



Загальні питання двигунобудування та механіки

УДК 532 (075.8)

ВПЛИВ ФОРМИ СОСУДУ НА ЧАС ВИТІКАННЯ РІДИНИ

М. В. Амброжевич, Д. М. Чиж

*Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"*

Мета дослідження: аналіз впливу форми сосуду на характер зміни рівня рідини і швидкість витікання з нього ідеальної рідини; вплив локальних супротивів на характеристики витікання для малов'язкої рідини (вода, керосин, ацетон, тощо).

Актуальність: вивчення закономірності витікання рідини з сосуду під дією сили тяжіння є однією з найстаріших задач гідравліки. За законом Торрічеллі (1608-1647) швидкість витікання рідини w під дією сили тяжіння: $w = \sqrt{2gH}$.

Тим не менше, задача залишається актуальною через поширеність питань зберігання, транспортування і переливання рідини з ємностей різної форми. В класичних підручниках відсутнє таке зіставлення, а воно є корисним для кількісної оцінки: впливу форми сосуду на характеристики процесу; впливу характеристик насадка і крана на характеристики процесу.

1. Наведемо формули для розрахунку геометричних характеристик ємностей різної форми, які мають однаковий об'єм V та висоту H :

Будемо розглядати чотири фігури сферу, циліндр, паралелепіпед та конус. Так як об'єм сфери залежить лише від одного параметра (від радіусу), то підбирати геометричні характеристики інших фігур будемо спираючись на об'єм сфери.

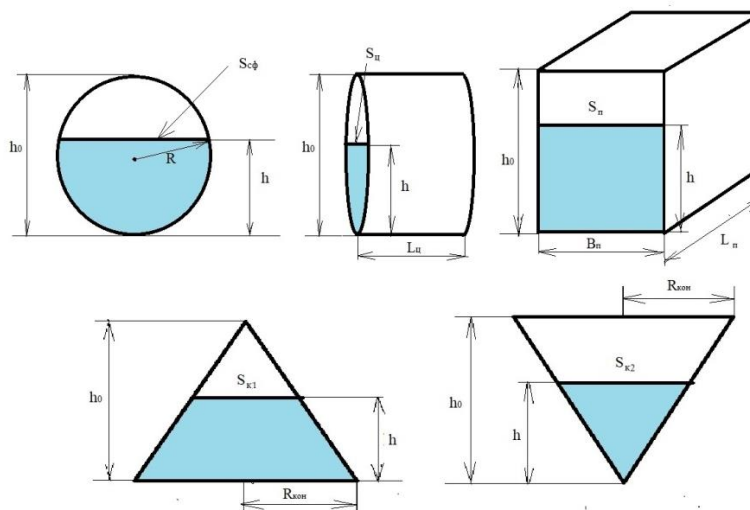


Рис. 1 – Досліджувані форми

1.1. Сфера одиничного радіуса $R = 1$ має об'єм: $V_c = 4/3 \pi R^3$.

1.2. Горизонтальний циліндр одиничного радіуса $R = 1$ і довжиною L має об'єм: $V_{ц} = \pi R^2 L_{ц} = V_{ш}$. Звідки довжина циліндра: $L_{ц} = 4/3 R$.



1.3. Паралелепіпед висотою $H_{\Pi} = 2R$, и об'ємом $V_{\Pi} = V_{\text{Ц}} = V_{\text{Ш}}$ має площу основи: $S_{\Pi} = \frac{4/3\pi R^3}{2R} = 2/3 \pi R^2$. Якщо довжина паралелепіпеда буде дорівнювати довжині горизонтального циліндру $L_n = L_{\text{ц}} = 4/3 R$ його ширина складе: $B_{\Pi} = S/L_{\Pi} = \frac{2}{3} \pi R^2 / \frac{4}{3} R = \pi/2 R$.

1.4. Круговий конус висотою $H_{\text{кон}} = 2R_{\text{ш}} = 2R$ и об'ємом $V_{\text{кон}} = V_{\text{ш}}; 1/3 \pi R_{\text{кон}}^2 \cdot 2R = 4/3 \pi R^3$, буде мати радіус основи: $R_{\text{кон}} = \sqrt{2}R$.

2. Витікання ідеальної (нев'язкої) рідини.

Рівняння витрат у всіх випадках однакове: $f\sqrt{2gh} = -dV(h)/dt$,

де f – площа живого перерізу насадка, через який відбувається витікання.

Зміна об'єму, який займає рідина: $dV(h) = S(h) \cdot dh$, де S – площа «дзеркала» (верхньої вільної поверхні рідини).

Швидкість витікання змінюється з часом за законом: $w(t) = \sqrt{2gh}$

Отримаємо формули для визначення часу пониження рівня ідеальної рідини від початкового h_0 до кінцевого h .

Таблиця 1 – Час пониження рівня ідеальної рідини від початкового h_0 до кінцевого h рівня

Форма	Формула часу витікання t(h)	Повний час витікання
Паралелепіпед	$\frac{2S}{\sqrt{2g} \cdot f} \cdot [\sqrt{h_0} - \sqrt{h}]$	$\frac{2\sqrt{2} \cdot B \cdot L \cdot \sqrt{R}}{\sqrt{2g} \cdot f}$
Циліндр	$\frac{4L}{3\sqrt{2g} \cdot f} [(2R - h)^{1,5} - (2R - h_0)^{1,5}]$	$\frac{8\sqrt{2} \cdot L}{3\sqrt{2g} \cdot f} R^{1,5}$
Сфера	$\frac{\pi}{\sqrt{2g} \cdot f} \left[\frac{4R}{3} (h_0^{1,5} - h^{1,5}) - 0,4(h_0^{2,5} - h^{2,5}) \right]$	$\frac{16\sqrt{2} \cdot \pi}{15\sqrt{2g} \cdot f} R^{2,5}$
Конус 1	$\frac{\pi}{2\sqrt{2g} \cdot f} \cdot 0,4 \cdot h^{2,5} \Big _h^{h_0}$	$\frac{0,8\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2g} \cdot f} \cdot R^{2,5}$
Конус 2	$\frac{\pi}{2\sqrt{2g} \cdot f} \cdot \left[4R^2 \cdot 2\sqrt{h} \Big _h^{h_0} - 4R \cdot \frac{2}{3} h^{1,5} \Big _h^{h_0} + 0,4h^{2,5} \Big _h^{h_0} \right]$	$\frac{32\sqrt{2}\pi \cdot R^{2,5}}{15\sqrt{2g} \cdot f}$

Вважаючи, що час витікання рідини з паралелепіпеда дорівнює 1, отримуємо безрозмірний час витікання з посудів іншої форми:

Таблиця 2 – Безрозмірний час витікання рідини з посуду різної форми

Форма	Сфера	Циліндр	Паралелепіпед	Конус вершиною вгору	Конус вершиною вниз
Безрозмірний час	0,8	8/(3π)	1	0,6	1,6

Будуємо графіки зміни висоти рідини в посуді за часом (рис. 2, 3).

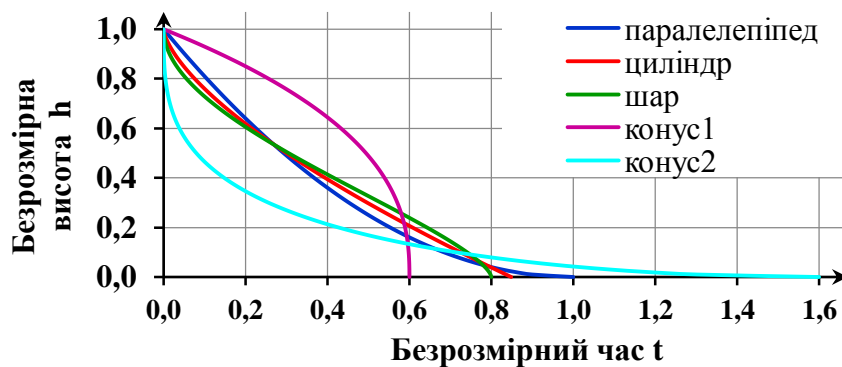


Рис. 2 – Характер зміни висоти рівня ідеальної рідини за вільного гравітаційного витікання з посудів різної форми

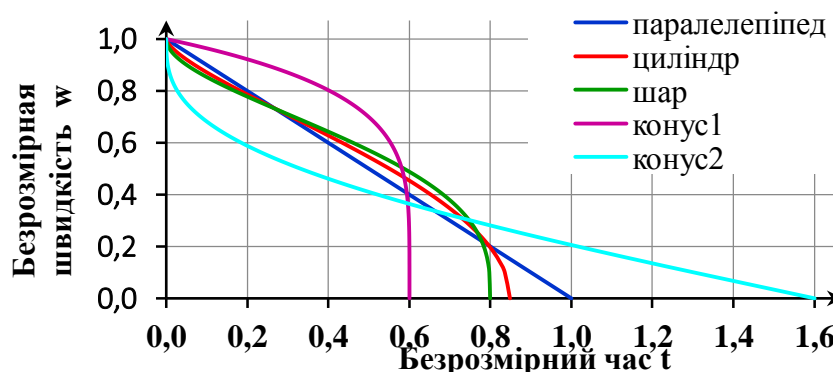


Рис. 3 – Характер зміни швидкості витікання ідеальної рідини за вільного гравітаційного витікання з посудів різної форми

3. Витікання реальної рідини [1]:

$$\mu \cdot f \sqrt{2gh} = -\frac{dV(h)}{dt}$$

де μ – коефіцієнт витрати, який, вважаючи коефіцієнт звуження струї в циліндричному насадку рівним $\varepsilon = 1$, можна розрахувати як $\mu = \varepsilon \cdot \varphi = \varphi$, де φ – коефіцієнт швидкості, який з врахуванням локальних та шляхових витрат:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{суж}} + \xi_{\text{вент}} + \xi_{\text{пов}} + \xi_{\text{пут}}}},$$

де $\xi_{\text{суж}} = 0,02 \dots 0,5$ – коефіцієнт локальних витрат за різкого звуження (на вході в насадок) – менше значення за колоїдального насадка, більше – за звичайного зовнішнього циліндричного насадка; $\xi_{\text{вент}} = 0,8 \dots 4$ – коефіцієнт локальних витрат крана в залежності від конструкції; $\xi_{\text{пов}} = 0,18$ – коефіцієнт локальних витрат за плавного повороту на кут 90° ; $\xi_{\text{пут}}$ – коефіцієнт локальних витрат, функція числа Рейнольдса і висоти шорсткості труби, для коротких проміжків $l \leq 3 \dots 4d$, шляховими витратами нехтуємо [1].

Для порівняння коефіцієнту витрат для конічного насадка (рис.4, 5).

$$dV(h) = dh; \mu \cdot f \sqrt{2gh} = -S(h) \cdot \frac{dh}{dt}; \Delta t = \frac{S(h)}{\mu \cdot f \sqrt{2gh}} \Delta h.$$



$$\text{Звідки шаг за часом: } \Delta t_i = \frac{2L_{\text{ц}} \cdot \sqrt{R_{\text{ц}}^2 - (h_i - R_{\text{ц}})^2}}{\mu \cdot f \sqrt{2gh_i}} \Delta h .$$

Наступний момент часу визначається за формулою: $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$.

Графічне порівняння наведено на рис. 4, 5.

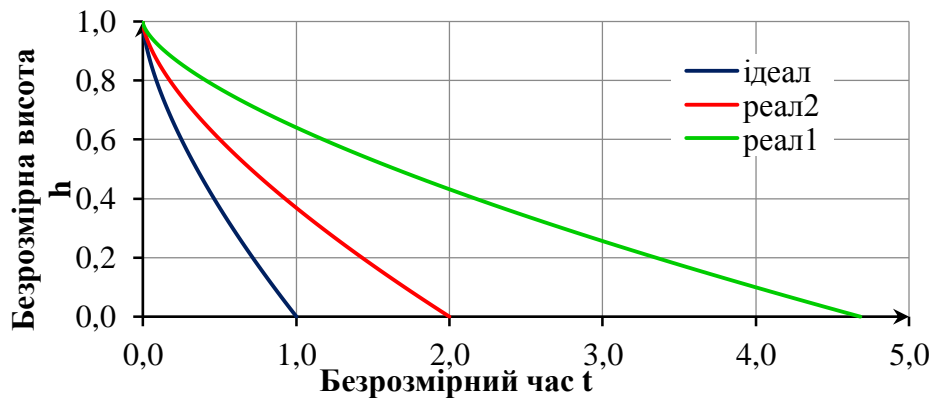


Рис. 4 – Порівняння динаміки витікання реальної рідини з цистерни для двох типів насадок та зливних пристроїв: реал1 – звичайний зовнішній циліндричний насадок; реал2 – конічний насадок.

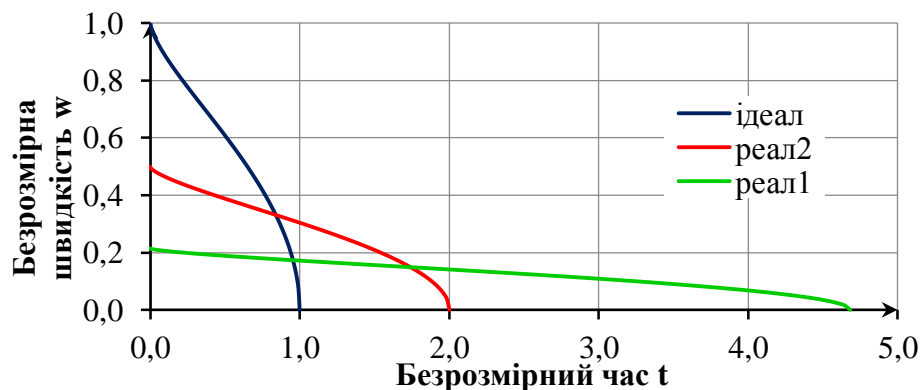


Рис. 5 – Порівняння швидкості витікання реальної рідини з цистерни для двох типів насадок та зливних пристроїв: реал1 – звичайний зовнішній циліндричний насадок; реал2 – конічний насадок.

Висновки: в роботі проаналізовано витікання ідеальної та реальної рідини з посудів різних форм: сферичної, циліндричної, конічної та паралелепіпеда. Отримано формули для розрахунку часу витікання рідини від початкового рівня h_0 до якогось фіксованого рівня h , графічно порівняно повний час витікання к ідеальної, так і реальної рідин з посудів вищезазначених форм. Аналізуючи отримані графіки, бачимо, що для найшвидшого витікання рідини доцільно обирати посуд конічної форми, розміщений вершиною вгору, для найповільнішого – конус, розміщений вершиною донизу. Дані, отримані в цій роботі, можна використовувати при розрахунку параметрів процесу переливання рідини з ємностей різної форми за конкретних параметрів насадка (зливного пристрою).

Перелік використаної літератури

1. Некрасов, Б. Б. Гидравлика и её применение на летательных аппаратах. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение. 1967. – 368 с.