МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О. Д. Абрамов, В. О. Лєсной, Ф. Ю. Панасенко

СТАТИСТИЧНА ТЕОРІЯ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ. ОСНОВНІ ЗАДАЧІ ТА ПРИКЛАДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Частина 1

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2021

УДК 621.391.8(075.8)
А16

Рецензенти: канд. техн. наук, доц. В. Г. Сергєєв,
канд. техн. наук Ю. О. Педенко

Абрамов, О. Д.

А16 Статистична теорія радіотехнічних систем. Основні задачі та приклади їх розв'язання [Текст] : навч. посіб. Ч. 1 / О. Д. Абрамов, В. О. Лєсной, Ф. Ю. Панасенко. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2021. – 56 с.

ISBN 978-966-662-808-7

Описано основні твердження щодо статистичного розподілу вибірки й статистичного оцінювання параметрів генеральної сукупності, а також основи математичної статистики для перевірки гіпотез шляхом оброблення вибірки. Подано відомості з теорії ймовірностей. Наведено приклади розв'язання задач радіотехнічної спрямованості.

Для студентів, що навчаються за дисциплінами «Статистична теорія», «Радіотехнічні системи» напряму «Телекомунікації і радіотехніка».

Іл. 18. Табл. 10. Бібліогр.: 5 назв

УДК 621.391.8(075.8)

© Абрамов О. Д., Лєсной В. О.,
Панасенко Ф. Ю., 2021
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2021

ISBN 978-966-662-808-7

1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ: ЗАКОН РОЗПОДІЛУ Й ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Закон розподілу й числові характеристики випадкових величин

Приклад 1.1.1. Вхідний сигнал ідеального обмежувача (рис. 1.1) являє собою випадкову величину *X*, рівномірно розподілену в інтервалі *–2,5a < X < 1,5a*. Вихідний сигнал обмежувача обмежується за абсолютною величиною числом *a* і дорівнює вхідному сигналу, коли останній має значення в межах *(-a, a)*. Знайти функцію розподілу й густину ймовірності вихідного сигналу *Y* ідеального обмежувача, визначити математичне сподівання й дисперсію випадкової величини *Y*.

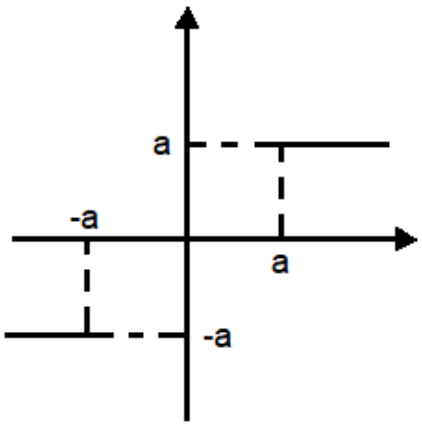


Рис. 1.1

Розв'язання. Оскільки вихідний сигнал обмежувача не може бути меншим за *–a*, то при *Y < –a* його функція розподілу *F(Y)* дорівнює нулю. Оскільки вхідний сигнал обмежувача завжди є меншим або дорівнює *a*, то при *Y > a* його функція розподілу *F(Y)* дорівнює одиниці. В інтервалі *–a < Y < a* *Y = X* і нерівність *A < Y* є рівноцінною нерівності *A < X*, тому *F(Y) = P (A < Y) = P (A < X) = F(X).*

Таким чином, функція розподілу вихідного сигналу *Y* ідеального обмежувача визначається формулою

$$F(Y) = \begin{cases} 0 \\ \frac{y+2{,}5\mathrm{a}}{4\mathrm{a}} \\ 1 \end{cases} \quad \text{при} \quad \begin{matrix} y < -\mathrm{a}, \\ -\mathrm{a} < y < \mathrm{a}, \\ y > \mathrm{a}. \end{matrix}$$

Ця функція має стрибки, що дорівнюють $^3/_8$ і $^1/_8$ у точках *y = –a* і *y = a.* Густина ймовірності випадкової величини *Y* дорівнює нулю при *Y < –a* і *Y > a*, а в інтервалі *–a < Y < a* має постійне значення $^1/_{4\mathrm{a}}$. Стрибки функції розподілу дають лінійну комбінацію δ-функцій δ(y+a) і δ(y-a) з коефіцієнтами, що відповідно дорівнюють $^3/_8$ і $^1/_8$. Таким чином, густина ймовірності випадкової величини *Y* визначається виразом

$$\rho(Y) = \frac{1}{4\mathrm{a}}\left[\pi\left(\frac{y}{4\mathrm{a}}\right)\right] + \frac{3}{8}\delta(y+\mathrm{a}) + \frac{1}{8}\delta(y-\mathrm{a}).$$

Випадкова величина *Y* має неперервну множину можливих значень, що заповнюють інтервал *(–a, a)*, і, крім того, два особливих значення *–a* і *a*, імовірності яких дорівнюють $^3/_8$ і $^1/_8$.

Визначимо математичне сподівання й дисперсію випадкової величини *Y*:

$$m(y) = \int_{-a}^{a} \frac{y}{4a} uy + \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{\infty} y\delta(y+a)dy + \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} y\delta(y-a)dy = -\frac{a}{4};$$

$$\sigma^2(y) = \int_{-a}^{a} \frac{y^2}{4a}dy + \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\delta(y+a)dy + \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\delta(y-a)dy = \frac{29}{48}a^2.$$

Приклад 1.1.2. На екрані радіолокатора позначки цілей розташовані випадковим чином, причому цілі, що потрапляють у будь-яку область *S* площини екрана, розподілено за законом Пауссона, тобто ймовірність того, що в області площею *S* міститься *m* цілей, визначається формулою

$$P(x-m) = \frac{(S\lambda)^m}{ml} e^{-S\lambda} \quad ,$$

де $\boldsymbol{\lambda}$ – середня кількість цілей, що потрапляють на одиницю площі. Знайти закон розподілу та числові характеристики *m(R)*, $\sigma^2(R)$ відстані *R* від поточної точки екрана до найближчої позначки цілі.

Розв'язання. Знайдемо функцію розподілу *F(r)*. Для того щоб відстань *R* від поточної точки екрана до найближчої позначки цілі була меншою від деякого *r*, треба, щоб у коло радіусом *r*, описане навколо точки екрана радіолокатора, потрапила хоча б одна позначка цілі. Імовірність цієї події знаходимо за формулою

$$F(r) = 1 - exp(-\pi\lambda r^2) \quad \text{при } r > 0,$$

звідки

$$\rho(r) = \begin{cases} 2\pi\lambda r \exp(-\pi\lambda r^2) & \text{при } \boldsymbol{r} > 0, \\ 0 & \text{при } \boldsymbol{r} < 0. \end{cases}$$

Таким чином, відстань *R* від будь-якої точки екрана індикатора радіолокатора до найближчої позначки цілі підпорядковується закону Релея. Знайдемо числові характеристики відстані *R* від будь-якої точки екрана до найближчої до неї позначки цілі:

$$m(R) = \int_0^2 2\pi\lambda r^2 \, exp(-\pi\lambda r^2)dr = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}};$$

$$\sigma^2(R) = \int_0^2 2\pi\lambda r^3 \, exp(-\pi\lambda r^2)dr - \frac{1}{4\lambda} = \frac{4-\pi}{4\pi\lambda}.$$

Приклад 1.1.3. Приймальний пристрій отримує кодову комбінацію, що складається з двох імпульсів з випадковими амплітудами U_1 і U_2. Кожний імпульс U_i являє собою суму відомого імпульсу корисного сигналу S_i та імпульсу шуму n_i :

$$U_i = S_i + n_i, \;\; i = 1,2,$$

причому імпульси шуму n_i є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами з однаковими дисперсіями σ^2 і нульовим математичним сподіванням. Відомою завжди є апріорна ймовірність *P*

посилання кодової комбінації, тобто ймовірність того, що вектор $\vec{U}$ спочатку набуде значення

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} S_1^0 + n_1 \\ S_2^0 + n_2 \end{pmatrix}$$

відповідно, імовірність відсутності сигналу *q = 1–P*, тобто ймовірність того, що вектор $\vec{U}$ набуде значення $\vec{U} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$. Розв'язувальний пристрій приймача формує деяку функцію φ(U_1, U_2) і порівнює її з пороговим рівнянням *C*. При виконанні умови *φ(U_1, U_2) > C* приймається рішення, що сигнал є; якщо *φ(U_1, U_2) < C*, то приймається рішення, що сигналу немає.

Необхідно визначити:

1. Імовірність достовірного визначення кодової комбінації. Імовірність в умовах, коли розв'язувальний пристрій формує функцію

$$\varphi(U_1, U_2) = aU_1 + bU_2$$

і порівнює її із заданим пороговим рівнянням *C*.

2. Умовні ймовірності помилок двох видів:

а) імовірність пропуску сигналу, коли він міститься в прийнятих імпульсах;

б) імовірність помилкової тривоги, тобто ймовірність рішення, що корисний сигнал є, при його відсутності.

3. Оптимальний спосіб оброблення приймального сигналу, що забезпечує мінімальну ймовірність похибки.

4. Функцію *φ(U_1, U_2)* і пороговий рівень *C* з умови мінімуму ймовірності похибки.

Розв'язання. Обчислимо умовні ймовірності помилок двох видів, тобто ймовірність пропуску сигналу, коли він є, і ймовірність помилкової тривоги при відсутності сигналу. Для цього знайдемо умовну густину ймовірності прийнятих імпульсів відносно корисного сигналу $\rho(d/S)$. Оскільки згідно з умовою корисний сигнал S має тільки два можливих значення: $\overrightarrow{S^0}$ (тобто вектор зі складовими S_1^0, S_2^0) і 0 (тобто вектор, складові якого дорівнюють нулю), необхідно знайти густину ймовірності прийнятого сигналу при наявності корисного сигналу $\rho\left(U/\overrightarrow{S^0}\right)$ при його відсутності $\rho(U/0)$. Очевидно, що, оскільки при відсутності корисного сигналу приймається один шум, умовна густина ймовірності сигналу при відсутності корисного сигналу збігається з густиною ймовірності шуму:

$$\rho(U/0) = \rho(n). \qquad (1.1)$$

У разі наявності корисного сигналу шум додається до нього. Тому умовну густину ймовірності сигналу при наявності корисного сигналу можна

визначити з формули густини ймовірності шуму $\rho(n)$, замінивши у ній аргумент *n* різницею можливого значення прийнятого сигналу *U* і значення корисного сигналу S^0:

$$\rho\left(U/_{S^0}\right) = \rho(U - S^0). \tag{1.2}$$

Пропуск сигналу характеризується тим, що при наявності сигналу внаслідок дії перешкод функція $\varphi(U_1, U_2)$ є меншою від порогового рівня *C* або дорівнює йому. Отже, умовна ймовірність пропуску сигналу, тобто вірогідність нерівності $\varphi(U_1, U_2) \le C$ при наявності корисного сигналу дорівнює інтегралу від умовної густини ймовірності по області, яка визначається нерівністю $\varphi(U_1, U_2) \le C$:

$$P_{\text{пр}} = P\left[\varphi(U_1, U_2) \le {C}/{S} = S^0\right] = \int \rho\,(U - S^0)dU, \qquad \varphi(U_1, U_2) \le C. \tag{1.3}$$

Помилкова тривога характеризується тим, що при відсутності корисного сигналу функція $\varphi(U)$ унаслідок дії шуму є більшою від порогового рівня *C*. Отже, умовна ймовірність помилкової тривоги, тобто вірогідність нерівності $\varphi(U) > \mathrm{C}$ при відсутності корисного сигналу, дорівнює інтегралу від умовної густини ймовірності (1.1) по області, яка визначається нерівністю $\varphi(U) > \mathrm{C}$**:**

$$P[\Psi(U_1, U_2) > {C}/{S} = 0] = \int \rho(U)dU, \qquad \varphi(U_1, U_2) > C. \tag{1.4}$$

Для визначення ймовірності помилки при розв’язанні задачі виявлення сигналів скористаємося формулою порожнистої ймовірності. Помилкове рішення може бути прийняте розв’язувальним пристроєм при одній з двох гіпотез, що утворюють повну групу несумісних подій: гіпотеза H_1 полягає в тому, що корисний сигнал є, її ймовірність дорівнює *P*; гіпотеза H_2 полягає в тому, що корисного сигналу немає, її ймовірність має вигляд $q = 1 - P.$ Умовні ймовірності помилки визначаються формулами (1.3) і (1.4). Підставляючи ці вирази в формулу для повної ймовірності, для ймовірності помилок отримаємо вираз

$$P_{\text{пом}} = \rho P\left[\varphi(U) \le {C}/{S} = S^0\right] + qP\left[\varphi(U) > {C}/{S} = 0\right] = \\ = P\int_{\varphi(U)\le C} \rho(U - S^0)dU + q\int_{\varphi(U)>C} \rho(U)dU. \tag{1.5}$$

Імовірність прийняття правильного рішення визначається як імовірність протилежної події:

$$P_{\text{пр.р}} = 1 - P_{\text{пом}}. \tag{1.6}$$

Умова ймовірності пропуску сигналу (див. (1.3)) для заданої функції $\varphi(U_1, U_2) = aU_1 + bU_2$ набирає вигляду

$$P_{\text{пр}} = P[\varphi(U) \le {C}/{S} = S^0] = \\ = \iint_{aU_1+bU_2\le C} \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp\left\{-\frac{(U_1-S_1^0)^2+(U_2-S_2^0)^2}{2\sigma^2}\right\} dU_1 dU_2. \tag{1.7}$$

Виконаємо заміну змінних:

$$Z_1 = aU_1 + bU_2,$$

$$Z_2 = bU_1 - aU_2.$$

Розв'яжемо ці рівняння відносно U_2 і U_2 й отримаємо

$$U_1 = \frac{aZ_1+bZ_2}{a^2+b^2},$$

$$U_2 = \frac{bZ_1+aZ_2}{a^2+b^2}.$$

Якобіан цього перетворення має вигляд

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dZ_1} & \frac{dU_2}{dZ_1} \\ \frac{dU_1}{dZ_2} & \frac{dU_2}{dZ_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{-a}{a^2+b^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2+b^2}.$$

Межі інтегрування при такій заміні змінних будуть визначатися нерівністю $Z_1 \leq C$, тобто інтегрування буде проводитися від $-\infty$ до C по Z_1 і від $-\infty$ до $+\infty$ по Z_2. Отже, формула для умовної ймовірності пропуску сигналу набуде вигляду

$$P\left[\varphi(U_1, U_2) \leq {}^{C}/_{S} = S^0\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2(a^2+b^2)} \int_{-\infty}^{C} dZ_1 \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{(Z_1 - a_1S_1^0 - bS_2^0)^2 + (Z_2 - bS_1^0 + aS_2^0)^2}{2\sigma^2(a^2+b^2)}\right\} dZ_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(a^2+b^2)}} \int_{-\infty}^{C} exp\left\{-\frac{(Z_1 - aS_1^0 - bS_2^0)^2}{2\sigma^2(a^2+b^2)}\right\} dZ_1 = \int_{-\infty}^{\frac{C-aS_1^0-bS_2^0}{\sqrt{\sigma^2(\pi^2-b^2)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \phi\left(\frac{C-aS_1^0-bS_2^0}{\sqrt{\sigma^2(\pi^2-b^2)}}\right). \qquad (1.8)$$

Аналогічно знайдемо ймовірність помилкової тривоги в разі відсутності корисного сигналу:

$$P_{\text{п.т}} = P\left[\varphi(U_1, U_2) > {}^{C}/_{S} = 0\right] = \frac{1}{2} - \phi\left(\frac{C}{\sqrt{\sigma^2(\pi^2-b^2)}}\right). \qquad (1.9)$$

Визначаємо оптимальний спосіб оброблення радіоприймальним пристроєм сигналу, що забезпечує мінімальну ймовірність помилки і, отже, максимальну ймовірність прийняття правильного рішення.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося тим, що

$$\int_{\varphi(U)\leq C} \rho(U - S^0)dU + \int_{\varphi(U)>0} \rho(U - S^0)dU = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(U - S^0)dU = 1\,, \qquad (1.10)$$

і перепишемо формулу (1.5) у вигляді

$$P_{\text{пом}} = P - \int_{\varphi(U)>C}[P\rho(U-S^0) - q\rho(U)]dU. \quad (1.11)$$

Імовірність помилки $P_{\text{пом}}$ має мінімальне значення, коли інтеграл має максимальне значення. Отже, завдання зводиться до такого вибору функції $\varphi(U)$ і величини *C*, щоб інтеграл у формулі (1.11) набував найбільшого можливого значення. Очевидно, що цей інтеграл збільшується при додаванні до області інтегрування таких частин простору вектора *U*, у яких підінтегральна функція є додатною, і зменшується при додаванні до функції інтегрування частин простору, у яких підінтегральна функція є від'ємною. Отже, цей інтеграл набирає максимального значення в тому випадку, коли область інтегрування збігається з тією областю простору вектора *U*, у якій підінтегральна функція є додатною, тобто коли нерівність

$$\varphi(U) > C \quad (1.12)$$

є рівноцінною нерівності

$$\frac{\rho(U-S^0)}{\rho(U)} > \frac{q}{P}. \quad (1.13)$$

Нехай *f(λ)* – довільна строго зростальна функція. Тоді з (1.13) випливає, що

$$f\left(\frac{\rho(U-S^0)}{\rho(U)}\right) > f(\frac{q}{P}). \quad (1.14)$$

Функцію і поріг *C* можна визначити за формулами

$$\varphi(U) = f(\frac{\rho(U-S^0)}{\rho(U)}) \;\; i \;\; C = f\left(\frac{q}{P}\right). \quad (1.15)$$

При цьому нерівність (1.12) є рівноцінною нерівності (1.13), а ймовірність помилкового рішення $P_{\text{пом}}$ є мінімальною. У багатьох практичних задачах як опцію *f(λ)* зручно брати натуральний логарифм $\ln\lambda$. У цьому випадку функція $\varphi(U)$ і пороговий рівень *C* визначаються формулами

$$\varphi(U) = ln\frac{\rho(U-S^0)}{\rho(U)}, \quad C = ln\frac{q}{P}. \quad (1.16)$$

В окремому випадку незалежних нормально розподілених імпульсів шуму, що мають нульові математичні сподівання й однакові дисперсії σ^2,

$$\rho(n) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,exp\left\{-\frac{n_1^2+n_2^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1.17)$$

і вираз для $\varphi(U)$ набуває вигляду

$$\varphi(U) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\left[\left(U_i - S_i^0\right)^2 - U_i^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2} S_i^0 U_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\left(S_i^0\right)^2. \quad (1.18)$$

Таким чином, оптимальна система виявлення має обчислювати відношення правдоподібності або будь-яку зростальну функцію цього відношення й порівнювати її з порогом *C*.

Задача 1.1.1. По бінарному каналу зв'язку передають сигнал S_1, що складається з X_1 імпульсів, і сигнал S_2, що складається з X_2 імпульсів $(X_1>X_1)$. Задано апріорні ймовірності посилання сигналів $P(S_1)$ = 0,6 і $P(S_2)$ = 0,4. Знайти закон розподілу випадкової кількості імпульсів X, якщо відомими є математичне сподівання й дисперсія випадкової величини:

$$m(X) = 1{,}4, \quad \sigma^2(X) = 0{,}24.$$

Задача 1.1.2. Радіостанція для встановлення зв'язку посилає один за іншим з деякими проміжками часу позивні сигналу для отримання відповіді. Імовірність проходження сигналу й отримання на нього відповіді P = 0,2. Знайти закон розподілу ймовірностей випадкової величини N, де N – кількість додатних сигналів, що подаються станцією до встановлення зв'язку. Визначити середню кількість додатних сигналів $m(N)$ до встановлення двостороннього зв'язку.

Задача 1.1.3. Повідомлення передається послідовністю амплітудно-модульованих імпульсів із заданим кроком квантування Δ (Δ – найменша різниця між амплітудами двох імпульсів). На повідомлення накладаються шуми, розподілені за нормальним законом з густиною ймовірності

$$\rho(\mathrm{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Якщо миттєве значення шумів перевищує половину кроку квантування Δ, то при переданні повідомлення виникає помилка.

Визначити, при якому мінімально допустимому кроці квантування ймовірність помилки через завади не перевищує 0,1.

Задача 1.1.4. Якою має бути мінімально допустима середньоквадратична помилка радіовисотоміра, щоб з ймовірністю 0,9 помилка при вимірюванні висоти, що підпорядковується нормальному закону розподілу, не перевищувала за абсолютною величиною 50 м?

Задача 1.1.5. Вивести правило трьох сигм: імовірність того, що абсолютне відхилення нормально розподіленої випадкової величини буде меншим від потроєного середньоквадратичного відхилення, дорівнює 0,9973.

Задача 1.1.6. Нормально розподілена випадкова величина X визначається густиною ймовірності

$$\rho(\mathrm{X}) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Визначити:

а) математичне сподівання й дисперсію випадкової величини X;

б) функцію розподілу випадкової величини X;

в) імовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (a, $в$).

Задача 1.1.7. Середньоквадратичне значення σ стаціонарної флуктуаційної завади, що підпорядковується нормальному закону

розподілу і не має постійної складової, дорівнює 16 В. Знайти ймовірність того, що завада в довільний момент часу перевищить рівень $V_0 = 20$ В.

Задача 1.1.8. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію й середньоквадратичне відхилення випадкової фази сигналу, розподіленої рівномірно в інтегралі (0, 2π).

Задача 1.1.9. Випадкова величина R – відстань від імпульсу цілі до центра індикатора кругового огляду – має густину ймовірності вигляду

$$\rho(r) = \begin{cases} Ar\, e^{-h^2 r^2} & \text{при } r \geq 0, \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Визначити при заданому параметрі *h*:

а) коефіцієнт *A*;

б) моду *M* випадкової величини *R*, тобто точку максимуму її густини ймовірності;

в) *m(R)* і $\sigma^2(R)$;

г) імовірність того, що відстань від імпульсу цілі до центра індикатора є меншою, ніж мода.

Задача 1.1.10. При певних умовах завмирання радіосигналу через явища багатопроменевості можна моделювати розподілом Релея

$$\rho(A) = \frac{2A}{A_0^2} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} \quad \text{при A} > 0,$$

де A – схильні до завмирання миттєві значення амплітуди обвідної сигналу; A_0^2 – математичне сподівання квадрата амплітуди.

Нехай федінгувальний сигнал приймається на *n* антенах, рознесених одна від одної на такі відстані, при яких сигнали можна вважати статистично незалежними.

Обчислити ймовірність того, що сигнал на всіх антенах одночасно буде нижче рівня *H*.

Задача 1.1.11. Випадковий вектор зі складовими *X*, У розподіляється рівномірно всередині прямокутника:

$$\rho(\text{x},\text{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4ab} & \text{при } |\text{x}| \leq a \quad \text{або} \quad |\text{y}| \leq b; \\ 0 & \text{при } |\text{x}| > a \quad \text{або} \quad |\text{y}| > b. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкового вектора та густини ймовірності кожної зі складових.

Задача 1.1.12. Випадковий вектор зі складовими *X*, *Y* розподіляється рівномірно всередині еліпса:

$$\rho(\text{x},\text{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi ab} & \text{при } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1; \\ 0 & \text{при } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1. \end{cases}$$

Знайти густину ймовірності складових випадкового вектора.

Задача 1.1.13. Знайти умовну густину ймовірності складових випадкового вектора (*X*, *Y*), рівномірно розподіленого всередині прямокутника

$$|\mathrm{x}| \leq a, |y| \leq b.$$

Задача 1.1.14. Знайти умовну густину ймовірності складових *X* і *Y* випадкового вектора, рівномірно розподіленого всередині еліпса

$$\mathrm{x}^2/_{a^2} + a^2/_{b^2} = 1.$$

Задача 1.1.15 У радіолокаційній системі з рознесеним прийманням три приймачі знаходяться на таких відстанях один від одного, що сигнали на їх виході *X*, *Y* і *Z* є статистично незалежними. Закони розподілу ймовірностей для сигналів *X*, *Y* і *Z* є нормальними з нульовими середніми значеннями й дисперсіями $\sigma_{\mathrm{x}}^2 = \sigma_y^2 = 3, \sigma_z^2 = 12$. Знайти коефіцієнт кореляції для напруг *V* = *X* + *Z* і *U* = *Y* + *Z*.

1.2. Числові характеристики й закони розподілу функцій випадкових величин

Приклад 1.2.1. Визначити функцію густини ймовірності випадкової величини *Y* за виразом

$$\mathrm{Y} = \cos\varphi,$$

де φ — це випадкова змінна, рівномірно розподілена в проміжку $(0, 2\pi)$.

Розв'язання. Знаходимо функцію густини ймовірності випадкової величини φ

$$\rho(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \varphi \in (0, 2\pi); \\ 0, & \overline{\varphi} \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Для функції $\mathrm{Y} = \cos\varphi$ запишемо обернену функцію $\varphi = \psi(\mathrm{Y})$.

Як і в проміжку (0, 2π), функція $\mathrm{Y} = \cos\varphi$ є немонотонною. Поділимо цей інтервал на інтервали (0, π) і $(\pi, 2\pi)$, де ця функція є монотонною. У проміжку (0, π) оберненою є функція $\psi_1(\mathrm{Y}) = \arccos \mathrm{Y}$, у проміжку $(\pi, 2\pi)$ – $\psi_2(\mathrm{Y}) = -\arccos \mathrm{Y}$.

Густину ймовірності можна визначити таким чином:

$$\rho(\mathrm{Y}) = \rho[\psi_1(\mathrm{Y})] \left|\psi_1'(\mathrm{Y})\right| + \rho\,[\psi_2(\mathrm{Y})] \left|\psi_2'(\mathrm{Y})\right|.$$

Знаходимо похідні обернених функцій:

$$\psi_1'(\mathrm{Y}) = (-\arccos \mathrm{Y})' = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Y}^2}};$$

$$\psi_2'(Y) = (-arccos\, Y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}.$$

Визначаємо модулі похідних:

$$\left|\psi_1'(Y)\right| = \left|\psi_2'(Y)\right| = -\frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}.$$

Ураховуючи, що $\rho(Y)=\frac{1}{2\pi}$, отримаємо $\rho[\psi_1(Y)] = \rho[\psi_2(Y)] = \frac{1}{2\pi}$, отже,

$$\rho(Y)\frac{1}{2\pi\sqrt{1-Y^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1-Y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-Y^2}}.$$

Оскільки $Y = cos\,\varphi$, причому $0 < \varphi < 2\pi$, то $-1 < Y < 1$.

Таким чином, в інтервалі $(-1, 1)$ шукана густина ймовірності має вигляд

$$\rho(Y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-Y^2}},$$

поза цим інтервалом $\rho(Y) = 0$.

Приклад 1.2.2. З допомогою радіотехнічного вимірювача на часовому інтервалі (*0*, *T*) визначається затримка між випадковим моментом появи інформаційного імпульсу *t* та опорним імпульсом, час появи якого $t_0 \in (0, T)$ є фіксованим. Випадкова величина t рівномірно розподілена в інтервалі (*0*, *T*). Знайти коефіцієнт кореляції між випадковою величиною *t* і затримкою $\tau = |t - t_0|$. Визначити, при якому значенні t_0 величини *t* і *τ* є некорельованими.

Розв'язання. Визначимо кореляційну функцію $B_{t\tau}$ за формулою

$$B_{t\tau} = M[t\tau] - m_t m_\tau,$$

$$M[t\tau] = M[t|t-t_0|] = \int_0^T |t-t_0|\, t\rho(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T |t-t_0|\, tdt = \frac{1}{T}\int_0^{t_0}(t-t)tdt -$$

$$-\frac{1}{T}\int_{t_0}^T (t_0 - t)tdt = \frac{t_0^3}{3T} - \frac{t_0 T}{2} + \frac{T^2}{3};$$

$$m_t = \frac{T}{2};\ m_\tau = \frac{1}{T}\int_0^T |t_0 - t|dt = \frac{t_0^2}{T} - t_0 + \frac{T}{2}.$$

Звідси

$$B_{t\tau} = \frac{t_0^3}{3T} - \frac{t_0^2}{2} + \frac{T^2}{2}.$$

Знаходимо

$$6_\tau^2 = \frac{T^2}{12};\quad 6_\tau^2 = M[\tau^2] - m_\tau^2;$$

$$M[\tau^2] = \frac{1}{T}\int_0 |t_0 - t|^2 dt = t_0^2 - t_0 T + \frac{T^2}{3};$$

$$6_\tau^2 = \frac{2t_0^3}{T} - \frac{t_0^4}{T^2} - t_0^2 + \frac{T^2}{12},$$

звідки

$$\text{Ƨ}_{t\tau} = \frac{\frac{t_0^3}{3T} - \frac{t_0^2}{2} + \frac{T^2}{12}}{\sqrt{\frac{2t_0^3}{T} - \frac{t_0^4}{T^2} - t_0^2 + \frac{T^2}{12}}\sqrt{\frac{T^2}{12}}}.$$

Рівняння $\frac{t_0^3}{3T} - \frac{t_0^2}{2} + \frac{T^2}{12} = 0$ має тільки один корінь $t_0 = \frac{T}{2}$ в інтервалі $(0, T)$, тому випадкові величини *t*, *τ* є некорельованими тільки при $t_0 = \frac{T}{2}$.

Приклад 1.2.3. Незалежні нормально розподілені величини *X* і *Y*, що мають густину ймовірності відповідно

$$\rho(x) = (2\pi)^{-1/2} exp(-\frac{x^2}{2}) \text{ і } \rho(y) = (2\pi)^{-1/2} exp(-\frac{y^2}{2}),$$

подаються на суматор. Довести, що густина ймовірності випадкової величини *Z* = *X* + *Y*, отриманої на виході суматора, також підпорядковується нормальному закону.

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\rho(z-x)dx.$$

Тоді

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{z^2}{2})\, exp\left[-\frac{(z-x)^2}{2}\right] dx.$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi}\ \ exp(-\frac{z^2}{2}) \int_{-\infty}^{\infty} exp[-(x^2 - zx)]dx.$$

Доповнивши показник степеня показникової функції під знаком інтеграла до повного квадрата, винесемо $e^{z^2/4}$ за знак интеграла:

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi}\ \ exp(-\frac{z^2}{2}) \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\left(x - \frac{z}{2}\right)^2\right] dx.$$

Ураховуючи, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \ exp\left\{-\left[x - \frac{z}{2}\right]^2\right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1,$$

остаточно одержуємо

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\frac{-z^2}{4}}.$$

Приклад 1.2.4. Є дві нормально розподілені незалежні випадкові величини *X* і *Y* зі спільною густиною ймовірності

$$\rho_2(x,y) = \rho_1(x)\rho_1(y) = \frac{1}{2\pi 6^2} exp\left[-\frac{x^2+y^2}{26^2}\right].$$

Обчислити густину ймовірності випадкової величини

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}\,,$$

визначити математичне сподівання й дисперсію величини *R*.

Розв'язання. Перейдемо від змінних *X* і *Y* до нових змінних *R* і φ :

$$X = Rcos\varphi\,,\ Y = Rsin\varphi\ .$$

При цьому передбачається, що можливі значення φ знаходяться в інтервалі $(-\pi,\pi)$.

Якобіан перетворення змінних має вигляд

$$\mathcal{D} = \frac{\delta(x,y)}{\delta(R,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta R} & \frac{\delta x}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta y}{\delta R} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -Rsin\varphi \\ sin\varphi & Rcos\varphi \end{vmatrix} = R\ .$$

Спільна густина ймовірності для випадкових величин у змінних φ буде

$$\rho_2(R,\varphi) = \rho_2[X(R,\varphi)Y(R,\varphi)]\left|\frac{\delta(x,y)}{\delta(R,\varphi)}\right| = \frac{R}{2\pi 6^2} exp\left[-\frac{R^2cos^2\varphi + R^2sin^2\varphi}{26^2}\right] =$$

$$= \frac{R}{2\pi 6^2} exp\left[-\frac{R^2}{26^2}\right].$$

Знайдемо одновимірну густину ймовірності для R. Інтегруючи $\rho(R, \varphi)$ за всіма можливими значеннями φ, отримуємо

$$\rho_1(R) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R}{2\pi 6^2} exp\left(-\frac{R^2}{26^2}\right) d\varphi = \frac{R}{6^2} exp(-\frac{R^2}{26^2})\ (R > 0).$$

Отримана густина ймовірності $\rho_1(R)$ підпорядковується закону Релея. Визначимо математичне сподівання випадкової величини *R*:

$$M(R) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(x,y)\rho_2(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{X^2+Y^2}\,\frac{1}{2\pi 6^2} exp(\frac{x^2+y^2}{26^2})dxdy.$$

Переходимо до полярної системи координат (R,φ):

$$m(R) = \int_6^{\infty} R\,\frac{1}{26^2} e^{-R^2/26^2}\,dR \int_0^{2\pi} d\varphi = 6\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,;$$

$$6^2(R) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x^2+y^2)\,\frac{1}{2\pi 6^2} exp(-\frac{x^2+y^2}{26^2})\,dxdy - \frac{\pi 6^2}{2} =$$

$$= \int_0^{\infty} R^3 \frac{1}{2\pi 6^2} exp(-\frac{R^2}{26^2}) dR \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{\pi 6^2}{2} = 6^2 \frac{4-\pi}{2}.$$

Математичне сподівання й дисперсію випадкової величини можна також визначити, використовуючи вираз, безпосередньо отриманий для густини ймовірності *ρ(R)* (див. задачу 1.2.9).

Задача 1.2.1. Випадкова величина *X* з густиною ймовірності *ρ(x)* подається на вхід деякого пристрою, який здійснює лінійне перетворення $y = aX + b$.

Визначити густину ймовірності випадкової величини y.

Задача 1.2.2. Випадкова величина *Y* є лінійною функцією випадкової величини *X*: *Y = kX + c*.

Знайти густину ймовірності *ρ(x)*, знаючи густину ймовірності величини *X*:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 6^2}}\ exp\left[\frac{(x-m)^2}{26^2}\right].$$

Задача 1.2.3. Знайти густину ймовірності *ρ(y)* випадкового стаціонарного процесу *y(t)* на виході безінерційного двостороннього квадратичного детектора

$$y(t) = ax^2(t) \quad (a > 0),$$

коли на нього діє нормальний стаціонарний шум *X(t)*, що має густину ймовірності

$$\rho_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi 6^2}} exp\left\{-\frac{x^2}{26^2}\right\}.$$

Задача 1.2.4. Визначити густину ймовірності випадкової величини *Y*, яка визначається виразом

$$y = \mathrm{a}sin\omega x,$$

де *X* – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $(-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega})$.

Задача 1.2.5. Випадкову величину *X* з густиною ймовірності *ρ(x)* піддано квадратичному перетворенню $y = x^2$.

Визначити густину ймовірності випадкової величини *Y*.

Задача 1.2.6. Прямокутні координати *(X, Y)* випадкової точки – незалежні нормальні випадкові величини, що мають однакові дисперсії $\sigma_{\mathrm{x}}^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, але різні середні значення m_x і m_y.

Знайти густину ймовірності координат *(R, φ)* точки, якщо

$$x = R\cos\varphi\ ,\ y = R\sin\varphi\ .$$

Задача 1.2.7. Позначка цілі на круглому екрані радіолокатора діаметром D може випадковим чином займати будь-яке положення на екрані (густина ймовірності постійна). Знайти математичне сподівання відстані R від позначки цілі до центра екрана.

Задача 1.2.8. Сумарна нестабільність радіолінії

$$\Delta f(t) = \xi(t) + \eta(t),$$

де $\xi(t)$ – випадкове змінення частоти передавача; *η (t)* – випадкове змінення частоти гетеродина приймача.

Стаціонарні випадкові процеси $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є статистично незалежними, а одновимірні густини ймовірності випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ рівномірно розподілені на інтервалах $[-a, a]$ і $[-b, b]$.

Знайти густину ймовірності $\rho(\Delta f)$ сумарної нестабільності $\Delta f(t)$.

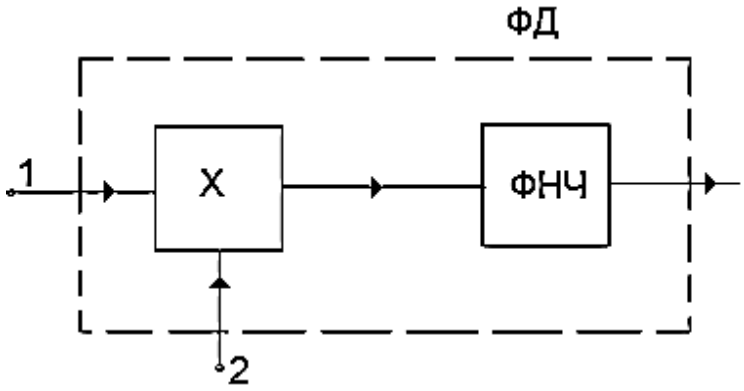
Задача 1.2.9. Визначити густину $\rho(\varphi)$ процесу

$$\varphi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t),$$

де $\theta_1(t)$ і $\theta_2(t)$ – незалежні стаціонарні випадкові процеси, одновимірні густини ймовірності яких рівномірно розподілені на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

Задача 1.2.10. На вхід 1 фазового детектора (рис. 1.2) [4], що складається з перемножувача і фільтра нижніх частот, надходить напруга

$$U_1(t) = cos[\omega_0 t + \theta_1(t)],$$



на вхід 2 – напруга

$$U_2(t) = 2cos[\omega_0 t + \theta_2(t)].$$

Напруга на виході фазового детектора

$$U(t) = cos[\theta_1(t) - \theta_2(t)].$$

Рис. 1.2

Визначити густину ймовірності $\rho_{(U)}$, якщо $\theta_1(t)$ і $\theta_2(t)$ являють собою незалежні стаціонарні випадкові процеси, рівномірно розподілені на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

Задача 1.2.11. Дві випадкові незалежні величини *X* і *Y* з густиною розподілу ймовірностей

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \;\; i \;\; \rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

надходять на перетворювач.

Знайти густину ймовірності випадкової величини *Z* на виході перетворювача $z = \frac{x}{y}$.

Задача 1.2.12. Випадкова точка з координатами (*X*, *Y*) розподілена рівномірно всередині кола k радіусом *R = I*.

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *z = XY*.

Задача 1.2.13. Випадкова величина *X* підпорядковується нормальному закону

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}.$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини

$$y = 2 - 4x^2 + 5x^5.$$

Задача 1.2.14. Випадкові величини *V* і *U* зв'язані лінійно з випадковими величинами X і Y: $V = aX + bY + c$, $U = dX + fY + g$. Відомо числові характеристики системи випадкових величин *(X , Y) :* m_x, m_y, σ_x^2 , σ_y^2 , k_{xy}.

Знайти числові характеристики системи випадкових величин *(V , U) :* m_u, m_v, σ_v^2 , σ_u^2 , k_{uv}, r_{uv}.

Задача 1.2.15. З допомогою радіодалекоміра здійснюється геодезичне вимірювання відстаней. Істинне (невідоме при вимірюванні) значення відстані між двома фіксованими точками дорівнює *a*. Унаслідок наявності помилок результат кожного вимірювання є випадковим і розподіляється за нормальним законом з параметрами *a* і *σ*. Для зменшення помилок вимірювання користуються таким прийомом: вимірюють відстань *n* разів і як наближене значення відстані беруть середнє арифметичне результатів вимірювань

$$y^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Знайти характеристики випадкової величини $y^{(n)}$: математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

Скільки вимірювань необхідно зробити для того, щоб зменшити в десять разів середню квадратичну помилку вимірювання відстані?

1.3. Випадкові процеси та їх характеристики

Приклад 1.3.1. На інтегрувальне коло *RC* впливає білий шум *n(t)*, що має нульове середнє значення і функцію кореляції $Rn(t) = \frac{N_0}{r}\delta(\tau)$. Функція кореляція випадкового процесу – напруги *X(t)* на конденсаторі *C* – у стаціонарному стані має вигляд

$$Rx(\tau) = \frac{\alpha}{4} N_0 e^{-\alpha|\tau|},$$

де $\alpha = \frac{1}{RC}$.

Знайти спектральну густину стаціонарної випадкової функції *X(t)*.

Розв'язання. Знаходимо

$$\Omega_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha N_0}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\, e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Для виконання інтегрування зазначимо, що $|\tau| = \tau$ при $\tau > 0$ і $|\tau| = -\tau$ при $\tau < 0$. Тому, розбиваючи інтервал інтегрування на дві частини, маємо

$$\Omega_x(\omega) = \frac{\alpha N_0}{8\pi}\left[\int_{\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)\tau}\, d\tau\right] = \frac{\alpha N_0}{8\pi}\left[\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega}\right],$$

або, зводячи дроби до спільного знаменника, –

$$\Omega_x(\omega) = \frac{\alpha N_0}{4\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Приклад 1.3.2. Випадкова функція *X(t)* має вигляд

$$X(t) = \vartheta sin\ \Omega\mathrm{t} + \mathrm{Z}\cos\Omega\mathrm{t},$$

де *θ*, *Z*, *Ω* – некорельовані випадкові величини, причому *θ* і *Z* мають нульові математичні сподівання й однакові дисперсії σ^2, а випадкова величина *Ω* характеризується густиною ймовірності

$$\rho(\Omega) = \frac{2}{\pi(\alpha^2 + \Omega^2)} \quad \text{при } \Omega \geq 0.$$

Знайти математичні сподівання і кореляційну функцію випадкової величини *X(t)*. Визначити, чи є випадкова функція *X(t)* стаціонарною в широкому розумінні.

Розв'язання. Математичне сподівання випадкового процесу

$$m_x(t) = 0.$$

Визначимо умовну кореляційну функцію випадкової величини *X(t)* при заданому значенні *V* частоти *Ω*:

$$B_x\left(t_1, \frac{t_2}{V}\right) = M\left[X(t_1)\frac{X(t_2)}{\Omega} = V\right] =$$

$$= M\left[\frac{(\vartheta sin\Omega t_1 + Zcos\Omega t_1)(\vartheta sin\Omega t_2 + Zcos\Omega t_2)}{\Omega} = V\right] =$$

$$= M[\vartheta^2]sinVt_1 sinVt_2 + M[\vartheta Z]sinVt_2 + M[Z\vartheta]cosVt_2 +$$

$$+ M[Z^2]cosVt_1 cosVt_2.$$

З урахуванням того, що

$$M[\vartheta Z] = M[Z\vartheta] = 0, \quad M[\vartheta^2] = M[Z^2] = \sigma^2\ ,$$

отримаємо

$$B_x\left(t_1, \frac{t_2}{\Omega} = \mathrm{V}\right) = \sigma^2 cosV(t_1, t_2).$$

Для визначення кореляційної функції випадкової величини *X(t)* знайдену умовну кореляційну функцію $B_x(t_1, t_2/\Omega)$ необхідно помножити на густину ймовірності *ρ(Ω)* і зінтегрувати по всій області визначення випадкової величини *Ω*. Беручи до уваги, що частота коливань є додатною величиною, унаслідок чого її густина ймовірності *ρ(Ω)* дорівнює нулю при *Ω < 0*, отримаємо

$$B_x(t_1, t_2) = \sigma^2 \int_0^\infty \rho(\Omega)cos\Omega(t_1 - t_2)d\Omega = \sigma^2 e^{-\alpha|t_1 - t_2|}.$$

Кореляційна функція випадкового процесу *X(t)* є парною функцією різниці своїх аргументів, тобто випадковий процес *X(t)* є стаціонарним у широкому розумінні.

Приклад 1.3.3. Білий шум *n(t)*, що має нульове математичне сподівання й функцію кореляції $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\sigma(\tau)$, впливає на резонансну систему, квадрат модуля частотної характеристики якої має вигляд

$$|R(\omega)|^2 = \frac{2}{\pi}\frac{(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2+(\alpha-\gamma\omega_0)\omega^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\omega^2+\omega^4}\ ,$$

де $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$.

Визначити кореляційну функцію вихідного процесу *Y(t)*.

Розв'язання. Енергетичний спектр процесу на виході резонансної системи визначається виразом

$$\Omega_y(\omega) = \Omega_{\text{n}}(\omega)|\text{k}(\omega)|^2 = \frac{\text{N}_0}{\pi}\frac{(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2 + (\alpha-\gamma\omega_0\omega_0^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2-\omega_0^2)\omega^2+\omega^4} =$$

$$= \frac{\text{N}_0}{2\pi}\left[\frac{\alpha-\gamma(\omega-\omega_0)}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2} + \frac{\alpha+\gamma(\omega+\omega_0)}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}\right].$$

Визначаємо кореляційну функцію випадкового процесу *Y(t)*:

$$B_y(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d-\gamma(\omega-\omega_0)}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}e^{j\omega\tau}d\omega + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha+\gamma(\omega+\omega_0)}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}e^{j\omega\tau}d\omega\right].$$

Заміною змінних $\omega = \mu + \omega_0$ у першому інтегралі і $\omega = \mu-\omega_0$ у другому інтегралі отримана формула зводиться до вигляду

$$B_x(\tau) = \frac{N_0}{\pi}\left[\alpha cos\omega_0\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\mu\tau}}{\alpha^2+\mu^2}d\mu - i\gamma sin\omega_0\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu e^{j\mu\tau}}{\alpha^2+\mu^2}d\mu\right].$$

Використовуючи табличні інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\mu\tau}}{\alpha^2+\mu^2}d\mu = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|\tau|} \text{ і } \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu e^{j\mu\tau}}{\alpha^2+\mu^2}d\mu = \begin{cases} i\pi e^{-\alpha|\tau|}, & \tau > 0; \\ -i\pi e^{-\alpha|\tau|}, & \tau < 0, \end{cases}$$

отримуємо кореляційну функцію вихідного процесу *Y(t)*:

$$B_y(\tau) = \frac{N_0}{2}e^{-\alpha|\tau|}(cos\omega_0\tau + \gamma sin\omega_0|\tau|).$$

Задача 1.3.1. Кореляційна функція багатьох стаціонарних вузькосмугових процесів має вигляд

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}cos\omega_0\tau.$$

Знайти спектральну густину випадкової функції, що має зазначену кореляційну функцію.

Задача 1.3.2. На контур, складений з паралельно з'єднаних конденсатора *C* і котушки індуктивності *L* з опором *R*, впливає білий шум зі спектральною інтенсивністю $\frac{N_0}{2}$. Функція кореляції напруги *U(t)* на контурі в стаціонарному стані має вигляд

$$R_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(cos\omega_0\tau + \gamma sin\omega_0|\tau|)\,,$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \alpha = \frac{R}{2L}; \quad \sigma_u^2 = N_0\Delta f R_{02}^2; \quad \gamma = \frac{\alpha}{\omega_0};$$

$\Delta f = \frac{\alpha}{2}$ – енергетична смуга контуру; $R_{02} = \frac{L}{RC}$ – резонансний опір паралельного коливального контуру.

Знайти спектральну густину стаціонарного випадкового процесу *U(t)*.

Задача 1.3.3. Стаціонарний білий шум з функцією кореляції $R(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ впливає на лінійну систему з функцією передання

$$k(j\omega) = \begin{cases} k_0 \text{ при } \ -\omega_2 \le \omega \le -\omega_1, \ \ \omega_1 \le \omega \le \omega_2; \\ 0 \ \text{ при інших } \omega. \end{cases}$$

Знайти функцію кореляції шуму *X(t)* на виході системи.

Задача 1.3.4. Енергетичний спектр випадкового стаціонарного процесу *X(t)* на виході фільтра нижніх частот апроксимувати функцією $\Omega(\omega) = N_0 e^{-(\alpha\omega)^2}$. Обчислити функцію кореляції випадкового процесу *X(t)*.

Задача 1.3.5. На два послідовно з'єднаних інтегрувальних RC-кола впливає білий шум *n(t)*, що має нульове середнє значення й функцію кореляції $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$. Функція кореляції випадкового процесу *X(t)* на виході зазначеного фільтра низьких частот має вигляд

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

де $\alpha = \frac{1}{\mathrm{RC}}$.

Знайти спектральну густину стаціонарної випадкової функції *X(t)*.

Задача 1.3.6. Визначити спектральну густину стаціонарного випадкового процесу *X(t)* з кореляційною функцією

$$R_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}|\tau|\right) \text{при } |\tau| \le \varepsilon; \\ 0 \qquad\qquad\quad \text{при } |\tau| > \varepsilon. \end{cases}$$

Задача 1.3.7. Визначити спектральну густину стаціонарного випадкового процесу *X(t)* з кореляційною функцією

$$R_x(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \sigma^2 cos\omega_i\tau.$$

Задача 1.3.8. Випадковий процес *X(t)* являє собою суму двох гармонік, зсунутих за фазою на 90°, з випадковими амплітудами

$$X(t) = Vsin\omega_0 t + Zcos\omega_0 t,$$

де *V* і *Z* – некорельовані випадкові величини, які мають нульові математичні сподівання і дисперсії, що дорівнюють відповідно σ_v^2 і σ_z^2.

Визначити математичні сподівання і кореляційну функцію випадкового процесу *X(t)*. Чи задовольняє випадковий процес *X(t)* умови стаціонарності

в широкому розумінні і достатні умови ергодичності стаціонарного випадкового процесу?

Задача 1.3.9. Випадкова функція *X(t)* має вигляд

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N} Z_v f_v(t),$$

де $f_1(t), \dots, f_N(t)$ – будь-які невипадкові функції, а $Z_1, \dots, Z_N$ – будь-які випадкові величини, що мають довільні, але скінченні математичні сподівання й моменти другого порядку.

Визначити математичні сподівання і кореляційну функцію випадкового процесу *X(t)*.

Задача 1.3.10. Випадкова функція *X(t)* являє собою суму гармонійних коливань з випадковими амплітудами й відомими частотами

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N} [V_n sin\omega_k t + W_k cos\omega_k t],$$

де V_k і W_k – випадкові величини, для яких

$$M[V_k] = M[W_k] = 0, \text{ к} = 1,2,\dots,\text{N};$$

$$M[V_k V_j] = M[V_k W_j] = M[W_k V_j] = M[W_k W_j] = 0, \;\; j,k = 1,2,\dots N(j \neq k);$$

$$M[V_k^2] = M[W_k^2] = d_k, \quad k = 1,2,\dots N.$$

Визначити, чи є функція *X(t)* стаціонарною в широкому розумінні.

Задача 1.3.11. Випадковий процес *X(t)* являє собою суму невипадкових функцій $e^{j\omega_k t}$ з випадковими некорельованими коефіцієнтами V_k:

$$X(t) = \sum_{k=-N}^{N} V_k e^{j\omega_k t},$$

де $M[V_k] = 0, \;\omega_{-k} = -\omega_k, \; d_k = d_{-k}, \quad k = 0; \pm 1; \pm 0; \dots \pm N,$

$$M[V_k \bar{V}_e] \begin{cases} d_k & \text{при } k = l; \\ 0 & \text{при } k \neq l \end{cases} \quad (k, l = 0, \pm 1, \dots, \pm N).$$

Визначити, чи є функція *X(t)* стаціонарною в широкому розумінні.

Задача 1.3.12. Випадкова функція *X(t)* має вигляд

$$X(t) = \varphi(t, v, \dots, v_n),$$

де $v, \dots, v_n$ – випадкові величини, для яких задано густину ймовірності $v, \dots, v_n$. Визначити математичні сподівання і кореляційну функцію випадкового процесу *X(t)*.

Задача 1.3.13. Визначити, чи є випадкові стаціонарні процеси з наведеними нижче кореляційними функціями ергодичними:

а) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$;

б) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} cos\omega\tau$;

в) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(cos\omega\tau + \gamma sin\omega t)$;

г) $R(\tau) = \sigma^2 cos\omega\tau$.

Задача 1.3.14. На низькочастотний RC-фільтр впливає білий шум *n(t)*, що має нульове середнє значення і функцію кореляції $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$. Квадрат модуля частотної характеристики фільтра має вигляд

$$|k(\omega)|^2 = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2},$$

де $\alpha = \frac{1}{RC}$.

Визначити функцію кореляції випадкового процесу *Y(t)* на виході *RC*-фільтра.

Задача 1.3.15. В умовах попередньої задачі визначити кореляційну функцію випадкового процесу *Y(t)* на виході низькочастотного *RC*-фільтра, квадрат модуля частотної характеристики якого має вигляд

$$|k(\omega)|^2 = \frac{4\alpha^3}{(\alpha^2+\omega^2)^2}.$$

Задача 1.3.16. Білий шум *n(t)*, що має нульове математичне сподівання і функцію кореляції $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$, впливає на коливальний контур *LC*, що шунтується опором *R*. Квадрат модуля частотної характеристики контуру має вигляд

$$|k(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega-\omega_k)^2\tau_k^2},$$

де τ_k – постійна часу контуру.

Визначити кореляційну функцію випадкового процесу *Y(t)* на виході коливального контуру.

Задача 1.3.17. Квадрат модуля частотної характеристики системи резонансних підсилювачів можна подати у вигляді

$$|k(\omega)|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{k_0^2}{\alpha}\left\{exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha^2}\right] + exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\alpha^2}\right]\right\}.$$

На вхід підсилювача подається білий шум *n(t)* зі спектральною щільністю $\frac{N_0}{2}$. Визначити функцію кореляції $B_y(t)$ процесу *y(t)* на виході підсилювача.

2. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Інформація, яку отримують на основі вибірки з генеральної сукупності, може бути використана для формулювання певних суджень (рішень) про всю генеральну сукупність. Такі рішення називають *статистичними*. Статистичні рішення мають імовірнісний характер, тобто завжди існує ймовірність того, що прийняті рішення будуть помилковими. Головна цінність прийняття статистичних рішень полягає в тому, що в межах імовірнісних категорій можна об'єктивно виміряти ступінь ризику, що відповідає тому або іншому рішенню.

Будь-які статистичні висновки, отримані шляхом оброблення вибірки, називають *статистичними гіпотезами*.

2.1. Параметричні й непараметричні статистичні гіпотези

Статистичні гіпотези про значення параметрів ознак генеральної сукупності називають *параметричними*. Наприклад, висувається статистична гіпотеза про числові значення генерального середнього $\overline{X}_Г$, генеральної дисперсії $D_Г$, генерального середньоквадратичного відхилення $\sigma_Г$ та ін.

Статистичні гіпотези, що висуваються за результатами оброблення вибірки, про закон розподілу ознаки генеральної сукупності називають *непараметричними*. Так, наприклад, за результатами оброблення вибірки може бути висунута гіпотеза, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу, експоненціальний закон та ін.

2.2. Нульова й альтернативна гіпотези

Гіпотезу, що підлягає перевірці, називають *основною*. Оскільки ця гіпотеза припускає відсутність систематичних розбіжностей (нульові розбіжності) між невідомим параметром генеральної сукупності й величиною, одержаною внаслідок оброблення вибірки, то її називають *нульовою гіпотезою* й позначають H_0.

Зміст нульової гіпотези записується так:

$$H_0 : \overline{x_Г} = a;$$
$$H_0 : \sigma_Г = 2;$$
$$H_0 : r_{xy} = 0{,}95.$$

Кожній нульовій гіпотезі можна протиставити кілька альтернативних (що конкурують) гіпотез H_α, що заперечують твердження нульової. Так, наприклад, нульова гіпотеза стверджує: $H_0 : \overline{x_Г} = a$, а альтернативна гіпотеза: $H_\alpha : \overline{x_Г} \geq a$, тобто заперечує твердження нульової.

2.3. Прості і складні статистичні гіпотези

Проста гіпотеза зазвичай належить до параметра ознак генеральної сукупності і є однозначною.

Наприклад, згідно з простою гіпотезою параметр генеральної сукупності дорівнює конкретному числу, а саме:

$$H_0 : \sigma_Г = 4;$$
$$H_0 : r_{xy} = 4.$$

Складна статистична гіпотеза є неоднозначною й може стверджувати, що значення параметра генеральної сукупності належить певній області ймовірних значень, яка може бути дискретною й неперервною, наприклад:

$$H_0 : \overline{x_Г} \in [2;2,1;2,2] \text{ або } H_0 : \overline{x_Г} \in [5,2/6,5].$$

Нульова гіпотеза може стверджувати як про значення одного параметра генеральної сукупності, так і про значення кількох параметрів, а також про закон розподілу ознаки генеральної сукупності.

2.4. Статистичний критерій. Емпіричне значення критерію

Для перевірки правильності висунутої статистичної гіпотези вибирають так званий статистичний критерій, керуючись яким відхиляють або не відхиляють нульову гіпотезу. Статистичний критерій, який умовно позначають через *K*, є випадковою величиною, закон розподілу ймовірностей якої нам заздалегідь відомо. Так, наприклад, для перевірки правильності гіпотези $H_0 : \overline{x_Г} = a$ як статистичний критерій *K* можна взяти випадкову величину, яку позначають через *K* = *Z*:

$$Z = \frac{\overline{x_B} - a}{\sigma(\overline{x_B})} \qquad (2.1)$$

і яка підпорядковується нормованому нормальному закону розподілу ймовірностей.

При великих обсягах вибірки (*n* > 30) закони розподілу статистичних критеріїв наближаються до нормального.

Спостережуване значення критерію, який позначають через $K*$, обчислюють за результатом вибірки.

2.5. Область прийняття гіпотези. Критична область. Критична точка

Множину *Ω* усіх можливих значень статистичного критерію *K* можна поділити на дві підмножини *A* і $\overline{A}$, які не перетинаються $(A \cup \overline{A} = \Omega, A \cup \overline{A} = 0)$.

Сукупність значень статистичного критерію $K \in A$, при яких нульова гіпотеза не відхиляється, називають *областю прийняття нульової гіпотези*.

Сукупність значень статистичного критерію $K \in \overline{A}$, при яких нульова гіпотеза відхиляється, називають *критичною областю*.

Отже, *A* – область прийняття H_0, $\overline{A}$ – критична область, де H_0 відхиляється.

Точку або кілька точок, що поділяють множину *Ω* на підмножини *A* і $\overline{A}$, називають *критичними* і позначають через $K_{кр}$.

Існують три види критичних областей.

Якщо при $K < K_{кр}$ нульова гіпотеза відхиляється, то маємо лівобічну критичну область (рис. 2.1).

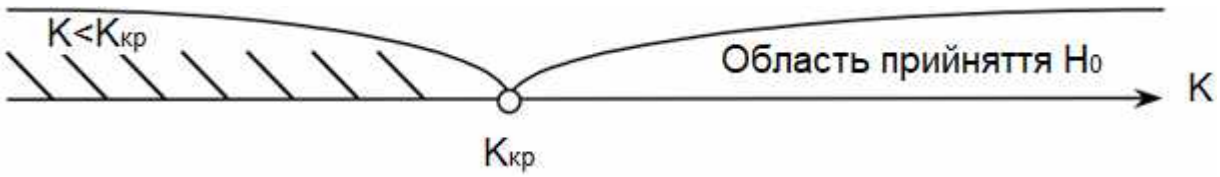


Рис. 2.1

Якщо при $K > K_{кр}$ нульова гіпотеза відхиляється, то маємо правобічну критичну область (рис. 2.2).

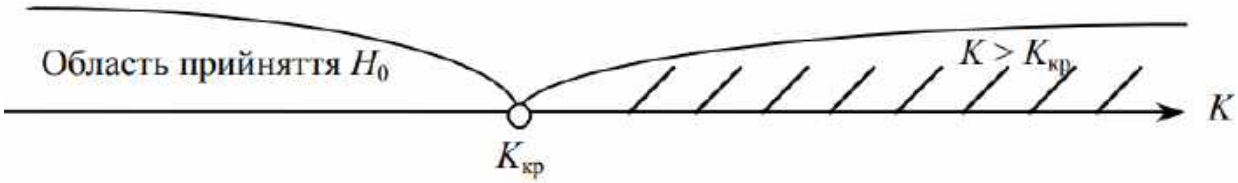


Рис. 2.2

Якщо ж при $K < K_{кр}'$ і при $K > K_{кр}''$ нульова гіпотеза відхиляється, то маємо двобічну критичну область (рис. 2.3).

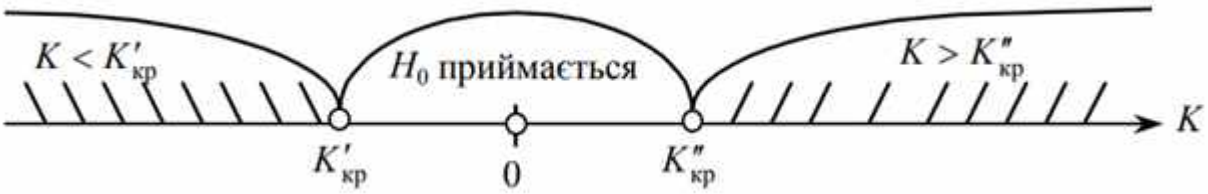


Рис. 2.3

Лівобічна й правобічна області визначаються однією критичною точкою, двобічна критична область — двома критичними точками, симетричними відносно нуля.

2.6. Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези

Для перевірки правильності H_0 задається так званий *рівень значущості* α (α — це мала наперед задана ймовірність, α = 0,005; 0,01; 0,001).

В основу перевірки H_0 покладено принцип $P(K \in \overline{A}) = \alpha$, тобто ймовірність того, що статистичний критерій потрапляє в критичну область A, дорівнює малій імовірності α. Якщо ж виявиться, що $K \in A$, а ця подія є малоймовірною і все ж відбулася, то немає підстав приймати нульову гіпотезу.

Пропонується такий алгоритм перевірки правильності c:

1. Сформулювати нульову гіпотезу H_0 та одночасно альтернативну H_α.

2. Вибрати статистичний критерій, який відповідав би сформульованій нульовій гіпотезі.

3. Залежно від змісту нульової й альтернативної гіпотез побудувати правобічну, лівобічну або двобічну критичну область, а саме: нехай $H_\alpha : \overline{x_r} = a$, тоді, якщо $H_\alpha : \overline{x_r} > a$, то вибирається правобічна критична область, якщо $H_\alpha : \overline{x_r} < a$, то вибирається лівобічна критична область, якщо $H_\alpha : \overline{x_r} \neq a$, то вибирається двобічна критична область.

4. Для побудови критичної області (лівобічної, правобічної або двобічної) знайти критичні точки. За вибраним статистичним критерієм і рівнем значущості α знайти критичні точки.

5. За результатами вибірки обчислити спостережуване значення критерію $K^*_{сп}$.

6. Відхилити або прийняти нульову гіпотезу: У разі, коли $K^* \in A$, а це є малоймовірною випадковою подією $P(K^* \in \overline{A}) = \alpha$ і, незважаючи на це, вона відбулася, то нульова гіпотеза H_0 відхиляється:

– для лівобічної критичної області

$$P(K^*_{сп} < K_{кр}) = \alpha; \tag{2.2}$$

– для правобічної критичної області

$$P(K^*_{сп} > K_{кр}) = \alpha; \tag{2.3}$$

– для двобічної критичної області

$$P(K^*_{сп} < K'_{кр}) + P(K^*_{сп} > K''_{кр}) = \alpha \tag{2.4}$$

або

$$P(K^*_{сп} < K'_{кр}) = P(K^*_{сп} > K''_{кр}) = \frac{\alpha}{2}, \qquad (2.5)$$

ураховуючи ту обставину, що критичні точки $K'_{кр}$ і $K''_{кр}$ симетрично розташовані відносно нуля.

2.7. Помилки першого й другого роду. Потужність критерію

Якою б малою не була величина *α*, потрапляння спостережуваного значення $K^*_{сп}$ у критичну область $K^*_{сп} \in \overline{A}$ ніколи не буде подією абсолютно неможливою. Тому не виключається той випадок, коли гіпотеза H_0 буде правильною, а $K^*_{сп} \in \overline{A}$, отже, нульову гіпотезу буде відхилено.

При перевірці правильності нульової гіпотези H_0 можуть бути помилки першого й другого роду:

– якщо гіпотеза H_0 є правильною, але її відхиляють на основі її перевірки, то буде помилка першого роду;

– якщо гіпотеза H_0 є неправильною, але її приймають, то буде помилка другого роду.

Між помилками першого й другого роду існує тісний зв'язок.

Наприклад, нехай перевіряється гіпотеза $H_0 : \overline{x_Г} = a$. При великих обсягах вибірки n $\overline{x_B}$ є випадковою величиною, закон розподілу ймовірностей якої асимптотично наближається до нормального з числовими характеристиками

$$M(\overline{x_B}) = a = \overline{X_Г}, \sigma(\overline{x_B}) = \frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}.$$

Тому, якщо гіпотеза H_0 є правильною, то $M(\overline{x_B}) = a$. Цей розподіл має вигляд, зображений на рис. 2.4 (крива *f* (*x;a*)).

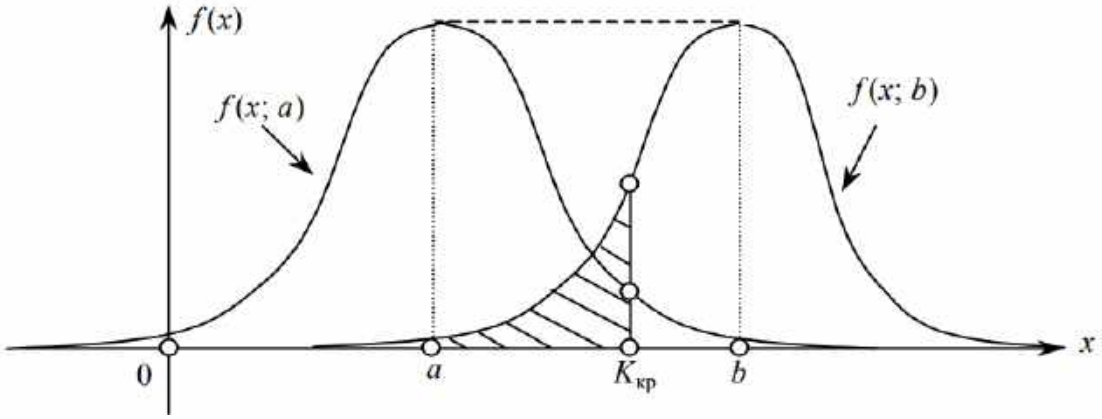


Рис. 2.4

Якщо альтернативна гіпотеза заперечує H_0 і стверджує $H_\alpha : \overline{X_Г} = b > a$, то нормальна крива буде зміщена праворуч (на рис. 2.4 крива *f* (*x*;*b*)).

За вибраним рівнем значущості α визначається критична область (див. рис. 2.4).

Якщо $\overline{x_B} > K_{кр}$, то гіпотеза H_0 відхиляється з імовірністю помилки першого роду:

$$P(\overline{x_B} > K_{КР}) = \int_{K_{КР}}^{\infty} f(x;a)dx = \alpha. \qquad (2.6)$$

Якщо $\overline{x_B} < K_{кр}$, то гіпотеза H_0 не відхиляється, хоча може бути правильною альтернативна гіпотеза H_α.

Отже, в цьому разі може бути помилка другого роду. Імовірність цієї помилки, яку позначають символом β, може бути визначена на кривій *f* (*x*;*b*):

$$\beta = \int_{-\infty}^{K_{КР}} f(x;a)dx. \qquad (2.7)$$

Цю ймовірність зображено на рис. 2.4 – заштрихована зона під кривою *f* (*x*; *b*) зліва від $K_{кр}$.

Якщо з метою зменшення ризику відхилити правильну гіпотезу H_0 зменшуватимемо значення α, то критична точка $K_{кр}$ зміщуватиметься вправо, що, своєю чергою, спричиняє збільшення ймовірності помилки другого роду, тобто величини *β*.

Різницю *π* = 1−*β* називають *імовірністю* обґрунтованого відхилення H_0, або *потужністю* критерію.

Під час виконання практичних завдань може виникнути потреба вибору статистичного критерію з їх певної множини. У цьому разі вибирають той критерій, який має найбільшу потужність.

2.8. Параметричні статистичні гіпотези

2.8.1. Перевірка правильності нульової гіпотези про значення генерального середнього

Для перевірки правильності $H_0 : \overline{X_Г} = a,$ де *a* – певне число, при заданому рівні значущості *α* насамперед необхідно вибрати статистичний критерій *K*.

Найзручнішим критерієм для цього типу задач є випадкова величина *K* = *Z*, що підпорядковується нормованому нормальному закону розподілу ймовірностей *N*(0; 1):

$$Z = \frac{\overline{x_B} - a}{\sigma(\overline{x_B})} = \frac{\overline{x_B} - a}{\sigma_Г / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{x_B} - a)}{\sigma_Г}. \quad (2.8)$$

При розв'язуванні задач такого класу можливими є три випадки:

а) при $H_\alpha : \overline{x_r} > a$ будується правобічна критична область;

б) при $H_\alpha : \overline{x_r} < a$ будується лівобічна критична область;

в) при $H_\alpha : \overline{x_r} \neq a$ (тобто може бути $\overline{x_r} < a$ або $\overline{x_r} > a$) будується двобічна критична область.

Лівобічна й правобічна критичні області визначаються однією критичною точкою, двобічна область — двома критичними точками, розташованими симетрично відносно нуля (у цьому разі потужність критерію буде максимальною), будуть однаковими за модулем і матимуть протилежні знаки.

Для побудови правобічної критичної області необхідно знайти критичну точку Z_{KP}. Значення Z_{KP} знаходимо з рівняння

$$P(0 < Z < Z_{KP}) + P(Z > Z_{KP}) = \frac{1}{2}. \quad (2.9)$$

І далі:

$$P(0 < Z < z_{кр}) + \alpha = \frac{1}{2} \to P(0 < Z < z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} \to \Phi(z_{кр}) - \Phi(0) = \frac{1-2\alpha}{2} \to \Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2},$$

оскільки $\Phi(0) = 0$.

За таблицею значень функції Лапласа, скориставшись значенням $\frac{1-2\alpha}{2}$, знаходимо аргумент $x = Z_{KP}$.

Правобічну критичну область зображено на рис. 2.5.

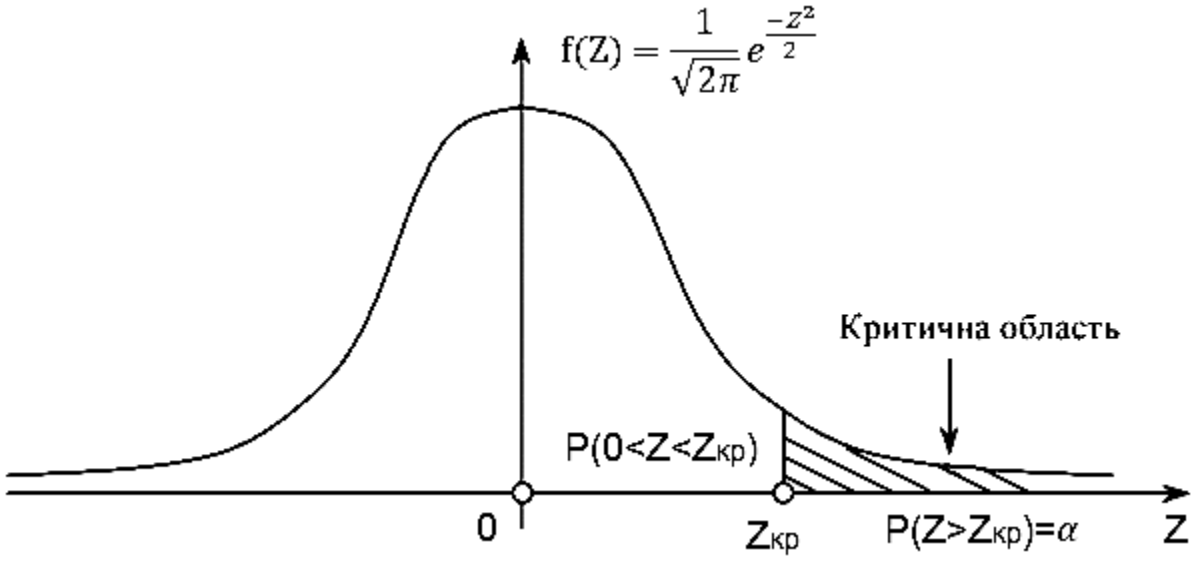


Рис. 2.5

Для побудови лівобічної критичної області необхідно знайти критичну точку Z_{KP}, дотримуючись умови $P(Z < Z_{KP}) = \alpha$. Величину Z_{KP} у цьому випадку визначаємо з допомогою рівняння

$$P(Z < z_{KP}) + P(z_{KP} < Z < 0) = \frac{1}{2}. \qquad (2.10)$$

І далі:

$$\alpha + P(Z_{KP} < Z < 0) = \frac{1}{2} \to P(Z_{KP} < Z < 0) = \frac{1-2\alpha}{2} \to \Phi(0) - \Phi(Z_{KP}) = \frac{1-2\alpha}{2} \to -\Phi(Z_{KP}) =$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \to \Phi(Z_{KP}) = -\frac{1-2\alpha}{2}.$$

Ураховуючи ту обставину, що функція Лапласа *Ф*(*z*) є непарною, за таблицею значень *Ф*(*z*) знаходимо аргумент $x = Z_{KP}$ і беремо його зі знаком «мінус» ($-Z_{KP}$). Лівобічну критичну область зображено на рис. 2.6.

Для двобічної критичної області необхідно визначити дві критичні точки Z'_{KP}, Z''_{KP} при умові

$$P(Z < Z'_{KP}) = \frac{\alpha}{2},\ P(Z < Z''_{KP}) = \frac{\alpha}{2},$$

де $Z'_{KP} = -Z''_{KP}$.

Отже, нам необхідно обчислити лише Z''_{KP}, скориставшись рівнянням

$$P(0 < Z < Z''_{KP}) + P(Z > Z''_{KP}) = \frac{1}{2}. \qquad (2.11)$$

І далі:

$$P(0 < Z < Z''_{KP}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \to P(0 < Z < Z''_{KP}) =$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \to \Phi(Z''_{KP}) - \Phi(0) = \frac{1-\alpha}{2} \to \Phi(Z''_{KP}) = \frac{1-\alpha}{2},$$

де Z''_{KP} знаходимо за таблицею значень функції Лапласа.

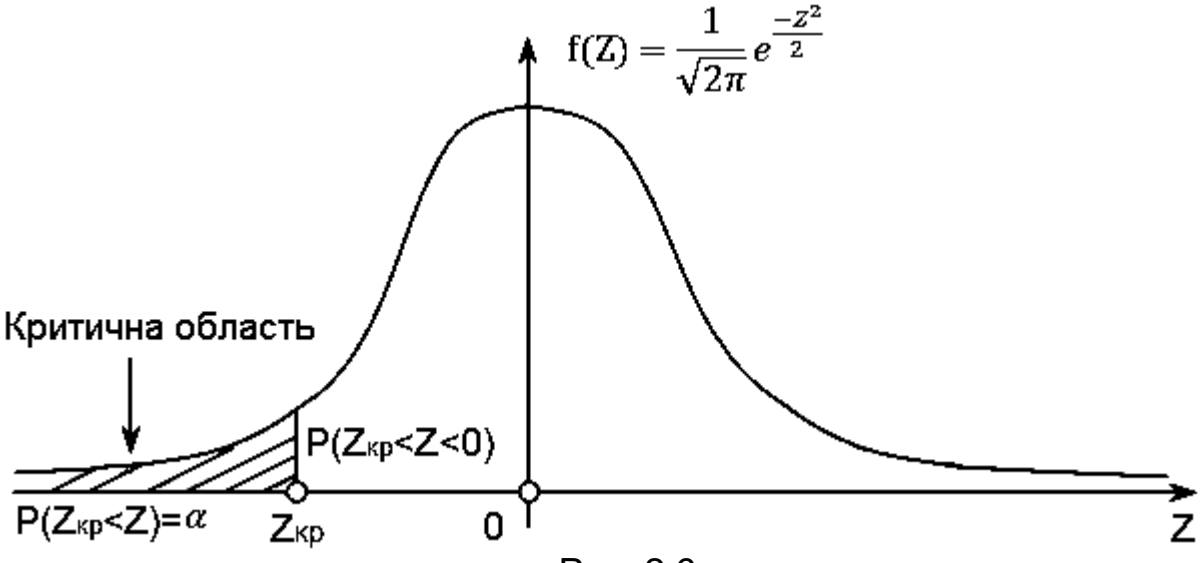


Рис. 2.6

Двобічну критичну область зображено на рис. 2.7.

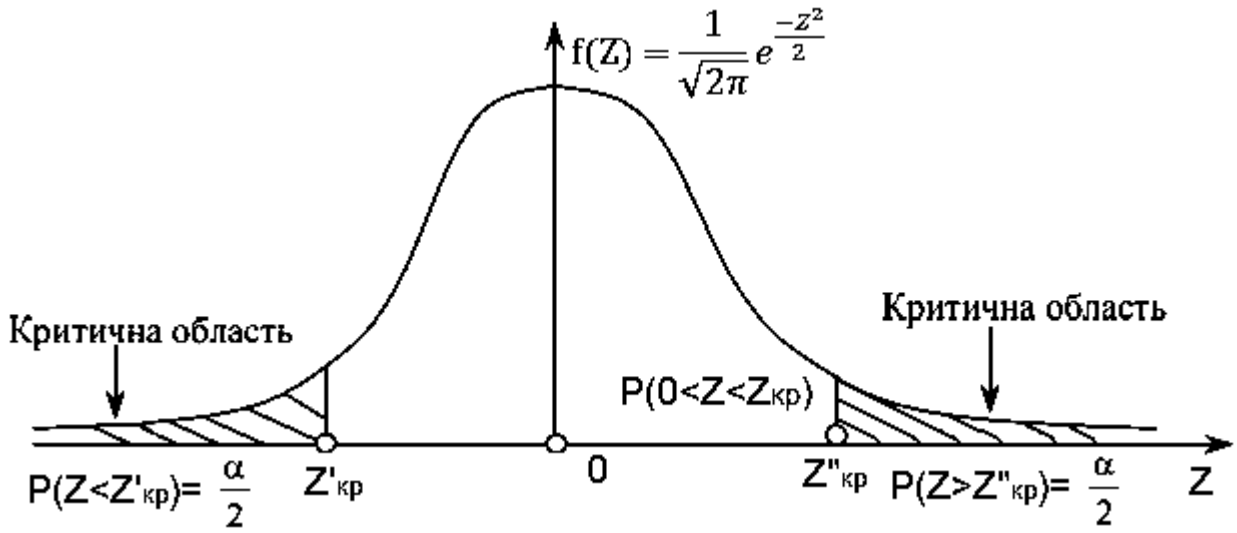


Рис. 2.7

Розглянутий метод побудови критичних областей придатний лише за умови, коли відомим є середньоквадратичне відхилення $\sigma_Г$ ознаки генеральної сукупності. При цьому спостережуване значення критерію обчислюється так:

$$Z^* = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}}. \qquad (2.12)$$

У випадку, коли значення $\sigma_Г$ є невідомим, його замінюють статистичною оцінкою

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}}.$$

Тоді як статистичний критерій вибирають випадкову величину $K = t$, що має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи:

$$t = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}. \qquad (2.13)$$

Приклад 2.8.1. Розбіжність вимірів діаметрів кульок $X = x_i$ є випадковою величиною, що підпорядковується закону розподілу $N(a; 4)$.

При рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність гіпотези $H_0 : a$ = 240 мм, якщо альтернативна гіпотеза $H_0 : a > 240$ мм, коли відомо, що $\sigma_Г$ = 4 мм і вибіркове середнє значення для виміряних 100 однотипних кульок x_B = 225 мм.

Розв'язання. Оскільки $H_0 : a > 240$ мм, будуємо правобічну критичну область. Для цього знаходимо критичну точку, застосувавши відомий вираз

$$\Phi(Z_{KP}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-0,02}{2} = \frac{0,98}{2} = 0,49.$$

За значенням $\Phi(Z_{KP}) = 0,49$, скориставшись таблицею, знаходимо $Z_{KP} \approx 2,34$. Отже, правобічна критична область матиме вигляд, зображений на рис. 2.8.

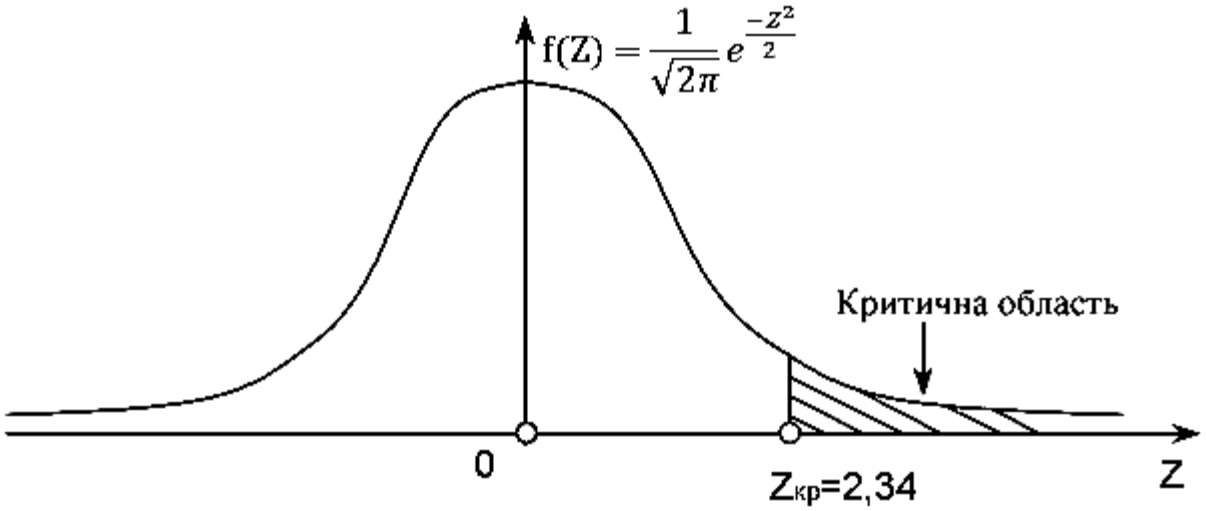


Рис. 2.8

Обчислимо спостережуване значення критерію за формулою (2.12): $Z^* = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}}$. Оскільки x_B = 225 мм, a = 240 мм, σ_r = 4 мм, *n* = 100, маємо

$$Z^* = \frac{225-240}{\frac{4}{\sqrt{100}}} = \frac{-15}{\frac{4}{10}} = -\frac{15}{0,4} = -\frac{150}{4} = -37,5.$$

Висновок. Оскільки *z** ∈ [−∞; 2,34], то немає підстав для відхилення нульової гіпотези $H_0 : a = 240$ мм. Отже, нульова гіпотеза приймається.

Приклад 2.8.2. Проведено 10 незалежних експериментів над випадковою величиною *X*, що підпорядковується нормальному закону розподілу з невідомими значеннями *a*, *σ*. Результати експериментів подано у вигляді статистичного ряду (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Експериментальні дані

x_i	2,5	2	-2,3	1,9	-2,1	2,4	2,3	-2,5	1,5	-1,7
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

При рівні значущості α = 0,001 перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : a = 0,9$ при альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a < 0,9$.

Розв'язання. Запишемо статистичний ряд у вигляді статистичного розподілу й обчислимо $\overline{x_B}, S$ (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Статистичний ряд

x_i	-2,5	-2,3	-2,1	-1,7	1,5	1,9	2	2,3	2,4	2,5
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Виконаємо розрахунки:

$$\overline{x_B} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-2,5-2,3-2,1-1,7+1,5+1,9+2+2,3+2,4+2,5}{10} = 0,4;$$

$$D_B = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{x_B})^2 =$$

$$= \frac{6,25+5,29+4,41+2,89+2,25+3,61+4+5,29+5,76+6,25}{10} - (0,4)^2 =$$

$$= 4,6 - 0,16 = 4,44;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{10}{9} \cdot 4,44 = 4,933;$$

$$S = 4,933 \approx 2,22 .$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a < 0,9$ будується лівобічна критична область, для чого знайдемо критичну точку, застосувавши статистичний критерій (2.12):

$$t_{кр}(\alpha = 0,001, k = n-1 = 10-1 = 9) = t(\alpha = 0,001, k = 9) = 4,78.$$

Оскільки густина ймовірностей для розподілу Стьюдента є парною, то $t_{кр} = -4,78.$

Критичну область зображено на рис. 2.9.

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$t^* = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{0,4-0,9}{\frac{2,22}{\sqrt{10}}} = \frac{0,4-0,9}{\frac{2,22}{3,16}} = \frac{0,4-0,9}{0,702} = -\frac{0,5}{0,702} = -0,712.$$

Висновок. Оскільки $t^* \in [-4,78; \infty]$, то немає підстав відхиляти гіпотезу $H_0 : a = 0,9$.

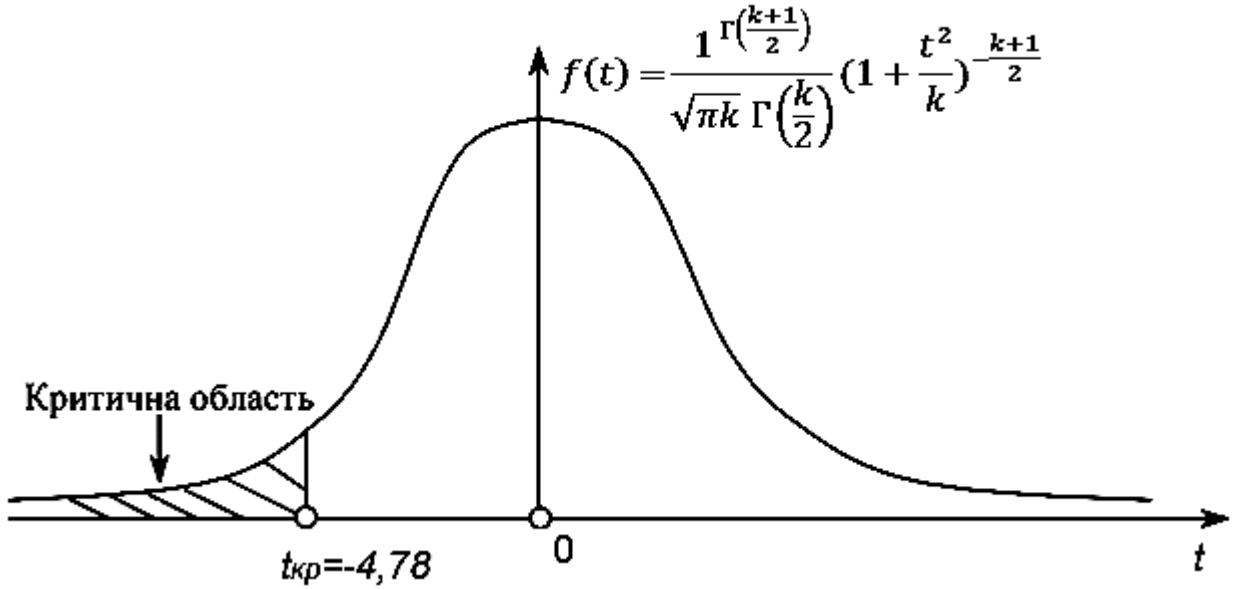


Рис. 2.9

Приклад 2.8.3. Реалізувавши вибірку з генеральної сукупності, ознака якої *X* підпорядковується нормальному закону розподілу, отримали статистичний розподіл (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Реалізація вибірки

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	1	3	6	8	6	6	5	3	2

При рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність нульової гіпотези $H_0: a = 0{,}8$ при альтернативній гіпотезі $H_\alpha: a \neq 0{,}8$.

Розв'язання. Обчислимо значення $\overline{x_B}, S$:

$$\overline{x_B} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \left| \text{ оскільки } n = \sum n_i = 40 \right| =$$

$$= \frac{6+7\cdot 3+8\cdot 6+9\cdot 8+10\cdot 6+11\cdot 6+12\cdot 5+13\cdot 3+14\cdot 2}{40} = 10;$$

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x_B})^2 =$$

$$= \frac{31+49\cdot 3+64\cdot 6+81\cdot 8+100\cdot 6+121\cdot 6+144\cdot 5+169\cdot 3+196\cdot 2}{40} - (10)^2 = 4;$$

$$S = \sqrt{4{,}3103} \approx 2{,}03.$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a \neq 0{,}8$ будуємо двобічну критичну область. Ураховуючи те, що $\sigma_Г$ є невідомою величиною, для побудови цієї області беремо вказаний статистичний критерій.

Оскільки критичні точки $t'_{кр}$ і $t''_{кр}$ є симетричними відносно нуля і при цьому $t'_{кр} = -t''_{кр}$:

$$t''_{кр} = (\alpha = 0{,}01, k = n - 1 = 40 - 1 = 39) = t''_{кр}(\alpha = 0{,}01; k = 39) = 2{,}7 .$$

Тоді $t'_{кр} = -2{,}7.$

Двобічну критичну область зображено на рис. 2.10.

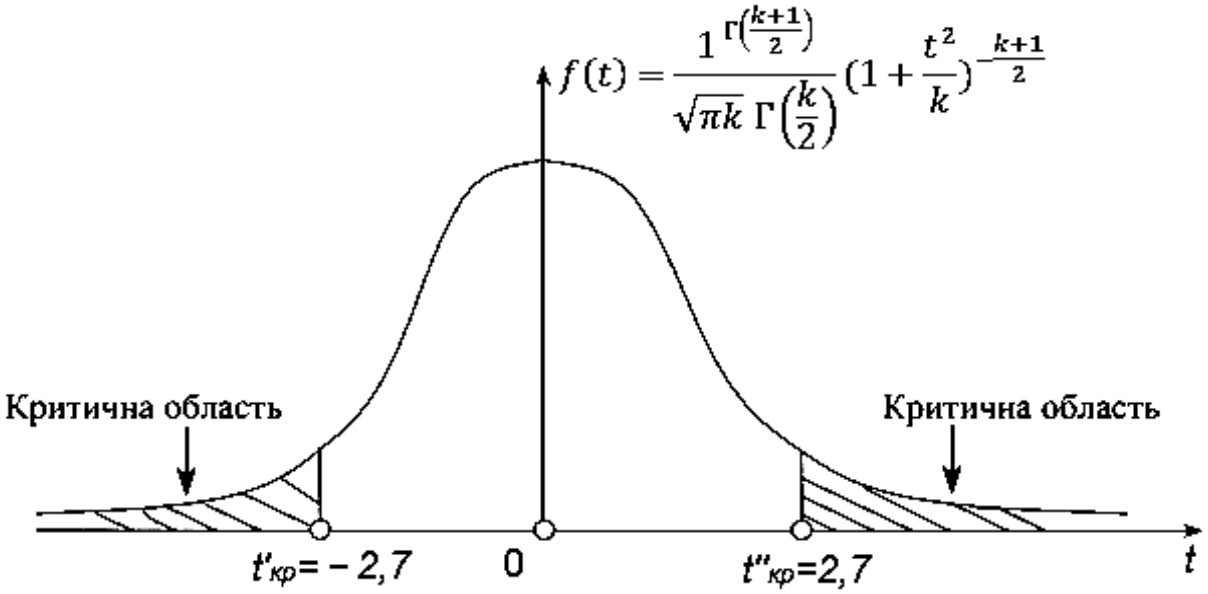


Рис. 2.10

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$t^* = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{10 - 8}{\frac{2{,}03}{\sqrt{40}}} = \frac{2}{0{,}321} = 6{,}23.$$

Висновок. Оскільки $t * \in$ [−2,708; 2,708], то немає підстав приймати гіпотезу $H_0 : a = 0{,}8$.

Приклад 2.8.4. З генеральної сукупності, ознака якої *X* підпорядковується закону розподілу *N*(a; 5), реалізовано вибірку й побудовано статистичний розподіл (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Реалізація вибірки

x_i	10,9	11	11,2	11,3	11,5	11,6	11,8	11,9
n_i	2	4	1	3	4	1	2	3

При рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0: a = 11,44$ при альтернативній гіпотезі $H_\alpha: a \neq 11,44$.

Розв'язання. Обчислимо значення $\overline{x_B}$. Оскільки $n = \sum n_i = 20$, маємо

$$\overline{x_B} = \frac{\sum x_i n_i}{n} =$$

$$= \frac{10,9 \cdot 2 + 11 \cdot 4 + 11,2 \cdot 1 + 11,3 \cdot 3 + 11,5 \cdot 4 + 11,6 \cdot 1 + 11,8 \cdot 2 + 11,9 \cdot 3}{20} =$$

$$= \frac{227,8}{20} = 11,39.$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha: a \neq 11,44$ будуємо двобічну критичну область. Ураховуючи те, що маємо відоме значення $\sigma_Г = 5$, для знаходження критичних точок скористаємося статистичним критерієм $Z = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}}$, що підпорядковується закону розподілу *N*(0; 1).

Критичну точку Z''_{KP} визначаємо з рівності

$$\Phi(Z''_{KP}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,01}{2} = 0,495.$$

За значенням функції Лапласа $\Phi(Z''_{KP}) = 0,495$ знаходимо $Z''_{KP} = 2,58$.

Оскільки $Z'_{KP} = -Z''_{KP}$, маємо $Z'_{KP} = -2,58$.

Двобічну критичну область зображено на рис. 2.11.

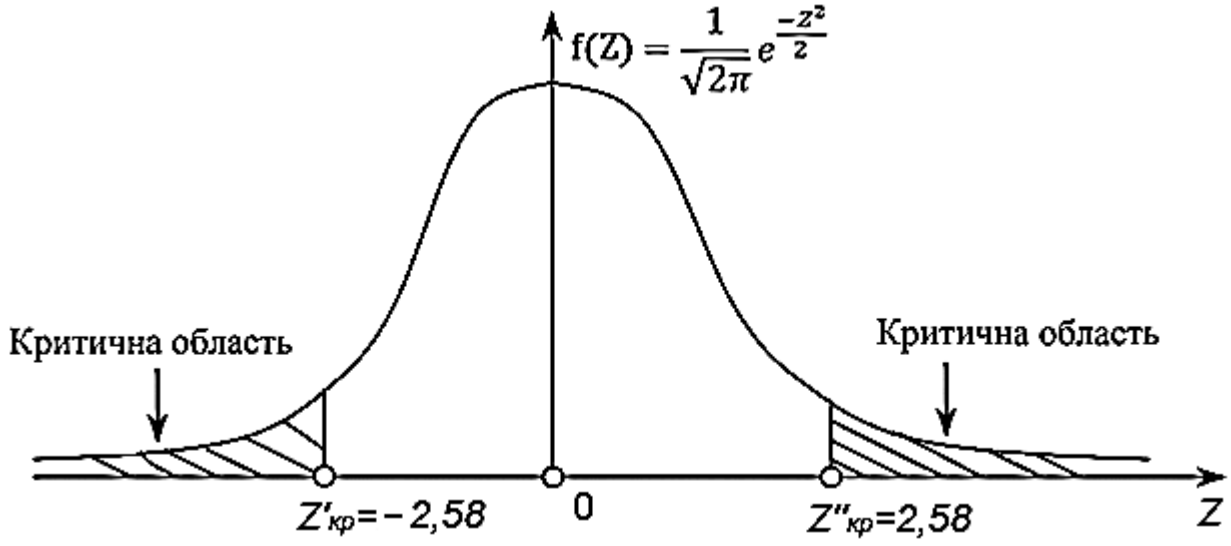


Рис. 2.11

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$Z^* = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}} = \frac{11,39 - 11,48}{\frac{\sigma 5}{\sqrt{20}}} = -\frac{0,05}{1,119} \approx -0,045.$$

Висновок. Оскільки $z^* \in [-2{,}58;\ 2{,}58]$, немає підстав відхиляти гіпотезу $H_0 : a = 11{,}44$.

При великих обсягах вибірки ($n > 40$) статистичний критерій $z^* = \dfrac{\overline{x_B} - a}{\dfrac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}}$, що підпорядковується закону розподілу Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи, наближається асимптотично до нормованого нормального закону $N(0;\ 1)$. У цьому разі критичні точки визначаємо з рівностей (2.9)—(2.12).

Приклад 2.8.5. Реалізувавши вибірку з генеральної сукупності, елементами якої є однотипні заготівки, довжина яких X є випадковою величиною з нормальним законом розподілу, отримали статистичний розподіл (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

Вибіркові значення

x_i	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5	16,5
n_i	10	20	30	20	10	10

При рівні значущості α = 0,001 перевірити правильність гіпотези $H_0 : a = 15{,}5$ при альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a = 15{,}5$.

Розв'язання. Обчислимо значення $\overline{x_B}, S$. Оскільки $n = \sum n_i = 100$, маємо

$$\overline{x_B} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{6{,}5 \cdot 10 + 8{,}5 \cdot 20 + 10{,}5 \cdot 30 + 12{,}5 \cdot 20 + 14{,}5 \cdot 10 + 16{,}5 \cdot 10}{100} =$$

$$= \frac{1110}{100} = 11{,}1;$$

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{42{,}25 \cdot 10 + 72{,}25 \cdot 20 + 110{,}25 \cdot 30 + 156{,}25 \cdot 20 + 210{,}25 \cdot 10 + 272{,}25 \cdot 10}{100} =$$

$$= \frac{13125}{100} = 131{,}25;$$

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x_B}) = 131{,}25 - (11{,}1)^2 = 131{,}25 - 123{,}21 = 8{,}04;$$

$$S = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{100}{99} \cdot 8{,}04 = 8{,}12;\ S = \sqrt{8{,}12} \approx 2{,}85.$$

Оскільки обсяг вибірки є великим ($n = 100 > 40$), статистичний критерій $t = \dfrac{\overline{x_B} - a}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$ наближається до закону розподілу $N(0;\ 1)$. Тому для визначення критичної точки $t_{кр} = Z_{кр}$ застосовуємо рівність

$$\Phi(Z_{KP}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0,001}{2} = 0,499 \to Z_{KP} = 3,2.$$

Правобічна критична область матиме такий вигляд, як зображено на рис. 2.12.

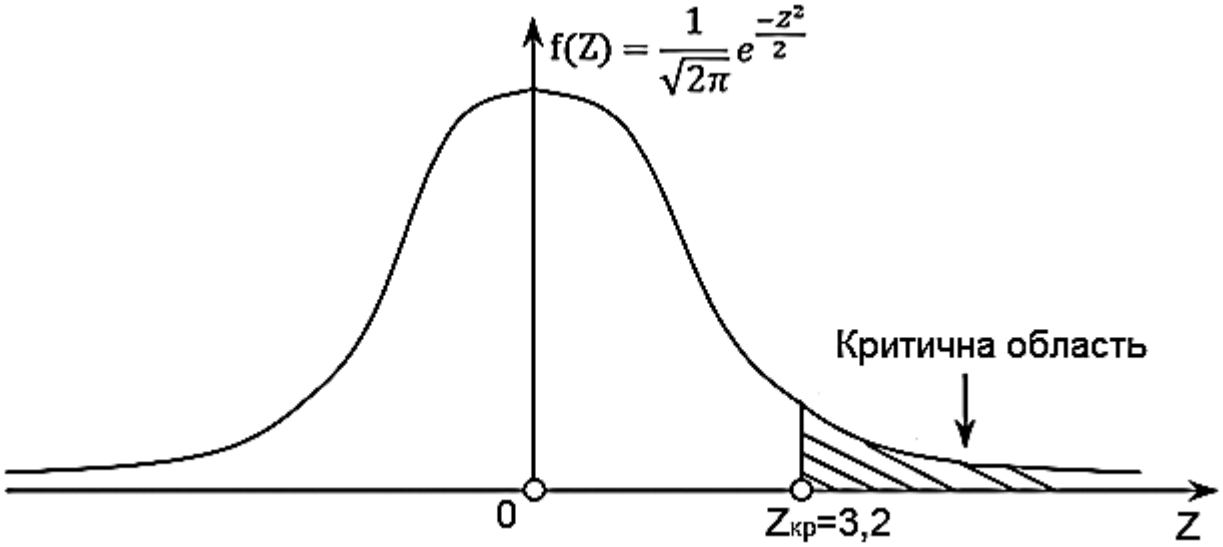


Рис. 2.12

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$z^* = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{11,1-15,5}{\frac{2,85}{\sqrt{100}}} = -\frac{4,4}{0,285} \approx -15,44.$$

Висновок. Оскільки $z^* \in [-\infty; 5,44]$, приймається гіпотеза $H_0 : a = 15,5$.

2.8.2. Перевірка достовірності нульової гіпотези про рівність двох генеральних середніх (M(X) = M(Y))

Нехай задано дві генеральні сукупності, ознаки яких *X* і *Y* підпорядковуються нормальному закону розподілу і при цьому є незалежними. Необхідно перевірити правильність гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y), (\overline{X_Г} = \overline{Y_Г})$.

Тут можливими є два випадки.

Випадок 1. Обсяг вибірки є великим ($n > 40$) і відомо значення D_x, $D_Г$ ознак генеральних сукупностей.

З кожної генеральної сукупності здійснюють вибірку згідно з обсягами n' і n'' та будують статистичні розподіли (табл. 2.6).

Таблиця 2.6

Вибірка значень

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_k	y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_m
n'_i	n'_1	n'_2	n'_3	n'_4	…	n'_k	n''_j	n''_1	n''_2	n''_3	n''_4	…	n''_m

Тут $n' = \sum n_i', n'' = \sum n_j''$.

Обчислюють значення $\overline{x_B}$ і $\overline{y_B}$:

$$\overline{x_B} = \frac{\sum x_i n_i'}{n'};\ \overline{y_B} = \frac{\sum y_i n_i''}{n''}.$$

За статистичний критерій беруть випадкову величину

$$Z = \frac{\overline{x_B} - \overline{y_B}}{\sigma(\overline{x_B} - \overline{y_B})}, \tag{2.14}$$

що підпорядковується закону розподілу *N*(0;1).

Оскільки $D(\overline{x_B} - \overline{y_B}) = \frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}$, статистичний критерій (2.14) набирає такого вигляду:

$$Z = \frac{\overline{x_B} - \overline{y_B}}{\sqrt{\frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}}}. \tag{2.15}$$

Якщо $D_x = D_y = D$, то

$$Z = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sigma_r \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}. \tag{2.16}$$

Залежно від формулювання альтернативної гіпотези H_a будують відповідно правобічну, лівобічну або двобічну критичну області. Спостережуване значення критерію відповідно обчислюють таким чином:

$$Z' = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sigma_r \sqrt{\frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}}}, \tag{2.17}$$

$$Z^* = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sigma_r \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}. \tag{2.18}$$

Приклад 2.8.6. За заданими статистичними розподілами двох вибірок, реалізованих із двох генеральних сукупностей, ознаки яких підпорядковуються нормальному закону розподілу зі значеннями дисперсій генеральних сукупностей D_x= 10; D_y= 15 (табл. 2.7), при рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність нульової гіпотези $H_0: M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_a: M(X) = M(Y)$.

Таблиця 2.7

Вибірка значень

x_i	12,2	13,2	14,2	15,2	16,2	y_j	8,4	12,4	16,4	20,4	24,4
n'_i	5	15	40	30	10	n''_j	10	15	35	20	20

Розв'язання. Оскільки $n' = \sum n'_i = 100;\ n'' = \sum n''_j = 100$, обчислимо $\bar{x}_B, \bar{y}_B$:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n'_i}{n'} = \frac{12{,}5 \cdot 5 + 13{,}2 \cdot 15 + 14{,}2 \cdot 40 + 15{,}2 \cdot 30 + 16{,}2 \cdot 10}{100} =$$

$$= \frac{62{,}5 + 198 + 568 + 456 + 162}{100} = \frac{1446{,}5}{100} = 14{,}465;$$

$$\bar{y}_B = \frac{\sum y_i n''_i}{n'} = \frac{8{,}4 \cdot 10 + 12{,}4 \cdot 15 + 16{,}4 \cdot 35 + 20{,}4 \cdot 20 + 24{,}4 \cdot 20}{100} =$$

$$= \frac{84 + 186 + 574 + 408 + 488}{100} = \frac{1740}{100} = 17{,}4.$$

Для альтернативної гіпотези $H_a : M(X) > M(Y)$ будуємо правобічну критичну область. Критичну точку $Z_{кр}$ знаходимо з рівності

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0{,}01}{2} = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49 \to Z_{кр} = 2{,}34.$$

Правобічну критичну область зображено на рис. 2.13.

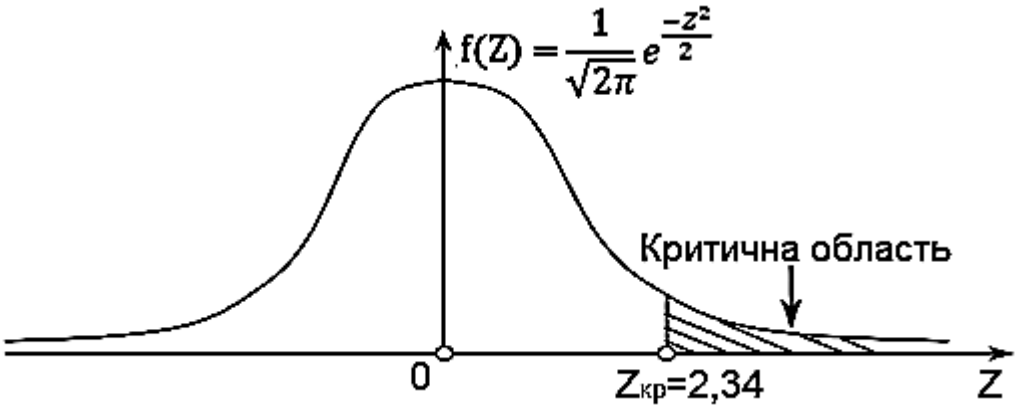


Рис. 2.13

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$Z' = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sigma_r \sqrt{\frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}}} = \frac{14{,}465 - 17{,}4}{\sqrt{\frac{10}{100} + \frac{15}{100}}} = -\frac{2{,}935}{\sqrt{0{,}1 + 0{,}15}} = -\frac{2{,}935}{\sqrt{0{,}25}} = -5{,}78.$$

Висновок. Оскільки $Z^* \in [-\infty, 2{,}34]$, гіпотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$ не відхиляється.

Приклад 2.8.7. Ознаки *X* і *Y* двох генеральних сукупностей, елементами яких є однотипні заклепки, підпорядковуються нормальному закону розподілу зі значеннями дисперсій D_x = 2,2 мм^2; D_y = 2,8 мм^2.

При реалізації двох вибірок із генеральних сукупностей отримали статистичні розподіли (табл. 2.8).

Таблиця 2.8

Вибірка значень

x_i	9,7	9,8	9,9	10	10,1	10,2	y_j	8,9	9,2	9,5	9,8	10,1
n'_i	2	3	5	4	1	1	n''_j	1	4	5	6	4

При рівні значущості α = 0,001 перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_a : M(X) < M(Y)$.

Розв'язання. Ураховуючи, що $n' = \sum n'_i = 15$; $n'' = \sum n''_j = 20$, обчислимо

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n''_i}{n''} = \frac{8,9 \cdot 1 + 9,2 \cdot 4 + 9,5 \cdot 5 + 9,8 \cdot 6 + 10,1 \cdot 4}{20} =$$

$$= \frac{8,9 + 36,8 + 47,5 + 58,8 + 40,4}{20} = \frac{192,4}{20} = 9,62 \text{ мм};$$

$$\bar{y}_B = \frac{\sum y_i n'_i}{n'} = \frac{19,7 \cdot 29,8 + 39,9 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 10,1 \cdot 1 + 10,2 \cdot 1}{15} =$$

$$= \frac{19,4 + 29,4 + 49,5 + 40 + 10,1 + 10,2}{15} \approx 10,57 \text{ мм}.$$

При альтернативній гіпотезі $H_a : M(X) < M(Y)$ будуємо лівобічну критичну область, критичну точку для якої знаходимо з рівності

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0,001}{2} = \frac{0,998}{2} = -0,499 \to Z_{кр} = -3,2.$$

Лівобічну критичну область зображено на рис. 2.14.

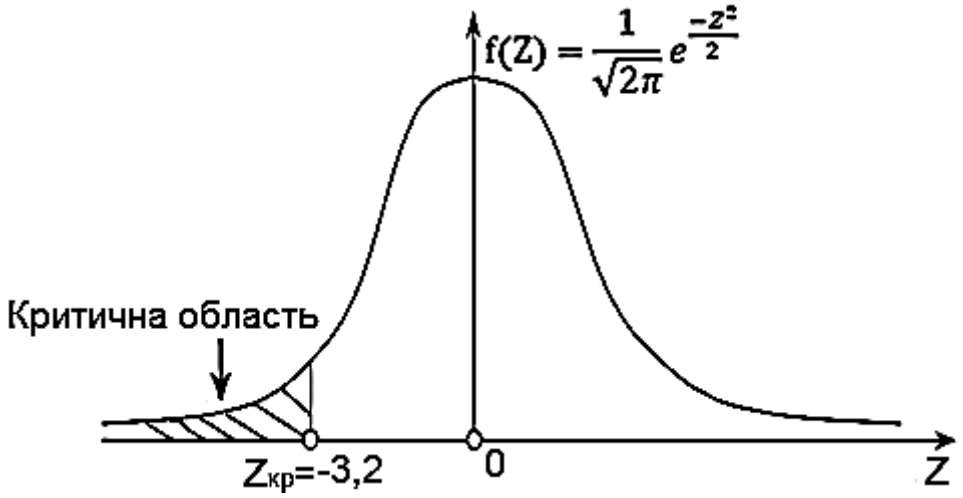


Рис. 2.14

Обчислюємо спостережуване значення критерію:

$$Z^* = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sigma_r \sqrt{\frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}}} = \frac{9,62 - 10,57}{\sqrt{\frac{22}{20} + \frac{2,8}{15}}} = -\frac{0,95}{\sqrt{0,11 + 0,19}} = -\frac{0,95}{\sqrt{0,3}} = -1,73.$$

Висновок. Оскільки $Z^* \in [-3,2; \infty]$, немає підстав для відхилення гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$.

Приклад 2.8.8. Для дослідження розтягування певного типу гуми після хімічного оброблення було відібрано шість її мотків, кожний з яких було поділено навпіл і одну його половину було піддано хімічному обробленню, а іншу — ні. Потім з допомогою спеціального приладу мотки гуми було виміряно й результати подано у вигляді двох статистичних розподілів ознак *X* і *Y*, які підпорядковуються нормальному закону розподілу з відомими значеннями генеральних дисперсій D_x = 10 ; D_y = 16 (табл. 2.9).

Таблиця 2.9

Вибірка значень

x_i	16,7	17,2	17,3	18,1	18,4	19,1	y_j	16,2	16,3	17	17,6	18,4
n'_i	1	1	1	1	1	1	n''_j	1	1	2	1	1

При рівні значущості α = 0,001 перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_a : M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. Обчислимо $\bar{x}_B$, $\bar{y}_B$. Оскільки $n' = n'' = 6$, маємо

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i''}{n''} = \frac{16,2 \cdot 1 + 16,3 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 17,6 \cdot 1 + 18,4 \cdot 1}{6} =$$

$$= \frac{16,2 + 16,3 + 34 + 17,6 + 18,4}{6} = \frac{102,5}{6} = 17,08;$$

$$\bar{y}_B = \frac{\sum y_i}{n'} = \frac{16,7 + 17,2 + 17,3 + 18,1 + 18,4 + 19,1}{6} = \frac{106,8}{6} = 17,8.$$

Лівобічну критичну область зображено на рис. 2.15.

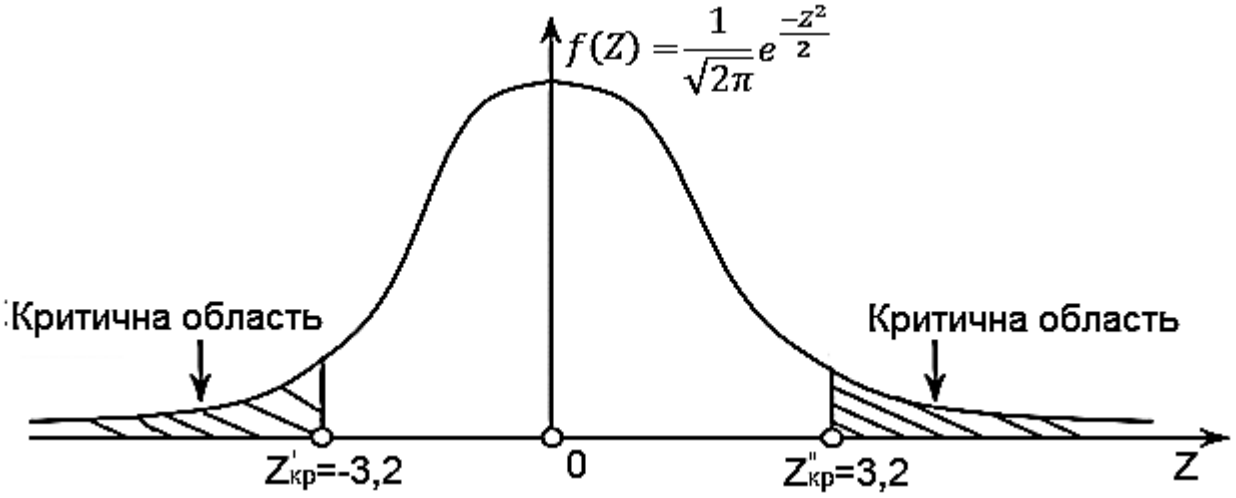


Рис. 2.15

При альтернативній гіпотезі $H_a : M(X) \neq M(Y)$ будуємо двобічну критичну область. Якщо $Z'_{кр} = -Z''_{кр}$, то $Z''_{кр}$ обчислюємо, використовуючи рівність

$$\Phi(Z''_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,001}{2} = \frac{0,999}{2} = 0,4995 \to Z''_{кр} = 3,4 \to Z'_{кр} = -3,4.$$

Обчислюємо спостережуване значення критерію:

$$Z^* = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sigma_r \sqrt{\frac{D_x}{n''} + \frac{D_y}{n''}}} = \frac{17,08-17,8}{\sqrt{\frac{10}{6} + \frac{16}{6}}} = -\frac{0,72}{\sqrt{1,67+2,67}} = -\frac{0,72}{\sqrt{4,34}} = -0,346.$$

Висновок. Оскільки $Z^* \in [-3,2; 3,2]$, немає підстав для відхилення гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$.

Випадок 2. Якщо обсяг вибірки є великим (*n* > 40), а значення генеральних дисперсій D_x, D_y є невідомими, то застосовують їх точкові незміщені статистичні оцінки:

$$D(\bar{x}_B - \bar{y}_B) \to S^2 = \frac{\sum\left(x_j - \bar{x}_B\right)n''_j + \sum\left(y_j - \bar{y}_B\right)n'_j}{n' + n'' - 2} =$$

$$= \frac{(n'-1)S_x^2 + (n''-1)S_y^2}{n' + n'' - 2}. \qquad (2.19)$$

При великих обсягах вибірок n', n'' статистичний критерій

$$Z = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{\frac{(n'-1)S_x^2 + (n''-1)S_y^2}{n' + n'' - 2}}\sqrt{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''}}} \qquad (2.20)$$

асимптотично наближається до закону розподілу *N*(0; 1). Тому для визначення критичних точок застосовується функція Лапласа.

Приклад 2.8.9. З допомогою двох радіовимірювальних приладів визначали відстань до певного об’єкта. Результати вимірювань подано у вигляді двох статистичних розподілів ознак: *Y* — відстань, виміряна першим приладом, *X* — другим. При цьому *Y* і *X* є незалежними величинами, що підпорядковуються нормальному закону розподілу. Статистичні розподіли наведено в табл. 2.10.

При рівні значущості *α* = 0,01 перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_a : M(Y) > M(X)$.

Таблиця 2.10

Вибірка значень

y_i, км	195	198	201	204	207	210
n'_i	10	20	30	20	15	5
x_j, км	184	188	192	196	200	204
n''_j	5	15	30	40	6	4

Розв'язання. Дисперсії генеральних сукупностей є невідомими. Обчислимо $\bar{x}_B, \bar{y}_B\ S_x^2, S_y^2$. Оскільки $n' = \sum n'_i = n'' = \sum n''_j = 100$, маємо

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n''_i}{n''} = \frac{184\cdot 5 + 188\cdot 15 + 192\cdot 30 + 196\cdot 40 + 200\cdot 6 + 204\cdot 4}{100} =$$

$$= \frac{920 + 2820 + 5760 + 7840 + 1200 + 816}{100} = \frac{19356}{100} = 193,56\ км;$$

$$\frac{\sum x^2{}_i n''_i}{n''} = \frac{184^2\ \cdot 5 + 188^2\ \cdot 15 + 192^2\ \cdot 30 + 196^2\cdot\ 40 + 200^2\ \cdot 6 + 204^2\ \cdot 4}{100} =$$

$$= \frac{3748464}{100} = 37484,64;$$

$$D_B = \frac{\sum x_j^2 n'_j}{n'} - (\bar{x}_B)^2 = 37484,64 - \left(193,56\right)^2 = 37484,64 - 37465,47 = 19,17;$$

$$S_x^2 = \frac{n''}{n''-1} D_B = \frac{100}{100-1}\cdot 19,17 = 19,36;\ S_x = \sqrt{19,36}\ \approx 4,4;$$

$$\bar{y}_B = \frac{\sum y_i n'_i}{n'} = \frac{195\ \cdot 10 + 198\ \cdot 20 + 201\ \cdot 30 + \ 204\ \cdot 20 + 207\cdot\ 15 + \ 210\cdot\ 5}{100} =$$

$$= \frac{1950 + 3960 + 6030 + 4080 + 3105 + 1050}{100} = \frac{20175}{100} = 201,75\ км;$$

$$\frac{\sum y_i n'_i}{n'} = \frac{195^2\ \cdot 10 + 198^2\ \cdot 20 + 201^2\ \cdot 30 + 204^2\ \cdot 20 + 207^2\ \cdot 15 + 210^2\ \cdot 5}{100} =$$

$$= \frac{4071915}{100} = 40719,15;$$

$$D_B = \frac{\sum y_j^2 n'_j}{n'} - (\bar{y}_B)^2 = 40719{,}15 - \left((201{,}75\right)^2 = 40719{,}15 - 40703{,}0625 = 16{,}0875;$$

$$S_y^2 = \frac{n'}{n'-1} D_B = \frac{100}{100-1} \cdot 16{,}0875 = 16{,}25;$$

$$S_y = \sqrt{16{,}25} \approx 4{,}03.$$

При альтернативній гіпотезі $H_a : M(X) > M(Y)$ будуємо правобічну критичну область, критичну точку якої, ураховуючи те, що обсяг вибірки є великим, знаходимо з рівності

$$\Phi(Z_{KP}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0{,}01}{2} = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49 \to Z_{KP} = 2{,}34.$$

Критичну область зображено на рис. 2.16.

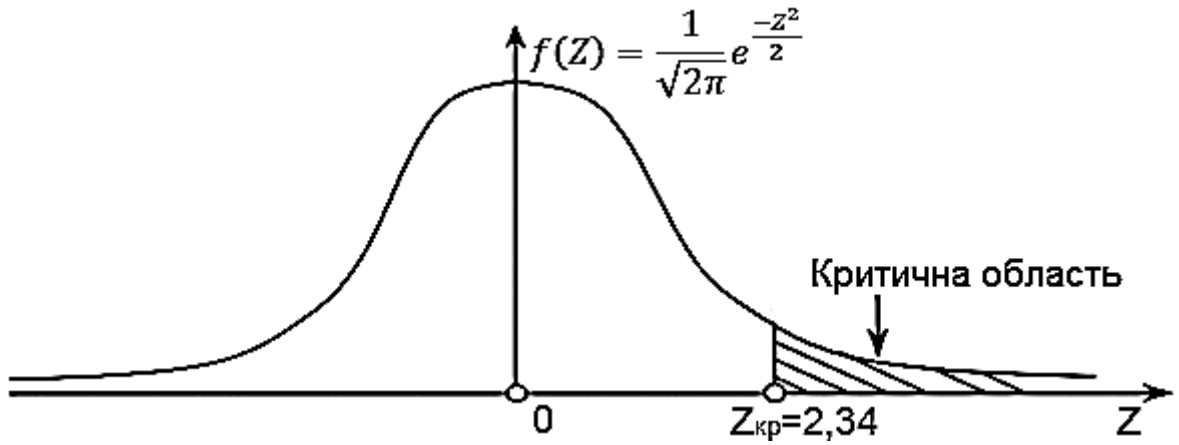


Рис. 2.16

Спостережуване значення критерію обчислюємо так:

$$Z^* = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{\frac{(n'\text{-}1)S_x^2 + (n''\text{-}1)S_y^2}{n' + n'' - 2}} \sqrt{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''}}} = \frac{193{,}56 \text{ - } 201{,}75}{\sqrt{\frac{99 \cdot 19{,}36 + 99 \cdot 16{,}25}{100 + 100 - 2}} \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}}} =$$

$$= -\frac{8{,}19}{\sqrt{4{,}215 \cdot 0{,}02}} = -\frac{8{,}19}{0{,}29} = -28{,}24.$$

Висновок. Оскільки $Z^* \in [-\infty; 2{,}34]$, немає підстав для відхилення гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$.

Контрольні запитання

1. Наведіть означення нульової й альтернативної гіпотез.

2. Які гіпотези називають параметричними?

3. Які гіпотези називають непараметричними?

4. Що називають простою і складною статистичними гіпотезами?

5. Що називають статистичним критерієм?

6. Що називають емпіричним значенням критерію?

7. Що таке область прийняття нульової гіпотези, критична область, критична точка?

8. Сформулюйте загальну методику перевірки правильності нульової гіпотези.

9. Що таке рівень значущості?

10. Що таке потужність критерію?

ВІДПОВІДІ

Задача 1.1.1. $m(x) = 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4$: $\sigma^2(x) = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - 1{,}4^2 = 0{,}24$.

Розв'язання отриманої системи рівнянь з урахуванням $x_2 > x_1$ дає $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а також $P(x_1) = 0{,}6$, $P(x_2) = 0{,}4$.

Задача 1.1.2. $P(N = n) = (1-P)^{n-1} P = 0{,}8^{n-1} \cdot 0{,}2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; $m(N) = 5$.

Задача 1.1.3. $\Delta = 3{,}4\ \sigma$.

Задача 1.1.4. $\sigma_{max} \approx 31$ м.

Задача 1.1.5. $P(|x-\alpha| < 3\sigma) = \varphi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\lambda-\alpha}{\sigma}\right)$, де $\beta = \alpha + 3\sigma$; $\lambda = \alpha - 3\sigma$; $P(|x-\alpha| < 3\sigma) = \varphi(3) - \varphi(-3) = 0{,}9973$.

Задача 1.1.6. $m(x) = m$; $\sigma^2(x) = \sigma^2$; $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx$, $P(a \le x \le b) = \varphi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$.

Задача 1.1.7. $P(v > v_0) = 0{,}1056$.

Задача 1.1.8. $F(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{\varphi}{2\pi} & \text{при } 0 \le x \le 2\pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2\pi; \end{cases}$ $m(\varphi) = \pi$; $\sigma^2(\varphi) = \frac{\pi^2}{3}$.

Задача 1.1.9. а) $A = 2h^2$; б) $M = \frac{1}{\sqrt{2}h}$; в) $m(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}$; $\sigma^2(R) = \frac{4-\pi}{4h^2}$; г) $P(R < M) = 0{,}393$.

Задача 1.1.10. $P = \left[1 - \exp\left(-\frac{H^2}{A_0^2}\right)\right]^n$.

Задача 1.1.11. $F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -a,\ y < -b; \\ \frac{(x+a)(y+b)}{4ab} & \text{при } |x| \le a,\ |y| \le b; \\ \frac{x+a}{2a} & \text{при } |x| < a,\ y > b; \\ \frac{y+b}{2b} & \text{при } x > a,\ |y| < b; \\ 1 & \text{при } x > a,\ y > b; \end{cases}$

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{при } |x| \le \alpha, \\ 0 & \text{при } |x| > \alpha; \end{cases} \quad \rho(y) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{при } |y| \le b, \\ 0 & \text{при } |y| > b. \end{cases}$$

Задача 1.1.12.

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y)dy = \frac{1}{\pi ab} \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy = \frac{2}{\pi d}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \quad \text{при } |x| < \alpha;$$

$$\rho(x) = 0 \quad \text{при } |x| > \alpha;$$

$$\rho(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi b}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} & \text{при } |y| \le b, \\ 0 & \text{при } |y| > b. \end{cases}$$

Задача 1.1.13. $p(x/y) = \frac{\rho(x,y)}{\rho(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{при } |x| \le \alpha,\ |y| \le b, \\ 0 & \text{при } |x| > \alpha,\ |y| > b; \end{cases}$

$$\rho(x/y) = \frac{\rho(x,y)}{p(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{при } |x| \le \alpha,\ |y| \le b, \\ 0 & \text{при } |x| > \alpha,\ |y| > b. \end{cases}$$

Задача 1.1.14. $p(x/y) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} & \text{при } |x| \le \alpha\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \alpha\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}; \end{cases}$

$$p(x/y) = \begin{cases} \frac{1}{2b\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}} \text{ при } |y| \le b\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}, \\ 0 \quad \text{при } |y| > b\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}. \end{cases}$$

Задача 1.1.15. $R_{\mu\gamma} = 0{,}8$.

Задача 1.2.1. $p(y) = \rho(x)\frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}\rho\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$.

Задача 1.2.2. $p(y) = \frac{1}{|k|\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{y-c}{k}-m\right)^2}{2\delta^2}\right)$.

Задача 1.2.3. $p(y) = \begin{cases} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi\alpha y}} \exp\left(-\frac{y}{2ab^2}\right) & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$

Задача 1.2.4. $p(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2-y^2}} \text{ при } |y| \le \alpha, \\ 0 \quad \text{при } |y| > \alpha. \end{cases}$

Задача 1.2.5. $\rho(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\rho(\sqrt{y})+\rho(-\sqrt{y})}{2} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$

Задача 1.2.6. $\rho(R, \varphi) = \frac{R}{2\pi\delta^2} \exp\left[-\frac{R^2-2Rm\cos(\varphi-\psi)+m^2}{2\delta^2}\right]$,

де $m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$; $\operatorname{tg}\psi = \frac{m_y}{m_x}$.

Задача 1.2.7. $m_R = \frac{\mathcal{D}}{3}$.

Задача 1.2.8. $\rho(\Delta f) = \begin{cases} \frac{n+b+\Delta f}{8a^2b} & \text{при } -a-b \le \Delta f \le a-b; \\ \frac{1}{4ab} & \text{при } a-b \le \Delta f < b-a; \\ \frac{\Delta f-a-b}{8a^2b} & \text{при } b-a \le \Delta f < a+b; \\ 0 & \text{при інших значеннях } \Delta f. \end{cases}$

Задача 1.2.9. $\rho(\varphi) = \begin{cases} \frac{\varphi+2\pi}{4\pi^2} & \text{при } -2\pi \le \varphi \le 0, \\ \frac{2\pi-\varphi}{4\pi^2} & \text{при } 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 & \text{при інших значеннях } \varphi. \end{cases}$

Задача 1.2.10. $\rho(\varphi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\varphi^2}} \left(|\varphi| \le 1 \right).$

Задача 1.2.11. $\rho(z) = \frac{1}{\pi\,(1+z^2)}.$

Задача 1.2.12. $m_z = \frac{1}{\pi} \iint_k xy\,dx\,dy = c,$

$\delta_z^2 = \frac{1}{\pi} \iint_{(k)} x^2y^2\,dx\,dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 z^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi\,dz = \frac{1}{24}.$

Задача 1.2.13. $m(y) = 2 - 4a^2.$

Задача 1.2.14. $m_y = am_x + bm_y + c : \ \delta_y^2 = a^2b_x^2 + b^2\delta_y^2 + 2ab\,K_{xy};$

$m_\varphi = dm_x + fm_y + g : \ \delta_\varphi^2 = d^2\delta_x^2 + f^2\delta_y^2 + 2df\,K_{xy};$

$k_{\varphi y} = ad\delta_x^2 + bf\delta_y^2 + (af + bd)\,k_{xy}; \quad r_{\varphi y} = \frac{k_{\varphi y}}{\sqrt{\delta_\varphi^2\,\delta_y^2}}.$

Задача 1.2.15. а) $m[y^n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \alpha = a$; уважаючи помилки окремих вимірювань незалежними, знаходимо дисперсію $\delta^2\,[y^n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta^2(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta^2 = \frac{\delta^2}{n}$;

б) кількість вимірювань *n* знаходимо з умови $\delta[y] = \sqrt{\frac{\delta^2}{n}} (n = 100).$

Задача 1.3.1. $\Omega_x(\omega) = \frac{2\delta^2\alpha}{\pi} \ \frac{\alpha^2+\omega_0^2+\omega^2}{\alpha^4+2\alpha^2(\omega_0^2+\omega^2)-2\omega_0^2\omega^2+\omega_0^4+\omega^4}.$

Задача 1.3.2. $\Omega_x(\omega) = \frac{2\delta_\varphi^2\alpha}{\pi}\ \frac{(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2+(\alpha-\gamma\omega_0)\,\omega^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\,\omega^2+\omega^4}$, де $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$.

Задача 1.3.3. $R_x(\tau) = N_0K_0^2\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right)\frac{\sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}}\cos\omega_0 t$, де $\omega_0 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Задача 1.3.4. $R_x(\tau) = N_0\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\left(\frac{\tau}{2\alpha}\right)^2}$.

Задача 1.3.5. $\Omega_x(\omega) = \frac{4\alpha^3\delta^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$.

Задача 1.3.6. $\Omega_x(\omega) = \delta^2\left(\frac{\sin\frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon}}{\frac{\omega\varepsilon}{2}}\right)^2$.

Задача 1.3.7. $\Omega_x(\omega) = \pi\sum_{i=1}^{N}\delta_i^2\,[\,\delta(\omega+\omega_i)+\delta(\omega-\omega_i)\,]$.

Задача 1.3.8. $m_x(t) = 0$, $B_x(t_1,t_2) = \delta_y^2\sin\omega_0t_1\sin\omega_0t_2 + +\delta_x^2\cos\omega_0t_1\cos\omega_0t_2$.

Кореляційна функція випадкового процесу x(t) не задовольняє умову стаціонарності в широкому розумінні [1]. В окремому випадку рівності дисперсій ($\delta_x^2 = \delta_z^2$)

$$B_x(t_1,t_2) = \delta^2\cos\omega_0(t_1-t_2).$$

Кореляційна функція є парною функцією різниці своїх аргументів і випадковий процес *x(t)* є стаціонарним у широкому розумінні, для якого, однак, не задовольняються достатні умови ергодичності стаціонарного випадкового процесу [1].

Задача 1.3.9. $m_x(t) = \sum_{\nu=1}^{N} m_{z_\nu}f_\nu(t)$.

Значення випадкової функції x(t) при двох довільно вибраних значеннях аргумента t_1 і t_2 є лінійними функціями одних і тих же випадкових величин:

$$B_x(t_1-t_2) = \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}K_{\nu_\mu}f_\nu(t_1)f_\mu(f_2)\,,$$

де K_{ν_μ} – кореляційний момент випадкових величин $z_\nu\,, z_\mu$ $(\nu_1\mu = 1,2,\dots,N)$.

Задача 1.3.10. $\mathrm{m}[x(t)] = 0$; $B_{\mathrm{x}}(t_1, t_2) = \sum_{K=1}^{N} d_x cos\omega_K (t_1 - t_2)$.

Кореляційна функція є функцією різниці своїх аргументів, оскільки задовольняються умови [1], тобто випадковий процес є стаціонарним у широкому розумінні.

Задача 1.3.11. $m[x(t)] = 0$; $B_x(t_1, t_2) = \sum_{K=-N}^{N} d_K e^{j\omega_K (t_1 - t_2)}$.

Випадкова функція x(t) є стаціонарною в широкому розумінні, оскільки задовольняються умови стаціонарності [1].

Задача 1.3.12. $\mathrm{m_x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathrm{t}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_\mathrm{n})\, \rho_\mathrm{n}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_\mathrm{n})\, \mathrm{d}\vartheta_1, \dots, \mathrm{d}\vartheta_\mathrm{n}$;

$$\mathrm{B_x(t_1 - t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\mathrm{t_1}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_\mathrm{n}) - \mathrm{m_x(t_1)}][\varphi(\mathrm{t_2}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_\mathrm{n}) - \mathrm{m_x(t_2)}]\, \rho_\mathrm{n}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_\mathrm{n})\, \mathrm{d}\vartheta_1, \dots, \mathrm{d}\vartheta_\mathrm{n}.$$

Задача 1.3.13. Випадкові процеси з кореляційними функціями *а*, *б*, *в* є ергодичними, оскільки для них виконується достатня умова ергодичності [1]; стаціонарний випадковий процес з кореляційною функцією *г* не є ергодичним.

Задача 1.3.14. $\mathrm{B_y(\tau)} = \frac{\mathrm{N_0}}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}(|\tau|)}$.

Задача 1.3.15. $\mathrm{B_y(\tau)} = \frac{\mathrm{N_0}}{2} \left(1 + \alpha \left| \tau \right| \right) \mathrm{e}^{-\alpha |\tau|}$.

Задача 1.3.16. $\mathrm{B_y(\tau)} = \frac{\mathrm{N_0}}{2\tau_\mathrm{K}} \mathrm{e}^{\frac{-|\tau|}{\tau_\mathrm{K}}} \mathrm{cos}\omega_0\tau$.

Задача 1.3.17. $\mathrm{B_y(\tau)} = \frac{\mathrm{N_0}}{2}\, \mathrm{K_0^2 e}^{-\frac{\alpha^2\tau^2}{2}} \mathrm{cos}\omega_\mathrm{o}\tau$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Жлуктенко, В. І. Теорія ймовірності і математична статистика : навч.-метод. посіб. У 2 ч. Ч. 1 / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – Київ : КНЕУ, 2000. – 304 с.

2. Жлуктенко, В. І. Теорія ймовірності і математична статистика : навч.-метод. посіб. У 2 ч. Ч. 2 / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – Київ : КНЕУ, 2001. – 336 с.

3. Горяинов, В. Т. Примеры и задачи по статистической радиотехнике / В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлёв, В. И. Тихонов; под ред. В. И. Тихонова. – М. : Сов. радио, 1970. – 600 с.

4. Радиотехнические системы : учеб. пособие / Б. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов и др.; под ред. Ю. М. Казаринова. – М. : Высш. шк., 1990. – 496 с.

5. Моделирование в радиолокации / А. И. Леонов, В. Н. Веселов и др.; под ред. А. И. Леонова. – М. : Сов. радио, 1979. – 263 с.

ЗМІСТ

1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, ФУНКЦІЇ ВІД ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ: ЗАКОН РОЗПОДІЛУ Й ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....3
1.1. Закон розподілу й числові характеристики випадкових величин……...3
1.2. Числові характеристики й закони розподілу функцій випадкових величин.....11
1.3. Випадкові процеси та їх характеристики.....18
2. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ.....24
2.1. Параметричні й непараметричні статистичні гіпотези.....24
2.2. Нульова й альтернативна гіпотези.....24
2.3. Прості і складні статистичні гіпотези.....25
2.4. Статистичний критерій. Емпіричне значення критерію.....25
2.5. Область прийняття гіпотези. Критична область. Критична точка.....26
2.6. Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези……...27
2.7. Помилки першого й другого роду. Потужність критерію.....28
2.8. Параметричні статистичні гіпотези.....29
2.8.1. Перевірка правильності нульової гіпотези про значення генерального середнього.....29
2.8.2. Перевірка достовірності нульової гіпотези про рівність двох генеральних середніх (M(X) = M(Y)).....39
ВІДПОВІДІ.....48
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....54

Навчальне видання

Абрамов Олександр Дмитрович
Лєсной Віктор Олександрович
Панасенко Філіп Юрійович

СТАТИСТИЧНА ТЕОРІЯ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ. ОСНОВНІ ЗАДАЧІ ТА ПРИКЛАДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Частина 1

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2021
Підписано до друку 14.05.2021
Формат 60x84 1/16. Папір офс. Офс. друк
Ум. друк. арк. 3,1. Обл.-вид. арк. 3,5. Наклад 100 пр.
Замовлення 97. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул.Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК №391 від 30.03.2001