



М. М. Гребенніков, В. Ю. Мірошніков,  
М. І. Пекельний

# ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ. СКЛАДНИЙ ОПІР



2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

**М. М. Гребенніков, В. Ю. Мірошніков, М. І. Пекельний**

**ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ.  
СКЛАДНИЙ ОПІР**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2022

УДК 539.3 / .6 (075.8)

Г79

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. С. А. Бичков,  
канд. техн. наук, доц. Є. Т. Василевський

**Гребенніков, М. М.**

Г79

Теорії міцності. Складний опір [Електронний ресурс]: навч. посіб. / М. М. Гребенніков, В. Ю. Мірошніков, М. І. Пекельний. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2022. – 162 с.

Розглянуто основні теорії міцності. Викладено методику розрахунку на міцність елементів конструкцій, що перебувають у складному напруженому стані. Описано окремі випадки складного опору – позацентрове розтягнення-стиснення і косий згин. Наведено таблиці довідкових даних, приклади розв'язання задач і рекомендації щодо виконання домашнього завдання з даної теми.

Для студентів, які вивчають курси «Опір матеріалів» і «Механіка матеріалів і конструкцій» при самостійній роботі.

Іл. 157. Табл. 8. Бібліогр.: 9 назв.

**УДК 539.3 / .6 (075.8)**

© Гребенніков М. М., Мірошніков В. Ю.,  
Пекельний М. І., 2022

© Національний аерокосмічний  
університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут», 2022

## ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- $\alpha, \beta, \gamma$  – кут, числовий коефіцієнт;  
 $\varepsilon$  – відносна деформація;  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – відносні деформації в системі головних осей;  
 $\mu$  – коефіцієнт Пуассона;  
 $\sigma$  – нормальне напруження;  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження;  
[ $\sigma$ ] – допустиме нормальне напруження;  
 $\sigma_{\text{пц}}$  – границя пропорційності;  
 $\sigma_{\text{в}}$  – границя міцності;  
 $\sigma_{\text{т}}$  – границя текучості;  
 $\sigma_{\text{екв}}$  – еквівалентне напруження;  
 $\tau$  – дотичне напруження;  
[ $\tau$ ] – допустиме дотичне напруження;  
 $a, b, c, d, l$  – довжини ділянок, прольотів;  
 $a$  – довжина сторони квадрата;  
 $b, h$  – ширина і висота прямокутника;  
 $d$  – діаметр;  
 $E$  – модуль поздовжньої пружності;  
 $F$  – площа поперечного перерізу;  
 $I_{\rho}$  – полярний момент інерції поперечного перерізу;  
 $I_y, I_z$  – осьові моменти інерції поперечного перерізу;  
 $I_{yz}$  – відцентровий момент інерції поперечного перерізу;  
 $i_y, i_z$  – радіуси інерції поперечного перерізу;  
 $n$  – коефіцієнт запасу;  
 $M$  – зосереджений момент;  
 $M_x, M_k$  – крутний момент;  
 $M_y, M_z$  – згинальні моменти щодо осей  $y$  і  $z$ ;  
 $N_x$  – поздовжня сила;  
 $P$  – зосереджена сила;  
 $Q_y, Q_z$  – поперечні сили;  
 $q$  – розподілене навантаження;  
 $R$  – реакція;  
 $U$  – енергія деформації;  
 $V$  – об'єм;  
 $W_{\rho}$  – полярний момент опору перерізу;  
 $W_y, W_z$  – момент опору поперечного перерізу;  
 $x, y, z$  – прямокутні координати.

# 1. ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

## 1.1. Постановка питання і основні визначення

### 1.1.1. Поняття про граничний напружений стан

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінювання міцності конструктивного елемента за відомим напруженим станом.

Напружений стан у точці повністю визначається:

- при лінійному (одновісному) напруженому стані одним головним напруженням;
- при плоскому (двовісному) – двома;
- при об'ємному (тривісному) – трьома.

Якщо зовнішні навантаження не перевищують деякої величини, що залежить від матеріалу і виду напруженого стану, то матеріал перебуває в пружному стані. При збільшенні зовнішнього навантаження головні напруження також будуть зростати, і при деякому певному їх значенні можуть виявлятися помітні залишкові деформації або місцеві тріщини. Такий напружений стан називається *граничним*.

Таким чином, під *граничним* розуміють такий *складний напружений стан*, при якому відбувається таке:

- а) у пластичному матеріалі починають розвиватися залишкові (пластичні) деформації;
- б) у крихкому матеріалі починається руйнування.

### 1.1.2. Необхідність створення теорій міцності і їх призначення

Якщо є відомим граничний напружений стан, то розрахунок на міцність зводиться до *визначення напруженого стану в небезпечній точці* (або всіх потенційно небезпечних точках) досліджуваного тіла і *порівняння його з граничним*.

У разі *простого напруженого стану* (лінійного) визначити *граничний напружений стан* експериментально досить просто – випробуванням на розтягання або стиснення.

Як граничне значення беруть:

- границю текучості пластичного матеріалу ( $\sigma_{\text{гр}} = \sigma_{\text{T}}$ );
- границю міцності крихкого матеріалу ( $\sigma_{\text{гр}} = \sigma_{\text{в}}$ ).

У цих випадках коефіцієнти запасу міцності

$$n_{\text{T}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma};$$

$$n_{\text{в}} = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma},$$

де  $\sigma$  – напруження, що діє в небезпечній точці.

При *складному напруженому стані* (плоскому і об'ємному) практично неможливо провести випробування *для всіх можливих співвідношень* між  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ , оскільки:

- 1) число можливих співвідношень між компонентами складного напруженого стану нескінченне, тому і кількість дослідів з визначення граничних станів, які відповідають цим комбінаціям головних напружень, нескінченна;
- 2) для багатьох видів складного напруженого стану технічно важко, а іноді неможливо реалізувати експеримент з визначення граничного напруженого стану, тобто при наявній техніці проведення експерименту в наш час немає можливості реалізувати випробування для більшості видів складного напруженого стану.

Такі випробування, які потребують використання виключно складної техніки, такої, що навантажує зразок, і такої, що реєструє його поведінку при навантаженні, в цей час проводять у науково-дослідних лабораторіях для дуже обмеженої кількості видів складного напруженого стану.

Трактування (розшифрування) результатів таких експериментів є дуже ускладненим і часто суперечливим, оскільки при проведенні цих випробувань практично не вдається виконати найважливішу вимогу до таких експериментів – *забезпечити однорідність напружено-деформованого стану* бази зразка.

Тому і виникає необхідність створення *теорій міцності (гіпотез міцності, теорій граничного стану)*, тобто загальних методів розрахунку на міцність при будь-якому виді складного напруженого стану, на основі механічних характеристик матеріалів, отриманих унаслідок результату проведення обмеженої кількості найпростіших механічних випробувань.

**Теорії міцності** призначені для виконання розрахунків на міцність при *складному напруженому стані*.

### 1.1.3. Поняття про рівнонебезпечні (рівноміцні) напружені стани

Теорії міцності основані на припущенні про те, що два напружених стани вважаються рівноміцними, якщо вони при пропорційному збільшенні головних напружень одночасно стають граничними. Тоді коефіцієнт запасу міцності для обох напружених станів буде однаковим.

Два напружених стани називаються *рівнонебезпечними (рівноміцними)*, якщо вони мають *однаковий запас міцності*.

*Коефіцієнтом запасу* міцності називається число, що показує, у скільки разів слід *одночасно* збільшити всі компоненти складного напруженого стану, щоб воно стало граничним.

**Розглянемо приклад.** Нехай для двох однакових елементів з одного і того ж матеріалу реалізовані лінійний напружений стан для першого і складний напружений стан для другого (рис. 1.1).

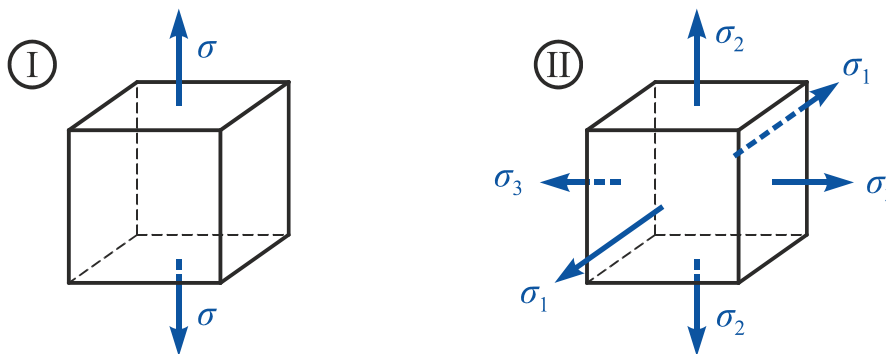


Рис. 1.1

Припустимо, що елемент **I** почав пластично деформуватися (або руйнуватися, якщо він крихкий) при  $\sigma = 280 \text{ МПа}$ .

Це значення  $\sigma$  і слід вважати граничним при лінійному (одновісному) напруженому стані:

$$\sigma_{\text{гр}} = 280 \text{ МПа}.$$

Елемент **II** почав пластично деформуватися (або крихко руйнуватися) при

$$\sigma_1 = 170 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 110 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 60 \text{ МПа}.$$

Цю комбінацію напружень і слід вважати граничним напруженим станом для заданого співвідношення між  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , тобто

$$\sigma_{1 \text{ гр}} = 170 \text{ МПа}; \quad \sigma_{2 \text{ гр}} = 110 \text{ МПа}; \quad \sigma_{3 \text{ гр}} = 60 \text{ МПа}.$$

Припустимо, що для елементів **I** і **II** необхідно забезпечити *однаковий запас міцності* з коефіцієнтом запасу  $n = 2$ .

Тоді лінійне розтягнення при

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{гр}}}{n} = \frac{280}{2} = 140 \text{ МПа}$$

і об'ємний напружений стан при

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{1 \text{ гр}}}{n} = \frac{170}{2} = 85 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{2 \text{ гр}}}{n} = \frac{110}{2} = 55 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{3 \text{ гр}}}{n} = \frac{60}{2} = 30 \text{ МПа}$$

є *рівнонебезпечними*, або *рівноміцними*.

#### 1.1.4. Поняття про еквівалентне напруження

Порівняння напружених станів для заданого матеріалу можна виконувати за еквівалентними напруженнями  $\sigma_{\text{екв}}$ .

**Еквівалентне напруження** ( $\sigma_{\text{екв}}$ ) – це таке напруження, яке слід створити в *розтягнутому зразку* (тобто при лінійному (одновісному) напруженому стані), щоб його напружений стан був *рівнонебезпечним заданому складному напруженому стану* (тобто мав однаковий коефіцієнт запасу).

Завдання і призначення всіх теорій міцності – зв'язати еквівалентні напруження в двох рівноміцних станах певною залежністю, основою на аналізі причин руйнування або переходу в граничний стан матеріалу, тобто визначити вид функції

$$\sigma_{\text{екв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (1.1)$$

Таким чином, за допомогою теорій міцності здійснюється перехід від складного напруженого стану до *рівнонебезпечного* лінійного, тобто визначається еквівалентне напруження, яке і порівнюють з результатами найпростіших механічних випробувань, роблячи таким чином висновок про рівень вичерпання міцності при складному напруженому стані.



## 1.2. Основні теорії міцності

Усі теорії (критерії, гіпотези) міцності можна поділити на два види:

а) теорії, побудовані на гіпотезах, тобто на логічно обґрунтованих припущеннях;

б) теорії, основані на феноменологічному підході, тобто такі, що базуються на логічній систематизації результатів експериментальних досліджень.

### 1.2.1. Теорія найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності)

За історичною традицією теорію (гіпотезу) найбільших нормальних напружень називають першою теорією міцності. Вона була сформульована в 1638 р. Г. Галілеєм<sup>1</sup>. Прихильниками цієї теорії були Г. Лейбніц, Г. Ляме, А. Клебш, М. Ренкін. В англо-американській літературі вона має назву теорії Ренкіна.

Ця теорія базується на такому припущенні (гіпотезі):

міцність елемента, що перебуває в складному напруженому стані, вважається вичерпаною (тобто настає його граничний напружений стан), якщо величина **найбільшого з головних напружень** досягла **граничного значення**, визначеного з дослідів на просте розтягнення або стиснення.

Таким чином, умова вичерпання міцності має вигляд

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \sigma_{\text{гр}_p} \quad \text{або} \quad \sigma_{\max} = |\sigma_3| = \sigma_{\text{гр}_c}, \quad (1.2)$$

де  $\sigma_{\text{гр}_p}$  і  $\sigma_{\text{гр}_c}$  – граничні напруження, визначені за результатами випробувань на просте розтягнення і стиснення відповідно.

Умова забезпечення міцності із запасом  $n$  має вигляд

$$\sigma_{\text{екв}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma]_p \quad \text{або} \quad \sigma_{\text{екв}}^I = |\sigma_3| \leq [\sigma]_c, \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup> **Галілео Галілей** (італ. *Galileo Galilei*; 15 лютого 1564 р., Піза – 8 січня 1642 р., Арчетрі) – італійський фізик, механік, астроном, філософ і математик, який здійснив значний вплив на науку свого часу. Він першим використав телескоп для спостереження небесних тіл і зробив ряд видатних астрономічних відкриттів. Галілей – засновник експериментальної фізики, заклав фундамент класичної механіки.

де  $[\sigma]_p = \frac{\sigma_{гр\ p}}{n}$  і  $[\sigma]_c = \frac{\sigma_{гр\ c}}{n}$  – допустиме напруження на розтягнення і стиснення відповідно.

Як показала експериментальна перевірка, ця теорія міцності:

- а) не відображає умов переходу матеріалу в пластичний стан, тобто не може бути використана для розрахунку на міцність деталей з пластичних матеріалів;
- б) дозволяє отримати задовільні результати для крихких матеріалів (кварцу, скельних порід, кераміки, інструментальних сталей і т.д.) при дуже обмеженій кількості видів напруженого стану.

У цей час мало використовується.

### 1.2.2. Теорія найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності)

Теорія найбільших лінійних деформацій запропонована Е. Маріоттом<sup>2</sup> в 1682 р. Прихильниками цієї теорії були Л. Нав'є і В. Сен-Відень.

Вона основана на такій гіпотезі:

міцність елемента, що перебуває в складному напруженому стані, вважається вичерпаною (тобто настає його граничний напружений стан), якщо **величина найбільшого відносного подовження** цього елемента досягла **граничного значення**, визначеного з дослідів на просте розтягнення або стиснення.

Таким чином, вичерпання міцності відбудеться при виконанні умови

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \varepsilon_{гр\ p} \quad \text{або} \quad \varepsilon_{max} = |\varepsilon_3| = |\varepsilon_{гр\ c}|, \quad (1.4)$$

де  $\varepsilon_{гр\ p}$  і  $\varepsilon_{гр\ c}$  – величини найбільших відносних подовжень, визначені за результатами випробувань на просте розтягнення і стиснення відповідно.

---

<sup>2</sup> Едм Маріотт (фр. *Edme Mariotte*; 1620 р., Діжон (Бургундія) – 12 травня 1684 р., Париж) – французький фізик XVII століття, один із засновників (1666 р.) і перших членів Паризької академії наук. Наукові роботи стосуються механіки, теплоти, оптики. Був настоятелем монастиря Святого Мартіна поблизу Діжона.

Відповідно до узагальненого закону Гука при складному напруженому стані

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

При лінійному напруженому стані

$$\varepsilon_{\text{гр}_p} = \frac{\sigma_{\text{гр}_p}}{E}; \quad \varepsilon_{\text{гр}_c} = \frac{\sigma_{\text{гр}_c}}{E}.$$

Це дає можливість переписати рівняння граничного стану (1.4) в напруженнях:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{гр}_p}; \quad \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_{\text{гр}_c}. \quad (1.5)$$

Міцність із запасом  $n$  буде забезпечена за умови

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sigma_{\text{гр}_p}}{n} = [\sigma]_p; \quad \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{\sigma_{\text{гр}_c}}{n} = [\sigma]_c.$$

Тоді умова міцності за другою теорією міцності остаточно матиме вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв}}^{\text{II}} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p; \\ \sigma_{\text{екв}}^{\text{II}} &= \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma]_c, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де  $[\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{гр}_p}}{n}$  і  $[\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{гр}_c}}{n}$  – допустиме напруження на розтягнення і стиснення відповідно.

Експериментальна перевірка цієї теорії міцності привела до результатів, аналогічних даним перевірки першої теорії міцності.

Таким чином, перша і друга теорії міцності становлять швидше історичний, ніж практичний інтерес.

### 1.2.3. Теорія найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності)

Теорія найбільших дотичних напружень запропонована Ш. Кулоном<sup>3</sup> в 1773 р. Цій теорії присвячено роботи Дж. Геста, А. Треска, І. Баушінгера.

---

<sup>3</sup> Шарль Огюстен де Кулон (фр. *Charles-Augustin de Coulomb*, 14 червня 1736 р. – 23 серпня 1806 р.) – французький військовий інженер і учений-фізик, дослідник електромагнітних і механічних явищ, член Паризької Академії наук.

Вона основана на такій гіпотезі:

міцність елемента, що перебуває в складному напруженому стані, вважається вичерпаною (тобто настає його граничний напружений стан), якщо величина **найбільшого дотичного напруження** досягла **граничного значення**, визначеного з дослідів на просте розтягнення.

Отже, умова вичерпання міцності має вигляд

$$\tau_{max} = \tau_{гр}. \quad (1.7)$$

При складному напруженому стані (рис. 1.2, а)

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

При лінійному напруженому стані (рис. 1.2, б)

$$\sigma_3 = 0 \quad \text{і} \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2},$$

отже,

$$\tau_{гр} = \frac{\sigma_{гр}}{2}.$$

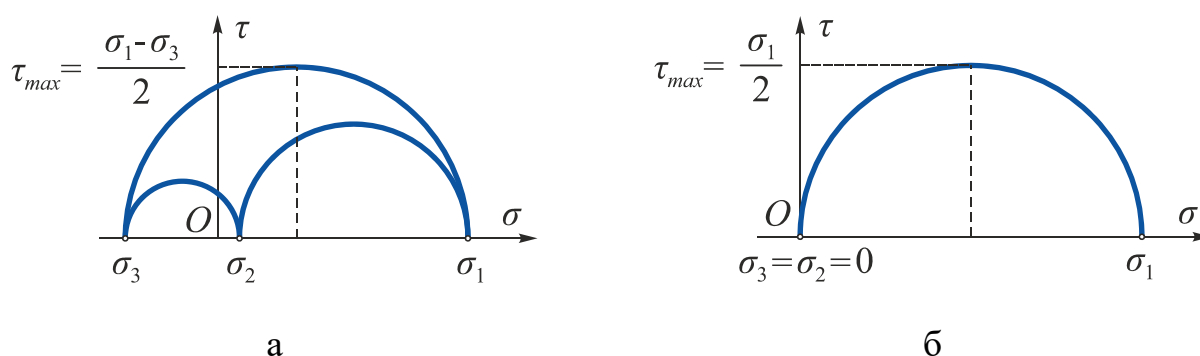


Рис. 1.2

Це дає можливість подати умову вичерпання міцності (1.7) в головних напруженнях:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{гр}.$$

Міцність із запасом  $n$  буде забезпечена за умови

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_{гр}}{n} = [\sigma].$$

Умова міцності за цією теорією набуває вигляду

$$\sigma_{скв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (1.8)$$

де  $[\sigma] = \frac{\sigma_{гр}}{n}$  – допустиме напруження.

Ця теорія міцності підтверджується дослідом як теорія переходу матеріалу в пластичний стан, тобто по суті є теорією пластичності, яка широко використовується для розрахунку на міцність деталей із пластичних матеріалів, тобто матеріалів, які однаково чинять опір розтягненню і стисненню.

Недоліком третьої теорії міцності є те, що в ній не враховується середнє за величиною головне напруження  $\sigma_2$ , яке, як показують експерименти, також, хоча і незначно, впливає на міцність матеріалів (розбіжність результатів теоретичних розрахунків і дослідних даних досягає 10...15 %).

#### 1.2.4. Енергетична теорія міцності (четверта теорія міцності, гіпотеза енергії формозміни)

У 1885 р. італійський математик Е. Бельтрамі припустив, що питома потенціальна енергія деформації ( $U_0$ ) є відповідальною за вичерпання міцності. Однак досліді не підтвердили цього припущення.

Тому в 1904 р. М. Т. Губером<sup>4</sup> було запропоновано розділити  $U_0$  на дві частини: питому потенціальну енергію зміни об'єму ( $U_{0об}$ ) і питому потенціальну енергію зміни форми ( $U_{0ф}$ ). Він зробив припущення, що тільки енергія формозміни є відповідальною за вичерпання міцності.

Подальшого розвитку ця теорія граничного стану набула в роботах Р. Е. Мізеса<sup>5</sup> (1913 р.), Г. Генка (1925 р.).

Четверту теорію міцності найчастіше називають критерієм Мізеса.

Вона основана на такій гіпотезі:

міцність елемента, що перебуває в складному напруженому стані, вважається вичерпаною (тобто настає граничний напружений стан), якщо **питома потенціальна енергія його формозміни** досягла **граничного значення**, визначеного з дослідів на просте розтягнення.

---

<sup>4</sup> **Максиміліан Тітус Губер** (пол. *Maksymilian Tytus Huber*, 4 січня 1872 р. – 9 грудня 1950 р.) – польський учений в області теоретичної і прикладної механіки, засновник польської школи механіки.

<sup>5</sup> **Ріхард Едлер фон Мізес** (нім. *Richard Edler von Mises*, 19 квітня 1883 р., Лемберг, Австро-Угорщина (нині Львів, Україна) – 14 липня 1953 р., Бостон, США) – математик і механік австрійського походження; роботи присвячені аеродинаміці, прикладній механіці, механіці рідин, аеронавтиці, статистиці і теорії ймовірностей.

Таким чином, умова вичерпання міцності має вигляд

$$U_{0\phi} = U_{0\phi_{гр}}, \quad (1.9)$$

де  $U_{0\phi}$  – питома потенціальна енергія, витрачена на зміну форми елемента при досягненні заданого складного напруженого стану;

$U_{0\phi_{гр}}$  – граничне значення питомої потенціальної енергії формозміни, визначене за результатами випробувань на просте розтягнення, тобто при лінійному напруженому стані.

### Визначення потенціальної енергії деформації елементарного об'єму

В ідеальному пружному матеріалі потенціальна енергія, накопичена в елементарному об'ємі при його деформації, чисельно дорівнює сумі робіт сил, прикладених до граней цього об'єму.

У кожному з координатних напрямків на межі нескінченно малого об'єму  $dV = dxdydz$  (рис. 1.3) діють нормальні зусилля:

$$dP_1 = \sigma_1 dydz;$$

$$dP_2 = \sigma_2 dxdz;$$

$$dP_3 = \sigma_3 dxdy.$$

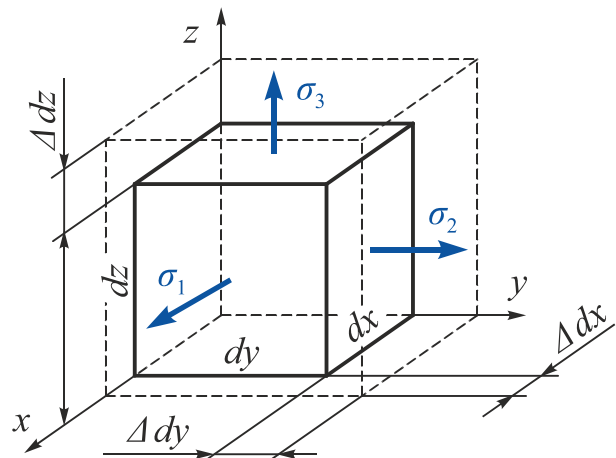


Рис. 1.3

Прикладання цих зусиль приводить до розвитку головних деформацій:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (1.10)$$

Тоді переміщення точок прикладення зусиль

$$\Delta dx = \varepsilon_1 dx; \quad \Delta dy = \varepsilon_2 dy; \quad \Delta dz = \varepsilon_3 dz.$$

Згідно із законом Гука (прямо пропорційна залежність між зусиллями і переміщеннями) сумарну роботу цих елементарних сил на відповідних переміщеннях  $\Delta dx$ ,  $\Delta dy$ ,  $\Delta dz$  можна визначити за формулою

$$dA = dU = \frac{1}{2}(\sigma_1 dydz)\Delta dx + \frac{1}{2}(\sigma_2 dxdz)\Delta dy + \frac{1}{2}(\sigma_3 dydx)\Delta dz. \quad (1.11)$$

Тут  $dU$  – елементарна потенціальна енергія пружної деформації, накопичена в елементарному об'ємі  $dV$ .

Введемо поняття питомої потенціальної енергії пружної деформації, тобто енергії, накопиченої в одиничному об'ємі:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{dU}{dxdydz} = U_0.$$

Розділивши ліву і праву частини рівняння (1.11) на  $dV$ , отримаємо

$$U_0 = \frac{1}{2} \left( \sigma_1 \frac{\Delta dx}{dx} + \sigma_2 \frac{\Delta dy}{dy} + \sigma_3 \frac{\Delta dz}{dz} \right) \quad (1.12)$$

або з урахуванням виразів (1.10)

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (1.13)$$

Підставимо в (1.13) значення  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  з узагальненого закону Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases}$$

і після нескладних перетворень отримаємо

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]. \quad (1.14)$$

Накопичена пружним тілом потенціальна енергія витрачається на зміну його форми та об'єму. Подамо питому потенціальну енергію  $U_0$  у вигляді суми питомої потенціальної енергії зміни об'єму і питомої потенціальної енергії зміни форми:

$$U_0 = U_{0об} + U_{0ф}, \quad (1.15)$$

де  $U_{0ф}$  – питома потенціальна енергія, витрачена на зміну форми;

$U_{0об}$  – питома потенціальна енергія, витрачена на зміну об'єму.

Використавши принцип суперпозиції, перетворимо початковий напружений стан (рис. 1.4) і розділимо  $U_0$  на два доданки відповідно до виразу (1.15).

Із рис. 1.4 видно, що

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= P + \sigma'_1 \\ \sigma_2 &= P + \sigma'_2 \\ \sigma_3 &= P + \sigma'_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_1 - P \\ \sigma'_2 &= \sigma_2 - P \\ \sigma'_3 &= \sigma_3 - P \end{aligned} \right\}. \quad (1.16)$$

З цього випливає, що перший доданок фактично визначає *тільки зміну об'єму*, тобто описує деформацію всебічного розтягнення. Другий доданок доповнює цей напружений стан до заданого.

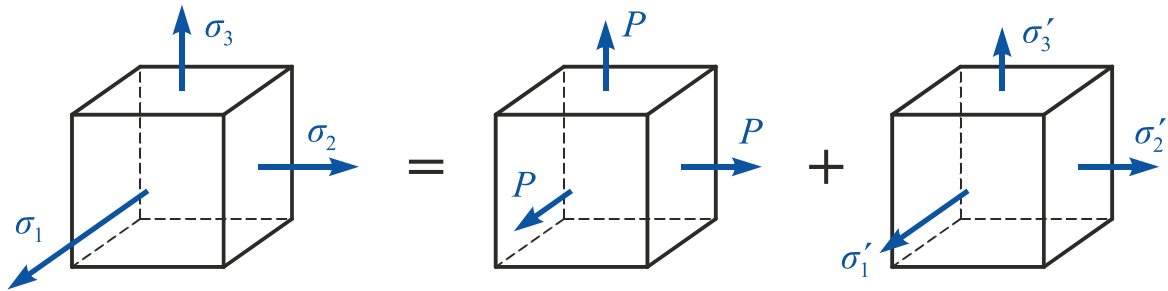


Рис. 1.4

Знайдемо величини напружень  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  з умови, що ця частина напруженого стану не бере участі в зміні об'єму, тобто

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0.$$

Оскільки

$$\frac{1 - 2\mu}{E} \neq 0,$$

то

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$

Підставивши в цей вираз значення  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  з формули (1.16), отримаємо

$$P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (1.17)$$

де  $P$  – середнє нормальне напруження в точці.

Таким чином, величину  $P$  завжди можна визначити однозначно і так, що в другому напруженому стані не відбудеться зміни об'єму.

Оскільки при такому поділі початкового напруженого стану взаємні роботи відсутні, то такий поділ є справедливим.

Визначимо питому потенціальну енергію, витрачену на зміну об'єму  $U_{0,об}$ .

Для цього підставимо в (1.14) значення  $P$  замість  $\sigma_1, \sigma_2$  і  $\sigma_3$ . В результаті отримаємо



$$U_{0_{об}} = \frac{1}{2E} (3P^2 - 2\mu 3P^2) = \frac{1 - 2\mu}{2E} 3P^2. \quad (1.18)$$

Підставимо в цей вираз значення  $P$  з (1.17). Отримаємо остаточно

$$U_{0_{об}} = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (1.19)$$

Віднявши від  $U_0$  (1.14) значення  $U_{0_{об}}$  (1.19), після виконання перетворень отримаємо

$$U_{0_{\phi}} = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (1.20)$$

При лінійному напруженому стані це співвідношення набуде вигляду

$$U_{0_{\phi_{гр}}} = \frac{1 + \mu}{6E} \cdot 2\sigma_{гр}^2. \quad (1.21)$$

Підставивши значення  $U_{0_{\phi}}$  з рівняння (1.20) і  $U_{0_{\phi_{гр}}}$  з виразу (1.21) в умову вичерпання міцності (1.9), отримаємо

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{гр}^2,$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_{гр}.$$

Міцність із запасом  $n$  буде забезпечена за умови

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sigma_{гр}}{n} = [\sigma].$$

Умова міцності остаточно набуде вигляду

$$\sigma_{скв}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma], \quad (1.22)$$

де  $[\sigma] = \frac{\sigma_{гр}}{n}$  – допустиме напруження.

Четверта теорія міцності, як і третя, добре підтверджується експериментально як теорія переходу матеріалу в пластичний стан і поряд з третьою теорією міцності широко використовується для розрахунку на міцність деталей з пластичних матеріалів.

Поява малих пластичних деформацій в матеріалі за четвертою теорією міцності визначається більш точно, ніж за третьою.

## 1.2.5. Теорія міцності Мора

Теорія Мора<sup>6</sup> на відміну від викладених вище теорій базується не на гіпотезах, а на логічній систематизації результатів експериментальних досліджень.

Основним припущенням при побудові цієї теорії є припущення про те, що вичерпання міцності визначається тільки величинами  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  і не залежить від величини  $\sigma_2$ , що досить добре підтверджується результатами експерименту.

Залежність між властивостями міцності матеріалу і видом напруженого стану виведена і обґрунтована за допомогою кругів Мора.

Припустимо, що існує можливість випробувати зразки з будь-якого матеріалу при будь-якому виді складного напруженого стану. Виберемо напружений стан з фіксованим співвідношенням між  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  і, пропорційно збільшуючи ці компоненти напруженого стану, доведемо зразок до руйнування або до переходу в пластичний стан. Цей напружений стан і буде граничним. Накреслимо на площині  $\sigma, \tau$  найбільший з трьох кругів Мора. Далі проведемо аналогічне випробування зразків з того ж матеріалу при інших співвідношеннях між  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ . Кожному такому співвідношенню буде відповідати свій граничний круг Мора. Далі побудуємо обвідну всіх граничних кругів Мора. Ця обвідна фактично є *механічною характеристикою матеріалу при складному напруженому стані*, так само як і при лінійному напруженому стані основною механічною характеристикою міцності є границя текучості  $\sigma_T$  або границя міцності  $\sigma_B$ , що визначається випробуванням на розтягання або стиснення (рис. 1.5).

Якщо обвідна граничних кругів Мора для деякого матеріалу отримана експериментально, то для з'ясування, чи є напружений стан, що характеризується головними напруженнями  $\sigma_1, \sigma_2$  і  $\sigma_3$ , граничним і для оцінювання міцності матеріалу слід побудувати круг напружень для  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  в небезпечній точці. Міцність буде забезпечена, якщо він цілком лежить всередині області обвідної.

---

<sup>6</sup> **Кристиан Отто Мор** (нем. *Christian Otto Mohr*; 8 жовтня 1835 р., Вессельбурен – 2 жовтня 1918 р., Дрезден) – німецький інженер і вчений в галузі теоретичної механіки та опору матеріалів. Навчався у Ганноверській політехнічній школі. З 1855 р. працював над спорудженням залізниць та мостів у Ганновері та Ольденбурзі. З 1867 р. він – професор спочатку у Штутгарті, потім у Дрездені. Займався проблемами опору матеріалів і, зокрема, їх графічним поданням. У 1882 р. зробив графічний метод аналізу напружень, відомий під назвою «круг Мора».

Для знаходження коефіцієнта запасу слід визначити, у скільки разів необхідно одночасно збільшити  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ , щоб найбільший круг Мора торкнувся граничної обвідної. Число, що показує, у скільки разів збільшено значення  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ , і дорівнюватиме коефіцієнту запасу міцності.

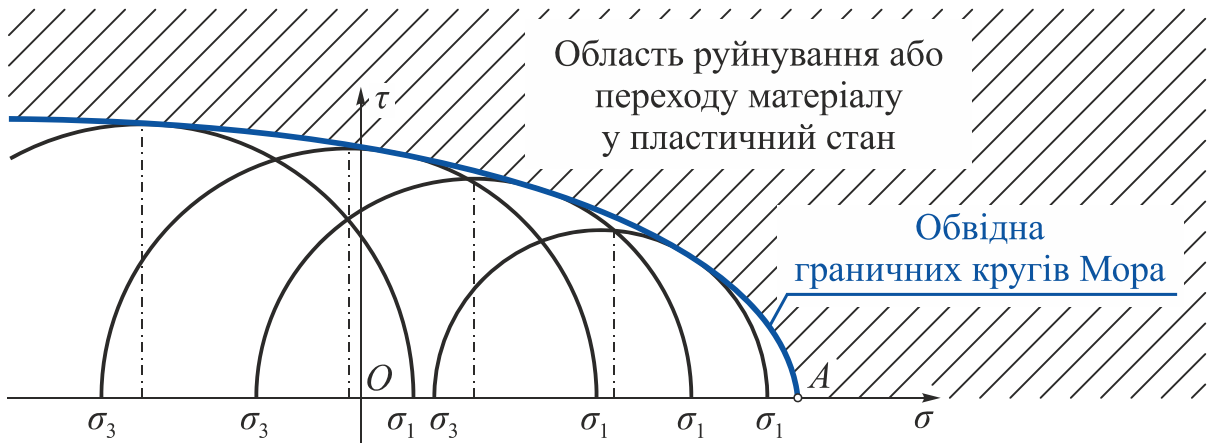


Рис. 1.5

Для побудови дійсної обвідної граничних кругів Мора треба було б експериментальним шляхом досліджувати всілякі напружені стани. Це є нездійсненним завданням, тому виникає питання, як побудувати обвідну граничних кругів Мора при обмеженій кількості досить простих випробувань, технічна реалізація яких є можливою. Три таких граничних круга можна побудувати досить просто (рис. 1.6):

- 1-й круг – випробуванням на просте розтягання;
- 2-й круг – випробуванням на просте стиснення;
- 3-й круг – випробуванням на кручення тонкостінної трубки, при якому у всіх точках випробуваного зразка (трубки) реалізується чистий зсув.

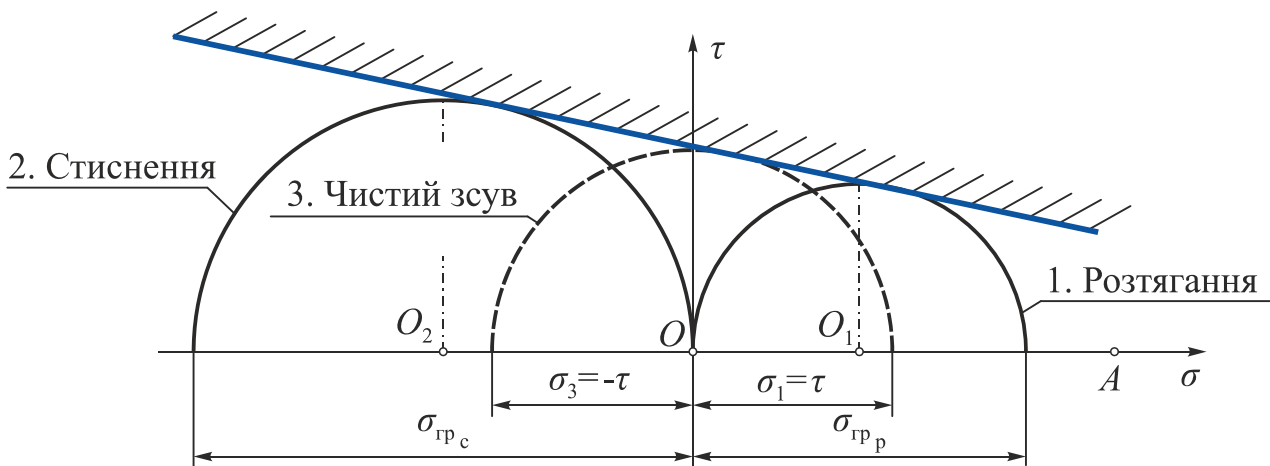


Рис. 1.6

Для пластичних матеріалів (див. рис. 1.6)

$$\sigma_{\text{гр}_p} = |\sigma_{\text{гр}_c}| = \sigma_{\text{т}_p} = \sigma_{\text{т}_c};$$

для крихких матеріалів

$$\sigma_{\text{гр}_p} = \sigma_{\text{в}_p}; \quad \sigma_{\text{гр}_c} = \sigma_{\text{в}_c}.$$

Точка *A* характеризує на круговій діаграмі стан всебічного рівновісного розтягнення.

Для отримання співвідношень, які можна було б використовувати при проведенні практичних розрахунків на міцність, обвідну граничних кругів Мора апроксимують дотичною до кругових діаграм розтягнення і стиснення. Цей варіант апроксимації дозволяє отримати досить точні результати, якщо центр кругової діаграми напружень лежить між точками  $O_1$  (центром круга чистого розтягнення) і  $O_2$  (центром круга чистого стиснення) (рис. 1.7),

де  $\sigma_{\text{гр}_p}$  і  $\sigma_{\text{гр}_c}$  – граничні напруження, отримані за результатами випробувань на чисте розтягнення і чисте стиснення відповідно. При виведенні будемо використовувати абсолютне значення  $\sigma_{\text{гр}_c}$ ;

$\sigma_1$  і  $\sigma_3$  – головні напруження складного напруженого стану, круг Мора при яких стає граничним.

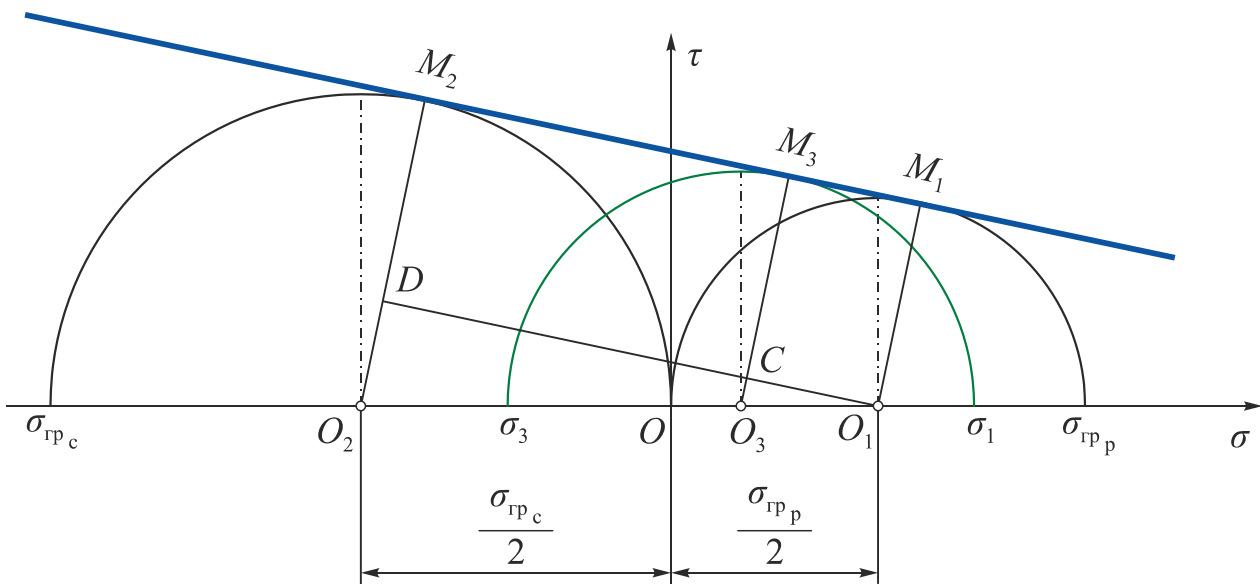


Рис. 1.7

Із геометричних співвідношень отримаємо умову міцності для проміжного напруженого стану з головними напруженнями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  і граничним кругом Мора в точці  $O_3$  (див. рис. 1.7).

Проведемо прямі  $O_1M_1$ ,  $O_2M_2$ ,  $O_3M_3$ , що з'єднують центри граничних кругів Мора і точки їх дотику з граничною прямою, а також пряму  $OD$ , паралельну  $M_1M_2$ . Оскільки трикутники  $O_1O_3C$  і  $O_1O_2D$  подібні, то

$$\frac{\overline{O_3C}}{\overline{O_2D}} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_1O_2}},$$

де

$$\overline{O_3C} = \overline{O_3M_3} - \overline{O_1M_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_{\text{Гр}_p}}{2};$$

$$\overline{O_2D} = \overline{O_2M_2} - \overline{O_1M_1} = \frac{\sigma_{\text{Гр}_c}}{2} - \frac{\sigma_{\text{Гр}_p}}{2};$$

$$\overline{O_1O_3} = \overline{OO_1} - \overline{OO_3} = \frac{\sigma_{\text{Гр}_p}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2};$$

$$\overline{O_1O_2} = \overline{OO_1} + \overline{OO_2} = \frac{\sigma_{\text{Гр}_p}}{2} + \frac{\sigma_{\text{Гр}_c}}{2}.$$

Тоді

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_{\text{Гр}_p}}{\sigma_{\text{Гр}_c} - \sigma_{\text{Гр}_p}} = \frac{\sigma_{\text{Гр}_p} - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_{\text{Гр}_p} + \sigma_{\text{Гр}_c}}.$$

Розділимо чисельник і знаменник останнього виразу на  $\sigma_{\text{Гр}_c}$  і, ввівши позначення

$$k = \frac{\sigma_{\text{Гр}_p}}{\sigma_{\text{Гр}_c}}, \quad (1.23)$$

отримаємо

$$\frac{\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_{\text{Гр}_c}} - k}{1 - k} = \frac{k - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_{\text{Гр}_c}}}{1 + k}.$$

Перетворимо цю рівність до вигляду

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = k\sigma_{\text{Гр}_c}.$$

Остаточно з урахуванням виразу (1.23) отримаємо умову вичерпання міцності (запас міцності дорівнює одиниці)

$$\sigma_{\text{екв}}^M = \sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_{\text{Гр}_p}.$$

Міцність із запасом  $n$  буде забезпечена за умови

$$\sigma_{\text{екв}}^M = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma] \quad (1.24)$$

або

$$\sigma_{\text{екв}}^M = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{Гр}_p}}{\sigma_{\text{Гр}_c}}\sigma_3 \leq [\sigma], \quad (1.25)$$

де  $[\sigma] = \frac{\sigma_{гр}}{n}$  – допустиме напруження;  
 $k = \sigma_{Тр_p} / \sigma_{Тс}$  – для пластичних матеріалів;  
 $k = \sigma_{в_p} / \sigma_{в_c}$  – для крихких матеріалів.

Для пластичних матеріалів через те, що

$$\sigma_{гр_p} = \sigma_{Тр_p} = \sigma_{гр_c} = \sigma_{Тс},$$

співвідношення (1.25) вироджується в умову міцності за теорією найбільших до-  
 тичних напружень (третя теорія міцності).

Теорію міцності Мора можна вважати основною теорією, яку рекомендується  
 використовувати при розрахунку деталей із крихких і крихко-пластичних матеріа-  
 лів, тобто матеріалів, що по-різному чинять опір розтягненню і стисненню  
 ( $[\sigma]_p \neq [\sigma]_c$ ).

У цей час область застосування теорії міцності Мора обмежена тому, що прак-  
 тично відсутні експериментальні дані в області всебічного розтягнення (при  
 $\sigma_1 > 0$  і  $\sigma_3 > 0$ ) і в області всебічного стиснення (при  $\sigma_1 < 0$  і  $\sigma_3 < 0$ ). Однак на-  
 пружені стани, що мають такий вигляд, зустрічаються досить рідко. Теорія міцно-  
 сті Мора дозволяє отримати найкращі результати для змішаних напружених станів  
 (при  $\sigma_1 > 0$  і  $\sigma_3 < 0$ ).

### 1.2.6. Умова міцності за третьою і четвертою теоріями міцності при плоскому напруженому стані частинного виду

Розглянемо плоский напружений стан частинного виду.

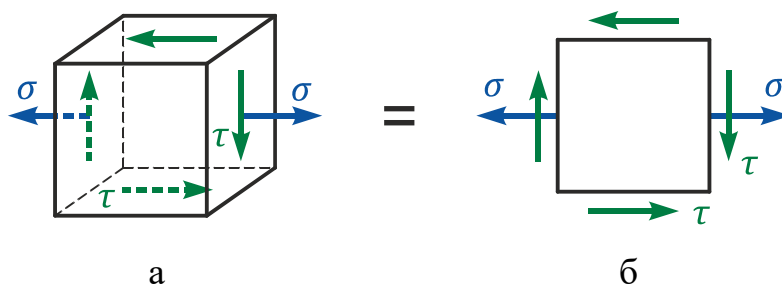


Рис. 1.8

Цей вид плоского напруженого стану найбільш часто реалізується в  
 небезпечних точках деталей типу брус при спільному згині з крутінням, а також  
 при деформації «плоский поперечний згин». На рис. 1.8 показано два варіанти ви-  
 гляду плоского напруженого стану. У розрахунковій практиці найчастіше викори-  
 стовують більш простий варіант (рис. 1.8, б). Напруження на рис. 1.8 показано без  
 індексів, оскільки конкретні задачі можна розглядати в різних системах координат.

Головні напруження цього виду плоского напруженого стану визначають із співвідношень

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Індекси головним напруженням присвоєні таким чином тому, що незалежно від знака  $\sigma$

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > 0 \quad \text{і} \quad \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < 0$$

при будь-якому відмінному від нуля значенні  $\tau$ .

Розглянемо умови міцності:

**а) за третьою теорією міцності**

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Підставивши в цей вираз значення  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  з рівняння (1.26), отримаємо

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Таким чином, остаточно

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];\tag{1.27}$$

**б) за четвертою теорією міцності** при  $\sigma_2 = 0$  співвідношення (1.22) набуде вигляду

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma].$$

Підставивши в цей вираз значення  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  з рівняння (1.26), отримаємо

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + 2\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \frac{1}{4}(\sigma^2 + 4\tau^2)} + \\ &\frac{\sigma^2}{4} - 2\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \frac{1}{4}(\sigma^2 + 4\tau^2) - \left(\frac{\sigma^2}{4} - \frac{1}{4}(\sigma^2 + 4\tau^2)\right) = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.\end{aligned}$$

Таким чином, остаточно

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].\tag{1.28}$$

**Зауваження** | Співвідношення (1.27) і (1.28) залежно від того, яку з теорій міцності використано як робочу, дозволяють провести перевірку міцності в характерних точках поперечного перерізу балки при поперечному згині.

### 1.3. Приклади розв'язання задач

#### Приклад 1.1

Порівняти еквівалентні напруження напружених станів, показаних на рис. 1.9. Еквівалентні напруження обчислити за четвертою (енергетичною) теорією міцності. Значення напружень указані в мегапаскалях (МПа).

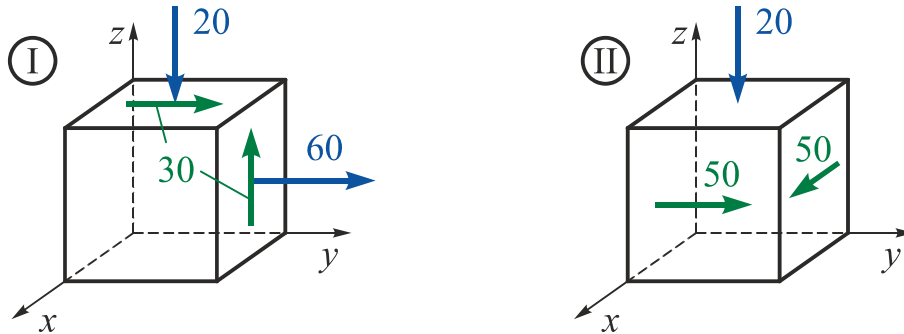


Рис. 1.9

#### Розв'язання

Визначимо головні напруження для першого варіанта:

$$\sigma_{1,2,(3)} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{60 - 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 + 20}{2}\right)^2 + 30^2} =$$

$$= 20 \pm 50;$$

$$\sigma_1 = 70 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -30 \text{ МПа.}$$

Еквівалентне напруження за четвертою теорією міцності

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(70 - 0)^2 + (0 - (-30))^2 + (-30 - 70)^2} = 88,9 \text{ МПа.}$$

Визначимо головні напруження для другого варіанта:

$$\sigma_{\text{max, min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{0 - 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 + 0}{2}\right)^2 + 50^2} = 0 \pm 50;$$

$$\sigma_1 = 50 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -20 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -50 \text{ МПа.}$$

Еквівалентне напруження за четвертою теорією міцності

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(50 + 20)^2 + (-20 - (-50))^2 + (-50 - 50)^2} = 88,9 \text{ МПа.}$$

Таким чином, задані напружені стани рівнонебезпечні.



## Приклад 1.2

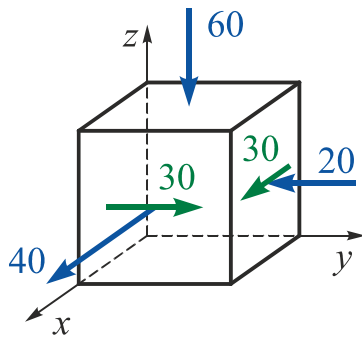


Рис. 1.10

У небезпечному перерізі деталі, виконаної із сірого чавуну СЧ20 ( $\sigma_{в\ p} = 200$  МПа;  $\sigma_{в\ c} = 750$  МПа;  $\mu = 0,25$ ), виділено елемент, на гранях якого діють напруження (в мегапаскалях), як показано на рис. 1.10. Необхідно перевірити міцність елемента.

### Розв'язання

Позначимо напруження, показані на рис. 1.10, відповідно до координатної системи  $xOy$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 40 \text{ МПа}; & \sigma_y &= -20 \text{ МПа}; & \sigma_z &= -60 \text{ МПа}; \\ \tau_{yx} &= 30 \text{ МПа}; & \tau_{xy} &= -30 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

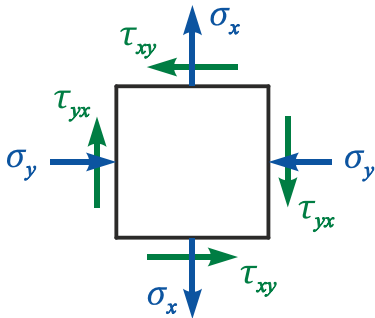


Рис. 1.11

Площадка, нормаль до якої паралельна осі  $z$ , – головна, оскільки дотичні напруження на ній відсутні.

Покажемо напружений стан на двох інших площадках в площині  $xOy$  (рис. 1.11).

Визначимо головні напруження:

$$\sigma_{max, min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40 - 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40 - (-20)}{2}\right)^2 + 30^2};$$

$$\sigma_{max} = 10 + 31,46 = 41,46 \text{ МПа}; \quad \sigma_{min} = 10 - 31,46 = -21,46 \text{ МПа}.$$

Присвоємо індекси головним напруженням відповідно до умови  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

$$\sigma_1 = 41,46 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -21,46 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -60 \text{ МПа}.$$

Перевіримо результати розрахунку з використанням властивості інваріантності нормальних напружень:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = const;$$

$$40 - 20 - 60 = 41,46 - 21,46 - 60 = -40.$$

Перевіримо міцність елемента. Призначимо допустимі напруження, вибравши коефіцієнт запасу міцності  $[n] = 3$ , рекомендований для крихких матеріалів, що по-різному чинять опір розтягненню і стисненню:

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{B_p}}{n} = \frac{200}{3} = 66,67 \text{ МПа}; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{B_c}}{n} = \frac{750}{3} = 250 \text{ МПа}.$$

Відповідно до **першої теорії міцності**

$$\sigma_{\text{екв}}^I = \sigma_1 = 41,46 \text{ МПа} \leq [\sigma]_p = 66,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{екв}}^I = |\sigma_3| = 60 \text{ МПа} \leq [\sigma]_c = 250 \text{ МПа}.$$

Міцність забезпечена.

Згідно з **другою теорією міцності**

$$\sigma_{\text{екв}}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p;$$

$$41,46 - 0,25(-21,46 - 60) = 61,825 \text{ МПа} \leq 66,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{екв}}^{II} = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma]_c;$$

$$|-60 - 0,25(41,46 - 21,46)| = 65 \text{ МПа} \leq 250 \text{ МПа}.$$

Міцність забезпечена.

Відповідно до **третьої теорії міцності**

$$\sigma_{\text{екв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 41,46 - (-60) = 100,46 \text{ МПа} \leq [\sigma]_p = 66,67 \text{ МПа}.$$

Міцність недостатня.

Згідно з **четвертою теорією міцності**

$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]_p;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(41,46 - (-21,46))^2 + (-21,46 - (-60))^2 + (-60 - 41,46)^2} = \\ = 102,2 \text{ МПа} \leq [\sigma]_p = 66,67 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Міцність недостатня.

Згідно з **теорією міцності Мора**

$$\sigma_{\text{екв}}^M = \sigma_1 - \frac{\sigma_{B_p}}{\sigma_{B_c}} \sigma_3 = 41,46 - \frac{200}{750} (-60) = 51,46 \text{ МПа} \leq [\sigma]_p = 66,67 \text{ МПа}.$$

Міцність забезпечена.

У прикладі розглянуто варіанти використання різних теорій міцності при виконанні перевірного розрахунку елемента з крихкого матеріалу. Використання третьої і четвертої теорій міцності, що застосовуються для пластичних матеріалів, призвело до негативного результату.

## 2. ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ ДЛЯ ДОВІЛЬНО НАВАНТАЖЕНОГО ЛАМАНОГО БРУСА

### 2.1. Епюри і основні правила їх побудови

У поперечних перерізах елементів ламаного бруса можуть діяти всі шість внутрішніх силових факторів:  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  і  $M_z$ . Всі правила побудови епюр в балках і плоских рамах застосовні і при побудові епюр для ламаного бруса.

**Епюри** (фр. *épure* – креслення) – графіки, що показують зміну внутрішніх силових факторів, що діють в поперечному перерізі бруса, вздовж його поздовжньої осі.

Графічний спосіб подання функції відрізняється високою наочністю, тобто дає можливість легко оцінити всі її особливості. В курсі механіки матеріалів і конструкцій це означає можливість визначити небезпечний переріз. В цьому і полягає мета побудови епюр.

#### Основні правила побудови епюр

1. Вісь епюри проводять паралельно поздовжній осі бруса. Якщо вісь бруса криволінійна (ламана), то криволінійна (ламана) і вісь епюри.
2. Значення внутрішнього силового фактора, що діє в поперечному перерізі бруса, **відкладають в масштабі по нормалі до осі епюри** в точці, яка відповідає цьому поперечному перерізу.
3. В епюрах мають бути вказані назва внутрішнього силового фактора, одиниці його вимірювання, знаки, цифрові значення в характерних точках і нанесено штрихування перпендикулярно до осі епюри.

#### Правила розбиття конструкційного елемента на ділянки

1. У межах однієї ділянки залишається незмінним закон прикладання зовнішнього навантаження (в тому числі й опорні реакції), тобто межами ділянок є перерізи, в яких прикладені зосереджені сили ( $P$ ) і зосереджені пари сил ( $M$ ), починається або обривається дія розподіленого зовнішнього навантаження ( $q$ ).
2. У межах ділянок не змінюється геометрія поперечного перерізу або межами ділянки є перерізи, в яких площа змінюється стрибкоподібно.

3. Межами ділянок у рамі і ламаному брусі є вузлові точки (точки зламу).  
 4. У межах ділянки не змінюється матеріал, з якого виготовлено брус.

### Правила знаків при побудові епюр

#### 1. Поздовжня сила $N_x$

Зовнішня сила, що діє у будь-який бік від перерізу  $n - n$ , робить позитивний внесок у величину поздовжньої сили  $N_x$ , якщо вона спричиняє розтягнення (напрявлена від розглядуваного перерізу), і негативний, якщо спричиняє стиснення (напрявлена до розглядуваного перерізу) (рис. 2.1).

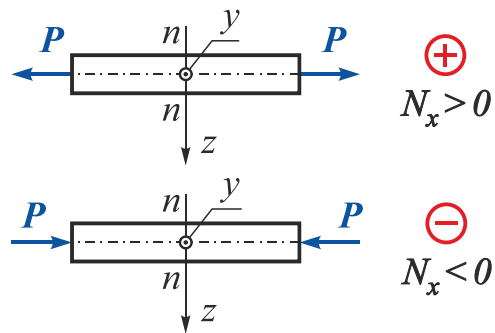


Рис. 2.1

#### 2. Крутний момент $M_x$

При побудові епюр крутних моментів користуються довільним правилом знаків. Надалі будемо застосовувати таке правило: крутний момент зовнішніх сил, що діє у будь-який бік від перерізу  $n - n$ , робить позитивний внесок у величину крутного моменту  $M_x$ , якщо, дивлячись з боку зовнішньої нормалі на розглядуваний переріз, бачити його напрямленим проти годинникової стрілки, і негативний – якщо за годинниковою стрілкою (рис. 2.2).

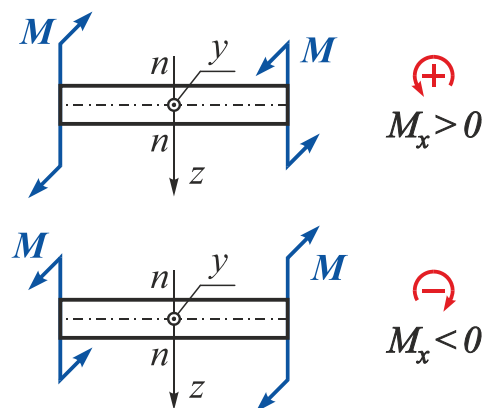


Рис. 2.2

#### 3. Поперечні сили $Q_z$ і $Q_y$

Зовнішня сила, що діє у будь-який бік від перерізу  $n - n$ , робить позитивний внесок у величину поперечної сили  $Q_z$  (або  $Q_y$ ), що діє в даному перерізі, якщо намагається повернути цю частину за годинниковою стрілкою відносно головної центральної осі інерції перерізу  $y$  (або  $z$ ), і негативний – якщо проти годинникової стрілки (рис. 2.3).

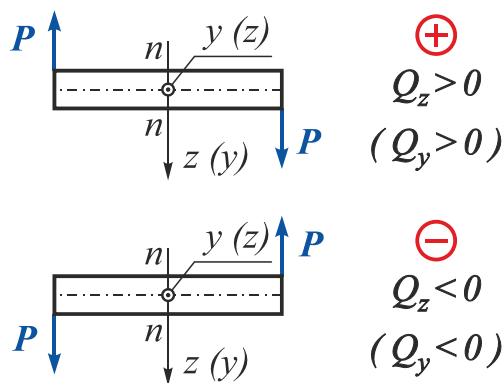


Рис. 2.3

#### 4. Згинальні моменти $M_y$ і $M_z$

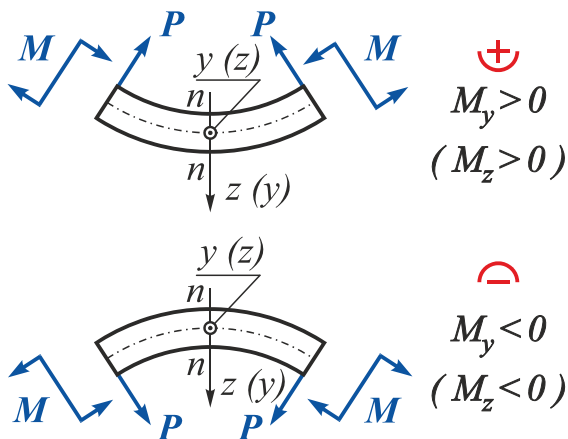


Рис. 2.4

Зовнішня сила або зосереджений момент, що діють у будь-який бік від перерізу  $n - n$ , робить позитивний внесок у величину згинального моменту  $M_y$  (або  $M_z$ ), що діє в даному перерізі, якщо ця зовнішня сила або зосереджений момент призводить до стиснення верхніх і розтягнення нижніх шарів балки (спричиняє згин опуклістю вниз), і негативний, якщо призводить до розтягнення верхніх і стиснення нижніх шарів балки (спричиняє згин опуклістю вгору) (рис. 2.4).

Епюри  $M_y$  і  $M_z$  будують з боку розтягнутих волокон бруса.

## 2.2. Побудова епюр внутрішніх силових факторів для плоско-просторового ламаного бруса

**Плоско-просторовим** називають ламаний брус, всі елементи якого жорстко з'єднані у вузлах і розташовані в одній площині, а зовнішні зусилля діють в довільних напрямках.

При побудові епюр зовнішні сили подають у **вигляді проекцій** на прийняті **координатні напрямки**.

У розрахунковій практиці використовують два методи розв'язання задач з побудови епюр внутрішніх силових факторів для ламаного бруса.

### 2.2.1. Перший метод побудови епюр

Суть даного методу: після визначення внутрішніх силових факторів на першій ділянці всі зовнішні силові фактори (зосереджені сили і моменти, розподілені навантаження), що діють в межах першої ділянки, наводять згідно з теоремами статки до початкового перерізу другої ділянки. Після визначення внутрішніх силових факторів на другій ділянці всі зовнішні зусилля, що діють у межах другої ділянки, приводять до початкового перерізу третьої ділянки і т.д. При такому підході кожен ділянку ламаного бруса розглядають як консоль.

## Приклад 2.1

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданого ламаного бруса (рис. 2.5).

Дано:  $P_1 = 15 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 20 \text{ кН}$ ;  $P_3 = 10 \text{ кН}$ ;  
 $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 3 \text{ м}$ ;  $c = 4 \text{ м}$ .

Необхідно побудувати епюри

$$N_x, Q_z, Q_y, M_x, M_y, M_z.$$

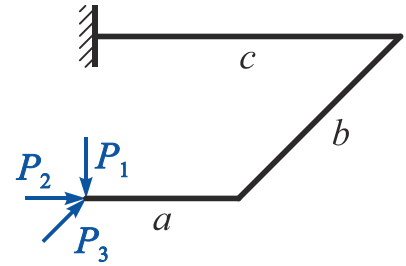


Рис. 2.5

## Розв'язання

1. Накреслимо ламаний брус у масштабі і розіб'ємо його на ділянки I, II, III.

У довільному перерізі кожної ділянки на відстані  $x$  від її початку розташуємо систему координат  $x, y, z$  так, щоб вісь  $x$  збіглася з поздовжньою віссю бруса, вісь  $z$  була напрямлена вниз, а горизонтальна вісь  $y$  складала б з двома першими правий ортогональний базис (рис. 2.6).

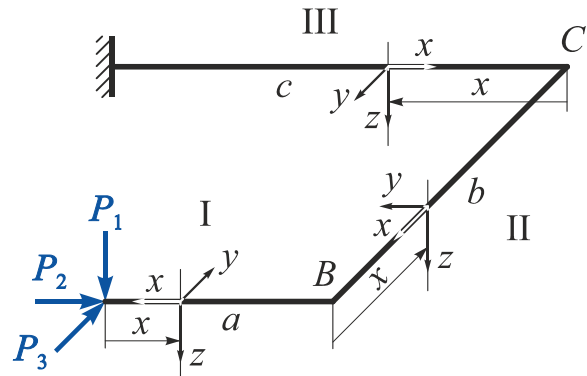


Рис. 2.6

### Зауваження

Якщо розігнути ламаний брус за найкоротшою кутовою відстанню в одну лінію, напрямки осей  $x, y$  і  $z$  на всіх ділянках мають збігтися.

2. Використавши метод перерізів, запишемо рівняння внутрішніх силових факторів на кожній ділянці.

Розглянемо ділянку I (рис. 2.7) ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = -P_2 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_z^I = P_1 = 15 \text{ кН};$$

$$Q_y^I = -P_3 = -10 \text{ кН};$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = -P_1 x = 15x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = -30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^I = -P_3 x = -10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

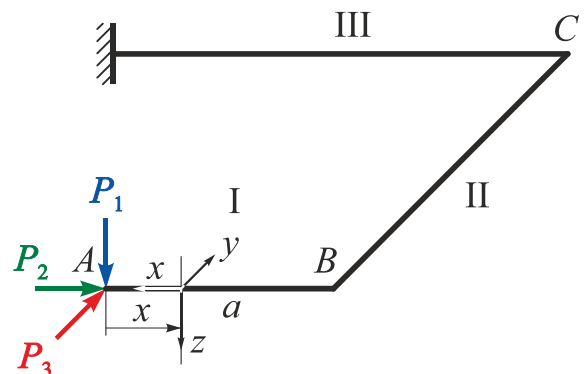


Рис. 2.7

### Зауваження

Момент, створюваний відмінним від нуля зусиллям відносно деякої осі, дорівнює нулю, якщо лінія дії зусилля перетинає цю вісь або паралельна цій осі.

Розглянемо ділянку II ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 3 \text{ м}$ ).

Приведемо зусилля  $P_1$ ,  $P_2$ , і  $P_3$  до початкового перерізу ділянки II (точка В) (рис. 2.8).

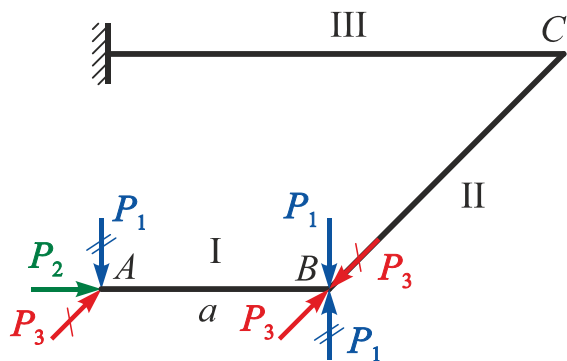


Рис. 2.8

Оскільки *лінія дії* сили  $P_2$  *проходить* через точку В, то за законами статички точку прикладання сили  $P_2$  можна просто перенести в точку В.

Для приведення сили  $P_1$  в точку В прикладемо у цю точку статичний нуль, тобто дві однакові протилежно напрямлені сили, лінії дії яких збігаються.

Таким чином, дія сили  $P_1$ , прикладеної в точці А, і дія сили  $P_1$  і моменту  $P_1 a$ , прикладених в точці В, статично еквівалентні.

Аналогічним чином перенесемо силу  $P_3$ .

Розрахункову схему ділянки II показано на рис. 2.9.

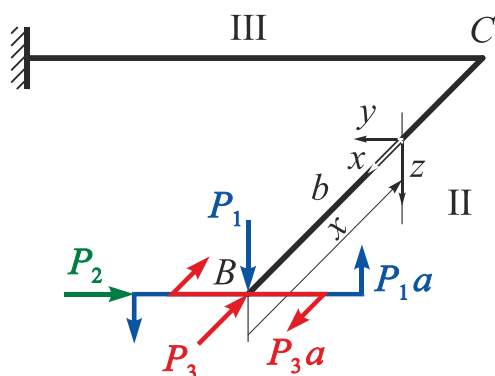


Рис. 2.9

$$N_x^{II} = -P_3 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = P_1 = 15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{II} = P_2 = 20 \text{ кН};$$

$$M_x^{II} = P_1 a = 15 \cdot 2 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = -P_1 x = -15x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=3 \text{ м}} = -45 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{II} = -P_3 a + P_2 x = -10 \cdot 2 + 20x \quad \Big|_{x=0} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=b=3 \text{ м}} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Розглянемо ділянку III ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 4 \text{ м}$ ).

Приведемо систему зовнішніх сил, що діють на ділянці II, до початкового перерізу ділянки III (точка С) аналогічно розглянутому вище.

Розрахункову схему ділянки III показано на рис. 2.10.

**Зауваження** Момент, як показано в статиці, являє собою вільний силовий фактор, і його можна переносити в площині і в паралельних площинах, не змінюючи напрямку і величини.

$$N_x^{III} = P_2 = 20 \text{ кН};$$

$$Q_z^{III} = P_1 = 15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = P_3 = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{III} = P_1 b = 15 \cdot 3 = 45 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

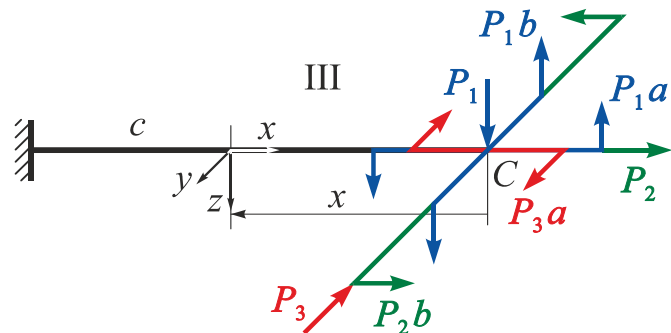


Рис. 2.10

$$M_y^{III} = P_1 a - P_1 x = 15 \cdot 2 - 15x \quad \Big|_{x=0} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=c=4 \text{ м}} = -30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{III} = P_2 b - P_3 a + P_3 x = 20 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 10x \quad \Big|_{x=0} = 40 \quad \Big|_{x=c=4 \text{ м}} = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

**Зауваження**

1. Для правильного визначення знака поздовжньої сили  $N_x$ , створюваної зовнішнім зусиллям  $P_2$  ( $P_3$ ) в перерізах ділянки II (III), необхідно вважати цю силу прикладеною в тому ж напрямку в початковому перерізі цієї ділянки (рис. 2.6 – 2.10).
2. Для правильного визначення знака поперечної сили  $Q_z$  ( $Q_y$ ), створюваної зовнішнім зусиллям  $P_1$  ( $P_2$  і  $P_3$ ) в перерізах ділянок II і III, необхідно вважати цю силу прикладеною в тому ж напрямку в початковому перерізі ділянок II і III (див. рис. 2.6 – 2.10).

3. Побудуємо епюри (рис. 2.11).

**Зауваження** При побудові епюр внутрішніх силових факторів для ламаного бруса необхідно враховувати таке:

- а) епюри  $N_x$  і  $M_x$  можна будувати в будь-якій площині;
- б) епюри  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  необхідно будувати тільки **в площинах їх дії**;
- в) епюри  $M_y$  і  $M_z$  будують з боку **розтягнутих волокон** бруса.



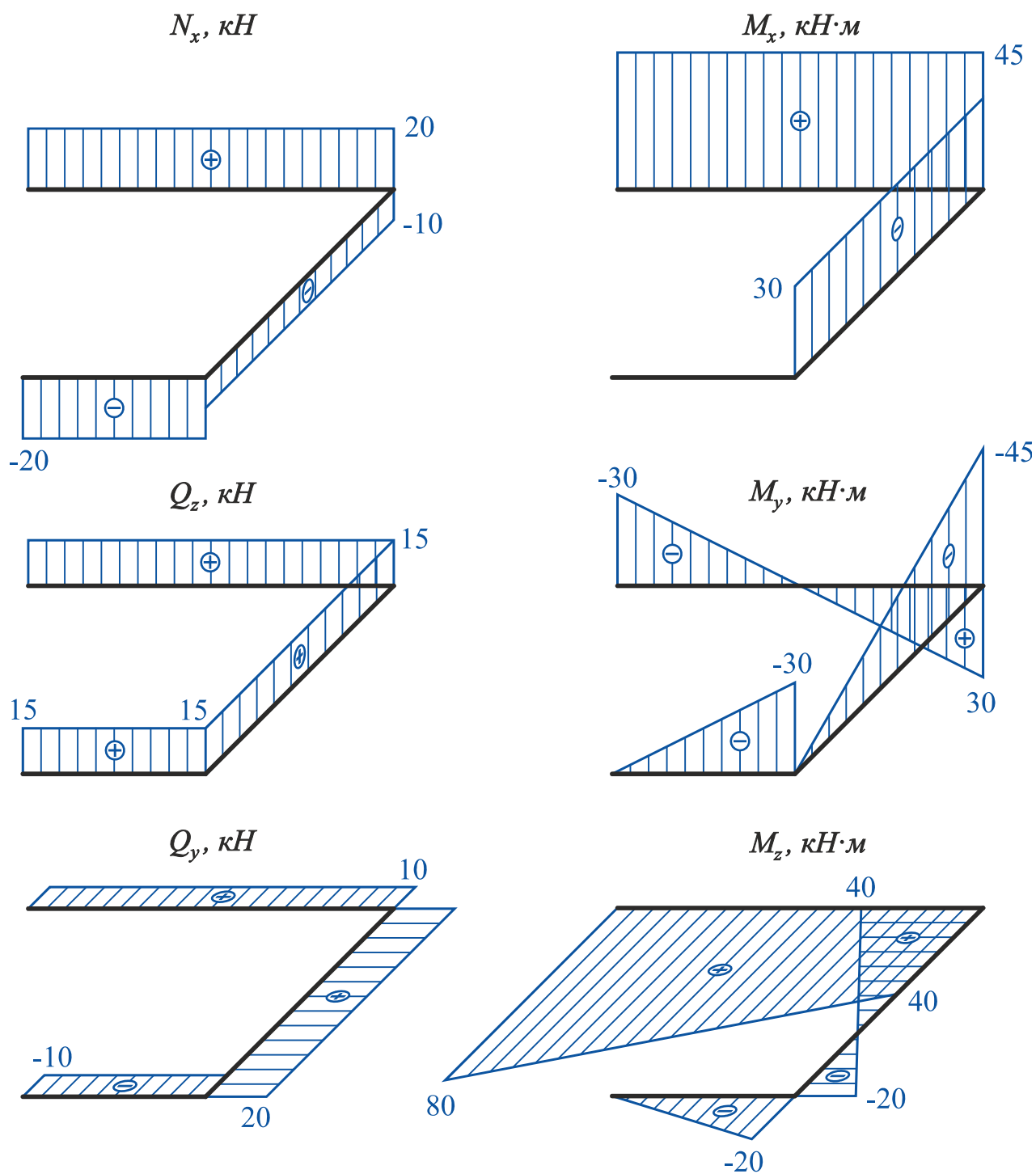


Рис. 2.11

4. Перевіримо правильність побудови епюр.

Для цього виділимо нескінченно малі елементи ламаного бруса в місцях зчленування його частин (вузли  $B$  і  $C$ ) і розглянемо їх рівновагу під дією внутрішніх зусиль і зовнішніх сил, прикладених у межах цих вузлів (рис. 2.12).

На рис. 2.12 всі внутрішні зусилля показано з урахуванням їх дійсних напрямків.

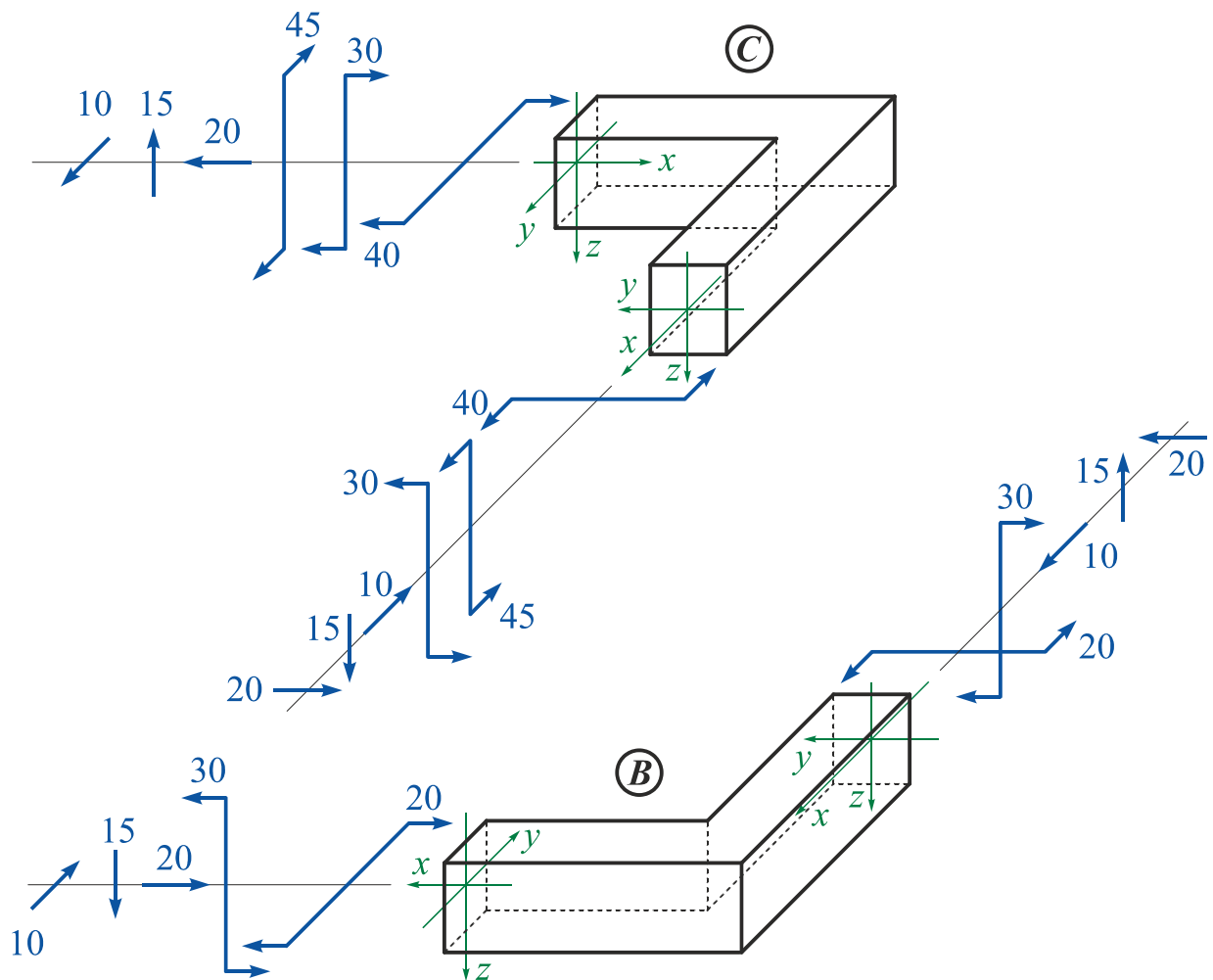


Рис. 2.12

Рівняння рівноваги вузла B:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 20 - 20 = 0; & \sum P_y &= 10 - 10 = 0; & \sum P_z &= 15 - 15 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 30 - 30 = 0; & \sum M_z &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла C:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 20 - 20 = 0; & \sum P_y &= 10 - 10 = 0; & \sum P_z &= 15 - 15 = 0; \\ \sum M_x &= 45 - 45 = 0; & \sum M_y &= 30 - 30 = 0; & \sum M_z &= 40 - 40 = 0. \end{aligned}$$

**Зауваження**

При побудові епюр внутрішніх силових факторів для ламаного бруса необхідно кожен його елемент розглядати як стрижень, що працює на розтягнення-стиснення, як вал, який працює на кручення, і як балку, що працює в умовах поперечного згину в двох площинах. При цьому зберігаються всі правила знаків, прийняті при визначенні  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , і всі правила побудови епюр.

## Приклад 2.2

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданого ламаного бруса (рис. 2.13).

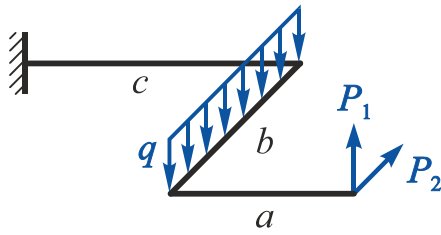


Рис. 2.13

Дано:  $P_1 = 20 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 10 \text{ кН}$ ;  $q = 15 \text{ кН/м}$ ;  
 $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ ;  $c = 3 \text{ м}$ .

Необхідно побудувати епюри

$N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

### Розв'язання

1. Накреслимо ламаний брус в масштабі і розіб'ємо його на ділянки I, II, III.

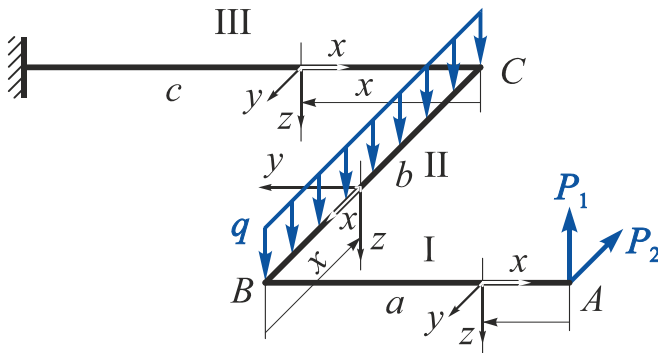


Рис. 2.14

У довільному перерізі кожної ділянки на відстані  $x$  від його початку розташуємо систему координат  $xuz$  (рис. 2.14).

2. Використавши метод перерізів, запишемо рівняння внутрішніх силових факторів на кожній ділянці.

Розглянемо ділянку I (рис. 2.15) ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

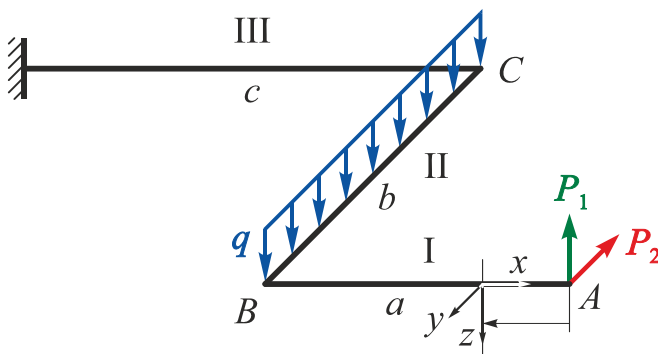


Рис. 2.15

$$N_x^I = 0;$$

$$Q_z^I = -P_1 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_y^I = P_2 = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = P_1 x = 20x \quad \Big|_{x=0} =$$

$$= 0 \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^I = P_2 x = 10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Розглянемо ділянку II ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 2$  м).

Приведемо зусилля  $P_1$  і  $P_2$  до початкового перерізу ділянки II (точка B) (рис. 2.16).

$$N_x^{II} = -P_2 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = qx - P_1 = 15x - 20 \Big|_{x=0} = -20 \text{ кН} \Big|_{x=b=2\text{ м}} = 10 \text{ кН}.$$

Оскільки в межах ділянки II  $Q_z$  змінює знак, то необхідно визначити  $x_e$ , при якому  $Q_z^{II} = 0$ :

$$qx_e - P_1 = 0 \Rightarrow x_e = \frac{P_1}{q} = \frac{20}{15} = 1,33 \text{ м};$$

$$Q_y^{II} = 0;$$

$$M_x^{II} = P_1 a = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = P_1 x - \frac{qx^2}{2} = 20x - \frac{15x^2}{2} \Big|_{x=0} = 0 \Big|_{x=b=2\text{ м}} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x=x_e=1,33\text{ м}} = 13,33 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{II} = P_2 a = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Розглянемо ділянку III ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 3$  м).

Замінімо розподілене навантаження, що діє в межах другої ділянки, рівнодієюною (рис. 2.17) і приведемо систему зовнішніх сил на ділянці II до початкового перерізу ділянки III (точка C).

Розрахункову схему ділянки III показано на рис. 2.18.

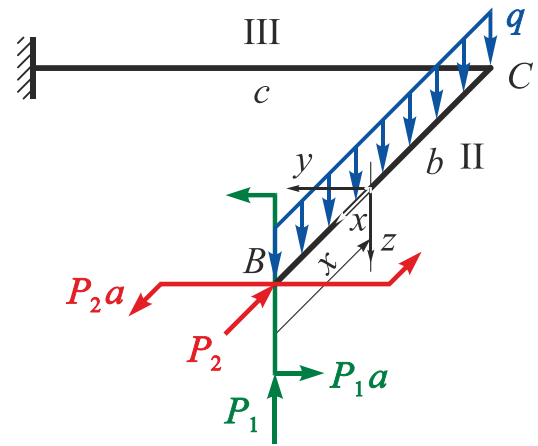


Рис. 2.16

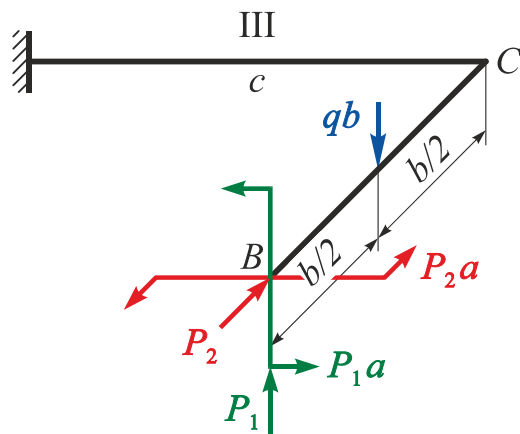


Рис. 2.17

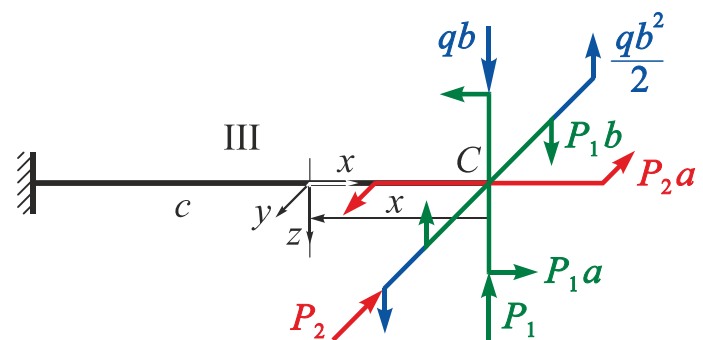


Рис. 2.18

$$N_x^{III} = 0;$$

$$Q_z^{III} = -P_1 + qb = -20 + 15 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = P_2 = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{III} = -P_1 b + \frac{qb^2}{2} = -20 \cdot 2 + \frac{15 \cdot 2^2}{2} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = P_1 a + P_1 x - qbx = 20 \cdot 2 + 20x - 15 \cdot 2x \Big|_{x=0} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x=c=3\text{ м}} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{III} = P_2 x + P_2 a = 10 \cdot x + 10 \cdot 2 \Big|_{x=0} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x=c=3\text{ м}} = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Побудуємо епюри (рис. 2.19).

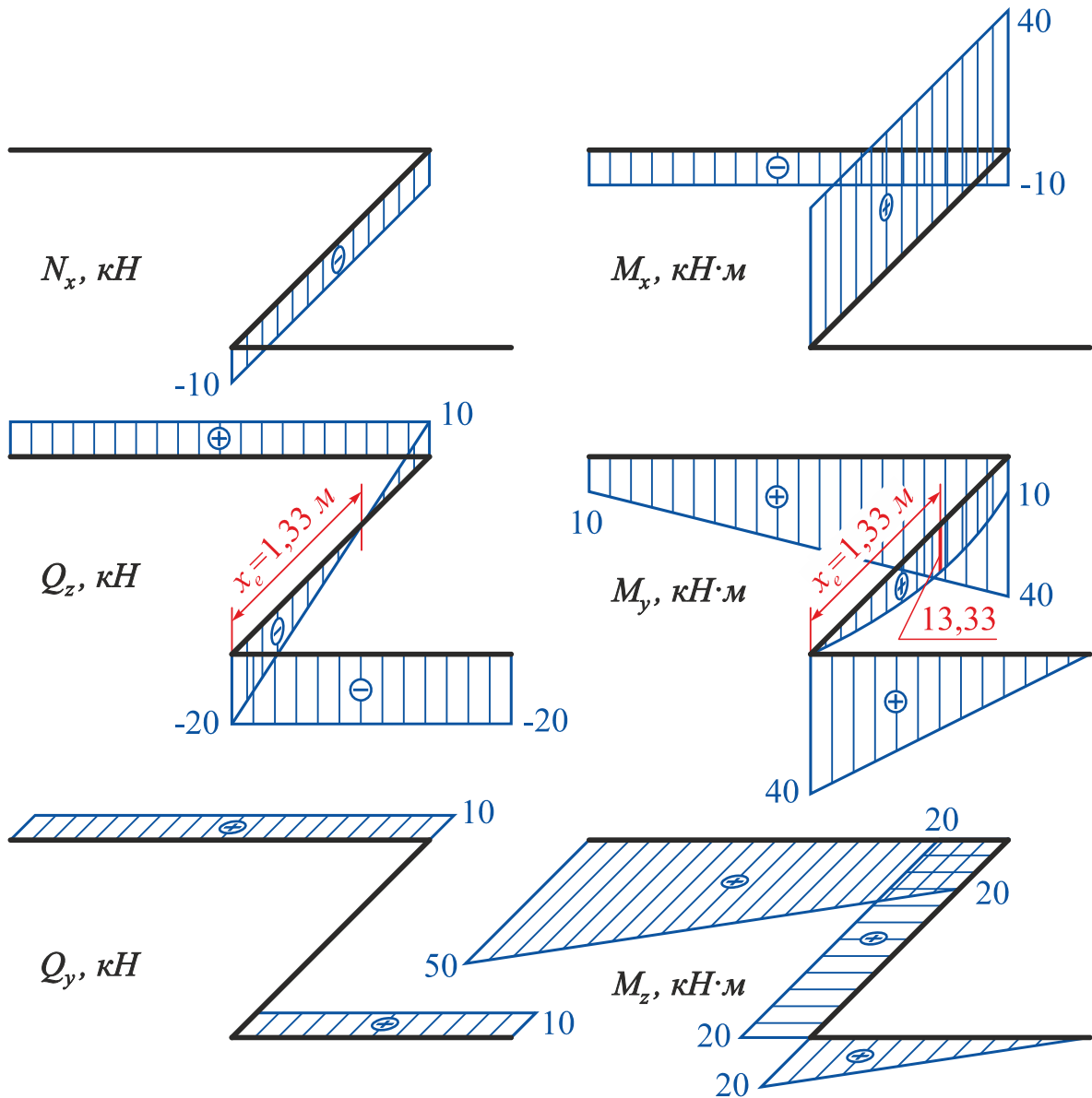


Рис. 2.19

#### 4. Перевіримо правильність побудови епюр.

Для цього виділимо нескінченно малі елементи ламаного бруса в місцях зчленування його частин (вузли  $B$  і  $C$ ) і розглянемо їх рівновагу під дією внутрішніх зусиль і зовнішніх сил, прикладених у межах цих вузлів (рис. 2.20).

На рис. 2.20 всі внутрішні зусилля показано з урахуванням їх дійсних напрямків.

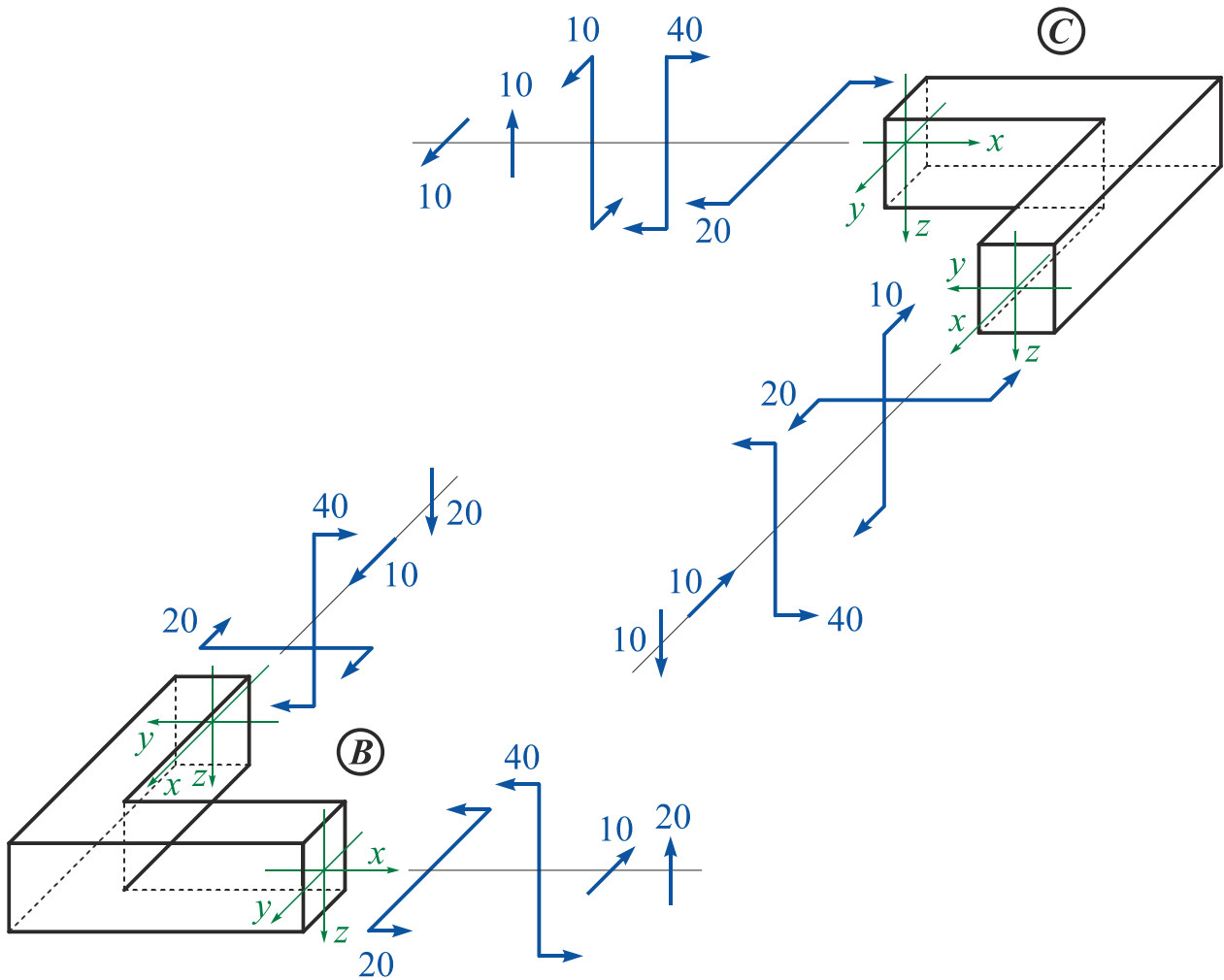


Рис. 2.20

Рівняння рівноваги вузла  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 10 - 10 = 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 40 - 40 = 0; & \sum M_z &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла  $C$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 10 - 10 = 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 10 - 10 = 0; & \sum M_y &= 40 - 40 = 0; & \sum M_z &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

## 2.2.2. Другий метод побудови епюр

При використанні другого методу побудови епюр виключається операція приведення системи зовнішніх зусиль, що діють на розглядуваній ділянці, до початкового перерізу наступної ділянки, що дозволяє зробити розв'язання більш компактним.

### Приклад 2.3

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданого ламаного бруса (рис. 2.21).

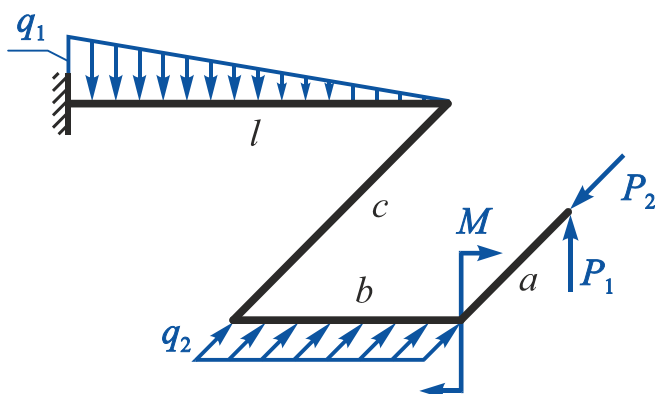


Рис. 2.21

Дано:  $P_1 = 5 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 30 \text{ кН}$ ;  
 $q_1 = 15 \text{ кН/м}$ ;  $q_2 = 20 \text{ кН/м}$ ;  
 $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $a = 3 \text{ м}$ ;  
 $b = 2 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  $l = 3 \text{ м}$ .

Необхідно побудувати епюри  
 $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

### Розв'язання

1. Накреслимо ламаний брус в масштабі і розіб'ємо його на ділянки. У довільному перерізі кожної ділянки на відстані  $x$  від його початку розташуємо систему координат  $xuz$  так, щоб вісь  $x$  збіглася з поздовжньою віссю бруса, вісь  $z$  була напрямлена вниз, а горизонтальна вісь  $y$  складала б з двома першими правий ортогональний базис (рис. 2.22).

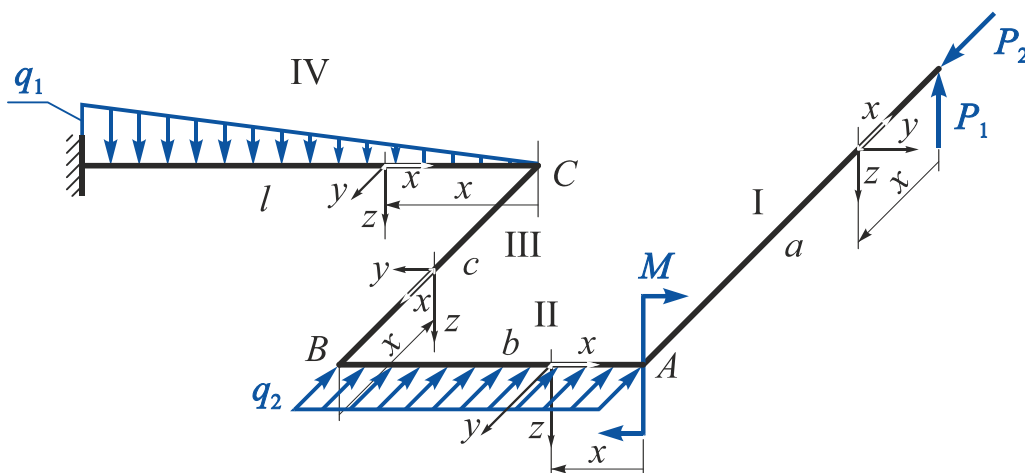


Рис. 2.22

### Зауваження

1. Щоб отримати на всіх ділянках формально впорядковану систему знаків для внутрішніх силових факторів, бажано систему координат на ділянці II знайти простим переміщенням, тобто поворотом відносно осі  $z$  на  $90^\circ$  системи координат на ділянці I і т.д.

2. Якщо розігнути ламаний брус за найкоротшою кутовою відстанню в одну лінію, напрямки осей  $x$ ,  $y$  і  $z$  на всіх ділянках мають збігтися.

2. Використавши метод перерізів, запишемо рівняння внутрішніх силових факторів на кожній ділянці.

Ділянка I ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 3 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = -P_2 = -30 \text{ кН}; \quad Q_z^I = -P_1 = -5 \text{ кН}; \quad Q_y^I = 0;$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = P_1 x = 5 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=3 \text{ м}} = 15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^I = 0.$$

Ділянка II ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{II} = 0;$$

$$Q_z^{II} = -P_1 = -5 \text{ кН};$$

$$Q_y^{II} = q_2 x - P_2 = 20 \cdot x - 30 \quad \Big|_{x=0} = -30 \text{ кН} \quad \Big|_{x=b=2 \text{ м}} = 10 \text{ кН}.$$

Оскільки в межах ділянки II  $Q_y$  змінює знак, то необхідно визначити  $x_e$ , при якому  $Q_y^{II} = 0$ :

$$q_2 x_e - P_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{P_2}{q_2} = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ м};$$

$$M_x^{II} = P_1 a = 5 \cdot 3 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = P_1 x - M = 5 \cdot x - 20 = \quad \Big|_{x=0} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=b=2 \text{ м}} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{II} = \frac{q_2 x^2}{2} - P_2 x = \frac{20x^2}{2} - 30 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=2 \text{ м}} =$$

$$= -20 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=x_e=1,5 \text{ м}} = -22,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$



Ділянка III ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 2$  м).

Побудуємо окрему розрахункову схему, замінивши розподілене навантаження, що діє в межах другої ділянки, рівнодійною (рис. 2.23).

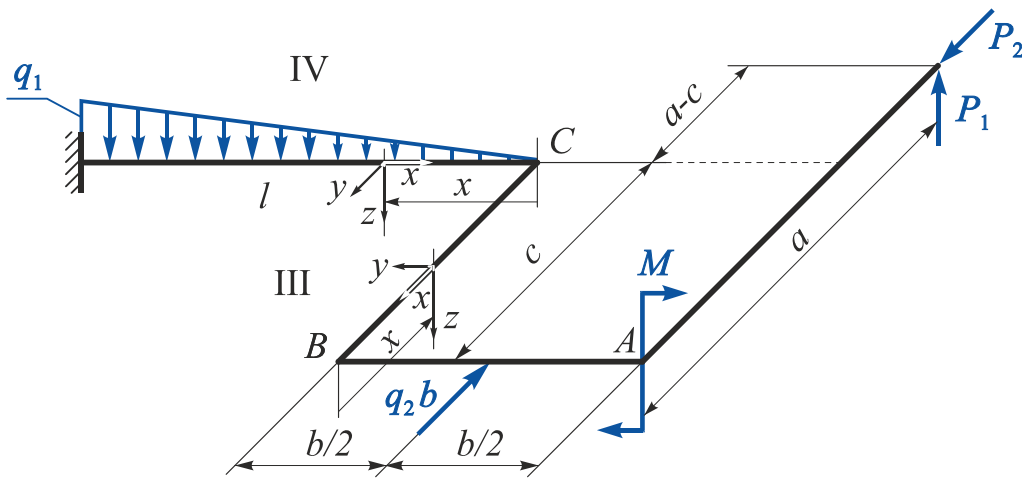


Рис. 2.23

$$N_x^{III} = P_2 - q_2 b = 30 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{III} = -P_1 = -5 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = 0;$$

$$M_x^{III} = -M + P_1 b = -20 + 5 \cdot 2 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = P_1(x - a) = 5(x - 3) \quad \Big|_{x=0} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=c=2\text{ м}} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{III} = q_2 b \frac{b}{2} - P_2 b = 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 30 \cdot 2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка IV ( $0 \leq x \leq l$ ,  $l = 3$  м).

$$N_x^{IV} = 0;$$

$$Q_z^{IV} = \frac{q_1 x^2}{2l} - P_1 = \frac{15x^2}{2 \cdot 3} - 5 \quad \Big|_{x=0} = -5 \text{ кН} \quad \Big|_{x=l=3\text{ м}} = 17,5 \text{ кН}.$$

Оскільки в межах ділянки IV  $Q_y$  змінює знак, то необхідно визначити  $x_e$ , при якому  $Q_z^{IV} = 0$ :

$$\frac{q_1 x_e^2}{2l} - P_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \sqrt{\frac{2P_1 l}{q_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{15}} = 1,414 \text{ м};$$

$$Q_y^{IV} = q_2 b - P_2 = 20 \cdot 2 - 30 = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{IV} = P_1(a - c) = 5 \cdot (3 - 2) = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV} = P_1(b+x) - \frac{q_1 x^3}{6l} - M = 5 \cdot (2+x) - \frac{15 \cdot x^3}{6 \cdot 3} - 20 =$$

$$= \left|_{x=0} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \left|_{x=l=3 \text{ м}} = -17,5 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \left|_{x=x_e=1,414 \text{ м}} = -9,998 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{IV} = q_2 b \left( \frac{b}{2} + x \right) - P_2(b+x) = 20 \cdot 2 \cdot (1+x) - 30 \cdot (2+x) =$$

$$= \left|_{x=0} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \left|_{x=l=3 \text{ м}} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Побудуємо епюри (рис. 2.24).

### Зауваження

1. При побудові епюр внутрішніх силових факторів для ламаного бруса необхідно кожен його елемент розглядати як стрижень, що працює на розтягнення-стиснення, як вал, який працює на кручення, і як балку, що працює в умовах поперечного згину в двох площинах. При цьому зберігаються всі правила знаків, прийняті при визначенні  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , і всі правила побудови епюр:

- а) епюри  $N_x$  і  $M_x$  можна будувати в будь-якій площині;
- б) епюри  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  необхідно будувати тільки **в площинах їх дії**;
- в) епюри  $M_y$  і  $M_z$  будують з боку **розтягнутих волокон** бруса.

2. На прямих кутах плоского ламаного бруса відбувається взаємний «перехід»  $M_x$  у  $M_y$ , а також  $N_x$  у  $Q_y$  і навпаки.

3. Для **паралельних ділянок** плоско-просторового ламаного бруса за відсутності в вузлових точках цих ділянок зосереджених моментів, що діють перпендикулярно до площини ламаного бруса, правильними є такі правила:

- а) при **однакових напрямках обходу** (див. рис. 2.22, ділянки II і IV) значення  $M_y$  в кінці однієї ділянки (ділянка II) має дорівнювати значенню  $M_y$  на початку наступної ділянки (ділянка IV) (див. рис. 2.24);
- б) при **протилежних (зустрічних) напрямках обходу** (див. рис. 2.22, ділянки I і III) значення  $M_y$  в кінці однієї ділянки (ділянка I) має дорівнювати за модулем і бути протилежним за знаком значенням  $M_y$  на початку наступної ділянки (ділянка III) (див. рис. 2.24).

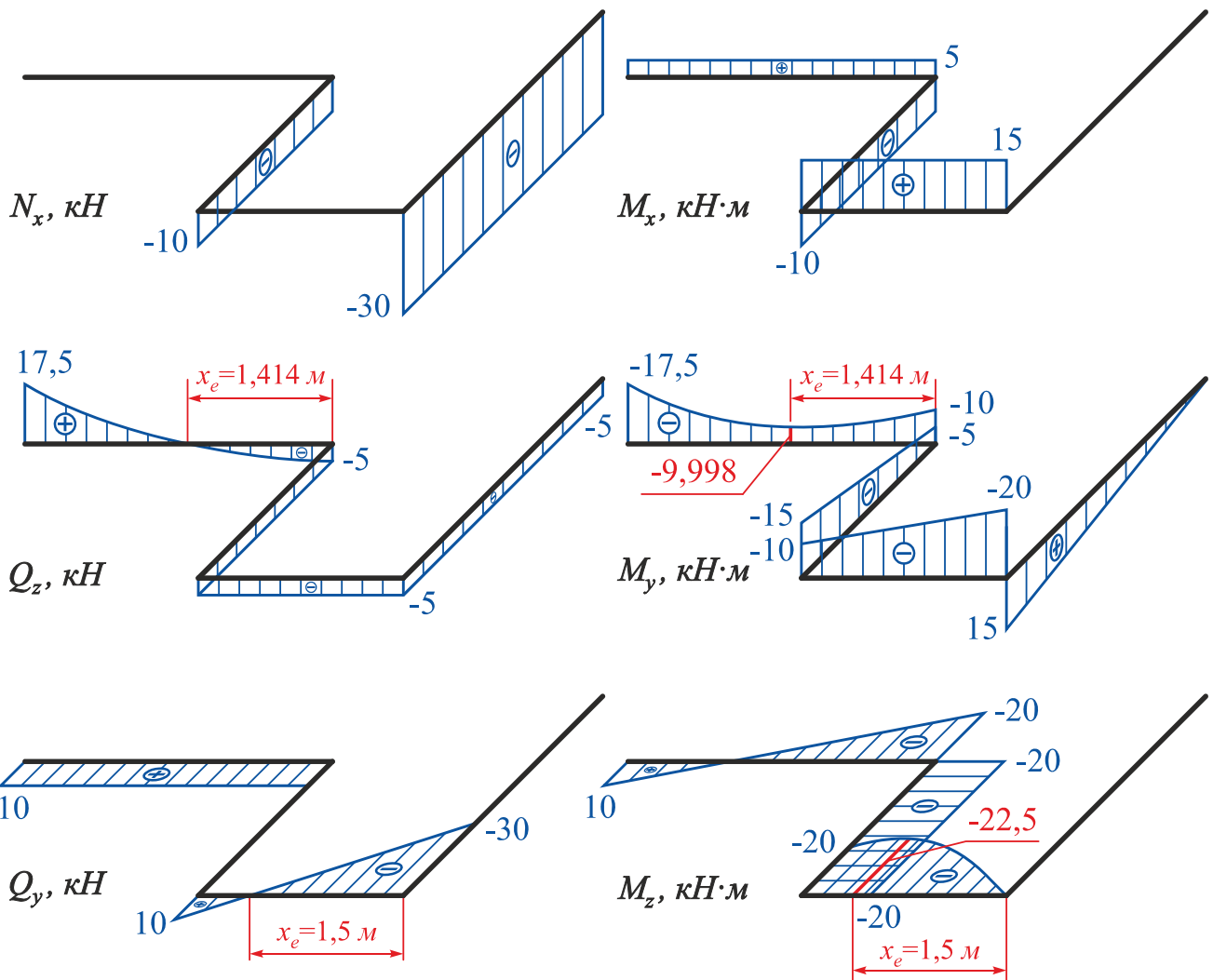


Рис. 2.24

#### 4. Перевіримо правильність побудови епюр.

Для цього виділимо нескінченно малі елементи ламаного бруса в місцях зчленування його частин (вузли  $A$ ,  $B$  і  $C$ ) і розглянемо їх рівновагу під дією внутрішніх зусиль і зовнішніх сил, прикладених у межах цих вузлів (рис. 2.25) (всі внутрішні зусилля показано з урахуванням їх дійсних напрямків).

Рівняння рівноваги вузла  $A$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 30 - 30 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 40 - 40 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла C:

$$\sum P_x = 10 - 10 = 0; \quad \sum P_y = 0;$$

$$\sum P_z = 15 - 10 - 5 = 0;$$

$$\sum M_x = 30 - 30 = 0; \quad \sum M_y = 30 + 10 - 40 = 0; \quad \sum M_z = 30 - 30 = 0.$$

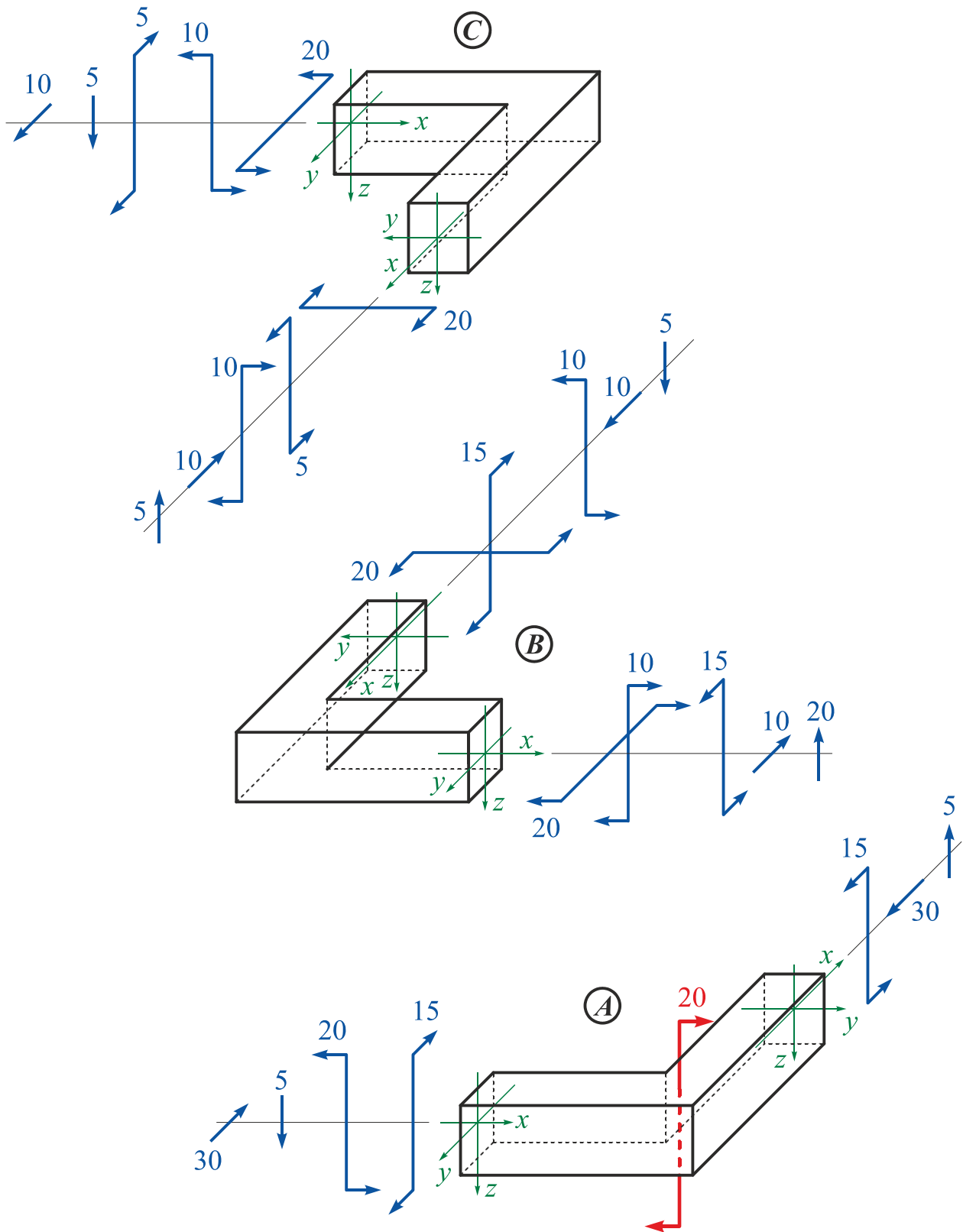
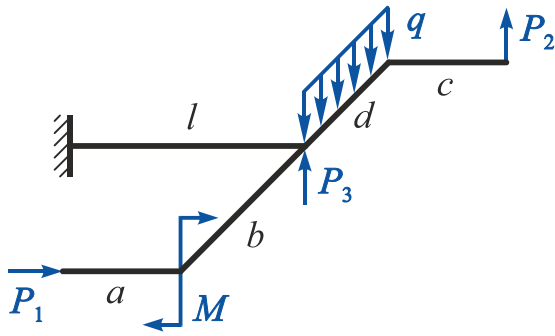


Рис. 2.25

### Приклад 2.4

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданого ламаного бруса (рис. 2.26).



Дано:  $P_1 = 10 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 20 \text{ кН}$ ;  $P_3 = 5 \text{ кН}$ ;  
 $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $q = 5 \text{ кН/м}$ ;  
 $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 3 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  
 $d = 2 \text{ м}$ ;  $l = 4 \text{ м}$ .

Необхідно побудувати епюри

$N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

Рис. 2.26

### Розв'язання

1. Накреслимо ламаний брус в масштабі і розіб'ємо його на ділянки. У довільному перерізі кожної ділянки на відстані  $x$  від його початку розташуємо систему координат  $xuz$  так, щоб вісь  $x$  збіглася з поздовжньою віссю бруса, вісь  $z$  була напрямлена вниз, а горизонтальна вісь  $y$  складала б з двома першими правий ортогональний базис (рис. 2.27).

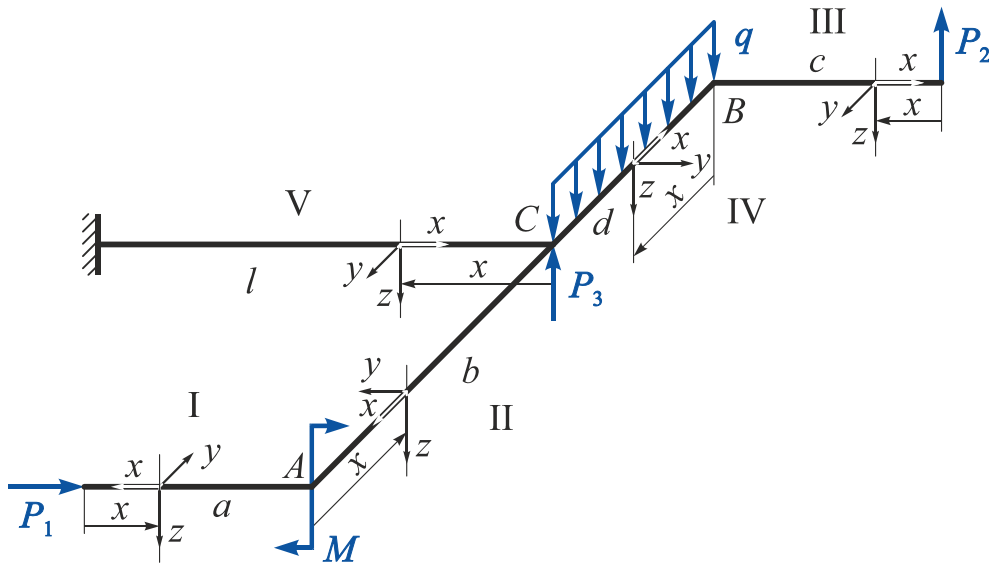


Рис. 2.27

2. Використавши метод перерізів, запишемо рівняння внутрішніх силових факторів на кожній ділянці.

Ділянка I ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = -P_1 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^I = 0;$$

$$Q_y^I = 0;$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = 0;$$

$$M_z^I = 0.$$

Ділянка II ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 3 \text{ м}$ ).

$$N_x^{II} = 0; \quad Q_z^{II} = 0; \quad Q_y^{II} = -P_1 = -10 \text{ кН};$$

$$M_x^{II} = -M = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y^{II} = 0;$$

$$M_z^{II} = P_1 x = 10 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=3 \text{ м}} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка III ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{III} = 0; \quad Q_z^{III} = -P_2 = -20 \text{ кН}; \quad Q_y^{III} = 0;$$

$$M_x^{III} = 0; \quad M_y^{III} = P_2 x = 20x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=c=2 \text{ м}} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_z^{III} = 0.$$

Ділянка IV ( $0 \leq x \leq d$ ,  $d = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{IV} = 0;$$

$$Q_z^{IV} = qx - P_2 = 5x - 20 \quad \Big|_{x=0} = -20 \text{ кН} \quad \Big|_{x=d=2 \text{ м}} = -10 \text{ кН};$$

$$Q_y^{IV} = 0; \quad M_x^{IV} = -P_2 c = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV} = P_2 x - \frac{qx^2}{2} = 20x - \frac{5x^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=d=2 \text{ м}} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{IV} = 0.$$

Ділянка V ( $0 \leq x \leq l$ ,  $l = 4 \text{ м}$ ).

Побудуємо окрему розрахункову схему, замінивши розподілене навантаження, що діє в межах четвертої ділянки, рівнодійною (рис. 2.28).

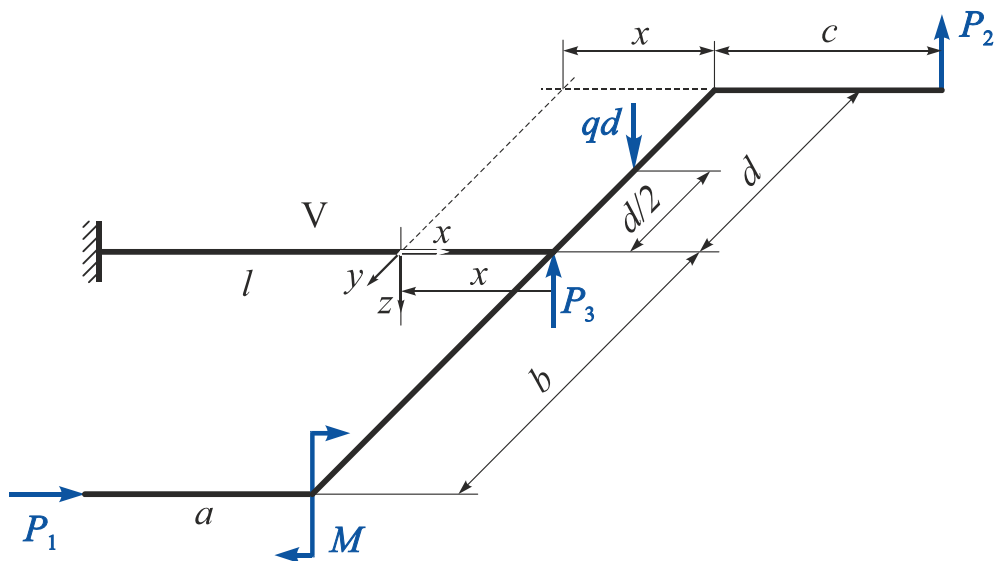


Рис. 2.28

$$N_x^V = P_1 = 10 \text{ кН}; \quad Q_z^V = qd - P_2 - P_3 = 5 \cdot 2 - 20 - 5 = -15 \text{ кН};$$

$$Q_y^V = 0; \quad M_x^V = -qd \frac{d}{2} + P_2 d = -5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 20 \cdot 2 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^V = P_3 x + P_1(c + x) - qdx - M = 5x + 20 \cdot (2 + x) - 5 \cdot 2 \cdot x - 30 =$$

$$= \Big|_{x=0} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=l=4\text{ м}} = 70 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^V = P_1 b = 10 \cdot 3 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Побудуємо епюри (рис. 2.29).

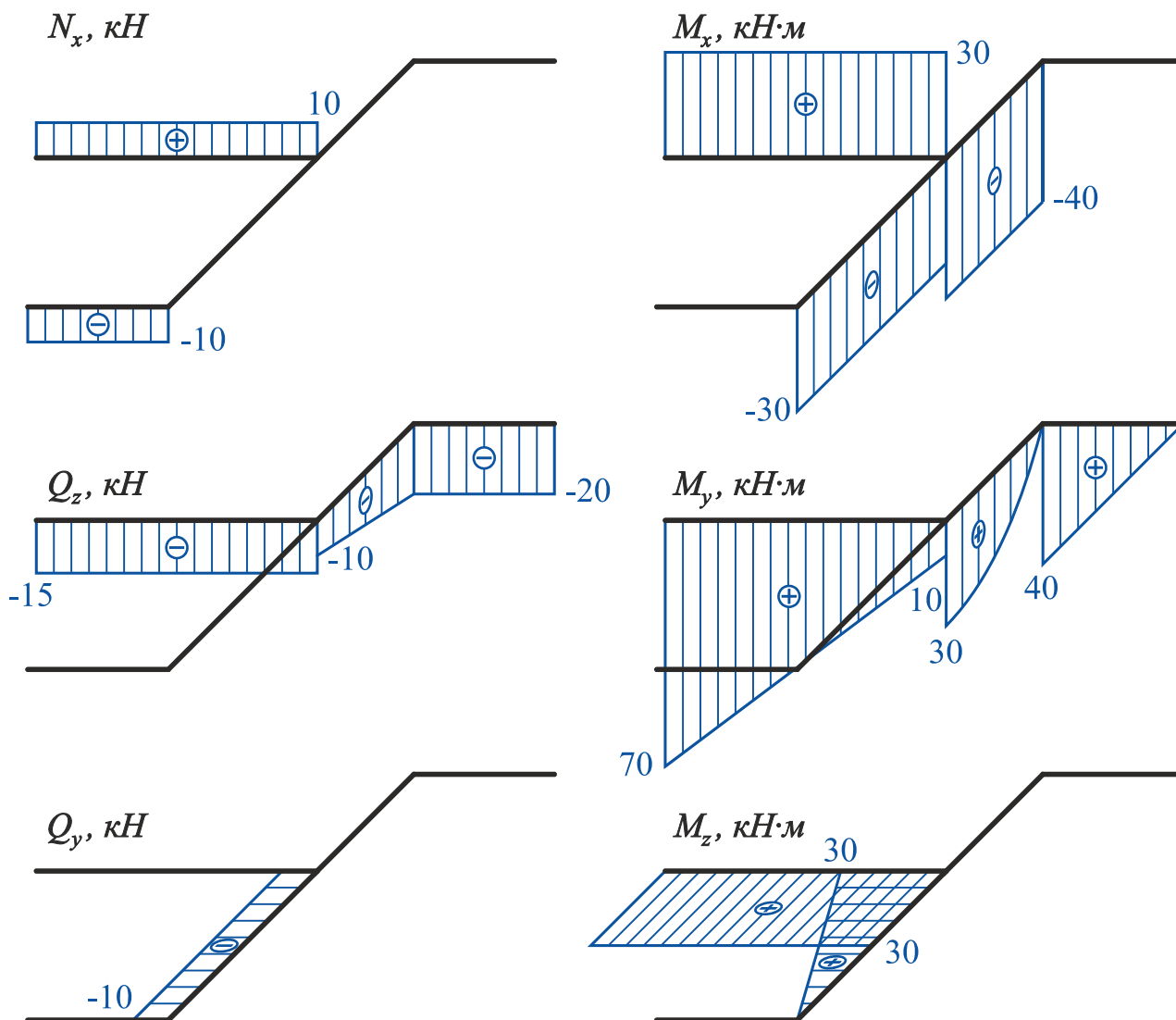


Рис. 2.29

4. Перевіримо правильність побудови епюр.

Для цього виділимо нескінченно малі елементи ламаного бруса в місцях зчленування його частин (вузли  $A$ ,  $B$  і  $C$ ) і розглянемо їх рівновагу під дією внутрішніх зусиль і зовнішніх сил, прикладених у межах цих вузлів (рис. 2.30).

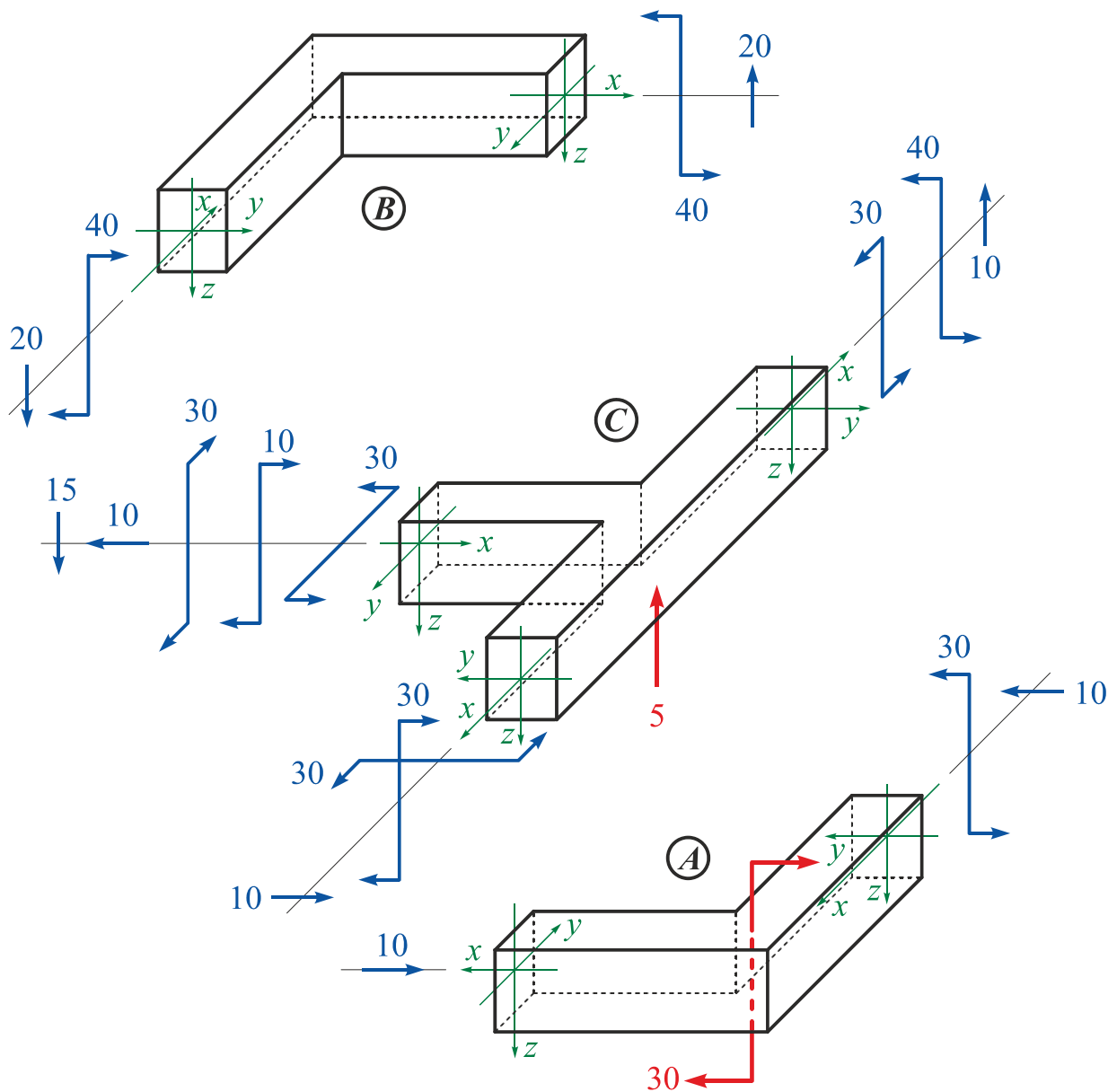


Рис. 2.30

Рівняння рівноваги вузла A:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 30 - 30 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла B:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 40 - 40 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла C:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 15 - 10 - 5 = 0; \\ \sum M_x &= 30 - 30 = 0; & \sum M_y &= 30 + 10 - 40 = 0; & \sum M_z &= 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$



## 2.3. Побудова епюр внутрішніх силових факторів для просторового ламаного бруса

**Просторовим** називають ламаний брус, усі елементи якого жорстко з'єднані у вузлах і їх поздовжні осі не лежать в одній площині.

### Приклад 2.5

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданого просторового ламаного бруса (рис. 2.31).

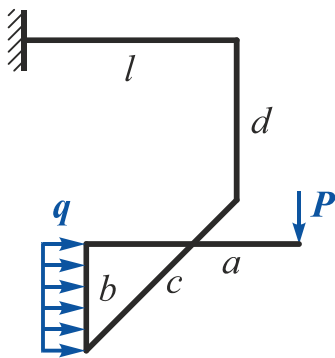


Рис. 2.31

**Дано:**  $P = 10 \text{ кН}$ ;  $q = 15 \text{ кН/м}$ ;  
 $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 1 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  
 $d = 1,5 \text{ м}$ ;  $l = 2 \text{ м}$ .

**Необхідно** побудувати епюри

$N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

### Розв'язання

1. Накреслимо ламаний брус в масштабі і розіб'ємо його на ділянки.

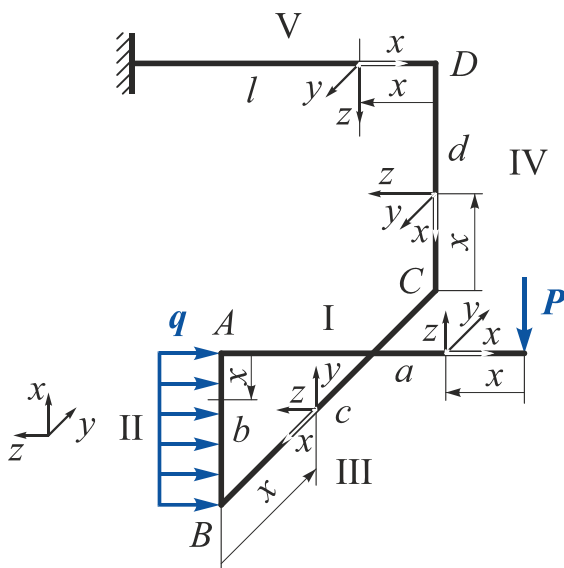


Рис. 2.32

У довільному перерізі ділянки V на відстані  $x$  від його початку розташуємо систему координат  $xuz$  так, щоб вісь  $x$  збіглася з поздовжньою віссю бруса, вісь  $z$  була напрямлена вниз, а горизонтальна вісь  $u$  складала б з двома першими правий ортогональний базис (рис. 2.32). На ділянці IV систему координат отримаємо поворотом відносно осі  $u$  на  $90^\circ$ , на ділянці III – поворотом відносно осі  $z$  на  $90^\circ$ , на ділянці II – поворотом відносно осі  $z$  на  $90^\circ$ , на ділянці I – поворотом відносно осі  $u$  на  $90^\circ$ .

2. Використавши метод перерізів, запишемо рівняння внутрішніх силових факторів на кожній ділянці.

**Ділянка I** (рис. 2.33) ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = 0;$$

$$Q_z^I = -P = -10 \text{ кН};$$

$$Q_y^I = 0;$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = Px = 10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2\text{ м}} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^I = 0.$$

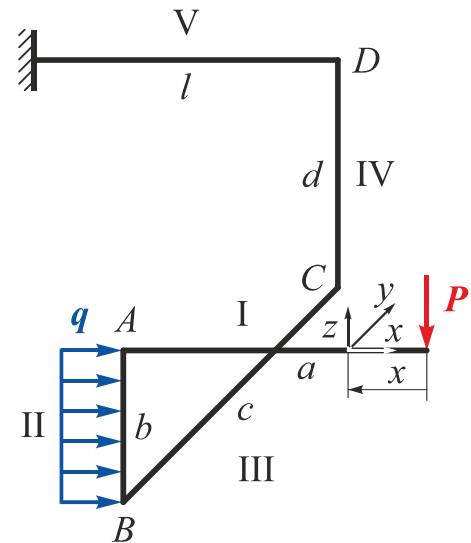


Рис. 2.33

**Ділянка II** ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 1 \text{ м}$ ).

Приведемо зусилля  $P$  до початкового перерізу ділянки II (точка A) (рис. 2.34).

$$N_x^{II} = -P = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = -qx = -15x \quad \Big|_{x=0} =$$

$$= 0 \quad \Big|_{x=b=1\text{ м}} = -15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{II} = 0;$$

$$M_x^{II} = 0;$$

$$M_y^{II} = Pa + \frac{qx^2}{2} = 10 \cdot 2 + \frac{15x^2}{2} \Big|_{x=0} =$$

$$= 20 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=b=1\text{ м}} = 27,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{II} = 0.$$

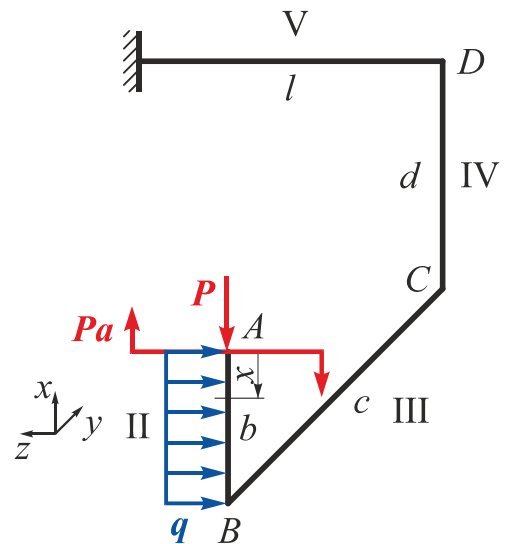


Рис. 2.34

**Ділянка III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 2 \text{ м}$ ).

Замінімо розподілене навантаження, що діє в межах другої ділянки, рівнодієюю, і приведемо систему зовнішніх сил на ділянці II до початкового перерізу ділянки III (точка B).

Розрахункову схему ділянки III показано на рис. 2.35.

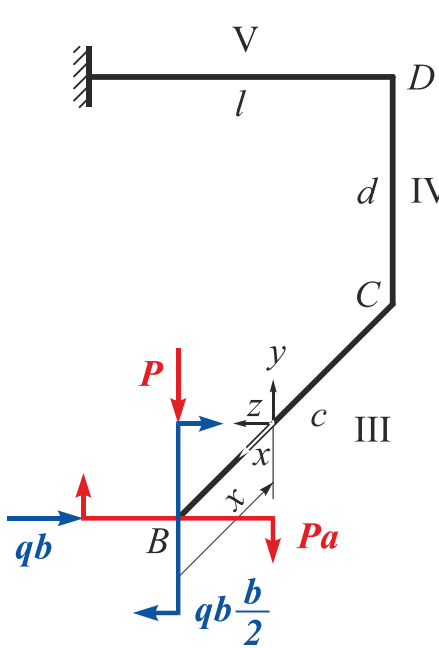


Рис. 2.35

$$N_x^{III} = 0;$$

$$Q_z^{III} = -qb = -15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = P = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{III} = -Pa - qb \frac{b}{2} = -10 \cdot 2 - 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -27,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = qbx = 15 \cdot 1 \cdot x \Big|_{x=0} = 0 \Big|_{x=c=2 \text{ м}} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{III} = Px = 10x \Big|_{x=0} = 0 \Big|_{x=c=2 \text{ м}} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка IV ( $0 \leq x \leq d$ ,  $d = 1,5 \text{ м}$ ).

Приведемо систему зусиль, що діють на ділянці III, до початкового перерізу ділянки IV (точка C) (рис. 2.36).

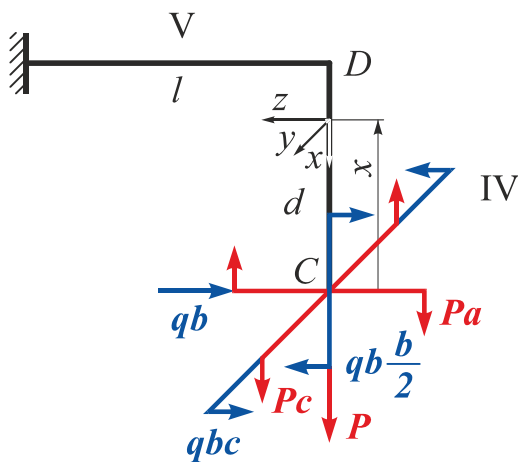


Рис. 2.36

$$N_x^{IV} = P = 10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{IV} = -qb = -15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{IV} = 0;$$

$$M_x^{IV} = -qbc = -15 \cdot 1 \cdot 2 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV} = -Pa - qb \frac{b}{2} + qbx = -10 \cdot 2 - 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 15 \cdot 1 \cdot x \Big|_{x=0} = -27,5 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x=d=1,5 \text{ м}} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{IV} = Pc = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка V ( $0 \leq x \leq l$ ,  $l = 2 \text{ м}$ ).

Приведемо систему зусиль, що діють на ділянці IV, до початкового перерізу ділянки V (точка D) (рис. 2.37):

$$N_x^V = qb = 15 \text{ кН};$$

$$Q_z^V = P = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^V = 0;$$

$$M_x^V = Pc = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^V = qbd - qb \frac{b}{2} - Pa - Px =$$

$$= 15 \cdot 1 \cdot 1,5 - 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 2 - 10x =$$

$$= \left|_{x=0} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м} \right|_{x=l=4 \text{ м}} = -25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^V = qbc = 15 \cdot 1 \cdot 2 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

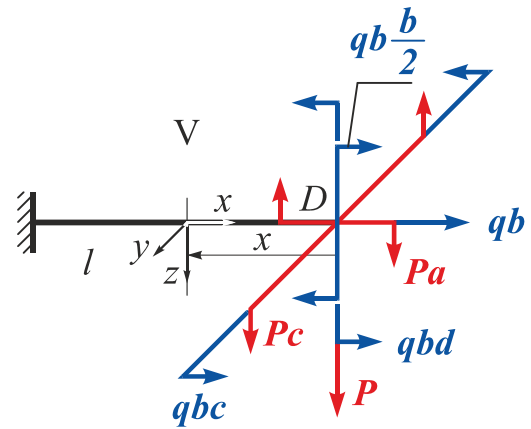


Рис. 2.37

3. Побудуємо епюри (рис. 2.38).

### Зауваження

- При побудові епюр внутрішніх силових факторів для ламаного бруса необхідно враховувати таке:
  - епюри  $N_x$  і  $M_x$  можна будувати в будь-якій площині;
  - епюри  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  необхідно будувати тільки **в площинах їх дії**;
  - епюри  $M_y$  і  $M_z$  будують з боку **розтягнутих волокон** бруса.
- Якщо для елементів ламаного бруса, що лежать в паралельних площинах, використовувати однаковий напрямок осей  $x, y, z$ , то на всіх цих ділянках отримаємо формально впорядковану систему знаків для внутрішніх силових факторів  $Q_z$  і  $M_y$ . Наприклад, на ділянці I – таку ж, як і на ділянці V, на ділянці II – таку ж, як на ділянці IV (див. рис. 2.32), тоді

$$Q_z^I = P = 10 \text{ кН};$$

$$M_y^I = -Px = \left|_{x=0} = 0 \right|_{x=a=2 \text{ м}} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_z^{II} = qx = \left|_{x=0} = 0 \right|_{x=b=1 \text{ м}} = 15 \text{ кН};$$

$$M_y^{II} = -Pa - \frac{qx^2}{2} = \left|_{x=0} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м} \right|_{x=b=1 \text{ м}} = -27,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

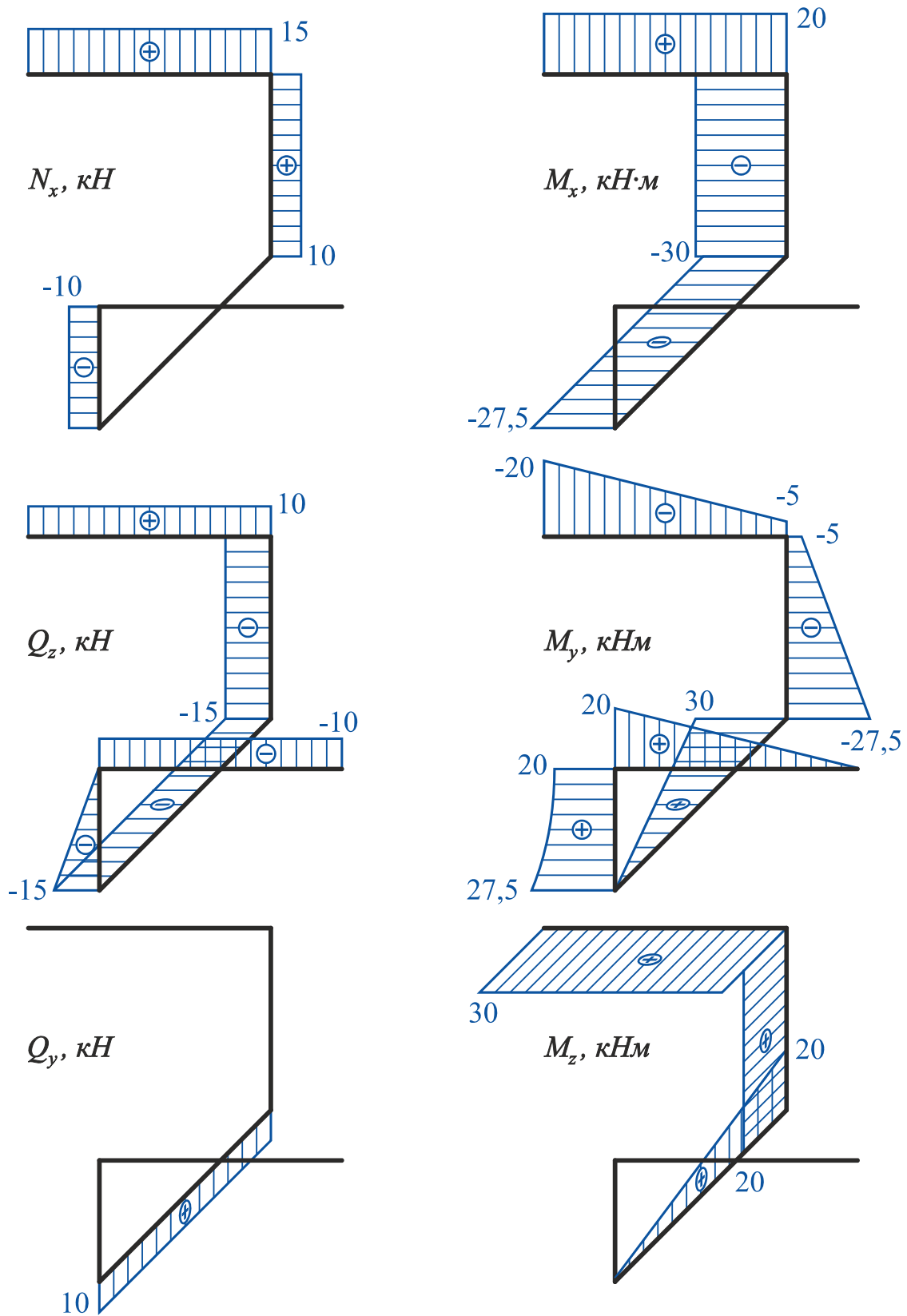


Рис. 2.38

4. Перевіримо правильність побудови епюр.

Для цього розглянемо рівновагу вузлів  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  під дією внутрішніх зусиль і зовнішніх сил, прикладених у межах цих вузлів (рис. 2.39).

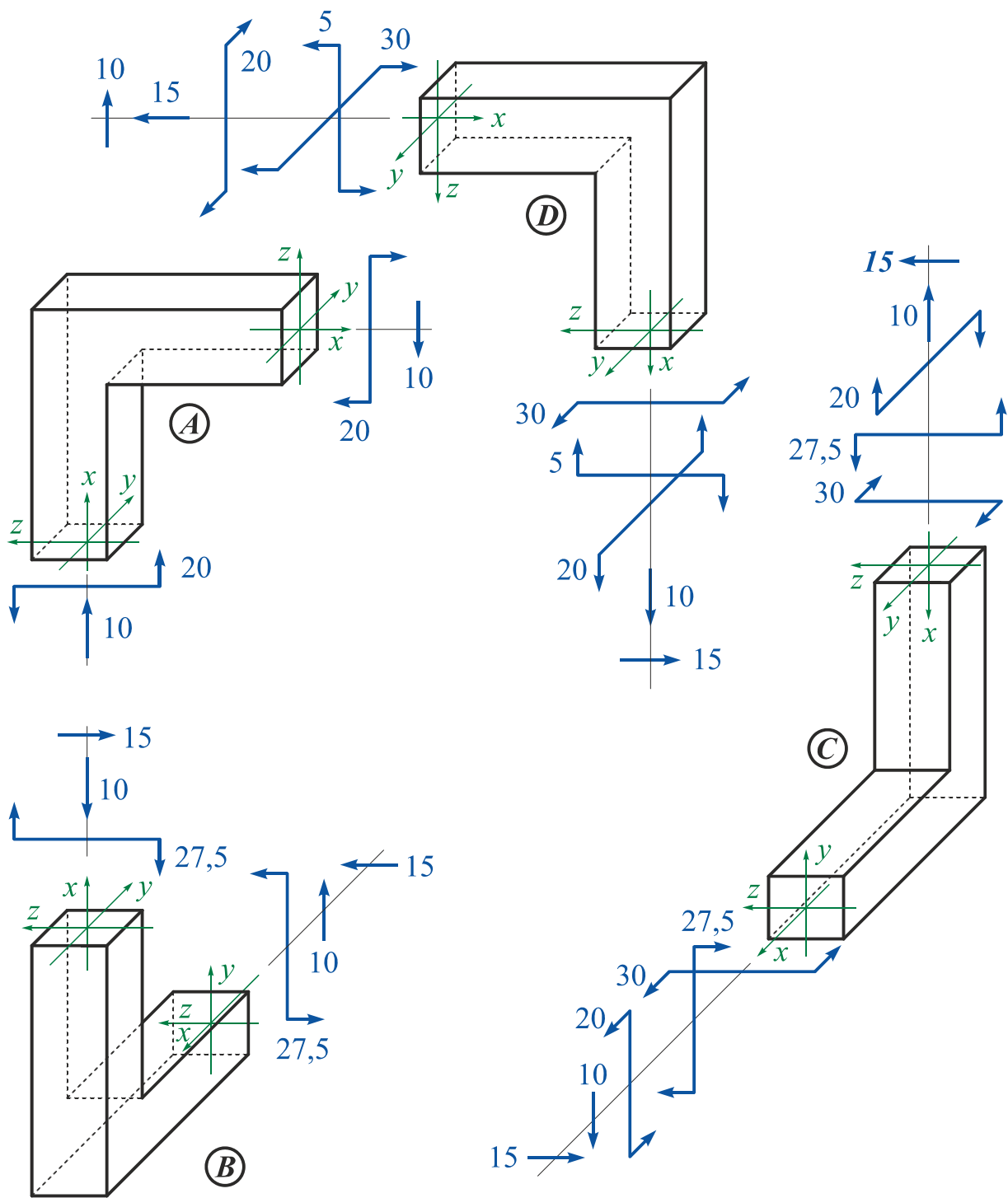


Рис. 2.39

Рівняння рівноваги вузла A:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 20 - 20 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла B:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 27,5 - 27,5 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла C:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 15 - 15 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 20 - 20 = 0; & \sum M_y &= 27,5 - 27,5 = 0; & \sum M_z &= 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла D:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 15 - 15 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 20 - 20 = 0; & \sum M_y &= 5 - 5 = 0; & \sum M_z &= 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$

### Приклад 2.6

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданого ламаного бруса (рис. 2.40).

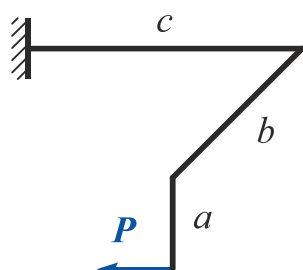


Рис. 2.40

*Дано:*  $P = 10 \text{ кН}; a = 1 \text{ м}; b = 2 \text{ м}; l = 3 \text{ м}.$

*Необхідно* побудувати епюри

$$N_x, Q_z, Q_y, M_x, M_y, M_z.$$

### Розв'язання

1. Накреслимо ламаний брус в масштабі і розіб'ємо його на ділянки.

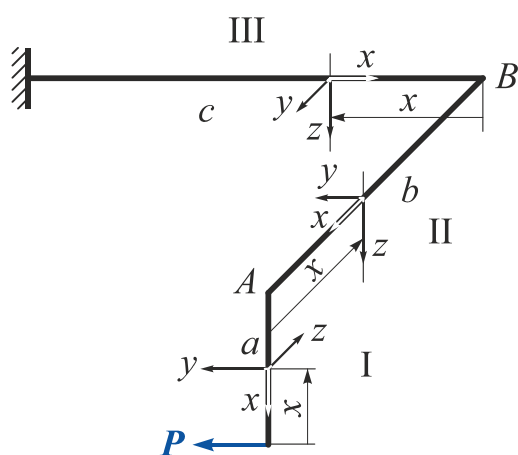


Рис. 2.41

У довільному перерізі ділянки III на відстані  $x$  від його початку розташуємо систему координат  $xuz$  так, щоб вісь  $x$  збіглася з поздовжньою віссю бруса, вісь  $z$  була напрямлена вниз, а горизонтальна вісь  $y$  складала б з двома першими правий ортогональний базис (рис. 2.41). На ділянці II систему координат отримаємо поворотом системи координат ділянки III відносно осі  $z$  на  $90^\circ$ , на ділянці I – поворотом системи координат ділянки II відносно осі  $y$  на  $90^\circ$ .

2. Використавши метод перерізів, запишемо рівняння внутрішніх силових факторів на кожній ділянці.

**Ділянка I** ( $0 \leq x \leq a, a = 1 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = 0; \quad Q_z^I = 0; \quad Q_y^I = P = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^I = 0; \quad M_y^I = 0;$$

$$M_z^I = -Px = -10 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=1 \text{ м}} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка II ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{II} = 0; \quad Q_z^{II} = 0; \quad Q_y^{II} = P = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{II} = -Pa = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y^{II} = 0;$$

$$M_z^{II} = -Px = -10 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=2\text{ м}} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка III ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 3 \text{ м}$ ).

$$N_x^{III} = -P = -10 \text{ кН}; \quad Q_z^{III} = 0; \quad Q_y^{III} = 0;$$

$$M_x^{III} = 0; \quad M_y^{III} = -Pa = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_z^{III} = -Pb = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Побудуємо епюри (рис. 2.42).

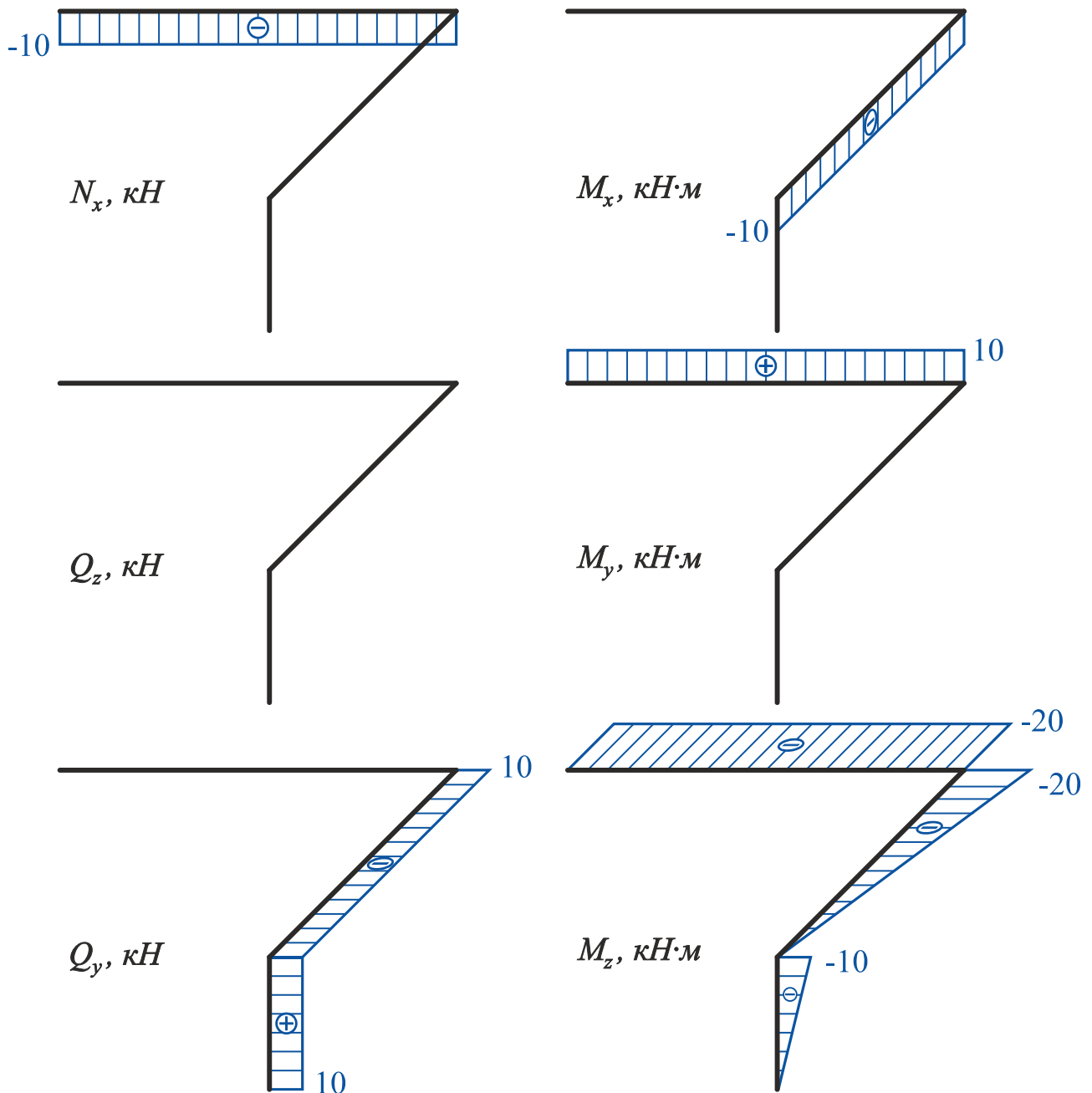


Рис. 2.42



#### 4. Перевіримо правильність побудови епюр.

Для цього виділимо нескінченно малі елементи ламаного бруса в місцях зчленування його частин (вузли  $A$  і  $B$ ) і розглянемо їх рівновагу під дією внутрішніх зусиль і зовнішніх сил, прикладених у межах цих вузлів (рис. 2.43).

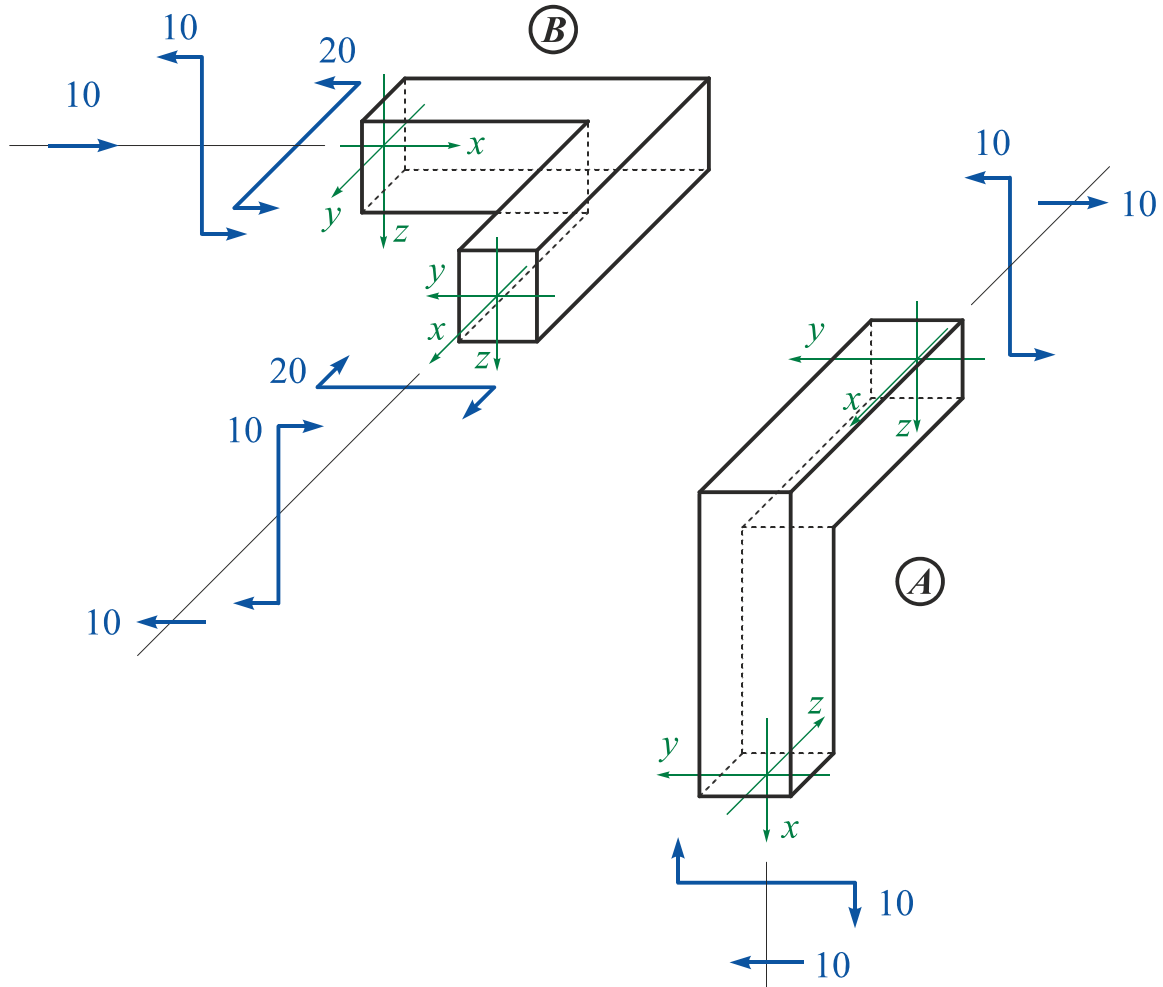


Рис. 2.43

Рівняння рівноваги вузла  $A$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 10 - 10 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 10 - 10 = 0; & \sum M_z &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

## 3. СКЛАДНИЙ ОПІР

### 3.1. Загальні положення

Під складним опором будемо розуміти такий вид деформації в поперечному перерізі бруса, коли в цьому перерізі одночасно діють два або більше внутрішніх силових факторів.

У загальному випадку в поперечному перерізі бруса при довільному навантаженні можуть діяти шість внутрішніх силових факторів (рис. 3.1):

$N_x$  – поздовжня сила;

$Q_y$  і  $Q_z$  – поперечні сили;

$M_x$  – крутний момент;

$M_y$  і  $M_z$  – згинальні моменти.

Реалізація **розтягнення-стиснення** (наявність  $N_x$ ) або **згину** (наявність  $M_y$  або  $M_z$ ) приводить до появи в точках поперечного перерізу бруса **нормальних напружень**  $\sigma_x$ , а реалізація **кручення** (наявність  $M_x$ ) або **зсуву** (наявність  $Q_y$  або  $Q_z$ ) – **дотичних напружень**  $\tau$ .

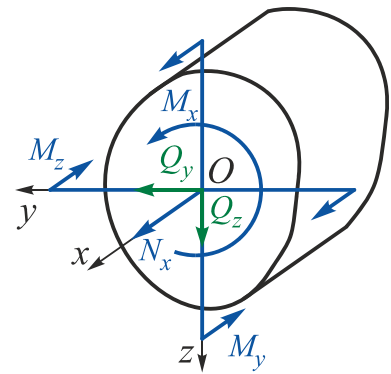


Рис. 3.1

Зазвичай в розрахунках на міцність досить довгих брусів не враховують наявності поперечних сил  $Q_z$  і  $Q_y$ , оскільки спричинені ними дотичні напруження значно менше дотичних напружень, обумовлених наявністю крутного моменту  $M_x$ , і нормальних напружень, обумовлених наявністю згинальних моментів  $M_y$  і  $M_z$ .

Напруження, що діють в поперечних перерізах бруса при складному опорі, будемо визначати, застосовуючи принцип незалежності дії сил (суперпозиції), реалізація якого справедлива, якщо конструкції:

а) **фізично лінійні**, тобто підпорядковуються закону Гука ( $\sigma < \sigma_{\text{пц}}$ );

б) **геометрично лінійні**, коли під дією навантажень всі точки зазнають переміщень, які істотно менше характерних розмірів конструкції (тобто справедлива гіпотеза про відносну жорсткість). Це дозволяє при складанні рівнянь статичної рівноваги для визначення опорних реакцій і внутрішніх силових факторів не враховувати зміни лінійних і кутових розмірів конструкції.

Методика розрахунків на міцність залежить від форми поперечного перерізу бруса (прямокутного, круглого).

## 3.2. Прямокутний поперечний переріз

### 3.2.1. Згин з крученням і розтягненням бруса прямокутного поперечного перерізу

Як показує розрахункова практика, в прямокутному поперечному перерізі

$$\tau_{max}(Q) \ll \tau_{max}(M_{кр}) \quad \text{і} \quad \tau_{max}(Q) \ll \sigma_{max}(M_{зг}),$$

тому дотичними напруженнями, що виникають під дією поперечних сил, в цьому випадку нехтують.

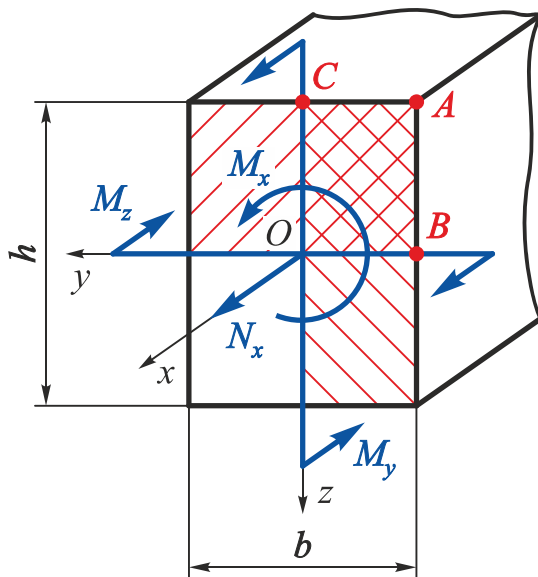


Рис. 3.2

Розглянемо прямокутний поперечний переріз (рис. 3.2) розміром  $h \times b$  (для визначеності візьмемо  $h > b$ ), в якому діють:

- а) поздовжня сила  $N_x$ ;
- б) крутний момент  $M_x$ ;
- в) згинальний момент  $M_y$ , що діє у вертикальній площині;
- г) згинальний момент  $M_z$ , що діє в горизонтальній площині.

Побудуємо епюри напружень під дією кожного внутрішнього силового фактора і, використавши принцип суперпозиції, розглянемо окремо результат їх дії (рис. 3.3 – 3.6):

1. Діє тільки **поздовжня сила**  $N_x$  (див. рис. 3.3):

$$\sigma_x(N_x) = \frac{N_x}{F}, \quad (3.1)$$

де  $F = bh$  – площа поперечного перерізу.

2. Діє тільки **крутний момент**  $M_x$  (див. рис. 3.4):

$$\tau_{max} = \tau_B = \tau_{B'} = \frac{M_x}{W_k}; \quad (3.2)$$

$$\tau'_{max} = \tau_C = \tau_{C'} = \gamma \tau_{max}; \quad (3.3)$$

$$\tau_A = \tau_{A'} = \tau_D = \tau_{D'} = 0, \quad (3.4)$$

де  $W_k = \alpha hb^2$  – момент опору прямокутного поперечного перерізу при крученні;  
 $\alpha, \gamma$  – коефіцієнти, що залежать від співвідношення  $h/b$  (див. додаток).

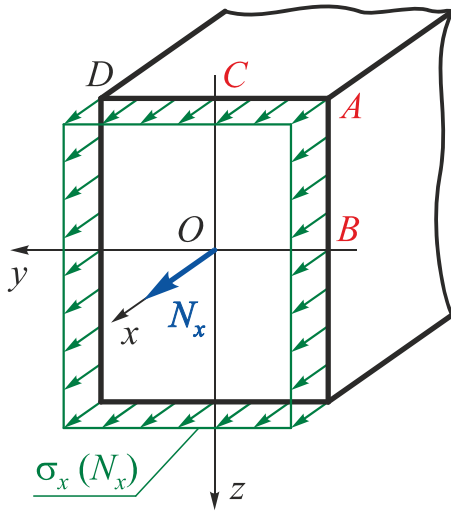


Рис. 3.3

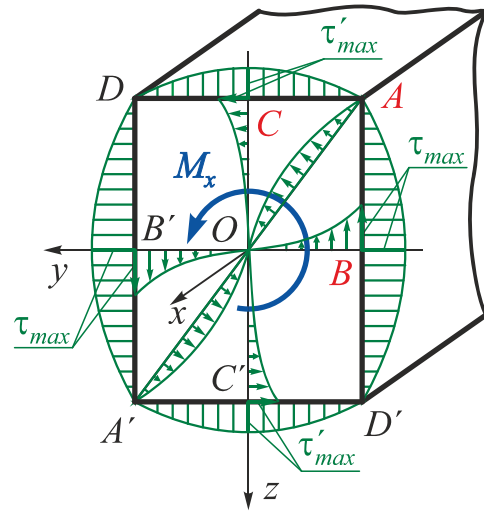


Рис. 3.4

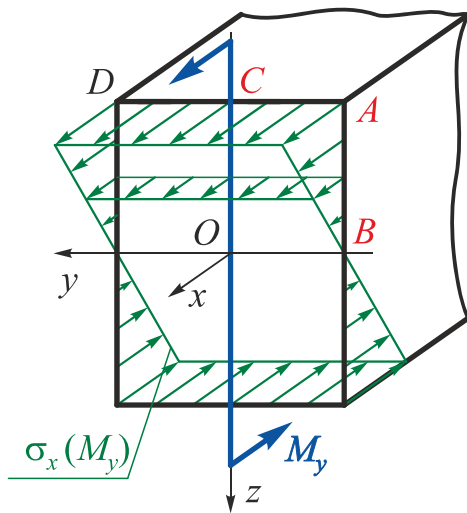


Рис. 3.5

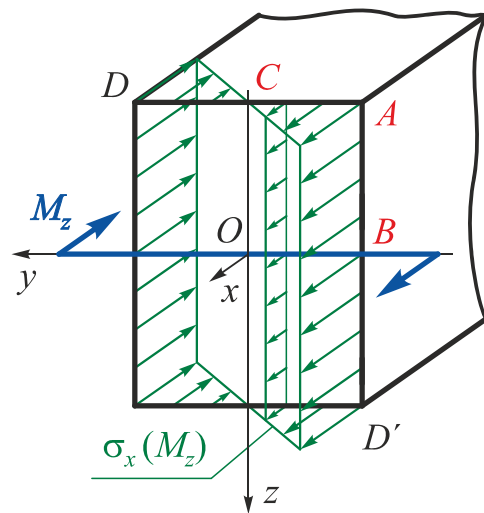


Рис. 3.6

3. Діє тільки згинальний момент  $M_y$  (див. рис. 3.5):

$$\sigma_{x \max}(M_y) = \sigma_{xA}(M_y) = \sigma_{xC}(M_y) = \sigma_{xD}(M_y) = \frac{M_y}{W_y}; \quad (3.5)$$

$$\sigma_{xB}(M_y) = 0,$$

де  $W_y = \frac{bh^2}{6}$  – момент опору відносно осі  $y$  прямокутного поперечного перерізу при згині.

У точках перерізу, симетричних відносно його центру ваги точкам  $A, C, D$ , діють такі ж за величиною, але протилежні за знаком напруження.

4. Діє тільки **згинальний момент**  $M_z$  (див. рис. 3.6):

$$\sigma_{x \max}(M_z) = \sigma_{xA}(M_z) = \sigma_{xB}(M_z) = \sigma_{xD'}(M_z) = \frac{M_z}{W_z};$$

$$\sigma_{xC}(M_z) = 0,$$
(3.6)

де  $W_z = \frac{hb^2}{6}$  – момент опору відносно осі  $z$  прямокутного поперечного перерізу при згині.

У точках перерізу, симетричних відносно його центру ваги точкам  $A, B, D'$ , діють такі ж за величиною, але протилежні за знаком напруження.

З аналізу епюр, показаних на рис. 3.3–3.6, випливає, що однозначно не можна вказати **єдиної** небезпечної точки. Отже, необхідно розглянути всі **потенційно небезпечні точки перерізу**.

**Зауваження** | Ситуацію в точках  $D$  і  $D'$  не розглядають тому, що в цих точках нормальні напруження під дією згинальних моментів  $M_y$  і  $M_z$  мають різні знаки, тобто їх віднімають.

Розглянувши епюри, можна зробити такі висновки:

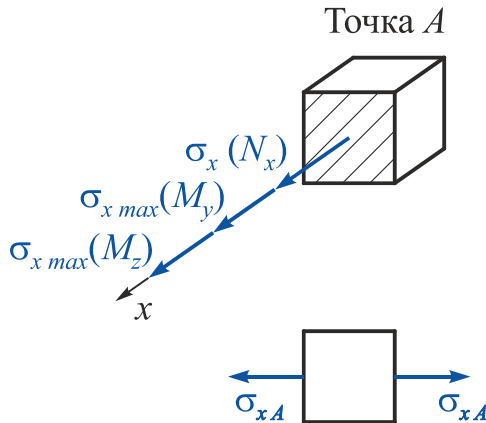


Рис. 3.7

1. У точці  $A$  перерізу реалізується **лінійний**, тобто **простий напружений стан** (рис. 3.7), і в цій точці діють найбільші нормальні напруження (заштрихована площадка, що збігається з площиною поперечного перерізу, напруження на невидимих гранях не показано).

Умова міцності в цій точці має вигляд

$$\sigma_{xA} = \sigma_{x \max} = \frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma].$$
(3.7)

**Зауваження** | У всіх інших кутових точках також реалізується лінійний напружений стан.

2. Іншими потенційно небезпечними точками перерізу є точки  $B$  (середина більшої сторони) і  $C$  (середина меншої сторони). Напружений стан в цих точках показано на рис. 3.8 (заштриховані площадки, що збігаються з площиною поперечного перерізу, напруження на невидимих гранях не показано).

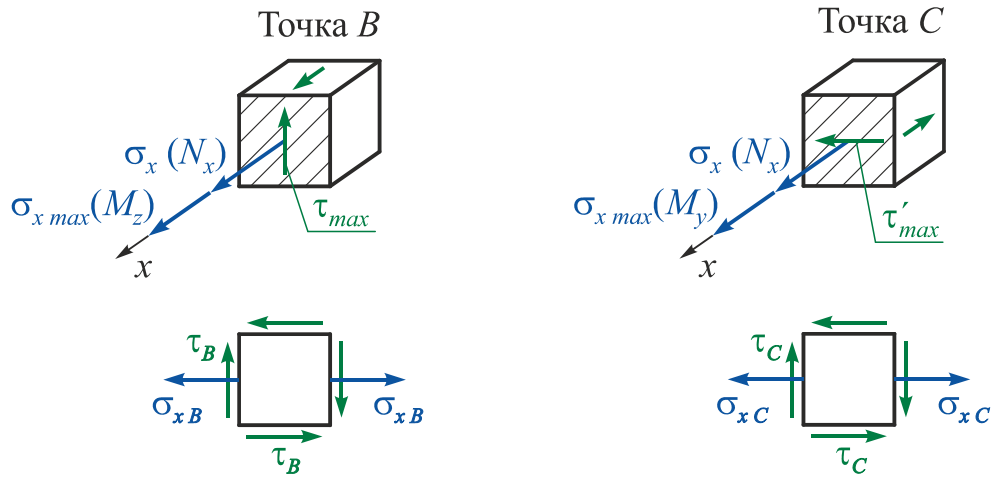


Рис. 3.8

У цих точках реалізується **плоский** (складний) **напружений стан** частинного виду, який детально було розглянуто в підрозд. 1.2.6, отже, розрахунок на міцність в цих потенційно небезпечних точках слід виконувати за однією з теорій міцності.

Умови міцності в точках  $B$  і  $C$  відповідно до формул (1.27) і (1.28) матимуть такий вигляд:

а) **за третьою теорією міцності**

$$\sigma_{\text{екв} B}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_z|}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.8)$$

$$\sigma_{\text{екв} C}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.9)$$

б) **за четвертою теорією міцності**

$$\sigma_{\text{екв} B}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_z|}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\text{екв} C}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.11)$$

### 3.2.2. Порядок підбору розмірів прямокутного поперечного перерізу

**Дано:**  $N_x, M_x, M_y, M_z, h/b = k, [\sigma]$  (див. рис. 3.2).

**Визначити:**  $h, b$ .

1. Виділяють трикратно розтягнуту (при  $N_x > 0$ ) або трикратно стиснену (при  $N_x < 0$ ) чверть перерізу (квадрант) і відзначають три його кутові точки  $A, B$  і  $C$ . Вони і будуть потенційно небезпечними. Четверту кутову точку, що збігається з центром ваги перерізу  $O$ , не розглядають, оскільки в цій точці

$$\tau_O(M_x) = \sigma_{xO}(M_y) = \sigma_{xO}(M_z) = 0.$$

2. Розміри прямокутного поперечного перерізу необхідно визначати по черзі для потенційно небезпечних точок  $A, B$  і  $C$ .

Умови міцності в цих точках в **першому наближенні** записують без урахування  $N_x$ , оскільки зазвичай  $\sigma_x(N_x) \ll \sigma_x(M_y, M_z)$ . Розрахунок починають з кутової точки  $A$ , яка в більшості випадків виявляється небезпечною в дійсності.

**Умова міцності в точці  $A$**

$$\sigma_{xA} = \sigma_{x_{max}} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.12)$$

Тут  $W_y = \frac{bh^2}{6}$ ;  $W_z = \frac{hb^2}{6}$ .

З урахуванням того, що

$$h/b = k \Rightarrow h = kb,$$

вираз для визначення моментів опору при згині можна переписати у вигляді

$$W_y = \frac{k^2 b^3}{6}; \quad W_z = \frac{kb^3}{6}. \quad (3.13)$$

Підставивши рівняння (3.13) в (3.12), отримаємо

$$\frac{6M_y}{k^2 b^3} + \frac{6M_z}{kb^3} \leq [\sigma],$$

звідки визначимо

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6M_y}{k^2} + \frac{6M_z}{k}} \frac{1}{[\sigma]} = \sqrt[3]{\frac{6M_y + 6kM_z}{k^2[\sigma]}}. \quad (3.14)$$

**Умова міцності в точці  $B$** , що лежить на середині довгої сторони:

$$\sigma_{екв B}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{екв B}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.15)$$

Тут  $W_k = \alpha hb^2$ .

З урахуванням того, що  $h = kb$ ,

$$W_k = \alpha kb^3. \quad (3.16)$$

Підставивши вирази (3.13) і (3.16) в (3.15), після перетворень отримаємо

$$b^{III} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_z}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}}; \quad b^{IV} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_z}{k}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}}. \quad (3.17)$$

**Умова міцності в точці С**, що лежить на середині короткої сторони:

$$\sigma_{\text{ЕКВ } C}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\text{ЕКВ } C}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.18)$$

Підставивши вирази (3.13) і (3.16) в (3.18), після перетворень запишемо

$$b^{III} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_y}{k^2}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}}; \quad b^{IV} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_y}{k^2}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}}. \quad (3.19)$$

**Зауваження** |  $\alpha, \gamma$  – коефіцієнти, що залежать від співвідношення  $h/b$  (див. додаток).

3. Вибирають більший розмір  $b$ . Знаходять  $h = kb$ .

**Зауваження** | Точка перерізу, за якою вибрана більша пара розмірів, і буде найнебезпечнішою точкою поперечного перерізу.

4. Якщо в поперечному перерізі діє поздовжня сила  $N_x$ , у **другому наближенні** перевіряють міцність в небезпечній точці ( $A, B$  або  $C$ ) з урахуванням наявності  $N_x$  (в точці  $A$  – за співвідношенням (3.7); в точці  $B$  – за виразами (3.8), (3.10) і в точці  $C$  – за формулами (3.9), (3.11) залежно від того, яку з теорій міцності вибрали як робочу).

Якщо перевірка міцності свідчить про виконання умов міцності з точністю  $\Delta\sigma \leq 5\%$ , то розрахунок закінчено.

Якщо умова міцності в небезпечній точці **не виконується**, необхідно збільшувати розміри  $h$  і  $b$ , використовуючи метод послідовних наближень.

**Зауваження** | 1. Якщо **один із згинальних моментів**  $M_y$  або  $M_z$  дорівнює нулю, то **кутові точки** перерізу **виключаються** з розряду потенційно небезпечних.  
2. Якщо **крутний момент**  $M_x$  дорівнює нулю, то **кутова точка** стає **єдиною** небезпечною точкою перерізу.



### 3.3. Круглий поперечний переріз

#### 3.3.1. Згин з крученням бруса круглого поперечного перерізу

Як показує розрахункова практика, в круглому поперечному перерізі

$$\tau_{max}(Q) \ll \tau_{max}(M_{кр}) \quad \text{і} \quad \tau_{max}(Q) \ll \sigma_{max}(M_{зг}),$$

тому наявністю дотичних напружень, що виникають під дією поперечних сил, в цьому випадку нехтують.

Оскільки всі осі, що проходять через центр ваги круглого поперечного перерізу, є головними центральними осями інерції цього перерізу, то немає необхідності розглядати окремо згин в координатних площинах (горизонтальній і вертикальній).

Зазвичай розглядають згин бруса круглого поперечного перерізу під дією результуючого згинального моменту (рис. 3.9)

$$M_{зг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (3.20)$$

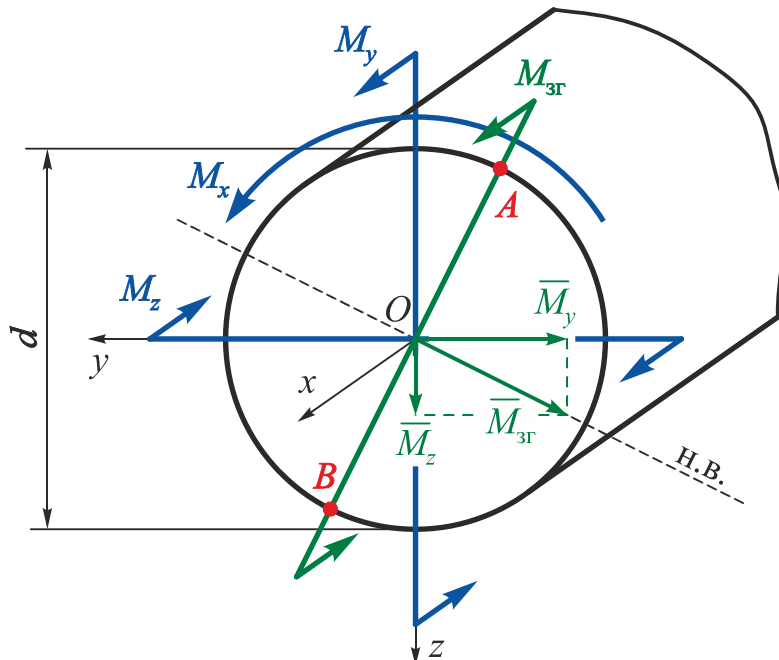


Рис. 3.9

Тоді найбільші нормальні напруження  $\sigma_x$ , що діють в точках  $A$  і  $B$ , найбільш віддалених від нейтральної осі, визначимо за формулою

$$\sigma_{x \max A} = |\sigma_{x \max B}| = \frac{M_{3\Gamma}}{W_{\text{н.в.}}} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W_{\text{н.в.}}} \quad (3.21)$$

Дотичні напруження  $\tau$ , зумовлені дією крутного моменту  $M_x$ , мають максимальну величину в периферійних точках перерізу, тобто на колі, в тому числі і в точках  $A$  і  $B$ :

$$\tau_{\max} = \tau_A = \tau_B = \frac{M_x}{W_\rho} \quad (3.22)$$

Отже, точки  $A$  і  $B$  є найнебезпечнішими точками всього перерізу, оскільки в них діють  $\sigma_{\max}$  і  $\tau_{\max}$ . Оскільки умови міцності у вигляді (1.27) і (1.28) байдужі відносно знаків  $\sigma$  і  $\tau$ , то точки  $A$  і  $B$  є *рівнонебезпечними*.

У зв'язку з тим, що напружений стан у точках  $A$  і  $B$  є плоским (рис. 3.10) (заштриховані площадки, що збігаються з площиною поперечного перерізу, напруження на невидимих гранях не показано), то розрахунок на міцність необхідно виконувати за однією з теорій міцності (третьою або четвертою).

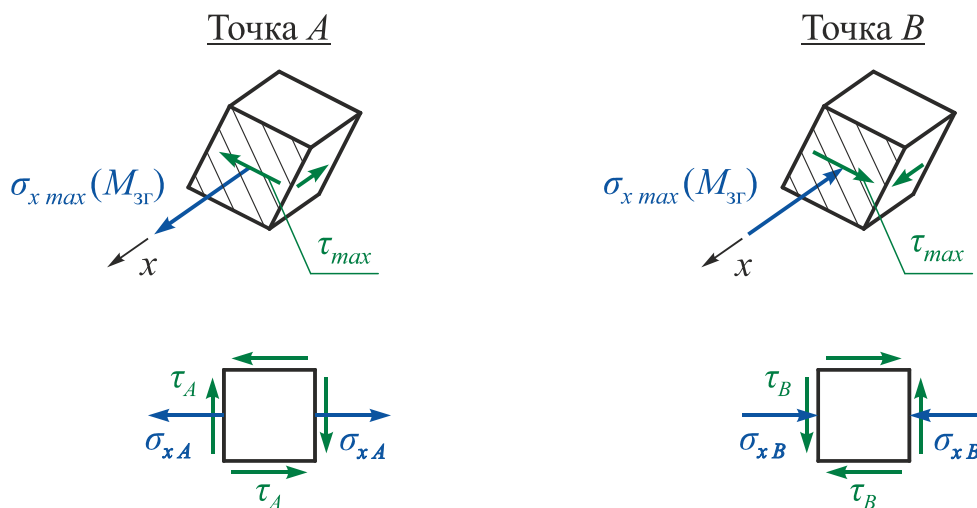


Рис. 3.10

Запишемо умови міцності в точках  $A$  і  $B$ :

а) *за третьою теорією міцності*

$$\sigma_{\text{екв } A(B)}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma],$$

де  $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярний момент опору;

$W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32}$  – момент опору відносно нейтральної осі.

Оскільки для круглого поперечного перерізу

$$W_{\rho} = 2W_{\text{н.в.}},$$

то

$$\sigma_{\text{екв}A(B)}^{\text{III}} = \sqrt{\frac{M_{3\Gamma}^2}{W_{\text{н.в.}}^2} + \frac{M_x^2}{W_{\text{н.в.}}^2}} = \frac{\sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_x^2}}{W_{\text{н.в.}}}.$$

Введемо позначення

$$M_{\text{розр}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2}, \quad (3.23)$$

де  $M_{\text{розр}}^{\text{III}}$  – розрахунковий, або зведений, момент за третьою теорією міцності.

Тоді остаточно

$$\sigma_{\text{екв}A(B)}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{W_{\text{н.в.}}} \leq [\sigma]; \quad (3.24)$$

**б) за четвертою теорією міцності**

$$\sigma_{\text{екв}A(B)}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma].$$

тоді

$$\sigma_{\text{екв}A(B)}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{M_{3\Gamma}^2}{W_{\text{н.в.}}^2} + \frac{3}{4} \frac{M_x^2}{W_{\text{н.в.}}^2}} = \frac{\sqrt{M_{3\Gamma}^2 + 0,75M_x^2}}{W_{\text{н.в.}}}.$$

Введемо позначення

$$M_{\text{розр}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + 0,75M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75M_x^2}, \quad (3.25)$$

де  $M_{\text{розр}}^{\text{IV}}$  – розрахунковий, або зведений, момент за четвертою теорією міцності.

Тоді остаточно

$$\sigma_{\text{екв}A(B)}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{W_{\text{н.в.}}} \leq [\sigma]. \quad (3.26)$$

Оскільки

$$W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32},$$

то, скориставшись умовою міцності (3.24) або (3.26), можна вирішити проектувальне завдання, тобто визначити діаметр поперечного перерізу:

$$d^{\text{III}} = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{\pi[\sigma]}} \quad (3.27)$$

або

$$d^{\text{IV}} = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{\pi[\sigma]}}. \quad (3.28)$$

### 3.3.2. Згин з крученням і розтягненням бруса круглого поперечного перерізу

Цей розрахунковий випадок відрізняється від попереднього випадку наявністю поздовжньої сили  $N_x$ .

З двох рівнонебезпечних точок, розглянутих раніше, небезпечною стає одна – та, в якій напруження під дією поздовжньої сили  $N_x$  і згинального моменту  $M_{зг}$  підсумовуються.

Умови міцності в небезпечній точці:

а) *за третьою теорією міцності*

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{зг}|}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.29)$$

б) *за четвертою теорією міцності*

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{зг}|}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.30)$$

При проектувальному розрахунку конструкцій в цьому випадку в першому наближенні визначають діаметр  $d$  без урахування поздовжньої сили  $N_x$  за формулою (3.27) або (3.28), оскільки в більшості випадків

$$\sigma_x(N_x) \ll \sigma_x(M_{зг}),$$

а в другому наближенні перевірку міцності в небезпечній точці ( $A$  чи  $B$  залежно від напрямку  $N_x$ ) виконують за співвідношенням (3.29) або (3.30).

### 3.4. Приклади розв'язання задач

#### Приклад 3.1

Для ламаного бруса побудовано епюри внутрішніх силових факторів (див. приклад 2.1). Необхідно при  $[\sigma] = 220 \text{ МПа}$ :

- підібрати розміри круглого поперечного перерізу;
- підібрати розміри прямокутного поперечного перерізу при  $k = h/b = 2$ ;
- побудувати епюри розподілу нормальних і дотичних напружень під дією  $N_x$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  для прямокутного поперечного перерізу;
- показати напружений стан у небезпечних точках прямокутного і круглого поперечних перерізів;
- використати третю і четверту теорії міцності для підбору круглого поперечного перерізу, третю теорію міцності – для прямокутного;
- порівняти вагу отриманих брусів.

#### Розв'язання

##### 1. Знайдемо небезпечний переріз.

З аналізу епюр внутрішніх зусиль (див. приклад 2.1, рис. 2.12) видно, що найнебезпечнішим є переріз в жорсткому затисненні, в якому діють:

$$N_x = 20 \text{ кН}; \quad M_x = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_z = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

##### 2. Визначимо діаметр круглого поперечного перерізу.

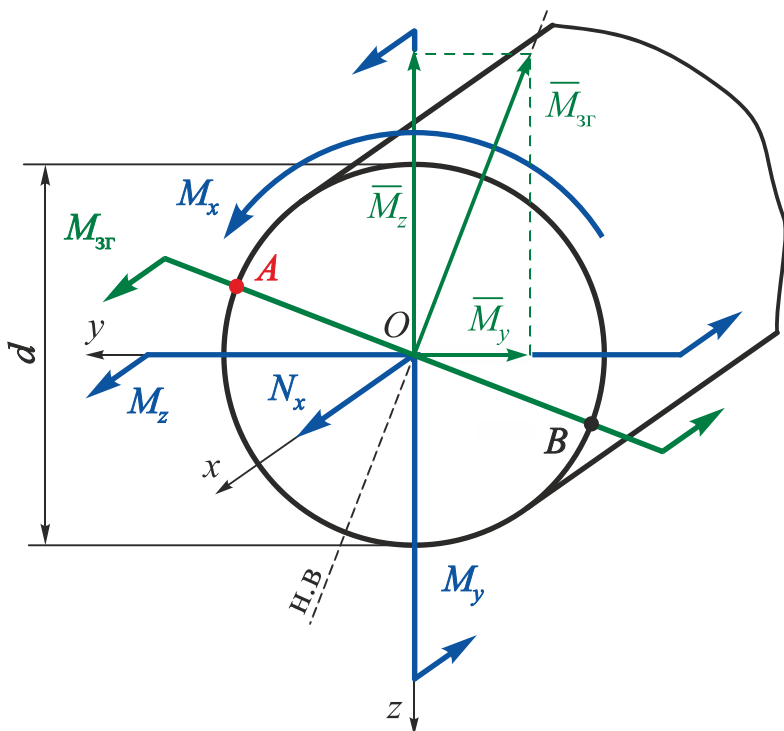


Рис. 3.11

Площина дії сумарного згинального моменту

$$M_{зг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

визначає положення точок найбільших згинальних нормальних напружень (точки  $A$  і  $B$ ) (рис. 3.11). Через наявність нормальних напружень стиснення, викликаних поздовжньою силою  $N_x$ , найбільша величина нормального напруження буде в точці  $A$ , в якій напруження під дією поздовжньої сили і згинального моменту підсумовуються.

Одночасно ця точка є точкою найбільших дотичних напружень унаслідок дії кручення, оскільки лежить на окружності поперечного перерізу.

Таким чином, точка  $A$  є єдиною небезпечною точкою круглого поперечного перерізу.

Оскільки напружений стан в точці  $A$  плоский, то розрахунок на міцність необхідно виконувати за однією з теорій міцності (третьою і четвертою) (рис. 3.12).

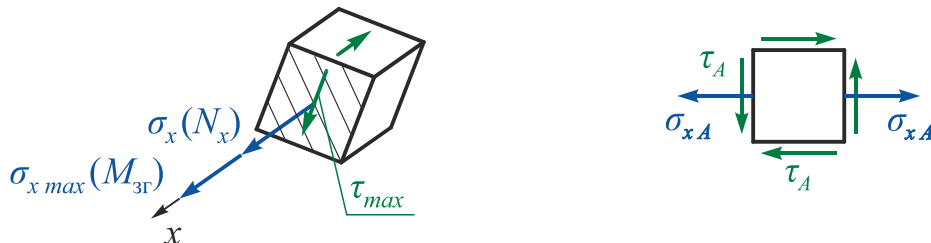


Рис. 3.12

### Третя теорія міцності

У першому наближенні для визначення діаметра  $d$  запишемо умову міцності в точці  $A$  без урахування впливу поздовжньої сили  $N_x$  (3.24):

$$\sigma_{\text{екв}A}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{W_{\text{н.в.}}} = \left\{ \text{оскільки } W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32} \right\} = \frac{32M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

звідки отримаємо

$$d^{\text{III}} = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{\pi[\sigma]}},$$

де відповідно до рівняння (3.23)

$$M_{\text{розр}}^{\text{III}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2} = \sqrt{30^2 + 80^2 + 45^2} = 96,566 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Тоді

$$d^{\text{III}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 96,566 \cdot 10^3}{\pi \cdot 220 \cdot 10^6}} = 0,1647 \text{ м}.$$

Визначимо за формулою (3.29) дійсні розрахункові напруження в небезпечній точці з урахуванням дії поздовжньої сили  $N_x$ :

$$\sigma_{\text{екв}A}^{\text{III}} = \sqrt{\left( \frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{\text{зг}}|}{W_{\text{н.в.}}} \right)^2 + 4 \left( \frac{M_x}{W_\rho} \right)^2},$$

де  $M_{\text{зг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{30^2 + 80^2} = 85,44 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1647^2}{4} = 2,1305 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0,1647^3}{32} = 4,3861 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi \cdot 0,1647^3}{16} = 8,7722 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв } A}^{\text{III}} &= \sqrt{\left(\frac{20 \cdot 10^3}{2,1305 \cdot 10^{-2}} + \frac{85,44 \cdot 10^3}{4,3861 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 4\left(\frac{45 \cdot 10^3}{8,7722 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = \\ &= 220,995 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Перенапруження

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{\text{екв } A}^{\text{III}} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{220,995 - 220}{220} \cdot 100 \% = 0,45 \% < 5 \%.$$

Таким чином, міцність ламаного бруса забезпечена.

### **Зауваження**

Оскільки  $\sigma_x(N_x) \ll [\sigma]$ , оцінити внесок поздовжньої сили в нормальне напруження, що діє в небезпечній точці, можна за формулою

$$\sigma_x(N_x) = \frac{N_x}{F} = \frac{20 \cdot 10^3}{2,1305 \cdot 10^{-2}} = 0,939 \text{ МПа}.$$

### ***Четверта теорія міцності***

У першому наближенні для визначення діаметра  $d$  запишемо умову міцності в точці  $A$  без урахування впливу поздовжньої сили  $N_x$  (див. формулу (3.26)):

$$\sigma_{\text{екв } A}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{W_{\text{н.в.}}} = \left\{ \text{оскільки } W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32} \right\} = \frac{32M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

звідки отримаємо

$$d^{\text{IV}} = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{\pi[\sigma]}},$$

де відповідно до рівняння (3.25)

$$M_{\text{розр}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot M_x^2} = \sqrt{30^2 + 80^2 + 0,75 \cdot 45^2} = 93,908 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Тоді

$$d^{IV} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 93,908 \cdot 10^3}{\pi \cdot 220 \cdot 10^6}} = 0,1632 \text{ м.}$$

Визначимо за формулою (3.30) дійсні розрахункові напруження в небезпечній точці з урахуванням дії поздовжньої сили  $N_x$ :

$$\sigma_{\text{екв } A}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{зг}|}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2},$$

де  $M_{зг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{30^2 + 80^2} = 85,44 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1632^2}{4} = 2,0918 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0,1632^3}{32} = 4,2674 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi \cdot 0,1632^3}{16} = 8,5378 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв } A}^{IV} &= \sqrt{\left(\frac{20 \cdot 10^3}{2,0918 \cdot 10^{-2}} + \frac{85,44 \cdot 10^3}{4,2674 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 3\left(\frac{45 \cdot 10^3}{8,5378 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = \\ &= 220,916 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Перенапруження

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{\text{екв } A}^{IV} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{220,916 - 220}{220} \cdot 100 \% = 0,42 \% < 5 \%.$$

Таким чином, міцність ламаного бруса забезпечена.

### 3. Визначимо розміри прямокутного поперечного перерізу.

Оскільки  $M_z > M_y$ , розташуємо переріз горизонтально для забезпечення міцності перерізу при менших його розмірах.

Переріз з прикладеними внутрішніми зусиллями показано на рис. 3.13. Внутрішні зусилля прикладені відповідно до прийнятих правил знаків:

- додатна поздовжня сила  $N_x$  означає розтягнення;
- додатний крутний момент  $M_x$  – обертання проти годинникової стрілки;
- від'ємний згинальний момент  $M_y$  – розтягнення верхніх і стиснення нижніх волокон;



- додатний згинальний момент  $M_z$  – розтягнення лівих і стиснення правих волокон.

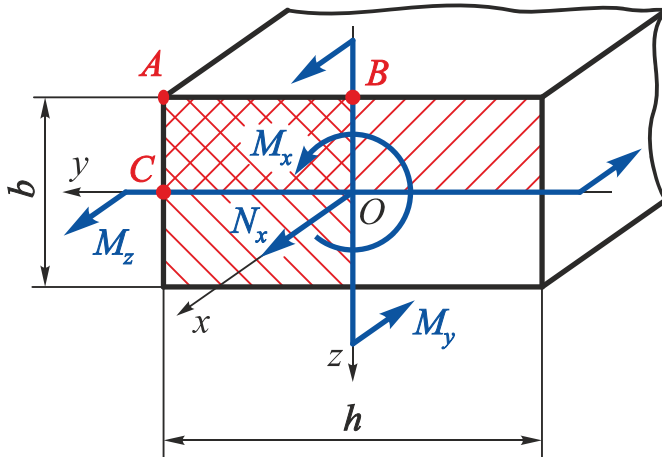


Рис. 3.13

Визначимо потенційно небезпечні точки перерізу. Виділимо трикратно розтягнуту (оскільки  $N_x > 0$ ) чверть перерізу (заштрихована область на рис. 3.13) і відзначимо три її кутові точки:  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Вони і будуть потенційно небезпечними.

Побудуємо епюри розподілу нормальних і дотичних напружень у перерізі (рис. 3.14 – 3.17).

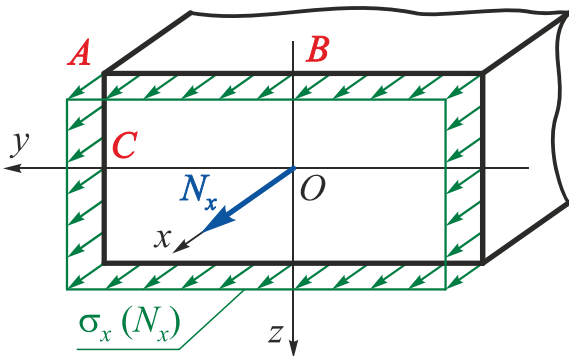


Рис. 3.14

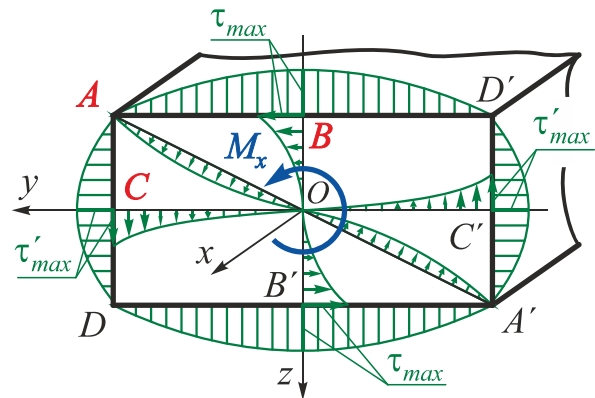


Рис. 3.15

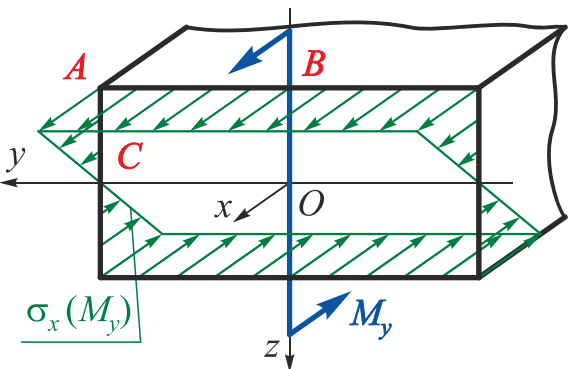


Рис. 3.16

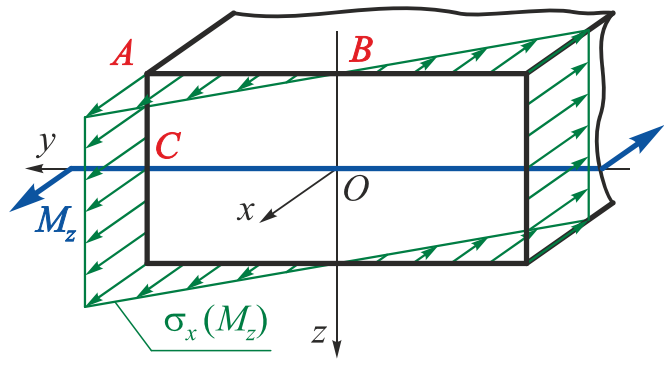


Рис. 3.17

У кожній з трьох потенційно небезпечних точок поперечного перерізу покажемо вид напруженого стану і запишемо умови міцності (без урахування впливу поздовжньої сили  $N_x$ ).

### Точка А

У точці А поперечного перерізу реалізується лінійний напружений стан (рис. 3.18).

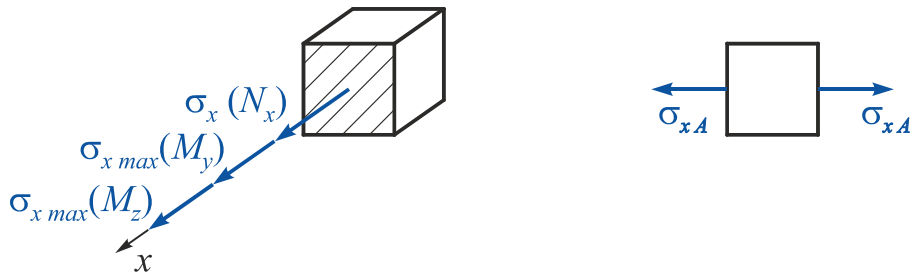


Рис. 3.18

Умова міцності в цій точці має вигляд

$$\sigma_{xA} = \sigma_{x\max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma],$$

де  $W_y = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \end{array} \right\} = \frac{kb^3}{6};$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \end{array} \right\} = \frac{k^2 b^3}{6}.$$

Підставивши значення  $W_y$  і  $W_z$  в умову міцності й провівши перетворення, отримаємо

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6k|M_y| + 6|M_z|}{k^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot |-30 \cdot 10^3| + 6 \cdot 80 \cdot 10^3}{2^2 \cdot 220 \cdot 10^6}} = 0,0985 \text{ м.}$$

### Точка В

У точці В поперечного перерізу реалізується плоский напружений стан (рис. 3.19).

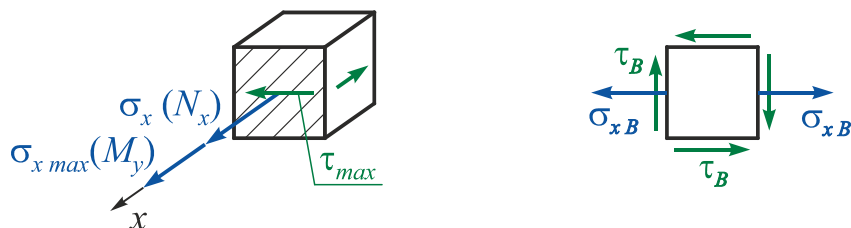


Рис. 3.19

Запишемо умову міцності, використавши третю теорію міцності:

$$\sigma_{\text{екв} B}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

$$\text{де } W_y = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6};$$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,246$  – коефіцієнт, що залежить від співвідношення  $h/b = 2$  (див. додаток).

Підставивши значення  $W_y$  і  $W_k$  в умову міцності, отримаємо

$$b^{\text{III}} \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{6M_y}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{6 \cdot |-30 \cdot 10^3|}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{45 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 2}\right)^2}{(220 \cdot 10^6)^2}} = 0,0975 \text{ м.}$$

### Точка С

У точці С поперечного перерізу реалізується плоский напружений стан (рис. 3.20).

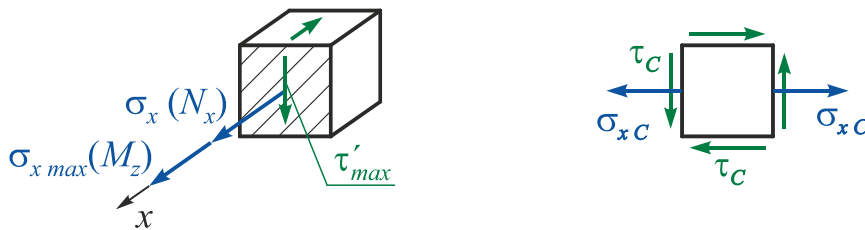


Рис. 3.20

Запишемо умову міцності, використавши третю теорію міцності:

$$\sigma_{\text{екв С}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

$$\text{де } W_z = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,246$ ,  $\gamma = 0,795$  – коефіцієнти, що залежать від співвідношення  $h/b = 2$  (див. додаток).

Підставивши значення  $W_z$  і  $W_k$  в умову міцності, отримаємо

$$b^{\text{III}} \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{6M_z}{k^2}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{6 \cdot (80 \cdot 10^3)}{2^2}\right)^2 + 4\left(0,795 \cdot \frac{45 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 2}\right)^2}{(220 \cdot 10^6)^2}} = 0,09499 \text{ м.}$$

Виберемо більший з трьох розмірів  $b$ :

$$\begin{cases} b_A \geq 0,0985 \text{ м}; \\ b_B \geq 0,0975 \text{ м}; \\ b_C \geq 0,09499 \text{ м}. \end{cases}$$

Точка  $A$  – найнебезпечніша точка поперечного перерізу.

Розрахункові розміри прямокутного поперечного перерізу і його геометричні характеристики:

$$b = 0,0985 \text{ м};$$

$$h = kb = 2 \cdot 0,0985 = 0,197 \text{ м};$$

$$F = bh = 0,0985 \cdot 0,197 = 0,0194 \text{ м}^2;$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,197 \cdot 0,0985^2}{6} = 3,1856 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,0985 \cdot 0,197^2}{6} = 6,3711 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_k = \alpha hb^2 = 0,246 \cdot 0,197 \cdot 0,0985^2 = 4,7019 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Оскільки в точці  $A$  реалізується лінійний напружений стан, то визначимо внесок поздовжньої сили  $N_x$  в сумарне нормальне напруження за формулою

$$\sigma_{xA}(N_x) = \frac{N_x}{F} = \frac{20 \cdot 10^3}{0,0194} = 1,031 \text{ МПа}.$$

Перенапруження

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{xA}(N_x)}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{1,031}{220} \cdot 100 \% = 0,47 \% < 5 \%.$$

Таким чином, міцність ламаного бруса забезпечена.

**4. Порівняємо за вагою** бруси прямокутного і круглого поперечних перерізів, знайдених за третьою теорією міцності:

$$\frac{G^\circ}{G^\square} = \frac{F^\circ}{F^\square} = \frac{2,1305 \cdot 10^{-2}}{0,0194} = 1,098.$$

Таким чином, при заданому поєднанні внутрішніх силових факторів і співвідношення сторін прямокутника  $k = h/b = 2$  для зменшення ваги конструкції вигідніше застосовувати прямокутний поперечний переріз.

Однак найбільший габаритний розмір прямокутного поперечного перерізу більше діаметра круглого:

$$h = 0,197 \text{ м} > d = 0,1647 \text{ м}.$$

### Приклад 3.2

У небезпечному перерізі бруса діють згинальний момент  $M_y = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$  і крутний момент  $M_x = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (рис. 3.21). Підібрати за четвертою теорією міцності діаметр  $d$  круглого, розмір  $a$  квадратного, розміри  $b$  і  $h$  ( $k = h/b = 1,75$ ) прямокутного поперечних перерізів, якщо  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Показати напружений стан в небезпечних точках поперечних перерізів, порівняти бруси за вагою.

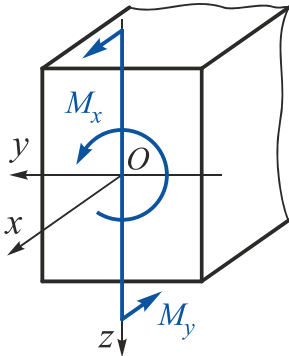


Рис. 3.21

*Дано:*  $M_y = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_x = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $k = h/b = 1,75$ ;

для квадратного перерізу  $\alpha = 0,208$ ;  $\gamma = 1$ ;

для прямокутного перерізу  $\alpha = 0,239$ ;  $\gamma = 0,820$ .

**Необхідно** визначити  $d$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ; показати напружений стан в небезпечних точках поперечних перерізів; порівняти бруси за вагою.

### Розв'язання

#### 1. Визначимо діаметр круглого поперечного перерізу.

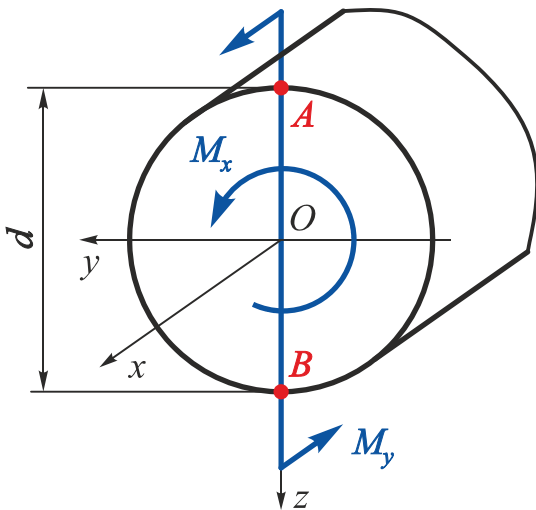


Рис. 3.22

У круглому поперечному перерізі при зазначених параметрах навантаження найбільші нормальні напруження під дією згинального моменту  $M_y$  виникають в точках  $A$  і  $B$  поперечного перерізу, найбільш віддалених від нейтральної осі  $y$  (рис. 3.22).

Одночасно вони є точками найбільших дотичних напружень під дією крутного моменту  $M_x$ , оскільки лежать на окружності поперечного перерізу.

Отже, точки  $A$  і  $B$  є найнебезпечнішими точками всього перерізу, оскільки в них діють напруги  $\sigma_{max}$  і  $\tau_{max}$ . Оскільки умови міцності (1.27) і (1.28) є байдужими відносно знаків  $\sigma$  і  $\tau$ , то точки  $A$  і  $B$  є **рівнонебезпечними**. Тому розглянемо напружений стан тільки в точці  $A$ .

Напружений стан в точці  $A$  – плоский, тому розрахунок на міцність необхідно виконувати за четвертою теорією міцності (рис. 3.23).

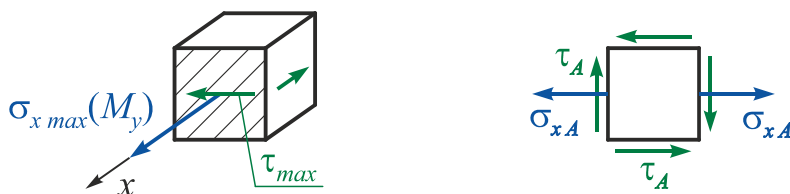


Рис. 3.23

Для визначення діаметра  $d$  запишемо умову міцності (3.26)

$$\sigma_{\text{екв}A}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{W_{\text{н.в.}}} = \left\{ \text{оскільки } W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32} \right\} = \frac{32M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

звідки отримаємо

$$d^{\text{IV}} = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{\pi[\sigma]}}$$

де відповідно до рівняння (3.25)

$$M_{\text{розр}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot M_x^2} = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0,75 \cdot 20^2} = 18,028 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Тоді

$$d^{\text{IV}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 18,028 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,1047 \text{ м}.$$

## 2. Визначимо розміри квадратного поперечного перерізу.

У квадратному поперечному перерізі при зазначених параметрах навантаження (рис. 3.24) залишаються дві потенційно небезпечні і при цьому рівнонебезпечні точки  $C$  і  $C'$ . У цих точках діють найбільші нормальне і дотичне напруження.

Кутові точки перетину  $A, A', D$  і  $D'$  випадають з ряду потенційно небезпечних, оскільки  $\sigma_{xA} = \sigma_{xA'} = \sigma_{xD} = \sigma_{xD'} = \sigma_{x \text{ max}}$ , а  $\tau_A = \tau_{A'} = \tau_D = \tau_{D'} = 0$ .

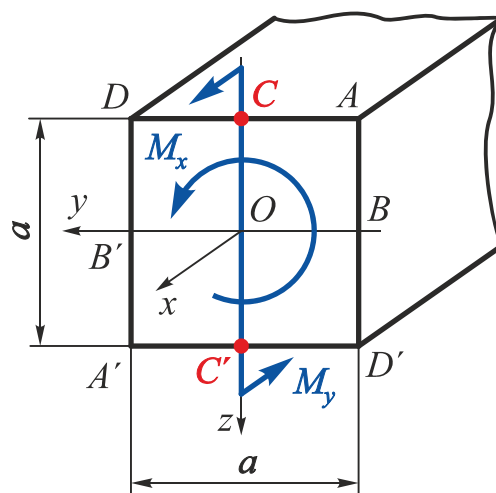


Рис. 3.24

Точки  $B$  і  $B'$  також виключають з ряду потенційно небезпечних, оскільки  $\sigma_{xB} = \sigma_{xB'} = 0$ , а  $\tau_B = \tau_{B'} = \tau_{\text{max}}$ .

Оскільки точки  $C$  і  $C'$  рівнонебезпечні, розглянемо тільки одну з цих точок – точку  $C$ . У цій точці реалізується плоский напружений стан (рис. 3.25).



Рис. 3.25

Запишемо умову міцності, використавши четверту теорію міцності:

$$\sigma_{\text{екв } C}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

де  $W_y = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } h = b = a \Rightarrow k = \frac{a}{b} = 1 \right\} = \frac{a^3}{6};$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{оскільки } h = b = a \Rightarrow k = \frac{a}{b} = 1 \right\} = \alpha a^3;$$

$\alpha = 0,239$  – коефіцієнт, що залежить від співвідношення  $h/b = 1$  (див. додаток).

Підставивши значення  $W_y$  і  $W_k$  в умову міцності, отримаємо

$$a^{\text{IV}} \geq \sqrt[6]{\frac{(6M_y)^2 + 3\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt[6]{\frac{(6 \cdot |-5 \cdot 10^3|)^2 + 3\left(\frac{20 \cdot 10^3}{0,208}\right)^2}{(160 \cdot 10^6)^2}} = 0,0974 \text{ м.}$$

### 3. Визначимо розміри прямокутного поперечного перерізу.

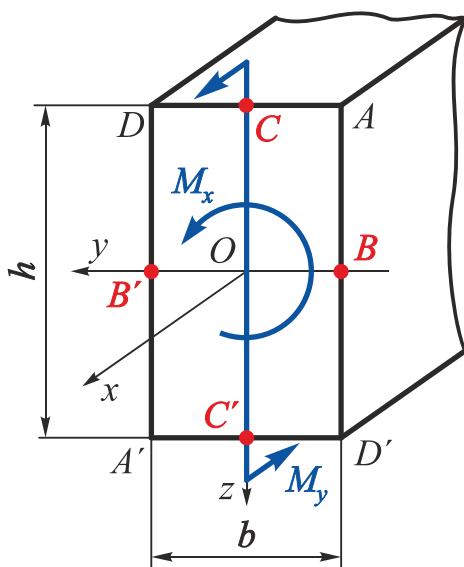


Рис. 3.26

У прямокутному поперечному перерізі при зазначених параметрах навантаження (рис. 3.26) потенційно небезпечними є як рівнонебезпечні точки  $B$  і  $B'$ , в яких діють напруження

$$\sigma_{xB} = \sigma_{xB'} = 0 \quad \text{і} \quad \tau_B = \tau_{B'} = \tau_{\text{max}},$$

так і рівнонебезпечні точки  $C$  і  $C'$ , в яких діють напруження

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xC'} = \sigma_{x \text{ max}} \quad \text{і} \quad \tau_C = \tau_{C'} = \tau'_{\text{max}}.$$

Кутові точки  $A, A', D$  і  $D'$  перерізу випадають з ряду потенційно небезпечних, оскільки

$$\sigma_{xA} = \sigma_{xA'} = \sigma_{xD} = \sigma_{xD'} = \sigma_{x \text{ max}},$$

а

$$\tau_A = \tau_{A'} = \tau_D = \tau_{D'} = 0.$$

Оскільки точки  $B$  і  $B'$  рівнонебезпечні, розглянемо тільки одну з цих точок – точку  $B$ . Ця точка знаходиться в умовах чистого зсуву (рис. 3.27).

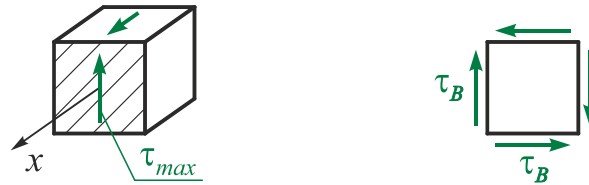


Рис. 3.27

Умова міцності в точці  $B$  має вигляд

$$\tau_B = \tau_{max} = \frac{|M_x|}{W_k} \leq [\tau] \approx 0,5 \cdot [\sigma],$$

де  $W_k = \alpha h b^2 = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha k b^3;$

$\alpha = 0,239$  – коефіцієнт, що залежить від співвідношення  $h/b = 1,75$  (див. додаток).

Підставивши значення  $W_k$  в умову міцності, отримаємо

$$b_B \geq \sqrt[3]{\frac{|M_x|}{\alpha k \cdot 0,5 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 10^3}{0,239 \cdot 1,75 \cdot 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0842 \text{ м.}$$

Оскільки точки  $C$  і  $C'$  рівнонебезпечні, розглянемо тільки одну з цих точок – точку  $C$ . У цій точці реалізується плоский напружений стан (рис. 3.28).



Рис. 3.28

Запишемо умову міцності, використавши четверту теорію міцності:

$$\sigma_{\text{екв } C}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

де  $W_y = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_k = \alpha h b^2 = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha k b^3;$$

$\alpha = 0,239$ ,  $\gamma = 0,820$  – коефіцієнти, що залежать від співвідношення  $h/b = 1,75$  (див. додаток).



Підставивши значення  $W_y$  і  $W_k$  в умову міцності, отримаємо

$$b_C^{IV} \geq \sqrt{\frac{6 \left( \frac{6M_y}{k^2} \right)^2 + 3 \left( \gamma \frac{M_x}{\alpha k} \right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt{\frac{6 \left( \frac{6 \cdot |-5 \cdot 10^3|}{1,75^2} \right)^2 + 3 \left( 0,820 \cdot \frac{20 \cdot 10^3}{0,239 \cdot 1,75} \right)^2}{(160 \cdot 10^6)^2}} = 0,0753 \text{ м.}$$

Виберемо більший з двох розмірів  $b$ :

$$\begin{cases} b_B \geq 0,0842 \text{ м;} \\ b_C \geq 0,0753 \text{ м.} \end{cases}$$

Точка  $B$  – найнебезпечніша точка поперечного перерізу.

Остаточні розміри прямокутного поперечного перерізу:

$$b = 0,0842 \text{ м}; \quad h = kb = 1,75 \cdot 0,0842 = 0,1474 \text{ м.}$$

**4. Порівняємо за вагою** бруси круглого, квадратного і прямокутного поперечних перерізів.

Обчислимо площі поперечних перерізів:

круглого

$$F^{\circ} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1047^2}{4} = 8,6096 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

квадратного

$$F^{\square} = a^2 = 0,0974^2 = 9,4868 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

прямокутного

$$F^{\square} = bh = 0,0842 \cdot 0,1474 = 12,4111 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Тоді

$$\frac{G^{\square}}{G^{\circ}} = \frac{F^{\square}}{F^{\circ}} = \frac{9,4868 \cdot 10^{-3}}{8,6096 \cdot 10^{-3}} = 1,102;$$

$$\frac{G^{\square}}{G^{\circ}} = \frac{F^{\square}}{F^{\circ}} = \frac{12,4111 \cdot 10^{-3}}{8,6096 \cdot 10^{-3}} = 1,442.$$

Таким чином, при заданому поєднанні внутрішніх силових факторів і співвідношенні сторін прямокутника  $k = h/b = 1,75$  для зменшення ваги конструкції вигідніше застосовувати круглий поперечний переріз, оскільки він легше квадратного на 10,2 % і прямокутного на 44,2 %.

У цьому випадку круглий поперечний переріз краще і за габаритними розмірами.

## 3.5. Окремі випадки складного опору

### 3.5.1. Косий згин

Косий згин, як і плоский, підрозділяють на чистий і поперечний.

**Чистий косий згин** реалізується в тому випадку, коли в поперечному перерізі балки діє тільки згинальний момент і площина його дії не містить жодної з головної центральної осі інерції перерізу. При цьому не має значення, чи є головні центральні осі інерції перерізу осями його симетрії, чи ні.

**Поперечний косий згин** реалізується за умови, що поперечний переріз балки має **дві осі симетрії** і поперечні навантаження діють у різних перерізах і в різних площинах, що містять поздовжню вісь балки, або поперечні навантаження діють в одній силевій площині, яка містить поздовжню вісь балки, але не збігається з жодною з площин симетрії балки (рис. 3.29).

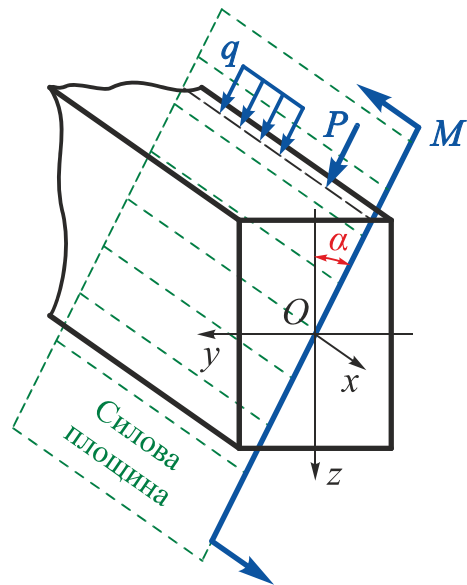


Рис. 3.29

Якщо ж поперечний переріз балки має одну вісь симетрії або взагалі не має осей симетрії, то поперечні навантаження мають діяти в площинах, що мають не поздовжню вісь балки, а лінію, що сполучає центри згину поперечних перерізів балки.

Ураховуючи, що у більшості стандартних курсів опору матеріалів (механіки матеріалів і конструкцій) поняття про центр згину поперечних перерізів балки не розглядають, і беручи до уваги той факт, що переважна більшість реальних балок працює в умовах поперечного згину, будемо розглядати тільки балки, поперечні перерізи яких мають дві осі симетрії. Це дещо звужує сферу застосування розрахункових співвідношень, отриманих у цьому розділі, однак їх практичне значення досить велике через дуже широке використання балок прямокутного, коробчастого, хрестоподібного, двотаврового та інших перерізів, в тому числі складених і багатозв'язних, що мають дві осі симетрії.

## Визначення нормальних напружень в поперечному перерізі балки

Розглянемо балку, що працює в умовах косоного згину (рис. 3.30).

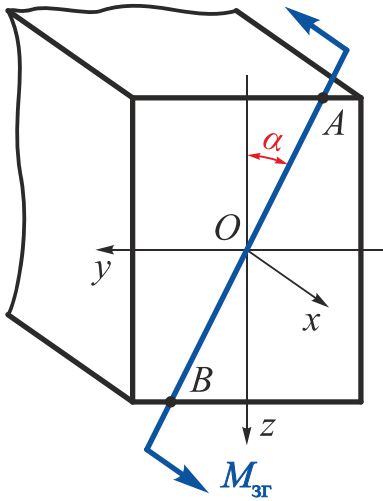


Рис. 3.30

На цьому рисунку  $O$  – центр ваги поперечного перерізу, осі  $y$  і  $z$  – головні центральні осі інерції перерізу;  $M_{зг}$  – згинальний момент, що діє в перерізі бруса під кутом  $\alpha$  до осі  $z$ ; поперечну силу не відображено, оскільки нормальне напруження  $\sigma_x$  визначається тільки наявністю згинальних моментів.

Площина дії згинального моменту, тобто силова площина, містить вісь  $x$ , але не має ні осі  $y$ , ні осі  $z$ .

Згідно з на принципом суперпозиції можна розглядати косий згин як одночасний чистий плоский згин у двох головних площинах:  $xOz$  і  $xOy$ . Тому косий згин є окремим випадком складного опору.

На рис. 3.31 момент  $M_{зг}$  зображено у звичайній і векторній формах за правилом, прийнятим у курсі теоретичної механіки. З цього рисунка видно, що

$$\left. \begin{aligned} M_y &= M_{зг} \cos \alpha ; \\ M_z &= M_{зг} \sin \alpha . \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

На рис. 3.32 показано перетворену відповідно до формули (3.31) схему дії в перерізі внутрішніх силових факторів.

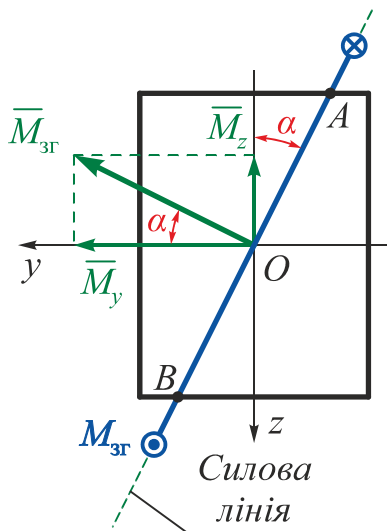


Рис. 3.31

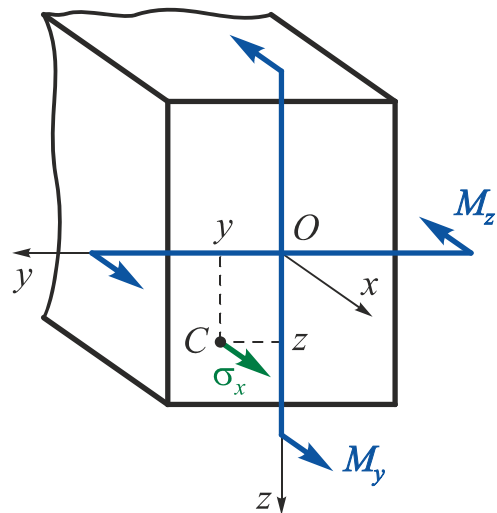


Рис. 3.32

Нормальне напруження  $\sigma_x$  у довільній точці  $C$  визначимо, використавши принцип незалежності дії сил (суперпозиції), в такий спосіб:

$$\sigma_x = \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z) = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z}. \quad (3.32)$$

Підставивши у формулу (3.32) значення  $M_y$  і  $M_z$  із співвідношень (3.31), отримаємо

$$\sigma_x = M_{зг} \left( \frac{z}{I_y} \cos \alpha + \frac{y}{I_z} \sin \alpha \right), \quad (3.33)$$

де  $y, z$  – координати довільної точки  $C$ ;

$M_{зг}$  – згинальний момент, що діє в поперечному перерізі;

$I_y, I_z$  – моменти інерції поперечного перерізу;

$\alpha$  – кут нахилу силової площини до осі  $z$ .

### **Зауваження**

Іноді буває зручно працювати безпосередньо із заданими згинальними моментами  $M_y$  і  $M_z$ , що діють у двох довільно вибраних перпендикулярних площинах  $xOz$  і  $xOy$ .

Тоді формули для визначення нормальних напружень, спричинених цими моментами, матимуть вигляд

$$\sigma_x(M_y) = \frac{M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} (I_z z - I_{yz} y);$$

$$\sigma_x(M_z) = \frac{M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} (I_{yz} z - I_y y).$$

Ці формули особливо зручні для розрахунку балок, в яких стінка і полки паралельні осям  $y$  і  $z$ .

### **Визначення положення нейтральної лінії перерізу**

При виконанні розрахунків на міцність умову міцності записують для небезпечної точки поперечного перерізу, тобто для точки, в якій нормальні напруження досягають максимальних значень. Самою навантаженою точкою в поперечному перерізі довільної форми є точка, найбільш віддалена від нейтральної лінії, що розділяє розтягнуту і стиснуту зони перерізу.

За допомогою рівняння (3.33) визначимо положення нейтральної лінії перерізу за умови, що в точках, що належать нейтральній лінії,  $\sigma_x = 0$ . Оскільки  $M_{зг} \neq 0$ , то

$$\frac{z}{I_y} \cos \alpha + \frac{y}{I_z} \sin \alpha = 0.$$

Звідси отримаємо рівняння прямої, що проходить через початок координат

$$z = \left( -\frac{I_y \sin \alpha}{I_z \cos \alpha} \right) y = \left( -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha \right) y \quad (3.34)$$

або  $z = k_1 y,$

де  $k_1 = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha . \quad (3.35)$

Вираз (3.35) дозволяє знайти *кут нахилу нейтральної лінії* до осі  $y$ , а знак «мінус» указує, що силова площина і нейтральна лінія при косому згині проходять через протилежні квадранти. Якщо кут  $\varphi > 0$ , то його відкладають від осі  $y$  проти годинникової стрілки, якщо кут  $\alpha > 0$ , то його відкладають від осі  $z$  за годинниковою стрілкою.

Кут  $\varphi$  не залежить від величини сили  $P$ , а лише від кута нахилу силової площини до осі  $z$  і форми поперечного перерізу.

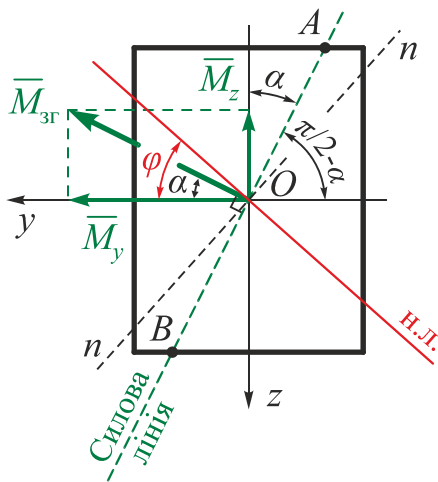


Рис. 3.33

Визначимо орієнтацію нейтральної лінії відносно площини дії  $M_{3Г}$ , оскільки не можна однозначно вважати, що вони перпендикулярні (рис. 3.33).

Рівняння силовий лінії – лінії перерізу площини дії і площини поперечного перерізу (лінія  $AB$  на рис. 3.30 і 3.32) – в системі координат  $zOy$  має вигляд

$$z = k_2 y,$$

де  $k_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} . \quad (3.36)$

З курсу аналітичної геометрії відомо, що умовою перпендикулярності двох прямих є умова

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} . \quad (3.37)$$

З порівняння величин  $k_1$  за рівнянням (3.35) і  $k_2$  за виразом (3.36) видно, що умова (3.37) в даному випадку не виконується:

$$-\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha \neq -\operatorname{tg} \alpha .$$

Це означає, що в загальному випадку нейтральна лінія перерізу *не перпендикулярна* до площини дії згинального моменту  $M_{3Г}$  (силової лінії).

В окремому випадку для поперечних перерізів, в яких  $I_y = I_z = I_{max} = I_{min}$  (наприклад, квадратного, круглого), всі осі, що проходять через центр ваги

перерізу, є головними центральними осями інерції, і для таких перерізів відповідно до визначення неможлива реалізація косоного згину, оскільки нейтральна лінія перпендикулярна до силової площини.

При косому згині відповідно до формул (3.31) відношення згинальних моментів  $M_y$  і  $M_z$  постійне по всій довжині бруса ( $M_z/M_y = \operatorname{tg} \alpha$ ). Тому і кут нахилу  $\varphi$  нейтральної лінії також постійний. Значить, поперечні перерізи бруса, залишаючись плоскими, повертаються навколо паралельних одна одній нейтральних ліній, як і при простому плоскому згині. Викривлення осі бруса при цьому відбувається в одній площині  $n - n$ , нормальній до напрямку нейтральної лінії (див. рис. 3.33), що і визначає назву цього виду деформації. Ця площина називається **площиною згину**.

### Зауваження

Якщо в брусі прямокутного поперечного перерізу силова лінія проходить по одній із діагоналей, то нейтральна лінія буде проходити по іншій діагоналі:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{12}{hb^3} \cdot \frac{b}{h} = -\frac{h}{b}.$$

### Умова міцності при косому згині

Вираз (3.33) в системі осей  $\sigma_x, y, z$  є рівнянням площини, яка перетинає площину поперечного перерізу балки по нейтральній лінії. Отже, нормальні напруження (розтягальні і стискальні) набувають найбільших значень у точках поперечного перерізу, найбільш віддалених від його нейтральної лінії.

Якщо координати точок, найбільш віддалених від нейтральної лінії, відомі ( $y^*$  і  $z^*$ ), то умова міцності має вигляд

$$\sigma_{x \max} = M_{зг} \left( \frac{z^*}{I_y} \cos \alpha + \frac{y^*}{I_z} \sin \alpha \right) \leq [\sigma]. \quad (3.38)$$

Для визначення небезпечних точок перерізів складних обрисів слід побудувати дотичні до контуру перерізу, паралельні нейтральній лінії. Точки дотику і будуть небезпечними.

### Зауваження

Для поперечних перерізів з виступними кутами, у яких обидві головні осі інерції є осями симетрії (прямокутного, коробчастого, двотаврового і т. д.), небезпечні точки розташовані в кутах цих перерізів, тобто їх можна знайти без визначення положення нейтральної лінії:

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = |M_{зг}| \left( \frac{\cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma]. \quad (3.39)$$

### 3.5.2. Приклади розв'язання задач

#### Приклад 3.3

Підібрати розміри прямокутного поперечного перерізу консольної балки (рис. 3.34); побудувати епюру нормальних напружень в небезпечному перерізі; визначити місце розташування нейтральної лінії.

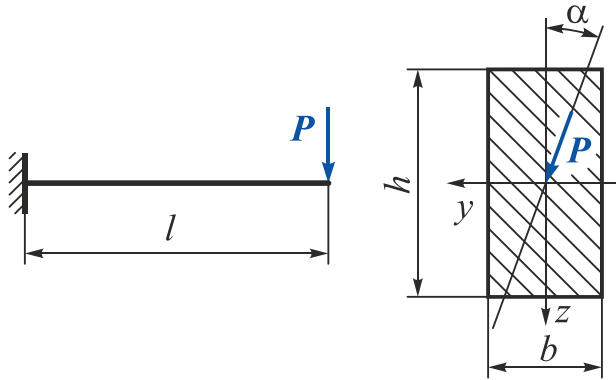


Рис. 3.34

**Дано:**  $P = 20 \text{ кН}$ ;  $l = 2 \text{ м}$ ;  
 $\alpha = 20^\circ$ ;  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ;  
 $k = h/b = 1,5$ .

**Необхідно** визначити  $b$ ,  $h$ ; побудувати епюру  $\sigma_x$  в небезпечному перерізі; визначити місце розташування нейтральної лінії.

#### Розв'язання

1. На рис. 3.34 видно, що максимальний згинальний момент буде діяти в жорсткому затисненні:

$$M_{зг} = -Px = -20x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l=2} = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Викладемо максимальний згинальний момент в проекціях на головні центральні осі інерції поперечного перерізу балки (осі  $y$  і  $z$ ) (рис. 3.35):

$$M_y = M_{зг} \cos \alpha = -40 \cdot \cos 20^\circ = -37,588 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z = M_{зг} \sin \alpha = -40 \cdot \sin 20^\circ = -13,681 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2. Покажемо схему дії внутрішніх силових факторів в небезпечному перерізі (рис. 3.36).

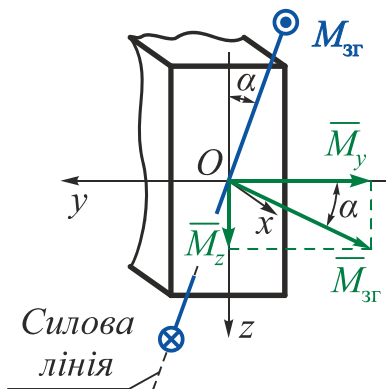


Рис. 3.35

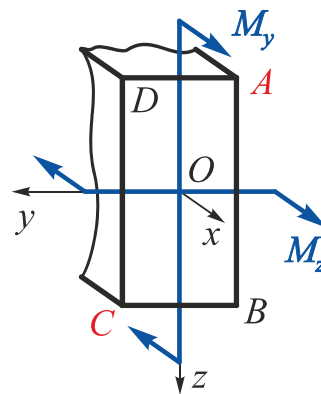


Рис. 3.36

З цього рисунка видно, що найнебезпечнішими точками поперечного перерізу будуть кутові точки  $A$  (найбільші розтягальні напруження) і  $C$  (найбільші стискальні напруження).

Оскільки балку виконано з пластичного матеріалу, то  $[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma]$  й, отже, точки  $A$  і  $C$  є рівнонебезпечними.

Запишемо для небезпечної точки  $A$  умову міцності при косому згині:

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = |M_{зг}| \left( \frac{\cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma].$$

Перепишемо цю формулу в іншому вигляді:

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_{зг}|}{W_y} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right) = \frac{|M_{зг}|}{W_y} (\cos \alpha + k \sin \alpha) \leq [\sigma],$$

де  $W_y = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6};$$

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{k^2 b^3}{6} \frac{6}{kb^3} = k.$$

Тоді

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_{зг}|}{k^2[\sigma]} (\cos \alpha + k \sin \alpha)} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 40 \cdot 10^3}{2^2 \cdot 120 \cdot 10^6} (\cos 20^\circ + 2 \cdot \sin 20^\circ)} = 0,0933 \text{ м};$$

$$h = kb = 2 \cdot 0,0977 = 0,1866 \text{ м};$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,0933 \cdot 0,1866^2}{6} = 541,444 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,1866 \cdot 0,0933^2}{6} = 270,722 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

3. Визначимо діючі напруження в кутових точках поперечного перерізу і побудуємо епюру розподілу нормальних напружень, що діють в небезпечному перерізі (рис. 3.37):

$$\sigma(M_y) = \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{37,588 \cdot 10^3}{541,444 \cdot 10^{-6}} = 69,422 \text{ МПа};$$

$$\sigma(M_z) = \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{13,681 \cdot 10^3}{270,722 \cdot 10^{-6}} = 50,535 \text{ МПа};$$



$$\sigma_A = \sigma(M_y) + \sigma(M_z) = 69,422 + 50,535 = 119,957 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\sigma(M_y) + \sigma(M_z) = -69,422 + 50,535 = -18,887 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -\sigma(M_y) - \sigma(M_z) = -69,422 - 50,535 = -119,957 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = +\sigma(M_y) - \sigma(M_z) = 69,422 - 50,535 = 18,887 \text{ МПа}.$$

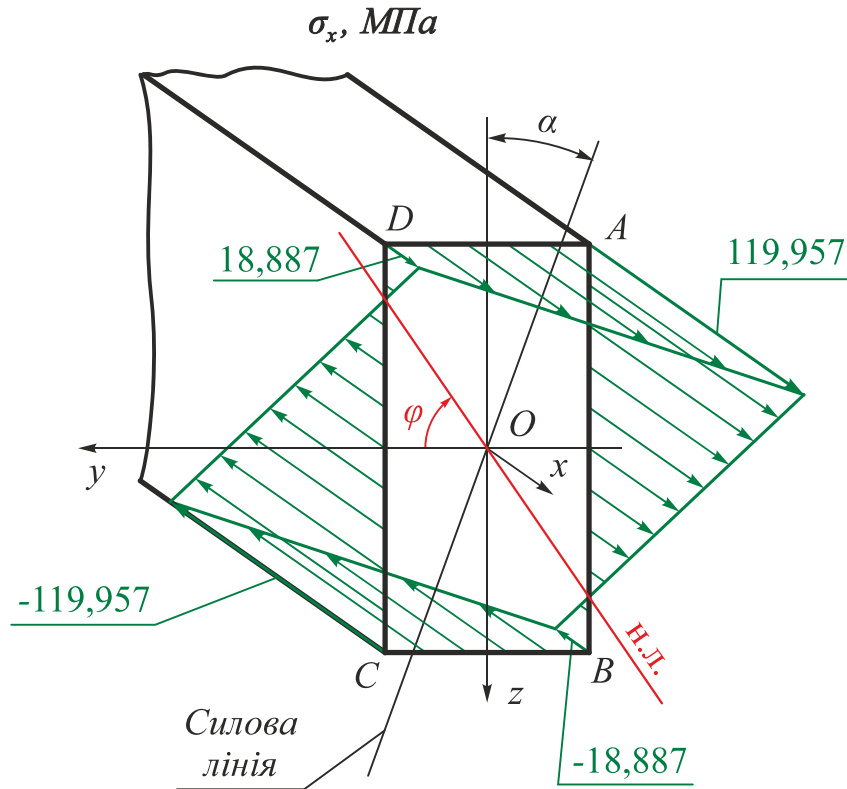


Рис. 3.37

4. Визначимо аналітично положення нейтральної лінії:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{bh^3}{12} \frac{12}{hb^3} \operatorname{tg} \alpha = -k^2 \operatorname{tg} \alpha = -2^2 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = -1,4559;$$

$$\varphi = -55,52^\circ.$$

5. Порівняємо напруги при косому і плоскому (при  $\alpha = 0$ ) згинах:

$$\sigma_{x \max(\alpha=0)} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{40 \cdot 10^3}{541,444 \cdot 10^{-6}} = 73,877 \text{ МПа};$$

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_{\alpha=0}} = \frac{119,957}{73,877} = 1,62.$$

Максимальні напруження при косому згині більші, ніж при плоскому в 1,62 раза, тобто косий згин є небезпечнішим за плоский.

### Приклад 3.4

При встановленні на опори двотаврової балки (№ 20,  $W_y = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ,  $W_z = 23,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ), призначеної для роботи на згин у вертикальній площині, що збігається з площиною стінки, було допущено помилку, і стінка двотавра відхилилася від вертикалі на кут  $\alpha = 1^\circ$ . Визначити пов'язане з цим збільшення найбільших нормальних напружень.

### Розв'язання

Відхилення осі двотавра (вісь  $z$ ) від вертикалі призводить до виникнення косоного згину (рис. 3.38) і появи згинальних моментів  $M_y$  і  $M_z$ .

Розкладемо згинальний момент під дією сили  $P$  в проекціях на головні центральні осі інерції поперечного перерізу балки (осі  $y$  і  $z$ ):

$$M_y = M_{зг} \cos \alpha = M_{зг} \cdot \cos 1^\circ = 0,99985 \cdot M_{зг};$$

$$M_z = M_{зг} \sin \alpha = M_{зг} \cdot \sin 1^\circ = 0,01745 \cdot M_{зг}.$$

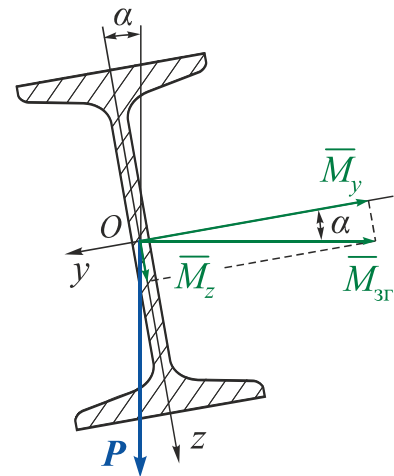


Рис. 3.38

Максимальні напруження при косому згині

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{M_{зг} \cos \alpha}{W_y} + \frac{M_{зг} \sin \alpha}{W_z} = \frac{M_{зг}}{W_y} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right).$$

Тоді

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{зг}}{W_y} \left( \cos 1^\circ + \frac{184 \cdot 10^{-6}}{23,1 \cdot 10^{-6}} \sin 1^\circ \right) = 1,139 \cdot \frac{M_{зг}}{W_y}.$$

У разі правильного встановлення балки сила  $P$  збігалася б з вертикальною віссю  $z$  балки і виникав би прямий згин, згинальний момент дорівнював би  $M_{зг}$ , а максимальне нормальне напруження

$$\sigma_{x \max(\alpha=0)} = \frac{M_{зг}}{W_y}.$$

Таким чином, максимальні напруження при косому згині внаслідок такого незначного відхилення від вертикалі зростуть на 13,9 %.

### Приклад 3.5

Консольна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена зусиллям  $P$  і розподіленим прямокутним навантаженням  $q$  (рис. 3.39). Визначити максимальне напруження, що діє в небезпечному перерізі.

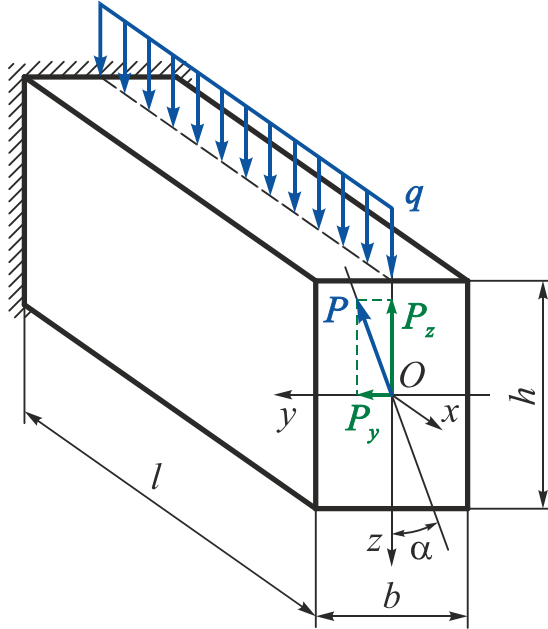


Рис. 3.39

*Дано:*  $P = 12 \text{ кН}$ ;  $q = 14 \text{ кН/м}$ ;  
 $b = 0,1 \text{ м}$ ;  $k = h/b = 1,5$ ;  
 $l = 1,5 \text{ м}$ ;  $\alpha = 20^\circ$ .

*Необхідно* визначити  $\sigma_{x \max}$ .

### Розв'язання

1. Розкладемо всі зовнішні навантаження, що діють на балку, в проекціях на головні центральні осі інерції поперечного перерізу балки (осі  $y$  і  $z$ ).

У даному випадку:

$$P_z = P \cos \alpha = 12 \cdot \cos 20^\circ = 11,276 \text{ кН}; \quad q_z = q = 14 \text{ кН/м};$$

$$P_y = P \sin \alpha = 12 \cdot \sin 20^\circ = 4,104 \text{ кН}; \quad q_y = 0.$$

2. Побудуємо епюру згинальних моментів, що діють у вертикальній площині ( $xOz$ ) (рис. 3.40):

$$M_y = P_z x - \frac{q x^2}{2} = 11,276 \cdot x - \frac{14 x^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l=1,5} = 1,164 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Визначимо екстремальне значення  $M_y$ :

$$\frac{dM_y}{dx} = P_z - qx_e = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{P_z}{q} = \frac{11,276}{14} = 0,805 \text{ м} \quad \text{і} \quad M_y^e = 4,541 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Побудуємо епюру згинальних моментів, що діють в горизонтальній площині ( $xOy$ ) (див. рис. 3.40):

$$M_z = -P_y x = -4,104 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l=1,5} = -6,156 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

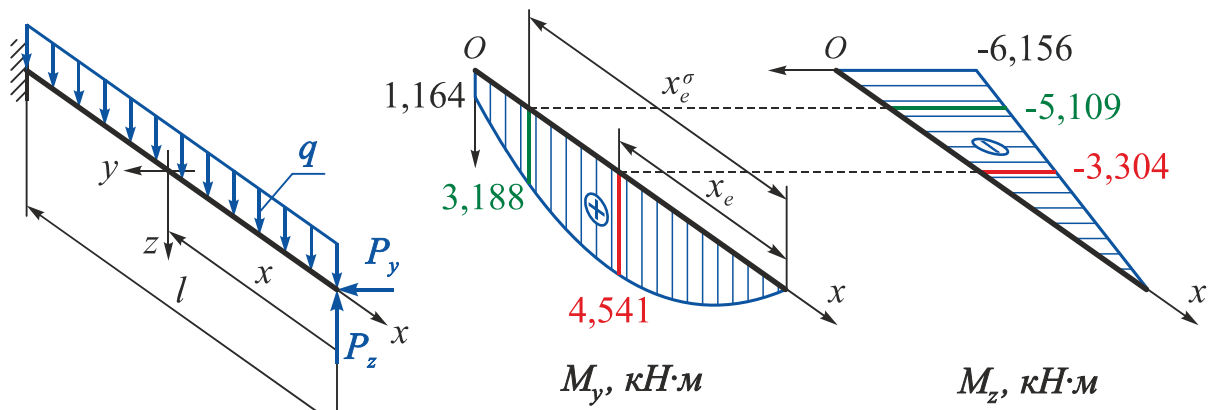


Рис. 3.40

4. Обчислимо напруження, що діє в небезпечній точці небезпечного перерізу.

У будь-якому перерізі найбільше напруження діє в одній з точок, найбільш віддаленій як від осі  $y$ , так і від осі  $z$ . Тому

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{P_z x - \frac{q x^2}{2}}{W_y} + \frac{P_y x}{W_z}.$$

Введемо позначення  $m = \frac{W_y}{W_z} = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{6}{h b^2} = \frac{h}{b} = k = 1,5$ .

Тоді

$$\sigma_{x \max} = \frac{1}{W_y} \left( P_z x - \frac{q x^2}{2} + m P_y x \right).$$

Знайдемо максимальне значення найбільшого напруження

$$\frac{d(\sigma_{x \max})}{dx} = \frac{1}{W_y} (P_z - q x_{e\sigma} + m P_y) = 0, \text{ звідки}$$

$$x_{e\sigma} = \frac{P_z}{q} + m \frac{P_y}{q} = \left\{ \text{оскільки } m = k = 1,5 \right\} = \frac{11,276}{14} + \frac{1,5 \cdot 4,104}{14} = 1,245 \text{ м.}$$

Визначимо значення згинальних моментів, що діють в небезпечному перерізі:

$$M_{y_0} = 11,276 \cdot x - \frac{14 x^2}{2} \Big|_{x=x_{e\sigma}} = 3,188 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{z_0} = -4,104 \cdot x \Big|_{x=x_{e\sigma}} = -5,109 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Таким чином, остаточно

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{3,188 \cdot 10^3}{0,000375} + \frac{|-5,109 \cdot 10^3|}{0,00025} = 28,937 \text{ МПа.}$$

### Зауваження

При косому згині не завжди небезпечним є переріз, в якому згинальний момент має найбільше значення. Так, в даному випадку в небезпечному перерізі

$$M_{зг} = \sqrt{M_{y_0}^2 + M_{z_0}^2} = \sqrt{3,188^2 + 5,109^2} = 6,022 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sigma_{x \text{ max}} = 28,937 \text{ МПа};$$

в жорсткому затисненні

$$M_{зг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{1,164^2 + 6,156^2} = 6,265 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sigma_{x \text{ max}} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{1,164}{0,000375} + \frac{6,156}{0,00025} = 27,728 \text{ МПа};$$

в перерізі при  $x_e = 0,805 \text{ м}$

$$M_{зг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{4,541^2 + 3,304^2} = 5,616 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sigma_{x \text{ max}} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{4,541}{0,000375} + \frac{3,304}{0,00025} = 25,325 \text{ МПа}.$$

### Приклад 3.6

Консольна балка двотаврового поперечного перерізу довжиною  $l = 1 \text{ м}$  навантажена прямокутним розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q = 5 \text{ кН/м}$  (рис. 3.41). Силова площина складає кут  $\alpha = 15^\circ$  з площиною стінки двотавра. Підібрати двотавровий переріз, якщо  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

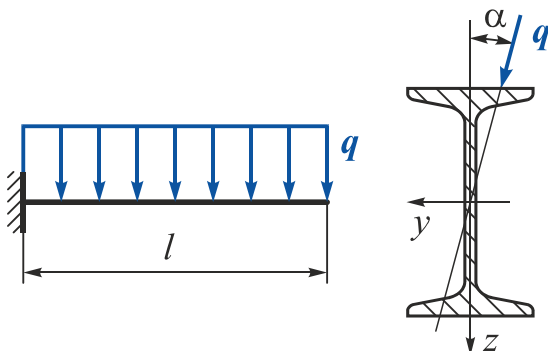


Рис. 3.41

*Дано:*  $l = 1 \text{ м}; q = 10 \text{ кН/м};$   
 $\alpha = 15^\circ; [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$

*Необхідно* підібрати номер двотавра.

### Розв'язання

З рис. 3.41 видно, що максимальний згинальний момент буде діяти в жорсткому затисненні:

$$M_{зг} = -\frac{qx^2}{2} = -10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l=1} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Умова міцності в даному випадку (переріз з виступними кутами) має вигляд

$$\sigma_{x \max} = |M_{зг}| \left( \frac{\cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{W_z} \right) = \frac{|M_{зг}|}{W_y} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right) \leq [\sigma],$$

звідки

$$W_y \geq \frac{|M_{зг}|}{[\sigma]} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right) = \frac{5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \left( \cos 15^\circ + \frac{W_y}{W_z} \sin 15^\circ \right) =$$

$$= 31,25 \cdot 10^{-6} \left( 0,966 + \frac{W_y}{W_z} 0,259 \right) = 30,188 \cdot 10^{-6} + \frac{W_y}{W_z} 8,094 \cdot 10^{-6}.$$

Переріз підберемо методом послідовних наближень. У правій частині цього виразу знаходиться відношення  $W_y/W_z$ , яке змінюється від 6,12 (двотавр № 10) до 14,07 (двотавр № 60).

У першому наближенні візьмемо  $W_y/W_z = 10$ , тоді

$$W_y \geq 30,188 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 8,094 \cdot 10^{-6} = 111,128 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Із сортаменту виберемо двотавр № 16, у якого

$$W_y = 109 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad W_z = 14,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Перевіримо його міцність:

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_{зг}|}{W_y} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right) = \frac{5 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} \left( 0,966 + \frac{109}{14,5} \cdot 0,259 \right) =$$

$$= 133,62 \text{ МПа}.$$

Недовантаження  $\Delta\sigma \% = \left| \frac{133,88 - 160}{160} \right| = 16,325 \%$ .

Тоді виберемо із сортаменту двотавр № 14, у якого

$$W_y = 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad W_z = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Перевіримо його міцність:

$$\sigma_{x \max} = \frac{5 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^{-6}} \left( 0,966 + \frac{81,7}{11,5} \cdot 0,259 \right) = 171,73 \text{ МПа}.$$

Перевантаження  $\Delta\sigma \% = \left| \frac{171,73 - 160}{160} \right| = 7,33 \% > 5 \%$ .

Таке перевантаження є неприпустимим, тому вибираємо двотавр № 16.

Порівняємо максимальні напруження при косому і плоскому згинах (при  $\alpha = 0$ ):

$$\sigma_{x \max} (\alpha=0) = \frac{M_y}{W_y} = \frac{5 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 45,872 \text{ МПа}; \quad \frac{\sigma_A}{\sigma_{\alpha=0}} = \frac{133,62}{45,872} = 2,91.$$

Таким чином, максимальні напруження при косому згині більші, ніж при плоскому в 2,91 раза.

### 3.5.3. Позацентрове розтягнення-стиснення

*Позацентрове розтягнення-стиснення* реалізується в поперечних перерізах бруса в тому випадку, коли брус навантажений зусиллям, лінія дії якого паралельна поздовжній осі бруса, але не збігається з нею.

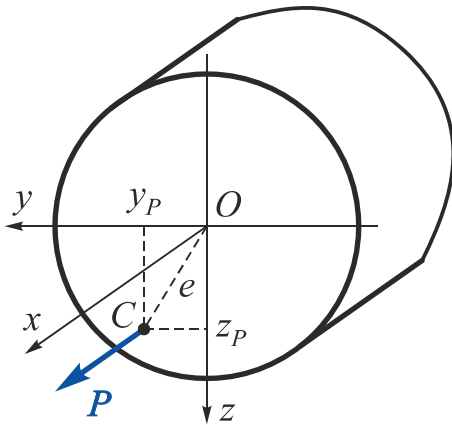


Рис. 3.42

Нехай на брус діє сила  $P$ , паралельна поздовжній осі і прикладена в точці  $C$  поперечного перерізу. Координати цієї точки в системі головних осей позначимо  $y_P$  і  $z_P$ , а відстань від цієї точки до осі  $x$ , що називається ексцентриситетом, –  $e$  (рис. 3.42).

Якщо перенести силу  $P$  паралельно самій собі з точки  $C$  в центр ваги перерізу, то позацентрове розтягнення можна подати як суму трьох простих деформацій: розтягнення і згину в двох площинах.

Тоді у всіх поперечних перетинах бруса будуть діяти такі внутрішні силові фактори:

$$\begin{aligned} N_x &= P; \\ M_y &= P \cdot z_P; \\ M_z &= P \cdot y_P. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Таким чином, позацентрове розтягнення-стиснення можна розглядати, спираючись на принцип суперпозиції, як результат сумарної дії **чистого розтягнення-стиснення** і **косого** або **плоского чистого згину**, тобто воно є окремим випадком складного опору.

#### Визначення діючих напружень

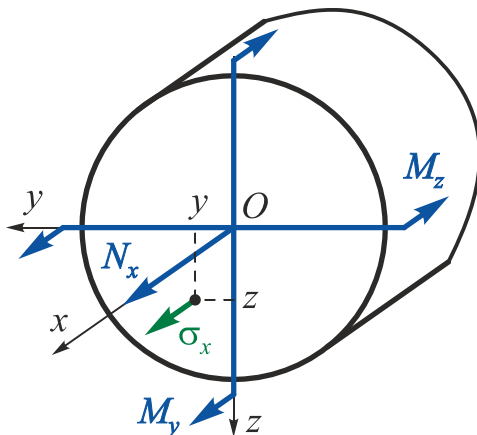


Рис. 3.43

На рис. 3.43 показано схему дії внутрішніх силових факторів в поперечному перерізі бруса. Відсутність поперечної сили в перерізі бруса означає, що в ньому реалізується **чистий згин (плоский або косий)**. Це знімає обмеження, які мають виконуватися при **реалізації поперечного косого згину**.

Використовуючи принцип суперпозиції, визначимо нормальні напруження в довільній точці поперечного перерізу, що лежить в першому квадранті, з координатами  $y, z$  (див. рис. 3.43). Напрямок осей  $y$  і  $z$ , тобто положення першого квадранта, виберемо такий, щоб  $N_x, M_y, M_z$  створювали в цьому квадранті додатні напруження. Тоді

$$\sigma_x = \sigma_x(N_x) + \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z) = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y, \quad (3.41)$$

де  $F$  – площа поперечного перерізу;

$I_y, I_z$  – моменти інерції поперечного перерізу.

Підставимо в це співвідношення значення  $N_x, M_y$  і  $M_z$  із формул (3.40):

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \frac{Pz_P}{I_y} z + \frac{Py_P}{I_z} y = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_P}{I_y/F} z + \frac{y_P}{I_z/F} y \right). \quad (3.42)$$

Введемо позначення

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}, \quad (3.43)$$

де  $i_y, i_z$  – радіуси інерції поперечного перерізу бруса відносно головних центральних осей його інерції.

З урахуванням співвідношень (3.43) перепишемо вираз (3.42) у такому вигляді:

$$\sigma_{xE} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y \right), \quad (3.44)$$

де  $z_P, y_P$  – *координати* точки прикладання сили  $P$ ;

$y, z$  – *координати* точки, в якій визначається напруження.

Отриманий вираз дозволяє знайти напруження в будь-якій точці поперечного перерізу будь-якого квадранта.

### Визначення положення нейтральної лінії

Для знаходження небезпечної точки (небезпечних точок) перерізу необхідно визначити положення нейтральної лінії перерізу.

Рівняння нейтральної лінії отримаємо з умови  $\sigma_x = 0$ , прирівнявши до нуля праву частину виразу (3.44). Оскільки  $P/F \neq 0$ , то

$$1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y = 0. \quad (3.45)$$



Це рівняння прямої, що не проходить через початок координат.

Перетворимо співвідношення (3.45) до вигляду рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_P}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_P}\right)} = 1 \quad (3.46)$$

або

$$\frac{z}{a_z} + \frac{y}{a_y} = 1. \quad (3.47)$$

Отже, відрізки, що відтинаються нейтральною лінією на осях  $y$  і  $z$ , можна визначити із співвідношень

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_P}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_P}. \quad (3.48)$$

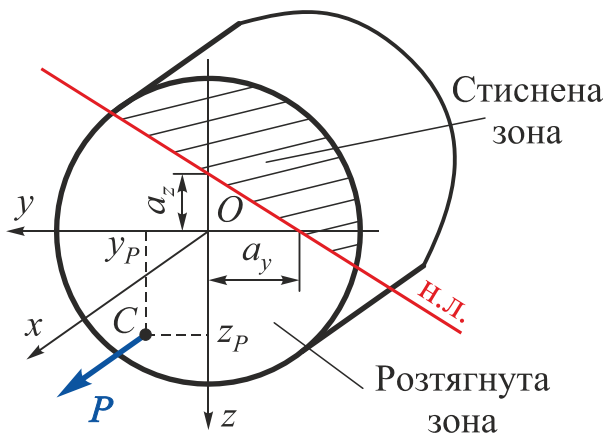


Рис. 3.44

Із цих співвідношень випливає, що  $a_y$  і  $y_P$ ,  $a_z$  і  $z_P$  завжди мають взаємно протилежні знаки, тобто точка прикладання сили (точка  $C$ ) і нейтральна лінія завжди лежать по різні боки від центру ваги перерізу (рис. 3.44).

Розглянемо деякі характерні особливості, пов'язані з поведінкою нейтральної лінії при різних положеннях точки прикладання сили  $P$ :

1. Положення нейтральної лінії не залежить від величини і знака сили  $P$ ;
2. При позацентровому розтягненні-стисненні нейтральна лінія може як перетинати поперечний переріз, так і перебувати за його межами. У першому випадку в поперечному перерізі виникають напруження різних знаків: одна частина перерізу працює в умовах розтягнення, інша частина – в умовах стиснення. У другому випадку напруження в усіх точках поперечного перерізу будуть мати однаковий знак.
3. Положення нейтральної осі залежить від координат точки прикладання навантаження – чим ближче сила прикладена до центру ваги поперечного перерізу (менше ексцентриситет), тим далі від нього розташована нейтральна лінія.
4. Якщо сила  $P$  прикладена в точці, що лежить на осі  $y$  ( $z_P = 0$ ), то нейтральна лінія буде паралельна осі  $z$ , оскільки  $a_z = -i_y^2/z_P = -i_y^2/0 = -\infty$ .

Якщо сила  $P$  прикладена в точці, що лежить на осі  $z$  ( $y_P = 0$ ), то нейтральна лінія буде паралельна осі  $y$ , оскільки  $a_y = -i_z^2/y_P = -i_z^2/0 = -\infty$ .

### Умова міцності при позацентровому розтягненні-стисненні

Вираз (3.44) в системі осей  $\sigma_x, y, z$  є рівнянням площини, отже,  $\sigma_x = \sigma_{max}$  буде в точках поперечного перерізу, найбільш віддалених від його нейтральної лінії.

Якщо координати небезпечної точки визначені та дорівнюють  $y^*$  і  $z^*$ , то умова міцності має вигляд

$$\sigma_{x \max} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z^* + \frac{y_P}{i_z^2} y^* \right) \leq [\sigma]. \quad (3.49)$$

Для перерізів складних обрисів координати небезпечних точок можна визначити, провівши паралельно нейтральній лінії дотичні до контуру поперечного перерізу. Ті точки дотику, відстань від яких до нейтральної лінії максимальна, і є небезпечними точками поперечного перерізу.

#### Зауваження

Для поперечних перерізів з виступними кутами, обидві головні осі інерції яких є осями симетрії (прямокутного, коробчастого, двотаврового і т.д.), небезпечні точки розташовані в кутах цих перерізів, тобто їх можна знайти без визначення положення нейтральної лінії:

$$\sigma_{x \max} = \frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.50)$$

### 3.5.4. Ядро перерізу

При конструюванні стрижнів з матеріалів, що погано чинять опір розтягненню (чавуну, цегляної кладки, бетону і т.д.), бажано добитися того, щоб весь поперечний переріз працював тільки на стиснення, тобто не дозволяючи точці прикладання сили  $P$  занадто віддалятися від центру ваги перерізу, обмежуючи величину ексцентриситету.

Бажано також заздалегідь знати, який ексцентриситет при вибраному типі поперечного перерізу можна допускати, не ризикуючи викликати в перерізі бруса напруги різних знаків. Для цього необхідно встановити область можливих положень точки прикладання сили, при яких напруги у всіх точках поперечного перерізу будуть мати однаковий знак. Така область називається ядром перерізу.

**Ядром перерізу** називається область, зосереджена навколо центру ваги перерізу, прикладання розтягальної або стискальної сили, в межах якої приводить до появи в усіх точках поперечного перерізу напруження однакового знака.

З цього визначення випливає, що якщо розтягальне або стискальне зусилля прикладено на межі ядра перерізу, то нейтральна лінія дотикається до контуру поперечного перерізу.

Для побудови контуру межі ядра перерізу необхідно розглянути різні положення нейтральної лінії, дотичної до контуру перерізу, і обчислити координати відповідних точок прикладання сили  $P$  за формулами, що випливають із співвідношень (3.46):

$$y_P = -\frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_P = -\frac{i_y^2}{a_z}. \quad (3.51)$$

Обчислені координати визначають точки, що лежать на межі ядра перерізу.

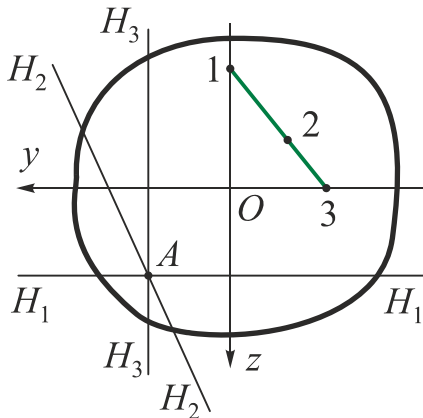


Рис. 3.45

Для полегшення побудови ядра перерізу використаємо властивість нейтральної лінії: при повороті нейтральної лінії навколо деякої фіксованої точки  $A$  контуру поперечного перерізу точка прикладання сили переміщується вздовж деякої прямої (рис. 3.45).

На рис. 3.45 зображено три положення точки прикладання сили  $P$  на деякій прямій 1-3 і відповідно три положення нейтральної лінії.

Для доведення цієї властивості досить підставити в рівняння (3.45) координати точки  $A$  ( $y_A, z_A$ ), що лежить на нейтральній лінії.

Отримаємо

$$1 + \frac{z_P}{i_y^2} z_A + \frac{y_P}{i_z^2} y_A = 0. \quad (3.52)$$

Дійсно, вираз (3.52) при  $z_A = const$  є рівнянням прямої відносно координат точок прикладання сили  $P - (y_P, z_P)$ .

Таким чином, для побудови ядра перерізу будь-якої фігури потрібно накреслити кілька положень нейтральної лінії, які збігаються зі сторонами перерізу, а також дотикаються до його виступних точок, і обчислити координати точок, що лежать на межі ядра перерізу.

### 3.5.5. Приклади розв'язання задач

#### Приклад 3.7

Для бруса прямокутного поперечного перерізу (рис. 3.46) знайти діючі напруження в характерних точках довільного перерізу; побудувати в цьому перерізі епюру розподілу нормальних напружень; визначити аналітично положення нейтральної лінії.

**Дано:**  $P = 40 \text{ кН}; \quad b = 0,08 \text{ м};$   
 $h = 0,04 \text{ м}; \quad [\sigma] = 120 \text{ МПа}.$

**Необхідно:**

- 1) знайти діючі напруження в характерних точках довільного перерізу;
- 2) побудувати епюру розподілу  $\sigma_x$ ;
- 3) визначити положення нейтральної лінії.

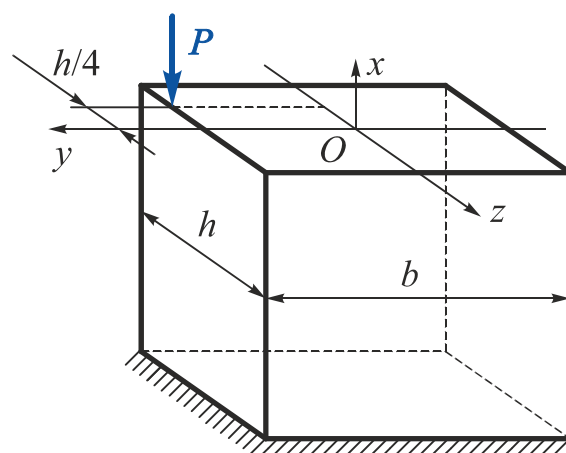


Рис. 3.46

#### Розв'язання

1. Приведемо зовнішню силу  $P$  статичним нулем до центру ваги поперечного перерізу (рис. 3.47). Тоді в довільному поперечному перерізі бруса будуть діяти

$$|N_x| = P = 40 \text{ кН};$$

$$|M_y| = Pz_P = |-40 \cdot 0,01| = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$|M_z| = Py_P = 40 \cdot 0,04 = 1,6 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

де

$$y_P = \frac{b}{2} = \frac{0,08}{2} = 0,04 \text{ м};$$

$$z_P = -\frac{h}{4} = -\frac{0,04}{4} = -0,01 \text{ м}.$$

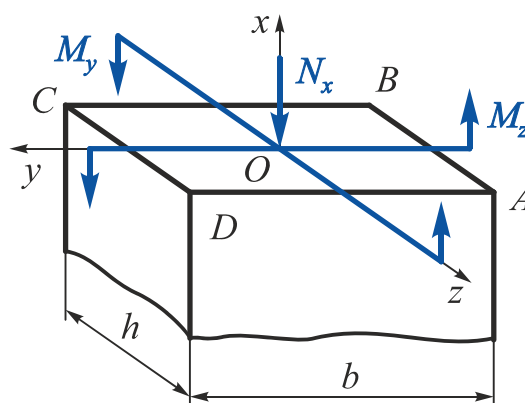


Рис. 3.47

2. Знайдемо напруження в кутових точках поперечного перерізу за формулою (3.48) і побудуємо епюру розподілу нормальних напружень, що діють в перерізі (рис. 3.48):

$$\sigma_{x \max} = \sigma_x(N_x) + \sigma_{x \max}(M_y) + \sigma_{x \max}(M_z) = \frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z},$$

де  $F = bh = 0,08 \cdot 0,04 = 0,0032 \text{ м}^2$ ;

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,08 \cdot 0,04^2}{6} = 21,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,04 \cdot 0,08^2}{6} = 42,67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\sigma_x(N_x) = \frac{|N_x|}{F} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,0032} = 12,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{x \max}(M_y) = \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{0,4 \cdot 10^3}{21,33 \cdot 10^{-6}} = 18,753 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{x \max}(M_z) = \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{1,6 \cdot 10^3}{42,67 \cdot 10^{-6}} = 37,497 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$\sigma_A = -\sigma(N_x) + \sigma(M_y) + \sigma(M_z) = -12,5 + 18,753 + 37,497 = 43,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\sigma(N_x) - \sigma(M_y) + \sigma(M_z) = -12,5 - 18,753 + 37,497 = 6,244 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -\sigma(N_x) - \sigma(M_y) - \sigma(M_z) = -12,5 - 18,753 - 37,497 = -68,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\sigma(N_x) + \sigma(M_y) - \sigma(M_z) = -12,5 + 18,753 - 37,497 = -31,244 \text{ МПа}.$$

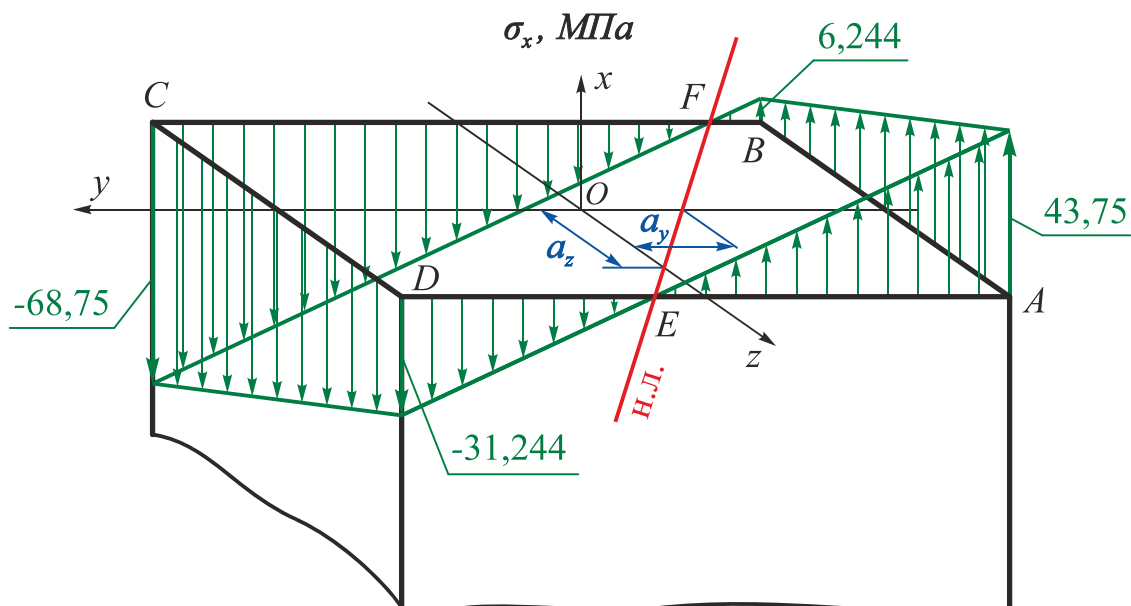


Рис. 3.48

Проведемо нейтральну лінію через точки перетину епюри нормальних напружень з площиною поперечного перерізу (точки  $E$  і  $F$ ). З рис. 3.48 видно, що точка прикладання сили і нейтральна лінія лежать по різні боки від центру ваги поперечного перерізу.

3. Визначимо аналітично положення нейтральної лінії, тобто відрізки, що відтинаються нейтральною лінією на осях  $y$  і  $z$ , за співвідношенням (3.48) і порівняємо їх з відрізками, отриманими графічним способом (див. рис. 3.48):

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{(2,309 \cdot 10^{-2})^2}{0,04} = -0,01333 \text{ м};$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{(1,155 \cdot 10^{-2})^2}{-0,01} = 0,01334 \text{ м},$$

де

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,08 \cdot 0,04^3}{12} = 42,67 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,04 \cdot 0,08^3}{12} = 170,67 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{42,67 \cdot 10^{-8}}{0,0032}} = 1,155 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \sqrt{\frac{170,67 \cdot 10^{-8}}{0,0032}} = 2,309 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

### **Приклад 3.8**

На кромці сталевій штабі, навантаженої розтягувальним зусиллям, з'явилася тріщина (рис. 3.49). Щоб тріщина не поширювалася, на її місці було вифрезеровано галтель. Знайти, як збільшилося при цьому напруження в штабі. Концентрацією напружень знехтувати.

**Дано:**  $P = 40 \text{ кН}; b = 50 \text{ мм};$

$t = 8 \text{ мм}; a = 5 \text{ мм}.$

**Необхідно** порівняти найбільші напруження, що діють в цільній штабі і штабі з галтеллю.

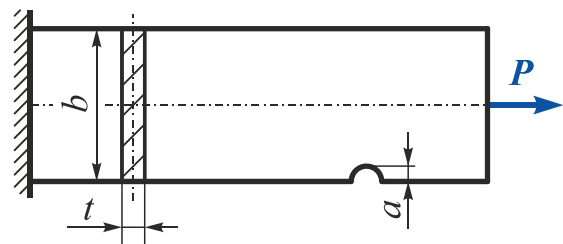


Рис. 3.49

### **Розв'язання**

У поперечних перерізах штабі без галтелі реалізується чисте розтягнення. Тому нормальні напруження розподілені в перерізі рівномірно, їх визначають за співвідношенням

$$\sigma_x = \frac{P}{bt} = \frac{40 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ МПа}.$$

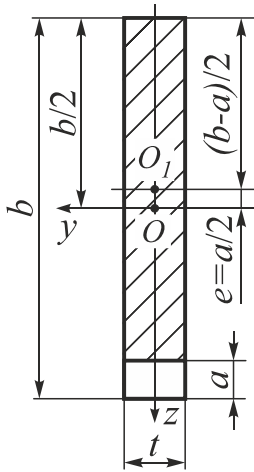


Рис. 3.50

У перерізі з галтеллю реалізується позацентрове розтягнення, тобто діє поздовжня сила

$$N_x = P$$

і згинальний момент

$$M_y = Pe = \left\{ \text{оскільки } e = \frac{b}{2} - \frac{b-a}{2} = \frac{a}{2} \right\} = P \frac{a}{2},$$

де  $e$  – ексцентриситет прикладання сили (рис. 3.50).

На рис. 3.50  $O$  – точка прикладання сили  $P$ ;  $O_1$  – центр ваги перерізу з галтеллю.

Максимальні нормальні напруження в перерізі з галтеллю будуть діяти в нижній частині перерізу:

$$\begin{aligned} \sigma_{x \max} &= \frac{P}{F} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{P}{t(b-a)} + \frac{P(a/2) \cdot 6}{t(b-a)^2} = \frac{P}{t(b-a)} \left( 1 + \frac{3a}{b-a} \right) = \\ &= \frac{40 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-3} \cdot (50 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3})} \left( 1 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}} \right) = 148,15 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Напруження зросло на величину

$$\Delta\sigma_x = \frac{\sigma_{x \max} - \sigma_x}{\sigma_x} = \frac{148,15 - 100}{100} \cdot 100 \% = 48,15 \%$$

### Зауваження

Якщо таку ж галтель вирізати симетрично з протилежного боку штаби, то в цьому перерізі буде реалізовано центральне (осьове) розтягнення. З урахуванням зменшення площі поперечного перерізу отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{t(b-2a)} = \frac{40 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-3} \cdot (50 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3})} = \\ &= 125 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Розглянемо розподіл нормальних напружень по висоті перерізу з галтеллю:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{F} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{(b-a)t} + \frac{Pa \cdot 12}{2t(b-a)^3} \cdot z = \frac{P}{t(b-a)} \left( 1 + \frac{6a}{(b-a)^2} \cdot z \right) = \\ &= 111,11 \cdot 10^6 \cdot (1 + 14,815 \cdot z) \quad \Big|_{z_1} = 148,15 \text{ МПа} \quad \Big|_{z_2} = 74,07 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

де  $z_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{50 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}}{2} = 22,5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$

$$z_2 = -z_1 = -22,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Епюри нормальних напружень по висоті в перерізі без галтелі і з галтеллю показано на рис. 3.51.

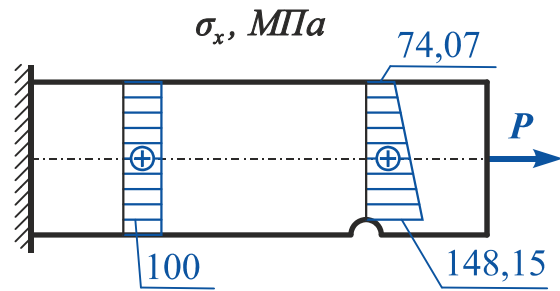


Рис. 3.51

### Приклад 3.9

Визначити розмір поперечного перерізу струбцини (рис. 3.52), якщо сила сти-снення деталей  $P = 10 \text{ кН}$ ,  $a = 80 \text{ мм}$ ,  $b = 14 \text{ мм}$ ,  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .

*Дано:*  $P = 10 \text{ кН}$ ;  $a = 80 \text{ мм}$ ;  
 $b = 14 \text{ мм}$ ;  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .

**Необхідно** визначити  $h$ .

#### Розв'язання

У поперечному перерізі струбцини реалізується від-центрове розтягнення (рис. 3.53), при якому умова міц-ності має вигляд

$$\sigma_{x \max} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma],$$

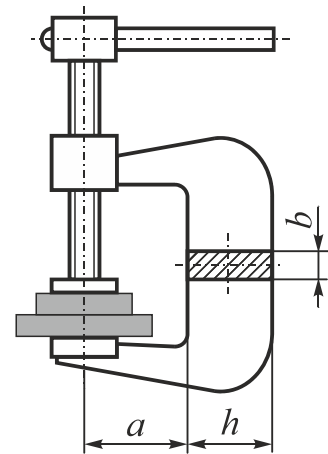


Рис. 3.52

де  $F = bh$  – площа поперечного перерізу;  
 $N_x = P$  – поздовжня сила;  
 $M_y = Pe = P(a + h/2)$  – згинальний момент ві-дносно осі  $y$ ;  
 $W_y = bh^2/6$  – момент опору відносно осі  $y$ .

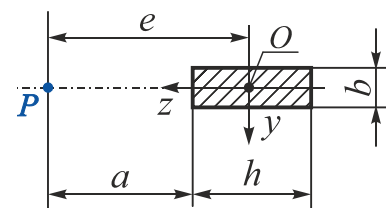


Рис. 3.53

Тоді

$$\sigma_{x \max} = \frac{P}{bh} + \frac{P(a + h/2) \cdot 6}{bh^2} = \frac{P}{bh} + \frac{6Pa}{bh^2} + \frac{3P}{bh} = \frac{4P}{bh} + \frac{6Pa}{bh^2} \leq [\sigma].$$

Після перетворень отримаємо квадратне рівняння відносно  $h$ :

$$[\sigma]bh^2 - 4Ph - 6Pa = 0.$$

Його рішенням є



$$h \geq \frac{-(-4P) \pm \sqrt{(4P)^2 - 4 \cdot [\sigma] \cdot b \cdot (-6Pa)}}{2 \cdot [\sigma] \cdot b} =$$

$$= \frac{40 \cdot 10^3 \pm \sqrt{(4 \cdot 10 \cdot 10^3)^2 + 4 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 80 \cdot 10^{-3}}}{2 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{40 \cdot 10^3 \pm 168 \cdot 10^3}{2,8 \cdot 10^6}.$$

Звідси

$$h \geq 74,56 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Порівняємо внесок згину і розтягнення в загальне напруження:

$$\sigma_{x \max} = \sigma_{x \max}(N_x) + \sigma_{x \max}(M_y) = \frac{P}{bh} + \frac{P(a + h/2) \cdot 6}{bh^2} =$$

$$= \frac{10 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-3} \cdot 74,56 \cdot 10^{-3}} + \frac{10 \cdot 10^3(80 \cdot 10^{-3} + 74,56 \cdot 10^{-3}/2) \cdot 6}{14 \cdot 10^{-3} \cdot (74,56 \cdot 10^{-3})^2} =$$

$$= 9,58 \cdot 10^6 + 90,41 \cdot 10^6 = 99,99 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$\frac{\sigma_{x \max}(N_x)}{\sigma_{x \max}} = \frac{9,58}{99,99} = 0,096; \quad \frac{\sigma_{x \max}(M_y)}{\sigma_{x \max}} = \frac{90,41}{99,99} = 0,904.$$

Таким чином,  $\sigma_{x \max}(M_y)$  в 9,42 рази перевищують  $\sigma_{x \max}(N_x)$ .

### Зауваження

Можна знизити частку розтягальних напружень під дією згинального моменту  $M_y$  за рахунок зменшення ексцентриситету  $e$ . На практиці зазвичай застосовують тавровий або двотавровий поперечний переріз, зміщуючи тим самим центр ваги перерізу  $O$  ближче до лінії дії сили  $P$  і розташовуючи більше матеріалу в області розтягальних напружень, до яких крихкі матеріали більш чутливі (рис. 3.54).

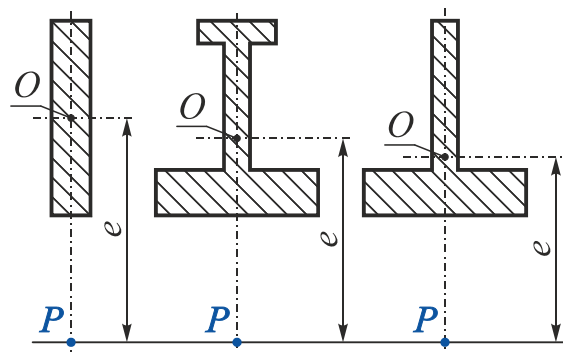


Рис. 3.54

### Приклад 3.10

Побудувати ядро перерізу круглого поперечного перерізу діаметром  $d$  (рис. 3.55).

#### Розв'язання

Якщо точка прикладення розтягального або стискального напруження лежить на межі ядра перерізу, то нейтральна лінія торкається перерізу, не перетинаючи його.

Припустимо, що нейтральна лінія 1 – 1 є дотичною до кола в точці  $A$  і паралельною осі  $z$  (рис. 3.55). У цьому випадку відрізки, які відтинає нейтральна лінія на координатних осях, визначаються так:

$$a_y = -r = -\frac{d}{2}; \quad a_z = \infty.$$

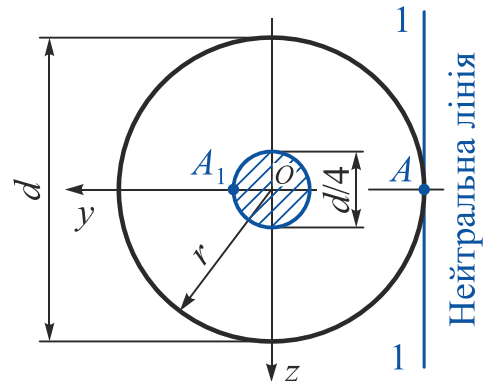


Рис. 3.55

Координати точки прикладання розтягального або стискального зусилля визначимо за формулами (3.51):

$$y_{я(A_1)} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{I_z}{F a_y} = -\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2} \left(-\frac{2}{d}\right) = \frac{d}{8} = \frac{r}{4};$$
$$z_{я(A_1)} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{I_y}{F a_z} = -\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0,$$

де  $F$  – площа поперечного перерізу;

$i_y, i_z$  – радіуси інерції відносно осей  $y$  і  $z$ ;

$I_y, I_z$  – моменти інерції відносно осей  $y$  і  $z$ .

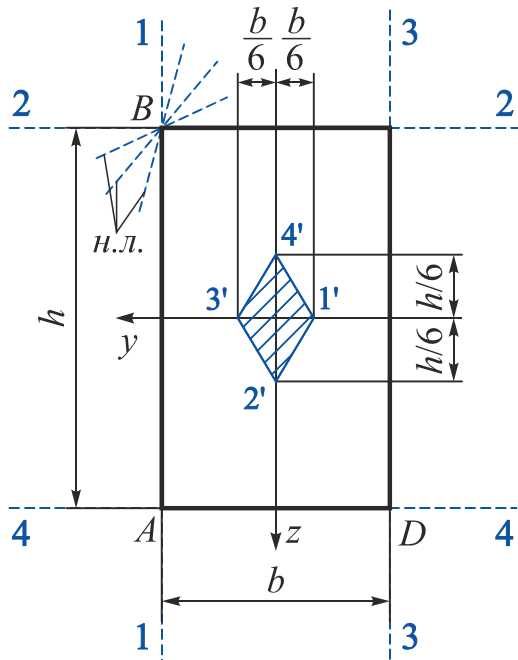
Таким чином, для того щоб нейтральна лінія дотикалася до перерізу в точці  $A$ , необхідно, щоб розтягальне або стискальне зусилля було прикладено в точці  $A_1\{r/4; 0\}$ .

Через симетрію перерізу відносно будь-яких осей, що проходять через геометричний центр кола, впливає, що при інших положеннях нейтральної лінії на колі діаметром  $d$  точки ядра перерізу утворюють концентричне коло діаметром  $d/4$ .

### Приклад 3.11

Побудувати ядро перерізу для прямокутного поперечного перерізу з розмірами сторін  $b \times h$  (рис. 3.56).

#### Розв'язання



Поєднаємо нейтральну лінію зі стороною прямокутника  $AB$  (положення 1 – 1). Тоді відрізки, які відтинає нейтральна лінія на координатних осях, будуть:

$$a_y = \frac{b}{2}; \quad a_z = \infty.$$

Рис. 3.56

Згідно з рівнянням (3.51) координати відповідної точки ( $1'$ ) ядра перерізу

$$y_{я(1')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{I_z}{F a_y} = -\frac{hb^3}{12 bh} \frac{1}{\left(\frac{2}{b}\right)} = -\frac{b}{6};$$

$$z_{я(1')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{I_y}{F a_z} = -\frac{bh^3}{12 bh} \frac{1}{\left(\infty\right)} = 0,$$

де  $F$  – площа поперечного перерізу;

$i_y, i_z$  – радіуси інерції відносно осей  $y$  і  $z$ ;

$I_y, I_z$  – моменти інерції відносно осей  $y$  і  $z$ .

Поєднаємо тепер нейтральну лінію із стороною  $BC$  (положення 2 – 2). Тоді відрізки, які відтинає нейтральна лінія на координатних осях, будуть:

$$a_y = \infty; \quad a_z = -\frac{h}{2},$$

а координати відповідної точки ( $2'$ ) ядра перерізу матимуть значення:

$$y_{я(2')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{I_z}{Fa_y} = -\frac{hb^3}{12bh} \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$z_{я(2')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{I_y}{Fa_z} = \frac{bh^3}{12bh} \left(-\frac{2}{h}\right) = \frac{h}{6}.$$

Аналогічно визначимо координати точок 3' і 4', що відповідають положенням нейтральної лінії 3 – 3 і 4 – 4.

Для побудови ядра перерізу скористаємося такою властивістю нейтральної лінії: при повороті нейтральної лінії навколо деякої фіксованої точки контуру поперечного перерізу точка прикладання сили переміщається вздовж прямої лінії. В цьому випадку при повороті нейтральної лінії навколо нерухомої точки *B* (штрихові лінії на рис. 3.56) точка прикладання сили *P* переміщається вздовж прямої, що проходить через точки 1' і 2'.

Поєднавши точки 1', 2', 3' і 4' прямими лініями, отримаємо контур ядра перерізу у вигляді ромба з діагоналями, що дорівнюють  $h/3$  і  $b/3$ .

Тому в прямокутному поперечному перерізі при позацентровому розтягненні або стисненні напруження будуть мати однаковий знак, якщо точка прикладання сили не виходить за межі середньої третини сторони перерізу.

Розглянемо окремий випадок позацентрового стиснення, коли один з ексцентриситетів дорівнює нулю ( $z_P = 0$ ,  $y_P = e$ ). Покажемо епюри розподілу нормальних напружень по прямокутному перерізу при ексцентриситеті  $e$ , що дорівнює нулю, що менше або більше однієї шостої ширини перерізу, або дорівнює їй (рис. 3.57).

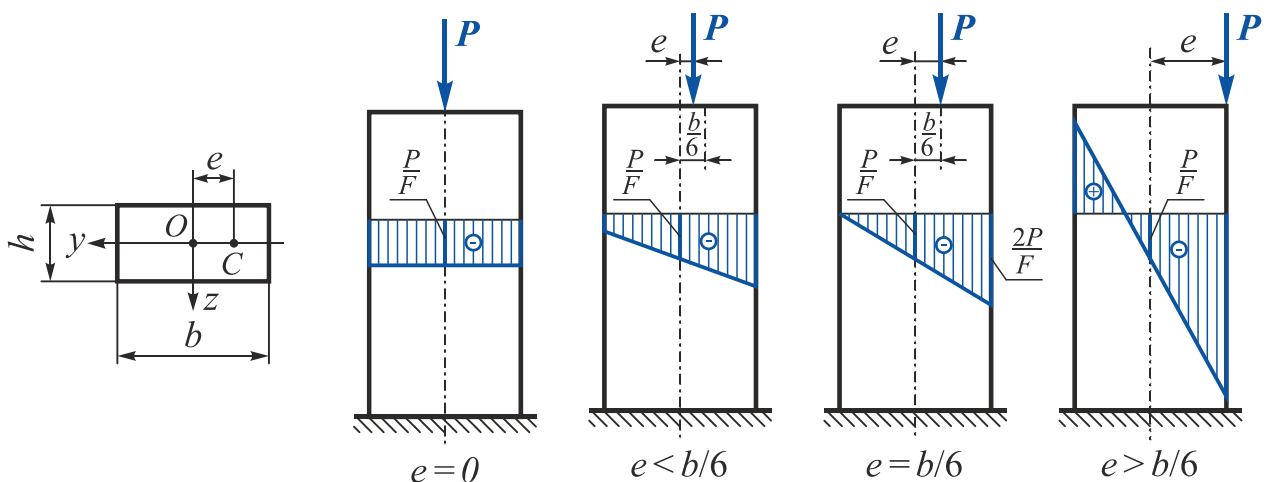


Рис. 3.57

На рис. 3.57 видно, що при всіх положеннях сили *P* напруження в центрі ваги (точка *O*) мають однаковий знак і дорівнюють  $P/F$ .

### Приклад 3.12

Побудувати ядро перерізу для швелера № 10 (рис. 3.58).

#### Розв'язання

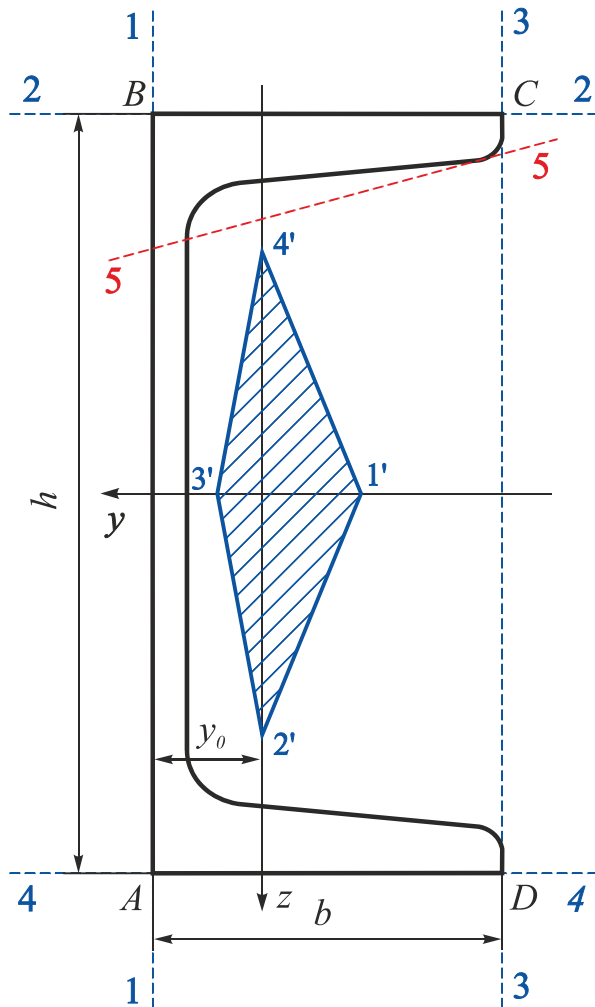


Рис. 3.58

1. З таблиць сортаменту випишемо всі геометричні характеристики швелера № 10:

$$h = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$b = 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i_y = 3,99 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i_z = 1,37 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$y_0 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

2. Виконаємо в масштабі рисунок швелера.

3. Поеднаємо нейтральну лінію із стороною  $AB$  (положення 1 – 1). Тоді визначимо відрізки, які відтинає нейтральна лінія на координатних осях:

$$a_y = y_0 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$a_z = \infty.$$

Згідно з вираженням (3.51) координати відповідної точки ( $1'$ ) ядра перерізу

$$y_{я(1')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{(1,37 \cdot 10^{-2})^2}{1,44 \cdot 10^{-2}} = -1,30 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$z_{я(1')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{(3,99 \cdot 10^{-2})^2}{\infty} = 0,$$

де  $i_y, i_z$  – радіуси інерції відносно осей  $y$  і  $z$ .

4. Поеднаємо нейтральну лінію зі стороною  $BC$  (положення 2 – 2). Отримаємо відрізки, які відтинає нейтральна лінія на координатних осях:

$$a_y = \infty; \quad a_z = -\frac{h}{2} = -\frac{10 \cdot 10^{-2}}{2} = -5 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

тоді координати відповідної точки (2') ядра перерізу матимуть значення

$$y_{я(2')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{(1,37 \cdot 10^{-2})^2}{\infty} = 0;$$

$$z_{я(2')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{(3,99 \cdot 10^{-2})^2}{-5 \cdot 10^{-2}} = 3,18 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

5. Поєднаємо нейтральну лінію зі стороною  $CD$  (положення 3 – 3). Знайдемо відрізки, які відтинає нейтральна лінія на координатних осях:

$$a_y = -(b - y_0) = -(4,6 \cdot 10^{-2} - 1,44 \cdot 10^{-2}) = -3,16 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad a_z = \infty,$$

тоді координати відповідної точки (3') ядра перерізу матимуть значення

$$y_{я(3')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{(1,37 \cdot 10^{-2})^2}{-3,16 \cdot 10^{-2}} = 0,59 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$z_{я(3')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{(3,99 \cdot 10^{-2})^2}{\infty} = 0.$$

6. Поєднаємо нейтральну лінію зі стороною  $DA$  (положення 4 – 4). Тоді відрізки, які відтинає нейтральна лінія на координатних осях:

$$a_y = \infty; \quad a_z = \frac{h}{2} = \frac{100 \cdot 10^{-2}}{2} = 50 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

тоді координати відповідної точки (4') ядра перерізу матимуть значення

$$y_{я(4')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{(1,37 \cdot 10^{-2})^2}{\infty} = 0;$$

$$z_{я(4')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{(3,99 \cdot 10^{-2})^2}{5 \cdot 10^{-2}} = -3,18 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Поєднавши точки 1', 2', 3' і 4' прямими лініями, отримаємо контур ядра перерізу, який має вигляд чотирикутника, асиметричного відносно осі  $z$ .

### Зауваження

1. Положення і форма ядра перерізу залежать лише від форми і розмірів поперечного перерізу, але не залежать від величини прикладеної сили.
2. При обкочуванні нейтральною лінією по контуру перерізу не можна допускати, щоб в будь-якому положенні ця лінія перетинала переріз (положення 5 – 5 на рис. 3.58 неприпустимо).

## 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ

### Приклад 4.1

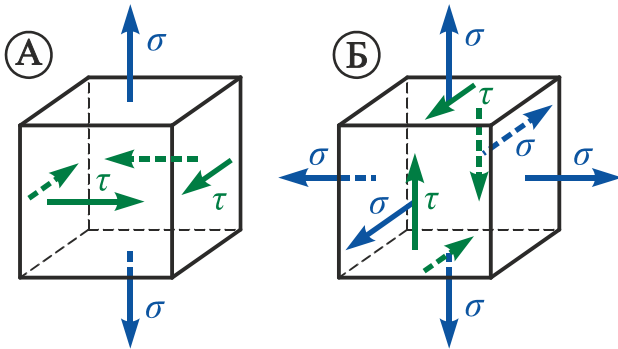


Рис. 4.1

Визначити за теорією найбільших дотичних напружень, який із напружених станів (рис. 4.1) є небезпечнішим, якщо  $\sigma = \tau$ .

### Розв'язання

Користуючись принципом незалежності дії сил (суперпозиції), зведемо заданий напружений стан елементів:

А – до об'ємного напруженого стану з компонентами основних нормальних напружень (рис. 4.2):

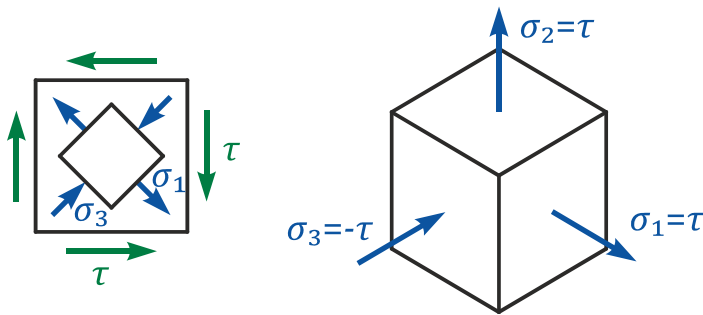


Рис. 4.2

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \tau, \\ \sigma_2 &= \tau, \\ \sigma_3 &= -\tau.\end{aligned}$$

При цьому

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau;$$

Б – до всебічного рівномірного розтягання та чистого зсуву (рис. 4.3):

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Оскільки при всебічному рівномірному розтяганні на жодній із січних площадок не виникає дотичних напружень, то і в цьому випадку

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau.$$

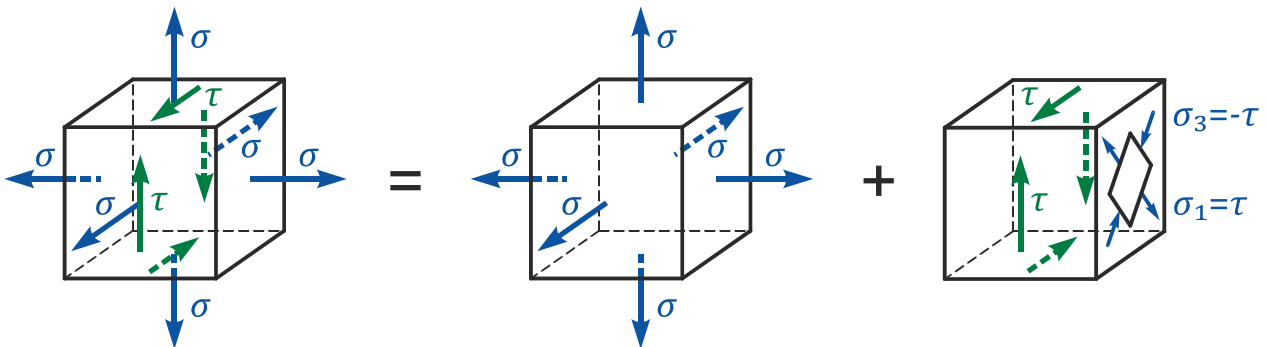


Рис. 4.3

Таким чином, за теорією найбільших дотичних напружень напружені стани А і Б є рівнонебезпечними.

### Приклад 4.2

Напружений стан, показаний на рис. 4.4, доповнюється всебічним рівномірним стисненням (напруження на невидимих гранях не показано). В результаті вся потенційна енергія деформації буде пов'язаною лише зі зміною форми. Знайти коефіцієнт запасу стосовно текучості, якщо границя текучості  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ . Використати теорію найбільших дотичних напружень.

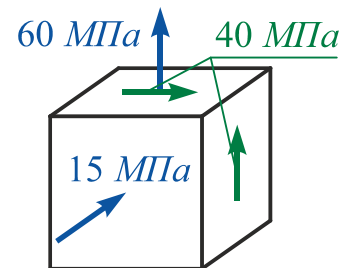


Рис. 4.4

### Розв'язання

Оскільки об'єм елемента (рис. 4.5) не змінюється, то

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -(15 + \sigma) - \sigma + (60 - \sigma) = 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} -3\sigma + 45 &= 0; \\ \sigma &= 15 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\sigma_x = -30 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -15 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 45 \text{ МПа}.$$

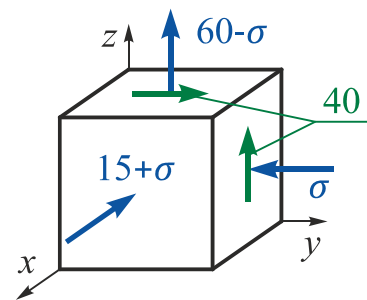


Рис. 4.5

Знайдемо головні напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2,(3)} &= \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{-15 + 45}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15 - 45}{2}\right)^2 + 40^2} = \\ &= 15 \pm 50; \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 65 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -30 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -35 \text{ МПа}.$$

Еквівалентне напруження з теорії найбільших дотичних напружень

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 65 - (-35) = 100 \text{ МПа}.$$

Тоді коефіцієнт запасу стосовно текучості

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}} = \frac{240}{100} = 2,4.$$



### Приклад 4.3

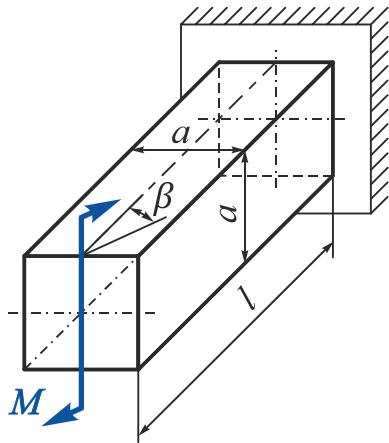


Рис. 4.6

Консольний брус квадратного поперечного перерізу зі стороною  $a$  та довжиною  $l$  навантажено моментом  $M$  (рис. 4.6). Яке положення моменту  $M$  (кут  $\beta$ ) є найбільш небезпечним за умови міцності? Використати теорію максимальних дотичних напружень.

#### Розв'язання

Розкладемо момент  $M$  на складові (рис. 4.7):

$$M_y = M \cos \beta \text{ і } M_x = M \sin \beta.$$

У найнебезпечнішій точці перерізу ( $A$ ) діють нормальні напруження (рис. 4.7)

$$\sigma_{x(A)} = \frac{M_y}{W_y} = \left\{ \text{оскільки } W_y = \frac{a^3}{6} \right\} = \frac{6M \cos \beta}{a^3}$$

і дотичні

$$\tau_{(A)} = \frac{M_x}{W_k} = \left\{ \text{оскільки } W_k = 0,208a^3 \right\} = \frac{M \sin \beta}{0,208a^3}.$$

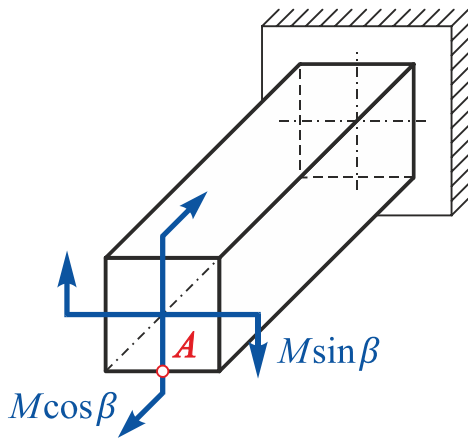


Рис. 4.7

Еквівалентне напруження в точці  $A$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(A) &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \\ &= \frac{M}{a^3} \sqrt{36 \cos^2 \beta + 4 \frac{\sin^2 \beta}{0,208^2}}. \end{aligned}$$

З умови

$$\frac{d\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(A)}{d\beta} = 0$$

отримаємо  $\beta = 0$  і  $\beta = \pi/2$ .

При  $\beta = 0$   $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(A) = 6 \frac{M}{a^3},$

$\beta = \pi/2$   $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(A) = \frac{2M}{0,208a^3} = 9,615 \frac{M}{a^3}.$

Таким чином, найбільш небезпечним з умови міцності є чисте кручення при  $\beta = \pi/2$ .

### Приклад 4.4

Виходячи з умови рівномірності, порівняти за вагою два сталевих бруси (рис. 4.8). Використати теорію найбільших дотичних напружень.

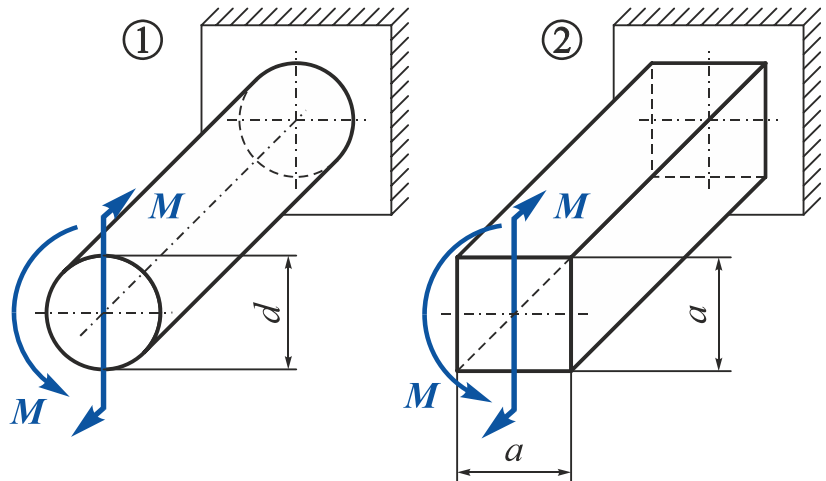


Рис. 4.8

### Розв'язання

Напружений стан у небезпечних точках першого та другого брусів – плоский.

Еквівалентне напруження в першому брусі

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(1) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M}{W_{\rho}}}\right)^2}.$$

З урахуванням того, що в круглому поперечному перерізі

$$W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32}, \quad W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad \text{одержимо} \quad \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(1) = 14,405 \frac{M}{d^3}.$$

Еквівалентні напруження в другому брусі

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(2) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M}{W_{\text{к}}}\right)^2}.$$

З урахуванням того, що в квадратному поперечному перерізі

$$W_{\text{н.в.}} = \frac{a^3}{6}, \quad W_{\text{к}} = 0,208a^3, \quad \text{одержимо} \quad \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(2) = 11,334 \frac{M}{a^3}.$$

З умови рівномірності  $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(1) = \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(2)$  отримаємо

$$14,405 \frac{M}{d^3} = 11,334 \frac{M}{a^3} \Rightarrow a = 0,923d.$$

Тоді вага бруса круглого поперечного перерізу

$$\frac{\pi d^2}{4 \cdot (0,923d)^2} = 0,922$$

ваги бруса квадратного поперечного перерізу.

### Приклад 4.5

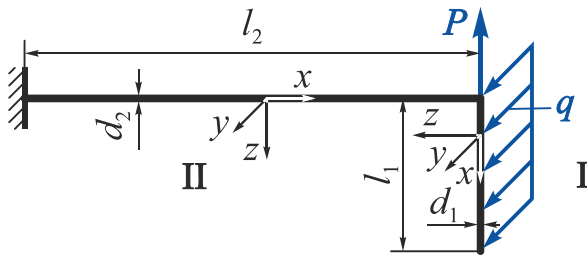


Рис. 4.9

На ламаний брус діють розподілене прямокутне навантаження  $q$  та зосереджена сила  $P$  (рис. 4.9). Відомі  $q$ , довжина ділянок  $l_1, l_2 = 3l_1$  та діаметри перерізів  $d_1, d_2 = d_1 \sqrt[3]{19}$ .

Визначити величину сили  $P$ , якщо максимальні еквівалентні напруження (за теорією максимальних дотичних напружень) на ділянках ламаного бруса однакові.

### Розв'язання

У кінці першої ділянки виникає максимальний згинальний момент під дією розподіленого навантаження

$$M_{z \max}^I = \frac{ql_1^2}{2}.$$

Нормальні напруження, що діють у цьому перерізі,

$$\sigma_{\max I} = \frac{M_{z \max}^I}{W_{\text{н.в.}}^I} = \left\{ \text{із урахуванням } W_{\text{н.в.}}^I = \frac{\pi d_1^3}{32} \right\} = \frac{ql_1^2}{2} \cdot \frac{32}{\pi d_1^3} = \frac{16 \cdot ql_1^2}{\pi d_1^3}.$$

На другій ділянці дія згинальних моментів  $M_y, M_z$  і дія крутного моменту  $M_x$  є спільними. У кінці другої ділянки

$$M_{z\Gamma \max} = \sqrt{M_{y \max}^2 + M_z^2} = \sqrt{(ql_1 l_2)^2 + (Pl_2)^2};$$

$$M_x = \frac{ql_1^2}{2};$$

$$M_{\text{розр}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{z\Gamma \max}^2 + M_x^2} = \sqrt{(3 \cdot ql_1^2)^2 + (3 \cdot Pl_1)^2 + \left(\frac{ql_1^2}{2}\right)^2}.$$

Еквівалентне напруження, що діє в цьому перерізі,

$$\sigma_{\max II} = \sigma_{\text{екв II}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{W_{\text{н.в.}}^{\text{II}}},$$

$$\text{де } W_{\text{н.в.}}^{\text{II}} = \frac{\pi d_2^3}{32} = \frac{\pi (d_1 \sqrt[3]{19})^3}{32} = \frac{19 \cdot \pi d_1^3}{32}.$$

Використавши умову задачі  $\sigma_{\max I} = \sigma_{\max II}$ , після підстановки та перетворень отримаємо

$$P = 3ql_1.$$

### Приклад 4.6

Визначити, при якій величині сили  $P$  нейтральна лінія в опорному перерізі буде збігатися з діагоналлю прямокутного перерізу  $b \times h$  (рис. 4.10).

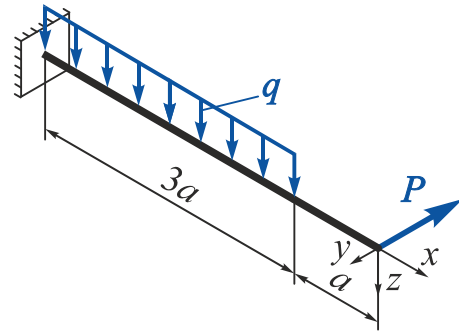


Рис. 4.10

### Розв'язання

Положення нейтральної лінії при косому згині визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha = \left\{ \begin{array}{l} \text{з урахуванням того, що} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_z}{M_y} \end{array} \right\} = -\frac{I_y}{I_z} \frac{M_z}{M_y}.$$

Згинальні моменти в опорному перерізі балки

$$M_y = -\frac{q(3a)^2}{2} = -\frac{9qa^2}{2};$$
$$M_z = 4Pa.$$

Осьові моменти інерції прямокутного перерізу

$$I_y = \frac{bh^3}{12}; \quad I_z = \frac{hb^3}{12}.$$

Відповідно до умови задачі кут нахилу нейтральної лінії має збігатися з діагоналлю прямокутного поперечного перерізу, тобто

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{b}.$$

Порівняємо тангенси кута нахилу нейтральної лінії та кута нахилу діагоналі прямокутника. Після підстановки виразів для згинальних моментів та моментів інерції отримаємо

$$\frac{h}{b} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{12}{hb^3} \cdot \frac{4Pa \cdot 2}{9qa^2};$$
$$\frac{h}{b} = \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{8P}{9qa}.$$

Остаточно

$$P = \frac{9bqa}{8h}.$$

### Приклад 4.7

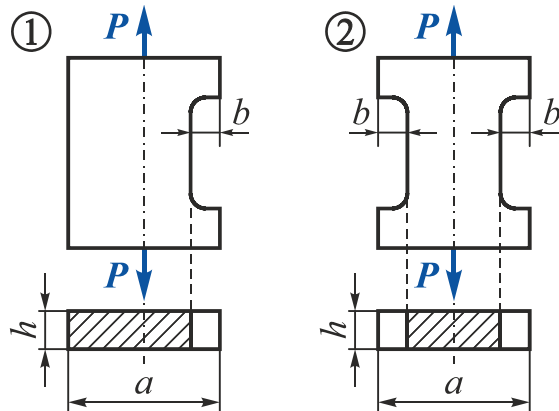


Рис. 4.11

При якому значенні  $\lambda = b/a$  максимальне нормальне напруження у першому брусі стане більшим, ніж у другому (рис. 4.11)?

Концентрацію напружень не враховувати.

### Розв'язання

Перший брус зазнає позacentрового, а другий – центрального розтягнення.

В ослабленому перерізі першого бруса сила  $P$  прикладена не в центрі ваги перерізу і тому створює згинальний момент  $M_{зг} = P b/2$ .

Запишемо вирази для визначення максимального нормального напруження першого і другого брусів урахувавши, що  $b = \lambda a$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{max}^{(1)} &= \sigma(P) + \sigma(M_{зг}) = \frac{P}{F^{(1)}} + \frac{M_{зг}}{W_{н.в.}} = \frac{P}{(a-b)h} + \frac{Pb \cdot 6}{2 \cdot h(a-b)^2} = \\ &= \frac{P}{ah} \left( \frac{1}{1-\lambda} + \frac{3\lambda}{(1-\lambda)^2} \right); \end{aligned}$$

$$\sigma_{max}^{(2)} = \sigma(P) = \frac{P}{F^{(2)}} = \frac{P}{(a-2b)h} = \frac{P}{ah} \left( \frac{1}{1-2\lambda} \right).$$

Розглянемо крайній випадок  $\sigma_{max}^{(1)} = \sigma_{max}^{(2)}$ , тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\lambda} + \frac{3}{(1-\lambda)^2} &= \frac{1}{1-2\lambda}; \\ (1-\lambda)(1-2\lambda) + 3\lambda(1-2\lambda) - (1-\lambda)^2 &= 0; \\ -5\lambda^2 + 2\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язками цього квадратного рівняння будуть

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{і} \quad \lambda_2 = 2/5 = 0,4.$$

Нульовий корінь не враховуємо через фізичні міркування, отже, при співвідношенні  $\lambda = b/a \geq 2/5$  максимальне нормальне напруження в першому брусі стане більшим, ніж у другому ( $\sigma_{max}^{(1)} \geq \sigma_{max}^{(2)}$ ).

### Приклад 4.8

Установити, при якому значенні  $k$  відношення максимальних нормальних напружень на ділянках 1 і 2 буде найбільшим (рис. 4.12). Концентрацію напружень не враховувати.

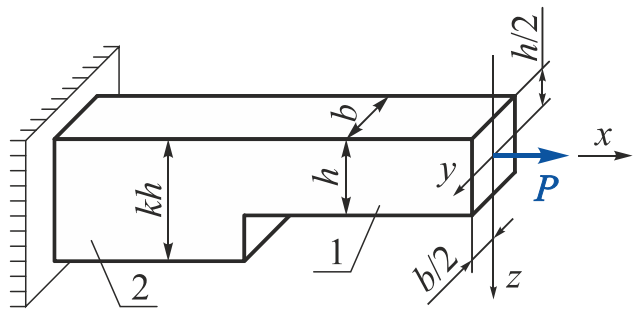


Рис. 4.12

### Розв'язання

Нормальне напруження в тонкій частині бруса

$$\sigma_{max}^{(1)} = \frac{P}{bh}.$$

Максимальне нормальне напруження в стовщеній частині бруса

$$\begin{aligned}\sigma_{max}^{(2)} &= \frac{P}{bkh} + \frac{P \cdot 0,5h(k-1)}{W_y} = \frac{P}{bkh} + \frac{P \cdot 0,5h(k-1) \cdot 6}{b(kh)^2} = \\ &= \frac{P}{bh} \left( \frac{1}{k} + \frac{3(k-1)}{k^2} \right) = \frac{P}{bh} \cdot \frac{4k-3}{k^2}.\end{aligned}$$

Відношення максимальних нормальних напружень на 2-й та 1-й ділянках

$$f(k) = \frac{\sigma_{max}^{(2)}}{\sigma_{max}^{(1)}} = \frac{4k-3}{k^2}.$$

Для знаходження екстремального значення  $k$  візьмемо похідну функції  $f(k)$  та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{df(k)}{dk} = 0.$$

Після перетворень отримаємо квадратне рівняння

$$-4k^2 + 6k = 0.$$

Розв'язками цього квадратного рівняння будуть

$$k_1 = 0 \quad \text{і} \quad k_2 = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Нульовий корінь не враховуємо через фізичні міркування, отже, при співвідношенні  $k = 3/2$  відношення максимальних нормальних напружень на 2-й та 1-й ділянках буде найбільшим:

$$f_{max}(k_2) = \frac{4 \cdot \frac{3}{2} - 3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

### Приклад 4.9

У скільки разів збільшиться максимальне напруження в бруску квадратного поперечного перерізу, один кінець якого закріплений, а до іншого прикладено розтягальну силу  $P$ , що діє упродовж повздожньої осі, якщо сила, залишаючись паралельною самій собі, переміститься: а) на середину сторони квадрата і б) у вершину кута квадрата? Дією власної ваги знехтувати.

### Розв'язання

При осьовому розтягненні нормальне напруження у будь-якій точці поперечного перерізу

$$\sigma = \frac{P}{a^2},$$

де  $a$  – довжина сторони квадратного поперечного перерізу.

У квадраті всі центральні осі – головні, тому

$$I = \frac{a^4}{12}.$$

При прикладенні сили  $P$  в середині сторони квадрата максимальне нормальне напруження

$$\sigma_{max (a)} = \frac{P}{a^2} + \frac{P \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{P}{a^2} + \frac{3P}{a^2} = \frac{4P}{a^2}.$$

Тоді

$$\frac{\sigma_{max (a)}}{\sigma} = \frac{4P}{a^2} \cdot \frac{a^2}{P} = 4,$$

тобто при прикладенні сили в середині сторони квадрата максимальне нормальне напруження збільшиться в чотири рази.

При прикладенні сили  $P$  у вершині квадрата максимальне нормальне напруження

$$\sigma_{max (б)} = \frac{P}{a^2} + \frac{P \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} \cdot \frac{a}{2} + \frac{P \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{P}{a^2} + \frac{3P}{a^2} + \frac{3P}{a^2} = \frac{7P}{a^2}.$$

Тоді

$$\frac{\sigma_{max (б)}}{\sigma} = \frac{7P}{a^2} \cdot \frac{a^2}{P} = 7,$$

тобто при прикладенні сили у вершині квадрата максимальне нормальне напруження збільшиться в сім разів.

### Приклад 4.10

У брусі, зображеному на рис. 4.13, визначити та показати положення нейтрального шару, якщо відомими є вага бруса  $Q$  та величини сил  $P_1 = Q/2$ ,  $P_2 = Q/24$ .

#### Розв'язання

У довільному перерізі бруса (рис. 4.14) на відстані  $x$  діятимуть такі внутрішні зусилля:

$$N_x = P_1 - \frac{Qx}{6b} = \frac{Q}{2} - \frac{Qx}{6b} = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{x}{3b}\right);$$

$$M_y = P_1 \frac{b}{2} - P_2 x = \frac{Q}{2} \cdot \frac{b}{2} - \frac{Q}{24} x = \frac{Q}{4} \left(b - \frac{x}{6}\right).$$

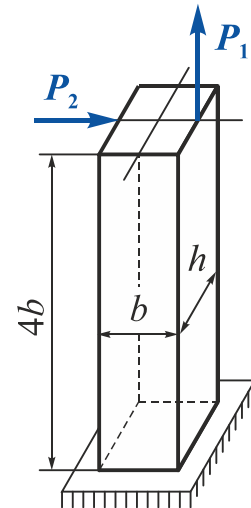


Рис. 4.13

У будь-якій точці довільного перерізу нормальне напруження

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{Q}{2bh} \left(1 - \frac{x}{3b}\right) + \frac{Q}{4} \cdot \frac{12}{hb^3} \left(b - \frac{x}{6}\right) z.$$

На нейтральній осі в довільному перерізі  $\sigma = 0$ , тоді

$$\frac{Q}{2bh} \left(1 - \frac{x}{3b}\right) + \frac{3Q}{hb^3} \left(b - \frac{x}{6}\right) z_{\text{н.в.}} = 0.$$

Після перетворень отримаємо

$$z_{\text{н.в.}} = -b \frac{(3b - x)}{(6b - x)}.$$

Для побудови нейтрального шару в брусі знайдемо положення нейтральної осі у кількох перерізах за висою бруса (див. рис. 4.14):

при $x = 0$	$z = -\frac{b}{2};$
$x = b$	$z = -\frac{2b}{5};$
$x = 2b$	$z = -\frac{b}{4};$
$x = 3b$	$z = 0;$
$x = 4b$	$z = \frac{b}{2}.$

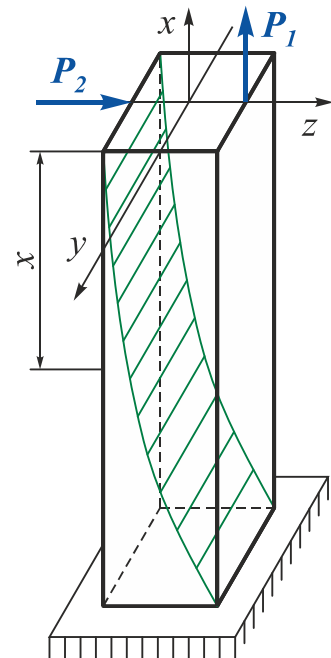


Рис. 4.14



### Приклад 4.11

Дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу довжиною  $l = 2,4$  м (рис. 4.15) шарнірно оперта на кінцях і навантажена посередині прольоту зосередженою силою  $P$ . На встановлених у небезпечному перерізі балки тензOMETрах  $A$  і  $B$  з базою  $20$  мм та збільшенням у  $1000$  разів було зафіксовано такі зміни показань:  $A$  – зменшення на  $9$  мм,  $B$  – збільшення на  $6$  мм. Визначити величину і напрямок (кут  $\alpha$ ) прикладання сили  $P$ , величину найбільшого нормального напруження в балці, якщо  $b = 120$  мм,  $h = 200$  мм, модуль поздовжньої пружності дерева  $E = 1 \cdot 10^4$  МПа.

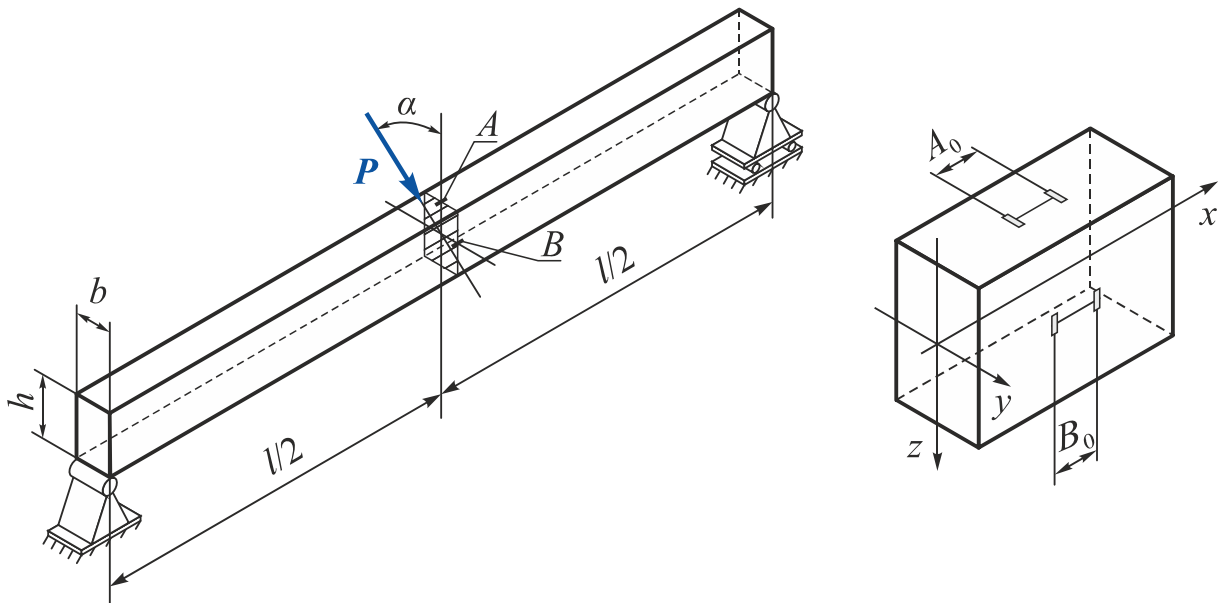


Рис. 4.15

### Розв'язання

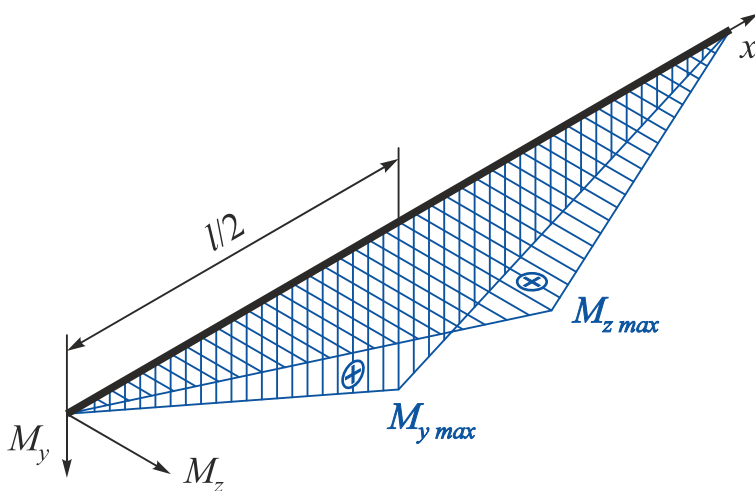


Рис. 4.16

Розкладемо силу  $P$  на складові та побудуємо епюри згинальних моментів (рис. 4.16):

$$P_z = P \cos \alpha ;$$

$$P_y = P \sin \alpha .$$

У небезпечному перерізі

$$M_y = M_{y \max} = \frac{P_z}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl \cos \alpha}{4};$$

$$M_z = M_{z \max} = -\frac{P_y}{2} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{Pl \sin \alpha}{4}.$$

У точках  $A$  і  $B$  реалізується лінійний напружений стан (рис. 4.17). Напруження у цих точках

$$|\sigma_A| = \sigma_{A \max}(M_y) = \frac{M_y}{W_y} = \frac{Pl \cos \alpha}{4} \cdot \frac{6}{bh^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pl \cos \alpha}{bh^2};$$

$$\sigma_B = \sigma_{B \max}(M_y) = \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{Pl \sin \alpha}{4} \cdot \frac{6}{hb^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pl \sin \alpha}{hb^2}.$$

Відповідно до закону Гука при лінійному напруженому стані

$$|\sigma_A| = |E \varepsilon_A| = \left| E \frac{\Delta_A}{A_0 K} \right|;$$

$$\sigma_B = E \varepsilon_B = E \frac{\Delta_B}{B_0 K},$$

де  $\Delta_A, \Delta_B$  – зміна показань тензометрів;

$A_0, B_0$  – бази тензометрів;

$K$  – коефіцієнт збільшення тензометрів.

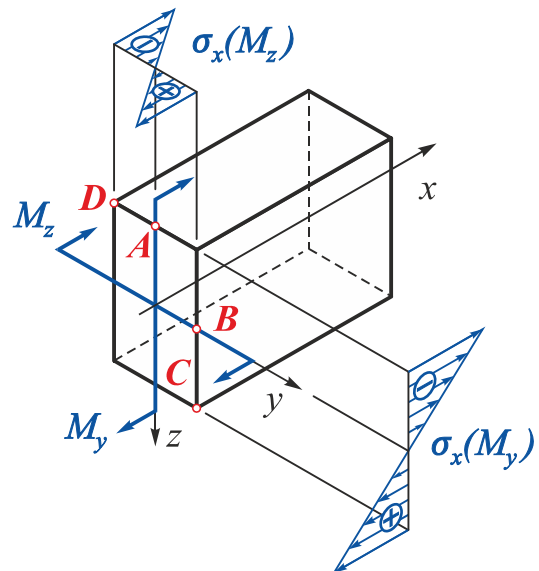


Рис. 4.17

Прирівняємо значення нормальних напружень у точках  $A$  і  $B$  відповідно:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{Pl \cos \alpha}{bh^2} = E \frac{\Delta_A}{A_0 K}; \quad (4.1)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{Pl \sin \alpha}{hb^2} = E \frac{\Delta_B}{B_0 K}. \quad (4.2)$$

Розділимо (4.2) на (4.1). Після перетворень отримаємо

$$\alpha = \arctg \left( \frac{\Delta_B b}{\Delta_A h} \right) = \arctg \left( \frac{6 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0,15}{0,2} \right) = 26,57^\circ.$$

З (4.1) одержимо

$$P = \frac{\Delta_A E}{A_0 K} \cdot \frac{2bh^2}{3l \cdot \cos \varphi} = \frac{9 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} \cdot \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 0,2^2}{3 \cdot 2,4 \cdot \cos 26,57^\circ} = 8,4 \text{ кН.}$$

Максимальні напруження в небезпечному перерізі діють у точках  $C$  та  $D$ . У точці  $C$  отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_C = \sigma_{max} &= \sigma(M_{y max}) + \sigma(M_{z max}) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{Pl \cos \alpha}{bh^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{Pl \sin \alpha}{hb^2} = \frac{3Pl}{2bh} \left( \frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right) = \\ &= \frac{3 \cdot 8,4 \cdot 10^3 \cdot 2,4}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,15} \left( \frac{\cos 26,57^\circ}{0,2} + \frac{\sin 26,57^\circ}{0,15} \right) = 7,51 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

У точці  $D$  напруження відрізняється лише знаком.

### Приклад 4.12

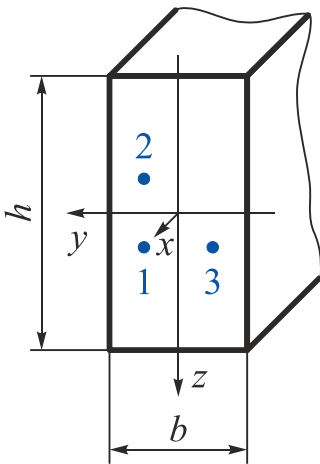


Рис. 4.18

У прямокутному поперечному перерізі бруса виникають нормальні напруження  $\sigma_x$  під дією внутрішніх зусиль  $N_x$ ,  $M_y$  і  $M_z$  (рис. 4.18). Відомі значення нормальних напружень у трьох точках:  $\sigma_{x1} = 9 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{x2} = 6 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{x3} = 12 \text{ МПа}$ . Точки мають координати:  $y_1 = 3 \text{ см}$ ,  $z_1 = 3 \text{ см}$ ,  $y_2 = 3 \text{ см}$ ,  $z_2 = -3 \text{ см}$ ,  $y_3 = -3 \text{ см}$ ,  $z_3 = 3 \text{ см}$ .

Визначити внутрішні зусилля та положення нейтральної лінії, якщо  $b = 12 \text{ см}$ ,  $h = 24 \text{ см}$ .

### Розв'язання

Нормальне напруження в довільній точці поперечного перерізу

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z},$$

де  $N_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  – поздовжня сила та згинальні моменти, що діють у перерізі;

$y$ ,  $z$  – координати довільної точки;

$F$  – площа поперечного перерізу;

$I_y$ ,  $I_z$  – моменти інерції перерізу відносно осей  $y$  та  $z$ .

Обчислимо геометричні характеристики прямокутного перерізу:

$$F = bh = 0,12 \cdot 0,24 = 2,88 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2;$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,12 \cdot 0,24^3}{12} = 1,3824 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4;$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,24 \cdot 0,12^3}{12} = 0,3456 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4.$$

Складемо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 9 \cdot 10^6 = \frac{N_x}{2,88 \cdot 10^{-2}} + \frac{M_y \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{1,3824 \cdot 10^{-4}} + \frac{M_z \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{0,3456 \cdot 10^{-4}}; \\ 6 \cdot 10^6 = \frac{N_x}{2,88 \cdot 10^{-2}} + \frac{M_y \cdot (-3 \cdot 10^{-2})}{1,3824 \cdot 10^{-4}} + \frac{M_z \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{0,3456 \cdot 10^{-4}}; \\ 12 \cdot 10^6 = \frac{N_x}{2,88 \cdot 10^{-2}} + \frac{M_y \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{1,3824 \cdot 10^{-4}} + \frac{M_z \cdot (-3 \cdot 10^{-2})}{0,3456 \cdot 10^{-4}}. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо внутрішні зусилля та покажемо їх напрямок (рис. 4.19):

$$N_x = 0,2592 \text{ кН};$$

$$M_y = 0,6912 \cdot 10^{-2} \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z = -0,1728 \cdot 10^{-2} \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

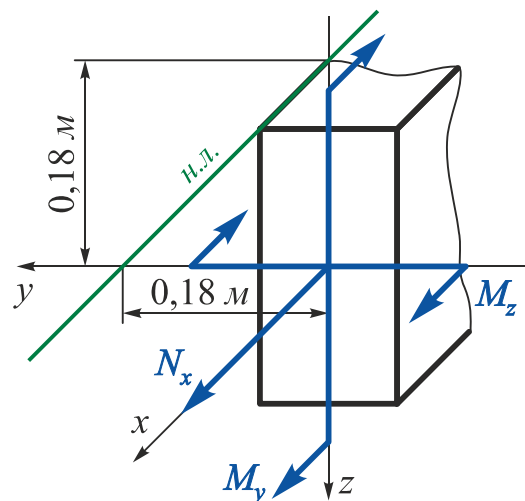


Рис. 4.19

Запишемо рівняння нейтральної лінії:

$$\frac{0,2592}{2,88 \cdot 10^{-2}} + \frac{0,6912 \cdot 10^{-2}}{1,3824 \cdot 10^{-4}} z + \frac{-0,1728 \cdot 10^{-2}}{0,3456 \cdot 10^{-4}} y = 0.$$

Після перетворень отримаємо

$$9 + 50 \cdot z - 50 \cdot y = 0;$$

$$50 \cdot z = 50 \cdot y - 9;$$

$$z = y - 0,18.$$

Положення нейтральної лінії покажемо на рис. 4.19.

**Приклад 4.13**

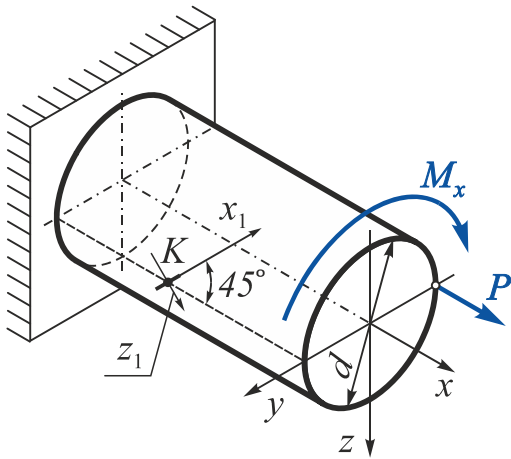


Рис. 4.20

Відомо, що в точці  $K$  лінійна деформація під кутом  $45^\circ$  до твірної бруса круглого поперечного перерізу дорівнює нулю ( $\varepsilon_{x_1}^K = 0$ ) (рис. 4.20). Діаметр бруса  $d = 200$  мм, крутний момент  $M_x = 5$  кН·м, коефіцієнт Пуассона матеріалу бруса  $\mu = 0,25$ .

Знайти найбільше нормальне (головне) напруження  $\sigma_{max}$ .

**Розв'язання**

У будь-якому поперечному перерізі бруса реалізується чистий згин з розтягненням та крученням (рис. 4.21, а).

Напружений стан у точці  $K$  на площадках  $x$ ,  $y$  та  $z$

$$\tau = |-\tau_{xz}| = \tau_{zx} = \frac{M_x}{W_\rho} = \frac{16M_x}{\pi d^3}; \quad (4.3)$$

$$\sigma = |\sigma_x| = \left| \frac{P}{F} - \frac{P}{W_y} \cdot \frac{d}{2} \right| = \left| \frac{4P}{\pi d^2} - \frac{32P}{\pi d^3} \cdot \frac{d}{2} \right| = \frac{12P}{\pi d^2}; \quad (4.4)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0.$$

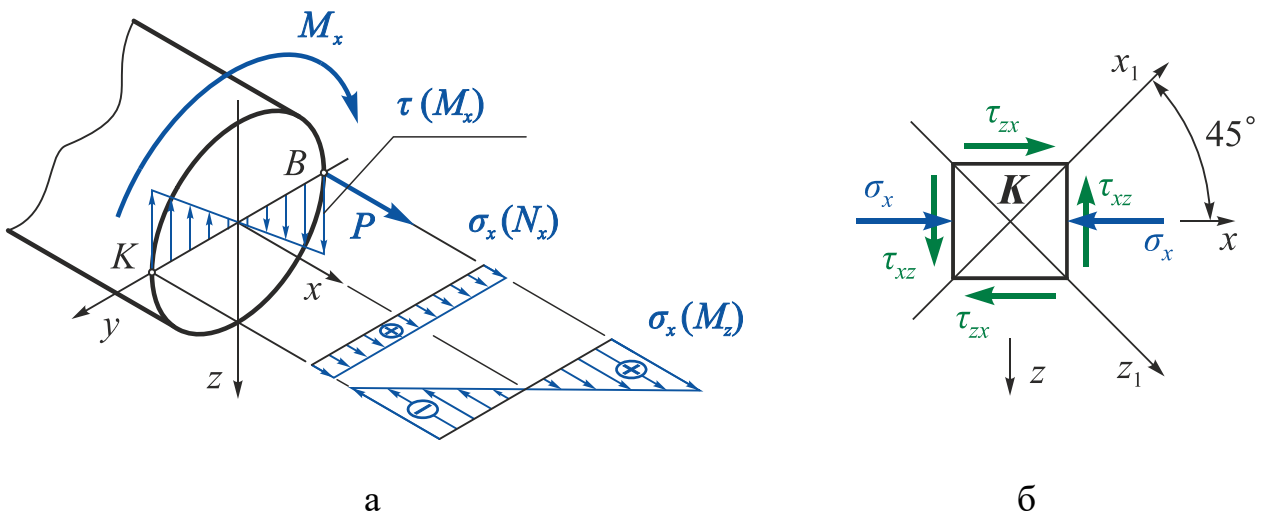


Рис. 4.21

Знайдемо нормальні напруження на взаємно перпендикулярних площадках  $x_1$  і  $z_1$ , повернутих відносно осей  $y$  і  $z$  на кут  $\alpha = 45^\circ$  відносно осі  $x$ , як показано на рис. 4.21, б:

$$\begin{cases} \sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} + \tau; \\ \sigma_{y_1} = \sigma_y = 0; \\ \sigma_{z_1} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_z \cos^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} - \tau. \end{cases}$$

Відповідно до закону Гука лінійна деформація у точці  $K$  у напрямку осі  $x_1$

$$\varepsilon_{x_1}^{(K)} = \frac{1}{E} [\sigma_{x_1} - \mu(\sigma_{y_1} + \sigma_{z_1})] = \frac{1}{E} \left[ (1 - \mu) \frac{\sigma}{2} - (1 + \mu)\tau \right].$$

За умовою задачі  $\varepsilon_{x_1}^{(K)} = 0$ . Тоді

$$\tau = \frac{1 - \mu}{2(1 + \mu)} \sigma.$$

З урахуванням виразів (4.3) і (4.4) отримаємо

$$\frac{16M_x}{\pi d^3} = \frac{1 - \mu}{2(1 + \mu)} \cdot \frac{12P}{\pi d^2}.$$

Звідси

$$P = \frac{8}{3} \cdot \frac{(1 + \mu)}{(1 - \mu)} \cdot \frac{M_x}{d} = \frac{8}{3} \cdot \frac{(1 + 0,25)}{(1 - 0,25)} \cdot \frac{5 \cdot 10^3}{0,2} = \frac{1000 \cdot 10^3}{9} = 111,11 \text{ кН}.$$

Знайдемо максимальне нормальне напруження, тобто максимальне головне напруження, яке буде в точці  $B$  бруса (див. епюри напружень на рис. 4.21, а). На площадках  $x$  і  $z$  діють такі напруження:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{P}{F} + \frac{P}{W_y} \cdot \frac{d}{2} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32P}{\pi d^3} \cdot \frac{d}{2} = \frac{20P}{\pi d^2}; \\ \sigma_z = \sigma_y = 0; \\ \tau_{xz} = \frac{M_x}{W_\rho} = \frac{16M_x}{\pi d^3}. \end{cases}$$

Найбільше нормальне (головне) напруження

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} = \frac{10P}{\pi d^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{20P}{\pi d^2}\right)^2 + 4\left(\frac{16M_x}{\pi d^3}\right)^2} = \\ &= \frac{10 \cdot 111,11 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,2^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{20 \cdot 111,11 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,2^2}\right)^2 + 4\left(\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,2^3}\right)^2} = 18,239 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

### Приклад 4.14

Матеріал балки (рис. 4.22) – бетон з різними границями міцності на розтягнення  $\sigma_{вр} = \sigma_0$  та стиснення  $\sigma_{вс} = 5\sigma_0$ . Довжина прольоту балки –  $l$ , поперечний переріз – рівнобедрений трикутник висотою  $h$  та основою  $b$ , коефіцієнт запасу міцності для бетону –  $n_b$ . Знайти оптимальний початковий натяг арматури, розташованої по лінії центрів ваги поперечних перерізів, тобто такий натяг  $N_0$ , при якому несуча здатність балки на згин буде найбільшою ( $P = P_{max}$ ). Якою є величина  $P_{max}$ ?

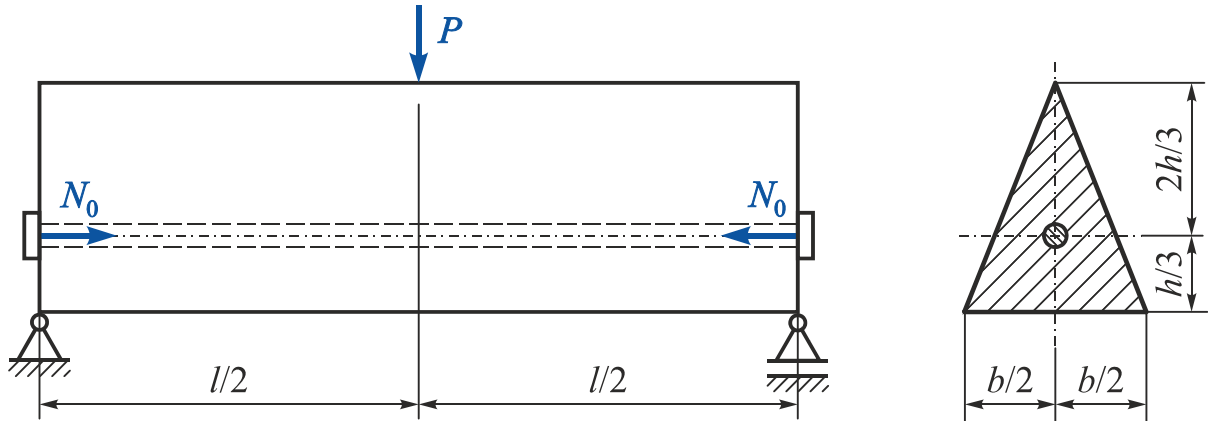


Рис. 4.22

### Розв'язання

Балка працює на згин зі стисненням.

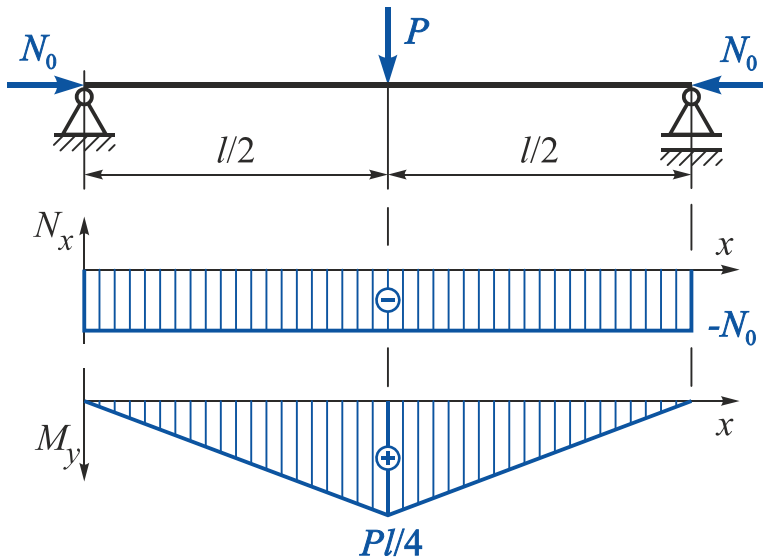


Рис. 4.23

У небезпечному перерізі балки (рис. 4.23) посередині прольоту діятимуть два внутрішніх силових фактори:

– початковий натяг арматури

$$N_x = -N_0;$$

– згинальний момент

$$M_y = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}.$$

Визначимо величину оптимального початкового натягу арматури  $N_0$  з умови рівної міцності найбільш розтягнутої (A) та найбільш стисненої (B) точок балки:

$$\begin{cases} \sigma_{p \max} = [\sigma]_p = \frac{\sigma_{Bp}}{n_B} = \frac{\sigma_0}{n_B}; \\ |\sigma_{c \max}| = [\sigma]_c = \frac{\sigma_{Bc}}{n_B} = \frac{5\sigma_0}{n_B}, \end{cases}$$

де  $n_B$  – коефіцієнт запасу міцності бетону.

У точці  $A$  діють найбільші розтягальні, а в точці  $B$  – найбільші стискальні напруження (рис. 4.24):

$$\sigma_A = \sigma_{p \max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{1}{3}h - \frac{|N_x|}{F} = \frac{Plh}{12I_y} - \frac{N_0}{F};$$

$$|\sigma_B| = |\sigma_{c \max}| = \left| \frac{M_y}{I_y} \cdot \left(-\frac{2}{3}h\right) + \frac{N_x}{F} \right| = \left| -\frac{Pl}{4I_y} \cdot \frac{2}{3}h - \frac{N_0}{F} \right| = \frac{Plh}{6I_y} + \frac{N_0}{F},$$

де  $I_y = \frac{bh^3}{36}$ ;  $F = \frac{bh}{2}$ .

Тоді умову рівної міцності можна переписати як

$$\begin{cases} \frac{P_{max}l}{4I_y} \cdot \frac{1}{3}h - \frac{N_0}{F} = \frac{\sigma_0}{n_B}; \\ \frac{P_{max}l}{4I_y} \cdot \frac{2}{3}h + \frac{N_0}{F} = \frac{5\sigma_0}{n_B}. \end{cases}$$

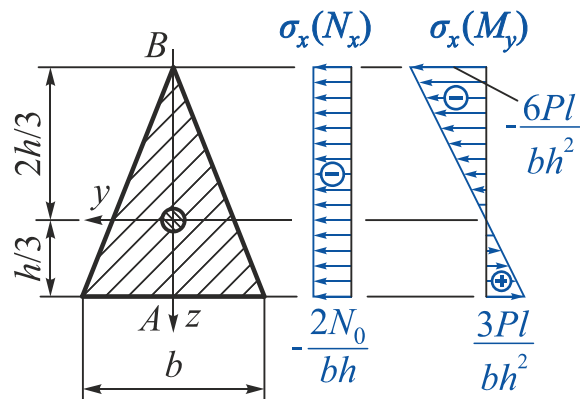


Рис. 4.24

Після підстановки  $I_y$  та  $F$  отримаємо

$$\begin{cases} \frac{3l}{bh^2} P_{max} - \frac{2}{F} N_0 = \frac{\sigma_0}{n_B}; \\ \frac{6l}{bh^2} P_{max} + \frac{2}{F} N_0 = \frac{5\sigma_0}{n_B}. \end{cases}$$

У результаті розв'язання системи лінійних рівнянь отримаємо

$$N_0 = \frac{\sigma_0}{n_B} \cdot \frac{bh}{2};$$

$$P_{max} = \frac{\sigma_0}{n_B} \cdot \frac{2bh^2}{3l}.$$



### Приклад 4.15

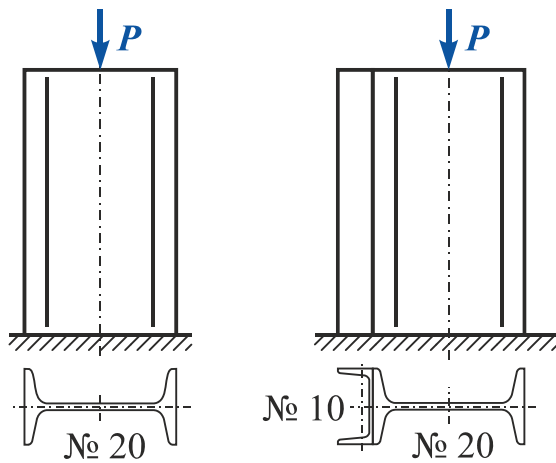


Рис. 4.25

Короткий стовп (рис. 4.25), виконаний із двотавра № 20, навантажено центрально прикладеною силою  $P = 200 \text{ кН}$  і «поширено» швеллером № 10, привареним до стовпа по всій його довжині. Чому дорівнювало найбільше стискальне напруження в двотавровому стовпу і чому воно дорівнює в стовпу, «поширеному» швеллером?

### Розв'язання

Випишемо із сортаменту прокатної сталі необхідні для подальшого розрахунку геометричні характеристики прокатних профілів:

двотавр № 20 –  $h_1 = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $F_1 = 26,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $I_{z_1} = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ;

швеллер № 10 –  $y_0 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $F_2 = 10,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $I_{z_2} = 20,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ .

У першому випадку реалізується осьове стиснення, при якому нормальне напруження

$$\sigma = \frac{P}{F_1} = \frac{200 \cdot 10^3}{26,8 \cdot 10^{-4}} = 74,63 \text{ МПа.}$$

У другому випадку – позацентрове стиснення. Тоді максимальне нормальне напруження виникне в точках правої грані стовпа:

$$\sigma_{\max (A)} = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{(A)}.$$

У цьому виразі

$F$  – площа складеного перерізу

$$F = F_1 + F_2 = 26,8 \cdot 10^{-4} + 10,9 \cdot 10^{-4} = 37,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$M_z$  – згинальний момент відносно осі  $z$ , спричинений ексцентриситетом докладання сили  $P$ ,

$$M_z = P \cdot y_C;$$

$I_z$  – момент інерції складеного перерізу відносно осі  $z$ ;

$y_{(A)}$  – координата точки  $A$  в системі центральних осей  $yOz$  складеного перерізу.

Знайдемо координати центру ваги складеного перерізу (рис. 4.26). Оскільки вісь  $y$  є віссю симетрії складеного перерізу, то центр ваги лежатиме на цій осі ( $z_c = 0$ ). Знайдемо другу координату центру ваги:

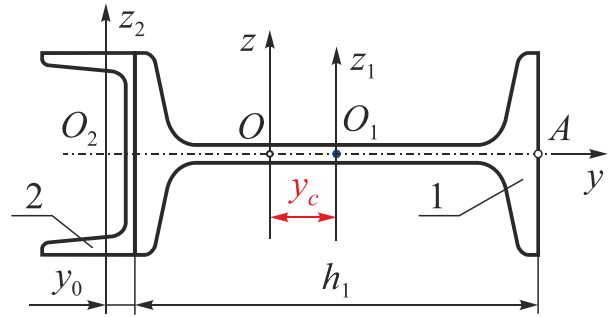


Рис. 4.26

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_z^{(i)}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{0 \cdot F_1 + \left(-\left(\frac{h_1}{2} + y_0\right)\right) F_2}{F_1 + F_2} =$$

$$= \frac{-\left(\frac{20 \cdot 10^{-2}}{2} + 1,44 \cdot 10^{-2}\right) \cdot 10,9 \cdot 10^{-4}}{26,8 \cdot 10^{-4} + 10,9 \cdot 10^{-4}} = \frac{-1,247 \cdot 10^{-4}}{37,7 \cdot 10^{-4}} = -3,308 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Визначимо момент складеного перерізу відносно центральної осі  $z$ :

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = I_{z_1} + y_c^2 \cdot F_1 + I_{z_2} + \left(\frac{h_1}{2} + y_0 - y_c\right)^2 F_2 =$$

$$= 1840 \cdot 10^{-8} + (3,308 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 26,8 \cdot 10^{-4} +$$

$$+ 20,4 \cdot 10^{-8} + \left(\frac{20 \cdot 10^{-2}}{2} + 1,44 \cdot 10^{-2} - 3,308 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 10,9 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 2133,269 \cdot 10^{-8} + 741,211 \cdot 10^{-8} = 2874,48 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Тоді вираз для визначення максимальних нормальних напружень можна переписати у вигляді

$$\sigma_{\max (A)} = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_c}{I_z} \left(\frac{h_1}{2} + y_c\right) =$$

$$= \frac{200 \cdot 10^3}{37,7 \cdot 10^{-4}} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 3,308 \cdot 10^{-2}}{2874,48 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{20 \cdot 10^{-2}}{2} + 3,308 \cdot 10^{-2}\right) =$$

$$= 53,05 \cdot 10^6 + 30,63 \cdot 10^6 = 83,68 \text{ МПа.}$$

Таким чином, «посилення» стояка призвело до підвищення максимального нормального напруження на 12,13 %.

### Приклад 4.16

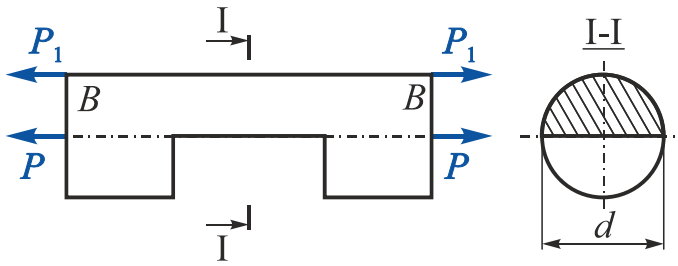


Рис. 4.27

Брус змінного перерізу навантажено розтягальними силами  $P$  (рис. 4.27). Визначити величину сил  $P_1$ , прикладених у точках  $B$ , щоб у небезпечному перерізі бруса розподіл нормальних напружень був рівномірним.

Чи підвищиться при цьому несуча здатність бруса і наскільки? Концентрацію напружень не враховувати.

### Розв'язання

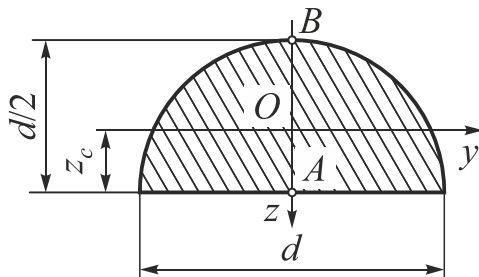


Рис. 4.28

Силу  $P_1$  знайдемо з умови рівності нормальних напружень у нижній точці ( $A$ ) ослабленого перерізу при дії моментів, що виникають від сил  $P$  та  $P_1$  відносно центру ваги перерізу (рис. 4.28):

$$\sigma_x (M_y(P)) = \sigma_x (M_y(P_1)).$$

Тоді

$$\frac{M_y(P)}{W_B} = \frac{M_y(P_1)}{W_B},$$

де  $M_y(P) = Pz_A$ ;  $M_y(P_1) = P_1z_B$  – згинальні моменти під дією сил  $P$  та  $P_1$ ;

$z_B = z_c = 2d/3\pi = 0,2122d$ ;  $z_A = d/2 - z_c = 0,2878d$  – координати точок застосування сил  $P$  і  $P_1$  відносно центру ваги перерізу;

$F$  – площа поперечного перерізу;

$W_B = 0,0239d^3$ ;  $W_H = 0,0324d^3$  – моменти опору напівкруглого поперечного перерізу відносно осі  $y$  для верхніх (точка  $A$ ) та нижніх (точка  $B$ ) волокон.

Підставимо в умову рівності нормальних напружень

$$\frac{P \cdot 0,2122d}{0,0324d^3} = \frac{P_1 \cdot 0,2878d}{0,0324d^3}$$

і після перетворень отримаємо

$$P_1 = 0,7373 \cdot P.$$

Згідно з розрахунковою схемою (рис. 4.29) при першому варіанті навантаження найбільше напруження в небезпечному перерізі буде в нижніх волокнах поперечного перерізу:

$$\begin{aligned} \sigma_{x \max}^{(1)} &= \sigma_x(N_x) + \sigma_{x \max}(M_y) = \frac{P}{F} + \frac{Pz_H}{W_B} = \\ &= \frac{P \cdot 8}{\pi d^2} + \frac{P \cdot 0,2122d}{0,0324d^3} = \frac{P}{d^2} (2,547 + 6,549) = 9,096 \frac{P}{d^2}. \end{aligned}$$

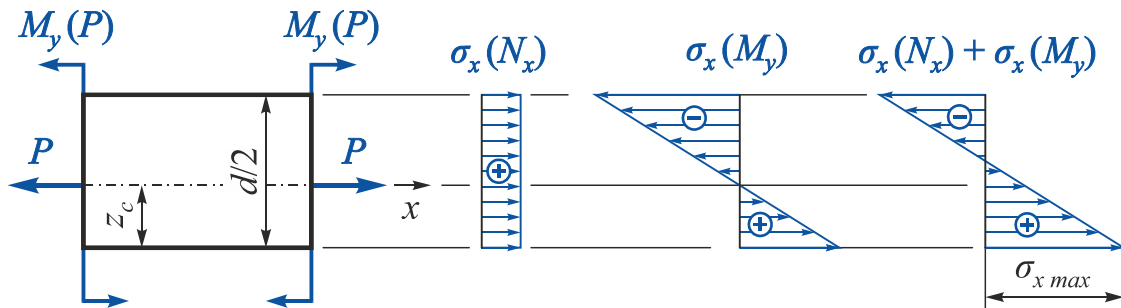


Рис. 4.29

У другому варіанті навантаження (рис. 4.30) при  $P_1 = 0,7373 \cdot P$  максимальні напруження будуть у будь-якій точці ослабленого поперечного перерізу, оскільки нормальні напруження під дією згинальних моментів компенсують один одного (на рис. 4.30 згинальні моменти не показано):

$$\sigma_{x \max}^{(2)} = \frac{P + P_1}{F} = \frac{(P + 0,7373 \cdot P) \cdot 8}{\pi d^2} = \frac{P}{d^2} 4,424.$$

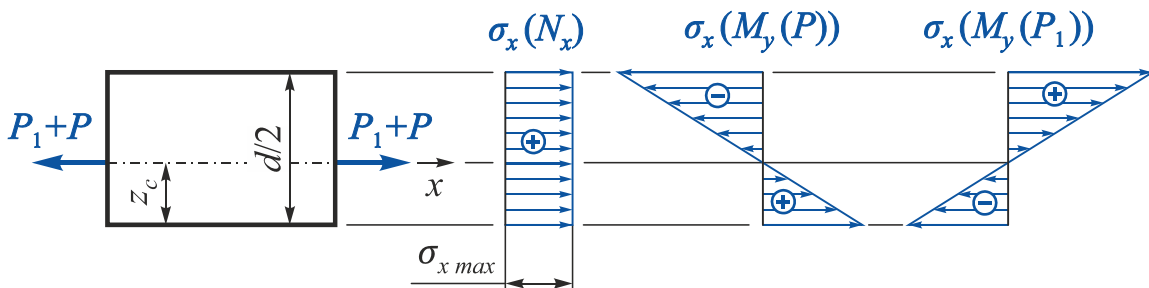


Рис. 4.30

При другому варіанті навантаження найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі зменшується в 2,056 рази порівняно з першим варіантом:

$$\frac{\sigma_{x \max}^{(1)}}{\sigma_{x \max}^{(2)}} = \frac{9,096}{4,424} = 2,056.$$

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке граничний напружений стан?
2. Що таке теорії міцності і з якою метою їх застосовують?
3. Які напружені стани в точці називають рівнонебезпечними?
4. Що таке еквівалентне напруження?
5. Яке призначення мають гіпотези міцності (теорії граничних напружених станів)?
6. Як формулюються теорія найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності) і умова міцності за нею?
7. Як формулюються теорія найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності) і умова міцності за нею?
8. Як формулюються теорія найбільших дотичних напружень (третья теорія міцності) і умова міцності за нею?
9. Як формулюються енергетична теорія міцності (четверта теорія міцності) і умова міцності за нею?
10. У чому полягає теорія міцності Мора?
11. Запишіть умови міцності за третьою і четвертою теоріями міцності при плоскому напруженому стані частинного виду.
12. Що таке епюри? Наведіть основні правила їх побудови та правила знаків при побудові епюр.
13. Що таке плоско-просторовий ламаний брус?
14. Що таке складний опір бруса?
15. Сформулюйте принципи, на яких будується розрахунок брусів при складному опорі.
16. Які точки прямокутного поперечного перерізу будуть потенційно небезпечними та який напружений стан виникає в цих точках при спільній дії згину з крученням і розтягненням?
17. Запишіть умови міцності для небезпечних точок бруса прямокутного поперечного перерізу при згині з крученням і розтягненням.
18. Яким є порядок підбору розмірів бруса прямокутного поперечного перерізу при складному навантаженні?
19. Які точки круглого поперечного перерізу є небезпечними і який напружений стан виникає в цих точках при спільній дії згину і кручення?
20. Запишіть умови міцності для небезпечних точок бруса круглого поперечного перерізу при спільній дії згину і кручення.
21. Яким є порядок підбору діаметра бруса круглого поперечного перерізу при спільній дії згину з крученням і розтягненням (стисненням)?

22. Як знайти величину розрахункового (зведеного) моменту за третьою і четвертою теоріями міцності при згині з крученням бруса круглого поперечного перерізу?
23. Яка точка круглого поперечного перерізу буде небезпечною при спільній дії згину з крученням і розтягненням (стисненням)? Запишіть умови міцності для цієї точки.
24. Чому зазвичай не враховують дотичні напруження під дією поперечних сил при розрахунку стрижнів на згин з крученням?
25. Який згин називається косим?
26. Що називається чистим косим згином і поперечним косим згином?
27. Для яких форм поперечних перерізів брусів косий згин є неможливим?
28. До яких рівнодійних зводять внутрішні зусилля при косому згині?
29. Як визначити положення нейтральної лінії при косому згині?
30. Чи проходить нейтральна лінія при косому згині через центр ваги перерізу?
31. Як визначити небезпечні точки в перерізі при косому згині?
32. Яким є порядок розрахунку брусів при косому згині?
33. Який вид складного опору називається позацентровим розтягненням-стисненням?
34. Яких видів напружень зазнає стрижень при позацентровому прикладенні розтягального або стискального навантаження?
35. За якими формулами визначають нормальні напруження в поперечних перерізах стрижня при позацентровому розтягненні і стисненні? Який вигляд має епюра цих напружень?
36. Як визначити положення нейтральної лінії при позацентровому розтягненні-стисненні?
37. Як переміщується нейтральна лінія при зміні координат точки прикладення зовнішньої сили при позацентровому розтягненні-стисненні?
38. Як визначити положення найбільш небезпечної точки поперечного перерізу бруса при позацентровому розтяганні-стисненні?
39. Що називається ядром перерізу?
40. Як побудувати ядро перерізу?
41. Яке положення займає нейтральна лінія, коли центр тиску лежить на контурі ядра перерізу?
42. Якими будуть напруження у всіх точках поперечного перерізу, якщо відомо, що розтягальна сила знаходиться всередині ядра перерізу?
43. Чи можуть при позацентровому розтягненні виникати стискальні напруження в точках поперечного перерізу?

# ПОРЯДОК І ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

**Мета:** виконати розрахунок на міцність ламаного бруса при спільній дії згину з крученням.

1. Накреслити в масштабі розрахункову схему ламаного бруса із заданими навантаженнями.
2. Розбити ламаний брус на ділянки.
3. У довільних перерізах кожної ділянки на відстані  $x$  від його початку розташувати систему координат так, щоб вісь  $x$  збіглася з поздовжньою віссю бруса, вісь  $z$  була напрямлена вниз, а горизонтальна вісь  $y$  складала б з двома першими правий ортогональний базис.

## Зауваження

Щоб отримати на всіх ділянках формально впорядковану систему знаків для внутрішніх силових факторів, бажано систему координат на ділянці II знаходити простим переміщенням, тобто поворотом відносно осі  $z$  на  $90^\circ$  системи координат на ділянці I і т.д.

4. Використавши метод перерізів, записати вирази для всіх внутрішніх силових факторів у довільних перерізах у межах кожної з ділянок, керуючись прийнятими правилами знаків.
5. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів.

## Зауваження

При побудові епюр внутрішніх силових факторів для ламаного бруса необхідно пам'ятати таке:

- а) епюри  $N_x$  і  $M_x$  можна будувати в будь-якій площині;
- б) епюри  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  необхідно будувати тільки **в площинах їх дії**;
- в) епюри **згинальних моментів**  $M_y$  і  $M_z$  необхідно будувати на **розтягнутих волокнах**.

6. Перевірити правильність побудови епюр (рівновагу у вузлових точках).
7. Визначити небезпечний переріз.

## Зауваження

Якщо з епюр положення небезпечного перерізу не є очевидним, то в розрахунках на міцність необхідно розглянути всі потенційно небезпечні перерізи.

8. Підібрати прямокутний поперечний переріз ( $k = h/b$  задає викладач). Розрахунок провести для всіх потенційно небезпечних точок небезпечного перерізу. Застосувати гіпотезу максимальних дотичних напружень (третя теорія міцності). Побудувати епюри розподілу нормальних і дотичних напружень в небезпечному перерізі даного елемента бруса під дією поздовжньої сили  $N_x$ , крутного моменту  $M_x$ , згинальних моментів  $M_y$  і  $M_z$ . Визначити дійсно небезпечну точку. У всіх потенційно небезпечних точках визначити і зобразити вид напруженого стану. Побудувати сумарну епюру нормальних напружень і показати положення нейтральної осі перерізу.

**Зауваження** | Якщо  $M_z > M_y$ , переріз слід розташувати *горизонтально*; якщо  $M_y > M_z$  – *вертикально*, щоб більшому згинальному моменту, протиставити велику згинальну жорсткість перерізу (забезпечення міцності перерізу при менших його розмірах і відповідно зменшенні ваги конструкції).

9. Підібрати круглий поперечний переріз. Застосувати гіпотезу максимальних дотичних напружень (третя теорія міцності) і енергетичну гіпотезу міцності (четверта теорія міцності). У небезпечній точці зобразити вид напруженого стану.

**Зауваження** |

1. Розрахунок на міцність проводять з урахуванням нормальних напружень під дією згину і поздовжньої сили (якщо вона є в перерізі), а також дотичних напружень, що залежать від кручення. Дотичними напруженнями, що відповідають поперечним силам, слід знехтувати.
2. У разі наявності поздовжньої сили підбір розмірів поперечного перерізу в першому наближенні проводити без урахування цієї поздовжньої сили. Після обчислення розмірів поперечного перерізу визначити дійсні розрахункові напруги в небезпечному перерізі. Якщо ця напруга більш ніж на 5 % перевершує допустиме напруження, то розміри перерізу необхідно збільшити, щоб перевантаження не перевищувало 5 %.
3. Прийняти для матеріалу  $[\sigma] = 160 \dots 240 \text{ МПа}$ , коефіцієнти  $\alpha$  і  $\gamma$  для співвідношення  $k = h/b$  наведено у додатку.

10. Порівняти за вагою прямокутний і круглий поперечні перерізи.



## Приклад

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для заданого ламаного бруса. Для небезпечного перерізу визначити розміри  $h$  і  $b$  прямокутного поперечного перерізу і діаметр  $d$  круглого поперечного перерізу (рис. 1).

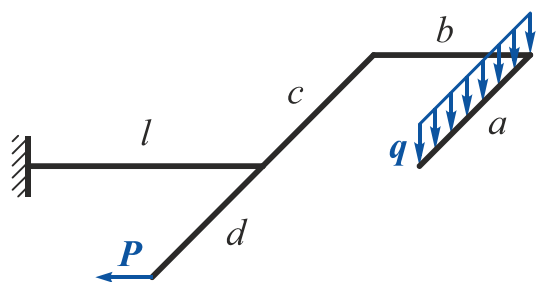


Рис. 1

Дано:  $P = 2 \text{ кН}$ ;  $q = 5 \text{ кН/м}$ ;  $a = 2 \text{ м}$ ;

$b = 0,5 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  $d = 0,5 \text{ м}$ ;

$l = 1 \text{ м}$ ;  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ ;

$k = h/b = 1,5$ ;  $\alpha = 0,231$ ;  $\gamma = 0,859$ .

Необхідно побудувати епюри  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ; визначити розміри прямокутного і діаметр круглого поперечних перерізів.

### Розв'язання

1. Накреслимо в масштабі розрахункову схему ламаного бруса із заданими навантаженнями. У довільних перерізах кожної ділянки на відстані  $x$  від початку переріза розташуємо систему координат  $xuz$  так, щоб вісь  $x$  збіглася з поздовжньою віссю бруса, вісь  $z$  була напрямлена вниз, а горизонтальна вісь  $y$  складала б з двома першими правий ортогональний базис (рис. 2).

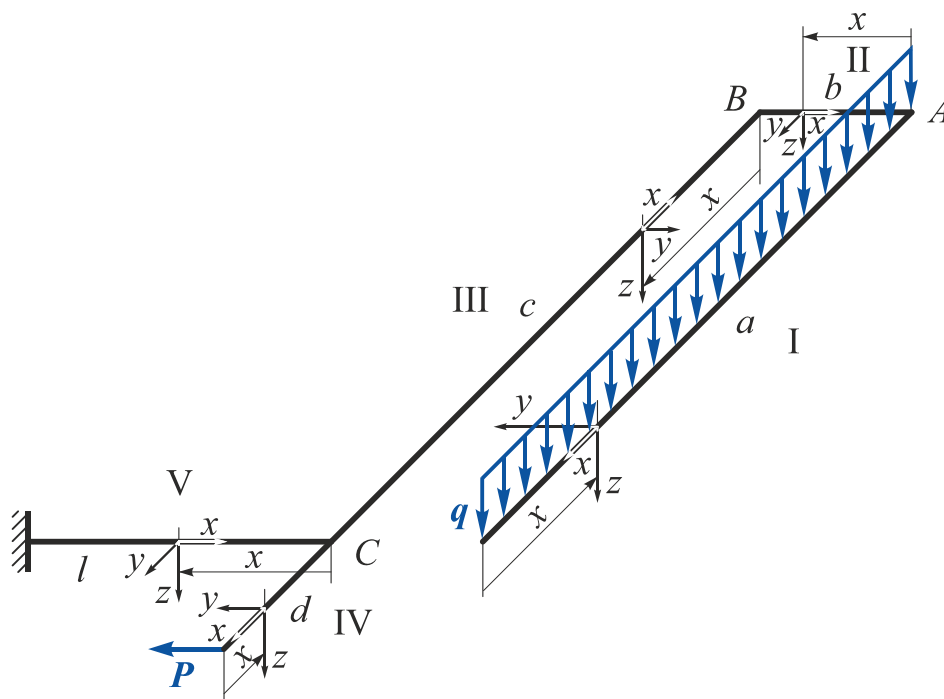


Рис. 2

2. Використавши метод перерізів, запишемо вираз для всіх внутрішніх силових факторів у довільних перерізах у межах кожної ділянки, керуючись прийнятими правилами знаків.

Ділянка I ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = 0;$$

$$Q_z^I = 0;$$

$$Q_y^I = qx = 5x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = -\frac{qx^2}{2} = -\frac{5x^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^I = 0.$$

Ділянка II ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 0,5 \text{ м}$ ).

Побудуємо окрему розрахункову схему, замінивши розподілене навантаження, що діє в межах ділянки I, рівнодійною (рис. 3).

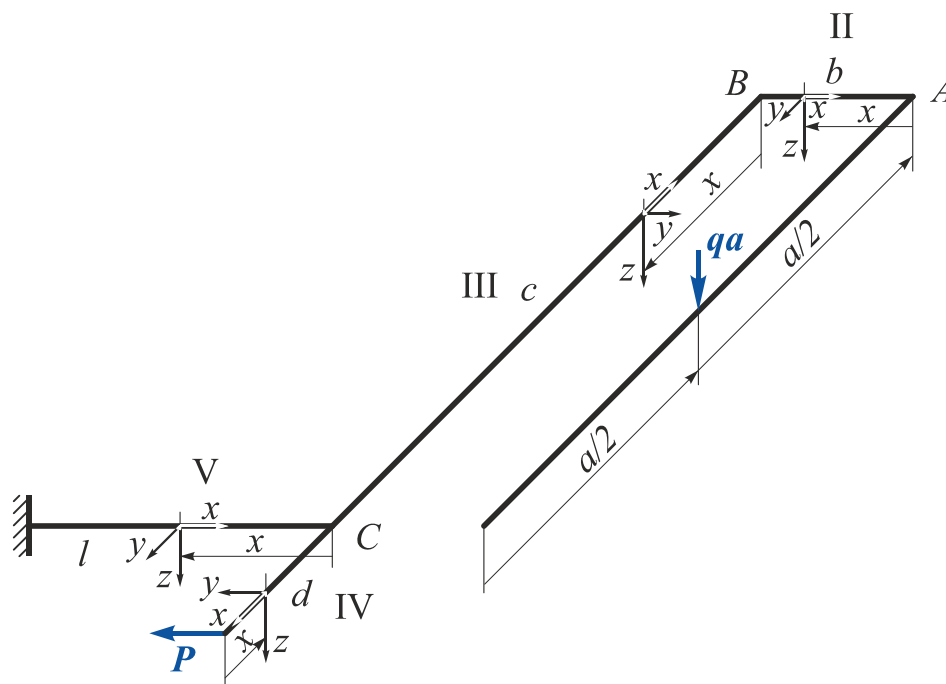


Рис. 3

$$N_x^{II} = 0;$$

$$Q_z^{II} = qa = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^{II} = 0;$$

$$M_x^{II} = qa \frac{a}{2} = 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = -qax = -5 \cdot 2 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=0,5 \text{ м}} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{II} = 0.$$

**Ділянка III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{III} = 0;$$

$$Q_z^{III} = qa = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = 0;$$

$$M_x^{III} = qab = 5 \cdot 2 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = qa \frac{a}{2} - qax = 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 5 \cdot 2 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=c=2 \text{ м}} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^{III} = 0.$$

**Ділянка IV** ( $0 \leq x \leq d$ ,  $d = 0,5 \text{ м}$ ).

$$N_x^{IV} = 0;$$

$$Q_z^{IV} = 0;$$

$$Q_y^{IV} = -P = -2 \text{ кН};$$

$$M_x^{IV} = 0;$$

$$M_y^{IV} = 0;$$

$$M_z^{IV} = -Px = -2 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=d=0,5 \text{ м}} = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

**Ділянка V** ( $0 \leq x \leq l$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ).

$$N_x^V = -P = -2 \text{ кН};$$

$$Q_z^V = qa = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^V = 0;$$

$$M_x^V = -qa \frac{a}{2} = -5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^V = -qa(b+x) = 5 \cdot 2 \cdot (0,5+x) \quad \Big|_{x=0} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=l=1 \text{ м}} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_z^V = -Pd = -2 \cdot 0,5 = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### 3. Побудуємо епюри внутрішніх силових факторів (рис. 4).

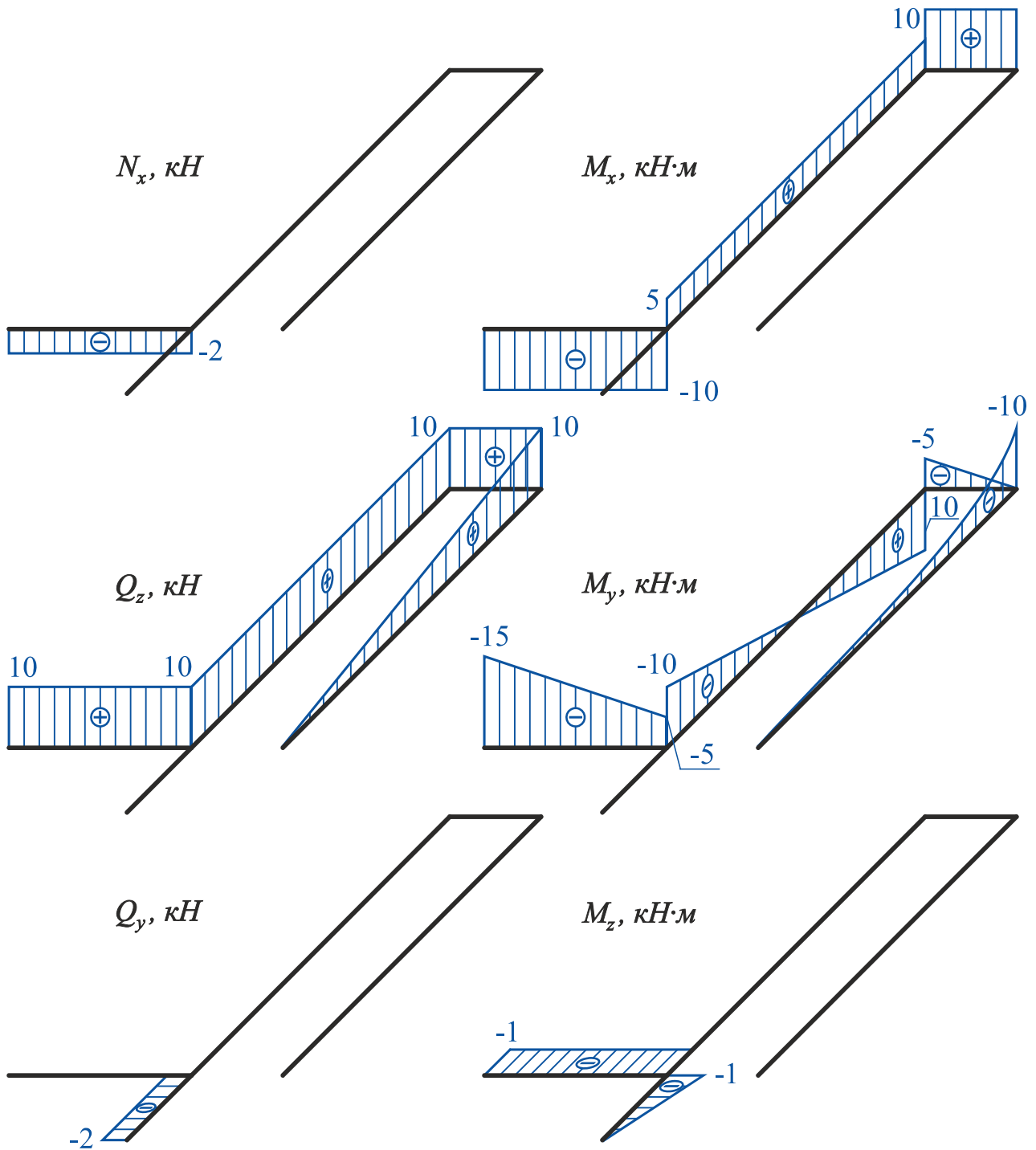


Рис. 4

Епюри  $N_x$ ,  $Q_y$  і  $M_z$  виконані в більшому масштабі.

### 4. Перевіримо правильність побудови епюр.

Для цього виділимо нескінченно малі елементи ламаного бруса в місцях зчленування його частин (вузли  $A$ ,  $B$  і  $C$ ) і розглянемо їх рівновагу під дією внутрішніх зусиль і зовнішніх сил, прикладених у межах цих вузлів (рис. 5).

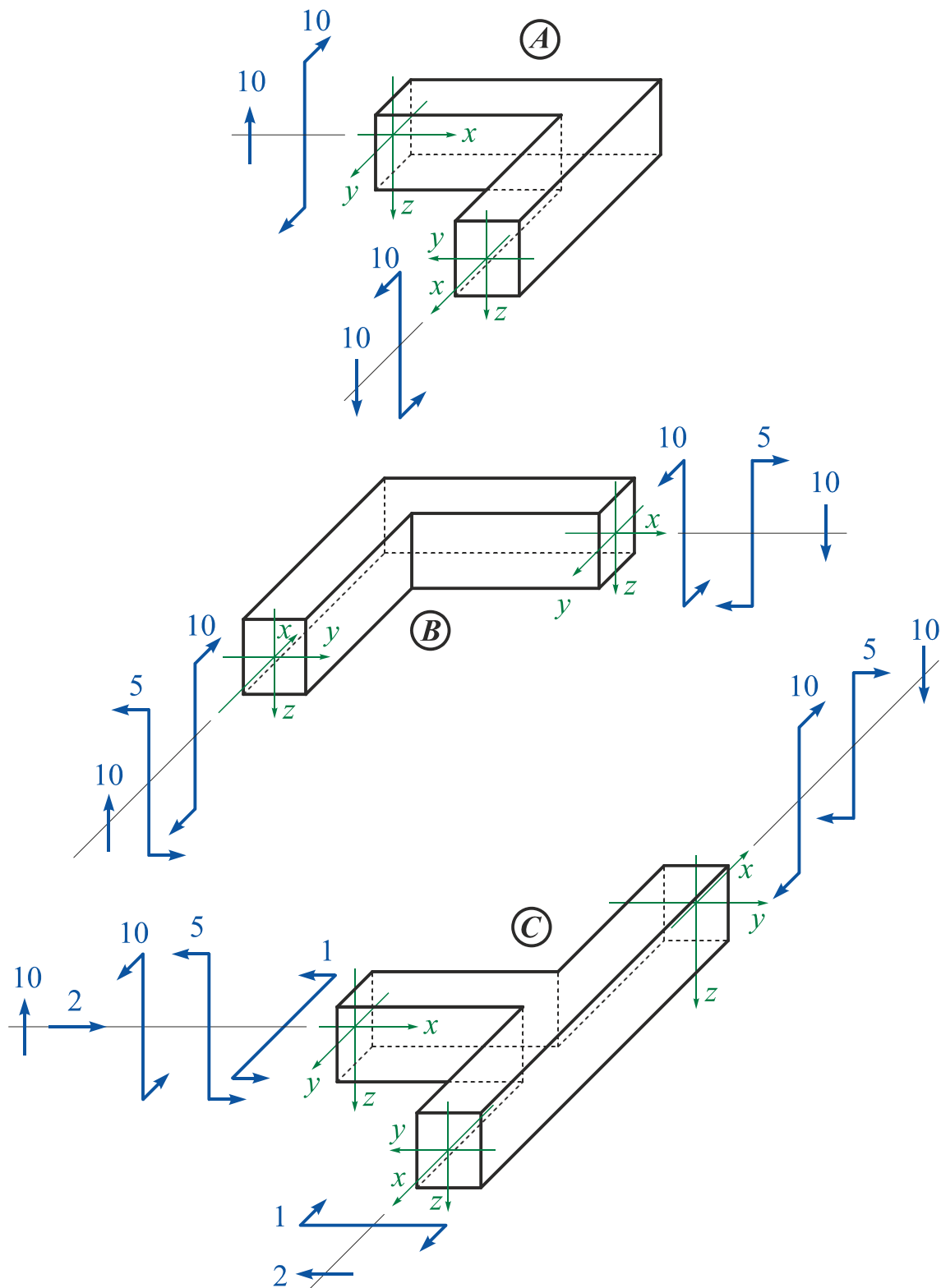


Рис. 5

Рівняння рівноваги вузла A:

$$\sum P_x = 0;$$

$$\sum P_y = 0;$$

$$\sum P_z = 10 - 10 = 0;$$

$$\sum M_x = 10 - 10 = 0;$$

$$\sum M_y = 0;$$

$$\sum M_z = 0.$$

Рівняння рівноваги вузла  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 10 - 10 = 0; & \sum M_y &= 5 - 5 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння рівноваги вузла  $C$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 2 - 2 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 10 - 10 = 0; & \sum M_y &= 5 - 5 = 0; & \sum M_z &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

## 5. Знайдемо небезпечний переріз.

Із аналізу епюр внутрішніх зусиль видно, що найнебезпечнішим є переріз в жорсткому затисненні, в якому діють:

$$N_x = -2 \text{ кН}; \quad M_x = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_z = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

## 6. Визначимо розміри прямокутного поперечного перерізу.

Оскільки  $M_y > M_z$ , розташуємо переріз вертикально для забезпечення міцності перерізу при менших його розмірах.

Переріз з прикладеними внутрішніми зусиллями показано на рис. 6.

Внутрішні зусилля прикладені відповідно до прийнятих правил знаків:

- від'ємна поздовжня сила  $N_x$  означає стискання;
- від'ємний крутний момент  $M_x$  – обертання за годинниковою стрілкою;
- від'ємний згинальний момент  $M_y$  – розтягнення верхніх і стиснення нижніх волокон;
- від'ємний згинальний момент  $M_z$  – розтягнення правих і стиснення лівих волокон.

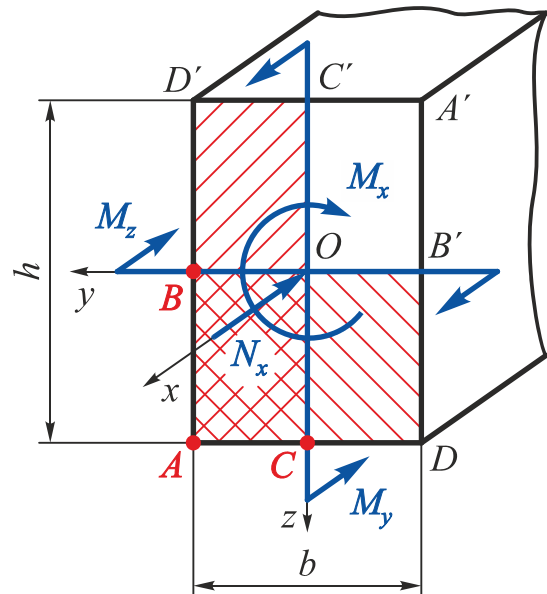


Рис. 6

Визначимо потенційно небезпечні точки перерізу. Виділимо трикратно стиснену (тому що  $N_x < 0$ ) чверть перерізу (заштрихована область на рис. 6) і відзначимо три її кутові точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Вони і будуть потенційно небезпечними.

Побудуємо епюри розподілу нормальних і дотичних напружень у перерізі (рис. 7–10).

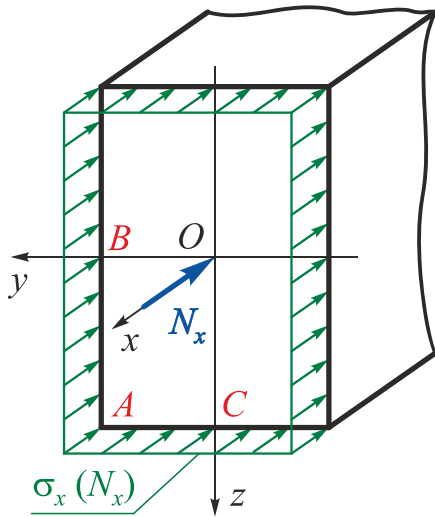


Рис. 7

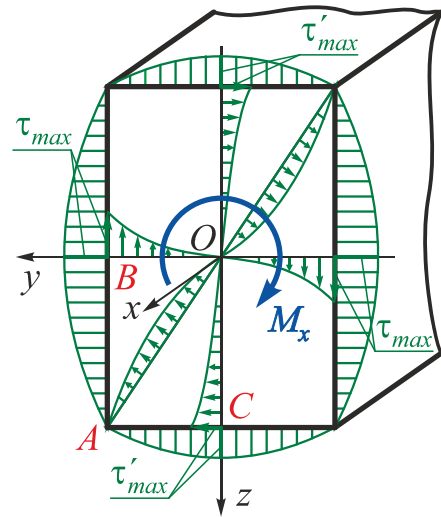


Рис. 8

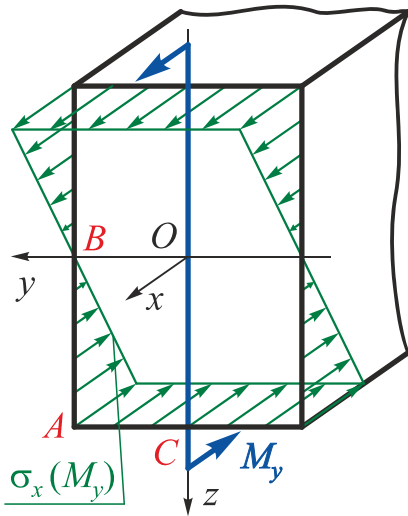


Рис. 9

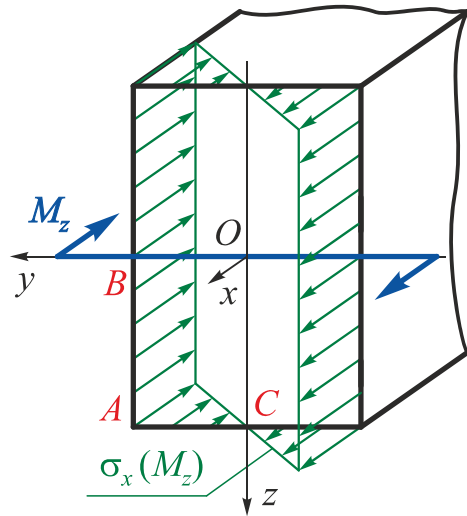


Рис. 10

Для кожної з трьох потенційно небезпечних точок ( $A$ ,  $B$  і  $C$ ) поперечного перерізу покажемо вид напруженого стану і запишемо умови міцності (без урахування впливу поздовжньої сили  $N_x$ ).

### Точка $A$

У точці  $A$  поперечного перерізу реалізується лінійний напружений стан (рис. 11).

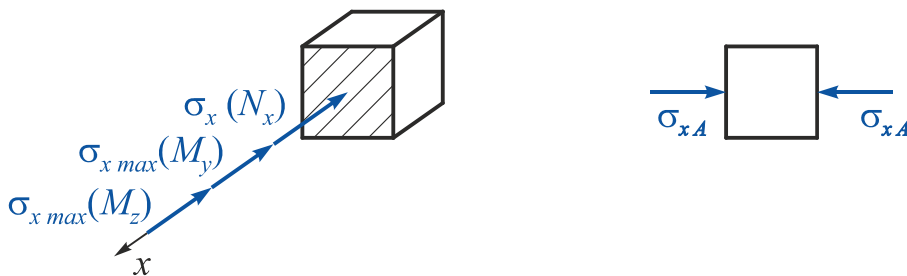


Рис. 11

Умова міцності в цій точці має вигляд

$$\sigma_{xA} = \sigma_{x_{max}} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma],$$

де  $W_y = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6}.$$

Підставивши значення  $W_y$  і  $W_z$  в умову міцності і провівши перетворення, отримаємо

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_y| + 6k|M_z|}{k^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |-15 \cdot 10^3| + 6 \cdot 1,5 \cdot |-1 \cdot 10^3|}{1,5^2 \cdot 180 \cdot 10^6}} = 0,0625 \text{ м.}$$

### Точка В

У точці В поперечного перерізу реалізується плоский напружений стан (рис. 12).

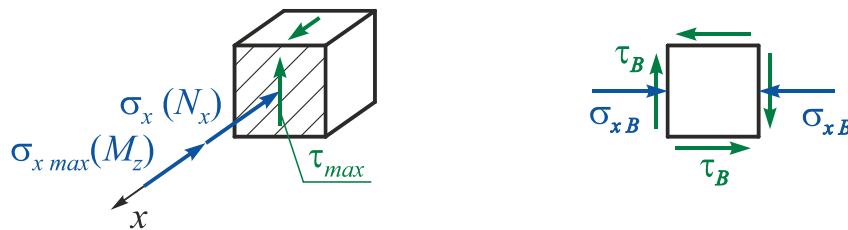


Рис. 12

Використавши третю теорію міцності, запишемо умову міцності:

$$\sigma_{\text{екв} B}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

де  $W_z = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6};$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,231$  – коефіцієнт, що залежить від співвідношення  $h/b = 1,5$  (див. додаток).

Підставивши значення  $W_z$  і  $W_k$  в умову міцності, отримаємо

$$b^{\text{III}} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_z}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6 \cdot (-1 \cdot 10^3)}{1,5}\right)^2 + 4\left(\frac{-10 \cdot 10^3}{0,231 \cdot 1,5}\right)^2}{(180 \cdot 10^6)^2}} = 0,0685 \text{ м.}$$



## Точка С

У точці С поперечного перерізу реалізується плоский напружений стан (рис. 13).

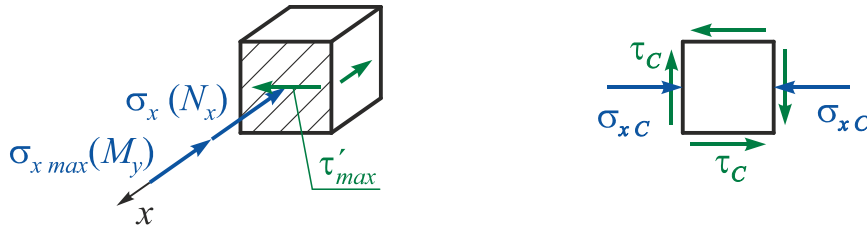


Рис. 13

Використавши третю теорію міцності, запишемо умову міцності:

$$\sigma_{\text{екв } C}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

де  $W_y = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{оскільки } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,231$ ,  $\gamma = 0,859$  – коефіцієнти, що залежать від співвідношення  $h/b = 1,5$  (див. додаток).

Підставивши значення  $W_y$  і  $W_k$  в умову міцності, отримаємо

$$b^{\text{III}} \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{6M_y}{k^2}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{6 \cdot (-15 \cdot 10^3)}{1,5^2}\right)^2 + 4\left(0,859 \cdot \frac{-10 \cdot 10^3}{0,231 \cdot 1,5}\right)^2}{(180 \cdot 10^6)^2}} = 0,0707 \text{ м.}$$

Виберемо більший з трьох розмірів  $b$ .

Розрахункові розміри прямокутного поперечного перерізу і його геометричні характеристики:

$$b = 0,0707 \text{ м}, \quad h = kb = 1,5 \cdot 0,0707 = 0,1061 \text{ м};$$

$$F = bh = 0,0707 \cdot 0,1061 = 0,0075 \text{ м}^2;$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,0707 \cdot 0,1061^2}{6} = 1,3265 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,1061 \cdot 0,0707^2}{6} = 0,8839 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_k = \alpha hb^2 = 0,231 \cdot 0,1061 \cdot 0,0707^2 = 1,2251 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Точка  $C$  – найнебезпечніша точка поперечного перерізу.

Визначимо дійсні розрахункові напруження в небезпечній точці з урахуванням дії поздовжньої сили  $N_x$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{екв } C}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_\kappa}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{|-2 \cdot 10^3|}{0,0075} + \frac{|-15 \cdot 10^3|}{1,3265 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 4\left(0,859 \cdot \frac{-10 \cdot 10^3}{1,2251 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = 180,31 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Перенапруження

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{\text{екв } C}^{\text{III}} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{180,31 - 180}{180} \cdot 100 \% = 0,17 \% < 5 \%.$$

Таким чином, міцність ламаного бруса забезпечена.

Для небезпечного перерізу побудуємо епюру розподілу нормальних напружень і покажемо положення нейтральної осі перерізу.

Визначимо нормальні напруження в кутових точках перерізу, попередньо обчисливши модулі напружень від кожного з внутрішніх силових факторів  $N_x$ ,  $M_y$  і  $M_z$ :

$$|\sigma_x(N_x)| = \frac{N_x}{F} = \frac{2 \cdot 10^3}{0,0075} = 0,27 \text{ МПа};$$

$$|\sigma_{x \text{ max}}(M_y)| = \frac{M_y}{W_y} = \frac{15 \cdot 10^3}{1,3265 \cdot 10^{-4}} = 113,08 \text{ МПа};$$

$$|\sigma_{x \text{ max}}(M_z)| = \frac{M_z}{W_z} = \frac{1 \cdot 10^3}{0,8839 \cdot 10^{-4}} = 11,31 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\sigma_{xA} &= -\sigma_x(N_x) - \sigma_{x \text{ max}}(M_y) - \sigma_{x \text{ max}}(M_z) = -0,27 - 113,08 - 11,31 = \\ &= -124,66 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xD} &= -\sigma_x(N_x) - \sigma_{x \text{ max}}(M_y) + \sigma_{x \text{ max}}(M_z) = -0,27 - 113,08 + 11,31 = \\ &= -102,04 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xA'} &= -\sigma_x(N_x) + \sigma_{x \text{ max}}(M_y) + \sigma_{x \text{ max}}(M_z) = -0,27 + 113,08 + 11,31 = \\ &= 124,12 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xD'} &= -\sigma_x(N_x) + \sigma_{x \text{ max}}(M_y) - \sigma_{x \text{ max}}(M_z) = -0,27 + 113,08 - 11,31 = \\ &= 101,50 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

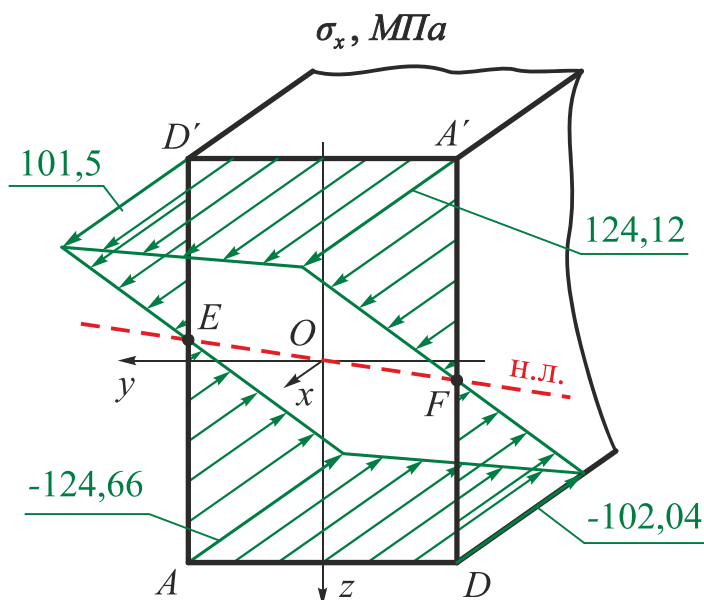


Рис. 14

Накреслим прямокутний переріз у масштабі за отриманими розмірами ( $b = 0,0707 \text{ м}$ ,  $h = 0,1061 \text{ м}$ ) і побудуємо епюру нормальних напружень (рис. 14).

Для знаходження положення нейтральної лінії з'єднаємо прямою точки перетину епюри з площиною поперечного перерізу ( $E$  і  $F$ ).

### 7. Визначимо діаметр круглого поперечного перерізу.

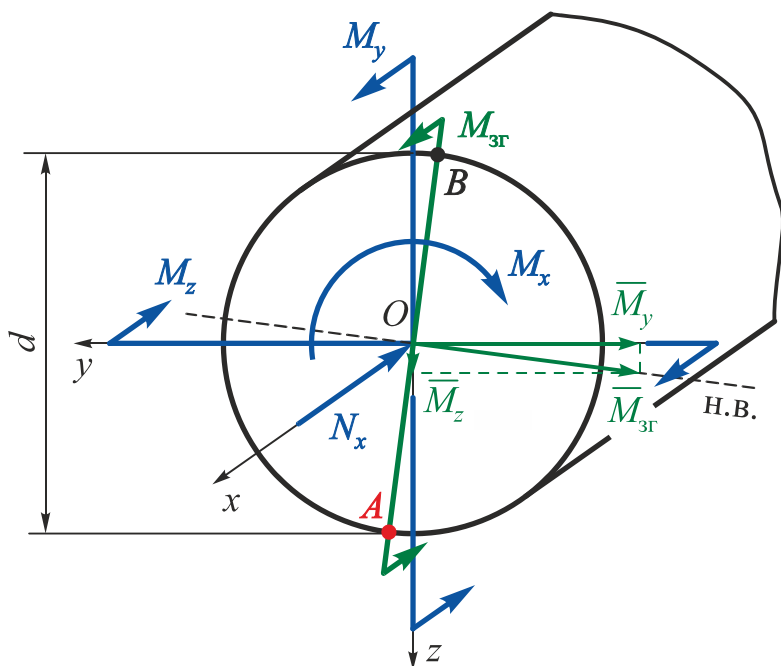


Рис. 15

Оскільки всі осі, що проходять через центр ваги круглого поперечного перерізу, є головними центральними осями інерції перерізу, то згин слід розглядати в площині дії сумарного згинального моменту  $M_{зг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ , що і визначає положення точок найбільших згинальних нормальних напружень (точки  $A$  і  $B$ ) (рис. 15).

Через наявність нормальних напружень стиснення, спричинених поздовжньою силою  $N_x$ , найбільша величина нормального напруження буде в точці  $A$ , в якій напруження під дією поздовжньої сили і згинального моменту підсумовуються. Одночасно вона є точкою найбільших дотичних напружень під дією кручення, оскільки лежить на окружності поперечного перерізу.

Таким чином, точка  $A$  є єдиною небезпечною точкою круглого поперечного перерізу.

Оскільки напружений стан у даній точці є плоским, то розрахунок на міцність необхідно проводити за однією з теорій міцності (третьою або четвертою) (рис. 16).

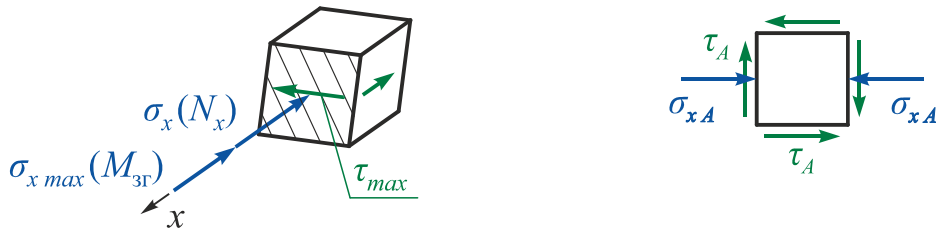


Рис. 16

Використавши **третю теорію міцності**, запишемо умову міцності:

$$\sigma_{\text{екв}A}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{3Г}|}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma],$$

де  $M_{3Г} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$  – сумарний згинальний момент;

$F = \frac{\pi d^2}{4}$  – площа поперечного перерізу;

$W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32}$  – момент опору відносно нейтральної осі;

$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{н.в.}}$  – полярний момент інерції.

У першому наближенні для визначення діаметра  $d$  запишемо умову міцності без урахування впливу поздовжньої сили  $N_x$ :

$$\sigma_{\text{екв}A}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{M_{3Г}}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{3Г}^2}{W_{\text{н.в.}}^2} + \frac{M_x^2}{W_{\text{н.в.}}^2}} = \frac{\sqrt{M_{3Г}^2 + M_x^2}}{W_{\text{н.в.}}} \leq [\sigma].$$

Позначимо

$$M_{\text{розр}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{3Г}^2 + M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2} = \sqrt{15^2 + 1^2 + 10^2} = 18,055 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

де  $M_{\text{розр}}^{\text{III}}$  – розрахунковий момент, визначений за третьою теорією міцності.

Тоді умова міцності набуде вигляду

$$\sigma_{\text{екв}A}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{W_{\text{н.в.}}} = \frac{32M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

звідки

$$d^{\text{III}} \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{розр}}^{\text{III}}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 18,055 \cdot 10^3}{\pi \cdot 180 \cdot 10^6}} = 0,1007 \text{ м}.$$

Визначимо дійсні розрахункові напруження в небезпечній точці з урахуванням дії поздовжньої сили  $N_x$ :

$$M_{3\Gamma} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{15^2 + 1^2} = 15,033 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1007^2}{4} = 7,964 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0,1007^3}{32} = 1,0025 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{н.в.}} = \frac{\pi \cdot 0,1007^3}{16} = 2,005 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв А}}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{3\Gamma}|}{W_{\text{н.в.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{|-2 \cdot 10^3|}{7,964 \cdot 10^{-3}} + \frac{|-15,033 \cdot 10^3|}{1,0025 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 4\left(\frac{-10 \cdot 10^3}{2,005 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = 180,31 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Перенапруження

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{\text{екв А}}^{\text{III}} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{180,31 - 180}{180} \cdot 100 \% = 0,17 \% < 5 \%.$$

Таким чином, міцність ламаного бруса забезпечена.

Визначимо діаметр, використавши четверту теорію міцності:

$$\begin{aligned} M_{\text{розр}}^{\text{IV}} &= \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + 0,75 \cdot M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot M_x^2} = \\ &= \sqrt{15^2 + 1^2 + 0,75 \cdot 10^2} = 17,349 \text{ кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

$$d^{\text{IV}} \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{розр}}^{\text{IV}}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 17,349 \cdot 10^3}{\pi \cdot 180 \cdot 10^6}} = 0,0994 \text{ м}.$$

**8. Порівняємо за вагою** бруси прямокутного і круглого поперечних перерізів:

$$\frac{G^\circ}{G^\square} = \frac{F^\circ}{F^\square} = \frac{7,964 \cdot 10^{-3}}{0,0075} = 1,062.$$

Таким чином, при заданому поєднанні внутрішніх силових факторів і співвідношення сторін прямокутника  $k = h/b = 1,5$  для зменшення ваги конструкції вигідніше застосовувати прямокутний поперечний переріз.

Водночас найбільший габаритний розмір прямокутного поперечного перерізу більше діаметра круглого:  $h = 0,1061 \text{ м} > d = 0,1007 \text{ м}$ .

## Варіанти завдань

Рисунок 1 (табл. 1)

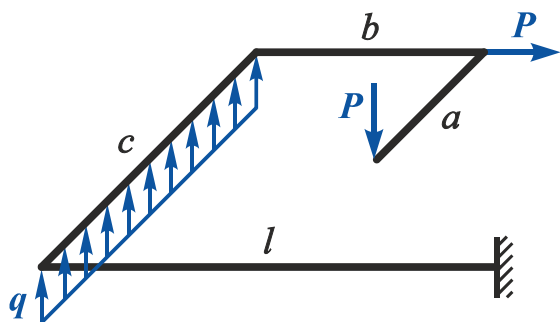


Рисунок 2 (табл. 1)

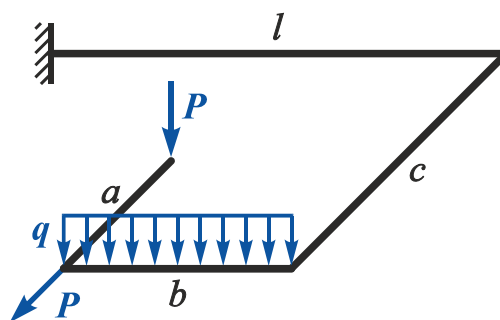


Рисунок 3 (табл. 1)

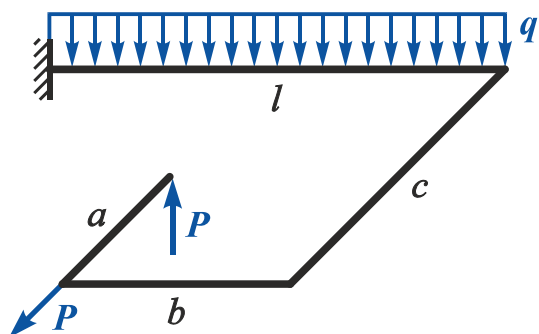


Рисунок 4 (табл. 1)

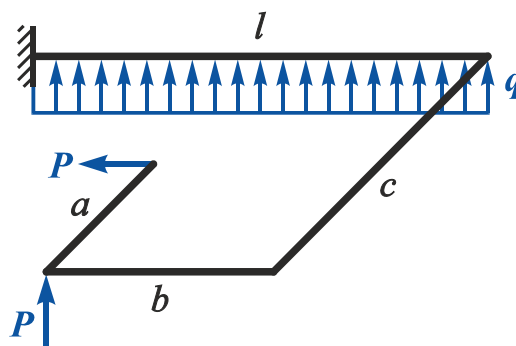


Рисунок 5 (табл. 1)

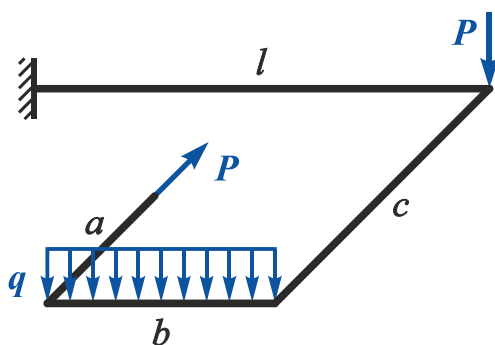


Рисунок 6 (табл. 5)

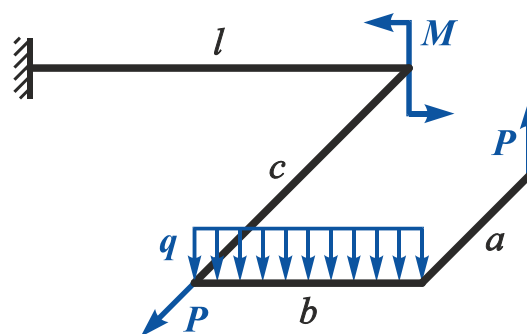


Рисунок 7 (табл. 6)

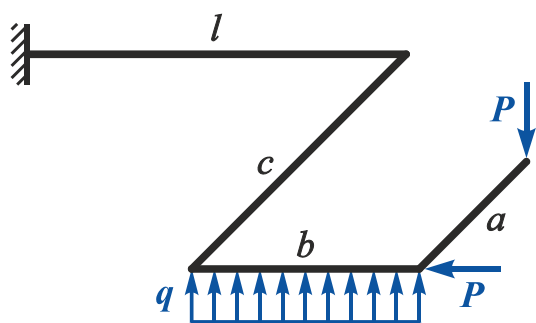
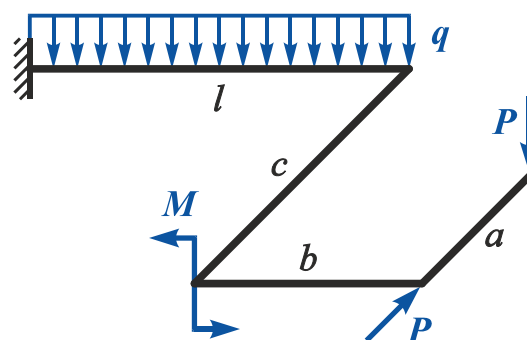


Рисунок 8 (табл. 5)



## Варіанти завдань

Рисунок 9 (табл. 1)

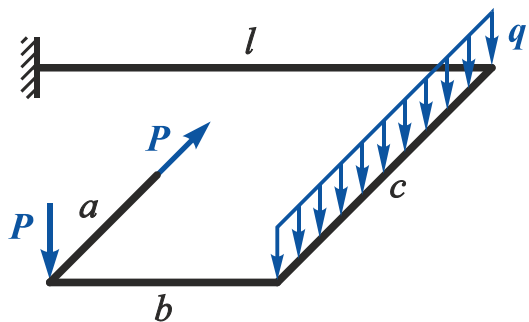


Рисунок 10 (табл. 1)

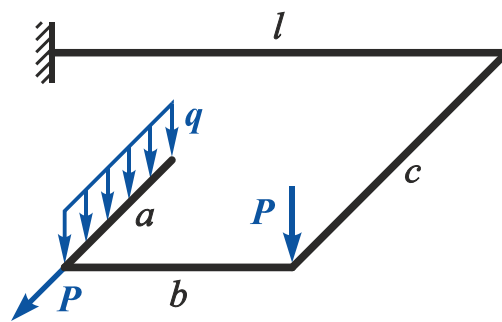


Рисунок 11 (табл. 1)

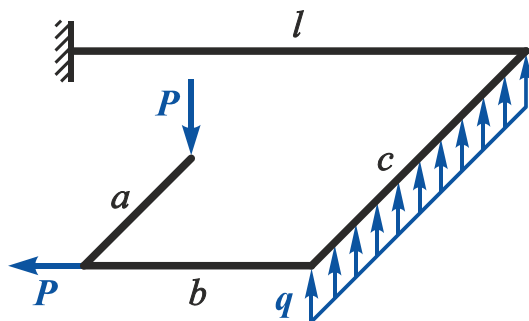


Рисунок 12 (табл. 1)

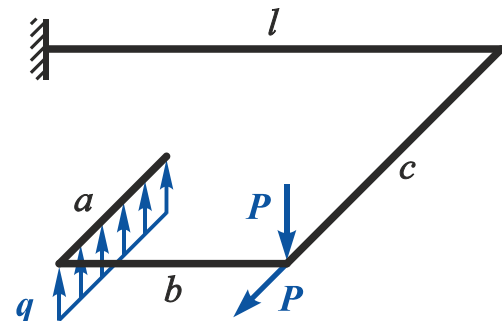


Рисунок 13 (табл. 2)

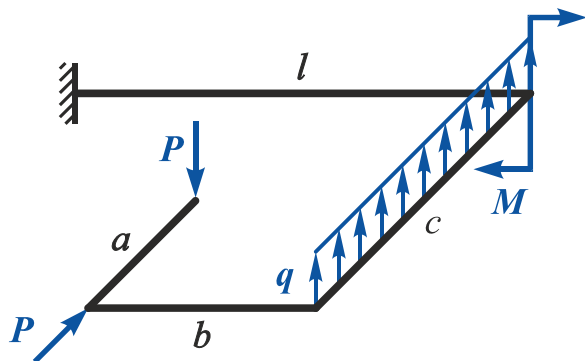


Рисунок 14 (табл. 2)

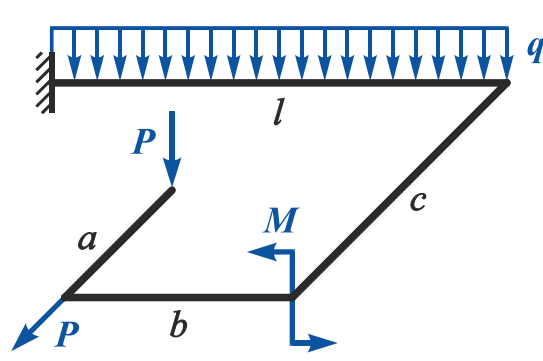


Рисунок 15 (табл. 2)

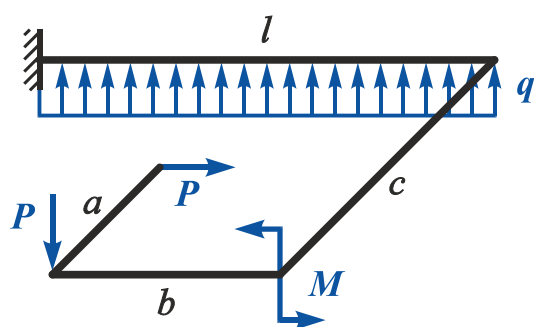
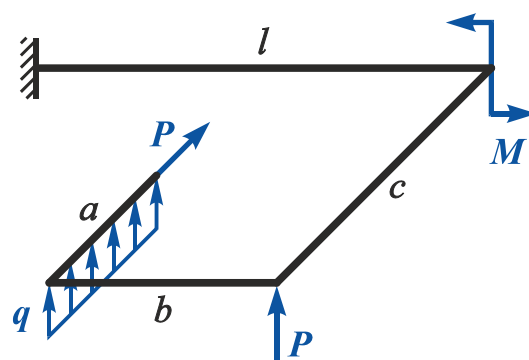


Рисунок 16 (табл. 2)



## Варіанти завдань

Рисунок 17 (табл. 2)

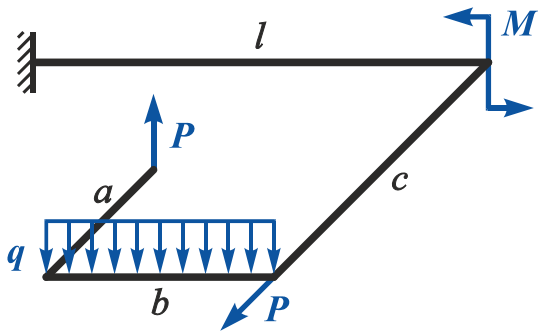


Рисунок 18 (табл. 5)

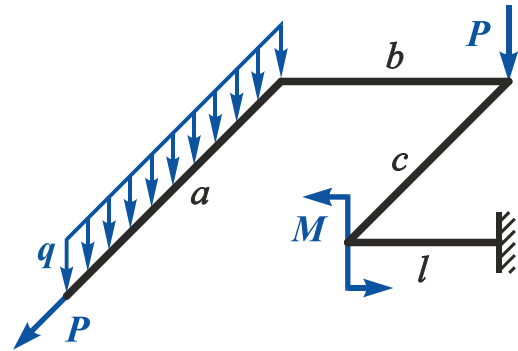


Рисунок 19 (табл. 2)

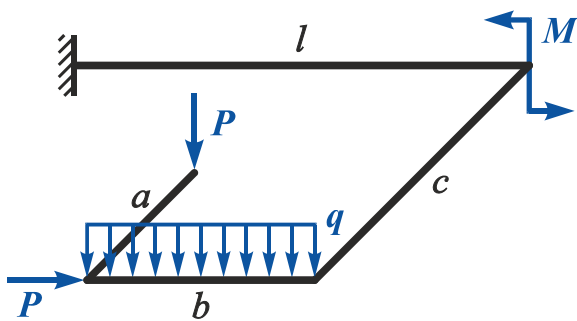


Рисунок 20 (табл. 5)

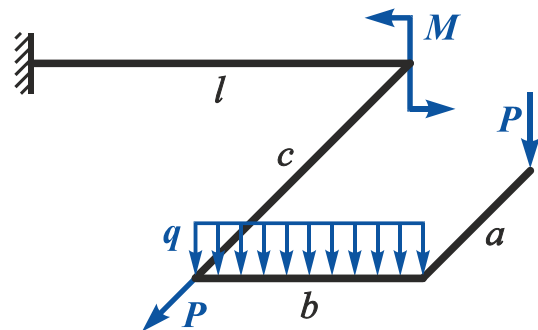


Рисунок 21 (табл. 3)

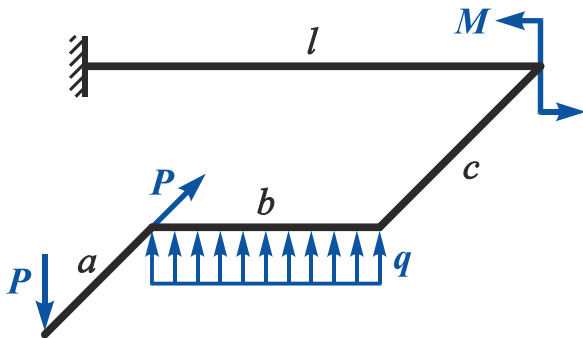


Рисунок 22 (табл. 3)

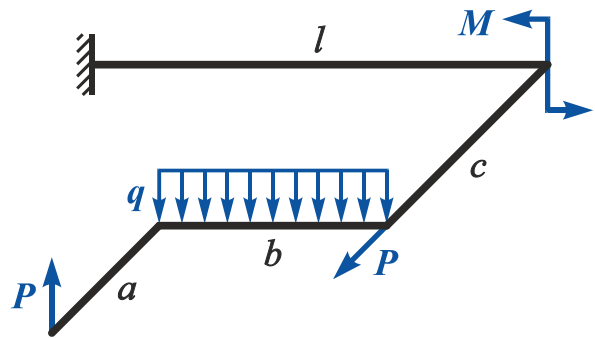


Рисунок 23 (табл. 3)

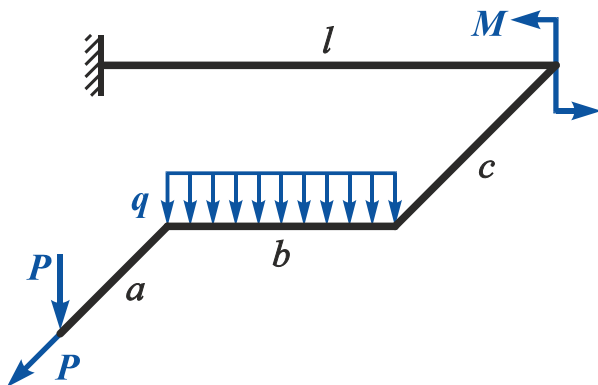
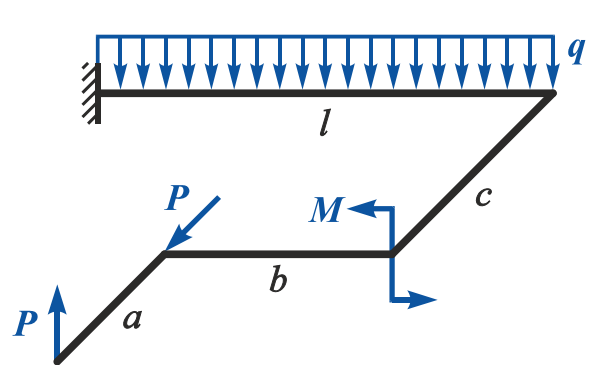


Рисунок 24 (табл. 3)





## Варіанти завдань

Рисунок 25 (табл. 3)

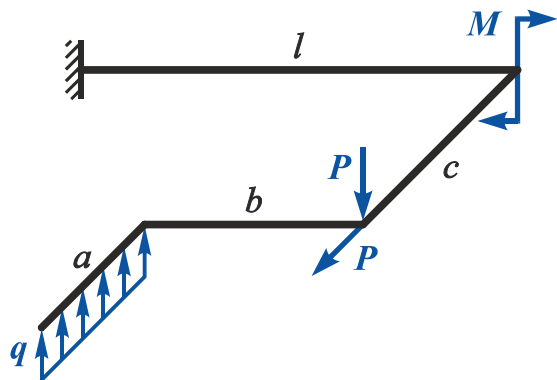


Рисунок 26 (табл. 3)

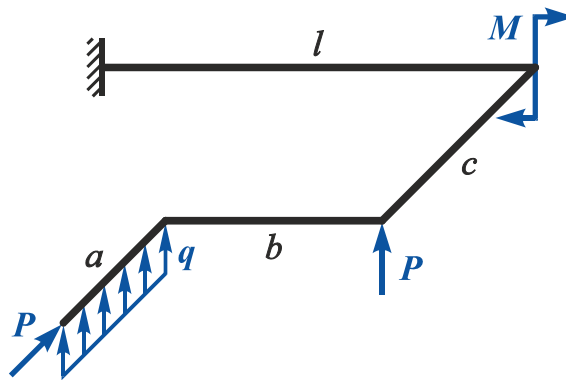


Рисунок 27 (табл. 4)

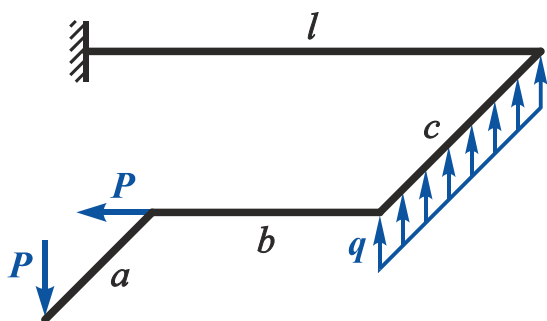


Рисунок 28 (табл. 4)

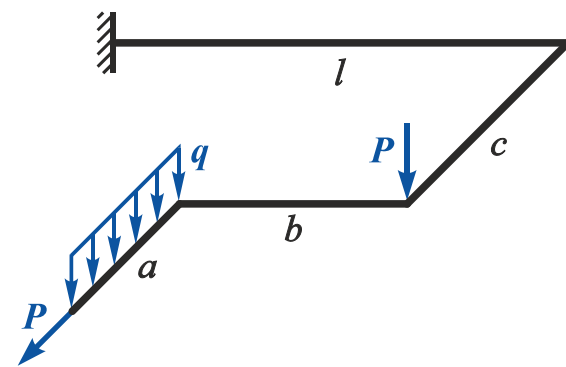


Рисунок 29 (табл. 4)

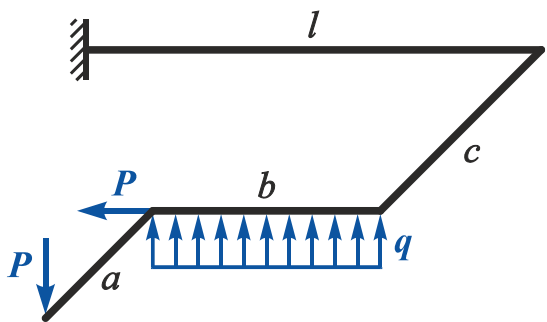


Рисунок 30 (табл. 4)

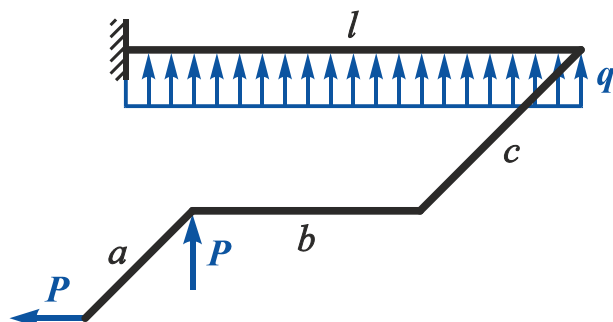


Рисунок 31 (табл. 4)

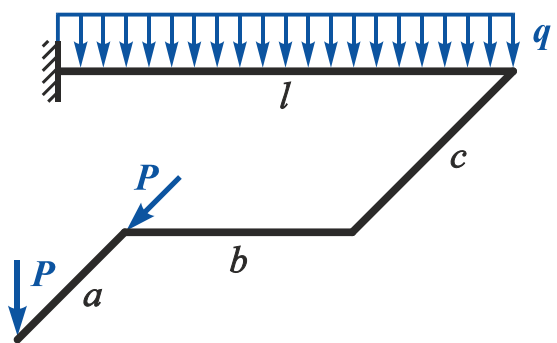
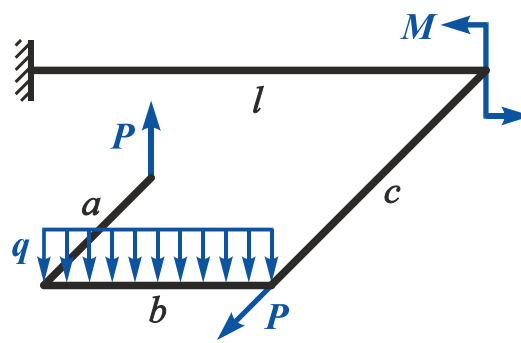


Рисунок 32 (табл. 2)



## Варіанти завдань

Рисунок 33 (табл. 4)

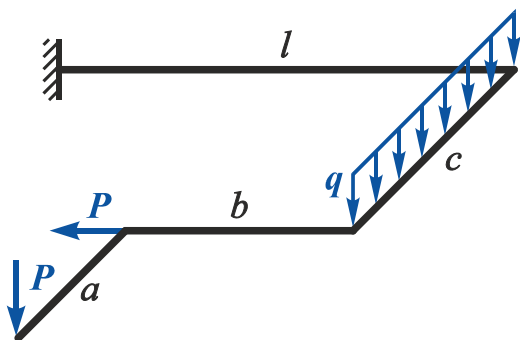


Рисунок 34 (табл. 4)

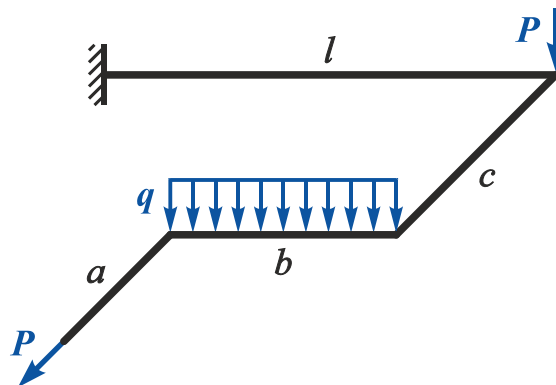


Рисунок 35 (табл. 4)

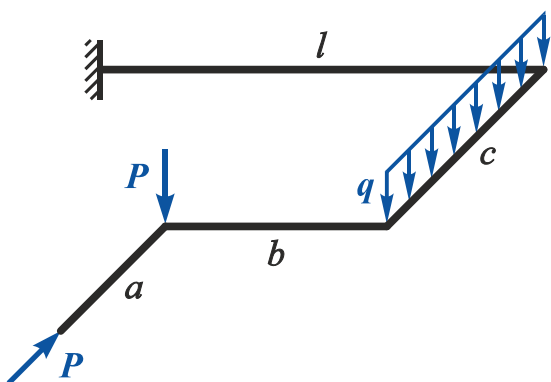


Рисунок 36 (табл. 4)

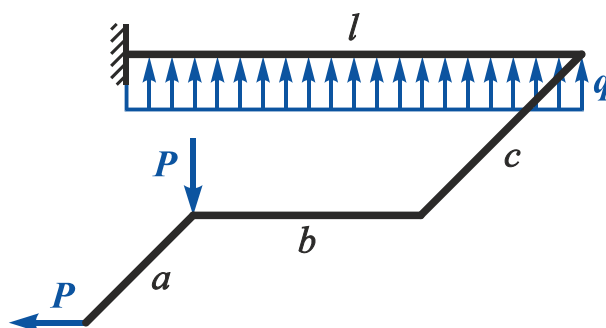


Рисунок 37 (табл. 6)

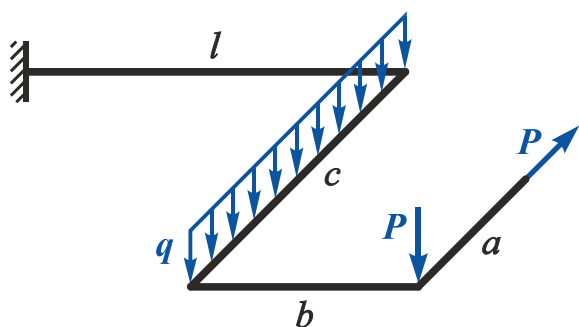


Рисунок 38 (табл. 6)

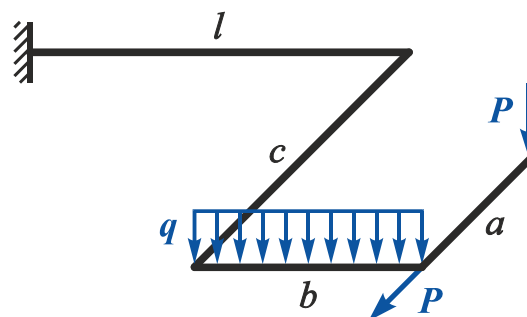


Рисунок 39 (табл. 6)

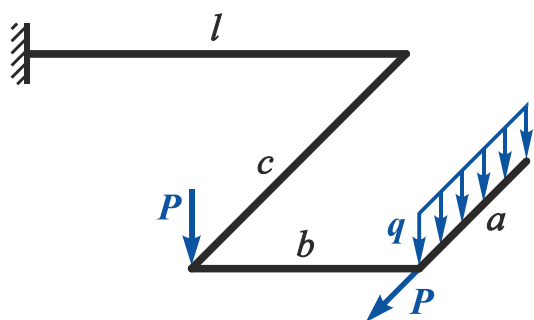
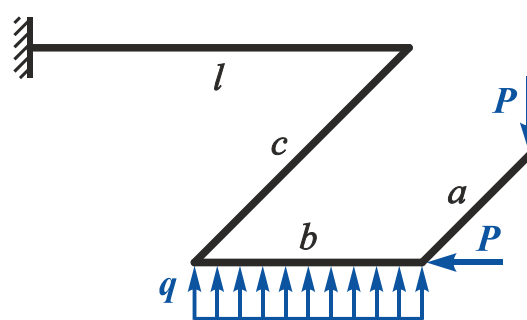


Рисунок 40 (табл. 6)



## Варіанти завдань

Рисунок 41 (табл. 6)

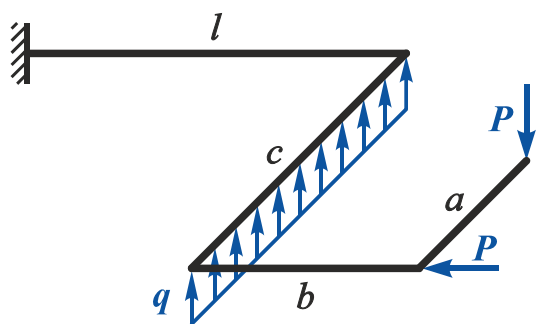


Рисунок 42 (табл. 6)

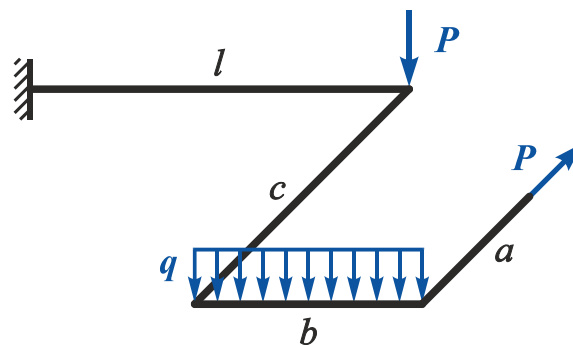


Рисунок 43 (табл. 6)

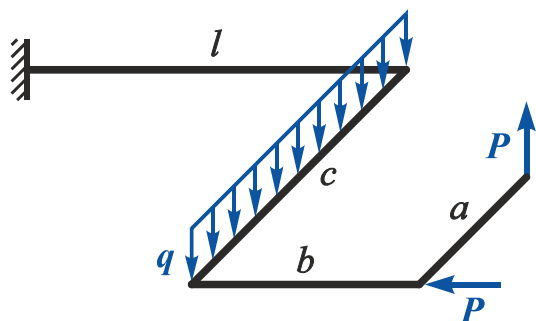


Рисунок 44 (табл. 6)

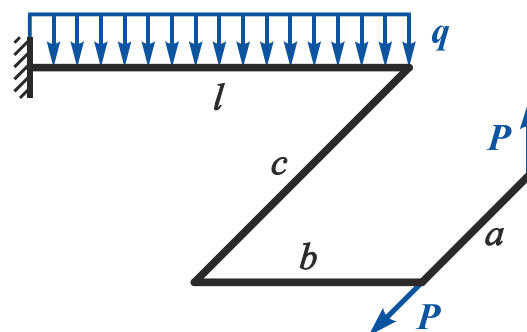


Рисунок 45 (табл. 6)

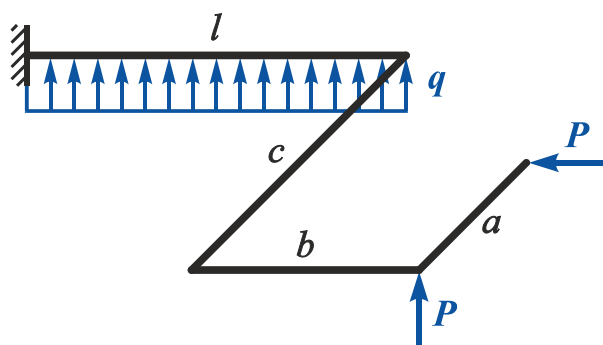


Рисунок 46 (табл. 6)

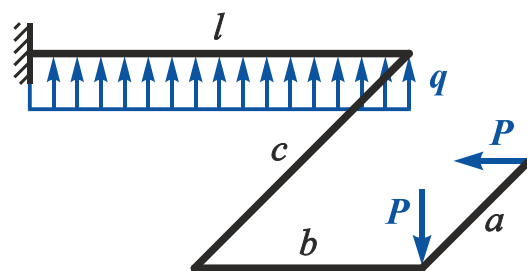


Рисунок 47 (табл. 6)

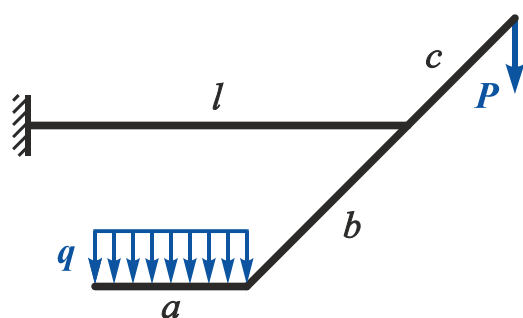
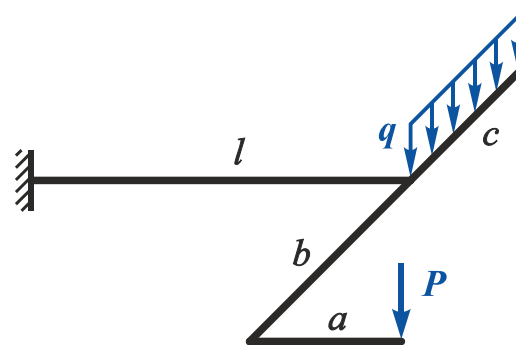


Рисунок 48 (табл. 6)



## Варіанти завдань

Рисунок 49 (табл. 8)

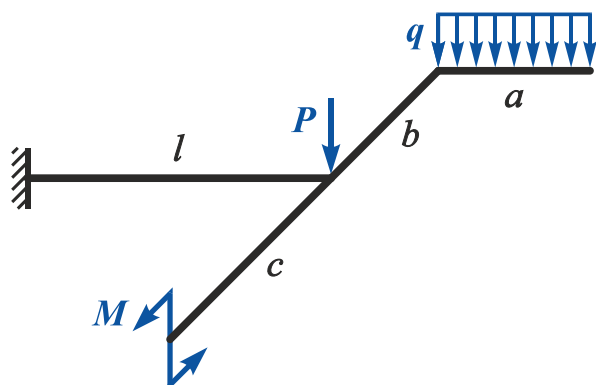


Рисунок 50 (табл. 8)

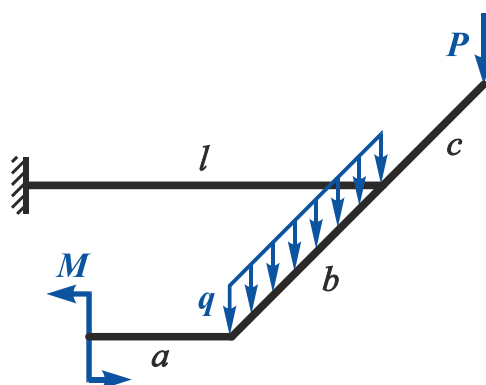


Рисунок 51 (табл. 8)

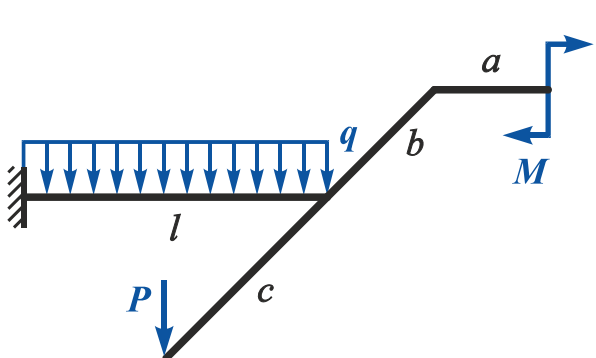


Рисунок 52 (табл. 8)

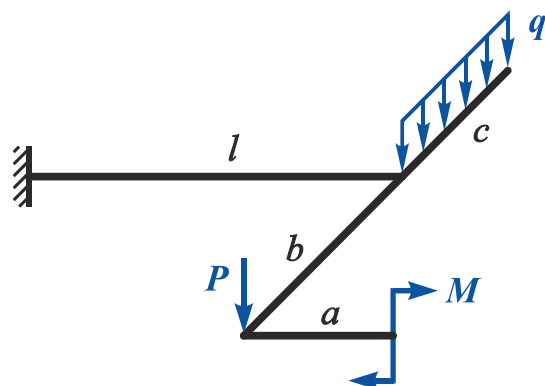


Рисунок 53 (табл. 7)

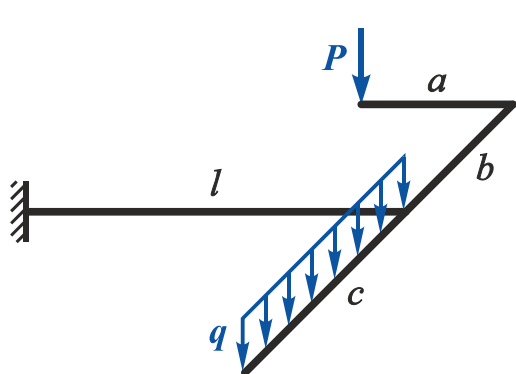


Рисунок 54 (табл. 7)

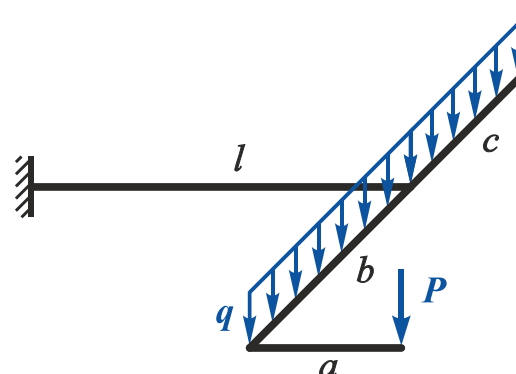


Рисунок 55 (табл. 7)

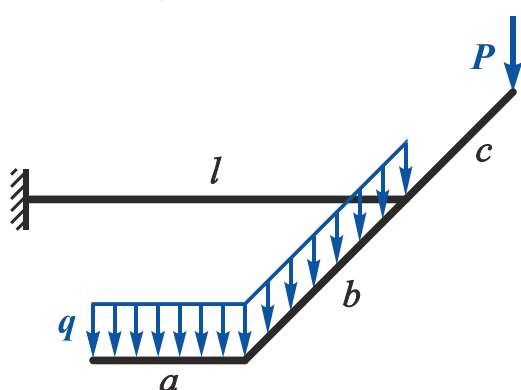
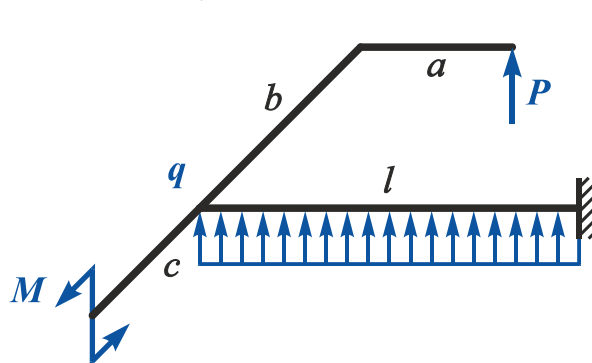


Рисунок 56 (табл. 8)



Таблиця 1

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,2	1	1,2	0,5	0,8	0,8	1	1	1,1	0,4	0,6	1,5	0,4	1	1,2
$b, м$	0,5	0,4	1	0,8	0,5	1,2	1,5	1,2	1,5	1,5	1,5	1,2	1,5	1,2	1	0,8	1	1,2	1,5	1,2
$c, м$	1,5	1,2	1,5	1,2	1	0,3	0,5	0,4	1	0,9	1	1,2	1,5	1,2	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4
$l, м$	1,5	1,2	1,5	1,2	1	0,8	1	0,8	1	0,8	1	0,8	1	0,8	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4
$P, кН$	10	5	20	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	12	8
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	20	8	4	10	25	6	8	5	4	10	15	10	10	8	12

Таблиця 2

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	1,5	0,5	1,5	0,5	1	1,5	0,5	1	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$b, м$	0,5	0,5	1	1	0,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,2	1,5	1,5	1,5	1	1	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$c, м$	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	1,5	1,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	0,7	1,2	2	1	1,5	1,5	1,5
$l, м$	1,5	1,5	2	1,5	1	1	1	0,5	1,5	1	1	1	1	0,5	0,5	2	1,5	0,5	1	1,5
$P, кН$	10	5	10	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8
$M, кН·м$	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	30
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

Таблиця 3

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5
$b, м$	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	1	1	1	0,5	1,5	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1,6	0,5	0,5
$c, м$	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	1	1	1	1	1	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1
$l, м$	0,5	1	0,5	1	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,4	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
$P, кН$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12
$M, кН·м$	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15
$q, кН/м$	10	5	20	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8

Таблиця 4

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5
$b, м$	1,8	1,5	1,5	1,5	1	1	1	1	0,5	0,5	1,5	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5
$c, м$	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	1	1	1	1	1	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1
$l, м$	0,5	1	0,5	1	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,4	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
$P, кН$	10	5	10	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	8	8	5	4	10	10	10	10	8	12

Таблиця 5

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	0,5
$b, м$	1,5	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$c, м$	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,6	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1	1	0,5	1
$l, м$	1	1	1	1	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	0,5
$P, кН$	10	5	20	10	10	5	10	12	8	5	4	5	5	5	20	10	5	8	10	8
$M, кН·м$	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

Таблиця 6

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	0,5
$b, м$	1,5	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$c, м$	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1	1	0,5	1
$l, м$	1	1	1	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	0,5
$P, кН$	10	5	12	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

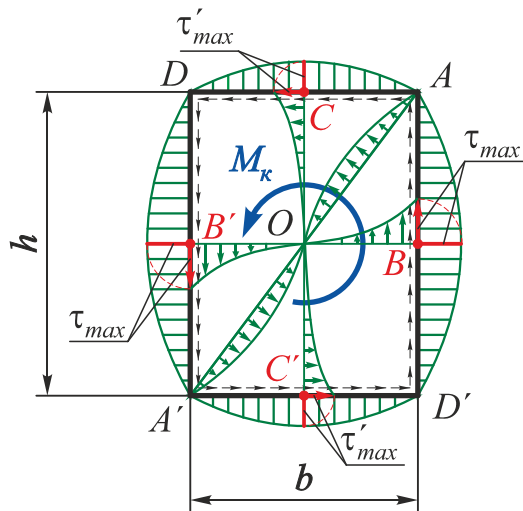
Таблиця 7

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	0,5	0,5	0,5	1,5	0,5	0,5	1	1	1,5	1	1	0,5	0,5	1	1,5	1	1	1,5	0,5	0,5
$b, м$	0,5	0,5	1	1	1,5	1	0,5	0,5	1	0,5	1	1,5	1	1	0,5	1,5	1	0,5	0,5	1
$c, м$	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5
$l, м$	1	1	2	2	1,8	1	2	2	2	1,5	1,5	1	1,5	1,5	2	1,5	1,5	2	1,5	1,5
$P, кН$	10	5	12	10	10	5	10	12	8	5	6	5	20	10	5	8	5	8	10	8
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

Таблиця 8

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	0,5	0,5	0,5	1,5	0,5	0,5	1	1	1,5	1	1	0,5	0,5	1	1,5	1	1	1,5	0,5	0,5
$b, м$	0,5	0,5	1	1	1,5	1	0,5	0,5	1	0,5	1	1,5	1	1	0,5	1,5	1	0,5	0,5	1
$c, м$	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5
$l, м$	1	1	2	2	1,8	1	2	2	2	1,5	1,5	1	1,5	1,5	2	1,5	1,5	2	1,5	1,5
$P, кН$	10	5	12	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8
$M, кН·м$	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

## КРУЧЕННЯ БРУСА ПРЯМОКУТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ



Посередині довгих сторін

$$\tau_{max} = \tau_B = \tau_{B'} = \frac{M_k}{W_k};$$

посередині коротких сторін

$$\tau'_{max} = \tau_C = \tau_{C'} = \gamma \tau_{max};$$

в кутових точках і центрі

$$\tau_A = \tau_{A'} = \tau_D = \tau_{D'} = \tau_O = 0;$$

кут закручування

$$\varphi = \frac{M_k l}{GI_k};$$

$$W_k = \alpha h b^2; \quad I_k = \beta h b^3,$$

де  $M_k$  – крутний момент, що діє в перерізі;

$W_k$  – момент опору крученню прямокутного перерізу;

$I_k$  – момент інерції при крученні прямокутного поперечного перерізу;

$GI_k$  – жорсткість прямокутного перерізу при крученні;

$\alpha, \beta, \gamma$  – коефіцієнти, що залежать від співвідношення сторін  $k = h/b$ .

$k = \frac{h}{b}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1,0	0,208	0,141	1,000
1,2	0,219	0,166	0,935
1,25	0,221	0,172	0,910
1,5	0,231	0,196	0,859
1,75	0,239	0,214	0,820
2,0	0,246	0,229	0,795
2,5	0,258	0,249	0,766
3,0	0,267	0,263	0,753
4,0	0,282	0,281	0,745
5,0	0,291	0,291	0,744
6,0	0,299	0,299	0,743
8,0	0,307	0,307	0,742
10,0	0,313	0,313	0,742
> 10,0	0,333	0,333	0,742

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Писаренко, Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, А. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища шк., 2004. – 655 с.

Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.

Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Гостехиздат, 1953. – 856 с.

Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролубов, С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский и др. – М.: Высш. шк., 1967. – 484 с.

Работнов, Ю. Н. Сопротивление материалов / Ю. Н. Работнов. – М.: Физматгиз, 1962. – 455 с.

Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев и др. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с.

Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. М. Беляев, Л. А. Белявский, Я. И. Кипнис и др.; под ред. В. К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.

Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов. В 2 т. Т. 1. Элементарная теория и задачи / С. П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1960. – 379 с.

Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.



# ЗМІСТ

Основні позначення .....	3
1. Теорії міцності .....	4
1.1. Постановка питання і основні визначення .....	4
1.1.1. Поняття про граничний напружений стан .....	4
1.1.2. Необхідність створення теорій міцності і їх призначення .....	4
1.1.3. Поняття про рівнонебезпечні (рівноміцні) напружені стани .....	6
1.1.4. Поняття про еквівалентне напруження .....	7
1.2. Основні теорії міцності .....	8
1.2.1. Теорія найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності) .....	8
1.2.2. Теорія найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності) .....	9
1.2.3. Теорія найбільших дотичних напружень (третья теорія міцності) .....	10
1.2.4. Енергетична теорія міцності (четверта гіпотеза міцності, гіпотеза енергії формозміни) .....	12
1.2.5. Теорія міцності Мора .....	17
1.2.6. Умова міцності за третьою і четвертою теоріями міцності при плоскому напруженому стані частинного виду .....	21
1.3. Приклади розв'язання задач .....	23
2. Побудова епюр внутрішніх силових факторів для довільно навантаженого ламаного бруса .....	26
2.1. Епюри і основні правила їх побудови .....	26
2.2. Побудова епюр внутрішніх силових факторів для плоско-просторового ламаного бруса .....	28
2.2.1. Перший метод побудови епюр .....	28
2.2.2. Другий метод побудови епюр .....	38
2.3. Побудова епюр внутрішніх силових факторів для просторового ламаного бруса .....	48
3. Складний опір .....	57
3.1. Загальні положення .....	57
3.2. Прямокутний поперечний переріз .....	58
3.2.1. Згин з крученням і розтягненням бруса прямокутного поперечного перерізу .....	58
3.2.2. Порядок підбору розмірів прямокутного поперечного перерізу .....	62

3.3. Круглий поперечний переріз .....	64
3.3.1. Згин з крученням бруса круглого поперечного перерізу .....	64
3.3.2. Згин з крученням і розтягненням бруса круглого поперечного перерізу .....	67
3.4. Приклади розв'язання задач .....	68
3.5. Окремі випадки складного опору .....	81
3.5.1. Косий згин .....	81
3.5.2. Приклади розв'язання задач .....	86
3.5.3. Позацентрове розтягнення-стиснення .....	94
3.5.4. Ядро перерізу .....	97
3.5.5. Приклади розв'язання задач .....	99
4. Розв'язання нестандартних задач .....	110
Запитання для самоперевірки .....	132
Порядок і приклад виконання домашнього завдання .....	134
Варіанти завдань .....	149
Додаток. Кручення бруса прямокутного поперечного перерізу .....	158
Бібліографічний список .....	159

Навчальне видання

**Гребенніков Михайло Миколайович  
Мірошніков Віталій Юрійович  
Пекельний Микола Іванович**

**ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ.  
СКЛАДНИЙ ОПІР**

Редактори: В. М. Коваль, А. М. Ємленінова

Зв. план, 2022

Підписано до видання 23.12.2022

Ум. друк. арк. 9,0. Обл.-вид. арк. 10,13. Електронний ресурс

---

Видавець і виготовлювач  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001

