі*, або *одностороннім*, що містить нижню $(\theta_{x1н}^*, \infty)$ (рис. 3.2, *а*) або верхню $(-\infty, \theta_{xв}^*)$ (рис. 3.2, *б*) *довірчу межу*. Довірчому інтервалу $(\theta_{xн}^*, \theta_{xв}^*)$ (рис. 3.2, *в*) відповідає довірча ймовірність γ, а односторонньому нижньому $(\theta_{x1н}^*, \infty)$ або верхньому $(-\infty, \theta_{xв}^*)$ довірчому інтервалу – ймовірність γ_1 або γ_2. Тому

$$(1-\gamma_1) + (1-\gamma_2) = 1-\gamma \tag{3.4a}$$

або

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - 1. \tag{3.4б}$$

При статистичному оцінюванні довірчі межі $\theta_{xн}{}^*$ і $\theta_{xв}{}^*$ є випадковими, оскільки вони відкладаються від випадкової оцінки $\theta_x{}^*$:

$$\theta_{xH,B}{}^* = \theta_x{}^* \mp \Delta\theta_x(\gamma, \eta). \tag{3.5}$$

Величина $\Delta\theta_x$ залежить від закону розподілу оцінки $f(\theta_x{}^*, n)$, обсягу вибірки n і взятої довірчої ймовірності γ, тобто

$$Bep(\theta_x{}^* - \Delta\theta_x < \theta_x < \theta_x{}^* + \Delta\theta_x) = \int\limits_{\theta_x{}^* - \Delta\theta_x}^{\theta_x{}^* + \Delta\theta_x} f(\theta_x{}^*, n)\, d\theta_x{}^* = \gamma, \tag{3.6}$$

де $\Delta\theta_x$, n, γ – параметри.

Отримавши за вибіркою обсягом n оцінку $\theta_{xн}{}^*$ і задавшись величиною γ, можна знайти $\Delta\theta_x$ при відомій щільності $f(\theta_x{}^*, n)$, тобто визначити довжину довірчого інтервалу, який з імовірністю γ покриє істинне значення θ_x.

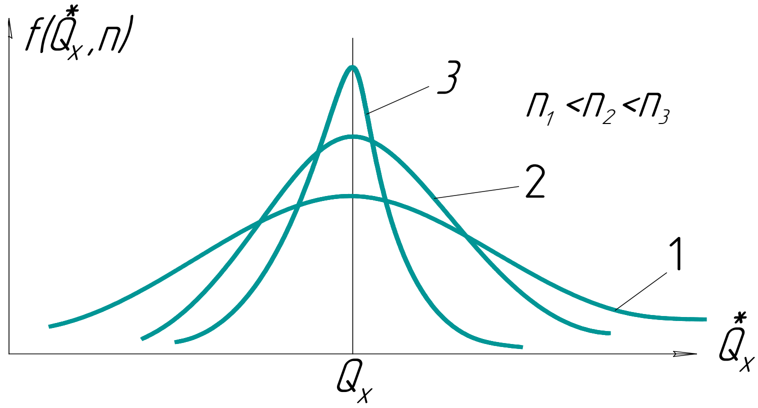


Рис. 3.1. Щільності розподілу статистичної оцінки при різних обсягах вибірки

Обернена задача – визначення обсягу вибірки, при якому можна із заданою точністю $\pm\theta_X$ і довірчою ймовірністю γ оцінити параметр θ_x. У цьому випадку (рис. 3.3) визначають невипадковий довірчий інтервал $(\theta_x - \Delta\theta_x, \theta_x + \Delta\theta_x)$, у який з імовірністю γ потрапляє випадкова оцінка $\theta_x{}^*$, визначена за вибіркою n, тобто

$$Bep(\theta_x - \Delta\theta_x < \theta_x{}^* < \theta_x + \Delta\theta_x) = \int\limits_{\theta_X{}^* - \Delta\theta_X}^{\theta_X{}^* + \Delta\theta_X} f(\theta_x{}^*, n)\, d\theta_x{}^* = \gamma. \tag{3.7}$$

Строго кажучи, щільності розподілу, що входять у (3.6) і (3.7), можуть відрізнятися один від одного, але в практичних завданнях такі тонкощі не враховують.

Таким чином, при статистичному оцінюванні невідомого параметра θ_x розподілу $F(x)$ випадкової величини x необхідно:

– визначити (виділити) генеральну сукупність, властивості якої відображає оцінюваний параметр θ_x;

– отримати репрезентативну вибірку $(x_1, x_2, ..., x_n)$ з цієї генеральної сукупності;

– знайти залежності, що дають змогу за вибіркою розрахувати найкращу за якимось критерієм оцінку θ_X * параметра θ_X ;

– визначити двосторонній та односторонній довірчі інтервали, що покривають істинне значення θ_X з високою ймовірністю γ .

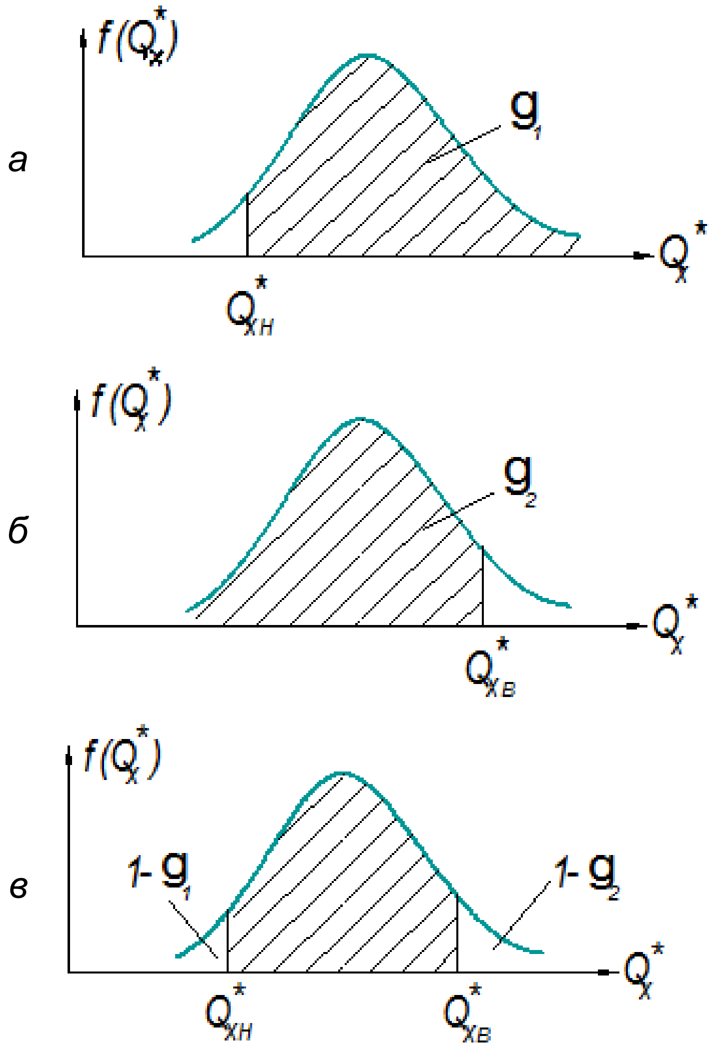


Рис. 3.2. Двосторонні й односторонні довірчі межі

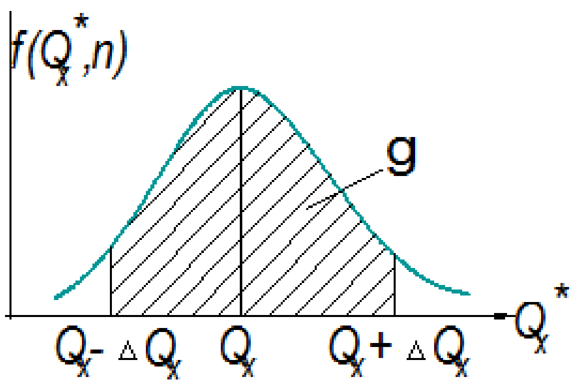


Рис. 3.3. Невипадковий довірчий інтервал статистичної оцінки

3.1.2. Методи визначення статистичних оцінок. Метод максимуму правдоподібності

Існує кілька методів отримання залежностей, за якими на основі вибіркових значень $(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна знайти оцінки θ_x вектора числових характеристик θ_x^*. Один з найбільш загальних методів – метод максимуму правдоподібності, що дає змогу отримувати спроможні незміщені або малозміщені ефективні оцінки з певним законом розподілу, які асимптотично наближаються до нормального розподілу при збільшенні обсягу виробництва.

Суть методу максимуму правдоподібності полягає в такому. Нехай задано неперервну випадкову величину *X* зі щільністю $f(x, \theta_X)$, яка залежить від параметра (вектора параметрів) θ_X , і вибірку $(x_1, x_2, ..., x_n)$ як результат *N* незалежних випробувань. Знайдемо умовну густину ймовірності вибірки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ при фіксованому значенні параметра θ_X , тобто складемо **функцію правдоподібності**

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_x) = f(x_1, \theta_x) \cdot f(x_2, \theta_x) \cdot ... \cdot f(x_n, \theta_x). \tag{3.8}$$

Оскільки значення $x_1, x_2, ..., x_n$ і щільність $f(x, \theta_x)$ є відомими, то функція правдоподібності залежить тільки від величини θ_x. Суть цього методу полягає в тому, що як *оцінку максимальної правдоподібності* θ_X * параметра θ_x вибирають таке значення θ_X *, яке надає функції правдоподібності (3.8) максимуму. Іншими словами, шукають таке значення θ_X, при якому ймовірність отримати саме таку вибірку $(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка мала б місце у випробуваннях, є максимальною. Якщо функція (3.8) має єдиний максимум в області допустимих значень θ_X (далі вважають, що ця умова виконується), то для його визначення необхідно розв'язати **рівняння правдоподібності**

$$\frac{dL}{d\theta_X} = 0. \tag{3.9}$$

Якщо θ_X – вектор, то (3.9) – система рівнянь правдоподібності.

Зазвичай використовують логарифмічну функцію правдоподібності ln*L* і для визначення оцінок шукають її максимум, розв'язуючи рівняння

$$\frac{d \ln L}{d\theta_X} = 0. \tag{3.10}$$

Відомо, що одне й те ж значення θ_X * надає функціям $L(\theta_X)$ і $\ln L(\theta_X)$ максимуму, якщо він існує.

Розглянемо окремий випадок усіченої вибірки кількістю *n*, узятої з сукупності великої кількості виробувань *N*.

У разі усіченої вибірки рівняння правдоподібності матиме вигляд

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_x)[1 - F(x_a)]_{\theta_x}^{N-n}, \tag{3.11}$$

де x_a – визначена межа результату спостереження. Тоді

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_x) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, x_x) + (N-n)\ln[1 - F(x_a, \theta_x)]. \tag{3.12}$$

Коли випадкова величина *x* є дискретною і може набувати значень $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r$, а $m_1, m_2, ..., m_r$ – частоти цих значень у вибірці, причому $\sum_{i=1}^{r} m_i = N$ і $Bep(x_i = \xi_i) = p_i(\theta_x)$, то функція правдоподібності

$$\sum_{i=1}^{m} (m_1, m_2, ..., m_r, \theta_x) = P_1^{m_1}(\theta_x) P_2^{m_2}(\theta_x) ... P_r^{m_r}(\theta_x). \tag{3.13}$$

Оцінки параметрів, отримані шляхом розв'язання системи рівнянь правдоподібності, називають оцінками за методом максимуму правдоподібності, тобто це параметричне оцінювання, яке базується на тому, що відомими є вихідний закон розподілу $f(x)$ або $F(x)$ випадкової величини *x* і вибіркові значення $(x_1, x_2, ..., x_n)$, за якими знаходять $\theta_x{}^*$.

3.2. Визначення параметрів розподілів

3.2.1. Нормальний розподіл

Нормальний розподіл має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x{}^2}} \tag{3.14}$$

і визначається параметрами m_x і $\sigma_x{}^2$. Оцінки максимальної правдоподібності $m_x{}^*$ і σ_x^{*2} можна знайти за функцією правдоподібності, яку відповідно до (3.8) записують таким чином:

$$L(x_1, x_2, ... x_N, m_x, \sigma_x^2) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x{}^2}} = \left(\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_x{}^2} \sum (x_i - m_x)^2} \tag{3.15}$$

або

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \sigma_x{}^2 - \frac{1}{2\sigma_x{}^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_x)^2 = 0. \tag{3.16}$$

Відповідно до (3.10) рівняння правдоподібності набувають вигляду

$$\frac{1}{\sigma_x{}^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_x) = 0;$$

$$-\frac{N}{2\sigma_x{}^2} + \frac{1}{2\sigma_x{}^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_x)^2 = 0. \tag{3.17}$$

З першого рівняння, помноживши ліву й праву частини на $\sigma_x{}^2 > 0$, отримуємо

$$m_x^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \,, \tag{3.18}$$

а з другого маємо

$$\sigma_x^{*2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_x^*)^2 \,. \tag{3.19}$$

Можна показати, що оцінка (3.19) є дещо зміщеною.

Незміщена оцінка дисперсії

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_x^*)^2 \,. \tag{3.20}$$

Якщо замість оцінки m_x^* відомо істинне значення m_x, то незміщена оцінка дисперсії

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_x)^2 \,. \tag{3.21}$$

З виразу (3.16) випливає, що при фіксованому значенні σ_x логарифмічна функція правдоподібності є максимальною, якщо мінімальна сума має вигляд $\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_x)^2$. Цей факт покладено в основу часткового окремого методу максимуму правдоподібності – **методу найменших квадратів.**

3.2.2. Експоненціальний розподіл

Розглянемо окремий випадок усіченої вибірки з кількістю випробувань (спостережень) *n*, узятої із сукупності великої кількості *N* – $x_1, x_2, \ldots x_n < x_a$, де x_a – відрізок вибірки, що досліджується.

Для випадку усіченої вибірки при експоненціальному розподілі (шуканий параметр m_x)

$$f(x) = \frac{1}{m_x} e^{-\frac{x}{m_x}} \tag{3.22}$$

логарифм функції правдоподібності відповідно до (3.12) має вигляд

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{m_x} e^{-\frac{x_i}{m_x}}\right) - (N-n)\frac{x_a}{m_x}. \qquad (3.23)$$

Звідси знаходимо

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m_x} = -\frac{n}{m_x} + \frac{1}{m_x^{\,2}} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{N-n}{m_x^{\,2}} x_a = 0, \qquad (3.24)$$

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{N-n}{n} x_a. \qquad (3.25)$$

3.2.3. Розподіл Вейбулла – Гнеденка

Для випадку усіченої вибірки *n* для розподілу Вейбулла має вигляд

$$f(x) = \frac{m}{x_0} x^{m-1} e^{-\frac{x^m}{x_0}}, \qquad (3.26)$$

де *m* – параметр форми; x_0 – параметр масштабу.

Розв'язавши систему рівнянь правдоподібності – систему двох рівнянь у частинних похідних

$$\frac{\partial \ln L}{\partial x_0} = 0; \ \frac{\partial \ln L}{\partial m} = 0, \qquad (3.27)$$

отримуємо два рівняння з двома невідомими:

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m} + \frac{N-n}{n} x_a^{\,m}; \qquad (3.28)$$

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m} \ln x_i + (N-n) x_a^{\,m} \ln x_a}{n/m + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}.$$

Цю систему рівнянь зручніше розв’язувати графічно (рис. 3.4), коли задано ряд значень *m* (з ряду 0,…,4), будуючи криві $x_0 = \varphi_1(m)$ і $x_0 = \varphi_2(m)$ при значеннях величин $N, n, x_a, \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Точка перетину цих кривих є статистичні оцінки параметрів x_0^* і m^*.

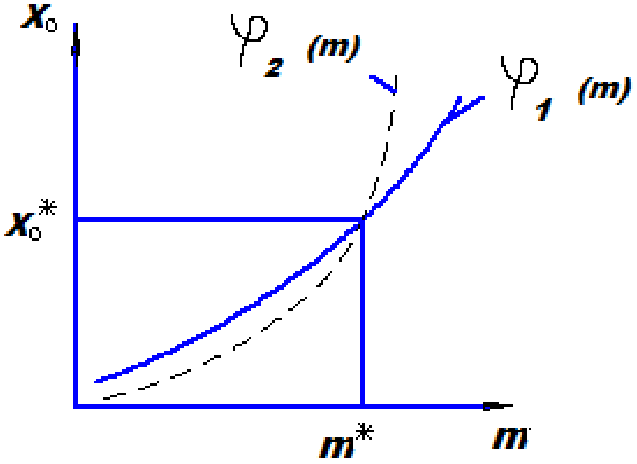


Рис. 3.4. Графічне визначення параметрів x_0 і *m* розподілу Вейбулла – Гнеденка

3.2.4. Біномний розподіл

Визначимо оцінки максимальної правдоподібності параметрів біномного розподілу.

У біномному розподілі параметр *P* – імовірність появи події в кожному з *n* незалежних випробувань (спостережень), що закінчуються появою або непоявою події.

Імовірність отримання параметра *P* в *n* випробуваннях дорівнює *m* відмовам, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні *P* визначається виразом

$$P(\overline{A}_n^m) = \frac{n!}{(n-m)!m!} P^{(n-m)}(1-P)^m, \tag{3.29}$$

де *m* – випадкова кількість відмов у *n* випробуваннях.

Тоді функція правдоподібності

$$L(m^*, P) = \frac{n\,!}{(n-m^*)\,!m^*!} P^{(n-m^*)}(1-P)^{m^*}. \tag{3.30}$$

Випускаємо постійний множник *n*!/[(*n*–*m**)!*m**!], що не впливає на положення максимуму функції (3.30), логарифмуємо й беремо частинну похідну за *P:*

$$\ln L(m^*, P) = (n-m^*)\ln P + m^* \ln(1-P); \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial P} = \frac{(n-m^*)}{P} - \frac{m^*}{1-P} = 0. \tag{3.32}$$

Рівняння правдоподібності (3.32) має один розв’язок, що надає $L(m^*, P)$ максимуму

$$P^* = 1 - m^*/n. \tag{3.33}$$

Таким чином, вираз (3.33) – шукана оцінка максимальної правдоподібності параметра *P*. Оцінка (3.33), яка залежить від вибірки значення *m**, має розподіл з математичним сподіванням *P* і середньоквадратичним відхиленням

$$\sigma(P^*) = \sqrt{P^*(1-P^*)/(n-1)} \cong \sqrt{P(1-P)/n} = \sigma_p. \tag{3.34}$$

3.2.5. Розподіл Пуассона

Як відомо, при великих *n* і *P*$\geq 0{,}9$ або 1 – *P*$\leq 0{,}1$ біномний розподіл зводиться до простішого розподілу Пуассона (закону рідкісних подій). Для цього закону ймовірність у *n* незалежних випробуваннях спостерігати рівно *m** разів певну подію залежить тільки від параметра *a*:

$$P = (a^{m^*} e^{-a})/m^*!. \tag{3.35}$$

Знайдемо оцінку максимальної правдоподібності для параметра *a*. Відповідно до (3.35) логарифмічна функція правдоподібності має вигляд

$$\ln L(m^*, a) = m^* \ln a - a(-\ln m^*!)\,. \qquad (3.36)$$

Диференціюємо (3.36) за *a*, отримуємо рівняння правдоподібності $m^*/a - 1 = 0$, звідки знаходимо оцінку максимальної правдоподібності

$$a^* = m^*. \qquad (3.37)$$

При малих значеннях *a* оцінка (3.37) має χ^2-розподіл із середньоквадратичним відхиленням

$$\sigma(a^*) = \sqrt{a^*} \approx \sqrt{a} = \sigma_a\ , \qquad (3.38)$$

а при великих значеннях *a* розподіл оцінки (3.37) наближається до нормального.

3.3. Критерії згоди

Для перевірки гіпотези відповідності теоретичного розподілу експериментальним даним застосовують кілька критеріїв. У їх числі найчастіше використовують критерій згоди Колмогорова та χ^2-критерій Пірсона (критерій «хі-квадрат»).

3.3.1. Критерій Колмогорова

Для застосування критерію Колмогорова необхідно на одному графіку (рис. 3.5) побудувати теоретичну криву $F_T(x)$ та експериментальну (емпіричну) $F_e(x)$ криву.

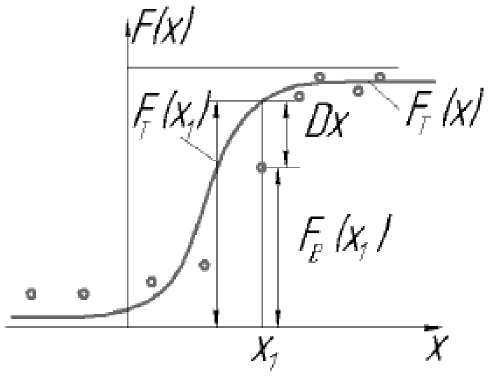


Рис. 3.5. Порівняння теоретичної й експериментальної функцій розподілу за критерієм Колмогорова:
о – експериментальні точки; – – теоретична крива

За цими графіками слід визначити різницю *D* між значеннями експериментальних і теоретичних величин. Якщо величину максимальної різниці позначити через D_{max},тобто

$$D_{max} = max|\, F_T(x) - F_e(x)\, |, \qquad (3.39)$$

то відповідно до теореми Колмогорова матимемо співвідношення

$$P = Bep|D_{max}\sqrt{n} < \lambda_n\,|, \qquad (3.40)$$

де n – кількість значень випадкової величини; λ_n – таблична величина, значення якої наведено в табл. 3.1.

Якщо рівняння (3.40) переписати у вигляді

$$1 - P = P|D_{max}\sqrt{n} < \lambda_n\,| \qquad (3.41)$$

і якщо при обчисленнях x імовірність 1–P буде незначною (меншою за 0,05…0,10), то це означає, що ймовірність такого випадкового відхилення експериментальної функції розподілу від теоретичної є дуже малою. Тобто, теоретична й експериментальна функції не узгоджуються. Прийнятне узгодження виходить при значеннях 1–P > 0,30…0,40.

Застосування рівняння (3.40) і табл.3.1 дає змогу побудувати довірчі межі для невідомої функції з допомогою відомої функції $F_e(x)$.

Для цієї мети подамо рівняння (3.40) у такому вигляді:

$$P=P\{\,F_e(x)-\frac{\lambda_n}{\sqrt{n}} \le F_T(x) \le F_e(x)+\frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}\}. \qquad (3.42)$$

З рівняння (3.42) отримуємо вирази для нижньої й верхньої довірчих меж:

$$F_н(x)= F_e(x) - \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}; \qquad (3.43а)$$

$$F_в(x)= F_e(x) + \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}. \qquad (3.43б)$$

Слід мати на увазі, що завжди $F_н(x) \ge 0$, а $F_в(x) \le 1$.

Таблиця 3.1

Значення числа λ_n залежно від P

P	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,99
λ_n	0,52	0,57	0,65	0,71	0,77	0,89	0,97	1,07	1,22	1,36	1,63

Необхідно також зазначити, що при використанні критерію згоди Колмогорова передбачається, що параметри теоретичного розподілу є заздалегідь відомими (до експерименту). Якщо їх визначають за тими ж експериментальними даними, за якими отримано функцію $F_e(x)$, то оцінка згоди може виявитися завищеною.

3.3.2. Критерій згоди Пірсона χ^2

Розглянемо деякі особливості застосування χ^2 для оцінювання узгодженості теоретичного й експериментального розподілів.

Припустимо, що результатами есперименту можуть бути тільки події $A_1, A_2, \ldots, A_k$, імовірності яких дорівнюють $P_1, P_2, \ldots, P_k$, де $P_i > 0$ і $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$.

Якщо внаслідок N незалежних дослідів подія A_i здійснюється n_i разів і розподіл подій A_i залишається незмінним для будь-якого результату події

A в межах дослідів, то можна записати такий вираз Пірсона:

$$T(n_1, n_2, \dots n_i, \dots, n_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - NP_i)^2}{NP_i}. \qquad (3.44)$$

Ця функція при великих значеннях N має розподіл χ^2 з k–1 ступенями свободи, і, отже, за Пірсоном

$$P[T < \chi_p^2(k-1)] \approx P, \qquad (3.45)$$

де значення величини $\chi_p^2(n)$ для вибраних значень знаходять з таблиць квантилів для розподілу χ^2 (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Визначення критерію згоди χ^2

Інтервали	t_i	$f_i(t)$	$q_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt$	Nq_i	n_i	$n_i - Nq_i$	$\chi_i^2 = \frac{(n_i - Nq_i)^2}{Nq_i}$
1	t_1	$f_1(t)$	$q_1(t)$	Nq_1	n_1	$n_1 - Nq_1$	χ_1^2
2	t_2	$f_2(t)$	$q_2(t)$	Nq_2	n_2	$n_2 - Nq_2$	χ_2^2
…	…	…	…	…	…	…	…
i	t_i	$f_i(t)$	$q_i(t)$	Nq_i	n_i	$n_i - Nq_i$	χ_i^2
…	…	…	…	…	…	…	…
10	t_{10}	$F_{10}(t)$	$q_{10}(t)$	Nq_{10}	n_{10}	$n_{10} - Nq_{10}$	χ_{10}^2
							$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \chi_i^2$

Вихідну гіпотезу, яка полягає в тому, що ймовірності подій A_i дорівнюють заданим числам P_i , приймають тоді, коли

$$T(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_k) \le \chi_{1-\alpha}^2(k-1-S), \qquad (3.46)$$

де α – імовірність помилки першого роду, тобто відхилення гіпотези, коли вона є правильною (зазвичай $\alpha \approx 0{,}05\dots0{,}10$, тоді $1-\alpha = 0{,}90\dots0{,}95$).

При більш складних залежностях, коли кількість ступенів свободи залежить від k і S (кількість дослідів і параметричних зв'язків зазвичай S = 1 або S = 2), має виконуватися умова $T(n_1, n_2, \dots, \dots, n_k) \le \chi_{1-\alpha}^2(k-S-1)$.

Таким чином, застосування критерію згоди Пірсона χ^2 полягає в оцінюванні спеціальної функції χ_i^2 у кожному інтервалі групування даних, для чого складають таблицю (див. табл. 3.2). Потім за сумою $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \chi_i^2$ і кількістю ступенів свободи знаходять величину $P_{1-\alpha}$.

3.3.3. Методика оброблення статистичних даних під час визначення закону розподілу напрацювання невідновних виробів до відмови

Знання законів розподілу ймовірностей напрацювання виробів до відмови дає змогу:

– здійснювати контроль рівня надійності в експлуатації;

– уточнювати можливості подальшого збільшення ресурсу;

– визначати необхідність проведення робіт з удосконалення виробів і підвищення рівня їх надійності.

Вихідні дані для випробувань на надійність невідновних виробів:

– загальна тривалість випробувань або експлуатації t_a;

– загальна кількість контрольованих виробів N;

– кількість виробів, що відмовили, n;

– час напрацювання окремих виробів до відмови $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots, T_n$.

Необхідно визначити закон розподілу відмов.

Порядок оброблення статистичних даних:

1. Отримані дані напрацювання виробів, які відмовили $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots, T_n$, розташовують у ряд у порядку їх збільшення (будують варіаційний ряд).

2. Загальний час випробувань t_a розбивають на z = 10…12 інтервалів Δt_i так, щоб у кожний інтервал потрапило не менше двох значень T_i, тобто щоб у кожному інтервалі було не менше двох виробів, які відмовили.

3. На основі розбивки складають табл. 3.3 з кількістю колонок z, у яку заносять вихідні дані й результати розрахункового визначення статистичних даних: $f_i^*(t), \lambda_i^*(t)\ i\ P_i^*(t)$.

Таблиця 3.3

Розрахункові статистичні дані

Основні параметри	Інтервали від 1 до z					
	1	2	…	i	…	z
	$t_1 - t_2$	$t_2 - t_3$	…	$t_{i-1} - t_i$	…	$t_z - t_a$
$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$	Δt_1	Δt_2	…	Δt_i	…	Δt_z
Δn_i	Δn_1	Δn_2	…	Δn_i	…	Δn_z
$f_i^*(t) = \dfrac{\Delta n_i}{N \Delta t_i}$	f_1^*	f_2^*	…	f_i^*	…	f_{zi}^*
$\lambda_i^*(t) = \dfrac{\Delta n_i}{(N - n_{i-1})\Delta t_i}$	λ_1^*	λ_2^*	…	λ_i^*	…	λ_z^*
$P_i^*(t) = \dfrac{f_i^*(t)}{\lambda_i^*(t)}$	P_1^*	P_2^*	…	P_i^*	…	P_z^*

4. Будують гістограми $f_i^*(t), \lambda_i^*(t)\ i\ P_i^*(t)$ і, проаналізувавши їх, роблять припущення про відповідність отриманого статистичного розподілу одному з відомих теоретичних розподілів. Наприклад, за характером графіків $\lambda_i^*(t)$ можна припускати відповідність статистичного розподілу теоретичному:

– експоненціальному розподілу, якщо величина $\lambda_i^*(t)$ – практично постійна або мало змінюється в часі;

– розподілу Вейбулла – Гнеденка, якщо $\lambda_i^*(t)$ має спадний або зростальний характер;

– нормальному розподілу, якщо є характерний мінімум у середній частині гістограми $\lambda_i^*(t)$ або графік має зростальний характер.

5. На основі наявних статистичних даних визначають параметри вибраного теоретичного закону розподілу, наприклад: параметр m_t – для експоненціального, m_t і σ_t – для нормального, m і t_0 – для розподілу Вейбулла – Гнеденка.

6. Визначають теоретичні характеристики вибраного теоретичного закону розподілу $f_i(t), \lambda_i(t)\ i\ P_i(t)$ для всіх інтервалів z. Дані розрахунку зводять у таблицю, аналогічну табл. 3.2.

7. Статистичний і теоретичний розподіли порівнюють за допомогою критерію згоди χ^2, що визначається за табл. 3.2.

8. За заданою довірчою ймовірністю γ = 0,9 і кількістю ступенів свободи $K = z+S-1$ (S – кількість зв'язків, що залежать від закону розподілу) визначають $\chi^2_{\gamma,K}$. Відповідність статистичного закону теоретичному оцінюють за отриманим сумарним значенням χ^2_Σ. Якщо величина χ^2_Σ більше $\chi^2_{\gamma,K}$, то необхідно підібрати інший закон розподілу, більш придатний для опису статистичних даних.

3.4. Оцінювання однорідності експериментальних даних

Нехай випробовується N виробів (груп виробів) одного типу. Під час випробувань для різної кількості виробів отримано результати, які наведено в табл. 3.4.

Потрібно перевірити гіпотезу однорідності, тобто оцінити, чи можна вважати, що $T_{\text{сер}1} = T_{\text{сер}2} = \ldots = T_{\text{сер}i} = \ldots = T_{\text{сер}N}$.

Для перевірки цієї гіпотези необхідно обчислити величину критерію згоди Пірсона χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(m_i - a^* t_i\right)^2}{a^* t_i}, \qquad (3.47)$$

де $$a^* = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_i ... m_N}{t_1 + t_2 + ... + t_i + ... + t_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i}. \quad (3.48)$$

Таблиця 3.4

Результати випробувань *N* груп виробів

Час випробувань	Кількість виробів	Кількість відмов
t_1 t_2 ... t_i ... t_N	n_1 n_2 ... n_i ... n_N	m_1 m_2 ... m_i ... m_N

Потім за заданою величиною довірчої ймовірності $\gamma = 1 - \alpha$ (α – імовірність помилки першого роду) і кількістю ступенів свободи $k = N - 1$ з допомогою таблиці або номограми (рис. 3.6) квантилів розподілу χ^2 знайти квантиль χ^2_γ.

Якщо обчислена величина χ^2 є меншою від знайденого з таблиці (номограми) значення χ^2_γ або дорівнює йому, то слід уважати, що експериментальні дані ($m_1, t_1, \dots, m_N, t_N$) є однорідними.

Якщо $\chi^2 > \chi^2_\gamma$, то з імовірністю γ можна стверджувати, що гіпотеза $T_{\text{сер}1} = \dots = T_{\text{сер}N}$ є неправильною, тобто експериментальні дані – неоднорідні.

Неоднорідність може пояснити тим, що один або кілька виробів, які випробовували, помітно відрізняються від виробів основної групи. Для виявлення цих виробів досліджують складові частини критерію згоди χ^2 для кожної групи виробів за наведеною вище методикою.

Таким чином, усі випробовувані вироби можна поділити на дві групи:

– основну групу з однорідними характеристиками, для яких $\chi^2 \le \chi^2_\gamma$;

– групу виробів з різко відмінними характеристиками, для яких $\chi^2 > \chi^2_\gamma$.

3.5. Методи підтвердження заданих кількісних показників надійності

3.5.1. Контроль показників надійності. Послідовний аналіз

Мета контролю – визначити, чи відповідає виріб заданим вимогам (контрольні процедури). Результатом контролю є рішення про відповідність або невідповідність виробу заданим вимогам (приймання або бракування виробу).

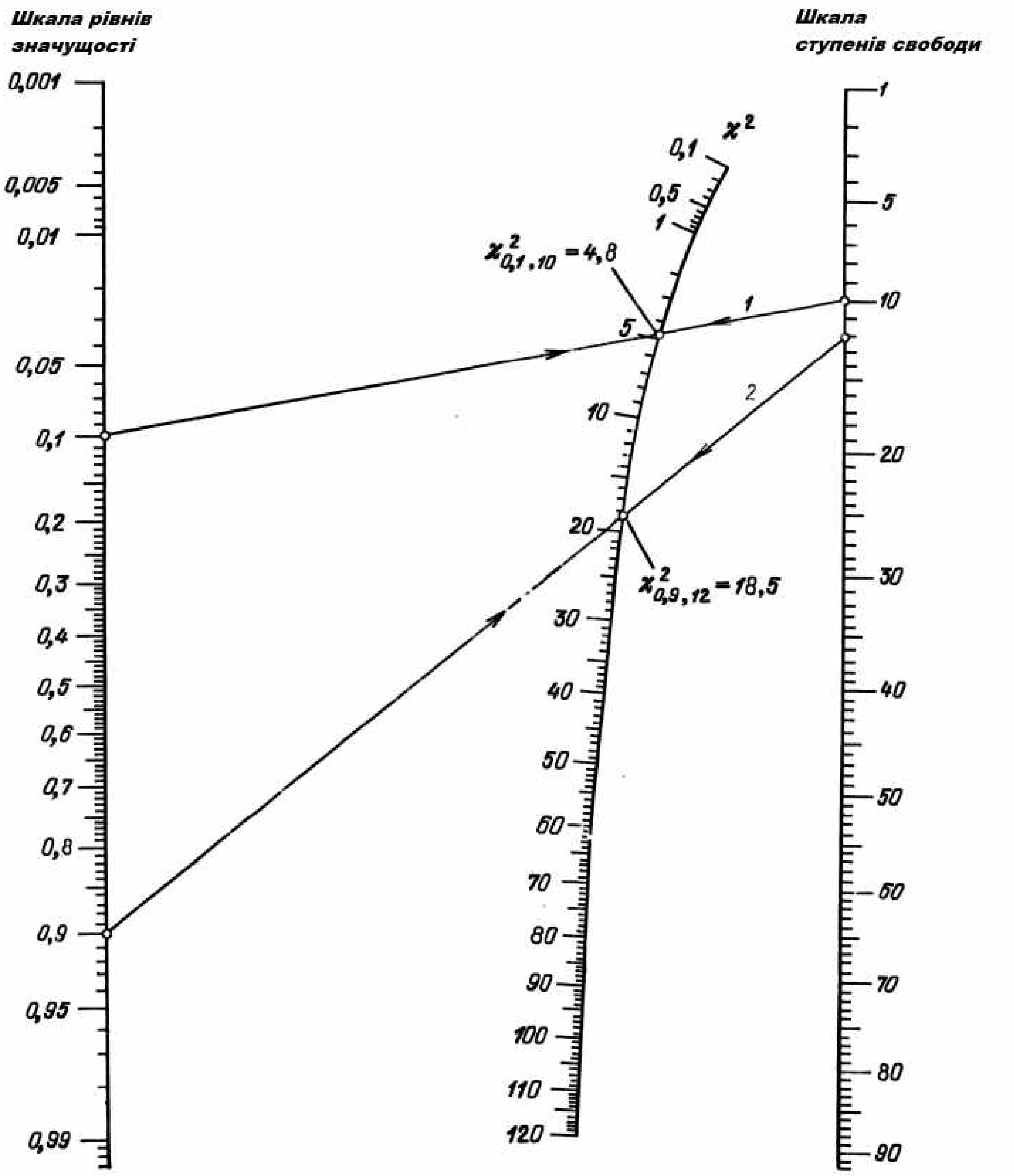


Рис. 3.6. Номограма розподілу χ^2

Мовою математичної статистики завдання контролю надійності формулюється як задача перевірки гіпотез про його значення.

Розглянемо випадок, коли показник надійності *R* збільшується з підвищенням надійності (наприклад, напрацювання $T_{сер}$ або ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$).

Якщо в технічній документації зазначено необхідне значення показника R_{TP}, то під час розроблення контрольної процедури прагнуть забезпечити приймання виробів з рівнем надійності $R > R_{\text{ТР}}$ і бракування виробів з рівнем надійності $R < < R_{\text{ТР}}$. На рис. 3.7 показано залежність імовірності приймання L від рівня надійності R (показники надійності, наприклад, напрацювання), яку називають оперативною характеристикою плану контролю.

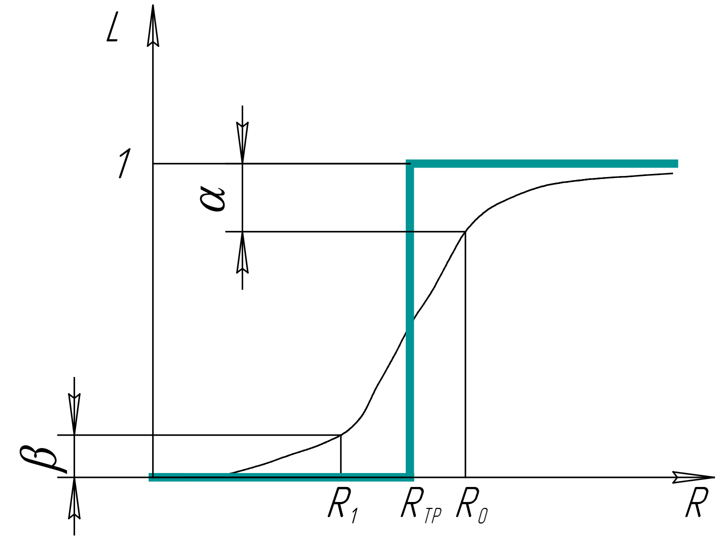


Рис. 3.7. Оперативна характеристика плану контролю

Ідеальну оперативну характеристику на рис. 3.7 зображено жирною лінією. Однак така характеристика є практично недосяжною, оскільки потребується велика кількість спостережень, зразків, дослідів і т. д. Реальну оперативну характеристику показано на рис. 3.7 тонкою лінією. Уводять два рівні контрольованого показника надійності (приймальний $R_0(T_0)$ і бракувальний $R_1(T_1)$) і обумовлюють значення $L(R)$ у цих точках. При цьому вважають, що вироби з рівнем надійності $R > R_0$, безумовно, є прийнятними для споживача й повинні прийматися з досить високою ймовірністю – не нижче $L(R_0)$, тобто $L(T_0)$, а вироби з рівнем $R < R_1$ є неприйнятними і повинні з високою ймовірністю – не нижче $1 – L(R_1)$ – бракуватися**.** Імовірностями протилежних подій $\alpha = 1 – L(R_0)$ і $\beta = L(R_1)$, тобто ймовірностями помилкових висновків, характеризують ступінь упевненості контролерів у правильності прийнятих рішень. Імовірності α і β називають ризиками постачальника і споживача відповідно. Як видно з рис. 3.7, величини α і β характеризують максимально можливі ймовірності помилок в областях $R > R_1$ і $R \le R_0$ відповідно.

З методичною метою розглядаємо тільки випадок, коли контрольований показник є одновимірною величиною типу напрацювання $T_{сер}$.

У процесі розроблення виробів контроль надійності здійснюють як мінімум один раз на приймальних випробуваннях, часто використовуючи статистику попередніх та інших випробувань.

При серійному виробництві контроль надійності зазвичай планують у складі періодичних випробувань.

Контроль надійності високонадійних дрібносерійних виробів доцільно вводити до складу типових випробувань.

Контроль надійності великих складних виробів з широким застосуванням резервування може бути включений до складу приймально-здавальних випробувань.

Чотири числа – $R_{0,}$ R_1, α і β – визначають дві точки оперативної характеристики, що при вибраній процедурі контролю (одноступінчастій, послідовній), своєю чергою, визначають план контролю, включаючи обсяг спостережень *V*. Обсяг *V* є єдиним обмеженням, що не дає змоги довільно зменшувати ризики й зближувати приймальний і бракувальний рівні. Для вибору плану контролю абсолютні значення рівнянь $R_0 = T_0$ і $R_1 = T_1$ є несуттєвими, план визначається лише відношенням T_0/T_1 і ризиками α і β. Метод послідовного аналізу дає змогу проводити випробування при відносно малих обсягах вибірки *n зі* збереженням заданих значень α і β.

При заданих ризиках α і β і відношенні T_0/T_1 відношення правдоподібності, яке для зручності в стандарті подано вже у вигляді характерних точок для побудови лінії невідповідності (бракувальної лінії) і лінії відповідності (приймальної лінії) вимогам, також визначають точки для можливого усічення послідовних випробувань за кількістю відмов і сумарним напрацюванням (рис. 3.8).

При наявності відмов об'єктів у процесі випробувань графіком послідовних випробувань на надійність є ступінчаста лінія, сума відрізків якої, паралельних до осі t_Σ/T_0, чисельно дорівнює відношенню сумарного напрацювання об'єктів у конкретний момент часу *t* випробувань до значення T_0, а сума відрізків, паралельних до осі t_Σ/T_0, дорівнює кількості відмов об'єктів за час *t* випробувань.

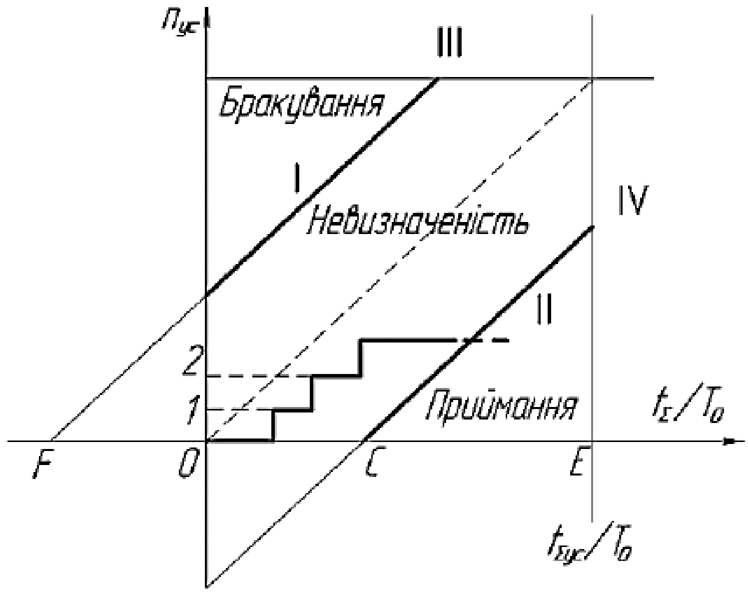


Рис. 3.8. Графік послідовних випробувань: I – лінія невідповідності; II – лінія відповідності; III, IV – лінії усічення

Узагалі кажучи, точки з координатами $R_{1,}$ β і $R_{0,}$ α необхідно вибирати як точки однакового збитку (для постачальника і споживача).

3.5.2. Метод довірчих інтервалів

Метод довірчих інтервалів застосовують переважно для оцінювання результатів випробувань дослідних виробів, коли задано T_{01} (мінімально допустиме напрацювання на відмову) або m_1 (максимально допустиму кількість відмов). Очікуване значення напрацювання на відмову T_0 або m_0 є невідомим, однак при цьому має бути відомим закон розподілу відмов.

Суть методу довірчих інтервалів полягає в тому, що за результатами проведених випробувань визначають середню величину, що характеризує надійність виробу ($T_{\text{сер}}$ або $m_{\text{сер}}$), а потім з використанням допоміжних коефіцієнтів, що визначаються для заданої довірчої ймовірності й відповідного закону розподілу, обчислюють нижню й верхню довірчі межі.

При цьому так само, як і в разі застосування методу послідовного аналізу, можливими є три варіанти:

- якщо $T_{\text{н}} \geq T_{01}$ або $m_1 \leq m_0$, то вимоги підтверджено;
- якщо $T_{\text{в}} < T_{01}$ або $m_{\text{н}} > m_0$, то вимоги не підтверджено;
- якщо $T_{\text{н}} < T_{01} < T_{\text{в}}$ або $m_{\text{н}} < m_{01} < m_{\text{в}}$, то випробування необхідно продовжити.

На рис. 3.9 графічно зображено оцінювання гіпотез методом довірчих інтервалів.

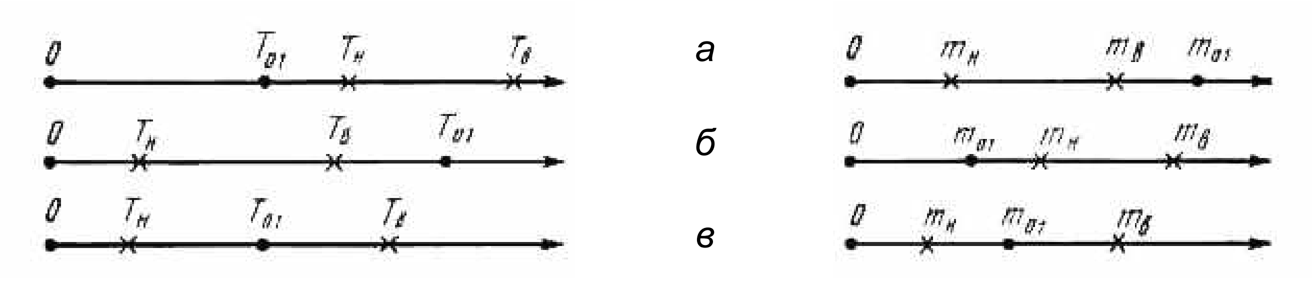


Рис. 3.9. Графічне зображення методу довірчих інтервалів:
а – гіпотеза відповідності підтверджується; *б* – гіпотеза відповідності відкидається;
в – випробування необхідно продовжити

Тут T_{01}, m_{01} – допустимі величини мінімального напрацювання на відмову або максимальної кількості відмов; $T_{\text{н}}$, $m_{\text{н}}$ – нижні довірчі межі, отримані за результатами випробувань; $T_{\text{в}}$, $m_{\text{в}}$ – верхні довірчі межі.

Слід звернути увагу на деяку особливість визначення довірчих меж. Як уже було зазначено вище, для визначення довірчих меж необхідно знати закон розподілу й довірчу ймовірність. Крім того, потрібно знати також план проведення випробувань для підтвердження показників надійності. Усі ці фактори мають істотне значення для визначення коефіцієнтів, що застосовуються під час обчислення нижньої й верхньої довірчих меж.

Припустимо, що є найпростіший потік відмов. Подібні випробування можуть бути проведені за одним із двох планів: за першим – з обмеженою кількістю відмов; за другим – з обмеженою тривалістю.

У першому випадку випадковою величиною є напрацювання на відмову, у другому – кількість відмов або інтенсивність відмов.

Розглянемо випадок *фіксованого обмеженого часу випробувань*.

Нехай за час випробувань t_Σ отримано m відмов. Середній час напрацювання на відмову

$$T_{сер} = t_\Sigma / m. \tag{3.49}$$

Для випадку найпростішого потоку відмов імовірність P_m отримання рівно m подій у заданому интервалі часу знаходять за законом Пуассона, тому для визначення довірчих меж можна застосовувати такі формули:

при $m \neq 0$

$$T_н = r_2 T_{сер}, \qquad Tв = r_1 T_{сер}; \tag{3.50}$$

при $m = 0$

$$T_{сер} = t_\Sigma / r_0, \tag{3.51}$$

де r_0, r_1, r_2 – коефіцієнти, які знаходять за таблицею розподілу Пуассона.

Якщо буде потрібно визначити довірчі межі або межі інтенсивності або кількість відмов, то слід застосовувати формулу

$$\lambda_{сер} = 1 / T_{сер}, \tag{3.52}$$

і тоді

$$\begin{aligned} \lambda_н &= \lambda_{сер} / r_1; \qquad m_н = m_{сер} / r_1; \\ \lambda_в &= \lambda_{сер} / r_2; \qquad m_в = m_{сер} / r_2. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Розглянемо тепер випадок фіксованої кількості відмов, коли випробування проводять доти, доки не відбудеться задана кількість відмов m. Час випробувань t_Σ є випадковою величиною. Оскільки в цьому випадку тривалості проміжків між відмовами розподіляються за експоненціальним законом, випадковий час t_Σ, який дорівнює загальній кількості проміжків між відмовами, має гамма-розподіл з параметром $C = 1/\lambda$.

Якщо параметр потоку відмов $\lambda = 1/T$, то випадкова величина t_Σ має гамма-розподіл з параметрами m і $C = T$.

У цьому випадку довірчі межі визначають за рівняннями

$$T_в = r\,_1 T_{сер}, \qquad T_н = r_3 T_{сер}. \tag{3.54}$$

За обома методами неможливо заздалегідь указати сумарний час випробувань, необхідний для прийняття рішення за гіпотезами відповідності, однак він завжди буде меншим, ніж при інших методах оцінювання.

Якщо при випробуваннях виробів відмов немає, тобто $m_\Sigma = 0$, то мінімально необхідний час випробувань при заданих мінімально допустимому значенні напрацювання на відмову і довірчій імовірності визначають за формулою

$$t_{\Sigma\min} = r_0 T_{01}. \qquad (3.55)$$

Для визначення теоретичного мінімального поточного напрацювання t_{Tmin}, необхідного для підтвердження вимог щодо надійності за умови, що отримане сумарне напрацювання t_Σ при сумарній кількості відмов m_Σ є недостатнім для прийняття рішення, необхідно користуватися такою формулою:

$$t_{T\min} = \frac{m_\Sigma}{r_2} T_{01} - t_\Sigma, \qquad (3.56)$$

где r_0, r_1, r_2, r_3 – коефіцієнти, які знаходять за таблицею розподілу Пуассона для значень $m = m_\Sigma$ і γ.

Тривалість випробувань у разі фіксованого часу випробувань за умови, що помилка у визначенні часу напрацювання на відмову T_{01} не перевищує Δ, визначається формулою

$$r_1 = 1 + \Delta. \qquad (3.57)$$

За обчисленою величиною r_1 знаходять необхідну кількість відмов m_1 і визначають необхідний час випробувань

$$t_\Sigma = m_1 T_{01} / r_3. \qquad (3.58)$$

4. НАДІЙНІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ. НАДІЙНІСТЬ ЯК ІМОВІРНІСНА МІЦНІСТЬ

4.1. Поняття про елемент конструкції. Несна здатність і діючі навантаження

При розрахунку надійності конструкцію літального апарата зручно поділити на частини: конструкцію планера й механічні частини конструкції. *Конструкцію планера*, своєю чергою, поділяють на агрегати (корпус, несні поверхні і т. ін.) і відсіки (головну частину, приладовий, паливний, двигунний і хвостовий відсіки). Агрегати і відсіки поділяють на елементи.

Механічні частини конструкції бувають такими, що відокремлюються, і поворотними. До перших належать ступені, що відокремлюються, носові й хвостові обтічники, що відкидаються, тощо, до других – поворотні крила і крила, які складаються, рулі, елерони і т. д.

Розрахунок надійності кожної частини конструкції має свої особливості. Розрахунок надійності починається з розрахунку елементів конструкції – найбільш великих її частин.

Елементом конструкції називають найменшу самостійну конструктивну одиницю. Це може бути і цілий лист обшивки, і заклепка, і зварний шов будь-якої довжини, і точка електрозварювання, і стрингер, і шпангоут, тобто ті деталі, з яких виготовляють відсіки, агрегати, а також деталі для з’єднання і т. д.

З огляду на надійність елементом може бути також будь-яка сукупність частин конструктивних елементів і навіть сукупність конструктивних частин. Наприклад, частину обичайки бака від одного шпангоута до іншого, що складається з частин листа, зварних швів і т. ін., уважають елементом, якщо розглядати втрату стійкості бака від стискальних сил. Усе залежить від тих граничних станів, у яких перебуває відсік бака. Конструктивний елемент можна розглядати як сукупність елементів конструкції, яку розраховують на міцність за однією формулою. Наприклад, паливний бак складається з трьох конструктивних елементів – верхнього й нижнього днищ та обичайки.

Щоб розрахувати надійність елемента конструкції, необхідно знати несну здатність і діючі навантаження.

У найзагальнішому випадку під *несною здатністю* елемента конструкції розуміють випадковий процес $R(t) = \sigma_{доп}(t)S$, де $\sigma_{доп}(t)$ – допустиме напруження в конструкції (випадковий процес); S – функція геометричних параметрів (випадкова величина). Залежно від діючого навантаження допустимим може бути: границя міцності $\sigma_в(t)$ при розтяганні; $\sigma_в(t)K_\sigma$ при вигині, де K_σ – коефіцієнт пластичності; критичне напруження $\sigma_{крм}(t)$ або $\sigma_{кро}(t)$ – при місцевій або загальній стійкості; границя витривалості $\sigma_{-1}(t)$ – при циклічних навантаженнях; граничні дотичні напруження при крученні і т. д.

Несна здатність елемента конструкції являє собою випадковий процес, оскільки в загальному випадку температура елемента конструкції змінюється в польоті, тому будуть змінюватися міцнісні характеристики матеріалу.

Несна здатність елемента конструкції залежить від міцнісних характеристик матеріалу й геометричних параметрів елемента. Геометричні параметри сортаменту (товщина листа, площа поперечного перерізу профілю і т. ін.) зазвичай розглядають як випадкові величини.

Під зовнішнім навантаженням $N(t)$, що діє на елемент, розуміють експлуатаційне навантаження. Цей параметр не множать на коефіцієнт безпеки, як при розрахунках на міцність за детермінованимии величинами, а розглядають як імовірнісні категорії. Під зовнішнім навантаженням мають на увазі розтяжні, стискні або перерізувальні сили, згинальний або крутний момент, внутрішній тиск у баках, поздовжнє або поперечне перевантаження і т. д., а також будь-які їх комбінації.

Зовнішні навантаження, що діють на елемент, у загальному випадку являють собою випадкові процеси, параметри яких на етапі проектування можна розраховувати теоретично або визначити приблизно за даними випробувань попередніх виробів. На етапі проектування можна розглядати не весь випадковий процес, а лише перетин випадкового процесу в розрахункових випадках навантаження, що визначаються при розрахунку на міцність.

Необхідно, щоб несна здатність і зовнішні навантаження були виражені в одних одиницях виміру, оскільки їх доводиться порівнювати між собою.

4.2. Методи розрахунку надійності силового елемента конструкції

Надійність силового елемента конструкції визначають за формулою

$$H(t)=P(R(t)>N(t)) \tag{4.1}$$

при $0 \le t \le t_k$.

Іноді вводять функцію роботоздатності елемента $L(t)$, яка визначається формулою

$$L(t)=\varphi(z(t),\zeta(t)), \tag{4.2}$$

де $L(t), R(t), N(t), z(t), \zeta(t)$ – випадкові величини: функція роботоздатності, несна здатність елемента, діюче навантаження, композиційна випадкова і співвідносна випадкова функції; φ – невипадкова функція.

Функцію роботоздатності можна подати композиційною випадковою функцією

$$z(t)=R(t) - N(t) \qquad (4.2)$$

або співвідносною випадковою функцією

$$\zeta(t)=R(t)/N(t). \tag{4.3}$$

У цьому випадку надійність силового елемента визначають як імовірність невикиду композиційної випадкової функції за нульовий рівень: $H(t)=P(z(t) > 0)$ або співвідносної випадкової функції за перший рівень $H(t)=P(\zeta(t) > 1)$. Можливий вигляд цих функцій показано на рис. 4.1 і 4.2. Там же зображено функцію надійності для елементів конструкції, яку в узагальненому вигляді отримують при розрахунках надійності елемента за випадковими процесами. У цьому випадку функцію надійності обчислюють як імовірність випадкової події, яка полягає в тому, що за час $0 \le t \le t_k$ не відбудеться жодного викиду за зазначені рівні (0 – для $z(t)$, 1 – для $\zeta(t)$).

Однак конструктору по суті потрібно одне число – надійність до кінця польоту H_k, отже, t_k. Як мінімальне значення надійності силового елемента ця надійність визначає можливу кількість відмов елементів протягом часу польоту ЛА t. Іноді надійність визначають за одним перетином випадкового процесу $z(t)$ або $\zeta(t)$ у так званому розрахунковому випадку навантаження силового елемента. Розрахункові дані навантаження силового елемента при використанні детермінованих величин у розрахунках на міцність відповідають даним у момент t_p, коли $z(t_p) = \min z(t)$, або в момент t_p', коли $\zeta(t_p') = \min \zeta(t)$ (див. рис. 4.1, 4.2).

При імовірнісних величинах розрахунковий випадок настає в момент t_k, коли

$$F\left(\frac{m_z(t_p)}{\sigma_z(t_p)}\right) = \min F\left(\frac{m_z(t)}{\sigma_z(t)}\right), \tag{4.4}$$

або в момент, коли $F\left(\frac{m_\xi(t_p')}{\sigma_\xi(t_p')}\right) = \min F\left(\frac{m_\xi(t)}{\sigma_\xi(t)}\right)$, тобто коли ймовірність невикиду відповідного випадкового процесу за розглянутий рівень (0 при *z(t)*, 1 при *ζ(t)*) є мінімальною.

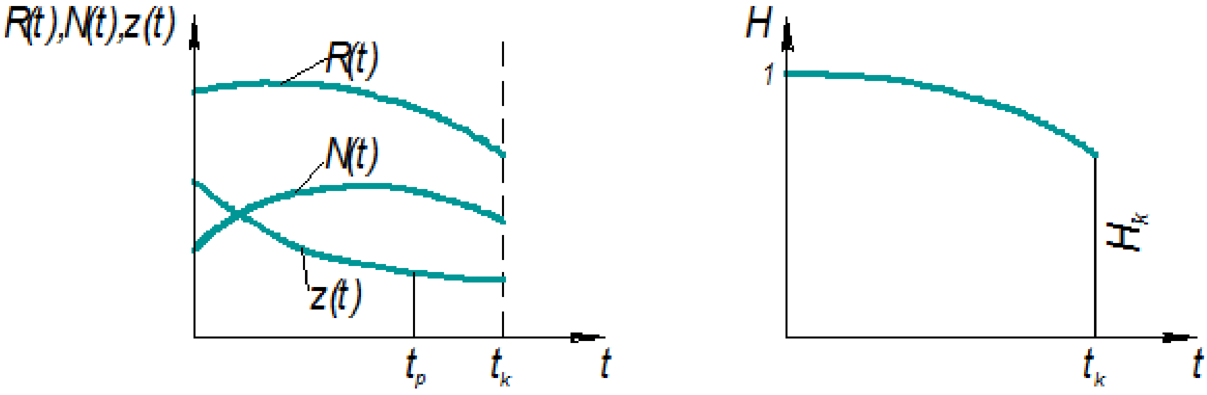


Рис. 4.1. Композиційна функція надійності

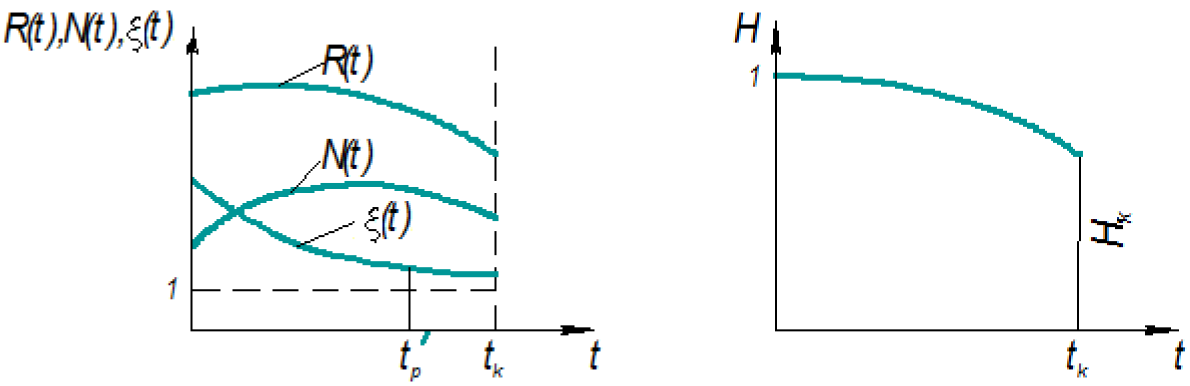


Рис. 4.2. Співвідносна випадкова функція

При розрахунках за ймовірнісними величинами $t_p = t_p'$. При розрахунках за детермінованими величинами в загальному випадку $t_p \neq t_p'$. Рівність можлива лише в двох окремих випадках: коли *R(t)=const* і коли *R(t)* дотикається до *N(t)*.

При розрахунках на міцність за детермінованими величинами момент настання розрахункового випадку навантаження визначається зазвичай співвідношенням *R(t)/N(t)*, у т. ч. у момент t_p'.

Якщо надійність елемента отримують у розрахунковому випадку навантаження, то замість випадкових процесів слід розглядати їх перетини (тобто випадкові величини) у момент, коли настає розрахунковий випадок навантаження. Тоді надійність визначається ймовірністю перевищення несної здатності над зовнішніми навантаженнями, тобто співвідношенням

$$H=P(R>N), \tag{4.5}$$

де *R*, *N* – випадкові величини: несна здатність (міцність) і зовнішнє навантаження (напруження) у розрахунковому випадку навантаження елемента.

Це співвідношення можна знайти одним із таких методів:

1. Формальне порівняння випадкових величин

$$H=P(R>N)=\int_0^\infty f_N(x)[1-F_R(x)]dx=\int_0^\infty f_R(x)F_N(x)dx, \qquad (4.6)$$

де $F_R(x), F_N(x)$ – функції розподілу несної здатності силового елемента й зовнішніх навантажень.

2. Уведення композиційної випадкової величини z:

$$H=P(R>N)=P(R-N>0)=P(z>0)=\int_0^\infty f(z)dz, \qquad (4.7)$$

де $z = R - N$ – композиційна випадкова величина; $f(z)=f_z(x)$ – щільність розподілу композиційної випадкової величини (рис. 4.3); $f_N(x), f_R(x)$ – щільність розподілу R і N.

Маємо $m_z = m_R - m_N$; $D_z = D_R - D_N$, де m_z, m_R, m_N – математичне сподівання z, R, N; D_z, D_R, D_N – дисперсія z, R, N. Остання рівність виконується при незалежних R і N.

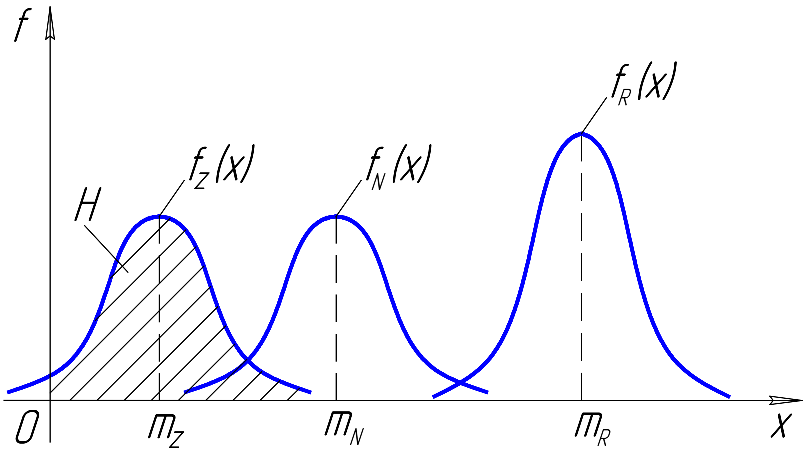


Рис. 4.3. Визначення надійності елемента за композиційною випадковою величиною

3. Уведення співвідносної випадкової величини ζ:

$$H=P(R>N)=P(R/N>1)=P(\zeta>1)=\int_1^\infty f(\xi)d\xi, \qquad (4.8)$$

де $\zeta=R/N$ – співвідносна випадкова величина; $f(\xi)=f_\xi(x)$ – імовірність розподілу співвідносних випадкової величини ζ (рис. 4.4).

Для випадкової величини ζ математичне сподівання й дисперсію можна визначити лише наближеним методом, використовуючи розвинення в ряд Тейлора в околі точки m_ξ і залишаючи в ряді лише лінійні члени, тобто застосовуючи метод лінеаризації функції. Наприклад, нехай $\zeta=\varphi(x_1,.....,x_n)$, тоді

$$m_\xi=\varphi(m_{x_1},...,m_{x_n}), \quad \sigma_\xi^{\ 2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\sigma_{x_i}^{\ 2}. \qquad (4.9)$$

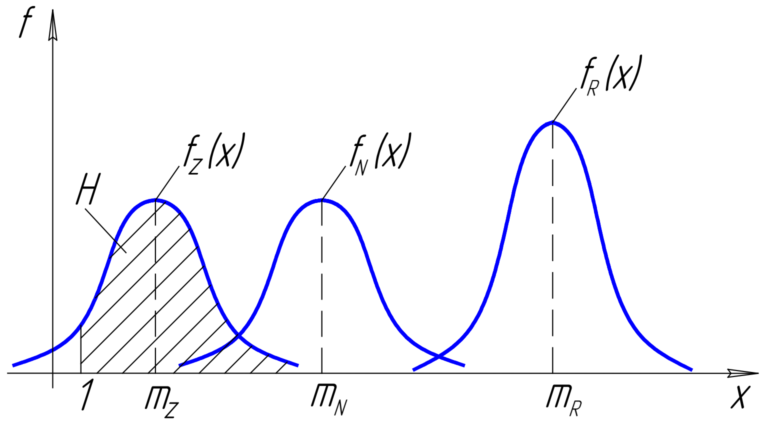


Рис. 4.4. Визначення надійності силового елемента за співвідносною випадковою величиною

Отже, такий похід дає можливість лише обчислити числові характеристики функції за числовими характеристиками аргументів.

Надійність елемента за наведеними формулами розраховують одним із таких методів:

1. Теоретичний метод, якщо формули розв’язуються або в кінцевому вигляді, або з допомогою таблиць, або на ПЕОМ для розрахунку ймовірності викиду випадкового процесу, або інтегруванням розглянутих щільностей розподілу.

Приклад 4.1. Нехай випадкові величини R і N розподіляються рівномірно на відрізку (0, 1) (рис. 4.5), тоді

$$H = \int_0^{\infty} f_R(x) F_N(x) dx = \int_0^{\infty} 1x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 0{,}5.$$

2. Метод лінеаризації функцій, від яких залежить надійність елемента. Це наближений метод, що дає змогу обчислювати лише числові характеристики функції за числовими характеристиками аргументів. Визначити закон розподілу функції при цьому неможливо. Доводиться брати робочу гіпотезу про те, що композиційна випадкова величина (співвідносна випадкова величина) має той чи інший закон розподілу, найчастіше нормальний.

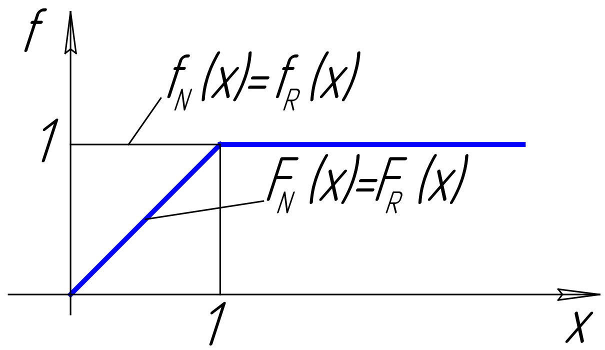


Рис. 4.5. Визначення надійності при рівномірних законах розподілу навантажень і несної здатності

Приклад 4.2. Нехай співвідносна випадкова величина має вигляд

$$\xi = R/N = \frac{\sigma_в S}{N} = \varphi(\sigma_в, S, N).$$

Після її лінеаризації маємо

$$\xi \approx \varphi(m_{\sigma в}, m_S, m_N) + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_в}(\sigma_в - m_{\sigma в}) + \frac{\partial\varphi}{\partial S}(S - m_S) + \frac{\partial\varphi}{\partial N}(N - m_N),$$

звідки

$$m_\xi = \varphi(m_{\sigma в}, m_S, m_N) = \frac{m_{\sigma в} m_S}{m_N},$$

$$\sigma_\xi{}^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_в}\right)^2 \sigma_{\sigma в}{}^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right)^2 \sigma_S{}^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)^2 \sigma_N{}^2.$$

Визначивши закон розподілу для ξ, можна наближено визначити надійність елемента.

Особливості розрахунку надійності силового елемента конструкції:

1. Розрахунок надійності силового елемента конструкції виконують на етапі проектування, коли проводять усі інші проектувальні розрахунки.

2. Усі формули розрахунку на міцність беруть такими, якими їх отримано в теорії міцності.

3. Усі детерміновані величини у формулах розрахунку на міцність замінюють випадковими величинами.

4. Розрахункові випадки навантаження силових елементів конструкції беруть такими самими, як і при розрахунку конструкції на міцність.

5. Як зовнішні навантаження при розрахунку надійності беруть експлуатаційні навантаження, не помножуючи їх на коефіцієнт безпеки, як це роблять при розрахунку на міцність.

6. І зовнішні навантаження, і несну здатність конструкції беруть як випадкові величини, що змінюються від нуля до нескінченності.

Застосування теорії ймовірності дає можливість виконати розрахунок на надійність такими методами:

1. Метод статистичних випробувань на ПЕОМ (метод Монте-Карло). У ПЕОМ уводять закони розподілу випадкових величин $\sigma_в, S, N$ та їх числові характеристики. У програмі організують цикл для визначення випадкових реалізацій зазначених величин. З цими реалізаціями на кожному кроці циклу виконують дії за функціональною залежністю (або $\xi = \sigma_в S / N$, або $z = \sigma_в S - N$), унаслідок чого одержують випадкову реалізацію ξ або z. Отримавши необхідну кількість таких реалізацій (з необхідною точністю) і порівнявши ξ з 1, а z з 0, визначають оцінку надійності елемента за формулою $H^* = m/n$, де m – кількість элементів, що не відмовили (при ξ > 1 або z > 0); n – загальна кількість кроків у циклі (кількість статистичних випробувань).

2. Модифікований метод статистичних випробувань. При цьому методі в кожному випробуванні фіксується величина z або ξ. Отримані значення z або ξ розбивають на розряди (інтервали), будують гістограму розподілу, визначають теоретичний закон розподілу за гістограмою із застосуванням методів математичної статистики і вже з теоретичного закону розподілу знаходять аналітичну ймовірність безвідмовної роботи або ймовірність відмови елементів.

Цей метод є більш наближеним, але він завжди дає кінцевий результат уже при 200–250 статистичних випробуваннях.

Показниками надійності можуть бути числа, що змінюються від нуля до одиниці.

Іноді надійність, близьку до одиниці, вимірюють у логарифмічних одиницях (белах), визначаючи рівень надійності як $H_\delta = -\lg(1 - H)$.

У розрахунках, що ґрунтуються на гіпотезі про нормальність усіх параметрів, використовують гауссів показник надійності H_γ, пов'язаний з надійністю H залежністю

$$H = F^*\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-m_z/\sigma_z} e^{-t^2/2} dt = F^*(H_\gamma), \text{ тобто } H_\gamma = \left(m_z / \sigma_z\right),$$

де $F^*(H_\gamma)$ – функція нормованого нормального закону розподілу, тоді квантиль $H_\gamma = F^{*-1}(H)$.

Як приклад наведемо кілька значень надійності, виражених у різних показниках:

H:	0,9	0,99	0,999	0,9999	$0,9_5$	$0,9_6$
H_δ:	1	2	3	4	5	6
H_γ:	1,28	2,33	3,1	3,71	4,26	4,75

При великих значеннях гауссова показника надійності (H_γ > 3,0) є спеціальні таблиці переведення гауссової міри надійності в звичайну [6].

4.3. Загальний вираз для ймовірності безвідмовної роботи

Позначимо через f_{σ_N} щільність розподілу напружень σ_N, а через f_{σ_R} – щільність розподілу міцності σ_R (рис. 4.6).

Тоді за означенням імовірність безвідмовної роботи має вигляд

$$H = P(\sigma_R > \sigma_N) = P(z = \sigma_R - \sigma_N > 0). \qquad (4.10)$$

Заштрихована ділянка на рис. 4.6 – це область перекриття розподілів напруження і міцності, які характеризуються певною ймовірністю відмови. Імовірність того, що деяке значення напруження потрапляє в невеликий інтервал завширшки *dσ,* дорівнює площі елемента *dσ* (рис. 4.7), таким чином,

$$P\left(\sigma_0 - \frac{d\sigma}{2} \le \sigma_0 + \frac{d\sigma}{2}\right) = f_{\sigma_N}(\sigma) d\sigma .$$

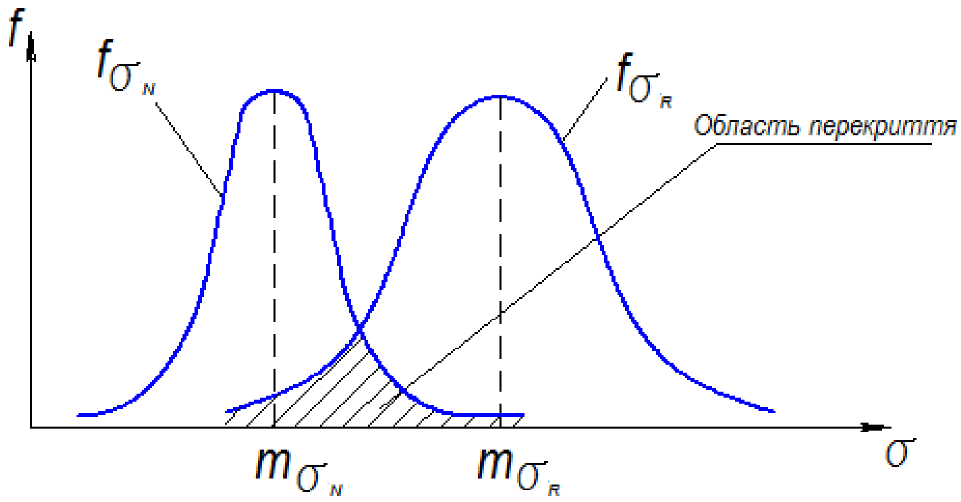


Рис. 4.6. Щільності розподілу f_{σ_N} і f_{σ_R}

Імовірність того, що міцність σ_R є більшим за деяке значення напруження σ_0, задається виразом

$$P(\sigma_R > \sigma_0) = f_{\sigma_N}(\sigma)d\sigma .$$

Імовірність того, що значення напруження потрапляє в малий інтервал $d\sigma$, а міцність σ_R перевищує напруження, що задається цим інтервалом, за умови, що випадкові величини (напруження і міцність) є незалежними, має вигляд

$$f_{\sigma_N}(\sigma_0)d\sigma \int_{\sigma_0}^{\infty} f_{\sigma_R}(\sigma)d\sigma .$$

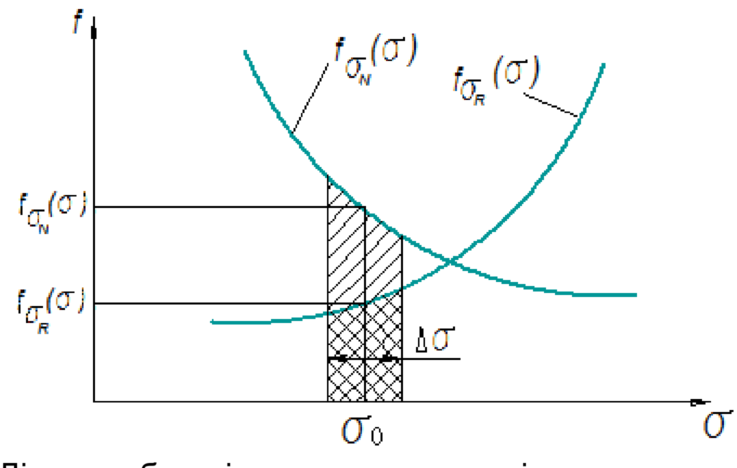


Рис. 4.7. Ділянка області перекриття розподілу напруження і міцності

У цьому випадку ймовірність безвідмовної роботи – це ймовірність того, що міцність σ_R перевищує напруження σ_0 для всіх можливих значень напружень σ і, отже, визначається рівнянням

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma_N}(\sigma)\left[\int_{\sigma}^{\infty} f_{\sigma_R}(\sigma)d\sigma\right]d\sigma , \qquad (4.11)$$

або

$$H=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma_N}(\sigma)\left[1-F_{\sigma_R}(\sigma)\right]d\sigma. \qquad (4.12)$$

Імовірність безвідмовної роботи можна також розрахувати, виходячи з того, що напруження є меншим від міцності. Імовірність того, що значення міцності σ_R потрапляє в малий інтервал $d\sigma$, визначається виразом

$$P(\sigma_0-\frac{\mathrm{d}\sigma}{2}\le\sigma_R\le\sigma_0+\frac{\mathrm{d}\sigma}{2})=f_{\sigma R}(\sigma)d\sigma,$$

а ймовірність того, що напруження є меншим за σ_0, має вигляд

$$P(\sigma_N<\sigma_0)=\int_{-\infty}^{\sigma_0} f_{\sigma_N}(\sigma)d\sigma.$$

Уважаючи, що напруження і міцність є незалежними величинами, визначаємо ймовірність того, що значення міцності потрапляє в малий інтервал $d\sigma$, а значення напруження σ_N не перевищує σ_0:

$$f_{\sigma_R}(\sigma_0)d\sigma\int_{-\infty}^{\sigma_0} f_{\sigma_N}(\sigma)d\sigma.$$

Отже, імовірність безвідмовної роботи елемента при всіх можливих значеннях міцності σ_R має вигляд

$$H=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma_R}(\sigma)\left[\int_{-\infty}^{\sigma} f_{\sigma_N}(\sigma)d\sigma\right]d\sigma, \qquad (4.13)$$

або

$$H=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma_R}(\sigma)F_{\sigma_N}(\sigma)d\sigma. \qquad (4.14)$$

Імовірність відмови визначають як

$$\overline{H}=P(\sigma_R<\sigma_N)=1-H.$$

Підставляючи сюди вираз для H з формули (4.12), отримуємо

$$\overline{H}=1-\int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma_N}(\sigma)\left[1-F_{\sigma_R}(\sigma)\right]d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty} F_{\sigma_R}(\sigma)f_{\sigma_N}(\sigma)d\sigma. \qquad (4.15)$$

Крім того, використовуючи формули (4.14), маємо

$$\overline{H}=1-\int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma_R}(\sigma)F_{\sigma_N}(\sigma)d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-F_{\sigma N}(\sigma)\right]f_{\sigma_R}(\sigma)d\sigma. \qquad (4.16)$$

Припустимо, що σ_R і σ_N – незалежні невід'ємні випадкові величини. Уведемо випадкову величину $y=\sigma_R-\sigma_N$. Тепер можна визначити ймовірність безвідмовної роботи як

$$H=P(y>0). \qquad (4.17)$$

4.4. Обчислення ймовірності безвідмовної роботи при нормальному розподілі несної здатності (міцності) і навантаження (напруження)

Щільність нормального розподілу напруження σ_N має вигляд

$$f_{\sigma_N}(\sigma)=\frac{1}{\sigma_{\sigma_N}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(\sigma-m_{\sigma_N}\right)^2}{2\sigma^2{}_{\sigma_N}}\right], \tag{4.18}$$

а щільність нормального розподілу міцності σ_R –

$$f_{\sigma_R}(\sigma)=\frac{1}{\sigma_{\sigma_R}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(\sigma-m_{\sigma_R}\right)^2}{2\sigma^2{}_{\sigma_N}}\right], \tag{4.19}$$

де m_{σ_N}, m_{σ_R} – математичні сподівання напруження і міцності;
σ_{σ_N}, σ_{σ_R} – середньоквадратичні відхилення напруження і міцності.

Уведемо випадкову величину $y = \sigma_R - \sigma_N$. Відомо, що випадкова величина y має нормальний розподіл з математичним сподіванням

$$m_y = m_{\sigma_R} - m_{\sigma_N} \tag{4.20}$$

і середньоквадратичним відхиленням

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma^2{}_{\sigma_R} + \sigma^2{}_{\sigma_N}}\ , \tag{4.21}$$

що показано на рис. 4.8.

Тепер імовірність безвідмовної роботи можна виразити через y:

$$H = P(y>0) = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(y-m_y\right)^2}{2\sigma^2{}_y}\right\}dy\ . \tag{4.22}$$

Якщо $z = (y - m_y)/\sigma_y$, то $\sigma_y\, dz = dy$. При $y = 0$ нижня межа випадкової величини z має вигляд

$$z=\frac{0-m_y}{\sigma_y}=-\frac{m_{\sigma_R}-m_{\sigma_N}}{\sqrt{\sigma^2_{\sigma_R}+\sigma^2_{\sigma_N}}}, \tag{4.23}$$

а при $y \to +\infty$ верхня межа $z \to +\infty$. Отже,

$$H=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{m_{\sigma_R}-m_{\sigma_N}}{\sqrt{\sigma^2_{\sigma_R}+\sigma^2_{\sigma_N}}}}^{+\infty}\exp\left\{-z^2/2\right\}dz\,. \tag{4.24}$$

Зрозуміло, що $z = (y - m_y)/\sigma_y$ є нормованою випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Отже, імовірність безвідмовної роботи можна знайти з допомогою таблиць функції нормального розподілу.

Співвідношення (4.23), що використовується для визначення нижньої межі нормованої випадкової величини z, розподіленої за нормальним законом, зазвичай називають рівнянням зв'язку.

Формулу (4.24) можна записати так:

$$H = 1 - \Phi\left(-\frac{m_{\sigma_R} - m_{\sigma_N}}{\sqrt{\sigma_{\sigma_R}^2 + \sigma_{\sigma_N}^2}}\right) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{m_{\sigma_R} - m_{\sigma_N}}{\sqrt{\sigma_{\sigma_R}^2 + \sigma_{\sigma_N}^2}}\right), \quad (4.25)$$

де $\Phi\left(\frac{m_{\sigma_R} - m_{\sigma_N}}{\sqrt{\sigma_{\sigma_R}^2 + \sigma_{\sigma_N}^2}}\right)$ – функція Лапласа.

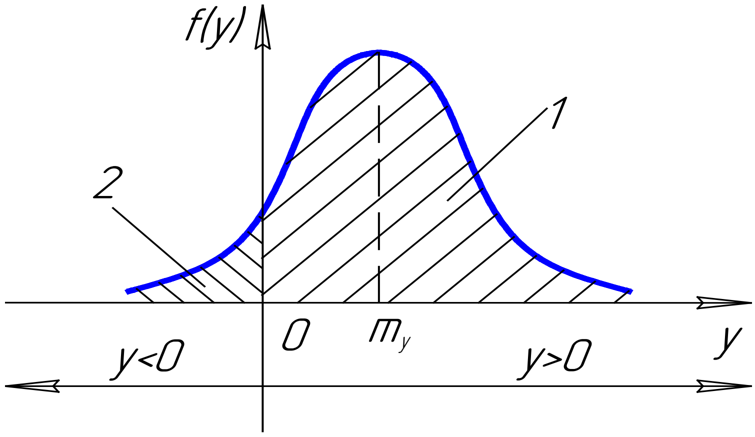


Рис. 4.8. Щільність розподілу випадкової величини y:
1 – імовірність безвідмовної роботи елемента; 2 – імовірність відмови

Приклад 4.3. Деталь ЛА здатна витримати певні навантаження. Відомо, що внаслідок змінення навантаження напруження має нормальний розподіл з математичним сподіванням m_{σ_N} = 300 МПа і середньо-квадратичним відхиленням σ_{σ_N} = 30 МПа. Унаслідок коливань характеристик матеріалу й допусків на розміри міцність має нормальний розподіл з m_{σ_R} = 400 МПа і σ_{σ_R} = 40 МПа. Обчислити ймовірність безвідмовної роботи елемента.

Розв'язання. Нижня межа інтеграла для обчислення надійності *H* визначається як $z = -\frac{400 - 300}{\sqrt{40^2 + 30^2}} = -\frac{100}{50} = -2{,}0$.

З таблиці для нормального розподілу знаходимо, що $H = 0{,}9777$.

Приклад 4.4. Така сама умова, тільки m_{σ_N} = 350 МПа; σ_{σ_N} = 40 МПа; m_{σ_R} = 820 МПа; σ_{σ_R} = 80 МПа. Через погане термічне оброблення й великі коливання навколишньої температури значення σ_{σ_R} збільшується до 150 МПа. Обчислити ймовірність безвідмовної роботи елемента.

Розв'язання. Звичайний коефіцієнт безпеки, який визначається як відношення середньої міцності до середнього напруження, має вигляд $f = \frac{m_R}{m_{\sigma_N}} = \frac{820}{350} = 2{,}343$. Для обчислення ймовірності безвідмовної роботи елемента використовуємо рівняння зв'язку. Визначаємо ймовірність безвідмовної роботи:

$$z_1 = -\frac{820-350}{\sqrt{80^2+40^2}} = -\frac{470}{89{,}44} = -5{,}255,\ H_1 = 0{,}9999$$ у першому випадку;

$$z_2 = -\frac{820-350}{\sqrt{150^2+40^2}} = -\frac{470}{155{,}24} = -3{,}028,\ H_2 = 0{,}9987$$ у другому випадку.

Отже, надійність елемента знизилася через збільшення мінливості міцності матеріалу елемента. Обчислений вище коефіцієнт безпеки не змінюється.

4.5. Оцінювання ймовірності безвідмовної роботи силового елемента при раптових відмовах

На відміну від наявних методів розрахунку, при такому підході характеристики ймовірнісного опису навантажень (напружень) і несної здатності (міцності) безпосередньо входять у формули для визначення надійності – імовірності безвідмовної роботи силового елемента. У цьому випадку можуть мати місце два механізми відмови силового елемента конструкції:

– раптова відмова – при перевищенні діючих напружень (навантаження) і міцності (несної здатності);

– поступова відмова – при накопиченні пошкоджень через утому й зношення.

У разі раптової відмови

$$H = P(0 < R - N < \infty) = F\left(\frac{m_{(R-N)}}{\sigma_{(R-N)}}\right), \tag{4.26}$$

де $F(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\gamma}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ – табульована нормальна функція розподілу (для заданої надійності $H_{зад}$ за таблицями можна знайти значення цієї функції); γ – квантиль нормального розподілу, або гауссів рівень надійності H_γ. Надалі вважатимемо, що $\gamma = H_\gamma$.

Тоді можна записати

$$\gamma = \frac{m_{R-N}}{\sigma_{R-N}} = \frac{m_R - m_N}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_N^2}} = \frac{m_{\sigma_R} - m_{\sigma_N}}{\sqrt{\sigma_{\sigma_R}^2 + \sigma_{\sigma_N}^2}}. \tag{4.27}$$

Як відомо, для пружних систем залежність максимальних напружень від навантаження N у загальному вигляді можна записати так: $\sigma_N = kN$, а $m_{\sigma_N} = km_N$, при цьому рівняння зв'язку має такий вигляд:

$$\gamma = -\frac{m_{\sigma_R} - km_N}{\sqrt{\sigma^2_{\sigma_R} + k^2\sigma^2_N}}. \qquad (4.28)$$

Розв’язавши це рівняння відносно k, отримаємо

$$k = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}, \qquad (4.29)$$

де $\alpha = m^2_N - \gamma^2\sigma^2_N$; $\beta = m^2_{\sigma_R} - \gamma^2\sigma^2_{\sigma_R}$; $\xi = 2m_{\sigma_R}m_N$.

Часто більш зручним і наочним є запис цього виразу в частково безрозмірному вигляді, який запропонував А. В. Ржаніцин [14].

Якщо позначити через коефіцієнти варіації $V_R = \sigma_{\sigma_R} / m_{\sigma_R}$ і $V_N = \sigma_N / m_N$, то можна записати

$$k = \frac{2m_{\sigma_R}m_N - \sqrt{4m^2_R m^2_N - 4\alpha\beta}}{2\left(m^2_N - \gamma^2\sigma^2_N\right)} = \frac{2m_{\sigma_R}m_N\left[1 - \sqrt{1 - \left(1 - \gamma^2V^2_N\right)\left(1 - \gamma^2V^2_R\right)}\right]}{2m^2_N\left(1 - \gamma^2V^2_N\right)} =$$

$$= \frac{m_R}{m_N}\frac{\left(1 - \gamma^2V^2_N\right)\left(1 - \gamma^2V^2_R\right)}{\left(1 - \gamma^2V^2_N\right)}\left[\frac{1}{1 + \gamma\sqrt{V^2_R + V^2_N - \gamma^2V^2_RV^2_N}}\right] =$$

$$= \frac{m_R}{m_N}\left[\frac{\left(1 - \gamma^2V^2_R\right)}{1 + \gamma\sqrt{V^2_R + V^2_N - \gamma^2V^2_RV^2_N}}\right]. \qquad (4.30)$$

З цього виразу видно, що не при всіх значеннях V_R і V_N можливим є існування конструкції заданої надійності. Зокрема, при $V_R > 1/\gamma$ не існує конструкції, що має гауссів рівень надійності γ. Зміна V_R сильніше впливає на k, ніж зміна V_N. Тому особливо важливо зменшити величину V_R. Один з можливих шляхів – усічення закону розподілу несної здатності шляхом відбраковування матеріалу конструкції. Так, усічення нормального закону розподілу на рівні $\pm 2\sigma$ дає $V^{усіч}_R = 0{,}9V_R$, усічення на рівні $\pm\sigma$ – $V^{усіч}_R = 0{,}54V_R$.

Якщо значення V_R і V_N є невеликими, то їх квадратами, помноженими на γ^2, можна знехтувати порівняно з одиницею. Тоді отримуємо наближену формулу

$$k = \frac{m_R}{m_N\,(1 + \gamma\sqrt{V^2_R + V^2_N})}. \qquad (4.31)$$

4.6. Визначення надійності силового елемента з використанням номограм

При розрахунку надійності конструкцій зручно використовувати безрозмірні параметри:

– коефіцієнт запасу (надійності) $\eta = m_R / m_N$;

– коефіцієнт варіації несної здатності $V_R = \sigma_R / m_R$;

– коефіцієнт варіації навантаження $V_N = \sigma_N / m_N$.

Фізичний зміст цих коефіцієнтів неважко визначити за рис. 4.9.

Коефіцієнт надійності показує, наскільки зміщено математичне сподівання несної здатності відносно математичного сподівання навантаження. Коефіцієнти варіацій характеризують розсіювання випадкових значень несної здатності й навантаження відносно їх математичних сподівань. На рис. 4.9 показано також граничні відхилення навантаження $\Delta_N = 3\sigma_N$ і несної здатності $\Delta_R = 3\sigma_R$ відповідно до залежності $\Delta x_i = k\sigma_{xi}$, де k – кількість середньоквадратичних відхилень. Наприклад, при нормальному розподілі значенню $k = 3$ відповідає ймовірність $\gamma = 0{,}9986$.

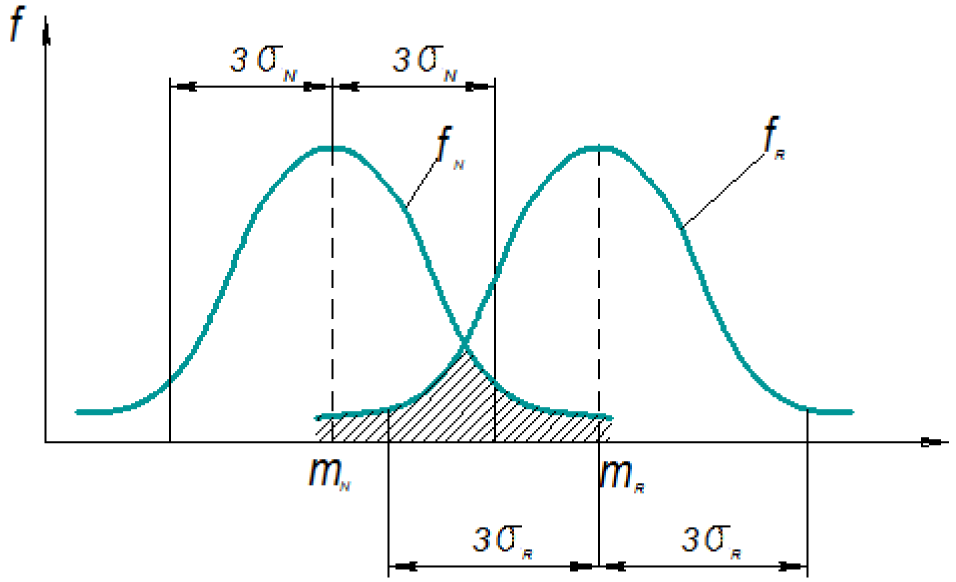


Рис. 4.9. Щільність розподілу навантаження й несної здатності

У разі одного граничного стану при відсутності кореляційного зв'язку між несною здатністю конструкції й навантаженням аргумента рівняння зв'язку $\gamma = \dfrac{m_R - m_N}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_N^2}}$ можна звести до вигляду

$$\gamma = \frac{\eta - 1}{\sqrt{\eta^2 V_R^2 + V_N^2}}. \tag{4.32}$$

Таким чином, імовірністю неруйнування елемента є функція трьох параметрів $P = P(\eta, V_R, V_N)$.

Для розрахунку надійності конструкції за одним граничним станом замість таблиць функції $\Phi(\gamma)$ можна скористатися номограмою (рис. 4.10), яку побудовано на основі залежності $P(\eta, V_R, V_N)$. Входами в номограмму є значення η і $V = \frac{1}{\eta}\sqrt{\eta^2 V_R^2 + V_N^2}$.

При лінійній залежності між навантаженням і напруженням, що найчастіше має місце в практиці розрахунків інженерних конструкцій, можна вважати, що запас міцності – це відношення мінімальної несної здатності R_{min} до максимального зовнішнього навантаження N_{max}:

$$\eta = R_{min}/N_{max}. \tag{4.33}$$

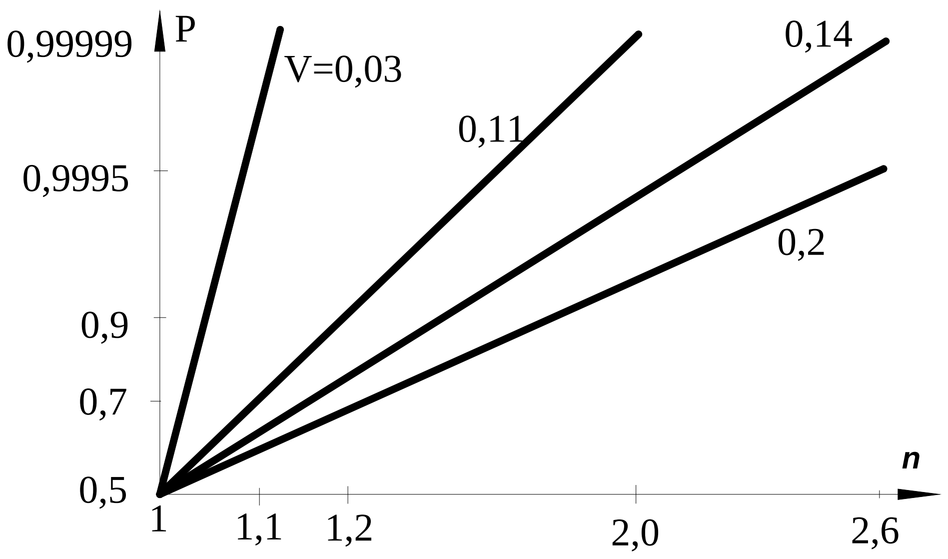


Рис. 4.10. Номограма для розрахунку ймовірності неруйнування конструкції в разі одного граничного стану

Для ЛА N_{max} є максимальним розрахунковим навантаженням $N^P{}_{max}$, яке визначається через коефіцієнт безпеки f і максимальне експлуатаційне навантаження:

$$N^P{}_{max} = fN^e{}_{max}. \tag{4.34}$$

У статистичній постановці розрахункові (нормативні) величини $N^e{}_{max}$ і R_{min} з урахуванням розсіювання мають бути зв'язаними зі статистичними характеристиками:

$$N^e{}_{max} = m_N + k_N\sigma_N;$$

$$R_{min} = m_R + k_R\sigma_R, \tag{4.35}$$

де m_N, m_R – середні значення навантаження N і несної здатності конструкції R; σ_N, σ_R – середньоквадратичні відхилення величин N і R; k_N, k_R – частки відхилення розрахункових величин $N^e{}_{max}$ і R_{min} від відповідних значень m_N і m_R (у частках середньоквадратичного відхилення).

Беручи до уваги вирази для коефіцієнтів варіації величин N та R, отримуємо новий вираз для коефіцієнта запасу міцності:

$$\eta = \frac{\mathrm{R}_{\min}}{\mathrm{N}_{\max}} = \frac{m_R\left(1 - k_R V_R\right)}{f m_N\left(1 + k_N V_N\right)}, \tag{4.36}$$

або

$$\eta = \frac{1}{f} f_{ум} k_{впл}, \tag{4.37}$$

де $k_{впл} = \dfrac{\left(1 - k_R V_R\right)}{\left(1 + k_N V_N\right)}$ – коефіцієнт впливу, що враховує вплив розсіювання навантаження і несної здатності; $f_{ум} = m_R / m_N$ – умовний коефіцієнт запасу, який відповідає відношенню середніх значень m_R і m_N.

З огляду на наведені вище вирази, можна отримати більш зручну для практичного використання формулу для гауссових значень надійності γ:

$$\gamma = \frac{f_{ум} - 1}{V_R \sqrt{f_{ум}^2 + \chi^2}}, \tag{4.38}$$

де $\chi = V_N / V_R$ – відношення коефіцієнтів варіації навантаження й несної здатності.

Усе це дає можливість зв'язати традиційний коефіцієнт безпеки f з імовірністю безпечної роботи H, для чого вираз (4.38) розв'язується відносно $f_{ум}$:

$$f_{ум} = \frac{1 + \sqrt{1 - \left[1 - \gamma^2 V_R^2\right]\left[1 - \gamma^2 V_N^2\right]}}{1 - \gamma^2 V_R^2}. \tag{4.39}$$

Замість формули (4.39) зручніше користуватися номограмами (рис. 4.11), побудованими за формулою (4.38).

Зазначені формули дають можливість за заданими статистичними характеристиками навантаження N і несної здатності конструкції R із урахуванням розсіювання цих параметрів розв'язувати дві задачі:

1. За формулами (4.38) і $H = \Phi(\gamma)$ визначати ймовірність безвідмовної роботи конструкції.

2. За формулою (4.39) або за номограмою, зображеною на рис. 4.11, при заданій ймовірності безвідмовної роботи H визначати умовний коефіцієнт запасу $f_{ум}$, а потім за формулою (4.37) – мінімальне значення коефіцієнта безпеки f, який забезпечує задане значення ймовірності безвідмовної роботи H конструкції.

Отже, при визначенні коефіцієнта безпеки необхідно враховувати розсіяння (розкид) характеристик навантаження й несної здатності конструкції.

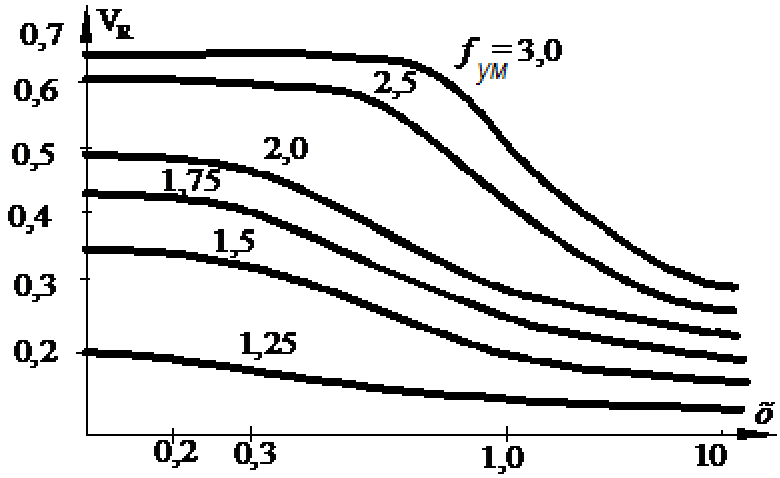


Рис. 4.11. Номограма, що зв'язує характеристику безвідмовної роботи γ зі статистичними характеристиками навантаження й несної здатності $f_{ум}$, V_N, V_R

4.7. Проектування елементів конструкції заданої надійності

4.7.1. Проектування з використанням залежності максимальних напружень від навантаження. Квазістатична задача

Точний та адекватний опис зовнішніх впливів і несної здатності матеріалу елемента конструкції потребує застосування методів теорії ймовірностей. У зв'язку з цим на перший план виходить така характеристика конструкції, як надійність, мірою якої є ймовірність безвідмовної роботи. Останніми роками набули значного розвитку методи розрахунку надійності конструкцій, що базуються на теоріях випадкових величин і функцій.

На відміну від наявних методів розрахунку за напруженнями, що допускається в загальному машинобудуванні, і за руйнівними навантаженнями в авіації й ракетній техніці, де ймовірнісна природа навантажень і несної здатності прихована або в коефіцієнті запасу міцності, або в коефіцієнті безвідмовності, в імовірнісних міцнісних розрахунках характеристики ймовірнісного опису навантажень і несної здатності безпосередньо входять у формули для визначення розмірів поперечного перерізу, що забезпечує задану надійність елементів конструкції. Такий підхід більш адекватно відображає реальну роботу елементів.

Під *квазістатичними задачами* розуміють задачі, у яких випадкові фактори описуються з допомогою скінченної кількості випадкових величин. Область застосування квазістатичних методів не обмежується тими випадками, коли навантаження змінюється повільно (квазістатично). У деяких випадках випадкові процеси можна замінювати одновимірними випадковими величинами, утвореними з перетинів випадкового процесу, або випадкові динамічні навантаження можуть бути подані у вигляді детермінованих функцій часу, що залежать від скінченної кількості випадкових величин. Такі задачі часто розв'язуються під час розрахунку реальних конструкцій.

При ймовірнісному аналізі функції випадкових величин апроксимують шляхом розвинення в ряд Тейлора й обчислюють наближено значення перших двох моментів. У завданнях проектування із застосуванням ймовірнісного підходу такі характеристики, як навантаження, розміри поперечних перерізів елементів і міцність матеріалу, розглядають як випадкові величини, розподілені за нормальним законом з відомими першим і другим моментами.

Постановка задачі. Останнім етапом розрахунку будь-якої конструкції на міцність, жорсткість і стійкість є визначення її надійності й порівняння її з нормативною величиною. Якщо надійність конструкції дорівнює нормативній надійності або є більшою від неї, то розрахунок закінчено. Якщо ж надійність конструкції є меншою від нормативної, то необхідно змінювати розміри або матеріал й виконувати перерахунок доти, доки надійність конструкції не стане допустимою. Тому зручною є така методика розрахунку конструкцій, коли необхідна надійність заздалегідь закладається в проектовану конструкцію.

Для пружних конструкцій максимальні напруження $\sigma_{\max}$ у загальному вигляді можна записати так:

$$\sigma_{\max} = Kq, \tag{4.40}$$

а максимальні переміщення $\omega_{\max}$ – у вигляді залежності

$$\omega_{\max} = K^* q, \tag{4.41}$$

де K і K^* – коефіцієнти, що залежать від розмірів поперечних перерізів елементів конструкції. Для типових елементів конструкцій і навантажень значення K і K^* наведено в табл. 4.1 [2].

Аналогічні формули можна записати і для інших типів елементів конструкцій та інших схем навантажень.

Нехай на конструкцію діє випадкове навантаження q, закон розподілу якої $f_N(q)$ є відомим. Несна здатність матеріалу конструкції є випадковою величиною, і закон її розподілу $f_R(\sigma_R)$ є відомим. Потрібно визначити розміри поперечного перерізу конструкції з умови рівності її надійності заданій.

Як відомо, під мірою надійності розуміють імовірність того, що максимальне напруження, що виникає під дією навантаження, не перевищує несної здатності: $H = P(\sigma_R > \sigma_{\max})$, де H – надійність; P – імовірність події; σ_R – несна здатність; $\sigma_{\max} = \sigma_N$ – діюче максимальне напруження.

Таблиця 4.1

Значення коефіцієнтів K і K*

Тип елемента конструкції	K	K^*
Елемент, що розтягується	$\frac{1}{F}$	$\frac{1}{EF}$
Балка, що згинається	$\frac{\alpha\ell}{W_Z}$	$\frac{\ell^4}{\alpha^* EJ_z}$
Стрижень, що скручується	$\frac{1}{W_{кр}}$	$\frac{1}{GJ_{кр}}$
Сферична оболонка, навантажена внутрішнім тиском	$\frac{R}{2\delta}$	$\frac{R^2}{2E\delta}$
Циліндрична оболонка, навантажена внутрішнім тиском	$\frac{R}{\delta}$	$\frac{R^2}{E\delta}$
Прямокутна пластина завдовжки a і завширшки b	$\frac{\alpha_1 a^2}{\delta^2}$	$\frac{\alpha_1{}^* a^4}{E\delta^3}$

У таблиці позначено: F – площа поперечного перерізу; ℓ – довжина стрижня балки; W_z – момент опору при згинанні; J_z – осьовий момент інерції перерізу; $W_{кр}$ – момент опору при крученні; $J_{кр}$ – момент інерції при крученні; δ – товщина оболонки, пластини; R – радіус оболонки; E,G – модулі пружності при розтягуванні і зсуві відповідно; $\alpha, \alpha^*, \alpha_1, \alpha_1{}^*$ – коефіцієнти, що залежать від умов закріплення, навантаження і коефіцієнта Пуассона μ.

Якщо закон розподілу навантаження є відомим, то, користуючись правилами знаходження закону розподілу функцій випадкового аргумента, можна знайти закон розподілу максимальних напружень, що діють у конструкції $f_\sigma(\sigma_{\max})$:

$$f_\sigma(\sigma_{\max}) = \frac{1}{k} f_N\left(\frac{\sigma_{\max}}{k}\right). \qquad (4.42)$$

Тоді надійність можна визначити як

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(\sigma_R)\left[\int_{-\infty}^{\sigma_R} f_\sigma(\sigma_{\max})d\sigma\right]d\sigma, \qquad (4.43)$$

або

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(\sigma_{\max})\left[\int_{\sigma}^{\infty} f_R(\sigma_R)d\sigma\right]d\sigma. \qquad (4.44)$$

Підставивши відомі $f_\sigma(\sigma_{\max})$ і $f_R(\sigma_R)$ у (4.43) або (4.44) і виконавши інтегрування з урахуванням необхідної рівності H=$H_{зад}$, отримаємо вираз для визначення K:

$$K = \varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n, H_{зад}), \tag{4.45}$$

де a_1, a_2,..., a_n – відомі заздалегідь параметри законів розподілу навантаження й несної здатності.

Коли відомо K, можна легко знайти розміри поперечного перерізу.

Такий підхід можна застосувати й під час проектування конструкцій заданої надійності за жорсткістю. У цьому випадку під мірою надійності розуміють імовірність того, що максимальне переміщення не перевищує заданого значення, тобто рівняння (4.44) набуває вигляду

$$H = \int_{-\infty}^{\omega_{зад}} f^*{}_{\omega}(\omega) d\omega, \tag{4.46}$$

де

$$f_{\omega}{}^*(\omega) = \frac{1}{k^*} f_N \frac{\omega}{k^*}. \tag{4.47}$$

Зінтегрувавши (4.46) з урахуванням $H = H_{зад}$, отримаємо вираз для визначення K^*:

$$K^* = \varphi_2(a_1{}^*, a_2{}^*, \ldots, a_n{}^*, H_{зад}), \tag{4.48}$$

де $a_1{}^*$, $a_2{}^*$,..., $a_n{}^*$ – параметри законів розподілу навантаження.

Коли відомо K^*, легко можна знайти розміри поперечного перерізу.

Випадковий характер інших механічних характеристик, наприклад модуля пружності E, можна врахувати, використовуючи формулу повної ймовірності. Нехай модуль пружності E є випадковою велечиною, закон його розподілу $f_E(E)$ є відомим. Узявши модуль E таким, що дорівнює фіксованій величині E^*, визначимо повну ймовірність:

$$f_{\omega}{}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^*} f_N\left(\frac{\omega E^*}{K^*}\right) f_E(E) dE. \tag{4.49}$$

Підставивши вираз (4.49) у (4.46) і виконавши інтегрування з урахуванням необхідної рівності $H=H_{зад}$, отримаємо вираз для K^* з урахуванням випадкового характеру модуля E.

Аналогічно розв'язують задачу під час проектування заданої надійності за стійкістю. У цьому випадку під мірою надійності розуміють імовірність того, що діюче узагальнене навантаження не перевищує критичного. Таким чином, надійність за стійкістю

$$H = \int_{-\infty}^{q_{кр}} f_N(q) dq. \tag{4.50}$$

Розв'язавши це рівняння з урахуванням того, що $H=H_{зад}$, визначають $q_{кр}$; за $q_{кр}$ обчислюють розміри поперечного перерізу, що забезпечує задану надійність за стійкістю.

Геометричні параметри сортаменту, з якого виготовляють елементи конструкції (товщина листа, площа поперечного перерізу профілю, товщина стінок труб і т. ін.), також є випадковими величинами із законом розподілу $f_\delta(\delta)$ (зазвичай вони підпорядковуються нормальному закону розподілу). За залежностями (4.44), (4.46), (4.50) знайдемо розмір поперечного перерізу

$$\delta_{розр} = \delta_{ном} - \Delta, \tag{4.51}$$

де $\delta_{ном}$ – шуканий номінальний розмір; Δ – допуск на виготовлення, що залежить від закону розподілу $f_\delta(\delta)$ і довірчої ймовірності H_δ.

Таким чином,

$$\delta_{ном} = \delta_{розр} + \Delta. \tag{4.52}$$

Якщо $f_\delta(\delta)$ підпорядковується нормальному закону розподілу, то

$$\delta_{ном} = \delta_{розр} / (1 - z_\delta V_\delta), \tag{4.53}$$

де z_δ – гауссів рівень для ймовірності H_δ; $V_\delta = \sigma_\delta / m_\delta$ – коефіцієнт варіації випадкового розміру сортаменту.

Під час розрахунку випадкового розкиду геометричних параметрів перерізу в формули замість $H_{зад}$ необхідно підставляти $H_{зад} / H_б$, причому $H_б > H_{зад}$.

4.7.2. Проектування елементів конструкцій заданої надійності при нормальному розподілі навантаження й несної здатності

Випадок, коли розподіли навантаження і несної здатності підпорядковуються нормальному закону, широко застосовується й дає змогу отримати простий замкнений розв’язок. Використання нормального закону виправдовується в разі спільної дії досить великої кількості випадкових збурень, що підпорядковуються різним законам розподілу. Якщо серед них немає переважного, то результівний вплив згідно з центральною граничною теоремою теорії ймовірності має розподіл, близький до нормального. На практиці розподіли багатьох впливів відрізняються від нормального хоча б тому, що деякі параметри (границя міцності, розміри і т. ін.) не можуть бути величинами від’ємними. Але усічення законів розподілу зазвичай є невеликим, що дає змогу ігнорувати теоретичну нестрогість допущення для нормального розподілу.

Таким чином,

$$f_N(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q} \exp\left[-\frac{(q - m_q)^2}{2\sigma_q{}^2} \right];$$

$$f_R(\sigma_R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\sigma R}} \exp\left[-\frac{(\sigma_R - m_{\sigma_R})^2}{2\sigma_{\sigma R}{}^2} \right].$$

За правилами знаходження законів розподілу функції випадкового аргумента

$$f_\sigma(\sigma_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}K\sigma_q}\exp\left[-\frac{(\sigma_{\max} - Km_q)^2}{2K^2{\sigma_q}^2}\right]. \qquad (4.54)$$

Різниця $Z = \sigma_R - \sigma_{max}$ також буде розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням

$$m_z = m_{\sigma R} - m_{\sigma_{\max}} = m_{\sigma R} - Km_q \qquad (4.55)$$

і дисперсією

$$\sigma_z^2 = \sigma_R^2 + K^2\sigma_q^2. \qquad (4.56)$$

Тоді надійність

$$H = P(0 < \sigma_R - \sigma_{\max} < \infty) = P(0 < z < \infty) = \sum_0^\infty f(z)dz = F\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right), \qquad (4.57)$$

де $F(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}dt$ – табульована нормальна функція розподілу.

Для заданої надійності H за таблицями цієї функції можна знайти відповідне значення γ. Тоді запишемо

$$\frac{m_z}{\sigma_z} = \frac{m_{\sigma R} - Km_q}{\sqrt{\sigma_{\sigma R}^2 + k^2\sigma_q^2}} = \gamma. \qquad (4.58)$$

Розв’язавши це рівняння відносно K, отримаємо

$$K = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}, \qquad (4.59)$$

де

$$\alpha = m_q^2 - z^2\sigma_q^2; \;\; \beta = m_{\sigma R}^2 - z^2\sigma_{\sigma R}^2; \;\; z = 2m_{\sigma R}m_q. \qquad (4.60)$$

Знаючи K, легко знайти розміри поперечного перерізу.

Часто більш зручним і наочним є запис виразу (4.59) у частково безрозмірній формі. Якщо позначити $V_R = \sigma_{\sigma R}/m_{\sigma R}$; $V_q = \sigma_q/m_q$, то замість (4.59) можна записати

$$K = \frac{m_{\sigma R}\left(1 - \gamma^2V_R^2\right)}{m_q\left(1 + z\sqrt{V_R^2 + V_q^2 - \gamma^2V_R^2V_q^2}\right)}. \qquad (4.61)$$

З виразу (4.61) видно, що не при всіх значеннях V_R і V_q можна спроектувати конструкцію із заданою надійністю. Зокрема, при $V_R \geq 1/\gamma$ не існує конструкції, що має гауссів рівень надійності γ. Якщо коефіцієнти варіації V_R і V_q є невеликими, то добутком їх квадратів, помноженим на γ^2, можна знехтувати порівняно з одиницею. Тоді отримуємо наближену формулу

$$K = \frac{m_{\sigma_R}}{m_q\left(1+\gamma\sqrt{V_R^2+V_q^2}\right)}. \qquad (4.62)$$

При проектуванні конструкцій заданої надійності за жорсткістю для випадку нормального закону розподілу навантаження, ураховуючи, що $H=H_{зад}$, на основі (4.48) можна записати формулу для розрахунку K^*:

$$K^* = \frac{\omega_{зад}}{m_q + \gamma\sigma_q}. \qquad (4.63)$$

Для проектування конструкції заданої надійності за стійкістю в разі нормального закону розподілу навантаження для рівня $q_{кр}$, який визначає надійність, можна отримати

$$q_{кр} = m_q + \gamma\sigma_q. \qquad (4.64)$$

Знаючи $q_{кр}$, можна визначити розміри поперечного перерізу, які забезпечать задану надійність за стійкістю.

У всіх завданнях застосування ймовірнісного підходу до розрахунків при проектуванні такі характеристики, як навантаження, геометричні розміри поперечних перерізів силових елементів і міцність, розглядаються як випадкові величини. Аналітичні вирази для максимальних напружень і несної здатності різних елементів конструкцій є нелінійними функціями параметрів, що визначаються. Якщо функція випадкових величин $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є нелінійною або точно обчислити характеристики $m(U)$, $\sigma^2(U)$ практично неможливо через складність закону розподілу функції U, то застосовують спосіб наближеного визначення числових характеристик.

Часто використовують метод лінеаризації, який полягає в тому, що функція U з деяким наближенням замінюється лінійною, якщо обмежитися лінійними членами в розвиненні ряду Тейлора в околі точки $V\left[m(x_1), m(x_2), ..., m(x_n)\right]$, де сконцентровано ймовірності розподілу. Математичне сподівання функції приблизно дорівнює функції математичних сподівань аргументів:

$$m(U) = m_U \approx f(m_{x1}, m_{x2}, ..., m_{xn}).$$

Дисперсію функції U наближено визначають за виразом

$$\sigma^2(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = \sigma_U^2 \approx \left(\frac{df}{dx_1}U_V\right)^2 {\sigma_{x1}}^2 +$$

$$+\left(\frac{df}{dx_2}U_V\right)^2 {\sigma_{x2}}^2 + ... = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df}{dx_i}U_V\right)^2 \sigma_{x_i}^2.$$

Наведені вище наближені формули є тим точнішими, чим ближче функція U при наближенні до точки V стає лінійною. Для лінійної функції U ці формули є точними.

Як приклад практичного застосування наведених вище положень розглянемо проектування зварного сферичного балона (кулі-балона) високого тиску заданої надійності, що застосовується для тривалого зберігання газів або рідини на борту ЛА. Розрахункові напруження в стінці балона визначають за формулами безмоментної теорії оболонок [10]:

$$\sigma_{\max} = q_P R/(2\delta_{\min}),$$

де q_p – розрахункове значення внутрішнього тиску; R – радіус сфери (кулі-балона); $\delta_{\min}$ – мінімальна товщина стінки балона.

За руйнівне напруження $\sigma_{руйн}$ зазвичай беруть значення границі міцності матеріалу $\sigma_в$, помножене на коефіцієнт k, який ураховує зменшення границі міцності матеріалу в зоні зварного шва $(k \le 1)$: $\sigma_{руйн} = k\sigma_в$. Умову міцності беруть у вигляді співвідношення $\eta = \sigma_{руйн} / \sigma_{\max} \ge 1$. При $\eta = 1$ несну здатність для кулі-балона $q_{НЗ}$ визначають за залежністю $q_{НЗ} = 2k\sigma_в\delta / R$.

Математичне сподівання несної здатності визначається формулою

$$m_{q_{НЗ}} = 2m_k m_{\sigma_в} m_\delta / m_R,$$

а середньоквадратичне відхилення несної здатності так:

$$\sigma^2_{q_{НЗ}} = (2m_{\sigma_в} m_\delta / m_R)^2 \sigma_k^2 + (2m_k m_\delta / m_R)^2 \sigma^2_{\sigma_в} +$$

$$+ (2m_k m_{\sigma_в} / m_R)^2 \sigma_\delta^2 + (-2m_k m_{\sigma_в} m_\delta / m_R^2)^2 \sigma_R^2,$$

де $\sigma_k, \sigma_{\sigma_в}, \sigma_\delta, \sigma_R$ – середньоквадратичні відхилення коефіцієнта k, границі міцності матеріалу σ_b, товщини стінки кулі-балона δ і радіуса сфери (кулі-балона) R відповідно.

Найменший вплив на середнє відхилення несної здатності сферичних балонів спричиняє відхилення розміру середнього радіуса σ_R, а найбільший вплив – відхилення значення коефіцієнта σ_k.

У цьому випадку як напруження, так і міцність є випадковими величинами. Підставляючи відповідні величини в стандартне рівняння зв'язку $\gamma = -\dfrac{m_{q_{нн}} - m_q}{\sqrt{\sigma^2_{q_{нн}} + \sigma_q^2}}$, отримуємо

$$\gamma = -\frac{a m_\delta - m_q}{\sqrt{b m_\delta^2 + \sigma_q^2}},$$

де $a = 2m_k m_{\sigma_b} / m_R$ і $b = (2m_{\sigma_b}\sigma_k / m_R)^2 + (2m_k \sigma_{\sigma_b} / m_R)^2 +$

$$+ (2m_k m_{\sigma_b} V_\delta / m_R)^2 + (2m_k m_{\sigma_b} \sigma_R / m_R^2)^2.$$

Тут $V_\delta = \sigma_\delta / m_\delta$ – коефіцієнт варіації товщини стінки балона.

Розв'язавши це рівняння відносно шуканого параметра: m_δ – математичного сподівання товщини стінки балона, маємо

$$m_{\delta 1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

де $A = \gamma^2 b - a^2$, $B = 2am_q$, $C = \gamma^2 \sigma_q^2 - m_q^2$.

Таким чином, це рівняння має два корені: додатний і від'ємний. Від'ємний корінь не розглядаємо як такий, що не має сенсу. Додатний корінь $m_\delta = \dfrac{\sqrt{B^2 - 4AC} - B}{2A}$ дає значення товщини стінки кулі-балона, яке забезпечує задану ймовірність безвідмовної роботи (надійність) *Н*$_{зад}$, гауссів показник якої дорівнює γ.

Приклад 4.5. Спроектувати кулю-балон, навантажену внутрішнім тиском m_q = $30 \cdot 10^6$ Па, $\sigma_q = 0{,}12 \cdot 10^6$ Па. Стінку виготовлено з титанового сплаву, для якого $m_{\sigma_b} = 1160 \cdot 10^6$ Па, $\sigma_{\sigma в} = 36 \cdot 10^6$ Па. Радіус кулі-балона має значення m_R = 0,18 м і σ_R = 0,0015 м. Коефіцієнт, що враховує зменшення границі міцності матеріалу в зоні зварного шва, має значення m_K = 0,8 і $\sigma_K = 0{,}04$. Необхідно визначити товщину стінки оболонки m_δ при заданій надійності *Н*$_{зад}$ = 0,9999, при цьому гауссів показник γ = 3,72. Узяти $\sigma_\delta = 0{,}033 m_\delta$.

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти *a, b, A, B* і *C*:

$$a = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 1160 \cdot 10^6 / 0{,}18 = 10311{,}111 \cdot 10^6;$$

$$b = (2 \cdot 1160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}04 / 0{,}18)^2 + (2 \cdot 0{,}8 \cdot 36 \cdot 10^6 / 0{,}18)^2 +$$
$$+ (2 \cdot 0{,}8 \cdot 1160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}0015 / 0{,}18^2)^2 +$$
$$+ (2 \cdot 0{,}8 \cdot 1160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}033 / 0{,}18)^2 = 1261{,}7481 \cdot 10^{12};$$

$$A = 1261{,}7481 \cdot 10^{12} \cdot 3{,}72^2 - (10311{,}111 \cdot 10^6)^2 = -1{,}0630155 \cdot 10^{20};$$

$$B = 2 \cdot 10311{,}111 \cdot 10^6 \cdot 30 \cdot 10^6 = 6{,}1866666 \cdot 10^{12};$$

$$C = (0{,}12 \cdot 10^6)^2 \cdot 3{,}72^2 - (30 \cdot 10^6)^2 = 1{,}0927296 \cdot 10^{15}.$$

Підставимо значення коефіцієнтів *A, B* і *C* у вираз для додатного кореня й отримаємо значення товщини стінки балона:

$$m_\delta = \frac{-6{,}1866666 \cdot 10^{17} + \sqrt{(6{,}1866666 \cdot 10^{17})^2 + 4 \cdot 1{,}0630155 \cdot 10^{20} \cdot 1{,}0927296 \cdot 10^{15}}}{2 \cdot 1{,}0630155 \cdot 10^{20}} =$$

$$= 3{,}2061409 \cdot 10^{-3}\,м.$$

Вище надійність оцінювали в припущенні, що напруження (навантаження) і міцність (несна здатність) є випадковими величинами, розподіленими за нормальним законом з відомими першим і другим моментами. Слід мати на увазі, що в реальних задачах проектування можуть розглядатися інші розподіли, що базуються на наявних даних [4].

4.8. Оптимізація в задачах імовірнісних розрахунків на міцність

Розв’язання задач інженерного проектування й забезпечення надійності потребує компромісного вибору одного або декількох рівнів, якими задаються. Характеристики виробу залежать як від постійних, так і від регульованих параметрів. Як відомо, надійність залежить від співвідношення між розподілами несної здатності (міцності) і навантаження (напружень), причому деякі параметри цих розподілів залежать від конструктивних параметрів. Деякі параметри можна змінити, але для цього необхідно витратити певні ресурси. Може знадобитися або мінімізація витрат при умові, що буде досягнуто необхідний рівень надійності, або максимізація надійності при деяких обмеженнях на кількість ресурсів, що витрачаються на досягнення потрібних значень цих параметрів.

Для випадку, коли навантаження (напруження) і несна здатність (міцність) є незалежними випадковими величинами, розподіленими за нормальним законом, імовірність безвідмовної роботи визначається формулою

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma}^{\infty} e - \frac{x^2}{2} dx = \Phi(z) \tag{4.65}$$

і залежить від значення нижньої межі інтеграла (гауссової міри надійності), що обчислюється за формулою (рівнянням зв'язку)

$$\gamma = -\frac{m_{\sigma_R} - m_{\sigma \max}}{\sqrt{\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma \max}{}^2}}. \tag{4.66}$$

Для максимізації надійності потрібно зменшити значення цієї межі.

Нехай функція $C_1(m_{\sigma R})$ виражає залежність вартості від середньої міцності. Для підвищення середньої міцності може знадобитися застосування кращих матеріалів, інших процесів термічного оброблення або кращих методів контролю над процесами отримання матеріалів, що, природно, збільшує витрати. Таким чином, $C_1(m_{\sigma R})$ є монотонно зростальною функцією аргумента $m_{\sigma R}$.

Нехай функція $C_2(\sigma_{\sigma R})$ виражає залежність вартості від середньо-квадратичного відхилення несної здатності (міцності) $\sigma_{\sigma R}$. З огляду на надійність при симетричних розподілах бажані менші значення $\sigma_{\sigma R}$. Для зменшення $\sigma_{\sigma R}$ необхідно усунути фактори, що спричиняють змінність міцності: недостатня чистота оброблення поверхні деталі, зменшення концентраторів напружень, ефект сколювання або неоднорідна внутрішня структура матеріалів. Таким чином, $C_2(\sigma_{\sigma R})$ є монотонно спадною функцією $\sigma_{\sigma R}$.

Нехай $C_3(m_{\sigma max})$ і $C_4(\sigma_{\sigma max})$ – функції витрат, пов'язані з математичним сподіванням $m_{\sigma max}$ і середньоквадратичним відхиленням напруження $\sigma_{\sigma max}$ відповідно. Очевидно, що при менших значеннях $m_{\sigma max}$ і $\sigma_{\sigma max}$ імовірність безвідмовної роботи буде вищою. Для зменшення цих величин необхідно збільшити розміри елемента й зменшити коливання розмірів, а також краще контролювати навантаження, що діють на елементи конструкції. Таким чином, $C_3(m_{\sigma max})$ і $C_4(\sigma_{\sigma max})$ також є монотонно спадними функціями аргументів $m_{\sigma max}$ і $\sigma_{\sigma max}$ відповідно.

Уведемо аналітичні вирази для різних функцій витрат:

$$\begin{aligned} C_1(m_{\sigma_R}) &= \alpha_1 m_{\sigma_R}{}^{\beta_1}; \\ C_2(\sigma_{\sigma_R}) &= \alpha_2 \sigma_{\sigma_R}{}^{\beta_2}; \\ C_3(m_{\sigma_{\max}}) &= \alpha_3 m_{\sigma_{\max}}{}^{\beta_3}; \\ C_4(\sigma_{\sigma_{\max}}) &= \alpha_4 \sigma_{\sigma_{\max}}{}^{\beta_4}, \end{aligned} \tag{4.67}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – статистичні коефіцієнти, більші від нуля; $\beta_1>1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ – статистичні коефіцієнти, менші від нуля.

Усі ці функції є опуклими, оскільки мають додатну другу похідну.

Розглянемо першу задачу оптимізації, коли потрібно мінімізувати загальні витрати при обмеженні, згідно з яким елемент повинен мати певний необхідний рівень надійності: мінімізувати загальні витрати

$$C_\Sigma = C_1(m_{\sigma R}) + C_2(\sigma_{\sigma R}) + C_3(m_{\sigma\, max}) + C_4(\sigma_{\sigma\, max}) \tag{4.68}$$

при обмеженні

$$\frac{m_{\sigma_R} - m_{\sigma\max}}{\sqrt{\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma maz}{}^2}} \ge \gamma\,, \tag{4.69}$$

де γ визначається з допомогою рівняння зв'язку при заданій імовірності безвідмовної роботи елемента (надійності). У формулі (4.69) γ являє собою те ж саме значення γ, що і в рівнянні зв'язку (4.66), але взяте з протилежним знаком.

При оптимізації використовуємо метод невизначених множників Лагранжа (метод функції Лагранжа). Цей метод не потребує визначення залежних і незалежних параметрів. Схема цього методу є такою: складають функцію Лагранжа, знаходять частинні похідні за параметрами та невизначеними множниками Лагранжа, прирівнюють їх до нуля, з допомогою отриманої системи лінійних рівнянь будь-яким методом визначають стаціонарну точку, у якій спостерігається екстремум. Функція Лагранжа L, пов'язана із завданням оптимізації (формули (4.68) і (4.69)), набуває вигляду

$$L(m_{\sigma R}, \sigma_{\sigma R}, m_{\sigma max}, \sigma_{\sigma max}. \lambda) = C_1(m_{\sigma R}) + C_2(\sigma_{\sigma R}) + C_3(m_{\sigma max}) +$$
$$+ C_4(\sigma_{\sigma max}) + \lambda[m_{\sigma R} - m_{\sigma max} - \gamma(\sigma_{\sigma R}^{\,2} + \sigma_{\sigma max}^{\,2})^{0,5}], \tag{4.70}$$

де λ – невизначений множник Лагранжа.

Щоб знайти локально оптимальні розв'язки, здиференціюємо функцію Лагранжа за відповідними змінними й прирівняємо похідні до нуля:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial m_{\sigma_R}} = \frac{\partial C_1(m_{\sigma_R})}{\partial m_{\sigma_R}} + \lambda = 0;\\
&\frac{\partial L}{\partial m_{\sigma_{\max}}} = \frac{\partial C_3(m_{\sigma_{\max}})}{\partial m_{\sigma_{\max}}} - \lambda = 0;\\
&\frac{\partial L}{\partial \sigma_{\sigma_R}} = \frac{\partial C_2(\sigma_{\sigma_R})}{\partial \sigma_{\sigma_R}} - \lambda\gamma\sigma_{\sigma_R}(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} = 0;\\
&\frac{\partial L}{\partial \sigma_{\sigma_{\max}}} = \frac{\partial C_4(\sigma_{\sigma_{\max}})}{\partial \sigma_{\sigma_{\max}}} - \lambda\gamma\sigma_{\sigma_{\max}}(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} = 0;\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}} - \gamma(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} = 0.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

З урахуванням аналітичних виразів для функцій витрат (4.67) отримують систему рівнянь, що відповідає рівнянням (4.71):

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\beta_1 m_{\sigma_R}{}^{\beta_1 - 1} + \lambda = 0;\\
&\alpha_3\beta_3 m_{\sigma_{\max}}{}^{\beta_3 - 1} - \lambda = 0;\\
&\alpha_2\beta_2 \sigma_{\sigma_R}{}^{\beta_2 - 1} - \lambda\gamma\sigma_{\sigma_R}(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} = 0;\\
&\alpha_4\beta_4 \sigma_{\sigma_{\max}}{}^{\beta_4 - 1} - \lambda\gamma\sigma_{\sigma_{\max}}(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} = 0;\\
&m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}} - z(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} = 0.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Розв'язання цієї системи п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими дає всі локальні оптимуми. Потім можна визначити функцію мети для всіх цих локальних розв'язків і знайти глобальний оптимум. У задачах проектування різні функції вартості можуть бути строго монотонними; у цьому випадку для отримання оптимального розв'язку замість нерівності у формулі (4.69) має задовольнятися рівність.

Як відомо, для опуклої функції локальний мінімум завжди є глобальним мінімумом. Перевірка функції на опуклість здійснюється з використанням матриці Гесса: функція є опуклою, якщо її матриця Гесса є додатною визначеною або додатною напіввизначеною для всіх значень аргументів.

Матриця Гесса для функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ є симетричною порядку $n \times n$:

$$M_f(x_1,\ldots,x_n) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \left[\nabla^2 f\right], \tag{4.73}$$

де $x_1, x_2,\ldots,x_n$ – аргументи функції f.

Щоб знайти глобальний оптимум, досліджуємо структуру цього завдання. Запишемо функцію обмежень у вигляді

$$g(\sigma_{\sigma_R}, \sigma_{\sigma\max}, m_{\sigma_R}, m_{\sigma mav}) = \gamma\sqrt{{\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma\max}}^2} - m_{\sigma_R} + m_{\sigma mav}. \tag{4.74}$$

Матриця Гесса для цієї функції має вигляд

$$\begin{bmatrix} +\gamma{\sigma_{\sigma\max}}^2({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma\max}}^2)^{-1,5} & -\gamma\sigma_{\sigma_R}\sigma_{\sigma\max}({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma\max}}^2)^{-1,5} & 0 & 0 \\ -\gamma\sigma_{\sigma_R}\sigma_{\sigma\max}({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma\max}}^2)^{-1,5} & +\gamma{\sigma_{\sigma\max}}^2({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma\max}}^2)^{-1,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.75}$$

Матриця Гесса (4.75) являє собою додатну напіввизначену матрицю для $\gamma > 0$, і, отже, функція обмежень (4.74) є опуклою. Якщо всі функції витрат є опуклими, то рівняння (4.71) і (4.72) виражають задачу опуклого програмування, у якій будь-який локальний оптимум є глобальним. Щоб розв'язати задачу оптимізації, необхідно розв'язати систему рівнянь (4.71) і (4.72).

Задачу оптимізації можна звести до одновимірної задачі пошуку. При заданому значенні $m_{\sigma R}$ з допомогою рівнянь (4.71) можна однозначно визначити $m_{\sigma max}$, розв'язавши рівняння

$$\frac{\partial C_3(m_{\sigma_{\max}})}{\partial m_{\sigma_{\max}}} = -\frac{\partial C_1(m_{\sigma_R})}{\partial m_{\sigma_R}} \tag{4.76}$$

або

$$m_{\sigma_{\max}} = \left(\frac{-\alpha_1\beta_1}{(\alpha_3\beta_3)}\right)^{\frac{1}{\beta_3 - 1}} m_{\sigma_R}^{\frac{\beta_1 - 1}{\beta_3 - 1}}. \tag{4.77}$$

Потім з допомогою п'ятого рівняння системи (4.71) можна обчислити значення $\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2$, оскільки тепер відомими є $m_{\sigma R}$ і $m_{\sigma max}$. Після цього за допомогою третього і четвертого рівнянь системи (4.71) можна визначити середньоквадратичні відхилення $\sigma_{\sigma R}$ і $\sigma_{\sigma max}$:

$$\sigma_{\sigma_{\max}}=\left[\frac{\alpha_2\beta_2}{(\alpha_4\beta_4)}\right]^{\frac{2}{\beta_4-2}}\sigma_{\sigma_R}{}^{2\frac{\beta_2-2}{\beta_4-2}}. \qquad (4.78)$$

Підставимо отриманий вираз в останнє рівняння:

$$\sigma_{\sigma_R}{}^2+\left[\frac{\alpha_2\beta_2}{(\alpha_4\beta_4)}\right]^{\frac{2}{\beta_4-2}}\sigma_{\sigma_R}{}^{2\frac{\beta_2-2}{\beta_4-2}}=\left(\frac{m_{\sigma_R}-m_{\sigma_{\max}}}{\gamma}\right)^2. \qquad (4.79)$$

Унаслідок властивостей монотонності багаточлена, заданого формулою (4.79), можна знайти єдине значення $\sigma_{\sigma R}$.

Таким чином, можна обчислити загальні витрати (4.68) при цих значеннях змінних. Загальні витрати є опуклою функцією аргумента $m_{\sigma R}$. Отже, можна визначити загальну функцію витрат при різних значеннях $m_{\sigma R}$ і знайти глобальний оптимум одним з відомих методів одновимірного пошуку: методом дихотомії, методом хорд, методом січних, методом Ньютона тощо. Пошук оптимального розв’язку методом Фібоначчі, методом спроб і помилок, методом випадкового пошуку, градієнтними методами дає такі самі значення.

Приклад 4.6. Потрібно спроектувати тягу системи керування літального апарата, що зазнає впливу розтяжних напружень під дією випадкових навантажень. Задана ймовірність безвідмовної роботи елемента становить $H_{зад}$ = 0,99.

Розв’язання. З допомогою таблиць для нормального розподілу знаходимо γ = 2,33. Аналітичні вирази для функції витрат при α_1 = 0,2, α_2 = α_3 = 100, α_4 = 50, β_1 = 1,5, β_2 = –1,2, β_1 = –0,6, β_1 = –0,7 мають вигляд

$$C_1(m_{\sigma_R})=0{,}2m_{\sigma_R}{}^{1{,}5};$$

$$C_2(\sigma_{\sigma_R})=100\sigma_{\sigma_R}{}^{-1{,}2};$$

$$C_3(m_{\sigma_{\max}})=100m_{\sigma_{\max}}{}^{-0{,}6},$$

$$C_4(\sigma_{\sigma_{\max}})=50\sigma_{\sigma_{\max}}{}^{-0{,}7}.$$

Таким чином, завдання мінімізації полягає в такому: мінімізувати загальні витрати

$$C_\Sigma=\alpha_1m_{\sigma_R}{}^{\beta_1}+\alpha_2\sigma_{\sigma_R}{}^{\beta_2}+\alpha_3m_{\sigma_{\max}}{}^{\beta_3}+\alpha_4\sigma_{\sigma_{\max}}{}^{\beta_4};$$

$$C_{\Sigma} = 0{,}2m_{\sigma_R}{}^{1,5} + 100\sigma_{\sigma_R}{}^{-1,2} + 100m_{\sigma_{\max}}{}^{-0,6} + 50\sigma_{\sigma_{\max}}{}^{-0,7}$$

при обмеженні $m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}} - 2{,}33(\sigma_{\sigma_R}{}^2 - \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{0,5} \geq 0$.

Отримуємо систему рівнянь, що відповідає рівнянням (4.72):

$$0{,}3m_{\sigma_R}{}^{0,5} + \lambda = 0;$$

$$-60m_{\sigma_N}{}^{-1,6} - \lambda = 0;$$

$$-120\sigma_{\sigma_R}{}^{-2,2} - 2{,}33\gamma\sigma_{\sigma_R}(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_N}{}^2)^{-0,5} = 0;$$

$$-35\sigma_{\sigma_{\max}}{}^{-1,7} - 2{,}33\gamma\sigma_{\sigma_{\max}}(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} = 0;$$

$$m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}} - 2{,}33\lambda(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} = 0.$$

При заданому значенні $m_{\sigma R}$ з допомогою перших двох рівнянь можна однозначно визначити $m_{\sigma max}$:

$$m_{\sigma_{\max}} = \left(\frac{+0{,}3}{60}\right)^{-\frac{1}{1,6}} (m_{\sigma_R})^{-\frac{1,5-1}{1,6}} = 27{,}4248m_{\sigma_R}{}^{-0,3125},$$

а з допомогою третього й четвертого рівнянь знаходимо

$$\sigma_{\sigma_{\max}} = 0{,}633\sigma_{\sigma_R}{}^{1,1852}.$$

Підставимо отриманий вираз в останнє рівняння:

$$\sigma_{\sigma_R}{}^2 + 0{,}4014\sigma_{\sigma_R}{}^{2,3704} = \left(\frac{m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}}}{2{,}33}\right)^2.$$

Розв'язуючи задачу оптимізації методом золотого перерізу, знаходимо оптимальний розв'язок:

$$m_{\sigma_R}{}^{opt} = 27{,}125 МПа; \qquad m_{\sigma_{\max}}{}^{opt} = 9{,}772 МПа;$$

$$\sigma_{\sigma_R}{}^{opt} = 5{,}6124 МПа; \qquad \sigma_{\sigma_N}{}^{opt} = 4{,}8929 МПа.$$

Пошук оптимального розв'язку методами Фібоначчі, спроб і помилок, випадкового пошуку і градієнтними методами дає такі самі значення.

Розглянемо тепер обернену задачу. Потрібно максимізувати ймовірність безвідмовної роботи для випадку нормального розподілу несної здатності (міцності) і навантаження (напружень) при деяких обмеженнях на ресурси: максимізувати

$$\gamma = (m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}})(\sigma_{\sigma_R}{}^2 + \sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{-0,5} \tag{4.80}$$

при обмеженні

$$C_1(m_{\sigma_R}) + C_2(\sigma_{\sigma_R}) + C_3(m_{\sigma_{\max}}) + C_2(\sigma_{\sigma_{\max}}) \le R\,, \qquad (4.81)$$

де R – кількість наявних ресурсів.

Задачу оптимізації (4.80) і (4.81) можна також розв’язати методом невизначених множників Лагранжа.

Функцію Лагранжа запишемо в вигляді

$$L(m_{\sigma_R}, m_{\sigma_{\max}}, \sigma_{\sigma_R}, \sigma_{\sigma\max}, \lambda) = (m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}})({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma\max}}^2)^{-0,5} +$$
$$+ \lambda\left[C_1(m_{\sigma_R}) + C_2(\sigma_{\sigma_R}) + C_3(m_{\sigma_{\max}}) + C_4(\sigma_{\sigma\max}) - R\right] \qquad (4.82)$$

Щоб знайти локальні оптимуми, необхідно розв’язати таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial m_{\sigma_R}} = ({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma_{\max}}}^2)^{-0,5} + \lambda \frac{\partial C_1(m_{\sigma_R})}{\partial m_{\sigma_R}} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial m_{\sigma_{\max}}} = -({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma_{\max}}}^2)^{-0,5} + \lambda \frac{\partial C_3(m_{\sigma_{\max}})}{\partial m_{\sigma_{\max}}} = 0; \qquad (4.83)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_{\sigma_R}} = -\sigma_{\sigma_R}(m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}})({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma_{\max}}}^2)^{-1,5} + \lambda \frac{\partial C_2(\sigma_{\sigma_R})}{\partial \sigma_{\sigma_R}} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_{\sigma_{\max}}} = -\sigma_{\sigma_{\max}}(m_{\sigma_R} - m_{\sigma_{\max}})({\sigma_{\sigma_R}}^2 + {\sigma_{\sigma_{\max}}}^2)^{-1,5} + \lambda \frac{\partial C_4(\sigma_{\sigma_{\max}})}{\sigma_{\sigma_{\max}}} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C_1(m_{\sigma_R}) + C_2(\sigma_{\sigma_R}) + C_3(m_{\sigma_{\max}}) + C_4(\sigma_{\sigma_{\max}}) - R = 0.$$

З першого й другого рівнянь системи (4.83) отримуємо

$$\frac{\partial C_3(m_{\sigma_{\max}})}{\partial m_{\sigma_{\max}}} = -\frac{\partial C_1(m_{\sigma_R})}{\partial m_{\sigma_R}}, \qquad (4.84)$$

а з третього й четвертого рівнянь знаходимо

$$\frac{1}{\sigma_{\sigma_R}} \frac{\partial C_2(\sigma_{\sigma_R})}{\partial \sigma_{\sigma_R}} = \frac{1}{\sigma_{\sigma_{\max}}} \frac{\partial C_4(\sigma_{\sigma_{\max}})}{\partial \sigma_{\sigma_{\max}}}. \qquad (4.85)$$

Співвідношення (4.83) і (4.84) використовують для зведення задачі оптимізації до задачі одновимірного пошуку. Для того щоб гарантувати глобальний оптимальний розв’язок задачі оптимізації, необхідно, щоб функція мети (4.80) була опуклою. Розглянемо матрицю Гесса для функції мети, що має вигляд

$$\begin{bmatrix} \frac{(m_{\sigma_R}-m_{\sigma_{\max}})(2\sigma_{\sigma_R}{}^2-\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{2,5}} & \frac{3\sigma_{\sigma_R}\sigma_{\sigma_{\max}}(m_{\sigma_R}-m_{\sigma_{\max}})}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{2,5}} & \frac{-\sigma_{\sigma_R}}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{2,5}} & \frac{\sigma_{\sigma_R}}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{1,5}} \\ \frac{3\sigma_{\sigma_R}\sigma_{\sigma_{\max}}(m_{\sigma_R}-m_{\sigma_{\max}})}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{2,5}} & \frac{(m_{\sigma_R}-m_{\sigma_{\max}})(2\cdot\sigma_{\sigma_R}{}^2-\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{2,5}} & \frac{-\sigma_{\sigma_{\max}}}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{1,5}} & \frac{\sigma_{\sigma_{\max}}}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{1,5}} \\ \frac{-\sigma_{\sigma_R}}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{1,5}} & \frac{-\sigma_{\sigma_{\max}}}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{1,5}} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{\sigma_R}}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{1,5}} & \frac{\sigma_{\sigma_{\max}}}{(\sigma_{\sigma_R}{}^2+\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2)^{1,5}} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Якщо $\left(2\sigma_{\sigma_R}{}^2-\sigma_{\sigma_{\max}}{}^2\right)\geq 0$, то матриця Гессе (4.86) – від'ємна напіввизначена. Отже, функція мети (4.80) є опуклою, якщо $\sigma_{\sigma_R}/\sigma_{\sigma_{\max}} \geq 1/\sqrt{2}$. У цьому випадку локальний оптимум буде глобальним.

4.9. Межі ймовірності безвідмовної роботи

При розрахунку надійності враховують імовірнісний характер параметрів. Відповідно до наявної методики, у явному вигляді обчислюють параметри розподілів напружень і міцності. Якщо ці розподіли є визначеними, то надійність (у разі простої моделі залежності міцності від навантаження) можна оцінити аналітичним або числовим методом або шляхом моделювання. У реальних умовах важко знайти справжній розподіл напружень і міцності в усьому інтервалі значень; водночас імовірність безвідмовної роботи залежить тільки від співвідношення між напруженнями і міцністю. Тому для обчислення ймовірності безвідмовної роботи необхідно мати інформацію тільки для області, де розподіли міцності і напружень перекриваються.

У багатьох випадках може виявитися, що неможливо визначити істинні розподіли напружень і міцності на інтервалі, де ці розподіли перекриваються. Однак, інженер-конструктор може навчитися оцінювати з певною похибкою ймовірності великих відхилень напружень і міцності, грунтуючись на минулому досвіді і хорошому знанні конструкції та умов експлуатації. Верхня й нижня межі цих імовірностей є кількісним вираженням невизначеності оцінок, зроблених інженером. Припустимо, що вже є такі верхні й нижні межі ймовірностей великих відхилень для різних інтервалів. Тепер, маючи деякі оцінки меж інтервалів, у яких знаходяться ймовірності великих відхилень напружень і міцності, викладемо методику визначення меж імовірності безвідмовної роботи на етапі проектування. Імовірність відмови $\overline{H}$ має вигляд

$$\overline{H} = P\{s > S\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)G(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\overline{F}(u)du, \qquad (4.87)$$

де *f(…)* – щільність розподілу випадкової величини напружень *s*; *g(…)* – щільність розподілу випадкової величини міцності *S*.

Нехай s_{max} – верхня межа для *s*, а S_{min} – нижня межа для *S*. Таким чином, розподіли напружень і міцності перекриваються в інтервалі [S_{min}, s_{max}]. Значення S_{min} і s_{max} знаходять з допомогою розподілів випадкових величин *S* і *s* відповідно або їх значення оцінюють з необхідною точністю. Припускають, що ймовірність виходу випадкової величини $y = s - S$ за межі цього інтервалу є незначною або дуже малою. Розглядаючи цей інтервал перекриття розподілів, формулу (4.87) можна записати як

$$\overline{H} = \int_{S_{\min}}^{s_{\max}} f(u)G(u)du = \int_{S_{\min}}^{s_{\max}} g(u)\overline{F}(u)du\,. \qquad (4.88)$$

Розіб'ємо інтервал [S_{min}, s_{max}] на *n* підінтервалів. Нехай $a_0 = S_{min}$, а $a_n = s_{max}$ – крайні точки інтервалу [S_{min}, s_{max}], a_1, a_2,.., a_n – крайні точки підінтервалів. Уведемо позначення:

$$p_i = P\{a_{i-1} < s \le a_i\} \text{ для } i = 1,..,n, \qquad (4.89)$$

$$q_i = P\{a_{i-1} < S \le a_i\} \text{ для } i = 1,..,n. \qquad (4.90)$$

Імовірність відмови $\overline{H}$ визначають шляхом заміни інтегралів у виразі (4.88) скінченними сумами:

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i\left(\sum_{k=1}^{i} q_k\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[q_i\left(\sum_{k=1}^{i} p_k\right)\right]. \qquad (4.91)$$

Тут символом p_i позначено ймовірності великих відхилень у правій частині кривої щільності розподілу напруження *s*, а q_i – імовірності великих відхилень у лівій частині кривої щільності розподілу міцності *S*. Нехай p_i і q_i мають такі нижні й верхні межі:

$$L_{p,i} \le p_i \le U_{p,i} \text{ для } i = 1,..,n, \qquad (4.92)$$

$$L_{q,i} \le q_i \le U_{q,i} \text{ для } i = 1,..,n. \qquad (4.93)$$

Очевидно, що

$$\mathrm{P}\{\mathrm{S} \ge \mathrm{s}_{\max}\} = \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad \mathrm{P}\{\mathrm{s} \ge \mathrm{S}_{\min}\} = \sum_{i=1}^{n} p_i\,. \qquad (4.94)$$

Припускаємо, що межі значень цих сум відомі інженеру-конструктору:

$$a_p \le \sum_{i=1}^{n} p_i \le b_p, \quad a_q \le \sum_{i=1}^{n} q_i \le b_q. \tag{4.95}$$

Ґрунтуючись на межах, що задаються формулами (4.92), (4.93) і (4.95), необхідно знайти межі для ймовірності появи відмови $\overline{H}$, яка виражається формулою (4.91). Верхню межу визначають шляхом максимізації $\overline{H}$ у формулі (4.91) при обмеженнях (4.92), (4.93) і (4.95), а нижню межу – шляхом мінімізації $\overline{H}$ у формулі (4.91) при тих же обмеженнях. У будь-якому випадку стикаються з завданням квадратичного програмування.

Імовірнісні розрахунки на міцність при проектуванні виробу є конструктивним способом отримання кількісних оцінок робочих характеристик надійності виробу, перш ніж він вийде зі стін конструкторського бюро. Застосування цих методів потребує знання теорії ймовірності й математичної статистики. Методика, розглянута вище, допомагає при проведенні таких розрахунків. Як зазначалося, можна побудувати кілька розрахункових номограм і використовувати їх для дослідження чутливості робочих характеристик виробу до мінливості напружень і міцності.

Імовірнісний підхід потребує від інженера-конструктора вміти кількісно виражати похибки при заданні конструктивних параметрів і, отже, мати уявлення про надійність виробу. Оскільки при такому підході робочі характеристики виробу виражаються через статистичні показники, це допомагає конструктору оцінювати витрати на гарантійне обслуговування, розробляти програми технічного обслуговування й планувати рух запасів. Необхідно мати на увазі, що цей підхід перебуває на початковому етапі розвитку, і в майбутньому, у міру його вдосконалення, конструктори будуть оперувати великим обсягом статистичних даних.

4.10. Розподіл надійності між елементами конструкції

Для забезпечення надійності конструкції пристрою, агрегата або планера ЛА в цілому потрібно знайти надійність її елементів. Необхідно шукати розподіл надійності за елементами не просто для забезпечення надійності всієї конструкції, а маючи на увазі оптимальний розподіл цих надійностей.

Найбільш зручним і важливим для ЛА критерієм оптимальності є найменша маса конструкції. Надалі припускаємо, що конструкція складається з *n* елементів, зв'язаних між собою певним чином. Будемо розрізняти три види зв'язків між елементами конструкції:

– система з послідовним з'єднанням елементів:

$$H = \prod_{i=1}^{n} H_i; \tag{4.96}$$

– система з паралельним з'єднанням елементів:

$$H = 1 - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - H_j^*\right); \quad (4.97)$$

– система зі змішаним з'єднанням елементів:

$$H = \left[1 - \prod_{j=1}^{k}(1 - H_j^*)\right]\prod_{i=1}^{m} H_i\,, \quad (4.98)$$

де n – кількість послідовно з'єднаних елементів; k – кількість паралельно з'єднаних елементів; H_i – надійність i-х послідовно з'єднаних елементів; H_j – надійність j-х паралельно з'єднаних елементів. При цьому $n = m + k$.

Може бути поставлена пряма задача оптимізації: знайти такі значення надійності елементів конструкції $H_1, H_2, ..., H_n$, які забезпечували б максимум функції надійності всієї конструкції при обмеженнях на її массу:

$$H_{опт} = max\{H(H_1, H_2, ..., H_n)\} \quad (4.99)$$

при

$$m = m(H_1, H_2, ..., H_n) \le m_{зад}. \quad (4.100)$$

Може бути поставлена й обернена задача оптимізації: знайти значення надійності елементів конструкції $H_1, H_2, ..., H_n$, які забезпечують мінімум функції маси всієї конструкції при обмеженнях на її надійність:

$$m = min\{m(H_1, H_2, ..., H_n)\} \quad (4.101)$$

при

$$H = H(H_1, H_2, ..., H_n) \ge H_{зад}. \quad (4.102)$$

Розв’язання цих задач є аналогічним.

Розглянемо розв’язання оберненої задачі оптимізації розподілу надійності елементів (стрижень, балка, сфера, бак і т. ін.). Для цього скористаємося методом невизначених множників Лагранжа. Складемо допоміжну функцію – функцію Лагранжа:

$$L(H_1, H_2, ..., H_n, \lambda) = m(H_1, H_2, ..., H_n) + \lambda[H(H_1, H_2, ..., H_n) - H_{зад}], \quad (4.103)$$

де λ – невизначений множник Лагранжа.

Здиференціюємо вираз (4.103) за змінною H_i, отримаємо для оптимальних значень надійності елементів таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial L(H_1, H_2, ..., H_n, \lambda)}{\partial H_i} = \frac{\partial m(H_1, H_2, ..., H_n)}{\partial H_i} + \lambda\frac{\partial H(H_1, H_2, ..., H_n)}{\partial H_i} = 0, \quad (4.104)$$

де $i = 1,2,3,...,n$.

Система рівнянь (4.104) складається з n рівнянь з $(n+1)$ невідомими $H_1, H_2, ..., H_n$, λ. Разом з умовою (4.102) система дає розв’язок. Вилучимо з невідомих невизначений множник λ. Виразивши його з першого рівняння системи (4.104) і підставивши в усі інші, отримаємо систему (n–1) рівнянь з n невідомими $H_1, H_2, ..., H_n$ вигляду

$$\frac{\partial m}{\partial H_i}\frac{\partial H}{\partial H_1}-\frac{\partial m}{\partial H_1}\frac{\partial H}{\partial H_i}=0,\ i = 1,2,3,...,n. \qquad (4.105)$$

Розв'язуючи її спільно з (4.102), знаходимо значення $H_1, H_2, ..., H_n$, які відповідають мінімальній масі конструкції при обмеженні на надійність усієї конструкції.

Розв'язання прямої задачі зводиться до розв'язання тієї ж системи рівнянь (4.105), але додатковим рівнянням буде (4.100).

Вигляд функції $H(H_1, H_2, ..., H_n)$ залежить від вигляду зв'язків елементів конструкцій між собою. Вигляд функції $m(H_1, H_2, ..., H_n)$ залежить від типу й форми елементів конструкції, їх навантаження, закону розподілу й імовірнісних характеристик навантаження та несної здатності й надійності (за міцністю, жорсткістю або стійкістю). Для різних елементів конструкції вигляд функції $m(K)$, де K відомим чином зв'язані з надійністю, може бути одним із таких:

$$m(K) = A/K;\quad m(K) = A/\sqrt{K};\quad m(K) = A/\sqrt[3]{K^2}. \qquad (4.106)$$

Розглянемо ці функції і значення коефіцієнтів A.

1. *Стрижень, що розтягується.* Маса стрижня $m = \rho Fl$, де l – довжина стрижня; ρ – густина матеріалу стрижня; F – площа поперечного перерізу стрижня. За табл. 4.1 $F = 1/K$. Тоді $m = \rho l/K = A/K$, де $A = \rho l$.

2. *Балка, що згинається.* Маса балки $m = \rho Fl$. Згідно з табл. 4.1 для розмірів поперечного перерізу балки можна записати $W_z = \alpha l/K$.

Якщо балка круглого перерізу, то $\dfrac{\pi d^3}{32}=\dfrac{\alpha l}{K}$ або $\left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^3=\pi\dfrac{\alpha^2 l^2}{K^2}\cdot 16$,

отже, $F=\sqrt[3]{\dfrac{\alpha^2 l^2\cdot 16\pi}{K^2}}$.

Тоді $m=\dfrac{\rho l\sqrt[3]{\alpha^2 l^2\cdot 16\pi}}{\sqrt[3]{K^2}}=\dfrac{A}{\sqrt[3]{K^2}}$, де $A=\rho l\sqrt[3]{\alpha^2 l^2\cdot 16\pi}$.

Якщо балка має прямокутний переріз, то $\dfrac{bh^2}{6}=\dfrac{\alpha l}{K}$ або $b^2h^2=\dfrac{6b\alpha l}{K}$,

отже, $F=\sqrt{\dfrac{6b\alpha l}{K}}$. Тоді $m=\dfrac{\rho l\sqrt{6b\alpha l}}{\sqrt{K}}=\dfrac{A}{\sqrt{K}}$, де $A=\rho l\sqrt{6b\alpha l}$.

Тут d – діаметр; l – довжина балки; b, h – ширина й висота прямокутного перерізу балки.

3. *Вал при крученні.* Маса вала *m* = *ρFl*. Для розмірів поперечного перерізу вала можна записати $W_p = \frac{1}{K}$ або $\frac{\pi d^3}{16} = \frac{1}{K}$; $\frac{\left(\pi d^2\right)^3}{64} = \frac{4\pi}{K^2}$, тобто $F = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{K^2}}$. Тоді $m = \frac{\rho l \sqrt[3]{4\pi}}{\sqrt[3]{K^2}} = \frac{A}{\sqrt[3]{K^2}}$, де $A = \rho l \sqrt[3]{4\pi}$.

4. *Сферична оболонка радіусом r, що перебуває під дією внутрішнього тиску q.* У цьому випадку маса оболонки $m = 4\pi R^2 \delta \rho$. За табл. 4.1 для розмірів поперечного перерізу знаходимо $\delta = \frac{r}{2K}$.

Тоді $m = \frac{4\pi R^3 \rho}{2K} = \frac{A}{K}$, де $A = \frac{4\pi R^3 \rho}{2} = 2\pi R^3 \rho$.

5. *Циліндрична посудина радіусом r, навантажена дією внутрішнього тиску q.* Маса посудини $m = 2\pi R l \delta \rho$. За табл. 4.1 знаходимо $\delta = \frac{r}{K}$.

Тоді $m = \frac{2\pi R^2 l \rho}{K} = \frac{A}{K}$, де $A = 2\pi R^2 l \rho$.

Аналогічні формули можна отримати для інших типів елементів конструкцій і навантажень. За цими формулами, а також за відомими залежностями *K = f(H)* для різних законів розподілу навантаження й несної здатності можна отримати в явному вигляді залежності *m = f(H)*.

4.11. Забезпечення надійності виробів

Інженерний досвід створення складних технічних систем дає змогу сформулювати основні правила надійності, яких треба дотримуватися на різних етапах створення виробу (проектування, виробництво й випробування).

1. Система має містити максимально можливу кількість елементів, перевірених на практиці.
2. Система має містити захисні пристрої, що передбачають усунення можливості виникнення катастрофічних відмов (обмеження збільшення обертів, температури, тиску, крутного моменту і т. ін.); сигнальні пристрої, що попереджають про порушення нормальної роботи (світлові сигнали і т. ін.).
3. Система має бути зручною для ремонту, допускати заміну швидкозношуваних деталей, окремих елементів і вузлів без розбирання та переналагодження всього виробу.
4. Навантажені елементи системи необхідно піддавати ретельному розрахунку на статичну, динамічну та ймовірнісну міцність.

При такому розрахунку мають бути враховані максимальні навантаження, найбільш несприятливі робочі умови (температура, вплив середовища тощо), мінімальна міцність матеріалу, імовірнісний характер геометричних параметрів сортаменту та ін.

5. Необхідно, щоб умови контролю були більш жорсткими на початковій стадії виробництва. При досягненні необхідного рівня якості виробництва та його стабільності зазвичай є можливість спростити контроль (після відповідного узгодження). Мають бути передбачені випробування, що підтверджують стабільність технологічного процесу, допустимий рівень розсіювання кількісних показників, фізичних та інших властивостей, що впливають на надійність (періодичне визначення залишкових напружень, границь витривалості і т. ін.).

6. У процесі дослідного виробництва до конструкції й технології мають вноситися зміни, спрямовані на усунення виявлених відмов і несправностей. Стадія дослідного виробництва завершується офіційними випробуваннями й затвердженням еталона для серійного виробництва.

7. Зміни, що вносяться до технології виготовлення та складання відповідальних деталей, у тому числі до розмірів заготовок, поковок, припусків посадок і допусків тощо, слід узгоджувати з конструктором і в більшості випадків перевіряти під час лабораторних, стендових або інших випробувань.

8. Експлуатація складних технічних систем має відповідати технічним умовам і спеціальним посібникам. Якщо необхідно, указують допустимі умови щодо температури, вологості, забруднення навколишнього середовища, тривалості важких режимів, регламентації перехідних процесів та ін.

9. Для складних відповідальних виробів слід розробити систему технічної діагностики, що забезпечує збір, зберігання й аналіз інформації про стан виробу. Інформація має безперервно надходити від датчиків, які реєструють оберти, температуру, тиск, вібрації і т. ін.

10. Необхідно, щоб система обслуговування забезпечувала регламентні роботи, профілактичні огляди й ремонти. Технічне обслуговування може полягати в примусовій заміні окремих деталей і вузлів після певного часу роботи або календарного часу.

11. Слід контролювати дослідження конструкційної міцності деталей і вузлів з експлуатаційними пошкодженнями (корозією, ерозією, забоїнами, зношенням та ін.). На основі таких досліджень і досвіду експлуатації встановлюють норми і стандарти на допустимі пошкодження.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Анцелиович, Л. Л. Надежность, безопасность и живучесть самолета / Л. Л. Анцелиович. – М. : Машиностроение, 1978. – 256 с.
2. Арасланов, А. М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях / А. М. Арасланов. – М. : Машиностроение, 1986. – 128 с.
3. Волков, Л. И. Надежность летательных аппаратов / Л. И. Волков, А. М. Шишкевич. – М. : Машиностроение, 1975. – 296 с.
4. Капур, К. Надежность и проектирование систем / К. Капур, Л. Ламберсон. – М. : Мир, 1980. – 604 с.
5. Кубарев, А. И. Надежность в машиностроении / А. И. Кубарев. – М. : Изд-во стандартов, 1989. – 224 с.
6. Кузнецов, А. А. Надежность конструкций баллистических ракет / А. А. Кузнецов. – М. : Машиностроение, 1978. – 256 с.
7. Малашенко, Л. А. Проектирование элементов конструкций летательных аппаратов заданной надежности / Л. А. Малашенко. – Харьков : ХАИ, 1996. – 96 с.
8. Надежность технических систем : справочник / под ред. И. А. Ушакова. – М. : Радио и связь, 1985. – 608 с.
9. Никозанов, Д. Д. Статистическая оптимизация конструкций летательных аппаратов / Д. Д. Никозанов, В. И. Перлик, В. И. Кукушкин. – М. : Машиностроение, 1977. – 240 с.
10. Оболенский, Е. П. Прочность агрегатов оборудования и элементов жизнеобеспечения летательных аппаратов / Е. П. Оболенский, Б. И. Сахаров, Н. П. Стрекозов. – М. : Машиностроение, 1989. – 248 с.
11. Парасюк, В. И. Математическое обеспечение надежности летательных аппаратов / В. И. Парасюк. – Харьков : ХАИ, 1986. – 58 с.
12. Решетов, Д. Н. Надежность машин / Д. Н. Решетов, А. С. Иванов, В. З. Фадеев. – М. : Высш. шк., 1988. – 238 с.
13. Трифонюк, В. В. Надійність пристроїв промислової електроніки / В. В. Трифонюк. – Київ : Либідь,1993. – 64 с.
14. Ржаницин, А. В. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А. В. Ржаницин. – М. : Стройиздат, 1978. – 239 с.

Навчальне видання

Набокіна Тетяна Петрівна
Кондратьєв Андрій Валерійович
Парасюк Володимир Іванович

ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2021
Підписано до друку 25.05.2021
Формат 60×84 1/16. Папір офс. Офс. друк
Ум. друк. арк. 6,2. Обл.-вид. арк. 7. Наклад 50 пр.
Замовлення 127. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001