МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

М. П. Благодарний

СІТКОВЕ ПЛАНУВАННЯ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2022

УДК 658.512(075.8)
Б68

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. Ф. Болюх,
канд. техн. наук, доц. О. В. Сєвєрінов

Благодарний, М. П.

Б68 Сіткове планування [Текст] : навч. посіб. / М. П. Благодарний. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2022. – 104 с.

ISBN 978-966-662-903-9

Викладено загальні принципи сіткового планування. Основну увагу приділено методам розрахунку параметрів сіткових графіків та оптимізації сіткових графіків за критеріями витрат ресурсів, економії ресурсів та часу виконання комплексів робіт. Наведено геометричне трактування методів, що розглядаються, численні приклади розв'язання задач сіткового планування.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» (спеціалізація «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси та виробництва»).

Іл. 16. Табл. 30. Бібліогр.: 16 назв

УДК 658.512(075.8)

ISBN 978-966-662-903-9

ПЕРЕДМОВА

На сучасному етапі суспільство розвивається в умовах науково-технічного прогресу, який охоплює не тільки науки й техніку, а й такі сфери, як промисловість, сільське господарство, військова справа [1–16]. Підвищення технічного рівня та ускладнення організаційної структури виробничих підрозділів приводить до необхідності вдосконалення методів планування й керування.

У навчальному посібнику описано методи сіткового планування, які можуть набути та вже набули широкого застосування на практиці. У зв’язку з цим основну увагу приділено прикладним аспектам сіткового планування, а саме побудові математичних моделей конкретних задач та обчислювальним процедурам їх розв’язання.

З метою полегшення засвоєння матеріалу й надання йому більшої наочності в посібнику широко використовується геометричне трактування розглядуваних методів. Застосування методів розв’язання конкретних задач сіткового планування ілюструється численними прикладами.

Матеріалом, викладеним у посібнику, завершується розгляд найбільш поширених на практиці математичних методів обґрунтування рішень в умовах визначеності. Опанування цих методів дає змогу, з одного боку, зрозуміти методологію побудови формалізованих моделей багатьох реальних задач і визначення підходів до їх розв’язання, а з іншого – безпосередньо застосовувати їх у практичній діяльності за фахом.

Через обмеженість обсягу навчального посібника не було розглянуто всю різноманітність математичних методів прийняття рішень в умовах повної інформації, розроблених станом на сьогодні, які використовуються тією або іншою мірою на практиці. Поза нашою увагою залишились методи розв’язання транспортних задач, деякі методи математичного програмування (наприклад, геометричного), методи теорії розкладів тощо. Якщо необхідно, читач зможе знайти їх у спеціальній літературі. Процес вивчення й опанування цих методів буде значно легшим, якщо читач попередньо ознайомиться з матеріалом, наведеним у цьому посібнику та раніше опублікованих автором посібниках [14, 16].

1. СІТКОВЕ ПЛАНУВАННЯ

1.1. Планування комплексу робіт

У своїй практичній діяльності фахівцю з автоматизації часто доводиться стикатися із завданнями планування різноманітних за змістом робіт. До таких завдань, наприклад, можна віднести планування робіт з уведення в експлуатацію нової техніки, її технічного обслуговування й ремонту, організацію фахової підготовки відділу, планування роботи трудового колективу на певний період часу і багато інших [1–14]. Розглянемо одне з них більш детально.

Нині для керування діями підрозділів комп'ютерно-інтегрованих виробництв широко застосовуються рухомі засоби радіозв'язку. Однак, перш ніж скористатися рухомою радіостанцією з метою керування підрозділом, необхідно виконати кілька операцій з підготовки її до роботи.

У спрощеному вигляді підготовка радіостанції полягає в такому. Після прибуття радіостанції в заданий район проводять огляд апаратури та перевірку наявності запасного майна. Далі розгортають антенний пристрій і приєднують кабелі до антени та до блоків радіостанції. Після завершення цих операцій радіостанцію вмикають і здійснюють перевірку її роботоздатності, настроювання на одну з робочих частот і встановлення зв'язку з абонентом.

Опишемо основні властивості й особливості цього завдання. По-перше, підготовка радіостанції до роботи являє собою послідовність взаємозв'язаних операцій. Очевидно, що перевірку роботоздатності не можна виконувати доти, доки не буде розгорнуто антену і не під'єднано відповідні кабелі. Отже, підготовка радіостанції до роботи є багатоетапним (багатокроковим) процесом.

По-друге, недоцільно та й практично неможливо, щоб усі операції з підготовки радіостанції виконував один фахівець. У цій роботі бере участь група осіб, наприклад обслуга радіостанції. Звідси випливає, що певні операції там, де це можливо, можуть виконуватися паралельно.

І нарешті, кожна з перелічених операцій потребує певного часу на виконання. Очевидно, що для виконання всієї сукупності операцій з підготовки радіостанції також установлюються певні терміни.

Для того щоб виконати всі роботи з підготовки радіостанції в установлені часові терміни, їх необхідно заздалегідь ретельно спланувати. План складається для того, щоб передбачити, як раціонально розподілити наявні сили і засоби між операціями, на які операції слід звернути особливу увагу й тримати хід їх виконання під безперервним контролем, як діяти в разі непередбачених затримок.

Під час планування можна також спробувати відповісти на запитання, що необхідно зробити, щоб перекрити встановлені терміни, які для цього будуть потрібні додаткові резерви і т. д. Керівник, що розробляє план, може виходити з міркувань здорового глузду, ураховуючи попередній досвід виконання подібних робіт, спираючись на свої знання і навіть інтуїцію.

Однак такий підхід приводить до певного успіху тоді, коли кількість виконуваних операцій є порівняно невеликою. Зі збільшенням кількості операцій підхід перетворюється на вгадування рішень з неминучими матеріальними втратами, порушеннями встановлених часових термінів, моральними втратами. Виникає необхідність у застосуванні спеціальних математичних методів, що дають змогу науково обґрунтувати правильну стратегію поведінки при виконанні тих або інших робіт, подібних до описаного комплексу робіт з підготовки радіостанції.

Одним з таких методів є метод сіткового планування. Цей метод, що базується на ідеї графічного зображення зв'язків між виконуваними операціями, забезпечує зручність зорового сприйняття всієї сукупності операцій, можливість виявлення головного під час проведення робіт, відносну простоту обчислень [2, 6].

Перш ніж приступити до безпосереднього розгляду методу сіткового планування, наведемо деякі поняття, які широко використовуються під час сіткового планування.

Роботою будемо називати будь-який захід (трудовий процес, дію), що супроводжується витратами часу й ресурсів. У наведеному вище прикладі операції з установлення антени, з’єднання кабелів, перевірки роботоздатності радіостанції тощо є роботами. До робіт можна віднести й очікування, тобто такий процес, на який не витрачаються ні праця, ні ресурси, але який потребує витрат часу. Наприклад, після ввімкнення радіостанції потрібен певний час на прогрівання апаратури, при цьому жодні трудовитрати не використовуються. Роботою можна вважати просту залежність (логічний зв'язок) між двома або більшою кількістю заходів. Це так звана *фіктивна робота*, на яку не потрібно витрачати ні працю, ні ресурси, ні час. Наприклад, такою залежністю може бути з’єднання кабелів, яке необхідно проводити не раніше, ніж закінчиться встановлення антенного пристрою.

Сукупність робіт, виконання яких приводить до досягнення поставленої мети, назвемо *комплексом робіт*. Таким чином, далі розглядається планування комплексу робіт.

Подія – це початок або закінчення виконання тієї чи іншої роботи або декількох робіт. Наприклад, початок огляду апаратури радіостанції є подією. Завершення огляду апаратури створює передумови для початку наступної роботи, наприклад під’єднання кабелів. Тому подія має властивість "зшивання" попередніх робіт з наступними. Передбачається, що подія відбувається миттєво і не має тривалості, а також не потребує витрат ресурсів.

Планування комплексу робіт починається зі складання переліку всіх робіт, що входять у комплекс, та опису наявних між ними залежностей, виражених відношеннями передування. Домовимося позначати роботи буквою $\boldsymbol{b}$ з індексом, що відображає номер роботи в переліку робіт, тобто $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$. Відношення передування визначають закінчення попередніх робіт, що потребується для початку кожної наступної роботи.

Якщо для початку роботи $\boldsymbol{b_2}$ потребується закінчення роботи $\boldsymbol{b_1}$, то відношення передування можна висловити так: робота $\boldsymbol{b_2}$ спирається на роботу $\boldsymbol{b_1}$.

Складемо для прикладу перелік робіт з підготовки радіостанції до ведення радіозв'язку. Комплекс робіт у цьому випадку складається з таких операцій:

- $\boldsymbol{b_1}$ − огляд апаратури;
- $\boldsymbol{b_2}$ − розгортання антенного пристрою;
- $\boldsymbol{b_3}$ − під’єднання кабелів;
- $\boldsymbol{b_4}$ − увімкнення станції та перевірка її роботоздатності;
- $\boldsymbol{b_5}$ − перевірка наявності запасного майна;
- $\boldsymbol{b_6}$ − настроювання радіостанції на одну з робочих частот;
- $\boldsymbol{b_7}$ − установлення зв'язку з абонентом.

Найбільш складним і відповідальним етапом планування комплексу робіт є встановлення відношень передування. Здебільшого ці відношення встановлюються в різних документах, наприклад, в інструкції з експлуатації конкретної радіоелектронної апаратури. В інших випадках керівник сам визначає логічну послідовність виконання робіт.

Спробуємо встановити відношення передування для цього завдання. Будемо вважати, що обслуга радіостанції одночасно може здійснювати огляд апаратури, перевірку наявності запасного майна й розгортання антенного пристрою. Це означає, що для початку робіт $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ і $\boldsymbol{b_5}$ не потребується виконання жодних інших попередніх робіт. Отже, роботи $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ і $\boldsymbol{b_5}$ не спираються ні на які інші роботи.

Під’єднання кабелів є можливим тільки після огляду апаратури й розгортання антенного пристрою, тому робота $\boldsymbol{b_3}$ спирається на роботи $\boldsymbol{b_1}$ і $\boldsymbol{b_2}$. Після під’єднання кабелів можна ввімкнути радіостанцію і перевірити її справність. Якщо під час перевірки роботоздатності виявляється відмова будь-якого вузла або блока радіостанції, то його необхідно замінити запасним. Отже, до початку перевірки роботоздатності станції запасне майно має бути перевірене. А це означає, що робота $\boldsymbol{b_4}$ спирається на роботи $\boldsymbol{b_3}$ і $\boldsymbol{b_5}$.

Переконавшись у роботоздатності радіостанції, можна починати її настроювання на одну з робочих частот і далі до встановлення зв'язку з абонентом. Отже, відношення передування для робіт $\boldsymbol{b_6}$ і $\boldsymbol{b_7}$ будуть такими: робота $\boldsymbol{b_6}$ спирається на роботу $\boldsymbol{b_4}$, а робота $\boldsymbol{b_7}$ – на роботу $\boldsymbol{b_6}$.

Слід зазначити, що відношення передування значною мірою залежать від тих сил і засобів, які виділяються для виконання комплексу робіт. Вище було припущено, що обслуга може паралельно проводити три початкові роботи. Якщо, наприклад, кількість обслуги зменшиться, то паралельне виконання трьох робіт стане неможливим, а отже, зміниться і вся система відношень передування.

Перелік робіт, з яких складається комплекс, і відношення передування можна подати у вигляді структурної таблиці комплексу робіт (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

№ п/п	Позначення роботи	Відношення передування
1	b_1	–
2	b_2	–
3	b_3	$b_1,\ b_2$
4	b_4	$b_3,\ b_5$
5	b_5	–
6	b_6	b_4
7	b_7	b_6

У другому стовпці цієї таблиці наведено перелік робіт, а в третьому – взаємозв'язок між роботами (відношення передування). Прочерк у третьому стовпці означає, що ця робота не залежить від інших робіт і може виконуватися відразу після прийняття рішення про проведення комплексу робіт.

Побудова структурної таблиці є першим етапом планування комплексу робіт. Однак користуватися структурною таблицею далі не зовсім зручно. Справді, відношення передування логічно зобразити так, щоб роботі з більшим порядковим номером передували роботи з меншими порядковими номерами. У табл. 1.1, наприклад, робота b_4 спирається на роботу b_5. Для завдання, що розглядається, можливо, ця обставина і не спричинить неясності, але під час планування комплексів з великою кількістю робіт, з розгалуженими взаємозв'язками між ними недотримання зазначеного правила може призвести до плутанини в послідовності виконання робіт.

Щоб роботи мали більш зручну нумерацію у структурній таблиці, здійснюють упорядкування робіт. Для цього вводять поняття рангу роботи. Роботу називають роботою k-го рангу, якщо вона спирається на одну або кілька робіт не вище ($k-1$)-го рангу, серед яких є хоча б одна робота ($k-1$)-го рангу. Користуючись цим означенням, знайдемо ранги робіт, наведених у табл. 1.1.

Почнемо з робіт першого рангу. За означенням до робіт першого рангу належать ті роботи, які спираються на одну або кілька робіт нульового рангу. Але робіт нульового рангу не існує. Отже, роботи першого рангу – це ті роботи, які не спираються на жодну з попередніх робіт. Таких робіт три: $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ і $\boldsymbol{b_5}$.

Знайдемо роботи другого рангу. Оскільки робота $\boldsymbol{b_3}$ спирається на роботи першого рангу $\boldsymbol{b_1}$ і $\boldsymbol{b_2}$, її слід віднести до робіт другого рангу. А ось роботу $\boldsymbol{b_4}$ до робіт другого рангу віднести не можна, хоча вона і спирається на роботу першого рангу $\boldsymbol{b_5}$. Але крім $\boldsymbol{b_5}$ робота $\boldsymbol{b_4}$ спирається на роботу другого рангу $\boldsymbol{b_3}$. Таким чином, за означенням робота $\boldsymbol{b_4}$ є роботою третього рангу.

Продовжуючи аналогічні міркування, знаходимо, що робота $\boldsymbol{b_6}$ належить до робіт четвертого рангу, а робота $\boldsymbol{b_7}$ – до робіт п'ятого.

Для проведення описаної процедури впорядкування робіт зручно скористатися табл. 1.2. Додамо до табл. 1.1 два стовпці, в одному з яких запишемо ранги робіт, а в іншому – нові позначення кожної роботи, тоді табл. 1.1 перетворюється на табл. 1.2.

Таблиця 1.2

№ п/п	Позначення роботи	Відношення передування	Ранг роботи	Нове позначення роботи
1	$\boldsymbol{b_1}$	–	1	$\boldsymbol{a_1}$
2	$\boldsymbol{b_2}$	–	1	$\boldsymbol{a_2}$
3	$\boldsymbol{b_3}$	$\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$	2	$\boldsymbol{a_4}$
4	$\boldsymbol{b_4}$	$\boldsymbol{b_3}$, $\boldsymbol{b_5}$	3	$\boldsymbol{a_5}$
5	$\boldsymbol{b_5}$	–	1	$\boldsymbol{a_3}$
6	$\boldsymbol{b_6}$	$\boldsymbol{b_5}$	4	$\boldsymbol{a_6}$
7	$\boldsymbol{b_7}$	$\boldsymbol{b_6}$	5	$\boldsymbol{a_7}$

Роботи $\boldsymbol{b_i}$ у новому позначенні нумеруються таким чином. Спочатку нумерують у порядку збільшення всі роботи першого рангу, потім роботи другого, третього і т. д. рангів. При цьому в межах робіт одного рангу нумерація може бути довільною. Так, наприклад, у табл. 1.2 роботи першого рангу $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ і $\boldsymbol{b_5}$ мають нові позначення: відповідно $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$ і $\boldsymbol{\alpha_3}$.

План комплексу робіт не зміниться, якщо через $\boldsymbol{\alpha_4}$ позначити роботу $\boldsymbol{b_3}$, через $\boldsymbol{\alpha_1}$– роботу $\boldsymbol{b_1}$, через $\boldsymbol{\alpha_2}$ – роботу $\boldsymbol{b_2}$.

Після того, як буде виконано впорядкування робіт, можна побудувати нову таблицю, де роботи розміщуються в порядку збільшення їх нових номерів (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

№ п/п	Позначення роботи	Відношення передування
1	$\boldsymbol{a_1}$	–
2	$\boldsymbol{a_2}$	–
3	$\boldsymbol{a_3}$	–
4	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_1,\ a_2}$
5	$\boldsymbol{a_5}$	$\boldsymbol{a_3,\ a_4}$
6	$\boldsymbol{a_6}$	$\boldsymbol{a_5}$
7	$\boldsymbol{a_7}$	$\boldsymbol{a_6}$

Табл. 1.3 називають *упорядкованою структурною таблицею*, у якій кожна з робіт спирається тільки на роботи з меншими порядковими номерами.

Описана процедура впорядкування є досить простою в тому випадку, коли кількість робіт у комплексі є порівняно невеликою. Під час планування складних комплексів робіт через громіздкість таблиць використання цієї процедури може бути пов'язане зі значними труднощами. У подібних випадках слід скористатися, наприклад, матричним способом упорядкування [2], розглянутим нижче.

Упорядкована структурна таблиця відображає логічну структуру комплексу робіт. Разом з тим, як уже підкреслювалося, будь-яка робота супроводжується витратами часу, тобто на її виконання потребується певний час. Час виконання окремих робіт і необхідні для цього сили й засоби так само, як і зазначені раніше відношення передування, можуть або визначатися в нормативних документах, або оцінюватися керівником робіт.

Так, наприклад, в інструкції з експлуатації радіостанції можна знайти такі значення часу виконання робіт:

– $\boldsymbol{\alpha_1}$ – огляд апаратури (10 хв);

– $\boldsymbol{\alpha_2}$ – розгортання антенного пристрою (30 хв);

– $\boldsymbol{\alpha_3}$ – перевірка наявності запасного майна (20 хв);

– $\boldsymbol{\alpha_4}$ – під'єднання кабелів (20 хв);

– $\boldsymbol{\alpha_5}$ – увімкнення станції та перевірка її роботоздатності (10 хв);

– $\boldsymbol{\alpha_6}$ – настроювання радіостанції на одну з робочих частот (10 хв);

– $\boldsymbol{\alpha_7}$ – установлення зв´язку з абонентом (10 хв).

Додамо до впорядкованої структурної таблиці ще один стовпець, у якому запишемо час виконання кожної роботи (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

№ п/п	Позначення роботи	Відношення передування	Час виконання роботи, t_1, хв
1	a_1	–	10
2	a_2	–	30
3	a_3	–	20
4	a_4	a_1, a_2	20
5	a_5	a_3, a_4	10
6	a_6	a_5	10
7	a_7	a_6	10

Отриману таблицю назвемо *впорядкованою структурно-часовою таблицею*. На відміну від табл. 1.3 ця таблиця характеризує не тільки логічну, але й часову структуру комплексу робіт. По суті, це вже і є план проведення комплексу робіт, оскільки тут указано, яку кількість робіт потрібно виконати, у якій послідовності виконувати роботи, який час необхідно витратити на виконання тієї чи іншої роботи і т. д. І все ж табл. 1.4 не дає наочного уявлення про комплекс робіт у цілому. Таку можливість дає сітковий графік.

1.2. Матричний спосіб упорядкування комплексу робіт

Нехай комплекс робіт задано за допомогою табл. 1.5, де наведено перелік робіт $b_1, b_2, \ldots, b_n$ і взаємозв'язки між ними.

Таблиця 1.5

b_i	b_j					
	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
b_1	β_{11}	β_{12}	…	β_{1j}	…	β_{1n}
b_2	β_{21}	β_{22}	…	β_{2j}	…	β_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
b_i	β_{i1}	β_{i2}	…	β_{ij}	…	β_{in}
…	…	…	…	…	…	…
b_n	β_{n1}	β_{n1}	…	β_{nj}	…	β_{nn}

У лівому стовпці та верхньому рядку в порядку збільшення індексів записано всі роботи, які входять у комплекс робіт. Уважатимемо, що якщо робота $\boldsymbol{b_i}$ спирається на роботу $\boldsymbol{b_j}$, то елемент $\boldsymbol{\beta_{ij}}$ набуває значення 0. Якщо ж робота робота $\boldsymbol{b_i}$ не спирається на роботу $\boldsymbol{b_j}$, то елемент $\boldsymbol{\beta_{ij}}$ набуває значення 1. Тоді структурну таблицю можна подати у вигляді квадратної матриці

$$\|\boldsymbol{B}\| = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{ij} & \dots & \beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n1} & \dots & \beta_{nj} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

розміром $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$, елементи якої набувають значення 0 або 1. Очевидно, що $\boldsymbol{\beta_{ij}} = 0$, $\boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{j} = \overline{1,\boldsymbol{n}}$.

Уведемо вектор-стовпець

$$\{x_1\} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{i1} \\ \dots \\ x_{n1} \end{bmatrix},$$

кожен елемент якого $\boldsymbol{x_{i1}}$ набуває значення 1, якщо робота $\boldsymbol{b_i}$ спирається хоча б на одну з робіт $\boldsymbol{b_j}$, та значення 0 у протилежному випадку, якщо робота $\boldsymbol{b_i}$ не спирається на жодну з робіт $\boldsymbol{b_j}$.

Користуючись матрицею $\|\boldsymbol{B}\|$ і вектором-стовпцем $\{\boldsymbol{x_1}\}$ утворимо проміжну матрицю $\|\boldsymbol{X}\|$. Першим стовпцем матриці $\|\boldsymbol{X}\|$ буде $\{\boldsymbol{x_1}\}$. Інші стовпці обчислюємо відповідно до рекурентного відношення

$$\{x_k\} = \|\boldsymbol{B}\| \cdot \{x_{k-1}\},$$

де арифметичні операції множення й додавання заміняються операціями кон’юнкції та диз’юнкції. Тобто елементи матриці $\|\boldsymbol{X}\|$ визначаються формулою

$$\{x_{ik}\} = \beta_{i1} \cdot x_{1,k-1} + \beta_{i1} \cdot x_{1,k-1} + \dots + \beta_{i1} \cdot x_{1,k-1}, \qquad (1.1)$$

де (·) − операція кон'юнкції;

(+) − операція диз'юнкції;

$k \neq 1$.

Матрицю $\|Y\|$ побудуємо шляхом перетворення матриці $\|X\|$, тобто елементи y_{ij} матриці $\|Y\|$ обчислимо відповідно до виразу

$$y_{ik} = \overline{(x_{i,k+1} + x_{i,k+2} + \ldots + x_{in})} \cdot x_{ik}. \tag{1.2}$$

Характерною особливістю матриці $\|Y\|$ є те, що кожний її рядок містить лише одну одиницю. При цьому, якщо $y_{il} = 1$, то номер рядка i відповідає порядковому номеру роботи у структурній таблиці, а номер стовпця j − її рангу. Подальше використання матриці $\|Y\|$ є таким: на основі матриці $\|Y\|$ будується нова матриця $\|Z\|$; рядки матриці $\|Y\|$ переставляються таким чином, щоб зі збільшенням номера рядка збільшувався і ранг роботи; відповідно до нової нумерації рядків матриці $\|Z\|$ переставляються рядки та стовпці вихідної матриці $\|B\|$; отримана з неї матриця $\|A\|$ характеризує впорядковану структурну таблицю комплексу робіт.

Розглянемо приклад використання матричного способу впорядкування робіт.

Приклад 1.1. Необхідно провести впорядкування комплексу робіт, заданого табл. 1.1.

Розв'язання. Складаємо матрицю $\|B\|$. Оскільки роботи b_1, b_2 і b_5 не спираються ні на які інші роботи, усі елементи першого, другого й п'ятого рядків будуть дорівнювати нулю. Робота b_3 спирається на роботи b_1 і b_2, тому в третьому рядку елементи β_{31} і β_{32} будуть дорівнювати одиниці, а інші елементи − нулю. Продовжуючи аналогічні міркування, складемо матрицю $\|B\|$:

$$\|B\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для утворення вектора-стовпця $\{x_1\}$ розглянемо табл. 1.1. Оскільки роботи b_1, b_2 і b_5 не спираються ні на які інші роботи, елементи стовпця x_{11}, x_{12} і x_{15} будуть дорівнювати одиниці. Інші елементи вектора-стовпця будуть дорівнювати нулю, тому що кожна з робіт b_3, b_4, b_6 і b_7 спирається хоча б на одну з робіт комплексу.

Таким чином, перший стовпець матриці $\|X\|$ матиме такий вигляд:

$$\{x_1\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Розрахуємо значення інших елементів матриці $\|X\|$. Першим стовпцем матриці є $\{x_1\}$, тому скориставшись рекурентним співвідношенням (1.1), знайдемо значення інших стовпців матриці. Наприклад, елемент x_{32} другого стовпця відповідно до (1.1) визначається таким чином:

$$X_{32} = \beta_{31} \cdot x_{11} + \beta_{32} \cdot x_{21} + \beta_{33} \cdot x_{31} + \beta_{31} \cdot x_{11} + \beta_{34} \cdot x_{41} + \beta_{35} \cdot x_{51} +$$
$$+ \beta_{36} \cdot x_{61} + \beta_{37} \cdot x_{71} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1.$$

Провівши аналогічні розрахунки для інших елементів, отримаємо другий стовпець $\{x_2\}$ матриці $\|X\|$:

$$\{x_2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для розрахунку елементів третього стовпця $\{x_3\}$ відповідно до виразу (1.2) будемо оперувати з елементами матриці $\|B\|$ і стовпця $\{x_2\}$, наприклад, знайдемо значення елемента x_{43}:

$$x_{43} = \beta_{41} \cdot x_{12} + \beta_{42} \cdot x_{22} + \beta_{43} \cdot x_{32} + \beta_{44} \cdot x_{42} + \beta_{45} \cdot x_{52} + \beta_{46} \cdot x_{62} +$$
$$+ \beta_{37} \cdot x_{72} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1.$$

Виконавши обчислення всіх елементів, отримаємо матрицю

$$\|X\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Скориставшись виразом (1.2), знайдемо значення елементів матриці $\|Y\|$, наприклад, розрахуємо значення елементів y_{11} і y_{12}:

$$y_{11} = \overline{(x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16})} \cdot x_{11} = \\ = \overline{0 + 0 + 0 + 0 + 0)} \cdot 1 = 1;$$

$$y_{12} = \overline{(x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17})} \cdot x_{12} = \\ = \overline{0 + 0 + 0 + 0 + 0)} \cdot 0 = 0.$$

Матриця $\|Y\|$ матиме такий вигляд:

$$\|Y\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Порівняння матриць $\|B\|$ і $\|Y\|$ свідчить про те, що роботи b_1, b_2 і b_5 є роботами першого рангу, робота b_3 – роботою другого рангу, робота b_4 – роботою третього рангу і т. д.

Складемо матрицю $\|Z\|$:

$$\|Z\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до нумерації рядків матриці $\|\boldsymbol{Z}\|$ проведемо перестановку рядків і стовпців матриці $\|\boldsymbol{B}\|$. Наприклад, п'ятий рядок і п'ятий стовпець матриці $\|\boldsymbol{B}\|$ переміщуються на місце третього рядка та третього стовпця, а третій рядок і третій стовпець − відповідно на місце четвертого рядка та четвертого стовпця. Після перестановки стовпців і рядків матриці $\|\boldsymbol{B}\|$ отримаємо матрицю

$$\|\boldsymbol{A}\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Порівняння матриць $\|\boldsymbol{A}\|$ та $\|\boldsymbol{Z}\|$ показує, що роботи $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$ і $\boldsymbol{\alpha_3}$ (за новим позначенням) є роботами першого рангу, робота $\boldsymbol{\alpha_4}$ спирається на роботи $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$, робота $\boldsymbol{\alpha_5}$ спирається на роботи $\boldsymbol{\alpha_3}$ і $\boldsymbol{\alpha_4}$. Таким чином, роботи з більшими порядковими номерами спираються на роботи з меншими порядковими номерами, тобто матриця $\|\boldsymbol{A}\|$ відображає впорядковану структурну таблицю комплексу робіт. Побудуємо цю таблицю (табл. 1.6).

Таблиця 1.6

№ п/п	Позначення роботи	Відношення передування
1	α_1	–
2	α_2	–
3	α_3	–
4	α_4	α_1, α_2
5	α_4	α_3, α_4
6	α_6	α_5
7	α_7	α_6

Використання матричного способу дає змогу автоматизувати процес упорядкування робіт і, як наслідок, суттєво полегшити процес планування виконання складних комплексів робіт.

1.3. Правила побудови сіткових графіків

Сітковий графік являє собою графічне зображення плану виконання комплексу робіт, на якому весь комплекс поділено на окремі, чітко визначені операції. Оскільки основними поняттями сіткового планування є "робота" і "подія", слід заздалегідь домовитися про те, як їх зображати на графіку.

З математичної точки зору сітковий графік являє собою орієнтований граф. Як відомо, вершини графа зображують кружками, а ребра – стрілками, що з'єднують їх. При побудові сіткового графіка можна кружками позначати події, а стрілками роботи. Це перша форма подання сіткового графіка. Її перевагою є те, що сітковий графік може бути порівняно просто "прив'язаний" до часу виконання окремих робіт і всього комплексу робіт у цілому.

Друга форма зображення сіткового графіка полягає в тому, що кружками позначаються роботи, а стрілками – логічні зв'язки між ними. При такому зображенні в нього легко вносити нові (раніше не зазначені) зв'язки, які виявляються під час виконання комплексу робіт. У практиці сіткового планування найбільшого поширення набула перша форма подання сіткових графіків, тому далі йтиметься тільки про таке зображення.

Вихідним матеріалом для побудови сіткового графіка є таблиця, або впорядкована структурна, або впорядкована структурно-часова. Сітковий графік, побудований за впорядкованою структурною таблицею, відображає в основному логічну структуру комплексу робіт, часова ж структура на такому графіку наочно не відображається. З огляду на це, більш інформативним є часовий сітковий графік, для побудови якого використовується впорядкована структурно-часова таблиця. Саме такі графіки й будемо розглядати далі.

Будуючи часовий сітковий графік (або просто сітковий графік), користуються певними правилами. Наведемо ці правила.

1. Роботи, що входять у комплекс, на сітковому графіку зображуються стрілками, а події, що полягають у завершенні одних і початку наступних робіт – кружками. Роботи позначаються малими літерами $\boldsymbol{\alpha_i}$, а події – великими літерами $\boldsymbol{A_i}$.

2. Графік орієнтується вздовж осі часу $0\boldsymbol{t}$. На цій осі в певному масштабі відкладається час.

3. Початок комплексу робіт позначається кружком $\boldsymbol{A_0}$, який розміщується на початку координат.

4. Розташування кружків (окрім кружка $\boldsymbol{A_0}$) по вертикалі – довільне, виходячи зі зручності подання графіка. Уважається, що стрілка, яка позначає роботу, починається в центрі кружка, що відповідає моменту початку роботи, і закінчується в центрі кружка, що відповідає її закінченню.

Проєкція стрілки на вісь 0$\boldsymbol{t}$ дорівнює часу $\boldsymbol{t_i}$ виконання роботи $\boldsymbol{a_i}$. Отже, проєкції центрів кружків на цю ж вісь є моментами $\boldsymbol{t}$ $(\boldsymbol{A_j})$ початку й закінчення робіт.

5. Логічні зв'язки між суміжними роботами зображуються пунктирними стрілками, які означають *фіктивні роботи*.

Користуючись цими правилами, побудуємо сітковий графік комплексу робіт, заданого табл. 1.4. Зобразимо вісь 0$\boldsymbol{t}$, на якій позначимо у відповідному масштабі моменти часу, кратні десяти хвилинам. На початку координат помістимо кружок $\boldsymbol{A_0}$, що відповідає початку комплексу робіт.

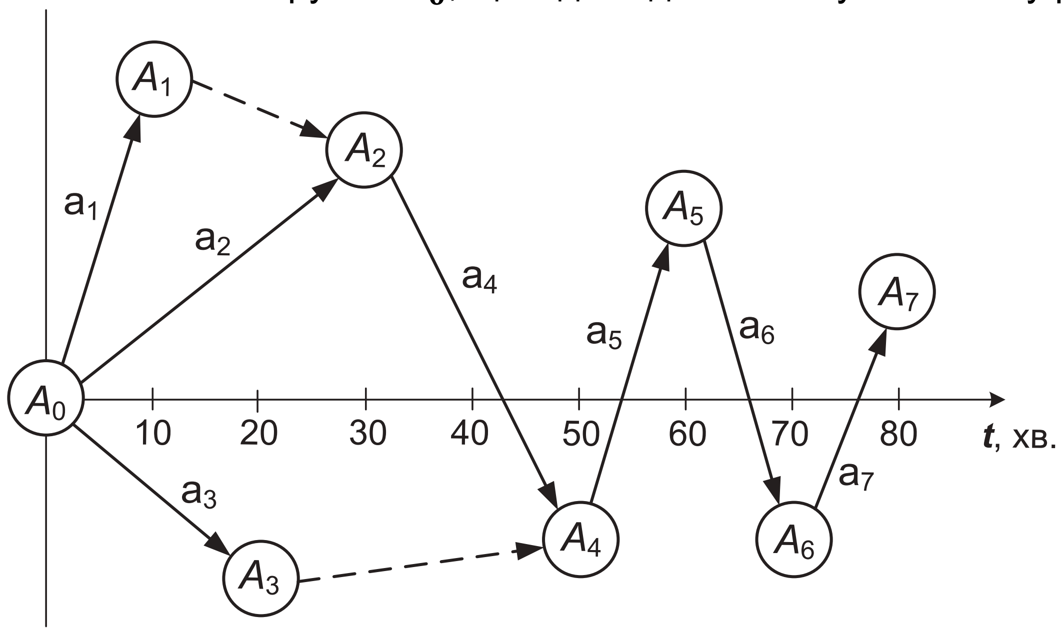

Рис. 1.1

Відповідно до табл. 1.4 одночасно можуть починатися три роботи: $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{a_3}$. Тому з кружка $\boldsymbol{A_0}$ мають виходити три стрілки, що відповідають цим роботам. Для виконання роботи $\boldsymbol{a_1}$ потрібно 10 хв. На осі 0$\boldsymbol{t}$ знаходимо позначку $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{A_1})$ = 10 хв, з цієї позначки проводимо перпендикуляр до осі 0$\boldsymbol{t}$ і на певній відстані від осі 0$\boldsymbol{t}$ будуємо кружок з центром на перпендикулярі. З'єднуємо кружки $\boldsymbol{A_0}$ і $\boldsymbol{A_1}$ стрілкою.

Очевидно, що проєкція стрілки (від центра кружка $\boldsymbol{A_0}$ до центра кружка $\boldsymbol{A_1}$) на вісь 0$\boldsymbol{t}$ буде дорівнювати часу $\boldsymbol{t_1}$ виконання роботи $\boldsymbol{a_1}$ ($\boldsymbol{t_1}$ = 10 хв). Аналогічно зображуємо роботи $\boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{a_3}$ і події $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{A_3}$, що відповідають їх завершенню.

Далі з табл. 1.4 випливає, що робота $\boldsymbol{a_4}$ спирається на роботи $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$. Це означає, що робота $\boldsymbol{a_4}$ не може початися раніше, ніж будуть завершені ці роботи. Але робота $\boldsymbol{a_1}$ завершується в момент часу $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{A_1})$ = 10 хв, а робота $\boldsymbol{a_1}$ − у момент часу $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{A_2})$ = 30 хв.

Отже, роботу a_4 можна починати не раніше, ніж закінчиться найтриваліша з робіт a_1, a_2, тобто в момент часу $t(A_2)$ = 30 хв. Подія A_2 є одночасно завершальною подією роботи a_2 і початковою подією роботи a_4. У цьому виявляється безпосередній зв'язок між роботами a_2 і a_4. Тепер, знаючи тривалість роботи a_4, можна знайти момент її закінчення (момент здійснення події A_4):

$$t(A_4) = t(A_2) + t_4 = 30 + 20 = 50 \text{ хв.}$$

На певній відстані від осі 0t зображуємо кружок A_4, проєкція центра якого на вісь 0t дорівнює $t(A_4)$. З'єднуємо кружки A_2 і A_4 стрілкою, яка й буде позначати роботу a_4 на графіку. Але робота a_4 спирається не тільки на роботу a_2, а ще й на роботу a_1. За логікою побудови сіткового графіка необхідно якось зв'язати завершальну подію A_1 роботи a_1 і початкову подію A_2 роботи a_4.

Це можна зробити, увівши фіктивну роботу, яка на графіку зображується пунктирною стрілкою, що з'єднує вершини A_1 і A_2.

Робота a_5, як це випливає з табл. 1.4, спирається на роботи a_3 і a_4. Оскільки робота a_4 закінчується пізніше, ніж робота a_3, то подія A_4 може бути початковою подією роботи a_5. Момент завершення роботи a_5 знайдемо таким чином:

$$t(A_5) = t(A_4) + t_4 = 50 + 10 = 60 \text{ хв.}$$

Зобразимо кружок A_5, проєкція центра якого на вісь 0t дорівнює $t(A_5)$. Стрілка, що з'єднує A_4 і A_5, відповідає роботі a_5. Для того щоб відобразити зв'язок між a_3 і a_4, з'єднаємо вершини A_3 і A_4 пунктирною стрілкою, що зображує фіктивну роботу. Робота a_5 починається подією A_4. Завершення роботи a_6 відбувається в момент часу

$$t(A_6) = t(A_5) + t_5 = 60 + 10 = 70 \text{ хв.}$$

З'єднаємо стрілкою вершини A_5 і A_6. Це буде робота a_6. І нарешті, робота a_7 починається в момент часу $t(A_6)$ (подія A_6) і закінчується в момент часу $t(A_7)$:

$$t(A_7) = t(A_6) + t_7 = 70 + 10 = 80 \text{ хв.}$$

Подія A_7 є завершальною подією всього комплексу робіт. Отже, сітковий графік комплексу робіт побудовано. Зробимо певні попередні висновки. З графіка відразу видно, що загальний мінімальний час виконання комплексу робіт становить 80 хв. Цей час складається з часових інтервалів виконання робіт a_2, a_4, a_5, a_6 і a_7.

Отже, щоб укластися у встановлений термін, керівник має тримати під пильною увагою процес виконання саме цих робіт. У разі будь-яких затримок у виконанні цих робіт необхідно використовувати наявні резерви, а якщо їх недостатньо, то знімати частину сил і засобів з інших робіт і перекидати на напружені ділянки, тобто повною мірою керувати процесом виконання комплексу робіт.

1.4. Параметри сіткового графіка

Сітковий графік дає змогу безпосередньо виявити найважливіші роботи, що потребують особливої уваги. Але побудований графік не дає відповіді на запитання, з яких робіт можна знімати частину сил і засобів, на який проміжок часу можна затримати початок або збільшити час виконання цих робіт, оскільки відволікання сил і засобів неминуче призведе або до затримок, або до збільшення тривалості робіт, і т. д. Відповісти на ці та багато інших запитань можна, розрахувавши параметри сіткового графіка.

Розглянемо сітковий графік, зображений на рис. 1.2. Уведемо дещо інше, відмінне від раніше застосованого, позначення робіт. Будемо позначати роботу через α_{ij}, якщо робота починається подією A_i, завершується подією A_j. Так, наприклад, на сітковому графіку, зображеному на рис. 1.2, символом α_{36} позначено роботу, початковою подією якої є A_3, а завершальною – A_6.

При такому підході навіть фіктивні роботи матимуть на сітковому графіку своє позначення. Відповідно час виконання роботи α_{ij} буде позначатися через t_{ij}, момент здійснення події A_i – через $t(A_i)$, а момент здійснення події A_j − через $t(A_j)$.

Будь-яку неперервну послідовність робіт сіткового графіка називають шляхом. Так, наприклад, послідовність

$$L = (\alpha_{01} - \alpha_{12} - \alpha_{25} - \alpha_{56})$$

являє собою шлях. Шлях, початком якого є початкова подія, а кінцем − завершальна подія комплексу робіт, – це *повний шлях*.

Зазвичай на сітковому графіку може бути зображено кілька повних шляхів. Наприклад, одним із повних шляхів сіткового графіка, зображеного на рис. 1.2, є шлях

$$L_{повн} = (\alpha_{01} - \alpha_{12} - \alpha_{25} - \alpha_{56} - \alpha_{67} - \alpha_{79} - \alpha_{9,10} - \alpha_{10,11}).$$

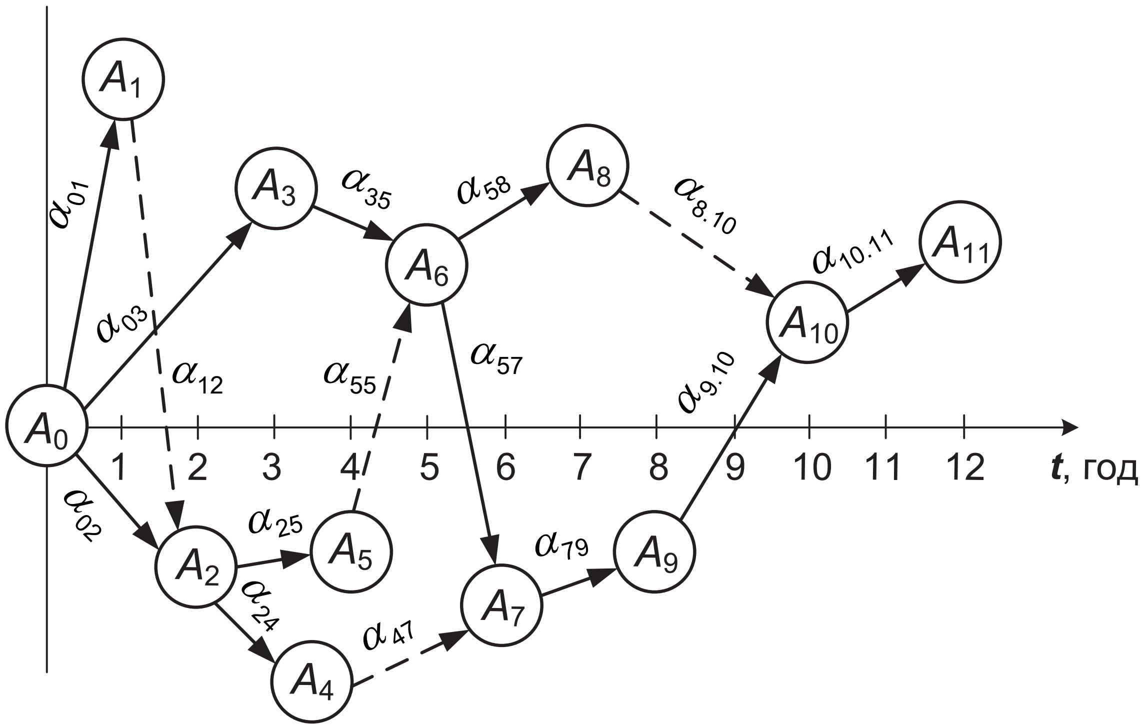

Рис. 1.2

Шлях від початкового події комплексу робіт до деякої події A_j називають *попереднім* для події A_j шляхом і позначають $L_{поп}\ (A_j)$. Так, для події A_6 одним із попередніх шляхів є шлях

$$L_{поп}\ (A_6) = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56}).$$

Шлях від деякої події A_j до завершальної події комплексу називають *наступним* шляхом і позначають $L_{нас}(A_j)$. Шлях

$$L_{нас}\ (A_6) = (\alpha_{67} - \alpha_{79} - \alpha_{9,10} - \alpha_{10,11})$$

є одним із наступних шляхів для події A_6. Проаналізувавши сітковий графік, неважко зробити висновок, що до будь-якої події (крім початкової) ведуть один або кілька попередніх шляхів, а від будь-якої події A_j (крім завершальної) виходять один або кілька наступних шляхів.

Довжина шляху – це сума тривалостей кожної з робіт, які входять до шляху. Будемо позначати довжину шляху через $t(L)$:

$$L_{1поп}(A_6) = (\alpha_{03} - \alpha_{36}),$$

$$L_{2поп}(A_6) = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56}).$$

Довжина першого шляху згідно з сітковим графіком є такою:

$$t[L_{1поп}(A_6)] = t_{03} + t_{36} = 5 \text{ год},$$

а довжина другого шляху з урахуванням того, що фіктивна робота α_{56} має нульову тривалість, тобто t_{56} = 0, – такою:

$$t[L_{2поп}(A_6)] = t_{02} + t_{25} + t_{56} = 2 + 2 + 0 = 4 \text{ год}.$$

Оскільки перший із цих шляхів має більшу довжину, його називають максимальним шляхом і позначають $L_{max\ поп}(A_6)$. Один з найважливіших параметрів сіткового графіка – критичний шлях.

Максимальний повний шлях (найдовший шлях на сітковому графіку від початкової до завершальної події) називають *критичним шляхом* сіткового графіка:

$$L_{кр} = (\alpha_{03} - \alpha_{36} - \alpha_{67} - \alpha_{79} - \alpha_{9,10} - \alpha_{10,11}).$$

Довжиною критичного шляху $t_{кр}$ визначається час виконання комплексу робіт у цілому. Цей час є мінімальним для заданих умов (ресурсів, коштів тощо). На рис. 1.2 критичний шлях зображено стовщеними стрілками.

Отже, сітковий графік дає змогу відразу наочно виділити ту послідовність робіт, яка й визначає час виконання всього комплексу робіт у цілому. Роботи, з яких складається критичний шлях, називають *критичними роботами*. Зазначимо головну особливість критичних робіт. Для того, щоб комплекс робіт був виконаний у встановлені терміни, необхідно, щоб кожна з критичних робіт починалася точно в той момент часу, коли завершується попередня для неї робота, і тривала не більше того часу, який їй відведено за планом. Затримка у виконанні будь-якої з критичних робіт неминуче призводить до відповідної затримки всього комплексу робіт у цілому.

Таким чином, критичний шлях характеризує найбільш вразливі місця плану, що потребують особливої уваги й контролю. Ця обставина, власне кажучи, і визначила назви ≪критичний шлях≫ і ≪критична робота≫.

Некритичною дугою називають послідовність робіт, що не входять у критичний шлях, яка починається і закінчується на критичному шляху. Розглянемо послідовність робіт ($\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56}$). Початковою подією цього шляху є подія A_0, що одночасно є початковою подією критичної роботи α_{03}. Отже, розглянута послідовність починається на критичному шляху. Завершується послідовність подією A_6, тобто знову на критичному шляху. Таким чином, послідовність робіт

$$L_{н.д}(A_0, A_6) = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56})$$

є некритичною дугою.

Роботи, з яких складається некритична дуга, не є критичними. Це означає, що кожна з них має деякий резерв часу і може початися або закінчитися з деяким запізненням, що не позначиться на часі виконання всього комплексу робіт.

Свідоме й розумне збільшення тривалості виконання некритичних робіт дає змогу вивільнити додаткові ресурси, які можна використовувати для поліпшення ситуації з критичними роботами. Як же визначити ці резерви? Для відповіді на це запитання перейдемо до визначення інших параметрів сіткового графіка.

Насамперед опишемо такі параметри, як *ранні* й *пізні терміни здійснення подій*. Розглянемо фрагмент графіка, зображеного на рис. 1.3.

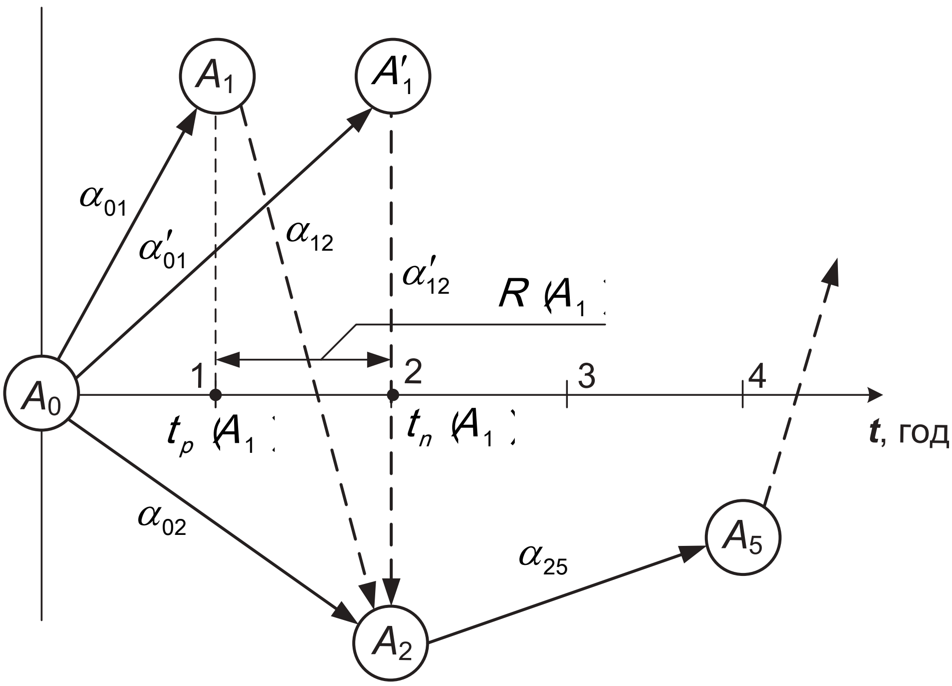

Рис. 1.3

Будемо вважати, що комплекс робіт починається в момент часу $t(A_0) = 0$. Подія A_1 відбувається в той момент, коли закінчується робота α_{01}. Оскільки мінімальний час виконання роботи α_{01} становить t_{01}, то подія $\boldsymbol{A_1}$ не може відбутися раніше, ніж в момент часу $\boldsymbol{t_{\text{р}}(A_1) = t(A_0) +}$ $\boldsymbol{+\ t_{01}}$.

Момент часу $\boldsymbol{t_{\text{р}}(A_1)}$ називають *раннім терміном* здійснення події $\boldsymbol{A_1}$.

З іншого боку, на роботу $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ спирається робота $\boldsymbol{\alpha_{25}}$. Але вона ж спирається і на роботу $\boldsymbol{\alpha_{02}}$, яка закінчується пізніше, ніж робота $\boldsymbol{\alpha_{01}}$. Отже, момент закінчення роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ можна затримати (подія $\boldsymbol{A_1}$) без порушення графіка виконання послідовності робіт до моменту закінчення роботи $\boldsymbol{\alpha_{02}}$. Природно, тривалість роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ збільшиться (на рис 1.3 її тепер позначено через $\boldsymbol{\alpha'_{01}}$). Момент здійснення події $\boldsymbol{A'_1}$ називають *пізнім терміном* здійснення події $\boldsymbol{A_1}$ і позначають $\boldsymbol{t_{\text{п}}(A_1)}$. Аналогічним чином можна пояснити ранній і пізній терміни здійснення будь-якої події сіткового графіка. На сітковому графіку, зображеному на рис. 1.3, розглянемо подію $\boldsymbol{A_5}$. До цієї події ведуть два попередні шляхи

$$\boldsymbol{L_{1поп}(A_5) = (\alpha_{01} - \alpha_{12} - \alpha_{25})},$$

$$\boldsymbol{L_{2поп}(A_5) = (\alpha_{02} - \alpha_{25})}.$$

Довжина кожного з цих шляхів відповідно дорівнює $\boldsymbol{t[L_{1поп}(A_5)]} =$ $= 3$ год і $\boldsymbol{t[L_{2поп}(A_5)]} = 4$ год. Таким чином, подія $\boldsymbol{A_5}$ може здійснитися не раніше, ніж буде виконана послідовність робіт ($\boldsymbol{\alpha_{02} - \alpha_{25}}$), яка являє собою максимальний шлях, що передує події $\boldsymbol{A_5}$. Звідси випливає, що ранній термін здійснення події $\boldsymbol{A_5}$ є таким:

$$\boldsymbol{t_{\text{р}}(A_5) = t[L_{max\ поп}(A_5)]} = 4 \text{ год}.$$

Узагальнюючи сказане вище, можна зробити висновок, що ранній термін здійснення довільної події $\boldsymbol{A_j}$ дорівнює тривалості найбільшого зі шляхів, що передують цій події:

$$\boldsymbol{t_{\text{р}}(A_j) = t[L_{max\ поп}(A_j)]}. \tag{1.3}$$

Очевидно, що ранній термін здійснення завершального події сіткового графіка визначає найбільш ранній час виконання всього комплексу робіт.

Визначаючи пізні терміни, слід ураховувати, що подія має здійснитися в такий момент, щоб залишилося достатньо часу на виконання всіх робіт, що є наступними для цієї події. Так, наприклад, подія A_5 (див. рис. 1.2) має здійснитися не пізніше моменту часу, після якого забезпечувалося б своєчасне виконання послідовностей робіт ($\alpha_{56} - \alpha_{68} - \alpha_{8,10} - \alpha_{10,11}$) і ($\alpha_{56} - \alpha_{67} - \alpha_{79} - \alpha_{9,10} - \alpha_{10,11}$). Але ці послідовності – це шляхи, що є наступними для події A_5 :

$$L_{1нас}(A_5) = (\alpha_{56} - \alpha_{68} - \alpha_{8,10} - \alpha_{10,11});$$

$$L_{2нас}(A_5) = (\alpha_{56} - \alpha_{67} - \alpha_{79} - \alpha_{9,10} - \alpha_{10,11}).$$

Оскільки на виконання другої послідовності потрібно більше часу, ніж на виконання першої послідовності робіт, момент $t(A_5)$ здійснення події A_5 можна затримати, але не більше, ніж до моменту звершення події A_6, тобто $t_п(A_5)$ = 5 год. Якщо від довжини критичного шляху відняти довжину максимального шляху, який є наступним для події A_5 , то

$$t_{кр} - t[L_{max\ нас}(A_5)] = 12 – 7 = 5 \text{ год.}$$

Отримали саме цю величину. Отже, пізній термін здійснення будь-якої події A_j обчислюється як різниця довжини критичного шляху і тривалості найбільшого зі шляхів, що є наступними для події A_j:

$$t_п(A_j) = t_{кр} - t[L_{max\ нас}(A_5)]. \tag{1.4}$$

Неважко переконатися, що ранній термін здійснення події, яка належить до критичного шляху, дорівнює пізньому терміну її здійснення. Наприклад, для події A_9, маємо

$$t_р(A_9) = t[L_{max\ поп}(A_9)] = t(\alpha_{03} - \alpha_{36} - \alpha_{67} - \alpha_{79}) = 8 \text{ год;}$$

$$t_п(A_9) = t_{кр} - t[L_{max\ нас}(A_9)] = t_{кр}(\alpha_{9,10} - \alpha_{10,11}) = 12 – 4 = 8 \text{ год.}$$

Це справджується і для завершальної події графіка.

Кожна подія сіткового графіка є одночасно завершальною подією для одних робіт і початковою подією для інших. Так, наприклад, подією A_2 завершуються роботи α_{02} і α_{12} та починаються роботи α_{24} і α_{25}.

Оскільки подія $\boldsymbol{A_2}$ характеризується раннім і пізнім термінами здійснення, то можна казати про ранній і пізній початки й закінчення робіт. Тому наступними параметрами сіткового графіка, які будемо розглядати, є терміни *раннього початку*, *раннього закінчення*, *пізнього початку* та *пізнього закінчення* робіт. На рис. 1.4 зображено фрагмент сіткового графіка для аналізу термінів закінчення робіт на прикладі роботи $\boldsymbol{\alpha_{25}}$.

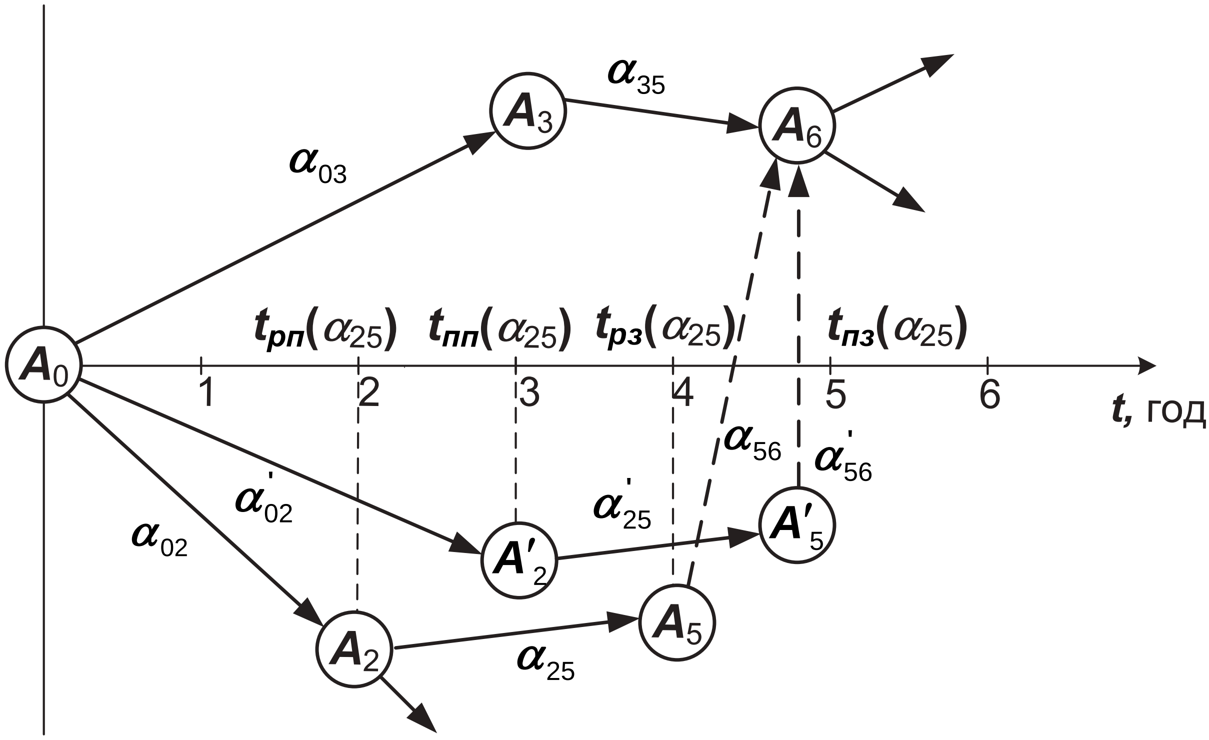

Рис. 1.4

Тут пояснюється зміст перелічених параметрів. Очевидно, що початком роботи $\boldsymbol{\alpha_{25}}$ є здійснення події $\boldsymbol{A_2}$, а закінченням – здійснення події $\boldsymbol{A_5}$:

$$\boldsymbol{t}_{\text{рп}}(\boldsymbol{\alpha_{25}}) = \boldsymbol{t}_{\text{р}}\boldsymbol{(A_2)};$$

$$\boldsymbol{t}_{\text{рз}}\boldsymbol{(\alpha_{25})} = \boldsymbol{t}_{\text{рп}}(\boldsymbol{\alpha_{25}}) + \boldsymbol{t_{25}};$$

$$\boldsymbol{t}_{\text{пз}}\boldsymbol{(\alpha_{25})} = \boldsymbol{t}_{\text{п}}\boldsymbol{(A_5)};$$

$$\boldsymbol{t}_{\text{пп}}\boldsymbol{(\alpha_{25})} = \boldsymbol{t}_{\text{пз}}\boldsymbol{(A_5)} - \boldsymbol{t_{25}}.$$

Узагальнюючи викладене вище, для довільної роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ сіткового графіка отримаємо такі вирази для визначення термінів початку й закінчення робіт:

− час раннього початку роботи

$$t_{рп}(\alpha_{ij}) = t_{р}(A_{i}); \tag{1.5}$$

− час раннього закінчення роботи

$$t_{рз}(\alpha_{ij}) = t_{рп}(\alpha_{ij}) + t_{ij}\,; \tag{1.6}$$

− час пізнього закінчення роботи

$$t_{пз}(\alpha_{ij}) = t_{п}(A_{j}); \tag{1.7}$$

− час пізнього початку роботи

$$t_{пп}(\alpha_{ij}) = t_{пз}(\alpha_{ij}) - t_{ij}, \tag{1.8}$$

де t_{ij} − тривалість роботи α_{ij}.

Якщо час раннього початку відрізняється від часу пізнього початку роботи (або не збігаються терміни раннього й пізнього закінчення), то це означає, що робота має деякий *резерв часу*.

Резерви часу − найважливіші параметри сіткового графіка. По суті, основне завдання сіткового планування й полягає в пошуку й використанні цих резервів, оскільки резерви часу забезпечують можливість перерозподілу людських і матеріальних ресурсів з метою своєчасного виконання критичних робіт, а отже, і всього комплексу робіт у цілому. З огляду на резерви до параметрів сіткового графіка належать *резерви часу шляхів, резерви часу подій, резерви часу робіт.*

Вище зазначалося, що довжина критичного шляху завжди більше довжини будь-якого іншого повного шляху сіткового графіка. З іншого боку, будь-який повний шлях сіткового графіка, що не є критичним, або сам є некритичною дугою, або складається з декількох некритичних дуг. Наприклад, повний шлях (див. рис. 1.2)

$$L_{повн} = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56} - \alpha_{68} - \alpha_{8,10} - \alpha_{10,11})$$

складається з некритичних дуг

$$L_{н.д}(A_{0}, A_{6}) = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56}),$$
$$L_{н.д}(A_{6}, A_{10}) = (\alpha_{68} - \alpha_{8,10})$$

та критичної роботи $\alpha_{10,11}$.

Оскільки будь-яка некритична дуга являє собою шлях, що починається і закінчується на критичному шляху, можна сказати, що некритична дуга замикається деякою ділянкою критичного шляху.

Наприклад, некритичну дугу $L_{н.д}(A_0, A_6) = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56})$ замикає ділянка критичного шляху, що складається з робіт $(\alpha_{03} - \alpha_{36})$, а некритичну дугу $L_{н.д}(A_6, A_{10}) = (\alpha_{68} - \alpha_{8,10})$ – ділянка $(\alpha_{67} - \alpha_{79} - \alpha_{9,10})$. Очевидно, що довжина некритичної дуги завжди менше довжини ділянки критичного шляху, яка замикає її.

Позначимо через $t[L_{н.д}(A_p, A_q)]$ довжину некритичної дуги, а через $t_{кр}[L_{н.д}(A_p, A_q)]$ – довжину ділянки критичного шляху, що її замикає. Тут A_p – початкова, а A_q – завершальна подія некритичної дуги. Різницю цих довжин називають повним резервом часу некритичної дуги:

$$R[L_{н.д}(A_p, A_q)] = t_{кр}[L_{н.д}(A_p, A_q)] - t[L_{н.д}(A_p, A_q)]. \quad (1.9)$$

У загальному випадку повний резерв часу будь-якого повного шляху визначається виразом

$$R[L_{повн}] = t_{кр} - t[L_{повн}], \quad (1.10)$$

де $t_{кр}$ – довжина критичного шляху;

$t[L_{повн}]$ – довжина повного шляху.

Для прикладу знайдемо повні резерви часу некритичної дуги

$$L_{н.д}(A_0, A_6) = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56})$$

і повного шляху

$$L_{повн} = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56} - \alpha_{68} - \alpha_{8,10} - \alpha_{10,11}).$$

Довжина некритичної дуги $L_{н.д}(A_0, A_6)$ (з урахуванням того, що тривалість фіктивних робіт дорівнює нулю) є такою $t[L_{н.д}(A_0, A_6)] =$ = 4 год, а довжина ділянки критичного шляху, на який замикається ця некритична дуга, – такою: $t_{кр}[L_{н.д}(A_0, A_6)] = 5$ год. Тоді відповідно до (1.9) повний резерв часу некритичної дуги

$$R[L_{н.д}(A_0, A_6)] = 5 - 4 = 1 \text{ год.}$$

Аналогично згідно з (1.10) повний резерв часу шляху

$$R[L_{повн}] = 12 – 8 = 4 \text{ год.}$$

Уточнимо поняття повного резерву часу. *Повний резерв часу* показує, на який час у сумі можна збільшити тривалість або затримати початок робіт, що утворюють шлях, без істотного впливу на терміни виконання комплексу робіт у цілому.

Так, якщо резерв часу некритичної дуги $L_{н.д}(A_0, A_6)$ становить одну годину, то час виконання всього комплексу не зміниться, якщо, наприклад, тривалість роботи α_{02} збільшити на одну годину або затримати початок роботи α_{25} на одну годину, або збільшити тривалість кожної з робіт α_{02} і α_{25} на 0,5 год, що в сумі знову-таки становитиме одну годину.

Важливо, щоб зміна тривалості робіт з моментів їх початку не виходила за межі резерву часу. В іншому випадку некритичні роботи, з яких складається некритична дуга, можуть стати критичними, що спричинить змінення критичного шляху, а отже, і часу виконання всього комплексу робіт.

З іншого боку, резервом часу можна скористатися не для всіх робіт. Так, наприклад, хоча резерв часу розглянутого вище шляху $L_{повн}$ становить 4 год, збільшувати тривалість роботи $\alpha_{10,11}$ не можна, оскільки це призведе до збільшення довжини критичного шляху. Отже, з використанням резерву часу шляху можна варіювати часовими характеристиками (часом початку й закінчення, тривалістю) тільки некритичних робіт.

Резервом часу події A_j називають різницю між пізнім і раннім термінами здійснення цієї події, тобто

$$R(A_j) = t_п(A_j) - t_р(A_j). \qquad (1.11)$$

На рис. 1.3 графічно зображено резерв часу події A_1. Числове значення цієї величини є таким:

$$R(A_1) = t_п(A_1) - t_р(A_1) = 2 – 1 = 1 \text{ год.}$$

Отже, здійснення події A_1 можна затримати на термін до однієї години відносно моменту $t_р(A_1)$, і це не вплине на терміни виконання комплексу робіт у цілому. Події, зв'язані з критичним шляхом, резерву часу не мають.

Будь-який шлях, що відрізняється від критичного, має деякий повний резерв часу. Під час планування й проведення комплексу робіт цей резерв можна використовувати по-різному. Резерв часу можна розподілити між кількома роботами, що належать цьому шляху, можна резерв віддати в розпорядження тільки однієї роботи. У цьому випадку резерв часу буде і повним резервом часу роботи. *Повний резерв часу роботи* – це резерв часу найбільшого зі шляхів, яким належить ця робота.

Розглянемо роботу α_{25} сіткового графіка (див. рис. 1.2). Ця робота належить двом дугам:

$$L_{1н.д}(A_0, A_6) = (\alpha_{02} - \alpha_{25} - \alpha_{56}),$$

$$L_{2н.д}(A_0, A_6) = (\alpha_{01} - \alpha_{12} - \alpha_{25} - \alpha_{56}).$$

Повний резерв часу дуги $L_{1н.д}(A_0, A_6)$ визначається так:

$$R[L_{1н.д}(A_0, A_6)] = 1 \text{ год},$$

а дуги $L_{2н.д}(A_0, A_6)$ – так:

$$R[L_{2н.д}(A_0, A_6)] = t_{кр}[L_{2н.д}(A_0, A_6)] - t[L_{2н.д}(A_0, A_6)] = 5 - 3 = 2 \text{ год}.$$

Виникає запитання: “Що ж уважати повним резервом часу роботи α_{25} – величину $R[L_{1н.д}(A_0, A_6)] = 1$ год чи величину $R[L_{2н.д}(A_0, A_6)] =$ $= 2$ год?” Якщо як повний резерв часу роботи α_{25} взяти величину $R[L_{2н.д}(A_0, A_6)]$, то тривалість цієї роботи, здавалося б, можна збільшити на 2 год. Але при цьому подія A_5 може здійснитися пізніше події A_6.

У цьому випадку критичний шлях зміниться, а отже, зміниться і час виконання всього комплексу робіт. Таким чином, повним резервом часу роботи α_{25} слід уважати $R[L_{1н.д}(A_0, A_6)]$. Оскільки довжина некритичної дуги $L_{1н.д}(A_0, A_6)$ більше довжини некритичної дуги $L_{2н.д}(A_0, A_6)$, можна зробити такий висновок: повний резерв часу роботи − це резерв часу найбільшого зі шляхів, яким належить ця робота.

Розглянемо довільну роботу α_{ij} і максимальний шлях $L_{max\ повн}$, якому належить робота:

$$\boldsymbol{L_{max\ повн} = L_{max\ поп}(A_i) + \alpha_{ij} + L_{max\ нас}(A_j)}, \qquad (1.12)$$

де $\boldsymbol{L_{max\ поп}(A_i)}$ – максимальный шлях, який передує події $\boldsymbol{A_i}$;
$\boldsymbol{L_{max\ нас}(A_j)}$ – максимальный шлях, що є наступним для події $\boldsymbol{A_j}$;
$\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{A_j}$ – початкова й завершальна події роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$.

Відповідно до (1.10) повний резерв часу розглядуваного шляху

$$\boldsymbol{R[L_{max\ повн}] = t_{кр} - t[L_{max\ повн}]},$$

або з урахуванням (1.12)

$$\boldsymbol{R[L_{max\ повн}] = t_{кр} - t[L_{max\ поп}(A_i)] - t_{ij} - t[L_{max\ нас}(A_j)]}. \qquad (1.13)$$

Перепишемо рівняння (1.13) у такому вигляді:

$$\boldsymbol{R[L_{max\ повн}] = t_{кр} - t[L_{max\ нас}(A_j)] - t[L_{max\ пр}(A_i)] - t_{ij}}. \qquad (1.14)$$

Але згідно з (1.1) і (1.2)

$$\boldsymbol{t_{кр} - t[L_{max\ нас}(A_j)] = t_п(A_j)};$$

$$\boldsymbol{t[L_{max\ пр}(A_i)] = t_р(A_i)}.$$

Тоді резерв часу розглядуваного шляху визначається формулою

$$\boldsymbol{R[L_{max\ повн}] = t_п(A_j) - t_р(A_i) - t_{ij}}.$$

З іншого боку, повний резерв часу найбільшого зі шляхів, що проходять через цю роботу, є повним резервом часу цієї роботи. Отже, повний резерв часу роботи визначається виразом

$$\boldsymbol{R_{повн}(\alpha_{ij}) = t_п(Aj) - t_р(A_i) - t_{ij}}. \qquad (1.15)$$

Якщо також урахувати, що

$$\boldsymbol{t_{п}(A_j) = t_{пз}(\alpha_{ij})};$$

$$t_{р}(A_j) + t_{ij} = t_{рз}(\alpha_{ij}),$$

то повний резерв часу можна записати так:

$$R_{повн}(\alpha_{ij}) = t_{пз}(\alpha_{ij}) - t_{рз}(\alpha_{ij}). \tag{1.16}$$

Таким чином, повний резерв часу роботи – це такий максимальний проміжок часу, на який можна збільшити її тривалість без зміни термінів виконання всього комплексу робіт.

Графічно повний резерв часу роботи можна інтерпретувати так, як показано на рис. 1.5, *а*.

Позначимо на осі часу моменти часу $t_{р}(A_i)$, $t_{п}(A_i)$, $t_{р}(A_j)$, $t_{п}(A_j)$. Роботу α_{ij} зобразимо у вигляді стрілки завдовжки t_{ij}. Тоді повний резерв часу буде зображено заштрихованими ділянками осі часу.

У межах заштрихованих ділянок між $t_{р}(A_i)$ і $t_{п}(A_i)$ можна розтягувати стрілку, збільшуючи тривалість роботи (рис. 1.5, *б*), або пересувати її по осі часу вліво або вправо, що є еквівалентним зміні термінів початку й закінчення роботи (рис. 1.5, *в*).

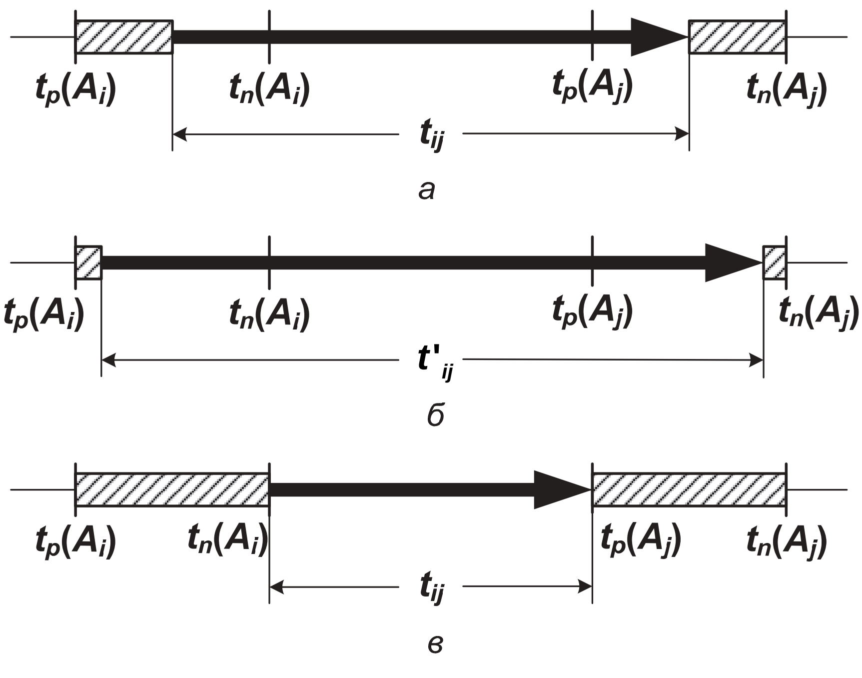

Рис. 1.5

При цьому, як було зазначено вище, терміни виконання всього комплексу робіт не змінюються.

У практиці сіткового планування використовуються й інші параметри сіткового графіка: вільний резерв і часткові резерви часу роботи, коефіцієнт напруженості і коефіцієнт свободи роботи. Ці параметри вказують, як можна розпоряджатися повним резервом часу в інтересах певної роботи, а також попередніх і наступних робіт [13, 14].

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення термінів роботи та події в сітковому плануванні.
2. Обґрунтуйте зміст матричного способу впорядкування комплексу робіт під час сіткового планування.
3. Наведіть правила побудови структурних таблиць комплексів робіт та впорядкованих структурних таблиць комплексів робіт.
4. Наведіть правила побудови сіткових графіків.
5. Дайте означення параметрам сіткових графіків: довжина шляху, некритична дуга, критичний шлях.
6. Дайте означення параметрам сіткових графіків: ранній і пізній терміни початку роботи, ранній і пізній терміни закінчення роботи, повний резерв часу роботи.
7. Дайте означення параметрам сіткового графіка: резерв часу роботи та повний резерв часу роботи.
8. Дайте означення резерву часу події.
9. Сформулюйте правило визначення раннього початку та закінчення роботи.
10. Сформулюйте правило визначення пізнього початку та закінчення роботи.

2. РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ СІТКОВОГО ГРАФІКА

Зазвичай розраховують такі параметри сіткового графіка [2, 13]:
- ранні й пізні терміни здійснення подій;
- час раннього й пізнього початку та закінчення робіт;
- повний резерв часу кожної роботи;
- критичний шлях.

Для більш глибокого аналізу графіка визначають також вільний і часткові резерви часу і коефіцієнти напруженості та свободи робіт. Розглянемо способи розрахунку параметрів сіткових графіків: аналітичний, табличний та графічний.

2.1. Аналітичний спосіб

Аналітичний спосіб ґрунтується на використанні в процесі розрахунку аналітичних співвідношень (формул) для визначення часових параметрів сіткового графіка. Такі формули було отримано в розд. 1.

Для розрахунку ранніх і пізніх термінів здіснення подій використовують співвідношення (1.3) і (1.4). Більш зручно вести розрахунки за допомогою рекурентних співвідношень (співвідношень, що зв'язують терміни здійснення події з термінами здійснення попередніх або наступних подій). Наприклад, якщо подія A_i – початкова, а подія A_j – завершальна подія роботи α_{ij}, то ранній термін здійснення події A_j обчислюється за формулою

$$t_p(A_j) = max_{Ai}[\ t_p(A_j)\ + t_{ij}]. \tag{2.1}$$

Тут вибір максимального значення проводиться за всіма роботами, які входять у цю подію A_j. Вираз (2.1) зв'язує ранній термін здійснення цієї події з раннім терміном здійснення попередньої події A_i. Звідси випливає, що ранні терміни здійснення подій розраховуються від початкової події сіткового графіка до завершальної.

Пізній термін здійснення події визначається формулою

$$t_п(A_i) = min_{A_i}[t_П(A_j)\ - t_{ij}]. \tag{2.2}$$

Вибір мінімуму здійснюється за всіма роботами, які є наступними для цієї події A_i. Це формулювання зв'язує пізній термін здійснення події A_i з пізнім терміном здійснення подальшої події A_j. Таким чином, розрахунок пізніх термінів здійснення події необхідно вести в зворотному порядку – від завершальної події графіка до початкової.

Ранній термін здійснення початкової події A_i. завжди збігається з моментом раннього початку роботи α_{ij}:

$$t_{рп}(\alpha_{ij}) = t_p(A_i).$$

Пізній термін здіснення початкової події A_j. завжди збігається з моментом раннього закінчення роботи α_{ij}:

$$t_{пз}(\alpha_{ij}) = t_п(A_j).$$

Отже, якщо відомою є тривалість роботи t_{ij}, то можна знайти час її раннього закінчення

$$t_{рз}(\alpha_{ij}) = t_{рп}(\alpha_{ij}) + t_{ij}$$

і час пізнього початку

$$t_{пп}(\alpha_{ij}) = t_{пз}(\alpha_{ij}) - t_{ij}.$$

Повний резерв часу роботи α_{ij} знаходять або за виразом (1.16), або за таким виразом:

$$R_{повн}(\alpha_{ij}) = t_{пп}(\alpha_{ij}) - t_{рп}(\alpha_{ij}). \tag{2.3}$$

Роботи, повний резерв часу яких дорівнює нулю, є критичними. Для визначення критичного шляху достатньо знайти послідовність робіт з нульовим резервом часу.

Приклад 2.1*.* Розрахувати параметри сіткового графіка, наведеного на рис. 1.2.

Розв'язання. Почнемо з розрахунку ранніх термінів здіснення подій. Як зазначалося вище, розрахунок слід вести від початкої події A_0 до завершальної події A_{11}. Очевидно, що момент початку комплексу робіт є раннім моментом здійснення події A_0, причому з графіка випливає, що $t_p(A_0) = 0$. Подальший розрахунок проведемо за формулою (2.1). Знайдемо ранній термін здійснення події A_1. Оскільки подія A_1 є завершальною подією тільки однієї роботи, то згідно з (2.1)

$$t_p(A_1) = max_{A_1}[t_p\ (A_0) + t_{01}] = t_p(A_0) + t_{01} = 0 + 1 = 1 \text{ год.}$$

Подія A_2 є завершальною подією двох робіт: α_{02} і α_{12}. Згідно з (2.1) вибираємо більше серед двох значень $t_p(A_i) + t_{i2}$, де $i = \overline{0,1}$:

$$t_p(A_2) = max_{A_1}[t_p\ ((A_0) + t_{02}); (t_p(A_1) + t_{12})] = max[(0 + 2); (0+0)] =$$
$$= max[2; 0] = 2 \text{ год.}$$

Аналогічним чином розраховуємо значення часу $t_p(A_j)$ для інших подій:

$$t_p(A_3) = t_p(A_0) + t_{03} = 0 + 3 = 3 \text{ год;}$$

$$t_p(A_4) = t_p(A_2) + t_{24} = 2+1{,}5 = 3{,}5 \text{ год};$$

$$t_p(A_5) = t_p(A_2) + t_{25} = 2+ 2 = 4 \text{ год};$$

$$t_p(A_6) = max[(t_p\ (A_3) + t_{36}); (t_p(A_5) + t_{56})] = max[5; 4] = 5 \text{ год};$$

$$t_p(A_7) = max[(t_p\ (A_4) + t_{47}); (t_p(A_6) + t_{67})] = max[3{,}5; 6] = 6 \text{ год};$$

$$t_p(A_8) = t_p(A_6) + t_{68} = 5 + 2 = 7 \text{ год};$$

$$t_p(A_9) = t_p(A_7) + t_{79} = 6 + 2 = 8 \text{ год};$$

$$t_p(A_{10}) = max[(t_p\ (A_8) + t_{8,10}); (t_p(A_9) + t_{9,10})] = max[7; 10] = 10 \text{ год};$$

$$t_p(A_{11}) = t_p(A_{10}) + t_{10,11} = 10 + 2 = 12 \text{ год}.$$

Перейдемо до визначення пізніх термінів здіснення подій. Розрахунок ведеться від завершальної події A_{11} до початкової. Пізній термін здійснення завершальної події A_{11} є таким: $t_п(A_{11}) = 12$. Тоді згідно з (2.2) пізній термін здіснення події A_{10}

$$t_п(A_{10}) = min[(t_П\ (A_{11}) - t_{10,11}] = t_п\ (A_{11}) - t_{10,11} = 12 - 2 = 10 \text{ год}.$$

Аналогічно знаходимо $t_п(A_i)$ для інших подій:

$$t_п(A_9) = t_п(A_{10}) - t_{9,10} = 10 - 2 = 8 \text{ год};$$

$$t_п(A_8) = t_п(A_9) - t_{8,10} = 10 - 0 = 10 \text{ год};$$

$$t_п(A_7) = t_п(A_9) - t_{79} = 8 - 2 = 6 \text{ год};$$

$$t_п(A_6) = min[(t_П\ (A_7) - t_{67}, t_п(A_8) - t_{68}] = min[5; 8] = 5 \text{ год};$$

$$t_п(A_5) = t_п(A_6) - t_{56} = 5 - 0 = 5 \text{ год};$$

$$t_п(A_4) = t_п(A_7) - t_{47} = 6 - 0 = 6 \text{ год};$$

$$t_п(A_3) = t_п(A_6) - t_{36} = 5 - 2 = 3 \text{ год};$$

$$t_п(A_2) = min[(t_П\ (A_5) - t_{25}, t_п\ (A_4) - t_{24}] = min[3; 4{,}5] = 3 \text{ год};$$

$$t_п(A_1) = t_п(A_2) - t_{12} = 3 - 0 = 3 \text{ год};$$

$$t_п(A_0) = \boldsymbol{min}[(t_П\ (A_1) - t_{01};\ t_п(A_2) - t_{02};\ t_п\ (A_3) - t_{03}] =$$
$$= \boldsymbol{min}[2; 1; 0] = 0 \text{ год.}$$

Подія A_0 є початковою для робіт α_{01}, α_{02} і α_{03}. Оскільки ранній термін здійснення початкової події роботи дорівнює моменту раннього початку роботи (див. вираз (1.5)), то

$$t_{рп}(\alpha_{01}) = t_р(A_0) = 0;$$
$$t_{рп}(\alpha_{02}) = t_р(A_0) = 0;$$
$$t_{рп}(\alpha_{03}) = t_р(A_0) = 0.$$

Аналогічно знаходимо моменти раннього початку інших робіт:

$$t_{рп}(\alpha_{12}) = t_р(A_1) = 1 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{24}) = t_р(A_2) = 2 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{25}) = t_р(A_2) = 2 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{36}) = t_р(A_3) = 3 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{47}) = t_р(A_4) = 3{,}5 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{12}) = t_р(A_1) = 1 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{56}) = t_р(A_5) = 4 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{67}) = t_р(A_6) = 5 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{68}) = t_р(A_6) = 5 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{79}) = t_р(A_7) = 6 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{8,10}) = t_р(A_8) = 7 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{9,10}) = t_р(A_9) = 8 \text{ год;}$$
$$t_{рп}(\alpha_{10,11}) = t_р(A_{10}) = 10 \text{ год.}$$

Визначимо моменти раннього закінчення робіт, скориставшись виразом (1.6):

$$t_{рз}(\alpha_{01}) = t_{рп}(\alpha_{01}) + t_{01} = 1 \text{ год;}$$

$$t_{рз}(\alpha_{02}) = t_{рп}(\alpha_{02}) + t_{02} = 2 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{03}) = t_{рп}(\alpha_{03}) + t_{03} = 3 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{12}) = t_{рп}(\alpha_{12}) + t_{12} = 1 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{24}) = t_{рп}(\alpha_{24}) + t_{24} = 3{,}5 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{25}) = t_{рп}(\alpha_{25}) + t_{25} = 4 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{36}) = t_{рп}(\alpha_{36}) + t_{36} = 5 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{47}) = t_{рп}(\alpha_{47}) + t_{47} = 3{,}5 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{56}) = t_{рп}(\alpha_{56}) + t_{56} = 4 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{67}) = t_{рп}(\alpha_{67}) + t_{67} = 6 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{79}) = t_{рп}(\alpha_{79}) + t_{79} = 8 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{8,10}) = t_{рп}(\alpha_{8,10}) + t_{8,10} = 7 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{9,10}) = t_{рп}(\alpha_{9,10}) + t_{9,10} = 10 \text{ год};$$
$$t_{рз}(\alpha_{10,11}) = t_{рп}(\alpha_{10,11}) + t_{10,11} = 12 \text{ год}.$$

Моменти пізнього закінчення робіт збігаються з моментами пізнього здіснення завершальних подій робіт. Оскільки подія A_{11} є завершальною подією роботи $\alpha_{10,11}$, то

$$t_{пз}(\alpha_{10,11}) = t_{п}(A_{11}) = 12 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{9,10}) = t_{п}(A_{10}) = 10 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{8,10}) = t_{п}(A_{10}) = 10 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{79}) = t_{п}(A_{9}) = 8 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{68}) = t_{п}(A_{8}) = 10 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{67}) = t_{п}(A_{7}) = 6 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{56}) = t_{п}(A_{6}) = 5 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{47}) = t_{п}(A_{9}) = 8 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{36}) = t_{п}(A_{6}) = 5 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{25}) = t_{п}(A_{5}) = 5 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{24}) = t_{п}(A_{4}) = 6 \text{ год};$$

$$t_{пз}(\alpha_{12}) = t_{п}(A_2) = 3 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{03}) = t_{п}(A_3) = 3 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{02}) = t_{п}(A_2) = 3 \text{ год};$$
$$t_{пз}(\alpha_{01}) = t_{п}(A_1) = 3 \text{ год}.$$

Моменти пізнього початку робіт визначаємо відповідно до виразу (1.8):

$$t_{пп}(\alpha_{10,11}) = t_{пз}(\alpha_{10,11}) - t_{10,11} = 10 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{9,10}) = t_{пз}(\alpha_{9,10}) - t_{9,10} = 8 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{8,10}) = t_{пз}(\alpha_{8,10}) - t_{8,10} = 10 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{79}) = t_{пз}(\alpha_{79}) - t_{79} = 6 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{68}) = t_{пз}(\alpha_{68}) - t_{68} = 8 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{67}) = t_{пз}(\alpha_{67}) - t_{67} = 6 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{56}) = t_{пз}(\alpha_{56}) - t_{56} = 5 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{47}) = t_{пз}(\alpha_{47}) - t_{47} = 5 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{36}) = t_{пз}(\alpha_{36}) - t_{36} = 5 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{25}) = t_{пз}(\alpha_{25}) - t_{25} = 3 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{24}) = t_{пз}(\alpha_{24}) - t_{24} = 4{,}5 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{12}) = t_{пз}(\alpha_{12}) - t_{12} = 3 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{03}) = t_{пз}(\alpha_{03}) - t_{03} = 0 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{02}) = t_{пз}(\alpha_{02}) - t_{02} = 1 \text{ год};$$
$$t_{пп}(\alpha_{01}) = t_{пз}(\alpha_{01}) - t_{01} = 2 \text{ год}.$$

Визначимо повні резерви часу робіт згідно з виразом (2.3):

$$R_{повн}(\alpha_{01}) = t_{пп}(\alpha_{01}) - t_{рп}(\alpha_{01}) = 2 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{02}) = t_{пп}(\alpha_{02}) - t_{рп}(\alpha_{02}) = 1 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{03}) = t_{пп}(\alpha_{03}) - t_{рп}(\alpha_{03}) = 0 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{12}) = t_{пп}(\alpha_{12}) - t_{рп}(\alpha_{12}) = 2 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{24}) = t_{пп}(\alpha_{24}) - t_{рп}(\alpha_{24}) = 2{,}5 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{25}) = t_{пп}(\alpha_{25}) - t_{рп}(\alpha_{25}) = 1 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{36}) = t_{пп}(\alpha_{36}) - t_{рп}(\alpha_{36}) = 0 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{47}) = t_{пп}(\alpha_{47}) - t_{рп}(\alpha_{47}) = 2{,}5 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{56}) = t_{пп}(\alpha_{56}) - t_{рп}(\alpha_{56}) = 1 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{67}) = t_{пп}(\alpha_{67}) - t_{рп}(\alpha_{67}) = 0 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{68}) = t_{пп}(\alpha_{68}) - t_{рп}(\alpha_{68}) = 3 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{79}) = t_{пн}(\alpha_{79}) - t_{рп}(\alpha_{79}) = 0 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{8,10}) = t_{пп}(\alpha_{8,101}) - t_{рп}(\alpha_{8,10}) = 3 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{9,10}) = t_{пп}(\alpha_{9,10}) - t_{рп}(\alpha_{9,11}) = 0 \text{ год};$$

$$R_{повн}(\alpha_{10,11}) = t_{пп}(\alpha_{10,11}) - t_{рп}(\alpha_{10,11}) = 0 \text{ год}.$$

Результати розрахунку повних резервів часу свідчать про те, що роботи α_{03}, α_{35}, α_{56}, α_{67}, α_{79}, $\alpha_{9,10}$ і $\alpha_{10,11}$ не мають резерву часу.

Але роботи, які не мають резерву часу, є критичними. Тому критичним шляхом графіка є такий шлях:

$$L_{кр} = (\alpha_{03} - \alpha_{35} - \alpha_{56} - \alpha_{67} - \alpha_{79} - \alpha_{9,10} - \alpha_{10,11}).$$

Цей результат збігається з результатом, отриманим шляхом безпосереднього аналізу сіткового графіка.

2.2. Табличний спосіб

Для розрахунку параметрів сіткового графіка вручну зручно скористатися табличним способом. Суть табличного способу: на основі сіткового графіка заповнюють розрахункову таблицю, за якою відповідно до спеціального алгоритму розраховують усі параметри сіткового графіка. Табл. 2.1 – це таблиця для розрахунку параметрів сіткового графіка.

У перші три стовпці таблиці записують позначення всіх подій і робіт (відповідно до графіка), що входять у комплекс. При цьому початкові роботи розташовують у порядку збільшення номерів. При однаковому номері початкової події завершальні події записують також у порядку збільшення номерів.

У п'ятому і восьмому стовпцях записують тривалість відповідних робіт в одних і тих же одиницях (наприклад, у годинах або хвилинах). Подвійний запис проводиться для зручності розрахунків ранніх і пізніх термінів початку й закінчення робіт. Інші стовпці заповнюють у процесі проведення розрахунків.

Таблиця 2.1

Подія		Робота	$t_{рп}(\alpha_{ij})$	t_{ij}	$t_{рз}(\alpha_{ij})$	Граф з раннім початком та закінченням робіт		$t_{пп}(\alpha_{ij})$	t_{ij}	$t_{пз}(\alpha_{ij})$	Граф з пізнім початком та закінченням робіт		$R_{повн}(\alpha_{ij})$
A_i	A_j												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A_0	A_1	α_{01}	0	1	1			2	1	3			2
A_0	A_{11}	α_{02}	0	2	2			1	2	3			1
A_0	A_3	α_{03}	0	3	3			0	3	3			0
A_1	A_2	α_{12}	1	0	1			3	0	3			2
A_2	A_4	α_{24}	2	1,5	3,5			4,5	1	6			2,5
A_2	A_5	α_{25}	2	2	4			3	2	5			1
A_3	A_6	α_{36}	3	2	5			3	2	5			0
A_4	A_7	α_{47}	3,5	0	3,5			6	0	6			2,5
A_5	A_6	α_{56}	4	0	4			5	0	5			1
A_6	A_7	α_{57}	5	1	6			5	1	6			0
A_6	A_8	α_{66}	5	2	7			8	2	10			3
A_7	A_9	α_{79}	6	2	8			6	2	8			0
A_8	A_{10}	$\alpha_{8,10}$	7	0	$\overline{7}$			10	0	10			3
A_9	A_{10}	$\alpha_{9,10}$	8	2	10			8	2	10			0
A_{10}	A_{11}	$\alpha_{10,11}$	10	2	12			10	2	12			0

Правила заповнення стовпців:

1. Четвертий і шостий стовпці заповнюють зліва направо і зверху вниз, починаючи з початкової події комплексу робіт, а сьомий і дев'ятий стовпці – справа наліво і знизу вверх, починаючи із завершальної події комплексу робіт.

2. Момент раннього закінчення будь-якої роботи визначають як суму моменту її раннього початку і тривалості роботи:

$$t_{рп}(\alpha_{ij}) = max_k t_{рз}(\alpha_{ki}). \quad (2.4)$$

3. Момент пізнього початку будь-якої роботи визначають як різницю між моментом пізнього закінчення і тривалістю роботи. Момент пізнього закінчення роботи дорівнює найменшому зі значень часу пізнього початку робіт, що безпосередньо виконуються за цією роботою:

$$t_{\text{пз}}(\alpha_{ij}) = min_j \, t_{\text{пп}}(\alpha_{jl}). \quad (2.5)$$

4. Повний резерв часу визначають як різницю між пізнім і раннім закінченням роботи або як різницю між пізнім і раннім початком роботи.

Приклад 2.2*.* Розрахувати табличним способом параметри сіткового графіка, зображеного на рис. 1.2.

Розв'язання. Складемо таблицю (див. табл. 2.1) для розрахунку параметрів сіткового графіка. Оскільки сітковий графік містить п'ятнадцять робіт, таблиця має п'ятнадцять рядків. Заповнимо перший, другий і третій стовпці. Початкові події запишемо в першому стовпці в порядку збільшення їх номерів. При цьому подію з одним і тим же порядковим номером записуємо стільки разів, скільки робіт виходить з цієї події. Наприклад, подія A_0 є початковою для трьох робіт, тому в першому стовпці її записуємо три рази. Що стосується завершальних подій, то їх записуємо в другому стовпці також у порядку збільшення номерів, але тільки в межах однієї і тієї ж початкової події. Так, якщо в першому стовпці тричі записали A_0, то в другому стовпці завершальні події записуємо в такому порядку: A_1, A_2, A_3.

У п'ятому й восьмому стовпцях запишемо значення тривалості робіт, які визначимо за сітковим графіком. Тут слід пам'ятати, що тривалість фіктивних робіт буде такою, що дорівнює нулю.

Почнемо заповнення четвертого й шостого стовпців, тобто визначаємо час раннього початку й раннього закінчення робіт. Як уже зазначалося вище, ці стовпці слід заповнювати зліва направо і зверху вниз від початкової події A_0 комплексу робіт.

Але для розглядуваного графіка подія A_0 є початковою подією трьох робіт: α_{01}, α_{02}, α_{03}. Запишемо в четвертому стовпці для цих робіт час раннього початку, який дорівнює нулю (момент здійснення події A_0). Для знаходження часу раннього закінчення, наприклад, роботи α_{01} підсумуємо значення, записані в четвертому й п'ятому стовпцях, та отриманий результат занесемо в шостий стовпець. Цю операцію показано стрілкою, яка веде зліва направо з четвертого в шостий стовпець. Виконаємо аналогічні дії щодо робіт α_{02} і α_{03}.

Таким чином, терміни раннього закінчення робіт, початком яких є подія A_0, визначено.

Четвертий і шостий стовпці заповнюємо за сформульованим вище правилом: момент раннього початку будь-якої роботи – це найбільший з часових термінів раннього закінчення робіт, які безпосередньо передують їй. Застосуємо це правило.

У табл. 2.1 роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$, $\boldsymbol{\alpha_{02}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{03}}$ передують роботі $\boldsymbol{\alpha_{12}}$, що розпочинається подією $\boldsymbol{A_1}$. У другому стовпці таблиці подію $\boldsymbol{A_1}$ записано тільки один раз (перший рядок). Отже, роботі $\boldsymbol{\alpha_{12}}$ безпосередньо передує тільки одна робота $\boldsymbol{\alpha_{01}}$, час раннього закінчення якої збігається з часом раннього початку роботи $\boldsymbol{\alpha_{12}}$. Тому значення часу раннього закінчення роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ перенесемо в четвертий стовпець як момент раннього початку роботи $\boldsymbol{\alpha_{12}}$. У таблиці цю операцію позначено стрілкою, яка веде з шостого в четвертий стовпець зверху вниз.

Наступною роботою в таблиці є робота $\boldsymbol{\alpha_{24}}$ з початковою подією $\boldsymbol{A_2}$. Подію $\boldsymbol{A_2}$ у другому стовпці записано двічі. Це означає, що роботі $\boldsymbol{\alpha_{24}}$ передують дві роботи: $\boldsymbol{\alpha_{02}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{12}}$. У шостому стовпці знаходимо значення часу раннього закінчення цих робіт, що дорівнюють 2 і 1 (у таблиці обведено суцільним і пунктирним кружками).

Згідно з правилом (2.4) моментом раннього початку роботи буде найбільше зі значень часу раннього закінчення попередніх робіт, тобто величина, що дорівнює 2. У шостому стовпці таблиці максимальне значення обведено суцільним кружком. Це значення переносимо в четвертий стовпець і в рядки, що відповідають роботам $\boldsymbol{\alpha_{24}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{25}}$, які розпочинаються з події $\boldsymbol{A_2}$.

Продовжуючи аналогічні міркування, заповнюємо четвертий і шостий стовпці. Напрямок переміщення по табл. 2.1 зображено стрілками. Початок переміщення позначено знаком ■, закінчення – знаком ▲.

Сьомий і дев'ятий стовпці заповнюємо, рухаючись по таблиці справа наліво і знизу вверх. Почнемо із завершальної події $\boldsymbol{A_{11}}$. Момент здійснення цієї події є моментом пізнього закінчення роботи $\boldsymbol{\alpha_{10,11}}$.

Запишемо значення часу пізнього закінчення роботи $\boldsymbol{\alpha_{10,11}}$ в останній комірці дев'ятого стовпця. Для визначення часу пізнього початку роботи необхідно від часу пізнього закінчення відняти тривалість роботи. У табл. 2.1 цю операцію показано стрілкою, що веде справа наліво з дев'ятого стовпця в сьомий.

Роботі $\boldsymbol{\alpha_{10,11}}$ передують роботи $\boldsymbol{\alpha_{9,10}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{8,10}}$, які завершуються подією $\boldsymbol{A_{10}}$. Іншими словами, для будь-якої з робіт $\boldsymbol{\alpha_{9,10}}$ або $\boldsymbol{\alpha_{8,10}}$ наступною є тільки одна робота. Це підтверджує аналіз першого стовпця, у якому подію $\boldsymbol{A_{10}}$ записано тільки один раз. Таким чином, згідно зі сформульованим вище правилом момент пізнього закінчення робіт $\boldsymbol{\alpha_{8,10}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{9,10}}$ дорівнюватиме моменту пізнього початку роботи $\boldsymbol{\alpha_{10,11}}$.

Користуючись стрілками, запишемо ці значення у відповідних комірках дев'ятого стовпця.

Переміщуючись поступово по таблиці справа наліво і зверху вниз, приходимо до роботи α_{56}, завершальною подією якої є подія A_6. Аналізуючи перший стовпець, визначаємо, що подія A_6 є наявною двічі. Це означає, що за роботою α_{56} (а також і за роботою α_{36}) наступними є дві роботи, що розпочинаються подією A_6. Відповідно до правила (2.5) часом пізнього закінчення роботи є найменше зі значень часу пізнього початку наступних робіт (це значення, що дорівнює 5, обведено суцільним кружком у сьомому стовпці).

Переносимо це значення до відповідних комірок дев'ятого стовпця. Аналогічно заповнюємо інші комірки сьомого й десятого стовпців. Порядок заповнення показано стрілками.

І нарешті, для заповнення останнього, дев'ятого стовпця табл. 2.1 визначаємо різницю значень сьомого й четвертого (або дев'ятого й шостого) стовпців.

Аналізуючи десятий стовпець, знаходимо роботи, резерв часу яких дорівнює нулю. Послідовність цих робіт – це критичний шлях

$$L_{кр} = (\alpha_{03} – \alpha_{35} – \alpha_{56} – \alpha_{67} – \alpha_{79} – \alpha_{9,10} – \alpha_{10,11}).$$

Завершуючи розгляд табличного способу розрахунку параметрів сіткового графіка, зазначимо, що цей спосіб є досить простим. За наявності певних навичок роботи з таблицями спосіб дає змогу розраховувати вручну сіткові графіки значної складності.

2.3. Графічний спосіб

Графічний спосіб зазвичай застосовується для розрахунку нескладних сіткових графіків. Його зміст полягає в тому, що всі параметри визначаються безпосередньо на сітковому графіку.

На сітковому графіку події зображуються кружками великого розміру (рис. 2.1), розділеними на чотири сектори: верхній – номер події, лівий – ранній термін здійснення події, правий – пізній термін здійснення події, нижній – резерв часу певної події. Чисельник дробу, записаного на початку стрілки, означає час раннього початку, а знаменник – час пізнього початку роботи.

Відповідно чисельник і знаменник дробу, записаного в кінці стрілки, відповідають часовим термінам раннього і пізнього закінчення роботи. Повний резерв часу записується з іншого боку стрілки.

Порядок розрахунку параметрів сіткового графіка полягає у виконанні таких кроків:

1. У лівому секторі кружка, який позначає початкову подію, записують час початку всього комплексу робіт. Це – час раннього початку всіх робіт, що починаються подією ***A₀***. Заповнення лівих секторів інших подій є аналогічним.

2. Праві сектори заповнюють у зворотному порядку – від завершальної події до початкової.

3. Моменти часу раннього і пізнього початку та закінчення робіт, а також резерв часу розраховують за наведеними вище формулами.

4. Повний резерв часу визначають як різницю між знаменником і чисельником дробу на початку або в кінці стрілки.

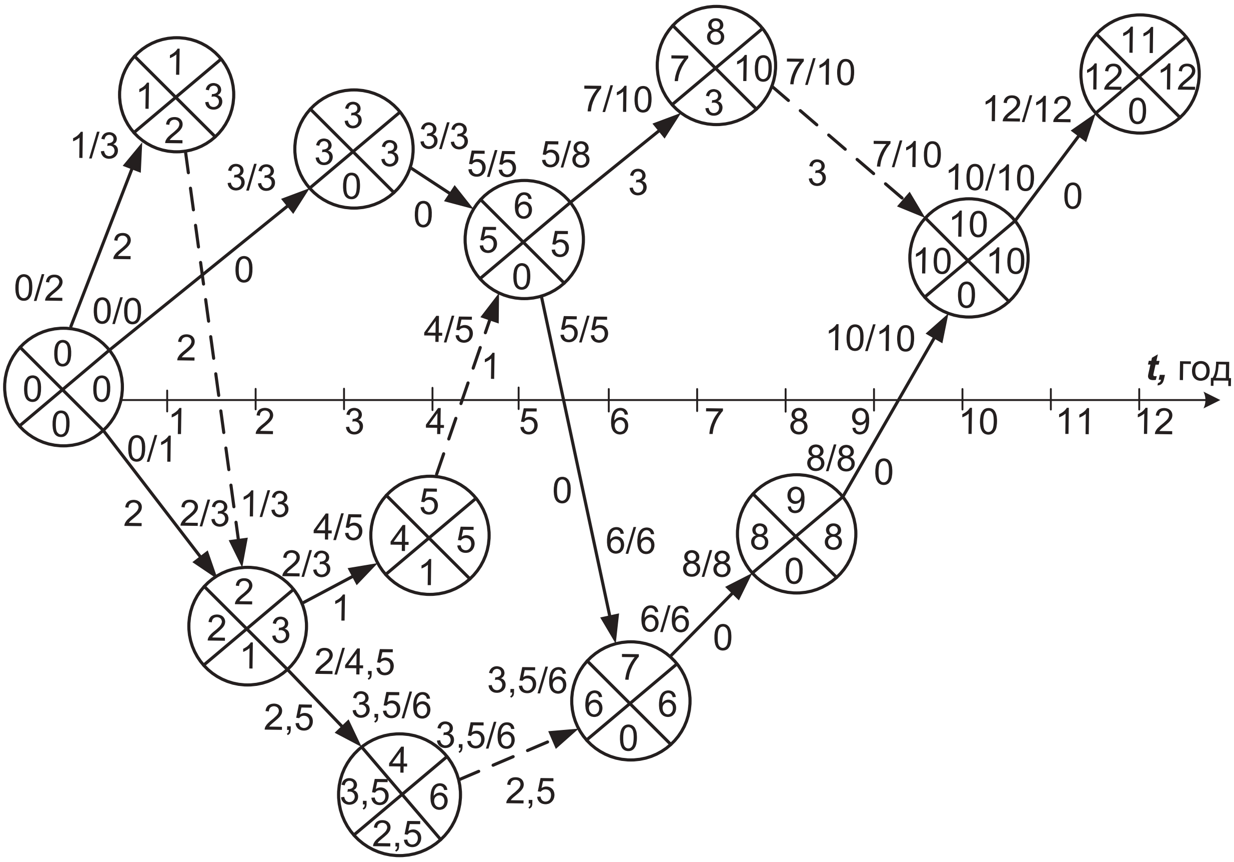

Рис. 2.1

Побудова сіткового графіка (див. рис. 2.1) і розрахунок його параметрів дає змогу визначити схему організації комплексу робіт, необхідний час на його проведення, виявити ті ланки, які потребують більшої уваги в процесі виконання робіт. Разом з тим, аналіз сіткового графіка поки не дає відповіді на запитання, чи є план комплексу робіт найкращим з огляду на будь-який критерій, і якщо не є, то що необхідно зробити, щоб він був дійсно найкращим.

Контрольні запитання

1. Які параметри сіткових графіків зазвичай розраховують?
2. Обґрунтуйте зміст аналітичного способу розрахунку параметрів сіткових графіків.
3. Обґрунтуйте зміст табличного способу розрахунку параметрів сіткових графіків.
4. Обґрунтуйте зміст графічного способу розрахунку параметрів сіткових графіків.
5. Опишіть сектори кружка події сіткового графіка.
6. Яким чином можна визначити повний резерв часу для роботи?
7. Поясніть порядок заповнення таблиці для розрахунку параметрів сіткового графіка табличним способом.
8. Визначте повні резерви тривалості робіт, заданих на сітковому графіку.
9. Визначте моменти раннього та пізнього початку робіт, заданих на сітковому графіку.
10. Визначте моменти раннього та пізнього закінчення робіт, заданих на сітковому графіку.

3. ОПТИМІЗАЦІЯ СІТКОВИХ ГРАФІКІВ

Завдання оптимізації сіткових графіків, по суті, є завданнями розподілу ресурсів між роботами комплексу (матеріальних засобів, робочої сили, фінансів тощо). Тривалість кожної роботи вочевидь залежить від кількості ресурсів, виділених на її виконання. Розподіляючи відповідним чином ресурси між роботами, можна забезпечити, наприклад, мінімальний час виконання комплексу робіт або мінімальну вартість витрачених матеріальних ресурсів і т. д.

Задачі оптимізації сіткових графіків (оптимальний розподіл обмежених ресурсів між роботами комплексу) – складні задачі. Їх розв´язання залежить від структури сіткового графіка, від виду цільової функції та обмежень. Часто їх можна звести до задач математичного програмування й розв´язати відомими методами [14–16]. Якщо цього зробити не вдається, залучаються евристичні методи, які в поєднанні з можливостями комп'ютерів забезпечують успішне розв´язання задач оптимізації.

Основні задачі оптимізації сіткових графіків:

− оптимізація за критерієм витрат ресурсів;
− оптимізація за критерієм економії ресурсів;
− оптимізація за часом.

Розглянемо методи розв’язання цих задач більш докладно.

3.1. Оптимізація сіткових графіків за критерієм витрат ресурсів

Нехай за результатами аналізу комплексу робіт побудовано сітковий графік і розраховано його параметри. Будемо вважати, що графік має один критичний шлях завдовжки $t_{кр}$. З іншого боку, наприклад, вищим органом керування може бути встановлено інший час виконання комплексу робіт $t_д$, причому $t_д < t_{кр}$.

Необхідно так організувати комплекс робіт, щоб виконати його в установлений термін. Зменшення часу (зменшення критичного шляху) забезпечується зменшенням тривалості критичних робіт, унаслідок чого критичний шлях сіткового графіка може залишитися незмінним або може змінитися. В останньому випадку змінюється структура сіткового графіка, тому що новий критичний шлях буде містити роботи графіка, які раніше були некритичними.

Розглянемо можливі напрямки зменшення часу виконання комплексу робіт за рахунок виділених додаткових ресурсів (або залучених ззовні, або внутрішніх резервів (перекидання ресурсів з одних робіт на інші)):

− зменшення тривалості критичних робіт без змінення топології сіткового графіка;

− зменшення тривалості критичних робіт зі зміненням топології сіткового графіка.

Цільовою функцією в цих задачах є сумарна кількість ресурсів, що залучаються для зменшення часу виконання комплексу робіт. Що ж стосується обмежень, то вони можуть накладатися на кількість залучених додаткових ресурсів, час виконання робіт тощо.

Для цієї задачі обмеження накладаються на ресурси, що залучаються для зменшення часу виконання робіт. Змістова постановка задачі полягає в такому. Задано директивний термін $t_д$ виконання комплексу робіт. За результатами аналізу сіткового графіка знаходять реальний час його виконання $t_{кр}$, причому $t_д < t_{кр}$. Тривалість робіт, які утворюють комплекс, можна зменшити, залучаючи для цього ресурси в обмеженій кількості. Виникає запитання: ≪До виконання яких робіт і в якій кількості необхідно залучити додаткові ресурси, щоб загальний час виконання робіт комплексу не перевищував $t_д$, а сумарні витрати додаткових ресурсів були мінімальними?≫

Проведемо формалізацію задачі. Довільну роботу комплексу будемо позначати через a_{ij}, а час її виконання – через t_{ij}. Якщо під час виконання роботи α_{ij} залучити додаткові ресурси в розмірі x_{ij}, то час виконання роботи зменшиться до величини t'_{ij}. Очевидно, що величина t'_{ij} залежить від обсягу додаткових ресурсів, що виділяються для виконання роботи α_{ij} :

$$t'_{ij} = f(x_{ij}). \tag{3.1}$$

Оскільки ресурси, що виділяються додатково на виконання роботи α_{ij}, є обмеженими, виконуються такі нерівності:

$$x_{ij} \leq h_{ij}; \tag{3.2}$$

$$x_{ij} \geq 0. \tag{3.3}$$

де h_{ij} − максимальний обсяг додаткових ресурсів, які можуть бути виділені на виконання роботи α_{ij}. Нерівність (3.3) означає, що за фізичною природою (інструменти, прилади, техніка тощо) ресурси не можуть вимірюватися від´ємними величинами.

Позначимо довільну критичну роботу через $\alpha_{ij_{\text{кр}}}$, а її тривалість – через $t_{ij_{\text{кр}}}$. Тоді з урахуванням уведених позначень час виконання комплексу робіт (довжина критичного шляху) без використання додаткових ресурсів визначається формулою

$$t_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} t_{ij} = \sum_{\alpha_{ij_{\text{кр}}}} t_{ij_{\text{кр}}}, \tag{3.4}$$

а після залучення додаткових ресурсів

$$t'_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij} \in L'_{\text{кр}}} t'_{ij} = \sum_{\alpha_{ij_{\text{кр}}}} t'_{ij_{\text{кр}}}$$

або з урахуванням (3.1)

$$t'_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij} \in L'_{\text{кр}}} f(x_{ij}). \tag{3.5}$$

Вираз $\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}$ означає, що підсумовування в (3.4) і (3.5) проводиться для робіт, що належать критичному шляху $L_{\text{кр}}$ (або $L'_{\text{кр}}$ − критичному шляху сіткового графіка після використання додаткових ресурсів).

За умовою задачі новий термін виконання комплексу робіт $t'_{\text{кр}}$ не має перевищувати $t_{\text{д}}$:

$$\sum_{\alpha_{ij} \in L'_{\text{кр}}} f(x_{ij}) \leq t_{\text{д}}. \quad (3.6)$$

З іншого боку, сумарні витрати ресурсів визначають так:

$$F(\overline{x}) = \sum_{\alpha_{ij} \in L'_{\text{кр}}} x_{ij}. \quad (3.7)$$

Тоді задачу оптимізації сіткового графіка можна сформулювати таким чином: знайти невід'ємні значення змінних x_{ij}, які задовольняють обмеженням (3.2) і (3.6) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.7).

На перший погляд, сформульована задача нагадує задачу лінійного програмування [14, 16]. Справді, цільова функція (3.7) являє собою лінійну функцію змінних x_{ij}, обмеження (3.2) є лінійними нерівностями. Разом з тим, обмеження (3.6) у загальному випадку є нелінійним, тому що функція $f(x_{ij})$ має нелінійний характер. Тому ця задача в загальному випадку є задачею нелінійного програмування, і для її розв´язання необхідно використовувати відповідні методи.

Приклад 3.1*.* Комплекс робіт зображено у вигляді сіткового графіка (рис. 3.1). Час виконання комплексу робіт $t_{кр}$ = 8 год. Цей час необхідно зменшити до $t_{\text{д}}$ = 6 год, для чого для виконання критичних робіт α_{35} і α_{36} можна залучити не більше 4 і 9 од. додаткових ресурсів відповідно. Залежність тривалості роботи від величини додаткових ресурсів визначається виразом

$$t'_{ij} = t_{ij} e^{-c_{ij} x_{ij}}, \quad (3.8)$$

де t_{ij} – тривалість роботи α_{ij} без залучення додаткових ресурсів;

t'_{ij} – тривалість роботи α_{ij} із залученням додаткових ресурсів;

x_{ij} – кількість додатково залучених ресурсів;

c_{ij} – коефіцієнт.

Яку кількість додаткових ресурсів необхідно залучити, щоб виконати комплекс робіт у заданий термін $t_{\text{д}}$ при мінімальній сумарній витраті додаткових ресурсів, якщо c_{35} = 0,1 і c_{56} = 0,2?

. *Розв’язання.* З рис. 3.1 випливає, що критичний шлях сіткового графіка являє собою послідовність робіт

$$L_{кр} = (\alpha_{03} - \alpha_{35} - \alpha_{56} - \alpha_{67}).$$

Визначаємо довжину критичного шляху:

$$t_{кр} = t_{03} + t_{35} + t_{56} + t_{67} = 8 \text{ год}.$$

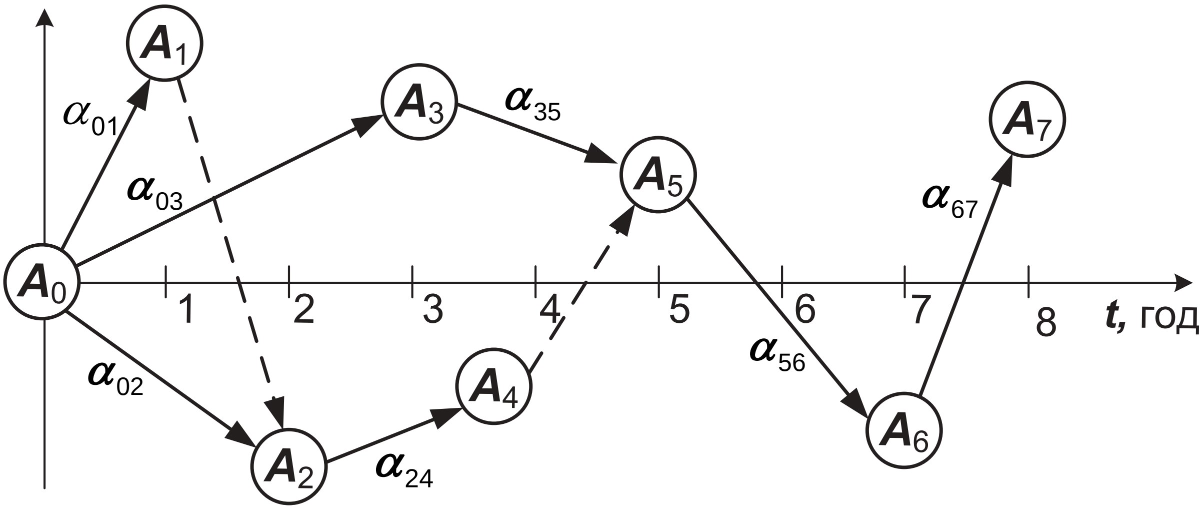

Рис. 3.1

Якщо для виконання роботи α_{35} залучити додаткові ресурси в кількості x_{35} одиниць, а до виконання роботи α_{56} – додаткові ресурси в кількості x_{56} одиниць, то з урахуванням (3.8) довжина критичного шляху буде такою:

$$t'_{\text{кр}} = t_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t_{67} =$$

$$= t_{03} + t_{35}e^{-0,1x_{35}} + t_{56}e^{-0,2x_{56}} + t_{67} =$$

$$= 3 + 2e^{-0,1x_{35}} + 2e^{-0,2x_{56}} + 1 = 4 + 2e^{-0,1x_{35}} + 2e^{-0,2x_{56}}.$$

За умовою задачі ця величина має бути меншою від директивного часу $t_{\text{д}}$, тобто

$$4 + 2e^{-0,1x_{35}} + 2e^{-0,2x_{56}} \le 6$$

або

$$e^{-0,1x_{35}} + e^{-0,2x_{56}} \le 1. \qquad (3.9)$$

З іншого боку, на обсяг додаткових ресурсів накладаються обмеження

$$\boldsymbol{x_{35}} \le 4; \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{x_{56}} \le 9. \tag{3.11}$$

Сумарні витрати додаткових ресурсів

$$\boldsymbol{F(\overline{x})} = \boldsymbol{x_{35}} + \boldsymbol{x_{56}} \tag{3.12}$$

Тепер задачу можна сформулювати таким чином: знайти такі невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x_{35}}$ і $\boldsymbol{x_{56}}$, які задовольняють обмеженням (3.9)–(3.11) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.12).

Обмеження (3.9) є суто нелінійним, тому задача мінімізації цільової функції (3.12) при обмеженнях (3.10)–(3.11) є задачею нелінійного програмування.

Оскільки обмеження й цільова функція є неперервними й диференційовними функціями, задача належить до класичних задач нелінійного програмування й може бути розв´язана, зокрема, методом невизначених множників Лагранжа [16]. Однак з огляду на те, що обмеження (3.9)–(3.11) є нерівностями, розв´язання задачі методом множників Лагранжа є досить громіздким.

Розв´яжемо цю задачу графічним методом, аналогічним графічному методу розв'язання задач лінійного програмування [2, 10, 14]. В обмеженнях задачі перейдемо від нерівностей до рівнянь. Оскільки до змінних задачі ставиться вимога невід'ємності, додамо до лівої частини кожної з нерівностей (3.9)–(3.11) додатні величини $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$, $\boldsymbol{y_3}$ відповідно. Тоді задача перетворюється до вигляду: знайти невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x_{35}}$, $\boldsymbol{x_{56}}$, $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$, $\boldsymbol{y_3}$, що задовольняють обмеженням

$$\boldsymbol{e^{-0,1x_{35}}} + \boldsymbol{e^{-0,2x_{56}}} + \boldsymbol{y_1} = 1,$$
$$\boldsymbol{x_{35}} + \boldsymbol{y_2} = 4,$$
$$\boldsymbol{x_{56}} + \boldsymbol{y_3} = 9$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.12).

Виразимо змінні $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$, $\boldsymbol{y_3}$ через $\boldsymbol{x_{35}}$ і $\boldsymbol{x_{56}}$:

$$\boldsymbol{y_1} = 1 - \boldsymbol{e^{-0,1x_{35}}} - \boldsymbol{e^{-0,2x_{56}}};$$
$$\boldsymbol{y_2} = 4 - \boldsymbol{x_{35}};$$

$$\boldsymbol{y_3} = 9 - \boldsymbol{x_{56}}.$$

У координатах $\boldsymbol{x_{35}}0\boldsymbol{x_{56}}$ побудуємо область допустимих розв´язків задачі, тобто область, обмежену лініями $\boldsymbol{y_1} = 0$, $\boldsymbol{y_2} = 0$, $\boldsymbol{y_3} = 0$, кожна точка якої задовольняє вимогу невід'ємності змінних (рис. 3.2).

Цільова функція $\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{x}})$ у координатах $\boldsymbol{x_{35}}0\boldsymbol{x_{56}}$ являє собою пряму, що проходить через початок координат. Для того щоб визначити напрямок переміщення прямої $\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_{35}}, \boldsymbol{x_{56}})$ у бік зменшення цільової функції, побудуємо антиградієнт функції $\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{x}})$:

$$-\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \left(-\frac{\partial \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{x}})}{\partial \boldsymbol{x_{35}}}; -\frac{\partial \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{x}})}{\partial \boldsymbol{x_{56}}}\right) = (-1; -1).$$

Неважко переконатися, що якщо почати переміщення прямої $\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{x}})$ у напрямку антиградієнта з точки $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{3}}$ області допустимих розв'язків, то оптимальним розв'язок буде в точці $\overline{\boldsymbol{x}}^*$. У цій точці перетинаються лінії $\boldsymbol{y_1} = 0$ і $\boldsymbol{y_2} = 0$, тобто

$$1 - \boldsymbol{e}^{-0{,}1\boldsymbol{x}_{35}^*} - \boldsymbol{e}^{-0{,}2\boldsymbol{x}_{56}^*} = 0;$$
$$4 - \boldsymbol{x}_{35}^* = 0.$$

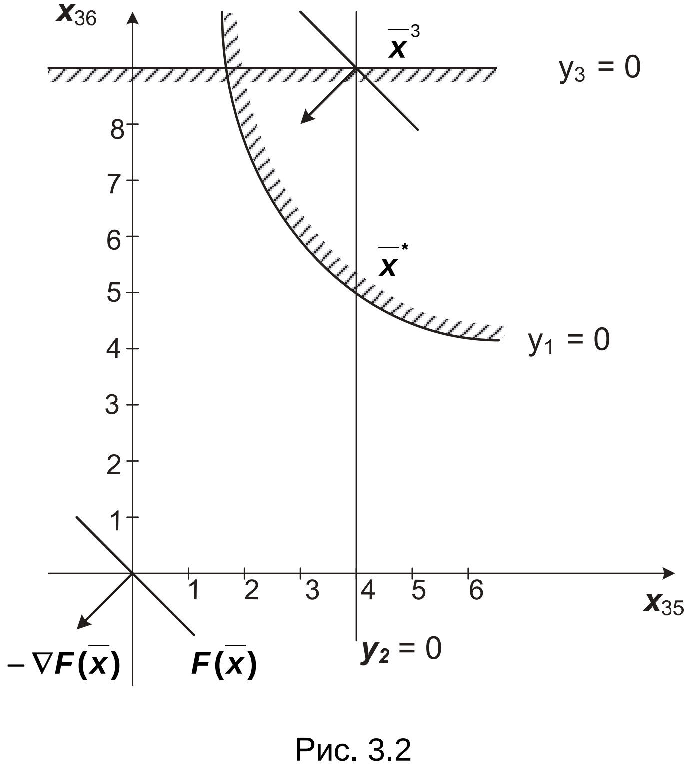

Рис. 3.2

З другого рівняння випливає, що $x_{35} = 4$. Підстановка цього значення в перше рівняння дає $x_{56}^* = 5{,}5$.

Таким чином, унаслідок розв'язання задачі показано, що з метою зменшення часу виконання комплексу робіт для виконання роботи α_{35} необхідно залучити 4 од. додаткових ресурсів, а для виконання роботи α_{56} − 5,6 од. При цьому тривалість роботи α_{35} зменшиться до величини

$$t_{35}' = t_{35}e^{-0{,}1\cdot 4} = 1{,}34 \text{ год},$$

а тривалість роботи α_{56} − до величини

$$t_{56}' = t_{56}e^{-0{,}2\cdot 5{,}5} = 0{,}66 \text{ год}.$$

Загальний час виконання комплексу робіт буде таким:

$$t_{\text{кр}}' = t_{03} + t_{35}' + t_{56}' + t_{67} = 3 + 1{,}34 + 0{,}66 + 1 = 6 \text{ год},$$

що задовольняє директивні вимоги. Сумарні витрати додаткових ресурсів будуть мінімальними:

$$F_{min}(\overline{x}) = x_{35}^* + x_{56}^* = 9{,}5 \text{ од}.$$

На практиці збереження критичного шляху сіткового графіка під час розв´язання задачі оптимізації забезпечується порівняно невеликими змінами тривалості критичних робіт [2]. У цьому випадку можна вважати, що тривалість виконання роботи лінійно залежить від кількості додатково залучених ресурсів [2]. Тоді вираз (3.1), зокрема, можна подати у вигляді такої залежності:

$$t_{ij}' = f(x_{ij}) = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij}). \tag{3.13}$$

Тепер задача мінімізації цільової функції (3.7) при обмеженнях (3.2), (3.3) і (3.13) являє собою задачу лінійного програмування.

Приклад 4.2. Комплекс робіт задано сітковим графіком, зображеним на рис. 3.1. Залежність тривалості робіт від додатково витрачених ресурсів визначається виразом (3.13). Кількість додатково залучених ресурсів є обмеженою: для роботи α_{03} – 5 од., для роботи α_{35} – 4 од., для роботи α_{56} – 2 од. і для роботи α_{67} – 2 од.

Яку кількість ресурсів і на які роботи необхідно додатково залучити, щоб при мінімальних сумарних затратах ресурсів комплекс робіт було виконано за час, що не перевищує 6 год? Коефіцієнти c_{ij} для критичних робіт набувають таких значень: c_{03} = 0,067; c_{35} = 0,05; c_{56} = 0,15; c_{67} = 0,4.

Розв'язання. Позначимо через x_{ij} кількість додаткових ресурсів, які виділяються для виконання роботи α_{ij}. Тоді тривалості критичних робіт будуть визначатися з урахуванням виразу (3.13) таким чином:

$$t'_{03} = t_{03}(1 - c_{03}x_{03}) = 3(1 - 0{,}067x_{03});$$

$$t'_{35} = t_{35}(1 - c_{35}x_{35}) = 2(1 - 0{,}05x_{35});$$

$$t'_{56} = t_{56}(1 - c_{56}x_{56}) = 2(1 - 0{,}15x_{56});$$

$$t'_{67} = t_{67}(1 - c_{67}x_{67}) = 1(1 - 0{,}4x_{67}).$$

Загальний час виконання комплексу робіт з використанням додаткових ресурсів визначається формулою

$$t'_{\text{кр}} = t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67} = 8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - \\ - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67}. \tag{3.14}$$

За умовою задачі цей час має бути не більшим за 6 год:

$$8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67} \le 6. \tag{3.15}$$

Обмеження на додаткові ресурси запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} x_{03} &\le 5; \\ x_{35} &\le 4; \\ x_{56} &\le 2; \\ x_{67} &\le 2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Загальні сумарні витрати додаткових ресурсів

$$F(\overline{x}) = x_{03} + x_{35} + x_{56} + x_{67}. \tag{3.17}$$

Тепер задача формулюється таким чином: знайти невід'ємні значення змінних x_{03}, x_{35}, x_{56}, x_{67}, які задовольняють обмеженням (3.15) і (3.16) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.17). Цю задачу розв’язуємо з використанням методів лінійного програмування.

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь, для чого введемо додаткові невід'ємні змінні $y_1 - y_5$:

$$8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67} + y_1 = 6;$$

$$x_{03} + y_2 = 5;$$

$$x_{35} + y_3 = 4;$$

$$x_{56} + y_4 = 2;$$

$$x_{67} + y_5 = 2.$$

У задачі є $n = 9$ змінних і $m = 5$ рівнянь-обмежень. Розв´яжемо задачу табличним симплекс-методом [2, 14]. Як вільні змінні виберемо x_{03}, x_{35}, x_{56}, x_{67}. Решту змінних (базисних) виразимо через вільні у формі, призначеній для заповнення симплекс-таблиць:

$$y_1 = -2 - (-0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67});$$

$$y_2 = 5 - (x_{03});$$

$$y_3 = 4 - (x_{35});$$

$$y_4 = 2 - (x_{56});$$

$$y_5 = 2 - (x_{67}).$$

Цільова функція має такий вигляд:

$$F(\overline{x}) = 0 - (-x_{03} - x_{35} - x_{56} - x_{67}).$$

Послідовність симплекс-таблиць 3.1−3.4 відповідає різним крокам розв´язання задачі.

Таблиця 3.1

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	x_{56}	$\overleftarrow{x_{67}}$
$F(\overline{x})$	0	−1	−1	−1	−1
y_1	−2	−0,2	−0,1	−0,3	−0,4
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
y_4	2	0	0	1	0
↑ y_5	2	0	0	0	$\boxed{1}$

Таблиця 3.2

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	$\overleftarrow{x_{56}}$	y_5
$F(\overline{x})$	2	−1	−1	−1	1
y_1	−1.2	−0,2	−0,1	−0,3	0,4
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
↑ y_4	2	0	0	$\boxed{1}$	0
x_{67}	2	0	0	0	1

Таблиця 3.3

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	$\overleftarrow{x_{03}}$	x_{35}	y_4	y_5
$F(\overline{x})$	4	−1	−1	1	1
↑ y_1	−0,6	$\overleftarrow{-0{,}2}$	−0,1	0,3	0,4
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
x_{56}	2	0	0	1	0
x_{67}	2	0	0	0	$\boxed{1}$

Таблиця 3.4

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	y_1	x_{35}	y_4	y_5
$F(\overline{x})$	7	−5	−0,5	−0,5	−1
x_{03}	3	−5	0,5	−1,5	−2
y_2	2	5	−0,5	1,5	2
y_3	4	0	1	0	0
x_{56}	2	0	0	1	0
x_{67}	2	0	0	0	1

Таким чином, оптимальним розв´язком задачі є такі значення змінних:

$$x_{03}{}^* = 3;\ x_{35}{}^* = 0;\ x_{56}{}^* = 2;\ x_{67}{}^* = 2.$$

Це означає, що для зменшення часу виконання комплексу робіт на роботу α_{03} необхідно витратити 3 од. додаткових ресурсів, на роботу α_{56} − 2 од. Для виконання роботи α_{35} додаткові ресурси залучати недоцільно.

Знайдемо час виконання комплексу робіт:

$$t'_{кр} = t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67} = t_{03}(1 - c_{03}x^*_{03}) +$$
$$+\ t_{35}(1 - c_{35}x^*_{35}) + t_{56}(1 - c_{56}x^*_{56}) + t_{67}(1 - c_{67}x^*_{67}) =$$
$$= 3(1 - 0{,}067\cdot 3) + 2 + 2(1 - 0{,}15\cdot 2) + 1(1 - 0{,}4\cdot 2) = 6 \text{ год.}$$

Мінімальні сумарні витрати при цьому визначаємо так:

$$F_{min}(\overline{x}) = x^*_{03} + x^*_{35} + x^*_{56} + x^*_{67} = 7 \text{ од.}$$

У розглянутих вище задачах обмеження накладалися тільки на додаткові ресурси. Разом з тим, на практиці суттєву роль можуть відігравати й обмеження на тривалість тієї чи іншої роботи. Справді, зменшувати час виконання критичних робіт, наприклад, можна до певних меж, за якими відбувається змінення критичного шляху сіткового графіка. Обмеження на тривалість роботи зазвичай виражається у вигляді нерівності

$$t'_{ij} \geq T_{ij}, \tag{3.18}$$

де T_{ij} − мінімально допустимий час виконання роботи α_{ij}.

Тоді задачу оптимізації сіткового графіка можна сформулювати так: знайти невід'ємні значення змінних x_{ij}, що задовольняють обмеженням (3.2), (3.14) і (3.18) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.7).

Приклад 3.3. Розв´язати завдання 3.2 при таких обмеженнях: h_{03} = 5; h_{35} = 4; h_{56} = 2; h_{67} = 2; T_{03} = 2 год; T_{35} = 1,6 год; T_{56} = = 1,2 год; T_{67} = 0,4 год. Директивний термін виконання комплексу робіт становить не більше 6 год.

Розв'язання. Як і раніше, через x_{ij} позначимо витрати додаткових ресурсів під час виконання роботи α_{ij}. Тоді тривалості критичних робіт відповідно до (3.13) і з урахуванням значень C_{ij} будуть визначатися виразами

$$t'_{03} = 3(1 - 0{,}067x_{03});$$
$$t'_{35} = 2(1 - 0{,}05x_{35});$$
$$t'_{56} = 2(1 - 0{,}15x_{56});$$
$$t'_{67} = 3(1 - 0{,}4x_{67}).$$

Визначимо обмеження задачі. Згідно з (3.14), (3.2) і (3.8) отримаємо

$$\begin{gathered} 8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67} \le 6; \\ x_{03} \le 5; \\ x_{35} \le 4; \\ x_{56} \le 2; \\ x_{67} \le 2; \\ 3 - 0{,}2x_{03} \ge 2; \\ 2 - 0{,}1x_{35} \ge 1{,}6; \\ 2 - 0{,}3x_{56} \ge 1{,}2; \\ 1 - 0{,}4x_{67} \ge 0{,}4. \end{gathered} \qquad (3.19)$$

Цільова функція цієї задачі має вигляд

$$F(\overline{x}) = x_{03} + x_{35} + x_{56} + x_{67}.$$

Пошук мінімуму цільової функції $F(\overline{x})$ при обмеженнях (3.19) являє собою задачу лінійного програмування.

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь:

$$8 - 0{,}2x_{03} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3x_{56} - 0{,}4x_{67} + y_1 = 6;$$
$$x_{03} + y_2 = 5;$$
$$x_{35} + y_3 = 4;$$
$$x_{56} + y_4 = 2;$$
$$x_{67} + y_5 = 2;$$
$$3 - 0{,}2x_{03} + y_6 = 2;$$

$$2 - 0{,}1\boldsymbol{x_{35}} + \boldsymbol{y_7} = 1{,}6;$$

$$2 - 0{,}3\boldsymbol{x_{56}} + \boldsymbol{y_8} = 1{,}2;$$

$$1 - 0{,}4\boldsymbol{x_{67}} + \boldsymbol{y_9} = 0{,}4.$$

Подамо обмеження та цільову функцію в такому вигляді:

$$\boldsymbol{y_1} = -2 - (-0{,}2\boldsymbol{x_{03}} - 0{,}1x_{35} - 0{,}3\boldsymbol{x_{56}} - 0{,}4\boldsymbol{x_{67}});$$

$$\boldsymbol{y_2} = 5 - (\boldsymbol{x_{03}});$$

$$\boldsymbol{y_3} = 4 - (\boldsymbol{x_{35}});$$

$$\boldsymbol{y_4} = 2 - (\boldsymbol{x_{56}});$$

$$\boldsymbol{y_5} = 2 - (\boldsymbol{x_{67}});$$

$$\boldsymbol{y_6} = 1 - (0{,}2\boldsymbol{x_{03}});$$

$$\boldsymbol{y_7} = 0{,}4 - (0{,}1\boldsymbol{x_{35}});$$

$$\boldsymbol{y_8} = 0{,}8 - (0{,}3\boldsymbol{x_{56}});$$

$$\boldsymbol{y_9} = 0{,}6 - (0{,}4\boldsymbol{x_{67}});$$

$$\boldsymbol{F(\overline{x})} = 0 - (-\boldsymbol{x_{03}} - \boldsymbol{x_{35}} - \boldsymbol{x_{56}} - \boldsymbol{x_{67}}).$$

Розв´язком задачі є послідовність симплекс-таблиць 3.5−3.8.

Таблиця 3.5

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	x_{56}	$\overleftarrow{x_{67}}$
$\boldsymbol{F(\overline{x})}$	0	−1	−1	−1	−1
$\boldsymbol{y_1}$	−2	−0,2	−0,1	−0,3	−0,4
$\boldsymbol{y_2}$	5	1	0	0	0
$\boldsymbol{y_3}$	4	0	1	0	0
$\boldsymbol{y_4}$	2	0	0	1	0
$\boldsymbol{y_5}$	2	0	0	0	1
$\boldsymbol{y_6}$	1	0,2	0	0	0
$\boldsymbol{y_7}$	0,4	0	0,1	0	0
$\boldsymbol{y_8}$	0,8	0	0	0,3	0
$\uparrow \boldsymbol{y_9}$	0,6	0	0	0	$\boxed{0{,}4}$

Таблиця 3.6

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	$\overleftarrow{x_{56}}$	y_9
$\boldsymbol{F(\overline{x})}$	1,5	−1	−1	−1	2,5
$\boldsymbol{y_1}$	−1,4	−0,2	−0,1	−0,3	1
$\boldsymbol{y_2}$	5	1	0	0	0
$\boldsymbol{y_3}$	4	0	1	0	0
$\uparrow \boldsymbol{y_4}$	2	0	0	$\boxed{1}$	0
$\boldsymbol{y_5}$	0,5	0	0	0	−2,5
$\boldsymbol{y_6}$	1	0,2	0	0	0
$\boldsymbol{y_7}$	0,4	0	0,1	0	0
$\boldsymbol{y_8}$	0,8	0	0	0,3	0
$\boldsymbol{x_{67}}$	1,5	0	0	0	2,5

Таблиця 3.7

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	$\overleftarrow{x_{03}}$	x_{35}	y_4	y_9
$F(\overline{x})$	3,5	−1	-1	1	2,5
↑ y_1	−0,8	$\boxed{-0{,}2}$	−0,1	−0,3	1
y_2	5	1	0	0	0
y_3	4	0	1	0	0
x_{56}	2	0	0	1	0
y_5	0,5	0	0	0	−2,5
y_6	1	1,2	0	0	0
y_7	0,4	0	0,1	0	0
y_8	0,2	0	0	0,3	0
x_{67}	1,5	0	0	0	2,5

Таблиця 3.8

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	y_1	x_{35}	y_4	y_9
$F(\overline{x})$	7,5	−5	−0,5	−0,5	−2,5
x_{03}	4	5	0,5	−1,5	−5
y_2	1	5	−0,5	1,5	5
y_3	4	0	1	0	0
x_{56}	2	0	0	1	0
y_5	0,5	0	0	0	-2,5
y_6	0,2	−5	−0,1	0,3	1
y_7	0,4	0	0,1	0	0
y_8	0,2	0	0	0,3	0
x_{67}	1,5	0	0	0	2,5

Оптимальним розв´язком задачі є такі значення додаткових ресурсів: x^*_{03} = 4; x^*_{03} = 4; x^*_{35} = 0; x^*_{56} =2; x^*_{67} = 1,5. Це означає, що з метою зменшення часу виконання комплексу робіт додаткові ресурси для робіт x_{03}, x_{56} і x_{67} необхідно залучити 4, 2 і 1,5 од. відповідно. Для виконання роботи x_{35} додаткові ресурси залучати недоцільно. При цьому тривалості робіт x_{03}, x_{56} і x_{67} скорочуються до величин

$$t'_{03} = 3(1 - 0{,}067 \cdot 4) = 2{,}2 \text{ год};$$

$$t'_{56} = 2(1 - 0{,}15 \cdot 4) = 1{,}4 \text{ год};$$

$$t'_{67} = 1(1 - 0{,}4 \cdot 1{,}5) = 0{,}4 \text{ год},$$

що відповідає заданим обмеженням

$$t'_{03} \geq 2; \; t'_{56} \geq 1{,}2; \; t'_{67} \geq 0{,}4.$$

Загальний час виконання комплексу робіт зменшиться до величини

$$t'_{\text{кр}} = t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67} = 6 \text{ год}.$$

Сумарний об’єм додаткових ресурсів

$$F_{min}(\overline{x}) = 7{,}5 \text{ од}.$$

Коефіцієнти c_{ij} у виразах (3.8) і (3.13) показують, на яку частину зменшиться час виконання роботи α_{ij}, якщо додатково залучити одну одиницю ресурсу. На практиці є задачі, у яких задається кількість ресурсів

$\boldsymbol{d_{ij}}$, які необхідно залучити для зменшення тривалості виконання роботи на одиницю часу (наприклад, на одну годину). Тоді задачу оптимізації сіткового графіка за критерієм витрати ресурсів можна сформулювати інакше: *знайти проміжок часу, на який доцільно зменшити час виконання кожної з критичних робіт*, *щоб час виконання комплексу не перевищував заданого значення при мінімальній витраті додаткових ресурсів.*

Позначимо через $\boldsymbol{\tau_{ij}}$ невідомий інтервал часу, на який необхідно зменшити час виконання роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$. Тоді новий час виконання роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ визначається формулою

$$\boldsymbol{t'_{ij} = t_{ij} - \tau_{ij}}. \tag{3.20}$$

Для зменшення часу виконання роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ до величини $\boldsymbol{t'_{ij}}$ додатково потребуються ресурси в кількості

$$\boldsymbol{z_{ij} = d_{ij}\tau_{ij}}. \tag{3.21}$$

Загальний час виконання комплексу робіт із залученням додаткових ресурсів визначається формулою

$$\boldsymbol{t'}_{\text{кр}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ii}} \in \boldsymbol{L'}_{\text{кр}}} \boldsymbol{t'_{ij}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ij}}_{\text{кр}} \in \boldsymbol{L}_{\text{кр}}} (\boldsymbol{t_{ij}} - \boldsymbol{\tau_{ij}}) = \boldsymbol{t}_{\text{кр}} - \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ij}} \in \boldsymbol{L}_{\text{кр}}} \boldsymbol{\tau_{ij}} \tag{3.22}$$

і має бути не більшим за директивний термін $\boldsymbol{t}_{\text{д}}$:

$$\boldsymbol{t}_{\text{кр}} - \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ii}} \in \boldsymbol{L}_{\text{кр}}} \boldsymbol{\tau_{ij}} \le \boldsymbol{t}_{\text{д}}. \tag{3.23}$$

На тривалості робіт і додаткові ресурси накладаються обмеження

$$\boldsymbol{t'_{ij} = t_{ij} - \tau_{ij} \ge T_{ij}}; \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{z_{ij} = d_{ij}\tau_{ij} \le h_{ij}}. \tag{3.25}$$

Сумарні витрати додаткових ресурсів

$$\boldsymbol{z(\overline{\tau})} = \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ii}} \in \boldsymbol{L'}_{\text{кр}}} \boldsymbol{z_{ij}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha_{ii}} \in \boldsymbol{L'}_{\text{кр}}} \boldsymbol{d_{ij}\tau_{ij}}. \tag{3.26}$$

Тепер задачу можна сформулювати таким чином: знайти невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{\tau_{ij}}$, які задовольняють обмеженням (3.23)-(3.25) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.26).

Приклад 3.4. Комплекс робіт задано сітковим графіком (рис. 3.1). З метою зменшення часу виконання комплексу робіт для виконання робіт $\boldsymbol{\alpha_{03}}$, $\boldsymbol{\alpha_{35}}$, $\boldsymbol{\alpha_{56}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{67}}$ можна залучити такі додаткові ресурси: більше 5; 4; 2 і 2 од. відповідно.

Для зменшення тривалості робіт на 1 год витрачаються додаткові ресурси: для роботи $\boldsymbol{\alpha_{03}}$ − 5 од.; для роботи $\boldsymbol{\alpha_{35}}$ − 10 од.; для роботи $\boldsymbol{\alpha_{56}}$ − 3,33 од., для роботи $\boldsymbol{\alpha_{67}}$ − 2,5 од. На який проміжок часу необхідно зменшити тривалість кожної критичної роботи, щоб виконати комплекс робіт за час, що не перевищує 6 год, при мінімальній сумарній витраті додаткових ресурсів?

Розв'язання. Мінімально допустимий час виконання робіт: $\boldsymbol{T_{03}}$ = 2 год; $\boldsymbol{T_{35}}$ = 1,6 год; $\boldsymbol{T_{56}}$ = 1,2 год; $\boldsymbol{T_{67}}$ = 1,2 год. Якщо позначити через $\boldsymbol{\tau_{ij}}$ інтервал часу, на який необхідно зменшити тривалість роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$, то новий час виконання критичних робіт можна записати у вигляді співвідношень

$$\boldsymbol{t'_{03} = t_{03} - \tau_{03}};$$
$$\boldsymbol{t'_{56} = t_{56} - \tau_{56}};$$
$$\boldsymbol{t'_{35} = t_{35} - \tau_{35}};$$
$$\boldsymbol{t'_{67} = t_{67} - \tau_{67}}.$$

Час виконання всього комплексу робіт з урахуванням додаткових ресурсів визначаємо за формулою

$$\boldsymbol{t'}_{\text{кр}} = \boldsymbol{t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67}} = 8 - \boldsymbol{\tau_{03} - \tau_{35} - \tau_{56} - \tau_{67}}.$$

Витрати додаткових ресурсів, що залучаються під час виконання критичних робіт, визначаються такими виразами:

$$\boldsymbol{z_{03} = d_{03}\tau_{03}} = 5\boldsymbol{\tau_{03}};$$
$$\boldsymbol{z_{35} = d_{ij}\tau_{35}} = 10\boldsymbol{\tau_{35}};$$
$$\boldsymbol{z_{56} = d_{56}\tau_{56}} = 3{,}33\boldsymbol{\tau_{56}};$$
$$\boldsymbol{z_{67} = d_{67}\tau_{67}} = 2{,}5\boldsymbol{\tau_{67}}.$$

Сумарні витрати додаткових ресурсів

$$z(\overline{\tau}) = 5\tau_{03} + 10\tau_{35} + 3{,}33\tau_{56} + 2{,}5\tau_{67}. \quad (3.27)$$

Обмеження накладаються:
- на час виконання комплексу робіт:

$$8 - \tau_{03} - \tau_{35} - \tau_{56} - \tau_{67} \le 6; \quad (3.28)$$

- на величину додаткових ресурсів:

$$\begin{aligned} 5\tau_{03} &\le 5; \\ 10\tau_{35} &\le 4; \\ 3{,}33\tau_{56} &\le 2; \\ 2{,}5\tau_{67} &\le 2; \end{aligned} \quad (3.29)$$

- на тривалість кожної з критичних робіт:

$$\begin{aligned} 3 - \tau_{03} &\ge 2; \\ 2 - \tau_{35} &\ge 1{,}5; \\ 2 - \tau_{56} &\ge 1{,}2; \\ 1 - \tau_{67} &\ge 0{,}4. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Задача оптимізації полягає у визначенні додатних значень τ_{03}, τ_{35}, τ_{56} і τ_{67}, що відповідають обмеженням (3.28)−(3.30) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.27). Оскільки цільова функція й обмеження є лінійними функціями змінних τ_{ij}, ця задача належить до задач лінійного програмування. Задачу розв'яжемо табличним симплекс-методом [2, 13]. Увівши додаткові змінні u_k, перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь:

$$8 - \tau_{03} - \tau_{35} - \tau_{56} - \tau_{67} + u_1 = 6;$$

$$5\tau_{03} + u_2 = 5;$$

$$10\tau_{35} + u_3 = 4;$$

$$3{,}33\tau_{56} + u_4 = 2;$$

$$2{,}5\tau_{67} + u_5 = 2;$$

$$3 - \boldsymbol{\tau_{03}} - \boldsymbol{u_6} = 2;$$

$$2 - \boldsymbol{\tau_{35}} - \boldsymbol{u_7} = 1{,}5;$$

$$2 - \boldsymbol{\tau_{56}} - \boldsymbol{u_8} = 1{,}2;$$

$$1 - \boldsymbol{\tau_{67}} - \boldsymbol{u_9} = 0{,}4.$$

$$\boldsymbol{u_1} = -2 - (- \boldsymbol{\tau_{03}} - \boldsymbol{\tau_{35}} - \boldsymbol{\tau_{56}} - \boldsymbol{\tau_{67}});$$

$$\boldsymbol{u_2} = 5 - (5\boldsymbol{\tau_{03}});$$

$$\boldsymbol{u_3} = 4 - (10\boldsymbol{\tau_{35}});$$

$$\boldsymbol{u_4} = 2 - (3{,}33\boldsymbol{\tau_{56}});$$

$$\boldsymbol{u_5} = 2 - (2{,}5\boldsymbol{\tau_{67}});$$

$$\boldsymbol{u_6} = 1 - (\boldsymbol{\tau_{03}});$$

$$\boldsymbol{u_7} = 0{,}4 - (\boldsymbol{\tau_{35}});$$

$$\boldsymbol{u_8} = 0{,}8 - (\boldsymbol{\tau_{56}});$$

$$\boldsymbol{u_9} = 0{,}6 - (\boldsymbol{\tau_{67}});$$

$$\boldsymbol{z(\overline{\tau})} = 0 - (-5\boldsymbol{\tau_{03}} - 10\boldsymbol{\tau_{35}} - 3{,}33\boldsymbol{\tau_{56}} - 2{,}5\boldsymbol{\tau_{67}}).$$

Послідовність симплекс-таблиць 3.9−3.12 відповідає етапам розв´язання задачі.

Таблиця 3.9

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	$\boldsymbol{\tau_{03}}$	$\boldsymbol{\tau_{35}}$	$\boldsymbol{\tau_{56}}$	$\overleftarrow{\boldsymbol{\tau_{67}}}$
$\boldsymbol{Z(\overline{\tau})}$	0	−5	−10	−3,33	−2,5
$\boldsymbol{u_1}$	−2	−1	−1	−1	−1
$\boldsymbol{u_2}$	5	5	0	0	0
$\boldsymbol{u_3}$	4	0	10	0	0
$\boldsymbol{u_4}$	2	0	0	3,33	0
$\boldsymbol{u_5}$	2	0	0	0	2,5
$\boldsymbol{u_6}$	1	1	0	0	0
$\boldsymbol{u_7}$	0,4	0	1	0	0
$\boldsymbol{u_8}$	0,8	0	0	1	0
$\uparrow \boldsymbol{u_9}$	0,6	0	0	0	$\boxed{1}$

Таблиця 3.10

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	$\boldsymbol{\tau_{03}}$	$\boldsymbol{\tau_{35}}$	$\overleftarrow{\boldsymbol{\tau_{56}}}$	$\boldsymbol{u_9}$
$\boldsymbol{Z(\overline{\tau})}$	1,5	−5	−10	−3,33	2,5
$\boldsymbol{u_1}$	−1,4	−1	−1	−1	1
$\boldsymbol{u_2}$	5	5	0	0	0
$\boldsymbol{u_3}$	4	0	10	0	0
$\uparrow \boldsymbol{u_4}$	2	0	0	$\boxed{3{,}33}$	0
$\boldsymbol{u_5}$	0,5	0	0	0	−2,5
$\boldsymbol{u_6}$	1	1	0	0	0
$\boldsymbol{u_7}$	0,4	0	1	0	0
$\boldsymbol{u_8}$	0,8	0	0	1	0
$\boldsymbol{\tau_{67}}$	0,6	0	0	0	1

Таблиця 3.11

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	$\overleftarrow{\tau_{03}}$	τ_{35}	u_4	u_9
$Z(\overline{\tau})$	3,5	−5	-10	1	2,5
$\uparrow u_1$	−0,8	$\boxed{-1}$	−1	0,3	1
u_2	5	5	0	0	0
u_3	4	0	10	0	0
τ_{56}	0,6	0	0	0,3	0
u_5	0,5	0	0	0	−2,5
u_6	1	1	0	0	0
u_7	0,4	0	1	0	0
u_8	0,2	0	0	−0,3	0
τ_{67}	0,6	0	0	0	1

Таблиця 3.12

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	u_1	τ_{35}	u_4	u_9
$Z(\overline{\tau})$	7,5	−5	−0,5	−0,5	−2,5
τ_{03}	0,8	−1	1	−0,3	−1
u_2	1	5	−5	1,5	5
u_3	4	0	10	0	0
τ_{56}	0,6	0	0	0,3	0
u_5	0,5	0	0	0	-2,5
u_6	0,2	1	−1	0,3	1
u_7	0,4	0	1	0	0
u_8	0,2	0	0	−0,3	0
τ_{67}	1,5	0	0	0	1

За результатами розв´язання задачі отримаємо оптимальні значення τ_{ij}:

$$\tau_{03}^* = 0{,}8;\ \ \tau_{35}^* = 0;\ \tau_{56}^* = 0{,}6;\ \tau_{67}^* = 0{,}6.$$

Таким чином, тривалість виконання роботи α_{03} необхідно зменшити на 0,8 год, роботи α_{56} − на 0,6 год, роботи α_{67} − на 0,6 год. Загальний час виконання комплексу робіт зменшиться на $\tau_{03}^* + \tau_{56}^* + \tau_{67}^* = 2$ год, отже,

$$t'_{\text{кр}} = 8 - 2 = 6 \text{ год},$$

що відповідає поставленим вимогам.

Для зменшення часу виконання критичних робіт необхідно додатково витратити ресурси:

$$z_{03} = d_{03}\tau_{03}^* = 5\cdot 0{,}8 = 4 \text{ од.};$$
$$z_{56} = d_{56}\tau_{56}^* = 3{,}33\cdot 0{,}6 = 2 \text{ од.};$$
$$z_{67} = d_{67}\tau_{67}^* = 2{,}5\cdot 0{,}6 = 1{,}5 \text{ од.}$$

Неважко переконатися, що ці величини задовольняють обмеженням (3.29). Сумарна витрата ресурсів $Z(\overline{\tau}) = 7{,}5$ од. при заданих обмеженнях буде мінімальною.

Зазначимо, що до задачі лінійного програмування можна звести задачу оптимізації сіткового графіка і в тому випадку, коли критичний шлях графіка змінюється. Розмірність задачі при цьому суттєво зростає, що спричиняє певні труднощі під час її розв´язання навіть з використанням комп'ютера [2, 13, 16]. Тому оптимізуючи сітковий графік за критерієм витрати ресурсів, вдаватися до змінення топології графіка необхідно тільки в тому випадку, коли вже випробувано всі можливості пошуку оптимального розв'язку без змінення критичного шляху.

3.2. Оптимізація сіткових графіків за критерієм економії ресурсів

Якщо директивний термін $t_д$ перевищує час виконання комплексу робіт $t_{кр}$ $(t_д > t_{кр})$, то розумним буде збільшити тривалість виконання критичних робіт, вивільнивши при цьому ресурси (наприклад, вивільнити техніку, прилади, фахівців, заощадити витратний матеріал). Виникає запитання: ≪*З яких робіт і в якій кількості можна вивільнити ресурси, щоб час виконання комплексу не перевищував заданої величини і при цьому вивільнялася максимальна сумарна кількість ресурсів*?≫

Задача є двоїстою до розглянутої раніше задачі. У підрозд. 3.1 розв'язувалася задача зменшення часу виконання комплексу робіт із залученням додаткових ресурсів. У підрозд. 3.2 наведено задачу збільшення часу виконання комплексу робіт з вивільненням (економією) ресурсів. Обмеженнями в цій задачі можуть бути максимально допустимий час виконання тієї чи іншої роботи, а також максимальна кількість вивільнених ресурсів (на відміну від (3.18) і (3.2) відповідно). Обмеження вигляду (3.6) формально є однаковими для задач обох зазначених типів.

У загальному випадку задача оптимізації за критерієм економії ресурсів також є задачею нелінійного програмування. Обмежимося розглядом лише лінійних моделей цієї задачі, оскільки в багатьох випадках практичні задачі можна описати подібними моделями.

Час виконання роботи α_{ij} будемо позначати через t_{ij}. Якщо при виконанні роботи α_{ij} вивільнити ресурси в розмірі x_{ij} одиниць, то тривалість виконання роботи збільшується до величини

$$t^*_{ij} = t_{ij}(1 + b_{ij}x_{ij}), \tag{3.31}$$

де b_{ij} – коефіцієнт, який указує, на яку частину часу збільшиться тривалість роботи α_{ij}, якщо під час її виконання зняти одну одиницю ресурсу. Новий термін виконання комплексу робіт, що визначається формулою

$$t_{кр} = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{кр}} t'_{ij} = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{кр}} t_{ij}\,(1 + b_{ij}x_{ij}),$$

має бути меншим за директивний термін, тобто

$$\sum_{\alpha_{ij} \in L_{кр}} t_{ij}\left(1 + b_{ij}x_{ij}\right) \le t_д. \tag{3.32}$$

На тривалість критичних робіт накладаються обмеження

$$t''_{ij\ кр} \le T_{ij}, \tag{3.33}$$

де T_{ij} – максимально допустимий час виконання роботи α_{ij}.

Загальна кількість вивільнених ресурсів визначається виразом

$$\mathcal{E}(\overline{x}) = \sum_{\alpha_{ij\,кр} \in L_{кр}} x_{ij} \ . \tag{3.34}$$

Тепер оптимізація сіткового графіка за критерієм економії ресурсів полягає в тому, щоб знайти такі невід'ємні значення змінних x_{ij}, які задовольняють обмеженням (3.32) і (3.33) і перетворюють на мінімум цільову функцію $\mathcal{E}(\overline{x})$. Ця задача належить до задач лінійного програмування.

Приклад 3.5. Нехай комплекс робіт задано сітковим графіком, зображеним на рис. 3.3.

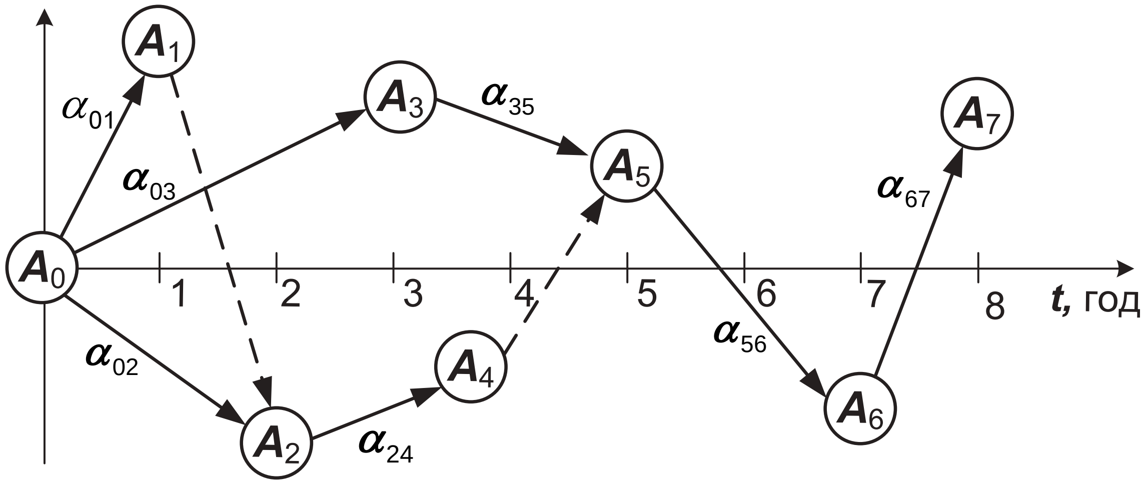

Рис. 3.3

Директивний термін виконання комплексу робіт $t_д$ = 10 год. Залежність часу виконання роботи від кількості вивільнених ресурсів визначається виразом (3.31), де коефіцієнти b_{ij} для критичних робіт набувають значень: b_{03} = 0,083; b_{35} = 0,1; b_{56} = 0,2; b_{67} = 0,1. Час виконання робіт α_{ij} не має перевищувати T_{03} = 4 год, T_{35} = 2,5 год, T_{56} = 2,5 год, T_{67} = 1,5 год. З яких робіт і в якій кількості можна вивільнити ресурси, щоб виконати комплекс робіт у заданий термін і забезпечити максимальну економію ресурсів.

Розв'язання. При вивільненні ресурсів час виконання критичних робіт визначаємо так:

$$t''_{03} = 3(1 + 0{,}083\boldsymbol{x}_{03});$$
$$t''_{35} = 2(1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{35});$$
$$t''_{56} = 2(1 + 0{,}2\boldsymbol{x}_{56});$$
$$t''_{67} = 1(1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67}).$$

Знаходимо новий час виконання комплексу робіт:

$$t''_{кр} = t''_{03} + t''_{35} + t''_{56} + t''_{67} = 8 + 0{,}25\boldsymbol{x}_{03} + 0{,}2\boldsymbol{x}_{35} + 0{,}4\boldsymbol{x}_{56} + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67}.$$

За умовою задачі цей час має бути меншим за $t_д$ = 10 год, тобто

$$8 + 0{,}25\boldsymbol{x}_{03} + 0{,}2\boldsymbol{x}_{35} + 0{,}4\boldsymbol{x}_{56} + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67} \le 10. \qquad (3.35)$$

На тривалість критичних робіт накладаються обмеження:

$$\begin{aligned} &3(1 + 0{,}083\boldsymbol{x}_{03}) \le 4; \\ &2(1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{35}) \le 2{,}5; \\ &2(1 + 0{,}2\boldsymbol{x}_{56}) \le 2{,}5; \\ &1(1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67}) \le 1{,}5. \end{aligned} \qquad (3.36)$$

Сумарна економія ресурсів

$$\boldsymbol{\mathcal{E}(\overline{x})} = \boldsymbol{x}_{03} + \boldsymbol{x}_{35} + \boldsymbol{x}_{56} + \boldsymbol{x}_{67}. \qquad (3.37)$$

Необхідно знайти такі невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x}_{03}$, $\boldsymbol{x}_{35}$, $\boldsymbol{x}_{56}$, $\boldsymbol{x}_{67}$, які задовольняють обмеженням (3.35), (3.36) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.37).

Ця задача є задачею лінійного програмування. Для її розв'язання перейдемо до основної задачі лінійного програмування, тобто введемо додаткові змінні $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$, $\boldsymbol{y}_4$, $\boldsymbol{y}_5$ і замінимо нерівності рівностями:

$$0{,}25\boldsymbol{x}_{03} + 0{,}2\boldsymbol{x}_{35} + 0{,}4\boldsymbol{x}_{56} + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67} + \boldsymbol{y_1} = 2;$$

$$3 + 0{,}25\boldsymbol{x}_{03} + \boldsymbol{y_2} = 4;$$

$$2 + 0{,}2\boldsymbol{x}_{35} + \boldsymbol{y_3} = 2{,}5;$$

$$2 + 0{,}4\boldsymbol{x}_{56} + \boldsymbol{y_4} = 2{,}5;$$

$$1 + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67} + \boldsymbol{y_5} = 1{,}5.$$

Пошук максимуму функції (3.37) замінимо пошуком мінімуму функції:

$$\mathcal{E}'(\overline{\boldsymbol{x}}) = -\boldsymbol{x}_{03} - \boldsymbol{x}_{35} - \boldsymbol{x}_{56} - \boldsymbol{x}_{67}.$$

Як вільні змінні виберемо $\boldsymbol{x}_{03}$, $\boldsymbol{x}_{35}$, $\boldsymbol{x}_{56}$ і $\boldsymbol{x}_{67}$. Тоді базисні змінні й цільва функція набувають такого вигляду:

$$\boldsymbol{y_1} = 2 - (0{,}25\boldsymbol{x}_{03} + 0{,}2\boldsymbol{x}_{35} + 0{,}4\boldsymbol{x}_{56} + 0{,}1\boldsymbol{x}_{67});$$

$$\boldsymbol{y_2} = 1 - (0{,}25\boldsymbol{x}_{03});$$

$$\boldsymbol{y_3} = 0{,}5 - (0{,}2\boldsymbol{x}_{35});$$

$$\boldsymbol{y_4} = 0{,}5 - (0{,}4\boldsymbol{x}_{56});$$

$$\boldsymbol{y_5} = 0{,}5 - (0{,}1\boldsymbol{x}_{67});$$

$$\mathcal{E}'(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0 - (\boldsymbol{x}_{03} + \boldsymbol{x}_{35} + \boldsymbol{x}_{56} + \boldsymbol{x}_{67}).$$

Розв´язок цієї задачі – послідовність симплекс-таблиць 3.13−3.16.

Таблиця 3.13

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	x_{56}	$\overleftarrow{x_{67}}$
$\mathcal{E}'(\overline{x})$	0	1	1	1	1
y_1	2	0,25	0,2	0,4	0,1
y_2	1	0,25	0	0	0
y_3	0	0,25	0	0	0
y_4	0,5	0	0	0,4	0
$\uparrow y_5$	0,5	0	0	0	$\boxed{0{,}1}$

Таблиця 3.14

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_{03}	$\overleftarrow{x_{35}}$	x_{56}	y_5
$\mathcal{E}'(\overline{x})$	−5	1	1	1	−10
y_1	1,5	0,25	0,2	0,4	−1
y_2	1	0,25	0	0	0
$\uparrow y_3$	0,5	0	$\boxed{0{,}2}$	0	0
y_4	0,5	0	0	0,4	0
x_{67}	5	0	0	0	10

Таблиця 3.15

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	$\overleftarrow{x_{03}}$	$\uparrow y_3$	x_{56}	y_5
$\mathcal{E}'(\overline{x})$	−7,5	1	−5	1	−10
$\uparrow y_1$	1	$\boxed{0{,}25}$	−1	0,4	−1
y_2	1	0,25	0	0	0
x_{35}	2,5	0	5	0	0
y_4	0,5	0	0	0,4	0
x_{67}	5	0	0	0	10

Таблиця 3.16

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	y_1	x_{35}	x_{56}	y_5
$\mathcal{E}'(\overline{x})$	−11,5	−4	−1	−0,75	−6
x_{03}	4	4	−4	1,6	−4
y_2	0	−1	1	−1,6	1
x_{35}	2,5	0	5	0	0
y_4	0,5	0	0	0,4	0
x_{67}	5	0	0	0	10

Таким чином, оптимальним є такий розв´язок:

$$x^*_{03} = 4;\ x^*_{03} = 4;\ x^*_{35} = 2{,}5;\ x^*_{56} = 0;\ x^*_{67} = 5.$$

Якщо під час виконання роботи α_{03} вивільнити 4 од. ресурсів, під час виконання роботи α_{35} – 2,5 од., під час виконання роботи α_{67} – 5 од., то весь комплекс робіт можна виконати за час

$$t''_{кр} = t''_{03} + t''_{35} + t''_{56} + t''_{67} = 8 + 0{,}25\cdot4 + 0{,}2\cdot2{,}5 + 0{,}4\cdot0 + 0{,}1\cdot5 = 10 \text{ год},$$

що не перевищує директивного терміну. При цьому економія ресурсів відповідно до (3.37) буде такою:

$$\mathcal{E}(\overline{x}) = 4 + 2{,}5 + 5 = 11{,}5 \text{ од.}$$

Можливою є й інша постановка задачі оптимізації сіткового графіка за критерієм економії ресурсів. Вона ґрунтується на тому, що, збільшивши тривалість роботи α_{ij} на одиницю часу (наприклад, на одну годину), можна вивільнити деяку кількість ресурсів q_{ij}. Якщо збільшити тривалість роботи α_{ij} на проміжок часу τ_{ij}, тобто

$$t^*_{ij} = t_{ij} + \tau_{ij}, \tag{3.38}$$

то економію ресурсів можна визначити за формулою

$$v_{ij} = q_{ij}\,\tau_{ij}. \tag{3.39}$$

Необхідно визначити, на який проміжок часу можна збільшити кожну з критичних робіт, щоб час виконання комплексу робіт не перевищував заданого при максимальній економії сумарних ресурсів.

З урахуванням (3.33) вираз для загального часу виконання комплексу робіт при збільшенні тривалості робіт набуває вигляду

$$\boldsymbol{t}_{\text{кр}}'' = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} \boldsymbol{t}_{ij}'' = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} (\boldsymbol{t}_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{ij}) = \boldsymbol{t}_{\text{кр}} + \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} \boldsymbol{\tau}_{ij}. \quad (3.40)$$

За умовою задачі цей час має бути меншим за директивний термін $\boldsymbol{t}_{\text{д}}$:

$$\boldsymbol{t}_{\text{кр}} + \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} \boldsymbol{\tau}_{ij} \le \boldsymbol{t}_{\text{д}}. \quad (3.41)$$

Тривалість кожної роботи можна збільшувати нескінченно, розумно ставити вимогу, щоб тривалість роботи не перевищувала деякої заданої величини $\boldsymbol{T}_{ij}$:

$$\boldsymbol{t}_{ij}^{*} = \boldsymbol{t}_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{ij} \le \boldsymbol{T}_{ij}. \quad (3.42)$$

З іншого боку, економія ресурсів має бути не меншою від величини $\boldsymbol{h}_{ij}$:

$$\boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij}\, \boldsymbol{\tau}_{ij} \ge \boldsymbol{h}_{ij}. \quad (3.43)$$

Сумарна економія ресурсів визначиться таким виразом:

$$\boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{\tau}}) = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} \boldsymbol{v}_{ij} = \sum_{\alpha_{ij} \in L_{\text{кр}}} \boldsymbol{q}_{ij}\, \boldsymbol{\tau}_{ij}. \quad (3.44)$$

Тепер розв'язання задачі полягає у знаходженні таких додатних значень змінних $\boldsymbol{\tau}_{ij}$, які задовольняють обмеженням (3.41), (3.42) і (3.43) і перетворюють на максимум цільову функцію (3.44). Неважко переконатися, що сформульована задача в певному сенсі є двоїстою до задачі (3.23)–(3.26).

Приклад 3.6. Директивний термін виконання комплексу робіт, заданого сітковим графіком (рис. 3.3), становить 12 год. При збільшенні часу виконання критичних робіт на одну годину вивільняються такі ресурси: $\boldsymbol{q}_{03}$ = 2,5 од., $\boldsymbol{q}_{35}$ = 2 од., $\boldsymbol{q}_{56}$ = 1 од., $\boldsymbol{q}_{67}$ = 2 од. Час виконання робіт не має перевищувати значень T_{05} = 4 год, T_{35} = 4 год, T_{56} = 3 год, T_{67} = 2 год, а економія ресурсів має бути не меншою від значень $\boldsymbol{h}_{03}$ = = 2 од., $\boldsymbol{h}_{35}$ = 1 од., $\boldsymbol{h}_{56}$ = 0, $\boldsymbol{h}_{67}$ = 2 од. На який проміжок часу можна збільшити тривалість виконання критичних робіт, щоб час виконання комплексу робіт не перевищував 10 год, а обсяг зекономлених ресурсів був максимальним?

Читачеві пропонується розв’язати цю задачу самостійно.

3.3. Оптимізація сіткових графіків за часом

Некритичні роботи сіткового графіка мають резерви часу. У межах цього резерву можна збільшити їх тривалість без змінення критичного шляху. Але збільшення тривалості роботи дає змогу вивільнити ресурси. Резерв часу визначає резерв вивільнених ресурсів (назвемо їх рухомими). Рухомі ресурси з резерву некритичних робіт можна перекинути на виконання критичних робіт, що сприятиме зменшенню часу їх виконання. Отже, шляхом перерозподілу ресурсів з некритичних на критичні роботи можна зменшити довжину критичного шляху сіткового графіка, тобто зменшити виконання комплексу робіт у цілому.

Виникає *задача оптимізації сіткового графіка за часом:* необхідно визначити, з яких робіт і в якій кількості, на які роботи і в якій кількості слід перерозподілити ресурси, щоб час виконання комплексу робіт став мінімальним.

У загальному випадку така задача є задачею нелінійного програмування [2, 13]. Однак, якщо припустити, що тривалість робіт лінійно залежить від кількості вивільнених або додатково залучених ресурсів, то задачу оптимізації за часом можна звести до задачі лінійного програмування.

Зробимо такі припущення:

1. З метою зменшення часу виконання робіт ресурси з некритичних робіт перекидаються на виконання критичних робіт. Перекидання ресурсів між критичними роботами не проводиться.
2. Під час оптимізації критичний шлях сіткового графіка не змінюється.
3. У перерозподілі між некритичними й критичними роботами беруть участь ресурси одного й того ж виду.
4. Залежність часу виконання будь-якої роботи від обсягу залучених або вивільнених ресурсів – лінійна.

Позначимо: $\boldsymbol{a_{ijкр}}$ – довільна робота, що належить критичному шляху; $\boldsymbol{t_{ijкр}}$ – час її виконання; $\boldsymbol{a_{lkн}}$ – довільна некритична робота; $\boldsymbol{t_{ijн}}$ – час її виконання. Відповідно до першого припущення додаткові ресурси знімаються з некритичних робіт і перекидаються на виконання критичних. Якщо на виконання роботи $\boldsymbol{a_{ijкр}}$ залучити ресурси обсягом $\boldsymbol{x_{ij}}$ одиниць, то згідно з останнім припущенням час її виконання зменшиться до величини

$$t'_{ij\text{кр}} = t_{ij\text{кр}}(1 - c_{ij}\, x_{ij}). \tag{3.45}$$

З іншого боку, вивільнення ресурсів з виконання роботи $\alpha_{lk\text{н}}$ обсягом x_{lk} одиниць призводить до збільшення її тривалості

$$t''_{ij\text{н}} = t_{ij\text{н}}(1 + b_{lk}\, x_{lk}), \tag{3.46}$$

де c_{ij} і b_{lk} – відповідні коефіцієнти.

Після перерозподілу ресурсів час виконання комплексу робіт (довжина критичного шляху) визначається формулою

$$t'_{\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij\text{кр}}} t'_{ij\text{кр}} = \sum_{\alpha_{ij\text{кр}}} t_{ij\text{кр}}\,(1 - c_{ij}\, x_{ij}), \tag{3.47}$$

де підсумовування ведеться за всіма критичними роботами сіткового графіка.

З огляду на те, що обсяг ресурсів, що знімаються з некритичних робіт, має дорівнювати обсягу ресурсів, що залучаються на виконання критичних робіт, можна записати ріняння

$$\sum_{\alpha_{ij\text{кр}}} x_{ij} = \sum_{\alpha_{lk\text{н}}} x_{lk}. \tag{3.48}$$

У правій частині рівняння підсумовування ведеться за тими некритичними роботами, з яких знімаються некритичні ресурси. Для того щоб унаслідок розв'язання задачі оптимізації критичний шлях сіткового графіка не змінився (припущення 2), необхідно, щоб довжина будь-якої некритичної дуги, з робіт якої знімаються ресурси, не перевищила довжину ділянки критичного шляху, що замикає цю дугу. Цю умову запишемо таким чином:

$$t''[L_{r\text{нд}}(A_p, A_q)] \le t'_{\text{кр}}[L_{r\text{нд}}(A_p, A_q)], \tag{3.49}$$

де $t''[L_{r\text{нд}}(A_p, A_q)]$ – довжина некритичної дуги $L_{r\text{нд}}(A_p, A_q)$ після перерозподілу ресурсів;

$t'_{\text{кр}}[L_{r\text{нд}}(A_p, A_q)]$ – довжина ділянки критичного шляху, що замикає дугу $L_{r\text{нд}}(A_p, A_q)$ після перерозподілу ресурсів;

r – умовний номер некритичної дуги;

A_p, A_q – початкова й завершальна події некритичної дуги.

Одними й тими ж подіями можуть починатися й завершуватися кілька некритичних дуг. Наприклад, на сітковому графіку, наведеному в підрозд. 3.2, подією A_0 починаються, а подією A_5 закінчуються некритичні дуги $(\alpha_{01} - \alpha_{12} - \alpha_{24} - \alpha_{45})$ і $(\alpha_{02} - \alpha_{24} - \alpha_{45})$. Надамо кожній з дуг умовний номер:

$$L_{1нд}(A_0, A_5) = (\alpha_{01} - \alpha_{12} - \alpha_{24} - \alpha_{45}),$$
$$L_{2нд}(A_0, A_5) = (\alpha_{02} - \alpha_{24} - \alpha_{45}).$$

Очевидно, що обсяг ресурсів, які знімаються з будь-якої некритичної роботи, не може перевищувати обсягу їх резерву. Це обмеження відображає нерівність

$$x_{lk} \le B_{lk}, \tag{3.50}$$

де B_{lk} – резерв рухомих ресурсів роботи $\alpha_{lk_{н}}$.

Розв'язуючи задачу, необхідно враховувати і ту обставину, що тривалість критичних робіт можна зменшувати до якоїсь певної межі. Замість реальної залежності (нелінійної) часу виконання робіт від обсягу залучених або вивільнених ресурсів використовуємо її лінійну апроксимацію (3.45). Це обмеження записуємо у вигляді нерівності

$$t'_{ij_{кр}} \ge T_{ij}, \tag{3.51}$$

де T_{ij} визначається заданим ступенем наближення апроксимувальної лінійної залежності до реальної залежності.

І нарешті, природні обмеження

$$x_{ii} \ge 0, x_{lk} \ge 0 \tag{3.52}$$

свідчать про те, що за своєю фізичною природою ресурси не можуть вимірюватися від'ємними величинами.

З урахуванням викладеного вище задачу оптимізації сіткового графіка можна сформулювати так: знайти невід'ємні значення змінних x_{ij}, x_{lk}, які задовольняють обмеженням (3.48)–(3.51) і перетворюють на мінімум цільову функцію (3.47).

Оскільки обмеження (3.49) – (3.52) є лінійними нерівностями, (3.48) – лінійним рівнянням, а цільова функція являє собою лінійну функцію змінних x_{ij}, ця задача належить до задач лінійного програмування.

Визначимо резерв рухомих ресурсів некритичних робіт. Час виконання некритичної роботи $\boldsymbol{\alpha}_{lk_{\text{н}}}$ можна збільшити на величину, що не перевищує повного резерву часу цієї роботи. Максимальна тривалість роботи при цьому визначається формулою

$$t''_{lk_{\text{н}max}} = t_{lk_{\text{н}}} + R_{\text{повн}}(\alpha_{lk_{\text{н}}}), \tag{3.53}$$

де $R_{повн}(\alpha_{lk_{\text{н}}})$ – повний резерв часу роботи $\alpha_{lkн}$.

Але для досягнення часу $t''_{lk_{\text{н}max}}$ необхідно вивільнити всі рухомі ресурси цієї роботи, тобто ресурси B_{lk}. Останній вираз дає змогу визначити резерв рухомих ресурсів некритичної роботи $\alpha_{lk_{\text{н}}}$, якщо відомим є повний резерв часу цієї роботи. З урахуванням (3.46) можна записати

$$t''_{lk_{\text{н}max}} = t_{lk_{\text{н}}}(1 + b_{lk}B_{lk}). \tag{3.54}$$

Підставивши цей вираз у (3.53), отримаємо

$$t_{lk_{\text{н}}}(1 + b_{lk}B_{lk}) = t_{lk_{\text{н}}} + R_{\text{повн}}(\alpha_{lk_{\text{н}}}),$$

звідки випливає, що

$$B_{lk} = \frac{R_{\text{повн}}(\alpha_{lk_{\text{н}}})}{t_{lk_{\text{н}}} b_{lk}}. \tag{3.55}$$

Розглянемо приклад розв’язання задачі оптимізації сіткового графіка за часом.

Приклад 3.7. Комплекс робіт задано сітковим графіком, зображеним на рис. 3.3. Залежності часу виконання робіт визначаються значеннями $t''_{ijкр}$ і $t''_{lkн}$, де коефіцієнти b_{lk} і c_{ij} набувають таких значень: b_{01} = 0,5; b_{02} = 0,5; b_{24} = 0,4; c_{03} = 0,1; c_{35} = 0,25; c_{56} = 0,2; c_{67} = 0,5. Мінімально допустимий час виконання роботи α_{03} становить 2 год, роботи α_{35} – 1,5 год, роботи α_{56} – 1 год, роботи α_{67} – 0,5 год. З яких робіт і в якій кількості, на які роботи і в якій кількості необхідно перекинути ресурси, щоб виконати комплекс робіт у мінімальний термін?

Розв'язання. Насамперед знайдемо резерв рухомих ресурсів кожної з некритичних робіт α_{01}, α_{02}, α_{24}. Для цього розрахуємо параметри сіткового графіка, застосувавши табличний спосіб (табл. 3.17).

Таблиця 3.17

Події		Робота	Ранній початок	Тривалість	Раннє закінчення	Пізній початок	Тривалість	Пізнє закінчення	Повний резерв
Початкова	Завершальна								
A_0	A_1	α_{01}	0	1	1	2,5	1	3,5	2,5
A_0	A_2	α_{02}	0	2	2	1,5	2	3,5	1,5
A_0	A_3	α_{03}	0	3	3	0	3	3	0
A_1	A_2	α_{12}	1	–	1	3,5	–	3,5	2,5
A_2	A_4	α_{24}	2	1,5	3,5	3,5	1,5	5	1,5
A_3	A_5	α_{35}	3	2	5	3	2	5	0
A_4	A_5	α_{45}	3,5	–	3,5	5	–	5	1,5
A_5	A_6	α_{56}	5	2	7	5	2	7	0
A_6	A_7	α_{67}	7	1	8	7	1	8	0

За результатами розрахунків отримаємо, що повні резерви часу кожної з критичних робіт є такими:

$$R_{повн}(\alpha_{01}) = 2{,}5 \text{ год}; \ R_{повн}(\alpha_{02}) = 1{,}5 \text{ год}; \ R_{повн}(\alpha_{24}) = 1{,}5 \text{ год}.$$

За формулою (3.55) визначаємо резерви рухомих ресурсів некритичних робіт:

$$B_{01} = \frac{2{,}5}{1 \cdot 0{,}5} = 5; \ B_{02} = \frac{1{,}5}{2 \cdot 0{,}5} = 1{,}5; \ B_{24} = \frac{1{,}5}{1{,}5 \cdot 0{,}4} = 2{,}5.$$

Позначимо через x_{01}, x_{02}, x_{24} ресурси, що знімаються з некритичних робіт α_{01}, α_{02}, α_{24}, а через x_{03}, x_{35}, x_{56} і x_{67} – ресурси, що залучаються додатково для виконання критичних робіт α_{03}, α_{35}, α_{56} і α_{67}. Після перерозподілу ресурсів величини часу виконання кожної з перелічених робіт є такими:

$$t'_{03} = 3 - 0{,}3x_{03};$$

$$t'_{35} = 2 - 0{,}5x_{35};$$

$$t'_{56} = 2 - 0{,}4x_{56};$$

$$t'_{67} = 1 - 0{,}5x_{67};$$

$$t''_{01} = 1 + 0{,}5x_{03};$$

$$t''_{02} = 2 + 0,3x_{02};$$

$$t''_{24} = 1,5 + 0,6x_{24},$$

а час виконання комплексу робіт

$$t'_{кр} = t'_{03} + t'_{35} + t'_{56} + t'_{67} = \\ = 8 - 0,3x_{03} - 0,5x_{35} - 0,4x_{56} - 0,5x_{67}. \qquad (3.56)$$

Цей вираз являє собою цільову функцію розглядуваної задачі.

Перейдемо до обмежень. Відповідно до (3.48) запишемо рівняння

$$x_{03} + x_{35} + x_{56} + x_{67} = x_{01} + x_{02} + x_{24}. \qquad (3.57)$$

Оскільки сітковий графік має дві некритичні дуги

$$L_{1нд}(A_0, A_5) = (\alpha_{01} - \alpha_{12} - \alpha_{24} - \alpha_{45}),$$

$$L_{2нд}(A_0, A_5) = (\alpha_{02} - \alpha_{24} - \alpha_{45}),$$

часові обмеження (3.49) набирають такого вигляду:

$$t''_{01} + t''_{24} \leq t'_{03} + t'_{35};\ t''_{02} + t''_{24} \leq t'_{03} + t'_{35}.$$

Після підстановки виразів для $t''_{01}, t''_{02}, t''_{24}, t'_{03}, t'_{35}$ отримаємо нерівності

$$1 + 0,5x_{01} + 1,5 + 0,6x_{24} \leq 3 - 0,3x_{03} + 2 - 0,5x_{35}; \qquad (3.58)$$

$$2 + x_{02} + 1,5 + 0,6x_{24} \leq 3 - 0,3x_{03} + 2 - 0,5x_{35}. \qquad (3.59)$$

Ураховуючи знайдені значення B_{lk}, отримаємо

$$x_{01} \leq 5;\ x_{02} \leq 1,5;\ x_{24} \leq 2,5.$$

Визначимо обмеження для значень t'_{03}, t'_{35}, t'_{56}, t'_{67}:

$$t'_{03} = 3 - 0{,}3\,x_{03} \geq 2;$$

$$t'_{35} = 2 - 0{,}5\,x_{35} \geq 1{,}5;$$

$$t'_{56} = 2 - 0{,}4\,x_{56} \geq 1;$$

$$t'_{67} = 1 - 0{,}5\,x_{67} \geq 0{,}5.$$

Остаточно задача оптимізації формулюється так: знайти невід'ємні значення змінних x_{01}, x_{02}, x_{24}, x_{03}, x_{35}, x_{56} і x_{67}, що задовольняють обмеженням і перетворюють на мінімум цільову функцію. В силу лінійності обмежень і цільової функції ця задача є задачею лінійного програмування.

Зведемо цю задачу до основної задачі лінійного програмування (перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь). Для цього введемо додаткові невід'ємні змінні y_1 – y_9, і після нескладних перетворень обмеження набувають такого вигляду:

$$x_{03} + x_{35} + x_{56} + x_{67} = x_{01} + x_{02} + x_{24};$$

$$0{,}3x_{03} + 0{,}5x_{35} + 0{,}5x_{01} + 0{,}6x_{24} + y_1 = 2{,}5;$$

$$0{,}3x_{03} + 0{,}5x_{35} + x_{02} + 0{,}6x_{24} + y_2 = 1{,}5;$$

$$x_{01} + y_3 = 5;$$

$$x_{02} + y_4 = 1{,}5;$$

$$x_{24} + y_5 = 2{,}5;$$

$$0{,}3x_{03} + y_6 = 1;$$

$$0{,}5x_{35} + y_7 = 0{,}5;$$

$$0{,}4x_{56} + y_8 = 1;$$

$$0{,}5x_{67} + y_9 = 0{,}5.$$

Задача містить n = 16 змінних і m = 10 рівнянь-обмежень. Для розв'язання задачі застосуємо симплекс-метод. Як вільні змінні візьмемо змінні x_{03}, x_{35}, x_{56}, x_{67}, x_{02}, x_{24}. Решту, базисні змінні, виразимо через вільні змінні у формі, призначеній для заповнення симплекс-таблиць:

$$x_{01} = 0 - (-x_{03} - x_{35} - x_{56} - x_{67} + x_{02} + x_{24});$$

$$y_1 = 2{,}5 - (0{,}8x_{03} + x_{35} + 0{,}5x_{56} + 0{,}5x_{67} - 0{,}5x_{02} + 0{,}1x_{24});$$

$$y_2 = 1{,}5 - (0{,}3x_{03} + 0{,}5x_{35} + x_{02} + 0{,}6x_{24});$$

$$y_3 = 5 - (x_{03} + x_{35} + x_{56} + x_{67} - x_{02} - x_{24});$$

$$y_4 = 1{,}5 - (x_{02});$$

$$y_5 = 2{,}5 - (x_{24});$$

$$y_6 = 1 - (0{,}3x_{03});$$

$$y_7 = 0{,}5 - (0{,}5x_{35});$$

$$y_8 = 1 - (0{,}4x_{56});$$

$$y_9 = 0{,}5 - (x_{67}).$$

Цільова функція має такий вигляд:

$$F(x) = 8 - (0{,}3x_{03} + 0{,}5x_{35} + 0{,}4x_{56} + 0{,}5\,x_{67}).$$

Вихідну симплекс-таблицю подамо у вигляді табл. 3.18, а кінцеву – у вигляді табл. 3.19.

Таблиця 3.18

Базові змінні	Вільні змінні						
	ВЧ	x_{03}	x_{35}	x_{56}	x_{67}	x_{02}	x_{24}
$F(x)$	8	0,3	0,5	0,4	0,5	0	0
x_{03}	−1	−1	−1	−1	−1	1	1
y_1	2,5	0,8	1	0,5	0,5	−0,5	0,1
y_2	1,5	0,3	0,5	0	0	1	0,6
y_3	5	1	1	1	1	−1	−1
y_4	1,5	0	0	0	0	1	0
y_5	2,5	0	0	0	0	0	1
y_6	1	0,3	0	0	0	0	0
y_7	0,5	0	0,5	0	0	0	0
y_8	1	0	0	0,4	0	0	0
y_9	0,5	0	0	0	0,5	0	0

Таблиця 3.19

Базові змінні	Вільні змінні						
	ВЧ	x_{03}	y_2	y_1	y_9	y_7	X_{24}
$F(x)$	6	−0,5	−1	0	−1	−1	−0,105
x_{01}	4	0,6	0	2	0	−2	0,95
X_{56}	2,5	3,2	2,5	0	0	0	−0,45
y_2	0,5	−1,3	−2,5	2	−2	−5	0,225
y_3	1	−0,6	−1,25	−2	0	2	−0,95
y_4	1	−1,6	−2,5	2	−2	−4	−0,25
y_5	2,5	0	0	0	0	0	1
y_6	1	0,3	0	0	0	0	0
x_{35}	1	0	0	0	0	0	0,25
x_{02}	0,5	1,6	2,5	−2	2	4	0,25
X_{67}	1	0	0	0	2	0	0

Таким чином, оптимальним розв'язком задачі є

$$x^*_{01} = 4;\ x^*_{02} = 0,5;\ x^*_{24} = 0;\ x^*_{03} = 0;\ x^*_{35} = 1;\ x^*_{56} = 2,5;\ x^*_{67} = 1.$$

Цей розв'язок свідчить про таке: з некритичних робіт α_{01} і α_{02} необхідно зняти 4 і 0,5 од. ресурсів відповідно й перекинути на виконання критичних робіт, розподіливши їх таким чином: на роботу α_{35} – 1 од., на роботу α_{56} – 2,5 од., на роботу α_{67} – 1 од.

Такий перерозподіл ресурсів дає змогу виконати комплекс робіт за 6 год, що в заданих умовах є мінімальним часом виконання.

Побудуємо новий сітковий графік, для чого розрахуємо нові значення тривалості робіт:

$$t''_{01} = 3;\ t''_{02} = 2,5;\ t'_{03} = 3;\ t'_{24} = 1,5;\ t'_{35} = 1,5;\ t'_{56} = 1;\ t'_{67} = 0,5.$$

Якщо до оптимізації сіткового графіка робота α_{02} закінчувалася пізніше роботи α_{01}, то після оптимізації робота α_{01} закінчується пізніше роботи α_{02}. Але на ці роботи спирається робота α_{04}, яка тепер може починатися не раніше, ніж завершиться робота α_{01}, тобто ніж здійсниться A_1. Отже, на новому сітковому графіку робота α_{24} трансформується в роботу α_{14} , а фіктивна робота α_{12} – у фіктивну роботу α_{21}.

Тоді сітковий графік комплексу робіт після його оптимізації набуде вигляду, зображеного на рис. 3.4.

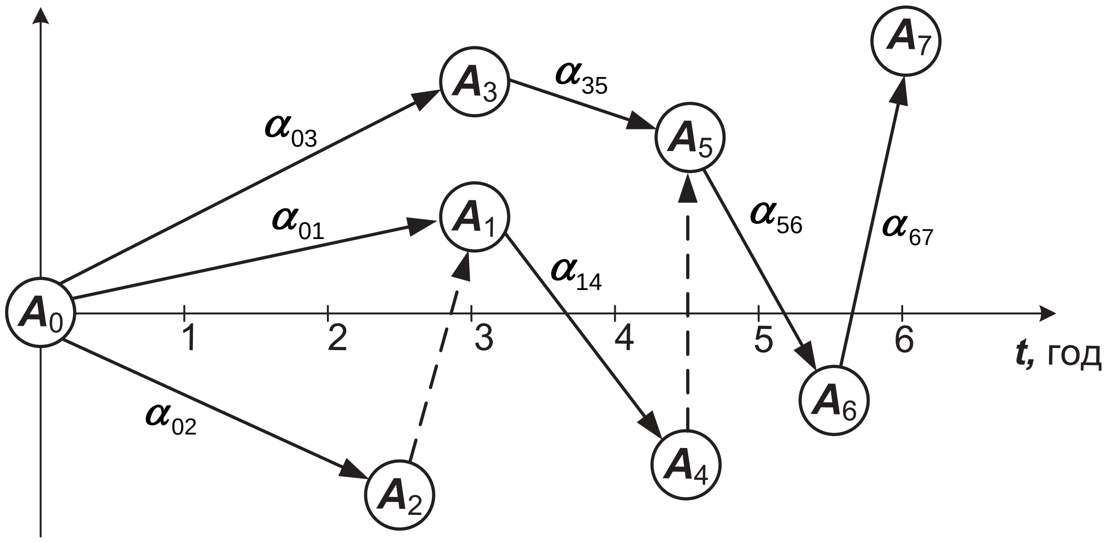

Рис. 3.4

Виконаємо аналіз нового сіткового графіка. Здійснення події A_4 відбувається в той же момент часу, що й звершення події A_5. Оскільки подія A_5 належить критичному шляху, то подія A_4 теж буде належати критичному шляху. Це означає, що, хоча старий критичний шлях $L'_{1кр} = (\alpha_{03} - \alpha_{35} - \alpha_{56} - \alpha_{67})$ зберігся, виник ще один критичний шлях $L'_{2кр} = (\alpha_{01} - \alpha_{14} - \alpha_{56} - \alpha_{67})$.

Таким чином, після оптимізації сітковий графік буде містити два критичних шляхи. Це обумовлено нестрогими нерівностями-обмеженнями (3.58) і (3.59), тобто заздалегідь було припущено, що довжина некритичної дуги може дорівнювати довжині ділянки критичного шляху, що замикає цю дугу.

Отже, шляхом перерозподілу ресурсів було зменшено час виконання комплексу робіт. Однак при цьому збільшилася кількість критичних робіт, тобто робіт, послідовності виконання яких необхідно суворо дотримуватися, щоб виконати весь комплекс робіт у нові терміни. Природно, це призведе до ускладнення керування комплексом робіт у цілому, що є "платою" за зменшення критичного шляху.

На практиці може бути й дещо інша постановка задачі оптимізації сіткового графіка за часом, яка полягає в ув'язці необхідних (розрахункових) ресурсів на проведення комплексу робіт з наявними ресурсами, тобто ресурсами, які має реально в розпорядженні керівник.

Пояснимо суть задачі на такому прикладі. Нехай унаслідок планування комплексу робіт побудовано сітковий графік, зображений на рис. 3.5.

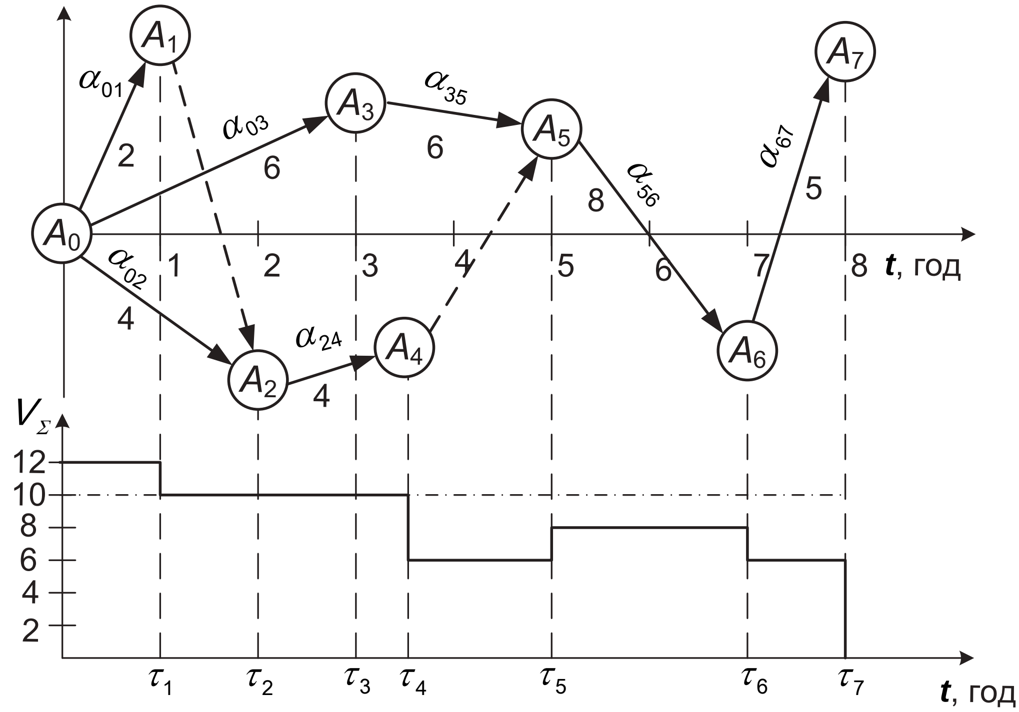

Рис. 3.5

Виходячи з трудомісткості кожної роботи розраховано необхідну кількість ресурсів на її виконання $\boldsymbol{V_{ij}}$. Проставимо цифри, що характеризують необхідні ресурси, біля відповідних ребер сіткового графіка.

Побудуємо під сітковим графіком систему координат, початок якої є сумісним з початком виконання комплексу робіт (з моментом здійснення події $\boldsymbol{A_0}$), і спроєктуємо на вісь часу $0\boldsymbol{t}$ моменти початку й закінчення робіт. Унаслідок цього весь інтервал часу виконання комплексу робіт розбивається на проміжки $(0, \boldsymbol{\tau_1})$, $(\boldsymbol{\tau_1}, \boldsymbol{\tau_2})$ і т. д.

Розглянемо проміжок часу $(0, \boldsymbol{\tau_1})$. Протягом цього проміжку часу одночасно виконуються роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}, \boldsymbol{\alpha_{02}}, \boldsymbol{\alpha_{03}}$ комплексу. Оскільки на виконання робіт $\boldsymbol{\alpha_{01}}, \boldsymbol{\alpha_{02}}, \boldsymbol{\alpha_{03}}$ необхідно витратити ресурси $\boldsymbol{V_{01}} = 2$, $\boldsymbol{V_{02}} = 4$, $\boldsymbol{V_{03}} = 6$ відповідно, то протягом усього проміжку часу необхідно витратити $\boldsymbol{V_\Sigma}$ = 12 од. ресурсу.

Аналогічно розглянемо інші проміжки часу й побудуємо графік залежності необхідних сумарних ресурсів від часу. Побудований графік, який назвемо *епюрою* розподілу ресурсів, показує, як треба було б розподілити ресурси за часом, щоб виконати комплекс робіт у заданий термін.

З іншого боку, у розпорядженні керівника робіт є наявні ресурси, кількість яких може не збігатися з відповідною кількістю на тому чи іншому проміжку часу. Для простоти будемо вважати, що на будь-якому проміжку часу витрати ресурсів не можуть перевищувати $\boldsymbol{V_0}$ = 10 од. (штрих-пунктирна лінія на рис. 3.5).

З порівняння необхідних і наявних ресурсів випливає, що на проміжку часу $(0, \boldsymbol{\tau_1})$ наявних ресурсів не вистачає для того, щоб виконати роботи відповідно до графіка. Разом з тим, на проміжках $(\boldsymbol{\tau_4}, \boldsymbol{\tau_5})$, $(\boldsymbol{\tau_5}, \boldsymbol{\tau_6})$ і т. д. є надлишок наявних ресурсів, який можна використовувати для зменшення часу виконання відповідних робіт, а отже, і для зменшення часу виконання всього комплексу робіт. Виникає необхідність у коригуванні сіткового графіка, метою якого є "варіювання" епюри розподілу ресурсів, якщо можливо, до рівня $\boldsymbol{V_0}$.

Тепер сформулюємо задачу. Нехай комплекс робіт задано сітковим графіком, причому відомою є необхідна кількість ресурсів на виконання кожної роботи. Задано також наявні ресурси, які є в розпорядженні керівника робіт. Розподілити необхідні ресурси так, щоб у будь-якому проміжку часу їх кількість не перевищувала кількості наявних ресурсів при мінімальному значенні часу виконання комплексу робіт у цілому.

Для розв’язання цієї задачі на практиці широко використовуються евристичні прийоми [2, 13]. Один із них полягає в такому.

1. Розраховують параметри сіткового графіка: час раннього початку $\boldsymbol{t}_{\text{рп}}(\boldsymbol{\alpha_{ij}})$; час раннього закінчення $\boldsymbol{t}_{\text{рз}}(\boldsymbol{\alpha_{ij}})$; час пізнього початку $\boldsymbol{t}_{\text{пп}}(\boldsymbol{\alpha_{ij}})$; час пізнього закінчення $\boldsymbol{t}_{\text{пз}}(\boldsymbol{\alpha_{ij}})$; повний резерв часу $\boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{ij}})$ кожної роботи. Для розрахунку параметрів можна скористатися будь-яким з розглянутих вище способів (аналітичним, табличним, графічним).

2. Будують епюру розподілу ресурсів. Послідовно, починаючи з першого проміжку часу $(0, \boldsymbol{\tau_1})$, перевіряють відповідність необхідних і наявних ресурсів. Якщо необхідна кількість не перевищує кількості наявних ресурсів, то розподіл уважають задовільним, в іншому випадку сітковий графік на цьому проміжку підлягає коригуванню. Коригування полягає в тому, що деякі роботи або зміщують по осі часу вправо, тобто виносять за межі розглядуваного проміжку часу, або збільшують час їх виконання. При цьому зменшують і необхідні сумарні ресурси. Очевидно, збільшувати час виконання або зміщувати по осі часу без змінення критичного шляху можна лише ті роботи, які мають резерв часу, відмінний від нуля.

3. Для коригування сіткового графіка в розглядуваному проміжку часу визначають пріоритет кожної роботи за величиною повного резерву часу і за кількістю необхідних ресурсів. Більш високий пріоритет мають роботи, що мають більше значення повного резерву часу, а при однакових значеннях повного резерву – меншу необхідну кількість ресурсів на їх виконання. За межі аналізованого проміжку виносять роботи з більш високим пріоритетом.

Слід зазначити, що роботи, розпочаті на попередніх проміжках часу і які тривають у розглядуваному часовому проміжку, коригуванню не підлягають.

4. До розглядуваного проміжку часу можна включити нові роботи, тобто переміщені з інших проміжків, тільки в тому випадку, коли для їх виконання є наявні ресурси.

5. Для узгодження необхідних і наявних ресурсів у розглядуваному проміжку часу можна змінювати тривалість виконання робіт: у бік збільшення, якщо необхідні ресурси перевищують наявні; у бік зменшення – в іншому випадку.

Якщо припустити, що витрати ресурсів при зміненні тривалості робіт не змінюються, то

$$\boldsymbol{V_{ij} t_{ij} = V'_{ij} t'_{ij}}, \tag{3.60}$$

де $\boldsymbol{V'_{ij}}$ – необхідна кількість ресурсів на виконання роботи після змінення її тривалості;

$\boldsymbol{t'_{ij}}$ – нова тривалість роботи $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$.

З цього рівняння випливає, що

$$\boldsymbol{t'_{ij} = \frac{V_{ij}}{V'_{ij}} t_{ij}}. \tag{3.61}$$

Покажемо на конкретному прикладі, яким чином описаний алгоритм можна застосувати для оптимізації сіткового графіка за часом.

Приклад 3.8. Комплекс робіт задано сітковим графіком, зображеним на рис. 3.4. Біля кожної стрілки, що зображає роботу, проставлена необхідна кількість виконавців, визначена згідно з трудомісткістю робіт. Відомо, що в своєму розпорядженні керівник робіт має 10 виконавців. Провести коригування сіткового графіка з метою узгодження необхідної кількості виконавців з кількістю виконавців у розпорядженні керівника робіт при мінімальному значенні часу виконання комплексу робіт.

Розв'язання. Використовуємо для коригування сіткового графіка описаний вище алгоритм. Оскільки сітковий графік, зображений на рис. 3.5, є ідентичним сітковому графіку, зображеному на рис. 3.1, його параметри, розраховані табличним способом, наведено в табл. 3.16.

1. Епюру розподілу ресурсів сіткового графіка побудовано на рис. 3.5, звідки випливає, що весь інтервал часу виконання комплексу робіт розбивається на сім проміжків часу $(\boldsymbol{0, \tau_1})$, $(\boldsymbol{\tau_1, \tau_2})$, …, $(\boldsymbol{\tau_6, \tau_7})$.

2. Розглянемо проміжок часу $(\boldsymbol{0, \tau_1})$. У межах цього проміжку паралельно виконуються три роботи: $\boldsymbol{\alpha_{01}}$, $\boldsymbol{\alpha_{02}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{03}}$. Відповідно до епюр

розподілу на їх виконання необхідно було б одночасно виділити 12 виконавців. Але згідно з умовою задачі в будь-який момент часу керівник має 10 виконавців. Через невідповідність наявної і необхідної кількості виконавців на проміжку часу $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\tau_1})$ сітковий графік підлягає коригуванню.

Визначимо пріоритет кожної з робіт, що виконується на проміжку $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\tau_1})$. Оскільки повний резерв часу $\boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{01}})$ = 2,5, $\boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{02}})$ = 1,5, $\boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{03}})$ = 0 (див. табл. 3.17), то вищий пріоритет має робота $\boldsymbol{\alpha_{01}}$.

Збільшувати тривалість роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ для зменшення кількості виконавців недоцільно, оскільки в цьому випадку необхідні ресурси в проміжку $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\tau_1})$ все одно будуть перевищувати наявні. Тому змістимо роботу $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ по осі часу вправо, тобто починати виконання роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ будемо в момент часу $\boldsymbol{\tau_1}$ = 1 год. Новий сітковий графік і відповідну епюру розподілу зображено на рис. 3.6.

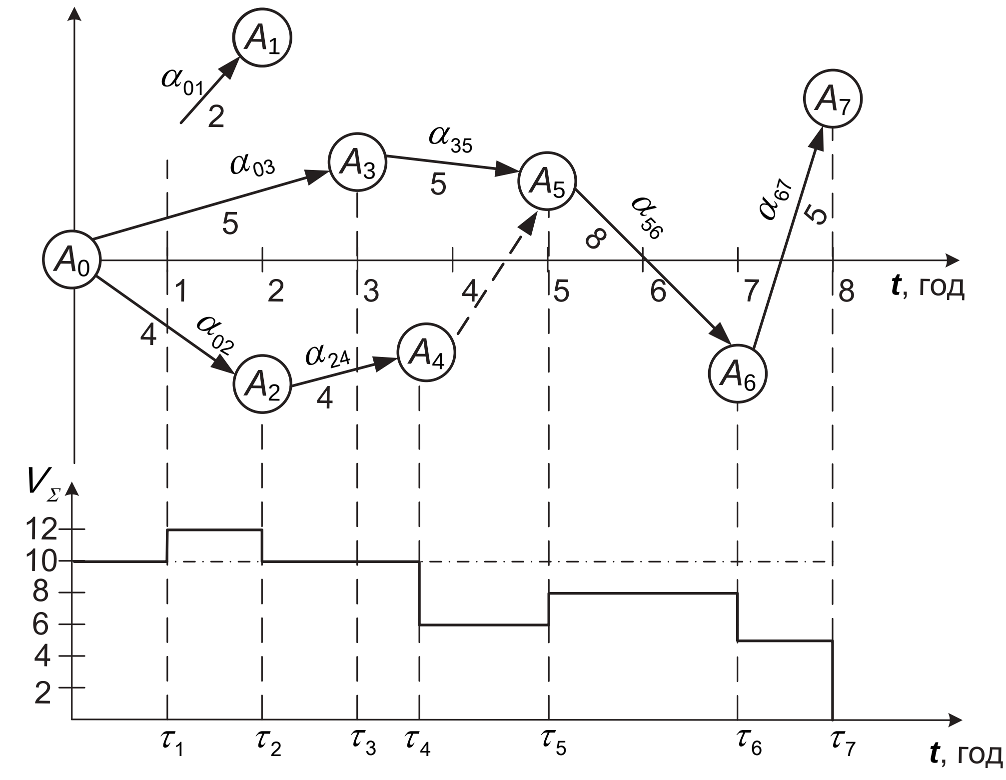

Рис. 3.6

Зазначимо, що тепер повний резерв часу роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ є таким: $\boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{01}})$ = 1,5 год. Перейдемо до аналізу проміжку $(\boldsymbol{\tau_1}, \boldsymbol{\tau_2})$. На цьому проміжку (див. рис. 3.6) виконуються роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$, $\boldsymbol{\alpha_{02}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{03}}$, причому для їх виконання потребується більша кількість виконавців, ніж є в наявності.

Тому сітковий графік потребує подальшого коригування. Оскільки роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{02}}$ було розпочато на попередньому проміжку, вони коригуванню не підлягають.

Залишається тільки одна робота α_{01}, яку можна перемістити по осі часу вправо або збільшити її тривалість. Збільшення тривалості роботи α_{01} не приведе до зменшення необхідної кількості виконавців на проміжку (τ_1, τ_2) до 10.

Тому природним виходом є перенесення початку роботи α_{01} на момент часу τ_2. Сітковий графік та епюра розподілу після цього етапу коригування набирають вигляду, зображеного на рис. 3.7.

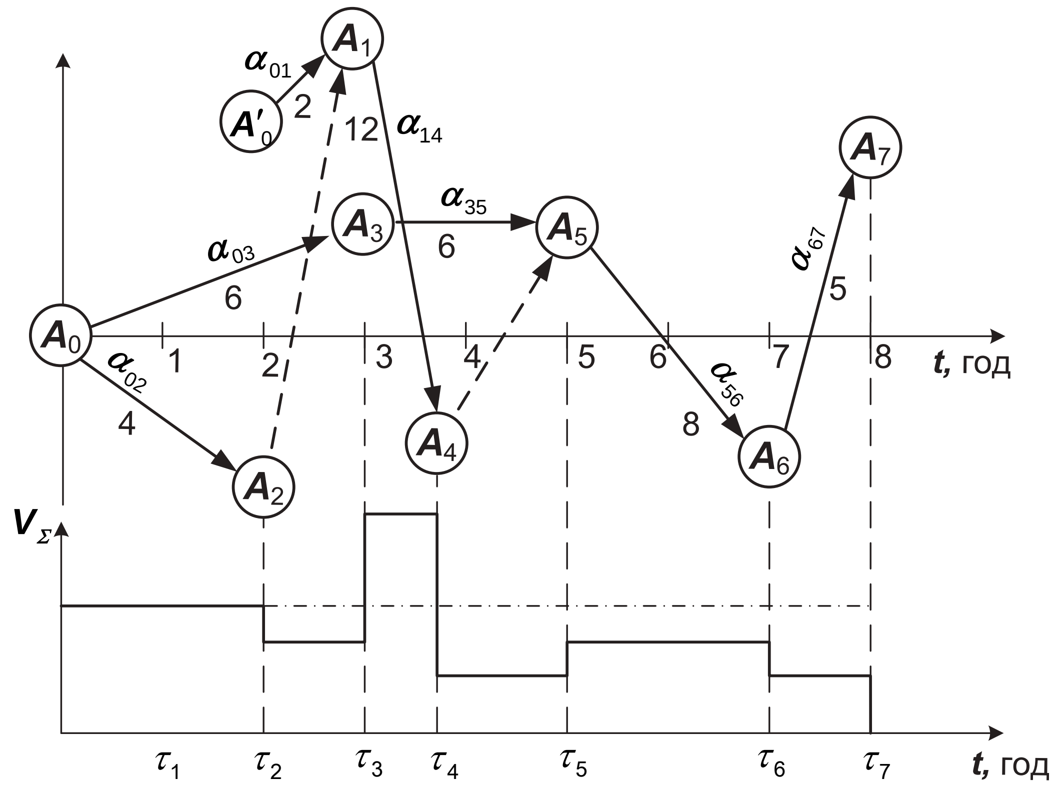

Рис. 3.7

Більш детально розглянемо отриманий сітковий графік. По-перше, зазначимо, що до коригування (див. рис. 3.4) робота α_{02} закінчувалася пізніше роботи α_{01}. Оскільки на ці роботи спирається робота α_{04}, то після другого етапу коригування відбувається трансформація роботи α_{24} в роботу α_{14}.

По-друге, тривалість роботи α_{14} зменшиться до 0,5 год. Це призведе до збільшення необхідної кількості виконавців цієї роботи. Скориставшись виразом (3.60), розрахуємо, скільки виконавців необхідно залучити, щоб виконати роботу α_{14} за час t'_{14} = 0,5 год:

$$V'_{14} = \frac{V_{14}}{t'_{14}} t_{14}.$$

Оскільки $\boldsymbol{V_{14}} = \boldsymbol{V_{24}} = 4$, а $\boldsymbol{t_{14}} = \boldsymbol{t_{24}} =$ 0,5 год, після підстановки цих значень до виразу для $\boldsymbol{V'_{14}}$ отримаємо

$$\boldsymbol{V'_{14}} = \frac{\boldsymbol{V_{14}}}{\boldsymbol{t'_{14}}}\boldsymbol{t_{14}} = \frac{\mathbf{4 \cdot 1{,}5}}{\mathbf{0{,}5}} = 12 \text{ год.}$$

З урахуванням цього значення побудовано епюру розподілу для сіткового графіка після другого етапу коригування. Зазначимо, що робота $\boldsymbol{\alpha_{14}}$ має такий же повний резерв часу, що й робота $\boldsymbol{\alpha_{24}}$ попереднього сіткового графіка, тобто

$$\boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{14}}) = \boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{24}}) = 1{,}5 \text{ год.}$$

Розглянемо наступний проміжок часу $(\boldsymbol{\tau_2}, \boldsymbol{\tau_3})$. Оскільки необхідна кількість виконавців на цьому проміжку є меншою від кількості виконавців у розпорядженні керівника, розподіл уважається задовільним. На проміжку $(\boldsymbol{\tau_3}, \boldsymbol{\tau_4})$ одночасно починаються й закінчуються роботи $\boldsymbol{\alpha_{14}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{35}}$. Згідно з епюрою розподілу (див. рис. 3.7) наявної кількості виконавців буде недостатньо для виконання робіт на цьому проміжку. Тому проведемо коригування сіткового графіка.

Визначимо пріоритет робіт. Оскільки $\boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{14}})$ = 1,5 год, а $\boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{35}}) = 0$, вищий пріоритет має робота $\boldsymbol{\alpha_{14}}$. З сіткового графіка, зображеного на рис. 3.7, випливає, що зміщувати роботу $\boldsymbol{\alpha_{14}}$ вправо по осі часу недоцільно, оскільки це значно збільшить необхідну кількість виконавців на наступному проміжку часу $(\boldsymbol{\tau_4}, \boldsymbol{\tau_5})$. Тому коригування проведемо шляхом збільшення тривалості роботи $\boldsymbol{\alpha_{14}}$. Повний резерв часу роботи $\boldsymbol{\alpha_{14}}$ становить 1,5 год, тому час її виконання можна збільшити до

$$\boldsymbol{t''_{14}} = \boldsymbol{t_{14}} + \boldsymbol{R}_{\text{повн}}(\boldsymbol{\alpha_{14}}) = 0{,}5 + 1{,}5 = 2 \text{ год.}$$

Таким чином, момент закінчення роботи $\boldsymbol{\alpha_{14}}$ зміститься до моменту часу $\boldsymbol{\tau_5}$.

При цьому необхідна кількість виконавців роботи буде такою:

$$\boldsymbol{V''_{14}} = \frac{\boldsymbol{V'_{14}}}{\boldsymbol{t''_{14}}}\boldsymbol{t'_{14}} = \frac{12 \cdot 0{,}5}{2} = 3,$$

а на часових проміжках $(\boldsymbol{\tau_3}, \boldsymbol{\tau_4})$ і $(\boldsymbol{\tau_4}, \boldsymbol{\tau_5})$ – такою:

$$\boldsymbol{V_\Sigma} = \boldsymbol{V''_{14}} + \boldsymbol{V_{35}} = 3 + 6 = 9.$$

На рис. 3.8 зображено сітковий графік та епюри розподілу робіт після чергового етапу коригування.

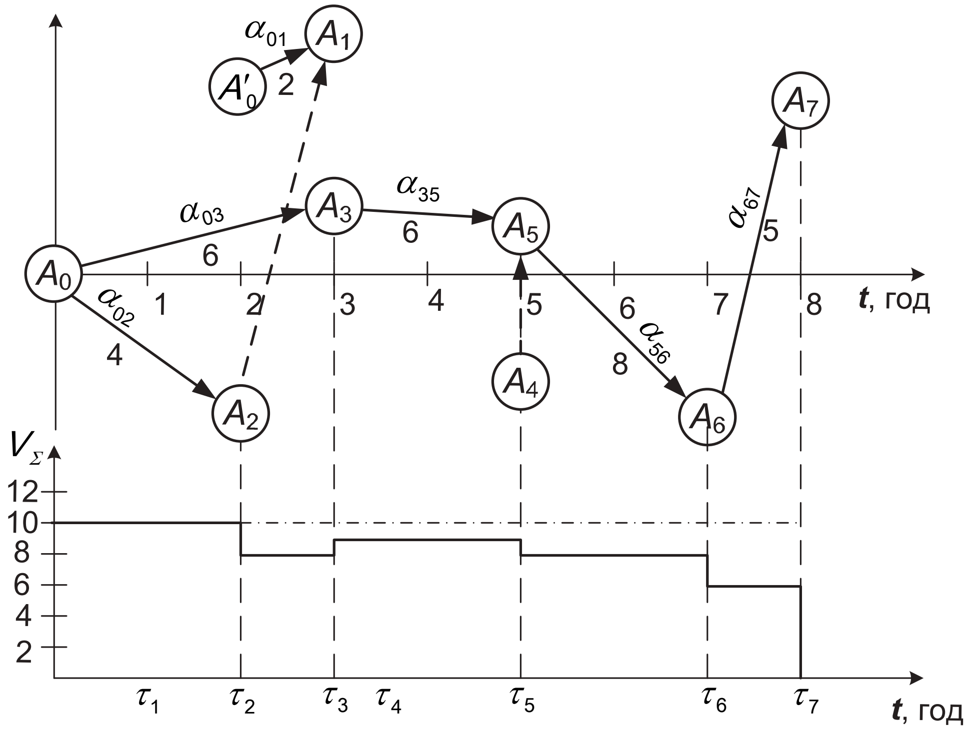

Рис. 3.8

Аналіз епюр показує, що розподіл необхідної кількості виконавців на всьому інтервалі часу виконання комплексу робіт є задовільним. Разом з тим, наявність вільних виконавців на окремих проміжках часу дає змогу зменшити тривалість відповідних робіт, а отже і час виконання всього комплексу робіт.

Розглянемо проміжок часу $(\boldsymbol{\tau_2}, \boldsymbol{\tau_3})$. На цьому проміжку в розпорядженні керівника є резерв у кількості двох виконавців, яких можна було б залучити до виконання робіт $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{03}}$.

Але збільшення кількості виконавців роботи $\boldsymbol{\alpha_{03}}$ одразу призвело б до перерозподілу в бік збільшення необхідної кількості виконавців на попередніх проміжках часу $(0, \boldsymbol{\tau_1})$ і $(\boldsymbol{\tau_1}, \boldsymbol{\tau_2})$. Це і зрозуміло, тому що робота $\boldsymbol{\alpha_{03}}$ має більш низький пріоритет порівняння з роботою $\boldsymbol{\alpha_{01}}$. Якщо ж двох виконавців залучити до виконання роботи $\boldsymbol{\alpha_{01}}$, то її тривалість зменшиться вдвічі.

Проаналізуємо, до чого це приведе. Якщо початком роботи залишити подію $\boldsymbol{A_0'}$, то подія зміститься вліво. Це спричинить збільшення тривалості роботи $\boldsymbol{\alpha_{14}}$ і зменшення необхідної кількості виконавців на проміжках $(\boldsymbol{\tau_3}, \boldsymbol{\tau_4})$ і $(\boldsymbol{\tau_4}, \boldsymbol{\tau_5})$.

Якщо ж подію $A_0^{'}$ змістити вправо, залишивши на місці подію A_1, то виникне новий проміжок часу між моментом τ_2 і новим моментом здійснення події $A_0^{'}$. Необхідна сумарна кількість виконавців на цьому проміжку часу дорівнюватиме лише 6.

Таким чином, замість вирівнювання розподілу необхідної кількості виконавців матиме місце ще більша його нерівномірність. Тому отриманий раніше розподіл на проміжку часу (τ_2, τ_3) можна вважати цілком задовільним.

Те саме можна сказати і про розподіл на проміжках часу (τ_3, τ_4) і (τ_4, τ_5). Зовсім іншим чином складається ситуація з проміжками (τ_5, τ_6) і (τ_6, τ_7), у межах яких виконується по одній роботі – α_{56} і α_{67} відповідно.

Скориставшись (3.68), де як $V_{ij}^{'}$ узято V_0 = 10, знайдемо

$$t_{56}^{'} = t_{56}\frac{V_{56}}{V_0} = 1{,}6 \text{ год};$$

$$t_{67}^{'} = t_{67}\frac{V_{67}}{V_0} = 0{,}5 \text{ год}.$$

Тоді врешті решт сітковий графік та епюра розподілу набудуть вигляду, зображеного на рис. 3.9.

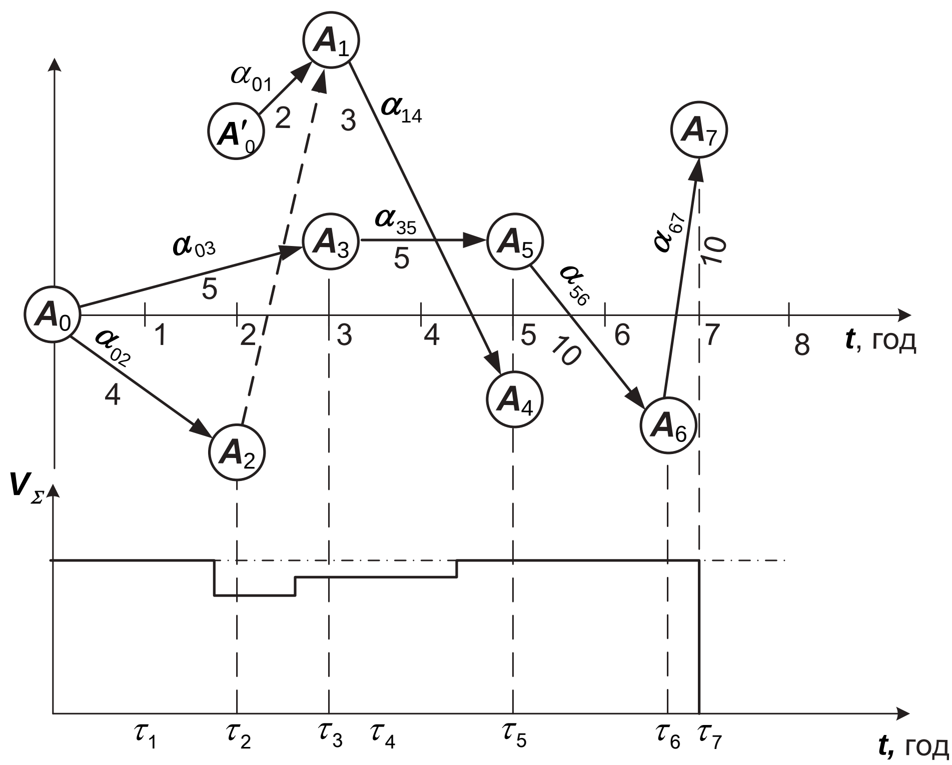

Рис. 3.9

Загальний час виконання комплексу робіт

$$t'_{\text{кр}} = t_{03} + t_{05} + t'_{56} + t'_{67} = 7{,}1 \text{ год},$$

що в заданих умовах є мінімальним часом. Порівнявши початкову й кінцеву епюри розподілів, зазначимо, що коригуванням сіткового графіка вдалося істотно вирівняти початковий розподіл, забезпечивши тим самим максимальну ефективність використання виконавців комплексу робіт.

Контрольні запитання

1. Назвіть основні задачі оптимізації сіткових графіків.
2. Наведіть вирази для обмежень і цільової функції оптимізації комплексу робіт за критерієм витрат ресурсів.
3. Назвіть шляхи збереження незмінним критичного шляху сіткового графіка під час розв'язання задач оптимізації.
4. Обґрунтуйте вид залежності часу виконання роботи від додатково виділених ресурсів.
5. Наведіть вирази для обмежень і цільової функції оптимізації комплексу робіт за критерієм економії ресурсів.
6. Сформулюйте задачу оптимізації сіткового графіка за критерієм економії ресурсів.
7. Наведіть вирази для обмежень і цільової функції оптимізації комплексу робіт за часом.
8. Сформулюйте задачі оптимізації сіткового графіка за часом.
9. Наведіть шляхи розв'язання задачі про ув'язку розрахункових ресурсів з наявними під час оптимізації комплексу робіт.

4. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Для реалізації одного циклу керування в мехатронній системі необхідно виконати комплекс операцій з такими часовими витратами:

– приймання апаратурою керувального органа інформації від інших систем – 0,5 год;

– збір об'єктом керування інформації про свій стан – 0,2 год;

– увімкнення й перевірка апаратури на об'єкті керування – 0,1 год;

– передавання на керувальний орган зібраної інформації про стан об'єкта керування – 0,1 год;

– аналіз прийнятої інформації, вирішення управлінських завдань і прийняття рішення керувальним органом – 2 год;

– на основі прийнятого рішення формування команди та її передавання на об'єкт керування – 0,1 год;

– виконання прийнятої команди об'єктом керування – 0,1 год.

Перші три операції починають виконуватися одночасно, послідовність інших установлюється відповідно до їх змісту. Побудувати сітковий графік комплексу операцій з реалізації одного циклу керування й визначити його характеристики.

2. На проведення кожної операції α_{ij}, зазначеної в задачі 1, витрачається певна сума коштів. Якщо в операцію α_{ij} додатково вкласти кошти на суму x_{ij} (в умовних одиницях), то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де c_{ij} – коефіцієнт.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, які необхідно вкласти в операції α_{01} і α_{45}, щоб час циклу керування не перевищував 2 год, а додаткові кошти на виконання операції α_{01} не перевищували б 1 ум. од., а на виконання операції α_{45} – 2 ум. од. При цьому C_{01} = 0,2, C_{45} = 0,2.

3. Для підвищення ефективності мехатронної системи необхідно модернізувати її приймально-передавальну апаратуру, описану в задачі 1.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, які потрібно вкласти для того, щоб час циклу керування зменшився не менш ніж на 0,2 год при таких умовах: додаткові кошти, вкладені в кожну з операцій α_{ij}, не перевищують 3 ум. од.; $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де c_{ij} = 0,5.

4. Для обміну інформацією між керувальним органом та об'єктом керування в задачі 1 застосовується приймально-передавальна апаратура з певною швидкістю передавання інформації. Якщо під час проведення операції α_{ij} використовувати апаратуру з підвищеною на ΔV_{ij} (в умовних одиницях) швидкістю передавання, то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - \alpha_{ij}\Delta V_{ij})$.

Визначити мінімально необхідну величину підвищення швидкості приймально-передавальної апаратури, щоб час циклу керування зменшився не менш ніж на 10 % при таких технічних обмеженнях: $\Delta V_{ij} \leq 100$, α_{ij} = 0,01. Перевірити, чи змінився критичний шлях. Якщо так, то побудувати новий часовий сітковий графік.

5. Якщо на проведення операцій $\{\alpha_{ij}\}$, зазначених у задачі 1, додатково вкласти матеріальні ресурси x_{ij} (в умовних одиницях) у кожну операцію, то час їх виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$.

Визначити мінімально необхідні ресурси, які потрібно вкласти в комплекс операцій для того, щоб час циклу керування зменшився хоча б на 1 год при тому самому критичному шляху і $x_{ij} \leq 5$, c_{ij} = 0,1 для всіх номерів робіт.

6. На проведення кожної операції α_{ij}, зазначеної в задачі 1, витрачається певна сума x_{ij} коштів. Якщо в операцію α_{ij} додатково вкласти кошти на суму x_{ij}, то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - C_{ij}x_{ij})$, де C_{ij} – коефіцієнт.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, які необхідно вкласти в операції α_{01} і α_{45}, щоб час циклу керування не перевищував 2 год, а додаткові кошти на виконання операції α_{01} не перевищували 1 ум. од., а на виконання операції α_{45} – 2 ум. од. При цьому C_{01} = 0,4, C_{45} = 0,4.

7. Для підвищення ефективності мехатронної системи, описаної в задачі 1, необхідно модернізувати її приймально-передавальну апаратуру.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, які потрібно вкласти для того, щоб час циклу керування зменшився не менш ніж на 0,2 год при таких умовах: додаткові кошти, вкладені в кожну з робіт α_{ij} не перевищують 3 ум. од.; $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, C_{ij} = 0,25.

8. Для обміну інформацією між керувальним органом та об'єктом керування в задачі 1 застосовується приймально-передавальна апаратура з певною швидкістю передавання. Якщо під час проведення операції α_{ij} використовувати апаратуру з підвищеною на ΔV_{ij} (в умовних одиницях) швидкістю передавання, то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - \alpha_{ij}\Delta V_{ij})$.

Визначити мінімально необхідну величину підвищення швидкості приймально-передавальної апаратури для того, щоб час циклу керування зменшився не менш ніж на 10 % при таких обмеженнях: ΔV_{ij} ≤ 100, α_{ij} = 0,001. Перевірити, чи змінився критичний шлях. Якщо так, то побудувати новий часовий сітковий графік.

9. Якщо на проведення операцій $\{\alpha_{ij}\}$, зазначених у задачі 1, додатково вкласти матеріальні ресурси x_{ij} (в умовних одиницях) у кожну операцію, то час її виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$.

Визначити мінімально необхідні ресурси, які потрібно вкласти в комплекс операцій для того, щоб час циклу керування зменшився на 1 год при тому самому критичному шляху і x_{ij} ≤ 50, c_{ij} = 0,01 для всіх номерів робіт.

10. Для обміну інформацією між керувальним органом та об'єктом керування в задачі 1 застосовується приймально-передавальна апаратура з певною швидкістю передавання. Якщо під час проведення операції α_{ij} використовувати апаратуру з підвищеною на ΔV_{ij} (в умовних одиницях)

швидкістю передавання, то час виконання цієї операції зменшиться до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - \alpha_{ij}\Delta V_{ij})$.

Визначити мінімально необхідну величину підвищення швидкості приймально-передавальної апаратури для того, щоб час циклу керування зменшити не менш ніж на 10 % при таких обмеженнях: $\Delta V_{ij} \leq 100$; $\alpha_{ij} = 0{,}1$. Перевірити, чи змінився критичний шлях. Якщо так, то побудувати новий часовий сітковий графік.

11. Для освоєння нової апаратури зв'язку групою, що складається з трьох операторів, необхідно виконати роботи з такими часовими витратами:

– одночасне індивідуальне навчання: першого оператора протягом 100 ум. од. часу; другого – 80 ум. од.; третього – 60 ум. од.;

– групове навчання операторів протягом 80 ум. од.;

– контрольна групова робота операторів на апаратурі й складання іспиту на допуск до експлуатації протягом 20 ум. од.

Побудувати часовий сітковий графік комплексу робіт і визначити його основні характеристики.

12. Визначити мінімальну суму додаткових коштів, які необхідно вкласти в комплекс операцій, описаних в задачі 11, щоб підготувати операторів за час не більш ніж 150 ум. од. При цьому, якщо в операцію α_{ij} вкласти додаткові матеріальні ресурси в розмірі x_{ij} (в умовних одиницях), то час її виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де $x_{ij} \leq 30$, $c_{ij} = 0{,}2$ для операції α_{ij}.

13. Визначити мінімальну суму додаткових коштів, які необхідно вкласти в комплекс операцій, описаних в задачі 11, щоб підготувати операторів за час не більш ніж 150 ум. од. При цьому, якщо в операцію α_{ij} вкласти додаткові кошти в розмірі x_{ij} умовних одиниць, то її час виконання можна скоротити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, $x_{ij} \leq 20$, $c_{ij} = 0{,}2$ для будь-якої операції α_{ij}.

14. Визначити мінімальну суму додаткових коштів, які необхідно вкласти в комплекс операцій, описаних в задачі 11, щоб підготувати операторів за час не більш ніж 150 ум. од. При цьому, якщо в операцію α_{ij} вкласти додаткові кошти x_{ij} (в умовних одиницях), то час її виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де $x_{ij} \leq 20$, $c_{ij} = 0{,}4$ для будь-якої операції α_{ij}.

15. Визначити мінімальну суму додаткових коштів, які необхідно вкласти в комплекс операцій, описаних в задачі 11, щоб підготувати операторів за час не більш ніж 150 ум. од. При цьому, якщо в операцію α_{ij}

вкласти додаткові кошти x_{ij} (в умовних одиницях), то час її виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де $x_{ij} \leq 200$, $c_{ij} = 0{,}01$ для будь-якої операції α_{ij}.

16. Визначити мінімальну суму додаткових коштів, які необхідно вкласти в комплекс операцій, описаних у задачі 11, щоб підготувати операторів за час не більш ніж 150 ум. од. При цьому, якщо в операцію α_{ij} вкласти додаткові кошти x_{ij} (в умовних одиницях), то час її виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де $x_{ij} \leq 2000$, $c_{ij} = 0{,}001$ для будь-якої операції α_{ij}.

17. Визначити мінімальну суму додаткових коштів, яку необхідно вкласти в комплекс операцій, описаних у задачі 11, щоб підготувати операторів за час не більш ніж 150 ум. од. При цьому, якщо в операцію α_{ij} вкласти додаткові кошти x_{ij} (в умовних одиницях), то час її виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де $x_{ij} \leq 20$, $c_{ij} = 0{,}2$ для будь-якої операції α_{ij}. Структуру критичного шляху залишити незмінною.

18. Визначити мінімальну суму додаткових коштів, які необхідно вкласти в комплекс операцій, описаних у задачі 11, щоб підготувати операторів за час не більш ніж 150 ум. од. При цьому, якщо в операцію α_{ij} вкласти додаткові кошти x_{ij} (в умовних одиницях), то час її виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де $x_{ij} \leq 200$, $c_{ij} = 0{,}4$ для будь-якої операції α_{ij}. Структуру критичного шляху залишити незмінною.

19. Для переобладнання вузла зв'язку необхідно виконати комплекс робіт з такими часовими витратами:

– отримання, транспортування нової апаратури й перевірка її комплектності – 10 ум. од.;

– демонтаж старої апаратури – 5 ум. од.;

– вивчення принципу дії, порядку монтажу й розгортання нової апаратури – 1 ум. од.;

– установлення, контрольні випробування й здача в експлуатацію нової апаратури – 10 ум. од.

Перша й друга роботи починають виконуватися одночасно. Побудувати часовий сітковий графік і визначити його характеристики.

20. Якщо для проведення операцій, зазначених у задачі 19, придбати додатково приладів і витратних матеріалів на суму x_{ij} (в умовних одиницях) для кожної операції, то час її виконання можна зменшити до $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$. Для закупівлі додаткових приладів і витратних матеріалів дозволяється витратити кошти на суму не більше 10 ум. од., з

них: для роботи α_{01} – не більше 5 ум. од.; для роботи α_{14} – не більше 5 ум. од.

Розподілити додаткові кошти між роботами так, щоб комплекс робіт виконати в мінімально можливий термін при c_{ij} = 0,1 для всіх робіт.

21. Після аналізу даних за неодноразовим виконанням комплексу робіт, зазначених в задачі 1, зроблено такий висновок: на отримання, транспортування, перевірку комплектності, а також на встановлення, контрольні випробування і здачу в експлуатацію нової апаратури витрачається відносно великий час.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, що дасть змогу на третину зменшити час виконання комплексу робіт при умові, що $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, де c_{11} = 0,1, c_{14} = 0,2, $x_{ij} \leq 5$ ум. од. При цьому перевірити, чи зміниться критичний шлях.

22. Після аналізу даних за неодноразовим виконанням комплексу робіт, зазначених у задачі 19, зроблено такий висновок: на отримання, транспортування, перевірку комплектності, а також на встановлення, контрольні випробування і здачу в експлуатацію нової апаратури витрачається відносно великий час.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, що дасть змогу на третину зменшити час виконання комплексу робіт при умові, що $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, c_{11} = 0,1, c_{14} = 0,2, $x_{34} \leq 5$ ум. од. При цьому перевірити, чи зміниться критичний шлях.

23. Після аналізу даних за неодноразовим виконанням комплексу робіт, зазначених у задачі 19, зроблено такий висновок: на отримання, транспортування, перевірку комплектності, а також на встановлення, контрольні випробування і здачу в експлуатацію нової апаратури витрачається відносно великий час.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, що дасть змогу на третину зменшити час виконання комплексу робіт при умові, що $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, c_{11} = 0,1, c_{14} = 0,2, $x_{34} \leq 7$ ум. од. При цьому перевірити, чи зміниться критичний шлях.

24. Після аналізу даних за неодноразовим виконанням комплексу робіт, зазначених у задачі 19, зроблено такий висновок: на отримання, транспортування, перевірку комплектності, а також на встановлення, контрольні випробування і здачу в експлуатацію нової апаратури витрачається відносно великий час.

Визначити мінімально необхідну суму додаткових коштів, що дасть змогу на третину зменшити час виконання комплексу робіт при умові, що $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, c_{11} = 0,1, c_{14} = 0,2, $x_{01} \leq 10$. При цьому перевірити, чи зміниться критичний шлях.

25. Після аналізу даних за неодноразовим виконанням комплексу робіт, зазначених у задачі 19, зроблено такий висновок: на отримання,

транспортування, перевірку комплектності, а також на встановлення, контрольні випробування і здачу в експлуатацію нової апаратури витрачається відносно великий час.

Визначити мінімально необхідну кількість додаткових коштів, що дасть змогу на третину зменшити час виконання комплексу робіт при умові, що $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, c_{11}= 0,1, c_{14} = 0,2, $x_{14} \leq 5$. При цьому перевірити, чи зміниться критичний шлях.

26. Після аналізу даних за неодноразовим виконанням комплексу робіт, зазначених у задачі 19, зроблено такий висновок: на отримання, транспортування, перевірку комплектності, а також на встановлення, контрольні випробування і здачу в експлуатацію нової апаратури витрачається відносно великий час.

Визначити мінімально необхідну кількість додаткових коштів, що дасть змогу на третину зменшити час виконання комплексу робіт при умові, що $t'_{ij} = t_{ij}(1 - c_{ij}x_{ij})$, c_{11}= 0,2, c_{14} = 0,4, $x_{34} \leq 6$. При цьому перевірити, чи зміниться критичний шлях.

5. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1*.* Для проведення технічного обслуговування радіоприймача необхідно провести певні операції з такими витратами:

– огляд апаратури – 1,5 год;

– перевірка роботоздатності – 1 год;

– перевірка стану та профілактика джерел живлення – 2,5 год;

– перевірка та профілактика монтажу апаратури – 1 год;

– перевірка і заміна електровакуумних приладів – 0,5 год;

– перевірка документації, запасного майна та приладів (ЗМП) – 1 год;

– вимірювання параметрів радіоприймача –1 год.

Побудувати сітковий графік комплексу регламентних робіт радіоприймача й визначити його характеристики.

Розв’язання. Уведемо позначення:

– b_1 – робота з огляду й настроювання апаратури;

– b_2 – робота з перевірки роботоздатності;

– b_3 – робота з перевірки стану та профілактики джерел живлення;

– b_4 – робота з перевірки та профілактики монтажу апаратури;

– b_5 – робота з перевірки та заміни електровакуумних приладів;

– b_6 – робота з перевірки документації, запасного майна та приладів;

– b_7 – робота з вимірювання параметрів радіоприймача.

Складемо структурну таблицю комплексу робіт. Для цього попередньо з'ясуємо, на які роботи спирається кожна з перелічених робіт.

Очевидно, що комплекс профілактичних робіт необхідно починати з огляду й очищення апаратури, тобто з роботи $\boldsymbol{b_1}$. Паралельно можна почати перевірку документації та ЗМП, тобто роботу $\boldsymbol{b_6}$.

Роботу з перевірки роботоздатності приймача слід починати після його огляду й очищення. Отже, робота $\boldsymbol{b_2}$ спирається на роботу $\boldsymbol{b_1}$. Після проведення роботи $\boldsymbol{b_2}$ можна починати роботу $\boldsymbol{b_3}$ (перевірку стану та профілактику джерел живлення) і роботу $\boldsymbol{b_5}$ (перевірку й заміну електровакуумних приладів). Отже, робота $\boldsymbol{b_3}$ спирається на роботу $\boldsymbol{b_2}$. Що ж стосується роботи $\boldsymbol{b_5}$, то вона має починатися як після роботи $\boldsymbol{b_2}$, так і після перевірки ЗМП, тобто роботи $\boldsymbol{b_6}$. Таким чином, робота $\boldsymbol{b_5}$ спирається на роботи $\boldsymbol{b_2}$ і $\boldsymbol{b_6}$. Профілактика й перевірка монтажу апаратури проводиться після заміни електровакуумних приладів. Отже, робота $\boldsymbol{b_1}$ спирається на роботу $\boldsymbol{b_5}$.

Нарешті, вимірювання параметрів радіоприймача здійснюється після перевірки монтажу та профілактики джерел живлення, тобто робота $\boldsymbol{b_7}$ спирається на роботи $\boldsymbol{b_3}$ і $\boldsymbol{b_4}$. Табл. 5.1 – структурна таблиця комплексу робіт.

Таблиця 5.1

№ п/п	Робота	Спирається на роботу	Ранг
1	$\boldsymbol{b_1}$	–	1
2	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_1}$	2
3	$\boldsymbol{b_3}$	$\boldsymbol{b_2}$	3
4	$\boldsymbol{b_4}$	$\boldsymbol{b_5}$	4
5	$\boldsymbol{b_5}$	$\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_6}$	3
6	$\boldsymbol{b_6}$	–	1
7	$\boldsymbol{b_7}$	$\boldsymbol{b_3}, \boldsymbol{b_4}$	5

Проведемо впорядкування табл. 5.1. До робіт 1-го рангу належать роботи $\boldsymbol{b_1}$ і $\boldsymbol{b_6}$, позначимо їх через $\boldsymbol{\alpha_1}$ і $\boldsymbol{\alpha_2}$. До робіт 2-го рангу належить робота $\boldsymbol{b_2}$, позначимо її через $\boldsymbol{\alpha_3}$. До робіт 3-го рангу належать роботи $\boldsymbol{b_3}$ і $\boldsymbol{b_5}$, позначимо їх через $\boldsymbol{\alpha_4}$ і $\boldsymbol{\alpha_5}$. До робіт 4-го рангу належить робота $\boldsymbol{b_4}$, позначимо її через $\boldsymbol{\alpha_6}$. Нарешті, до робіт 5-го рангу належить робота $\boldsymbol{b_7}$, позначимо її через $\boldsymbol{\alpha_7}$.

Табл. 5.2 – упорядкована структурна таблиця комплексу робіт.

Таблиця 5.2

№ п/п	Робота	Спирається на роботу	Термін виконання, год
1	α_1	–	1,5
2	α_2	–	1,0
3	α_3	α_1	1,0
4	α_4	α_3	2,5
5	α_5	α_2, α_3	0,5
6	α_6	α_5	1,0
7	α_7	α_4, α_6	3,0

Побудуємо сітковий графік (рис. 5.1). Для цього до впорядкованої структурної таблиці додамо ще одну колонку, у яку запишемо час виконання кожної з робіт.

Побудову сіткового графіка починаємо з вузла A_0, розміщеного на початку координат. З цього вузла виходять дві стрілки: α_1 і α_2, проєкції яких на горизонтальну вісь дорівнюють часу виконання відповідних робіт: t_1 = 1,5 год, t_2 = 1 год. Робота α_3 спирається на роботу α_1 і не може початися раніше, ніж закінчиться α_1. Оскільки час виконання α_3 дорівнює t_3 = 1 год, координату τ_3 вузла A_3 знаходимо так:

$$\tau_3 = t_1 + t_3 = 1{,}5 + 1 = 2{,}5 \text{ год.}$$

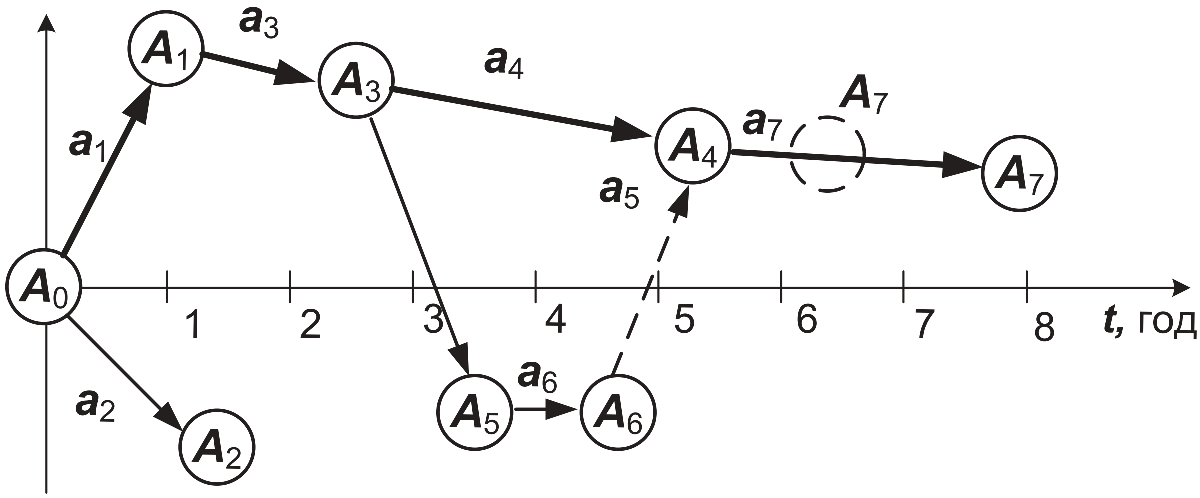

Рис. 5.1

Робота α_5 спирається на роботи α_3 і α_2. Але оскільки робота α_3 закінчується в момент часу t_3 = 2,5, а робота α_2 – у момент часу t_2 = 1, стрілку до вузла A_5 проводимо з вузла A_3, а вузол A_2 з'єднуємо з вузлом

A_3 пунктирною стрілкою. Аналогічно будуємо інші частини сіткового графіка.

Визначаємо характеристики графіка:

1. Мінімальний час, за який має бути завершений комплекс робіт:

$$T = t_1 + t_3 + t_4 + t_7 = 1,5 + 1 + 2,5 + 3 = 8 \text{ год.}$$

Критичні роботи – α_1, α_3, α_4, α_7.

2. Критичний шлях – послідовність робіт, з тривалостей яких складається мінімальний час T:

$$L = A_0 - \alpha_1 - A_1 - \alpha_3 - A_3 - \alpha_4 - \alpha_7 - A_7.$$

3. Некритичні дуги − послідовність робіт, які починаються й закінчуються на критичному шляху:

$$A_0 - \alpha_2 - A_2 - A_3,$$
$$A_3 - \alpha_5 - A_5 - \alpha_6 - A_6 - A_4.$$

Таким чином, цей часовий сітковий графік містить дві некритичні дуги. Це означає, що роботи α_2 і α_5, α_6 мають відповідні резерви часу й можуть бути закінчені з деяким запізненням.

4. Резерви часу дорівнюють проєкціям пунктирних стрілок, що входять у некритичні дуги. Резерв часу для роботи α_2 дорівнює 1,5 год, а для робіт α_5 і α_6 – 1 год.

Задача 2. Під час проведення кожної роботи комплексу регламентних робіт радіоприймача використовуються витратні матеріали й інструмент. Відомо: якщо на проведення роботи α_i додатково придбати матеріали й інструменти на суму x_i (у гривнях), то час виконання роботи зменшується до $t_i' = t_i(1 - c_i x_i)$.

Визначити, на яку мінімально можливу суму слід додатково закупити інструменти й матеріали щоб час проведення критичних робіт не перевищував 7 год, а додаткові витрати не перевищили: на проведення роботи α_1 − 20 грн, α_3 − 20 грн, α_4 − 20 грн, α_7 − 30 грн. Значення коефіцієнтів для відповідних критичних робіт є такими: c_1 = 0,02, c_3 = 0,03, c_4 = 0,02, c_7 = 0,02.

Розв'язання. Сумарні витрати на придбання додаткових матеріалів та інструментів під час проведення критичних робіт визначають за формулою

$$L(x) = x_1 + x_3 + x_4 + x_7.$$

При цьому витрати на проведення робіт є такими: на $\boldsymbol{\alpha_1}$ – $\boldsymbol{x_1}$ ≤ 20; на $\boldsymbol{\alpha_3}$ – $\boldsymbol{x_3}$ ≤ 20; на $\boldsymbol{\alpha_4}$ – $\boldsymbol{x_4}$ ≤ 20; на $\boldsymbol{\alpha_7}$ – $\boldsymbol{x_7}$ ≤ 30.

Визначимо новий термін проведення робіт:

$$\boldsymbol{T'} = \boldsymbol{t'_1} + \boldsymbol{t'_3} + \boldsymbol{t'_4} + \boldsymbol{t'_7} = 1{,}5(1 - 0{,}02x_1) + 1{,}5(1 - 0{,}03x_3) +$$
$$+ 1{,}5(1 - 0{,}02\boldsymbol{x_4}) + +1{,}5(1 - 0{,}02\boldsymbol{x_7}) = 8 - 0{,}03\boldsymbol{x_1} - 0{,}03\boldsymbol{x_3} -$$
$$- 0{,}05\boldsymbol{x_4} - 0{,}06\boldsymbol{x_7} \leq 7.$$

Тоді задача формулюється таким чином. Знайти невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$, $\boldsymbol{x_7}$, які задовольняють обмеженням

$$\boldsymbol{x_1} \leq 20;\ \boldsymbol{x_3} \leq 20;\ \boldsymbol{x_4} \leq 20;\ \boldsymbol{x_7} \leq 30,$$
$$8 - 0{,}03\boldsymbol{x_1} - 0{,}03\boldsymbol{x_3} - 0{,}05\boldsymbol{x_4} - 0{,}06\boldsymbol{x_7} \leq 7$$

і перетворюють на мінімум цільову функцію

$$\boldsymbol{L(x)} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{x_4} + \boldsymbol{x_7}.$$

Обмеження є лінійними нерівностями, цільова функція – лінійною функцію змінних $\boldsymbol{x_i}$, тому задача оптимізації сіткового графіка є задачею лінійного програмування.

Запишемо обмеження в такому вигляді:

$$\boldsymbol{x_1} \leq 20;$$
$$\boldsymbol{x_3} \leq 20;$$
$$\boldsymbol{x_4} \leq 20;$$
$$\boldsymbol{x_7} \leq 30;$$
$$-100 + 3\boldsymbol{x_1} + 3\boldsymbol{x_3} + 5\boldsymbol{x_4} + 6\boldsymbol{x_7} \geq 0.$$

Уведемо додаткові обмеження:

$$\boldsymbol{y_1} = 20 - \boldsymbol{x_1};$$
$$\boldsymbol{y_2} = 20 - \boldsymbol{x_3};$$
$$\boldsymbol{y_3} = 20 - \boldsymbol{x_4};$$
$$\boldsymbol{y_4} = 30 - \boldsymbol{x_7};$$
$$\boldsymbol{y_5} = -100 + 3\boldsymbol{x_1} + 3\boldsymbol{x_3} + 5\boldsymbol{x_4} + 6\boldsymbol{x_7}.$$

Задачу сформулюємо таким чином. Знайти невід'ємні значення змінних $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$, $\boldsymbol{x_7}$, $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$, $\boldsymbol{y_3}$, $\boldsymbol{y_4}$, $\boldsymbol{y_5}$, які перетворюють на мінімум цільову функцію ***L(x)*** і задовольняють наведеним обмеженнямнерівностям. Оскільки кількість змінних n = 9, а кількість рівнянь-обмежень m = 5, тобто $n - m$ = 4, скористаємося симплекс-методом розв'язання задачі лінійного програмування [15]. Як вільні змінні беремо змінні x_1, x_3, x_4, x_7. Запишемо рівняння-обмеження й цільову функцію у стандартній формі:

$$y_1 = 20 - (x_1);$$
$$y_2 = 20 - (x_3);$$
$$y_3 = 20 - (x_4);$$
$$y_4 = 30 - (x_7);$$
$$y_5 = -100 - (-3x_1 - 3x_3 - 5x_4 - 6x_7);$$
$$L(x) = 0 - (-x_1 - x_3 - x_4 - x_7).$$

Заповнимо першу симплекс-таблицю (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_1	x_3	x_4	$\overleftarrow{x_7}$
$L(x)$	0	–1	–1	–1	–1
y_1	20	1	0	0	0
y_2	20	0	1	0	0
y_3	20	0	0	1	0
y_4	30	0	0	0	1
↑ y_5	–100	–3	–3	–5	$\boxed{-6}$

Уважаючи вільні змінні такими, що дорівнюють нулю, отримаємо перший розв'язок $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_7 = 0$, $y_1 = 20$, $y_2 = 20$, $y_3 = 20$, $y_4 = 30$, $y_5 = -100$, який не буде опорним (допустимим), оскільки y_5 = –100 – від'ємне число, що суперечить умові невід'ємності змінних.

Отже, базисну змінну y_5 уводимо до складу вільних змінних. Оскільки коефіцієнти при вільних змінних x_1, x_3, x_4, x_7 у рядку y_5 мають однаковий знак з вільним членом, виберемо ту вільну змінну для переведення до складу базисних, відношення вільного члена до коефіцієнта при якій буде мінімальним. У цій задачі це буде змінна x_7.

Таким чином, розв'язувальним стовпцем буде стовпець x_7, розв'язувальним рядком – рядок y_5, а розв'язувальним елементом – елемент, який знаходиться на їх перетині, тобто –6.

Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 5.4).

Таблиця 5.4

Базові змінні	Вільні змінні				
	ВЧ	x_1	x_3	x_4	$\overleftarrow{y_5}$
L(x)	$\frac{100}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
y_1	20	1	0	0	0
y_2	20	0	1	0	0
y_3	20	0	0	1	0
y_4	$\frac{80}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\uparrow x_7$	$\frac{100}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Узявши вільні змінні такими, що дорівнюють нулю, одержимо розв'язок задачі:

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{x_4} = \boldsymbol{y_5} = 0, \boldsymbol{y_1} = 20, \ \boldsymbol{y_2} = 20, \boldsymbol{y_3} = 20,$$
$$\boldsymbol{y_4} = 13{,}4, \ \ \boldsymbol{x_7} = 16{,}7.$$

Цей розв'язок є опорним (допустимим) і водночас оптимальним, тому що всі коефіцієнти при вільних змінних у рядку ***L(x)*** є від'ємними. Таким чином, розв'язок задачі оптимізації сіткового графіка має вигляд $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{x_4} = 0, \boldsymbol{x_7}$ = 16,7.

Це означає, що для зменшення часу виконання комплексу профілактичних робіт необхідно додатково придбати матеріалів та інструментів на суму 16,7 тис. грн тільки для проведення роботи $\boldsymbol{x_7}$.

Мінімальний час проведення комплексу регламентних робіт тепер буде таким:

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{t}_1' + \boldsymbol{t}_3' + \boldsymbol{t}_4' + \boldsymbol{t}_7' = 1{,}5 + 1 + 2{,}5 + 3(1 - 0{,}2 \cdot 16{,}7) = 7 \text{ год.}$$

Зазначимо, що критичний шлях оптимізованого сіткового графіка залишився незмінним.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища шк., 1995. – 319 с.
2. Медиченко, М. П. Методы оптимального планирования и управления / М. П. Медиченко. – М. : МО СССР, 1986. – 192 с.
3. Дедков, В. К. Основные вопросы эксплуатации сложных систем / В. К. Дедков, Н. А. Северцев. – М. : Высш. шк., 1976. – 405 с.
4. Поспелов, Г. С. Программно-целевое планирование и управление / Г. С. Поспелов, В. Л. Ириков. – М. : Сов. радио, 1976. – 440 с.
5. Калинин, В. Н. Теория систем и управления / В. Н. Калинин, Б. А. Резников. – Л. : ВИКИ им. Можайского, 1978. – 417 с.
6. Крайзмер, Л. П. Кибернетика / Л. П. Крайзмер. – М. : Экономика, 1977. – 279 с.
7. Денисов, Л. А. Теория больших систем управления / Л. А. Денисов, Д. Н. Колесников. – Л. : Энергоиздат, 1992. – 287 с.
8. Бир, Ст. Кибернетика и управление производством / Ст. Бир. – М. : Наука, 1985. – 391 с.
9. Бусленко, Н. П. Лекции по теории сложных систем / Н. П. Бусленко, В. В. Калашников, И. Н. Коваленко. – М. : Радио и связь, 1993. – 439 с.
10. Снапелев, Ю. М. Моделирование и управление в сложных системах / Ю. М. Снапелев, В. А. Старосельских. – М. : Сов. радио, 1984. – 264 с.
11. Синяк, В. А. Электронная автоматика в военном деле / В. А. Синяк // Радио. – 1989. – № 2. – С. 84–93.
12. Машинные методы оптимизации в технике святи / Р. Н. Пашкеев и др. – М. : Связь, 1986. – 272 с.
13. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Сов. радио, 1982. – 552 с.
14. Благодарний, М. П. Однокрокові та багатокрокові моделі оптимізації в умовах визначеності : навч. посіб. / М. П. Благодарний. – Харків : ХАІ, 2019. – 176 с.
15. Дегтярев, Ю. Л. Методы оптимизации / Ю. Л. Дегтярев. – М. : Радио и связь, 1990. – 270 с.
16. Благодарний, М. П. Спеціальні питання сучасного керування та оптимізації : навч. посіб. У 3 ч. Ч. 1. Методи обґрунтування управлінських рішень в умовах повної інформації / М. П. Благодарний. – Харків : ХАІ, 2019. – 176 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Благодарний Микола Петрович

СІТКОВЕ ПЛАНУВАННЯ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2022
Підписано до друку 15.05.2023
Формат 60×84 1/16. Папір офс. Офс. друк
Ум. друк. арк. 5,8. Обл.-вид. арк. 6,5. Наклад 50 пр.
Замовлення 130. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001