

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. Ф. Деменко, С. С. Курєннов

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2018

УДК 539.319(075.8)

Д-30

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. О. Я. Качан,
д-р техн. наук, проф. О. О. Стрельнікова

Деменко, В. Ф.

Д-30 Основи теорії напружено-деформованого стану [Текст] : навч. посіб. /
В. Ф. Деменко, С. С. Куреннов. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т
ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2018. – 256 с.

ISBN 978-966-662-652-6

Посібник охоплює основні теоретичні й практичні проблеми теорії напружено-деформованого стану в околі точки пружно деформованого твердого тіла, що стосуються визначення діючих напружень, деформацій, переміщень, а також потенціальної енергії пружної деформації за умов довільного зовнішнього навантаження різноманітних конструктивних елементів. Для забезпечення практичної підготовки студентів і самостійної роботи теоретичний матеріал кожного розділу доповнено прикладами розв'язання типових практичних задач, а також значною кількістю умов домашніх завдань. Актуальність посібника визначається великим значенням розділу «Теорія напружено-деформованого стану» для вивчення загальноінженерної дисципліни «Механіка матеріалів», яка є невід'ємною складовою навчальних планів підготовки фахівців за напрямками «Авіа- і ракетобудування», «Двигуни і енергетичні установки літальних апаратів», «Прикладна механіка», «Інженерна механіка», «Машинобудування», «Енергомашинобудування».

Для студентів, які навчаються за напрямками знань «Авіаційна та ракетно-космічна техніка», «Машинобудування та матеріалооброблення», «Енергетика і енергетичне машинобудування».

Іл. 105. Табл. 8. Бібліогр.: 24 назви

УДК 539.319(075.8)

© Деменко В. Ф., Куреннов С. С., 2018

© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2018

ISBN 978-966-662-652-6

ПЕРЕДМОВА

Вивчення напружень, деформацій і переміщень у деформованому твердому тілі, тобто оцінювання напружено-деформованого стану в його точках, – важливий етап розрахунку на міцність, стійкість і довговічність будь-якої машини або інженерної споруди. При цьому точність такого розрахунку значною мірою залежить від розуміння зроблених припущень, а також від вибору адекватної теорії граничного напруженого стану, тобто умов, у межах яких ці припущення є правдивими. Усе це обумовлює необхідність вивчення теорії напружено-деформованого стану в тісному зв'язку з видом деформації, якої зазнає той чи інший конструктивний елемент.

Успішне освоєння цього розділу механіки деформованого твердого тіла є неможливим без набуття навичок практичного вирішення реальних інженерних завдань, які ми підібрали в цьому навчальному посібнику, виходячи з власного досвіду роботи в області розрахунку інженерних конструкцій, а також експериментальних досліджень їх поведінки при термомеханічному навантаженні, у першу чергу, методами електротензометрії.

Викладаючи теоретичний матеріал, а також підбираючи приклади з розв'язаннями задач і завдання для домашньої роботи, ми намагалися проілюструвати ті проблеми, які виникають у практиці інженерних розрахунків, бо вважали своєю основною метою забезпечити набуття навичок вирішення саме практичних завдань усіма тими, хто мріє стати сучасним інженером і працювати в найрізноманітніших галузях машинобудування.

З повагою, автори.

Вступ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МЕХАНІКИ ДЕФОРМОВАНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Деформовані тверді тіла

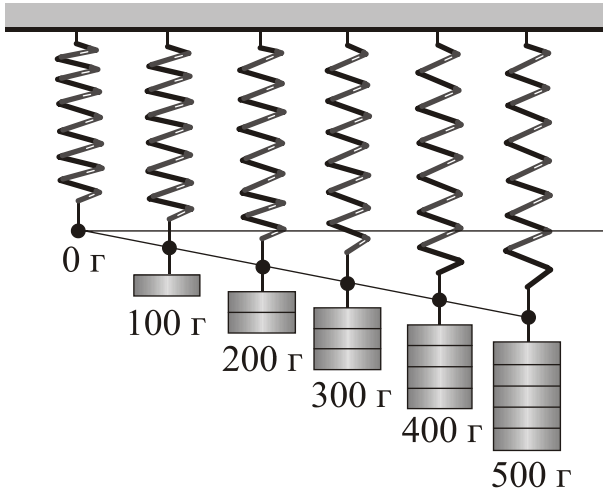


Рис. В.1. Розтягання сталевієї пружини (збільшення розтягальної сили приводить до пропорційного збільшення довжини пружини, тобто до її подовження)

крила, наприклад, переміщується в польоті вверх-униз на десятки сантиметрів. Таким чином, *деформування тіла супроводжується переміщенням усіх його точок у просторі відносно положення, яке вони займали до навантаження*. Тіла, про які йдеться, будемо називати **деформованими твердими тілами (ДТТ)**.

Головною особливістю твердих тіл, що нас оточують і більшість з яких є машинами, будівлями та спорудами, створеними людиною, вважають їх здатність **деформуватися**, тобто змінюватися під дією зовнішніх сил і силових полів за розмірами, формою, а також об'ємом. Ці зміни, наприклад **подовження** пружини (рис. В.1), не завжди можна помітити неозброєним оком, однак вони є характерними для всіх конструктивних елементів, таких, як сталевий трос, залізничний міст або телевізійна вежа.

Деформування твердого тіла відбувається одночасно з його переміщенням як системи матеріальних точок. Так, крила літака тільки здаються нерухомими відносно фюзеляжу. Насправді закінцівка

Деформації твердого тіла

Деформація (від лат. *deformatio* – викривлення) – це змінення взаємного положення частинок тіла, пов'язане з їх переміщенням відносно одна одної. Деформація є результатом змінення міжатомних відстаней і перегрупування блоків атомів.

Необхідно зазначити, що переміщення різних точок ДТТ різняться за величиною й напрямком, а отже, деформації розподіляються по об'єму тіла неоднорідно. Ілюстрацією може бути приклад розтягання гумової смуги з нанесеною квадратною сіткою (рис. В.2). Очевидно, що й розміри чарунок сітки, і прямі кути між сторонами окремих чарунок будуть змінюватися по-різному. Хоча ці точки вибрано на поверхні, подібну відмінність можна знайти й у глибинних точках смуги. Зміна довжини сторони квадрата є ознакою **лінійної деформації**, а зміна прямого кута – **кутової деформації**.

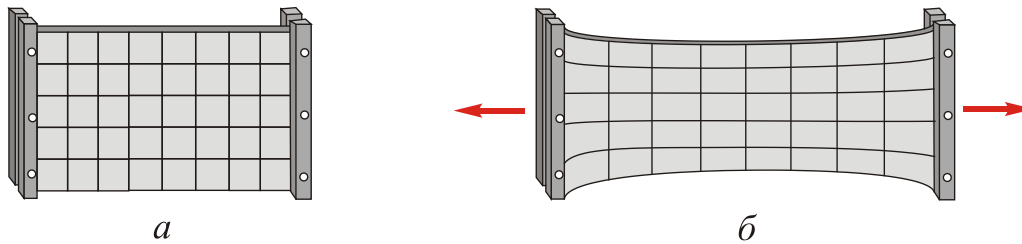


Рис. В.2. Квадратні чарунки на гумовій смузі (а), що під час її розтягання перетворюються на прямокутники й паралелограми (б)

Про механізм утворення деформацій в металах

Оскільки в сучасному машинобудуванні здебільшого використовуються метали та сплави як конструкційні матеріали, для вивчення їх пружної та пластичної деформації дуже важливо мати уявлення про фізичні процеси в металах, базуючись на основних поняттях сучасної теорії будови твердого тіла.

Метал можна уявити як упорядковану структуру з позитивно заряджених іонів (іонних ядер), які виникають унаслідок втрати атомами валентних електронів (одного, двох, а здебільшого – трьох, як в алюмінію), та «електронного газу» цих електронів, які стають більш-менш вільними (**вільні електрони**) і не зв'язані з певними атомами, тому переміщуються в об'ємі металу. Атмосфера «електронного газу» надає металу значних електропровідних властивостей. Можливість відриву валентного електрона виникає при достатньому зближенні атомів. Невалентні електрони, що залишилися разом з атомними ядрами у складі атомів, формують ті іонні ядра, які несуть позитивний заряд, що дорівнює заряду суми валентних електронів.

Зв'язок між атомами внаслідок електростатичних сил взаємодії позитивних іонів та електронного газу, який «склеює» іони, називають **металічним** (рис. В.3). Він притаманний усім металам Періодичної системи Менделєєва. Оскільки ці атоми за своєю природою однакові, то розміщуватися вони мають на таких відстанях один від одного та в таких точках простору, де сили притягання й відштовхування, що діють на них, є однаковими. Приклад такого балансу сил показано на рис. В.4. Стан рівноваги атомів відповідає також мінімуму енергії їх взаємодії. Унаслідок цього відбувається закономірне розміщення атомів в об'ємі металу на міжатомних

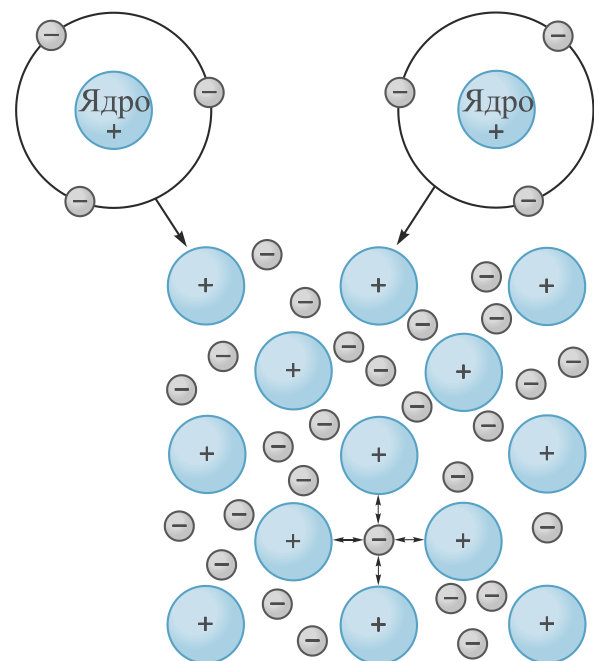


Рис. В.3. Металічний міжатомний зв'язок, коли атоми металу втрачають валентні електрони, які формують «електронний газ»

відстанях, які визначаються нульовим балансом сил притягання й відштовхування між парою атомів або іонів.

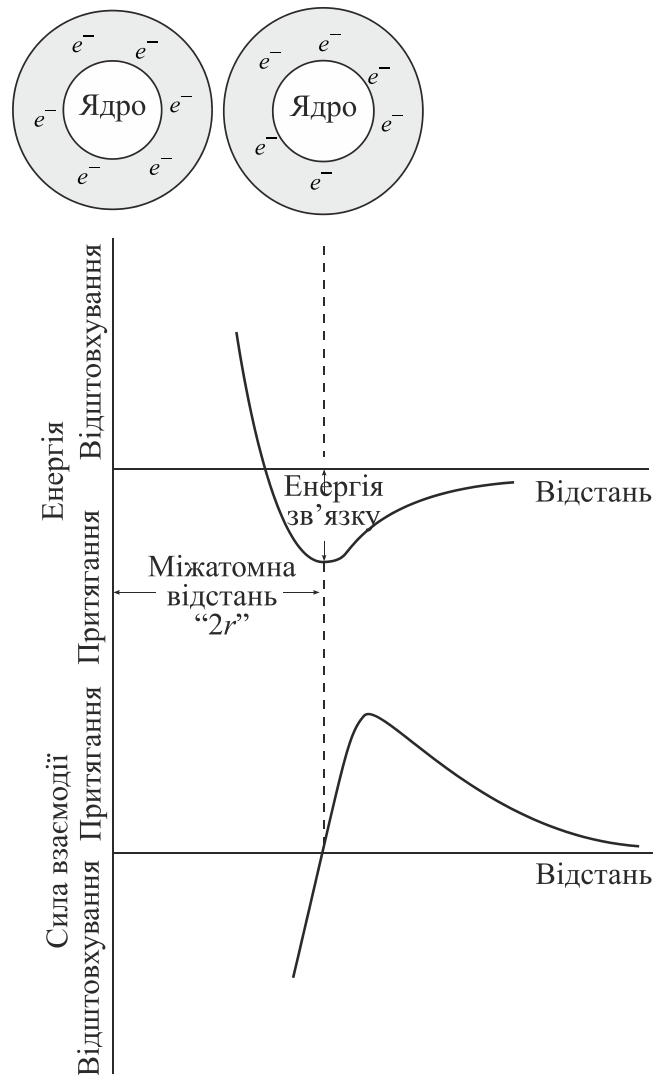
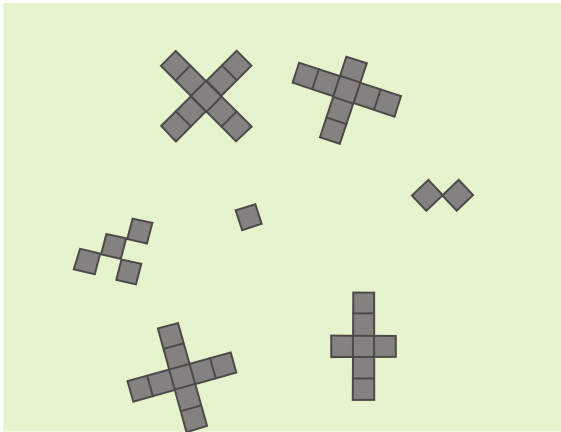


Рис. В.4. Положення рівноваги атомів або іонів на відповідних міжатомних відстанях під дією сил притягання та відштовхування. При цьому досягається мінімум енергії міжатомної взаємодії між парою атомів або йонів і відповідно нульова рівнодійна сил притягання-відштовхування

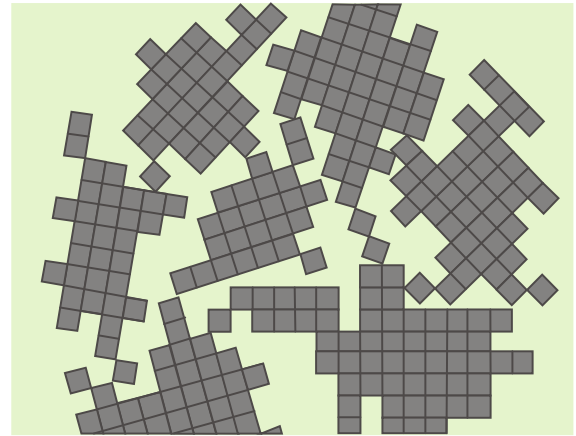
Як відомо, метали мають кристалічну структуру. Ріст кожного кристала з одного з багатьох центрів кристалізації у розплаві металу під час його затвердіння обмежується сусідніми кристалами. Унаслідок цього технічний метал складається з багатьох кристалів неправильної форми – **кристалічних зерен (кристалітів)** (рис. В.5). Кристаліти орієнтовані відносно одне одного по-різному, але в кожному з них атоми через закономірну впорядкованість утворюють так звані **кристалічні ґратки**, які складаються з **елементарних комірок** однакової структури. Приклад такого розміщення атомів показано на рис. В.6.

Кристалічна ґратка – це уявна просторова сітка, у вузлах якої розміщуються атоми (або іони). Більш правильно ці точки визначити як центри найбільш імовірного розміщення іонів, оскільки останні не залишаються нерухомими, а колива-

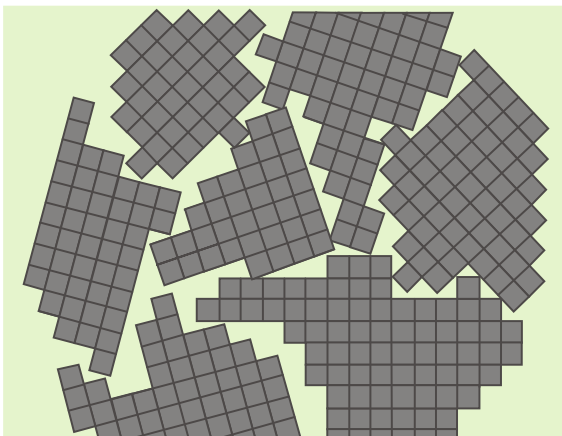
ються навколо цих центрів. Ці центри зазвичай називають **вузлами кристалічних ґраток** (див. рис. В.6). Найпоширенішими типами елементарних комірок у металах є кубічні гранецентровані (рис. В.7, *а*), кубічні об'ємцентровані (рис. В.7, *б*) та гексагональні щільноупаковані (рис. В.7, *в*). Ще раз зазначимо, що в комірках атоми перебувають у стані стійкої рівноваги й мають мінімальну потенціальну енергію.



а



б

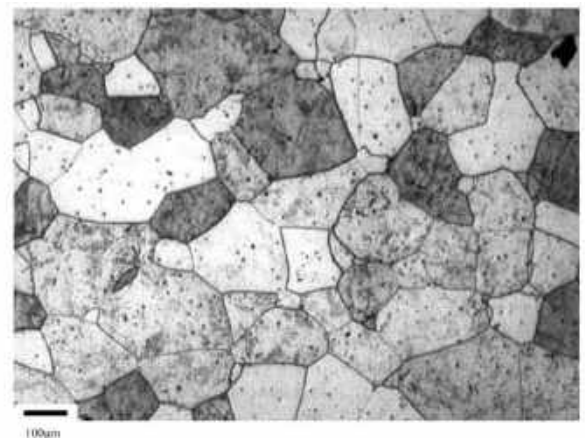


в



г

Рис. В.5. Стадії твердіння полікристалічного матеріалу (квадрати являють собою елементарні комірки): *а* – зародки кристалічних ядер; *б* – ріст кристалічних зерен (кристалітів); *в* – формування невпорядкованих кристалічних зерен після охолодження; *г* – схема формування зерен та їх межі; *д* – мікрофотографія нержавіючої сталі з окремими кристалічними зернами й межами між ними



д

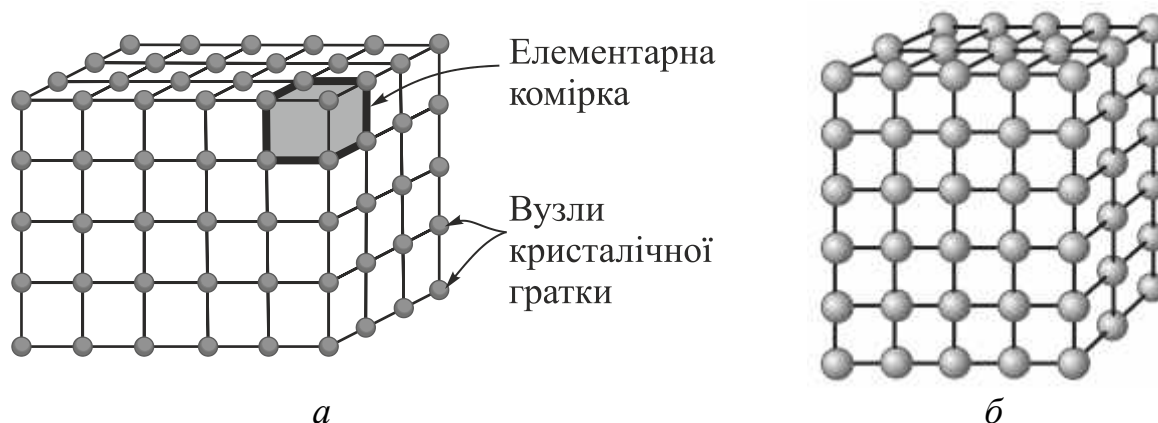


Рис. В.6. Приклад кристалічної будови металу в межах кристалічного зерна:
a – елементарна комірка та її загальноприйняте зображення; *б* – загальний вигляд кристалічної структури з простою кубічною ґраткою

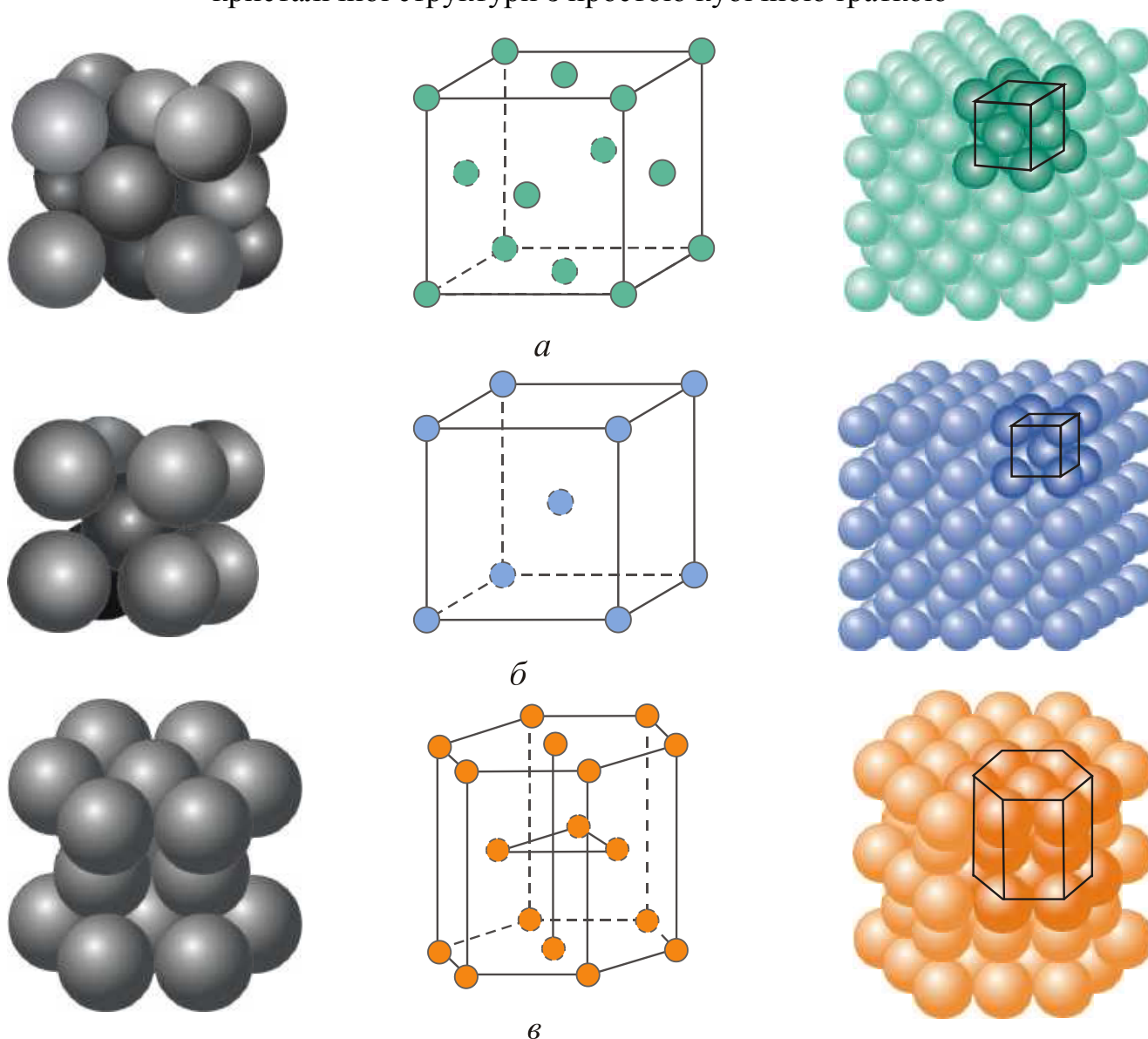


Рис. В.7. Кубічні гранецентровані (*a*), кубічні об'ємоцентровані (*б*) і гексагональні щільноупаковані (*в*) елементарні комірки (зліва та по центру) та відповідні типи кристалічних ґраток металів (справа)

Якщо метал деформується, то відстані між атомами під дією зовнішніх сил змінюються у певних напрямках, лінії та площини, що проходять крізь атоми, а отже, і кристалічні ґратки викривлюються. Оскільки при цьому рівнодійні сил притягання й відштовхування між атомами вже не дорівнюють нулю, то в ґратках діють внутрішні сили, що намагаються повернути атоми в положення рівноваги. Якщо зовнішні сили помірні, то залежність між малими зміщеннями атомів та силами взаємодії з певним ступенем наближення можна вважати лінійною. Макроскопічно це відображається лінійною залежністю між зміщеннями точок тіла та зовнішніми силами, яку відкрив у XVII ст. англійський учений Роберт Гук (Robert Hooke (1635–1703)).

При усуненні помірних зовнішніх сил атоми знову займають свої попередні місця в кристалічних ґратках, унаслідок чого відбувається пружне відновлення форми металевого тіла. Так пояснюється пружна деформація.

Якщо зовнішні сили збільшуються, то збільшуються і внутрішні. При якомусь рівні навантаження ДТТ зовнішні сили настільки перевищують внутрішні, що в зернах металу найчастіше відбувається зміщення однієї частини відносно іншої, яке називають **ковзанням** (рис. В.8). Шляхом досліджень установлено, що ковзання відбувається в площинах і напрямках, уздовж яких атоми розміщуються найбільш щільно (**площинах щільного пакування**). У кожній із кристалічних ґраток, які зображено на рис. В.7, одну таку площину заштриховано, а напрямки ковзання показано стрілками. Це проілюстровано на рис. В.9. Важливою характеристикою цих площин і напрямків є величина внутрішньої зсувної сили, що спричиняє ковзання.

Розгляньмо механізм утворення пластичної деформації в межах одного кристала з ідеальними кристалічними ґратками, спрощену модель яких зображено на рис. В.10, *а*. Нехай у таких ґратках верхній шар атомів зміщується відносно нижнього в площині *A–A*. Якщо припустити, що в процесі зсуву кристалічні ґратки не викривляються, тобто в частинах вище й нижче площини *A–A* відстані між атомами залишаються незмінними, то можна дійти висновку, що всі атоми верхнього шару зміщуються відносно нижнього одночасно і на одну й ту ж величину *u* (рис. В.10, *б*). Доки зміщення, збільшуючись, залишається меншим за половину відстані між атомами $a/2$, доти сили взаємодії між ними перешкоджають зсуву. Як тільки це зміщення перевищить відстань $a/2$, сили взаємодії почнуть сприяти зміщенню ґраток у нове стійке положення рівноваги. Таким чином, пластична деформація відбудеться внаслідок зміщення частини ґраток на відстані, кратні *a* (рис. В.10, *в*). Найменша пластична деформація відповідає зміщенню на *a*. Унаслідок таких зміщень кож-

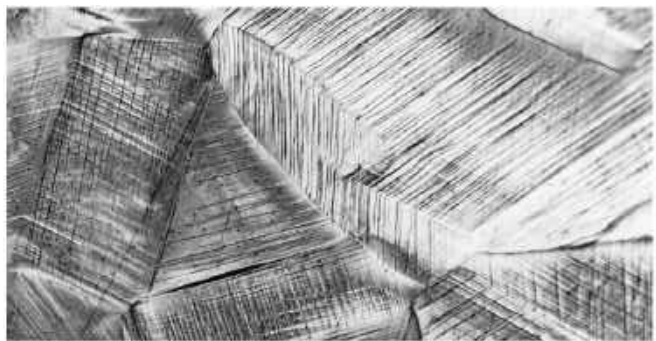


Рис. В.8. Лінії ковзання на полірованій поверхні пластично деформованої полікристалічної міді

ний попередній атом займає місце наступного, усі атоми опиняються на місцях, що властиві даним кристалічним ґраткам. Кристал зберігає свої властивості, змінюючи лише форму.

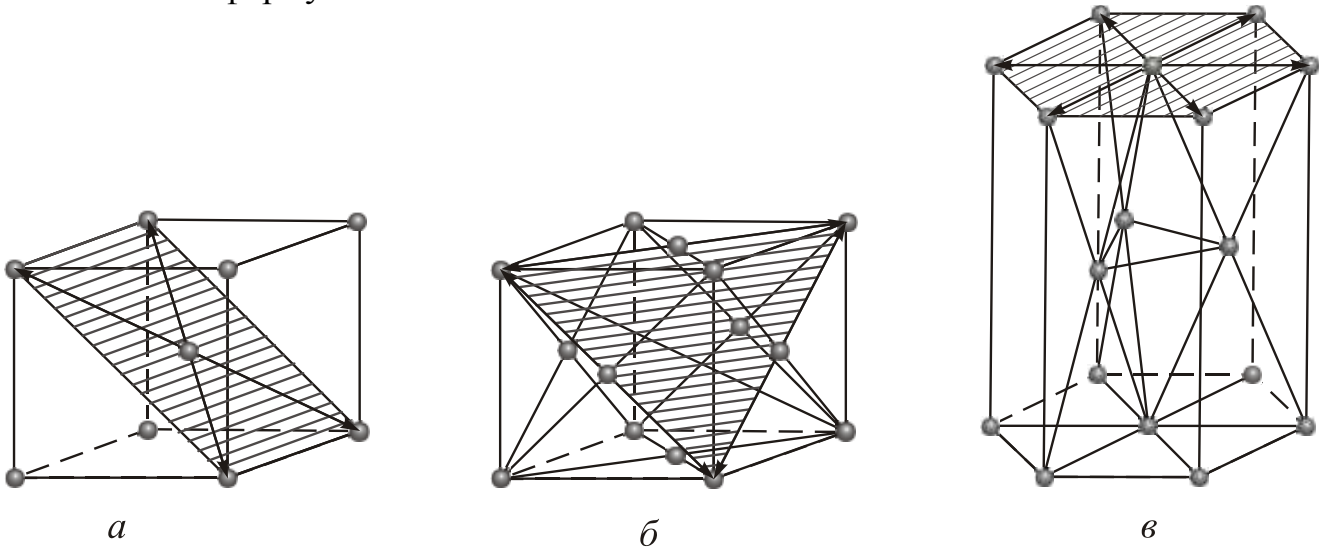


Рис. В.9. Напрямки й площини ковзання в різних металічних кристалічних ґратках

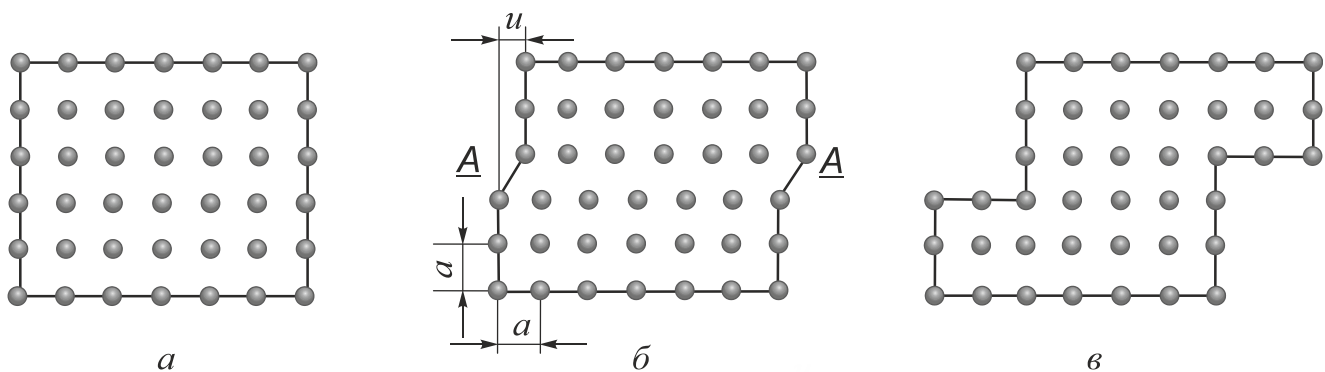


Рис. В.10. Ілюстрація пластичної деформації в площинах ковзання

Точні теоретичні розрахунки, що ґрунтуються на описаній картині деформації, дають змогу визначити максимальні внутрішні зусилля зсуву, які мають виникнути в кристалі для того, щоб з'явилася пластична деформація. У дійсності вона починає утворюватися, якщо ці зусилля в сотні разів менші, ніж визначено теоретичними розрахунками. Така розбіжність між теоретичним і дійсним опором зсуву в кристалах пояснюється тим, що перехід атомів з одного положення в інше здійснюється не одночасно, а в часі, подібно до хвилі, з місцевими викривленнями ґраток через різні недосконалості (дефекти) кристалічної структури. Їх вплив на міцність металів вивчає матеріалознавство. На міцність істотно впливають **дислокації** – місцеві лінійні викривлення кристалічних ґраток.

На рис. В.11, *a* показано так звану крайову дислокацію. Верхня частина ґраток зміщена відносно нижньої на одну міжатомну відстань, причому зафіксовано положення, коли зсув охопив ще не всю площину ковзання. Це спричинило ви-

кривлення ґраток: одна вертикальна атомна площина верхньої половини не має продовження в нижній.

Зазначимо, що реальні кристали або із самого свого виникнення містять дислокації, або мають якісь інші недосконалості, і в них дислокації утворюються вже при малих зусиллях зсуву. Тому навіть при таких зусиллях дислокації рухаються крізь кристалічні

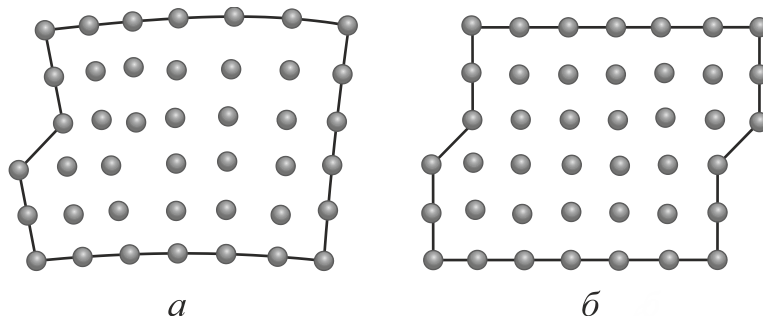


Рис. В.11. Схема крайової дислокації

ґратки, що й спричиняє пластичну деформацію кристала. Після того як дислокація вийде назовні кристала, форма його зміниться, але структура залишиться тією самою (рис. В.11, б). У процесі пластичної деформації виникають нові дислокації, які проходять крізь кристал. Сумарно результат цих ковзань у зернах виявляється у вигляді пластичної деформації зразка. Так теорія дислокацій пояснює механізм утворення пластичних деформацій та розбіжність між теоретичною й дійсною міцністю металів.

При загальній пластичній деформації дислокації, які рухаються в кристалічних ґратках у площинах, що перетинаються, утворюють нерухомі бар'єри, тому переміщення дислокацій гальмується. Підвищення опору руху дислокацій приводить до збільшення міцності металу після певної пластичної деформації. Цього досягають введенням у метал спеціальних домішок, термічним обробленням, пластичним деформуванням (наклепом).

Поява зсувів у кристалічних ґратках, що призводять до пластичної деформації, не виключає одночасних викривлень кристалічних ґраток, які відповідають пружним деформаціям. Тому на будь-якій стадії деформування зразка матеріалу, аж до самого розриву, повна деформація складається з пружної та пластичної.

Внутрішні сили (зусилля) у твердому тілі

Оскільки тверді тіла, опираючись деформуванню, зберігають до певної межі свою цілісність, логічно припустити, що під дією зовнішніх сил у твердому тілі виникають сили внутрішнього опору деформуванню, які називають **внутрішніми силами (зусиллями)**. Закон їх розподілу по об'єму ДТТ зазвичай є дуже складним, за винятком обмеженої кількості випадків. Знаючи розподілення внутрішніх зусиль і деформацій усередині тіла, можна знайти місце, де порушиться його **міцність**, тобто *здатність ДТТ зберегти свою форму й розміри*, а отже, відбудеться **руйнування**. Тоді *руйнування насправді є втратою міцності*.

Фізичною причиною виникнення сил внутрішнього опору деформуванню є порушення балансу сил міжатомної взаємодії через зміну відстаней між сусідніми атомами й молекулами внаслідок деформації. Ці питання є предметом вивчення матеріалознавства.

У механіці матеріалів прийнято вважати, що при відсутності зовнішніх сил, тобто зовнішнього навантаження, внутрішні зусилля в ДТТ теж відсутні (гіпотеза про природний ненапружений стан).

Напруження у твердому тілі

Напруження – це числова міра розподілу внутрішнього зусилля в перерізі, тобто величина внутрішнього зусилля, що діє в межах одиничної площадки. Поняття «напруження» 1822 року ввів французький математик Огюстен Луї Коші (Augustin Louis Cauchy (1789–1857)).

Вивчення внутрішніх зусиль і напружень почнемо з дослідження рівноваги ДТТ (рис. В.12, а) під дією зрівноваженої системи зовнішніх сил (F_1, \dots, F_n) . Якщо подумки поділити ДТТ довільною площиною A , то рівновага кожної з двох його частин мала б порушитися, оскільки обидві системи зовнішніх сил $(F_1, \dots, F_{k-1}, F_k)$ і $(F_{k+1}, \dots, F_{n-1}, F_n)$ не є зрівноваженими. Виходячи з того, що від уявного поділу рівновага не порушується, стає очевидним, що окрім зовнішніх сил її забезпечують внутрішні сили, які виникають у площині перерізу (рис. В.12, б) і розподіляються в ній довільно. Запропонований метод вивчення внутрішніх сил з умов рівноваги однієї з двох зазначених вище частин ДТТ називають **методом перерізів**.

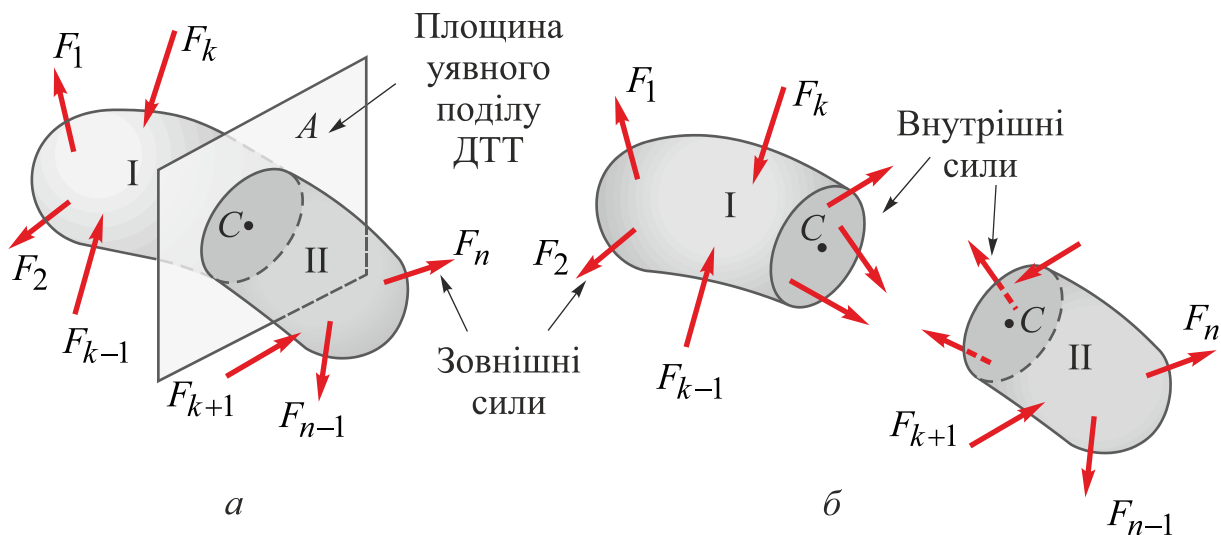


Рис. В.12. Застосування методу перерізів до тіла, яке перебуває під дією зрівноваженої системи зовнішніх сил (рівновагу кожної з двох частин ДТТ (лівої I та правої II) забезпечують внутрішні сили в перерізі, а також відповідні частини зрівноваженої системи зовнішніх сил $(F_1, \dots, F_{k-1}, F_k)$ і $(F_{k+1}, \dots, F_{n-1}, F_n)$)

Для визначення напружень розглянемо, наприклад, рівновагу лівої частини ДТТ, зображеного на рис. В.12. В умовах рівноваги до центра елементарної площадки ΔA , виділеної в околі довільної точки O , що належить перерізу A , буде

прикладено деяке довільно напрямлене внутрішнє зусилля ΔF (рис. В.13). Якщо розмістити в точці O початок прямокутної системи координат, вісь x якої є нормальною до площадки ΔA , а дві інші (y і z) лежать у площині перерізу, то відповідними проекціями внутрішнього зусилля $\Delta \vec{F}$ на осі координат будуть ΔF_x , ΔF_y , ΔF_z . За означенням

$$p_c = \frac{\Delta F}{\Delta A}, \quad (\text{В.1})$$

де p_c – **середнє повне напруження**, що діє в межах площадки ΔA .

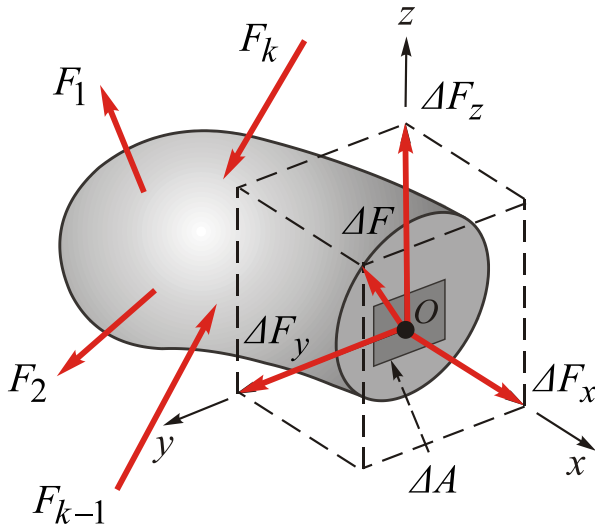


Рис. В.13. Складові внутрішнього зусилля ΔF , що діє в межах елементарної площадки ΔA з центром у точці O

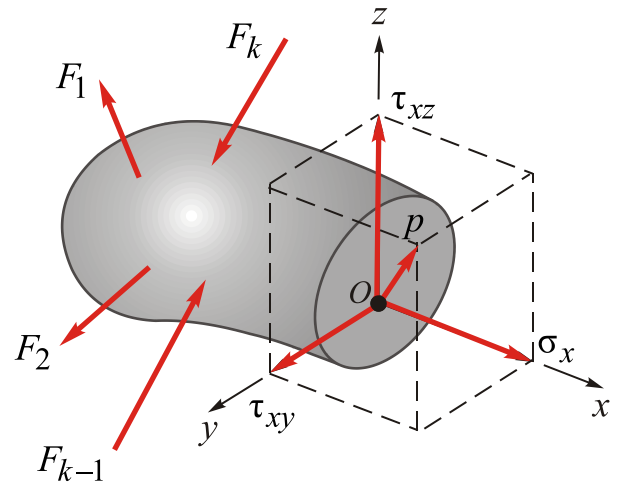


Рис. В.14. Складові істинного повного напруження в точці O

Аналогічно відношення $\Delta F_x / \Delta A$ можна назвати **середнім нормальним напруженням** у точці O , а відношення $\Delta F_y / \Delta A$ і $\Delta F_z / \Delta A$ – **середніми дотичними напруженнями** в точці O в напрямках y і z відповідно.

Спираючись на **гіпотезу суцільності** матеріалу твердого тіла, здійснимо граничний перехід при $\Delta A \rightarrow 0$ й отримаємо істинні значення напружень у точці O (рис. В.14):

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} p_c = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right) = \frac{dF}{dA} \text{ – істинне повне напруження;} \quad (\text{В.2})$$

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA} \text{ – істинне нормальне напруження;} \quad (\text{В.3})$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dF_y}{dA},$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{dF_z}{dA} \text{ – істинні дотичні напруження.} \quad (\text{В.4})$$

Для позначення цих напружень використано два індекси: *перший відповідає нормалі до площадки, у якій діє те або інше напруження, а другий – напрямку осі, уздовж якої воно діє*. Природно, що індекси нормального напруження збігаються, тому один з них може бути опущено.

Межа $\Delta A \rightarrow 0$ у рівняннях (В.2)–(В.4) – це, безумовно, ідеалізація, оскільки згідно з атомно-молекулярною теорією будови речовини площадка ΔA не може вважатися безперервною. Однак, застосовуючи **гіпотезу безперервності**, можна обчислювати таким чином напруження в межах області, розміри якої є суттєво більшими за відстані між атомами.

Одиниця виміру напруження (σ або τ) дорівнює одиниці сили, поділеній на одиницю площі. У СІ напруження вимірюють у ньютонях на квадратний метр (Н/м^2) або паскалях (Па). Паскаль – дуже маленька величина, тому в механіці матеріалів зазвичай кажуть про мегапаскалі (МПа) та гігапаскалі (ГПа).

Необхідно зазначити, що при довільному характері навантаження значення складових істинного повного напруження p (див. рис. В.14) у різних точках площини перерізу будуть різнитися за величиною й напрямком через неоднорідність розподілення внутрішніх зусиль як в перерізах, так і по об'єму ДТТ у цілому. З іншого боку, складові повного напруження p в одній і тій же точці, що лежить у площині перерізу, будуть залежати від орієнтації цього перерізу відносно поздовжньої осі. Важливо усвідомити, що навіть в одній і тій же точці, яка належить по-різному орієнтованим площинам, напруження будуть різнитися за величиною і, природно, напрямком, як зображено на рис. В.15. Тут величини складових повного напруження змінюються залежно від орієнтації відносно ДТТ площини, що містить розглядувану точку O . Це змінення спричинене змінням системи зовнішніх сил, прикладених до розглядуваної частини ДТТ, при змінній орієнтації площини, що містить точку O (див. рис. В.15). Якщо необхідно оцінити міцність ДТТ при зовнішньому навантаженні, то насамперед слід установити зв'язок між величинами напружень, що діють у площині, та її орієнтацією в ДТТ. Це дасть змогу, по-перше, обчислювати діючі напруження на площині заданої орієнтації, а по-друге, визначати найбільші напруження в точці та відповідне положення площини, що проходить через неї. Вирішення цих завдань є предметом важливого розділу механіки деформованого твердого тіла – так званої **теорії напруженого стану**, яка вивчає напруження як причину деформацій ДТТ.

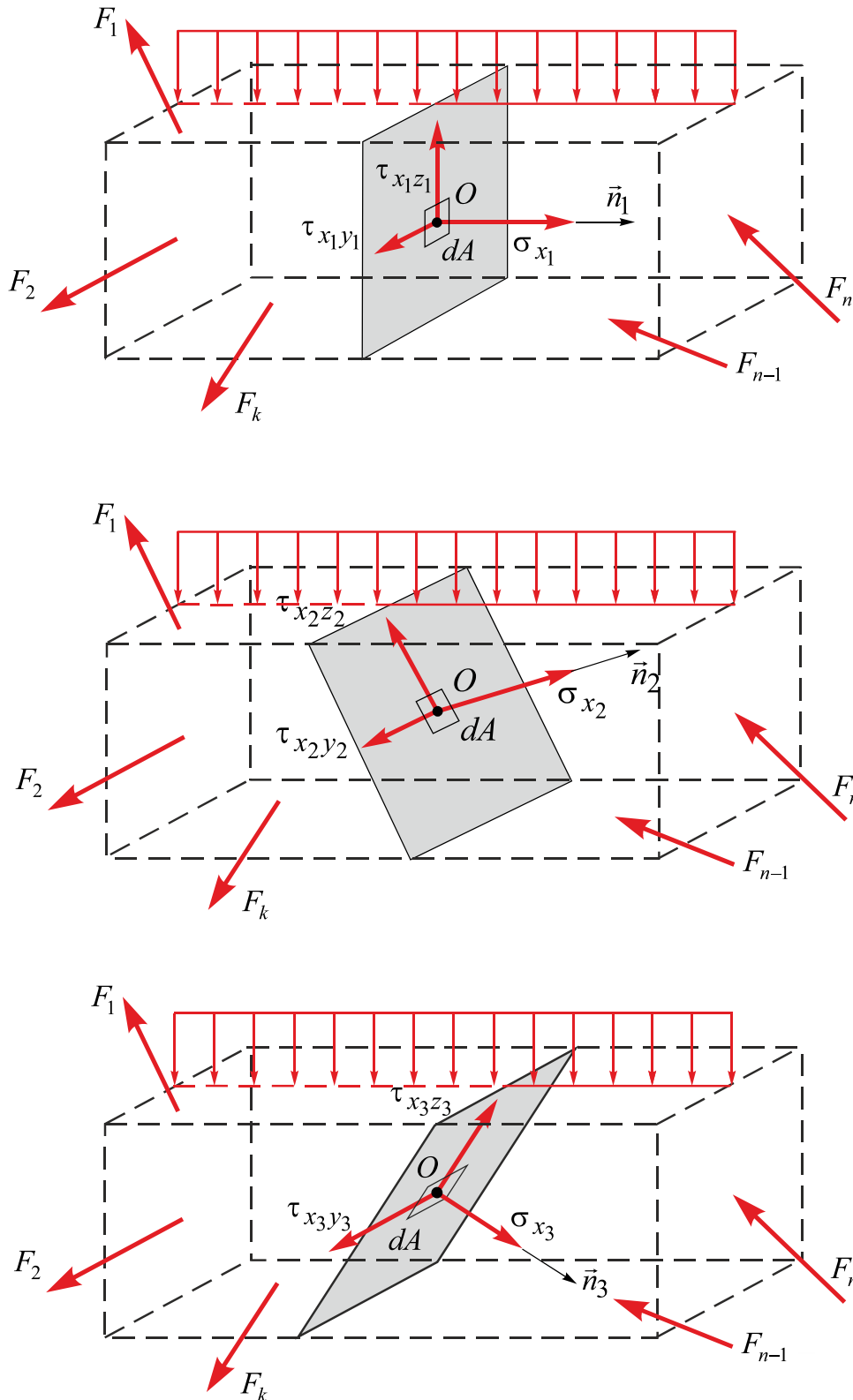


Рис. В.15. Ілюстрація залежності напружень, що діють на площадці dA , виділеній в околі довільної точки O призматичного бруса (зображеного пунктиром), від орієнтації площадки та площини перерізу, у якій лежить площадка ($\sigma_{x_1} \neq \sigma_{x_2} \neq \sigma_{x_3}$, $\tau_{x_1z_1} \neq \tau_{x_2z_2} \neq \tau_{x_3z_3}$, $\tau_{x_1y_1} \neq \tau_{x_2y_2} \neq \tau_{x_3y_3}$)

Розділ 1. ОДНОРІДНІ ОСЬОВА ДЕФОРМАЦІЯ Й ДЕФОРМАЦІЯ ЧИСТОГО ЗСУВУ

Використовуючи означення напруження й умов рівноваги, можна визначити нормальні й дотичні напруження при двох найпростіших видах однорідного деформування: **осьовому розтяганні-стисканні** та **зсуві (зрізі)**, коли напруження й деформації можна вважати рівномірно розподіленими по об'єму ДТТ (тобто однорідними). Приклади однорідної деформації розтягання та зсуву показано на рис. 1.1 і 1.2. Застосування гіпотези однорідності дасть змогу розв'язати широке коло практичних задач.

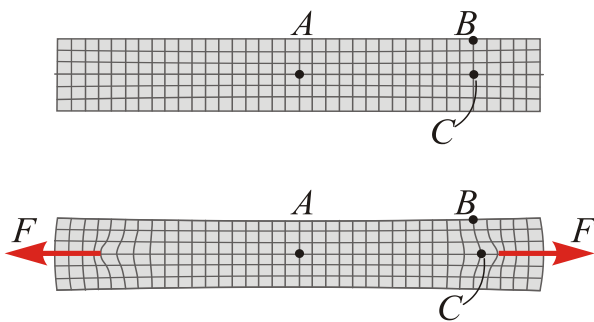


Рис. 1.1. Приклад однорідного розподілу деформацій по довжині центральної частини розтягнутого стрижня (у всіх перерізах довжина сторони квадратної сітки збільшилася однаково, а висота зменшилася однаково, за винятком області прикладання зовнішньої сили F (точки B, C), де має місце неоднорідна деформація (так звані **зони Сен-Венана**))

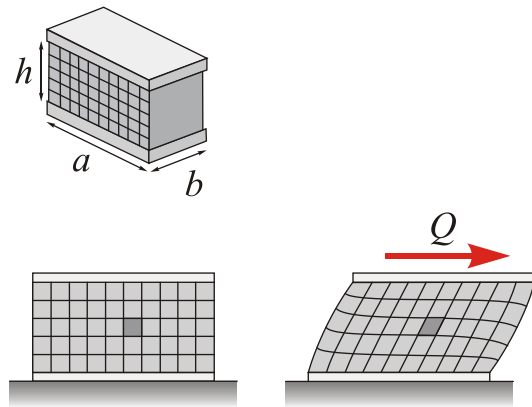


Рис. 1.2. Приклад однорідного розподілу деформацій по об'єму гумового блока, з'єднаного з металевими пластинами (під час зміщення верхньої пластини вправо квадрати, нанесені на бічній поверхні, у центральній частині блока змінюють свою форму однаково, перетворюючись на ромби, а квадрати, нанесені вздовж лівої та правої меж, деформуються по-різному, оскільки в цій області має місце неоднорідна деформація (так звані **зони Сен-Венана**))

1.1. Однорідна осьова деформація й нормальні напруження

Навантаження й відповідну деформацію, при яких нормальні напруження можна вважати розподіленими по перерізу ДТТ рівномірно, часто називають **осьовим навантаженням** (розтяганням або стисканням) та **осьовою деформацією**. У такому разі середнє напруження, яке обчислюють діленням поздовжньої сили на площу поперечного перерізу, буде відповідати дійсному напруженню в точці перерізу. Доведено, що осьова деформація має місце при одночасному виконанні трьох умов:

1) осьова сила проходить через геометричний центр («центр ваги») поперечного перерізу;

2) конструктивний елемент, виконаний з однорідного матеріалу, має форму призми (**призматичний брус**);

3) поперечний переріз віддалено від кінців стрижня, тобто від місць його з'єднання з іншими конструктивними елементами. Такі місця мають назву **зон Сен-Венана** (на честь французького математика й механіка Барре де Сен-Венана (Barre de Saint-Venant (1797–1886))).

Велику кількість конструктивних елементів, таких як троси, елементи ферм, довгі болти й шпильки, можна подати розрахунковою моделлю призматичного бруса. Зазвичай вони навантажені зовнішніми силами, що проходять через «центр ваги» перерізу. Отже, при визначенні напружень і деформацій у таких конструктивних елементах можна застосовувати допущення осьової деформації, оскільки в їх перерізах діють тільки осьові внутрішні зусилля – **поздовжні сили**. Усе це полегшує вивчення процесу деформування, а також визначення напружень і деформацій. *Призматичний брус в умовах осьової деформації будемо називати стрижнем.*

Деформування твердого тіла при осьовому навантаженні вперше почав вивчати англійський учений Р. Гук, досліджуючи деформацію залізних струн. До сьогодні досліди на **однорічне розтягання** в умовах однорідної деформації є підґрунтям для теоретичного дослідження деформацій ДТТ і визначення в ньому напружень при **складному навантаженні**, а також для створення так званих **фізичних моделей матеріалу**, тобто рівнянь, які встановлюють зв'язок між напруженнями й деформаціями, про що йтиметься нижче.

1.1.1. Нормальні напруження при осьовому навантаженні призматичного бруса

Розгляньмо, наприклад, осьове навантаження тяги зчіпного пристрою для буксирування літака (рис. 1.3). Тяга являє собою прямолінійний конструктивний елемент, поперечний переріз якого є постійним по всій його довжині, за винятком закінцівок (зон Сен-Венана) (її вигляд спереду та зверху зображено на рис. 1.4, *a*). Її навантажено осьовою силою F , прикладеною до закінцівок.

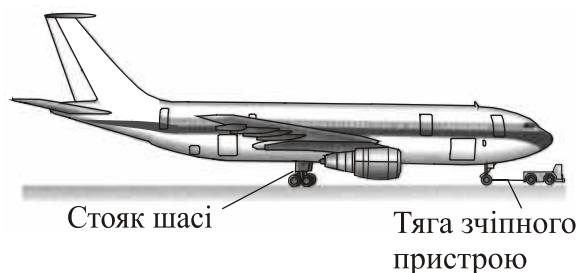


Рис. 1.3. Тяга зчіпного пристрою, що зазнає деформації осьового розтягання, і стояк шасі, що зазнає стискання

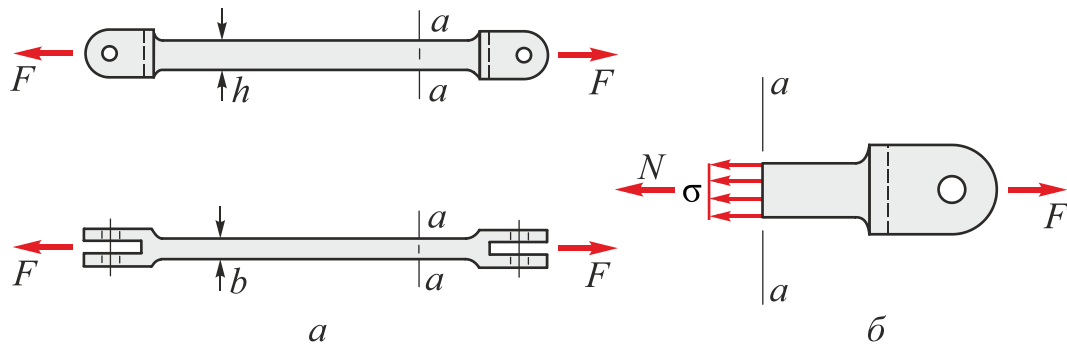


Рис. 1.4. Призматичний брус із закінцівками в умовах деформації осьового розтягання – стрижень (а); відсічена частина стрижня у стані рівноваги (б)

Для отримання алгебричного виразу для обчислення нормального напруження застосуємо метод перерізів, тобто зробимо уявний розріз (переріз $a-a$) під прямим кутом до осі стрижня, щоб мати можливість розглянути в рівновазі будь-яку його частину (рівновагу правої частини стрижня показано на рис. 1.4, б). Згідно з цим методом внутрішні зусилля в перерізі замінюють дію відкинутої лівої частини. Для дотримання рівноваги необхідно, щоб зовнішня сила F зрівноважувалася внутрішньою поздовжньою силою N , яка є рівнодійною системи внутрішніх напружень:

$$N = \int_{(A)} \sigma dA. \quad (1.1)$$

Оскільки вважаємо розподіл напружень по перерізу рівномірним, можна записати

$$N = \sigma \int_{(A)} dA,$$

звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.2)$$

де $A = bh$ – площа поперечного перерізу стрижня.

Зауважимо, що в разі застосування до правої частини стрижня не однієї, а декількох зовнішніх сил поздовжня сила в перерізі буде дорівнювати алгебричній сумі прикладених зовнішніх сил, де розтягувальні сили вважатимемо додатними, а стискальні – від’ємними.

При розтяганні стрижня, зображеного на рис. 1.4, виникають розтягувальні напруження, при прикладенні сили в зворотному напрямку стрижень стискається й виникають стискальні напруження. Зазначимо, що у цьому варіанті рівняння (1.2) можна застосовувати тільки до досить коротких конструктивних елементів, здатних протистояти **втраті стійкості**. Цей небезпечний вид руйнування теж вивчають у механіці матеріалів. Зазвичай розтягувальні напруження записують зі знаком «+», а стискальні – зі знаком «-».

Нормальні напруження мають місце також у з'єднаннях конструктивних елементів. Розгляньмо випадок прикладення сили F до закінцівки стрижня через з'єднання «вушко – серга» (рис. 1.5, *a*), яке складається з **серги** A , **вушка** B і **болта** C . При прикладенні сили F вушко B і серга A тиснуть на болт C по опорній поверхні, зминаючи його, тобто він піддається дії **контактних напружень** (рис. 1.5, *б*), які ще називають напруженнями в опорних поверхнях. Їх середнє значення з достатньою для інженерних цілей точністю визначається діленням сили на площу контакту (площу зминання) і називається **напруженням зминання**. Напруження зминання у вушці B $\sigma_{зм} = F/(t_1d)$, де t_1 – товщина вушка B , а d – діаметр болта C . Аналогічно напруження зминання в серзі A $\sigma_{зм} = F/(2td)$. Одночасно в перерізах $b-b$ і $c-c$ має місце деформація зсуву (зрізу) болта, що супроводжується появою внутрішніх перерізувальних (поперечних) сил Q в перерізах зсуву (зрізу) й відповідних дотичних напружень τ (рис. 1.5, *б*). Їх буде вивчено нижче також із застосуванням припущення про їх рівномірне розподілення по площі перерізу.

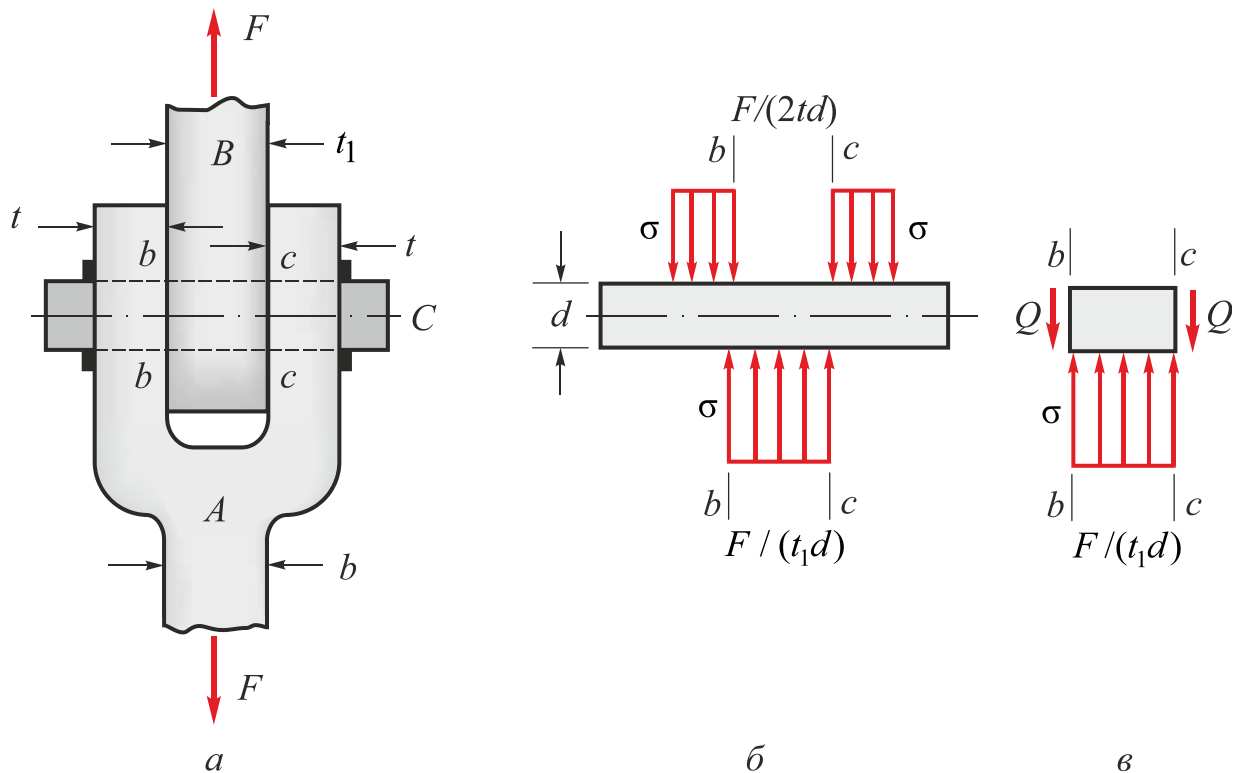


Рис. 1.5. З'єднання типу «вушко – серга» (*a*), схема зминання болта (*б*) і болт в умовах подвійного зсуву (зрізу) під дією внутрішніх перерізувальних сил Q (*в*)

1.1.2. Деформації при осьовому навантаженні призматичного бруса. Поздовжні й поперечні деформації

Очевидно, що при осьовому розтяганні довжина призматичного бруса буде збільшуватися (брус подовжується), а при стисканні – зменшується (брус укорочується). Подібний ефект має місце при зміні температури. Як впливає з

рис. 1.6, після прикладення сили F довжина L_0 збільшується на величину абсолютного подовження бруса δ , яке є водночас його **абсолютною осью деформациєю**. Абсолютна деформація має розмірність довжини. Для оцінювання її інтенсивності вводять поняття **відносного подовження (відносної лінійної деформації)**, яке визначається формулою

$$\varepsilon = \delta / L_0. \quad (1.3)$$

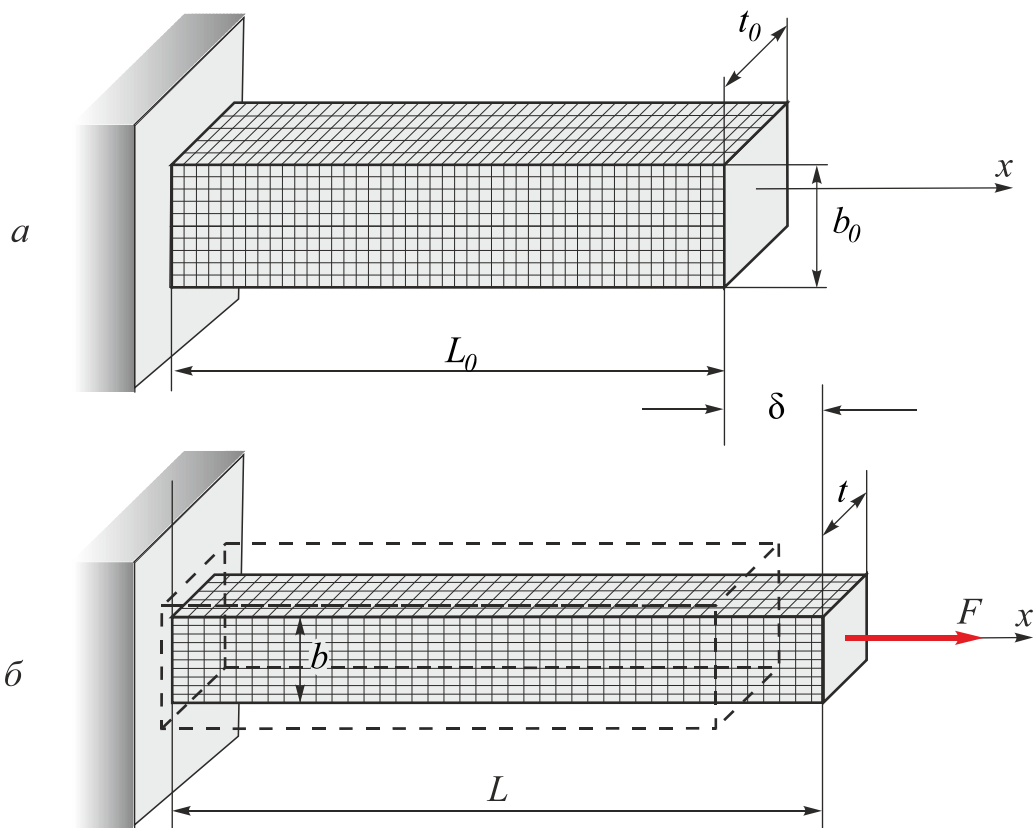


Рис. 1.6. Осьова однорідна деформація призматичного бруса: *а* – брус до навантаження; *б* – брус після осьового навантаження розтягувальною силою F

Знак «+» указує на подовження бруса, а «-» – на вкорочення. Відносна лінійна деформація є безрозмірною величиною.

Як випливає з рис. 1.1, при осьовому навантаженні призматичного бруса вдалині від зон Сен-Венана має місце однорідна деформація. Тому відносні деформації в будь-якій точці дорівнюють відносній деформації бруса в цілому, а формула (1.3) є придатною для визначення як середньої лінійної деформації, так і відносної деформації бруса в цілому. Досліди, про які йдеться нижче, довели, що при подовженні стрижня в напрямку x його поперечний переріз зменшується, тобто ширина b_0 зменшується на величину $\Delta b = b - b_0$ (див. рис. 1.6). Подібна зміна відбувається і з товщиною призматичного бруса, яка також зменшується: $\Delta t = t - t_0$. Таким чином, подовжня деформація супроводжується поперечними

деформаціями протилежного сенсу (подовження супроводжується поперечним звуженням і навпаки).

1.2. Однорідна деформація зсуву й дотичні напруження

Розглянуте раніше з'єднання «вушко – серга» (див. рис. 1.5, *a*) можна використовувати для ілюстрації іншого виду однорідної простої деформації – деформації зсуву (зрізу). Такі деформації приводять до появи в поперечних перерізах конструктивних елементів **зсувних (дотичних) напружень**, які визначаються величиною поперечної сили Q , що діє в перерізі зрізу (див. рис. 1.5, *в*). Під час обчислення цих дотичних напружень також будемо вважати їх розподіленими по поперечному перерізу рівномірно (однорідно).

Зсувне (дотичне) напруження виникає щоразу, коли під дією зовнішніх сил одна частина ДТТ починає ковзати відносно іншої частини, суміжної з нею. Болт, зображений на рис. 1.5, перебуває під дією деформації зсуву (зрізу) у двох площинах поперечного перерізу – $b-b$ і $c-c$, де існує небезпека перерізання болта. У цьому разі кажуть, що болт зазнає дії **деформації подвійного зсуву (зрізу)**. Оскільки болт перебуває в стані рівноваги, кожна його частина також має бути в стані рівноваги, а отже, у кожній з двох площин зсуву повинна виникати **зсувна (поперечна) сила Q** , що дорівнює $F/2$ (як показано на рис. 1.5, *в*). Таким чином, зсув виникає в площині, паралельній до площини, де діє зовнішня сила. Зсувні сили спричиняють зсувні (дотичні) напруження. Більш точно таку деформацію називають **деформацією чистого зсуву**, оскільки нормальних напружень при цьому немає.

Фактичний розподіл дотичного напруження τ по поперечному перерізу є нерівномірним. Однак, поділивши зсувну силу Q на площу поперечного перерізу A , на який вона діє, отримуємо **середнє дотичне напруження** в перерізі, котрим можна користуватися в розрахунках:

$$\tau_{сер} = \frac{Q}{A}. \quad (1.4)$$

Ще один приклад деформації чистого зсуву бачимо на рис. 1.7, де зображено з'єднання двох пластин A і B за допомогою заклепки. Заклепка перебуває під дією зсувної сили Q в серединному поперечному перерізі, яка дорівнює F (рис. 1.7, *б*). Середнє дотичне напруження

$$\tau_{сер} = F / (\pi d^2 / 4). \quad (1.5)$$

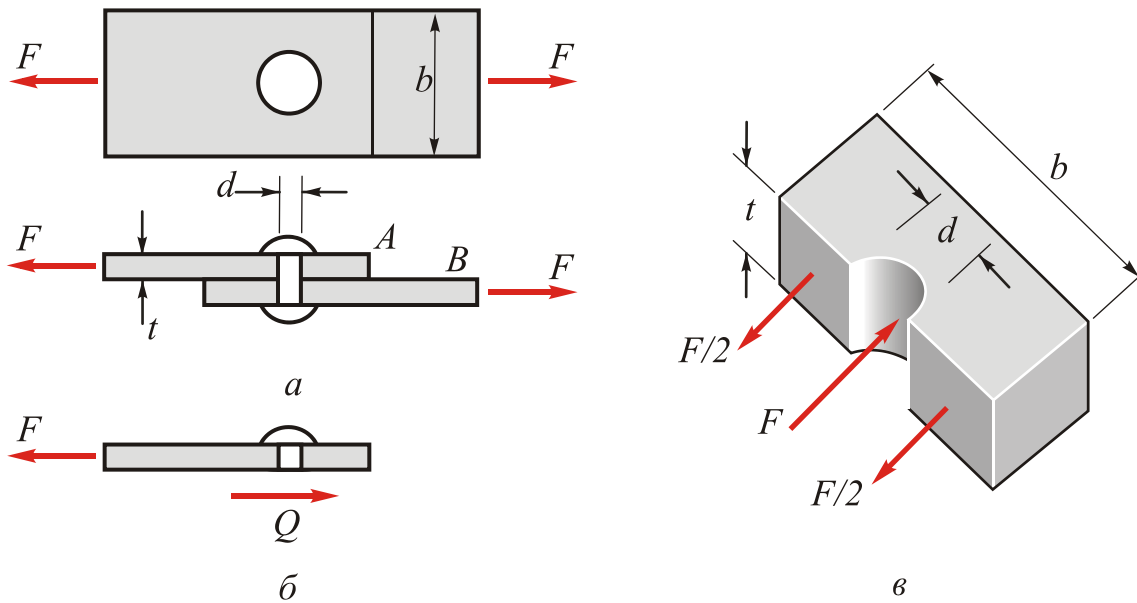


Рис. 1.7. Чистий зсув заклепки

Заклепка діє на пластину A з силою F , що за величиною дорівнює, а за напрямком є протилежною загальній силі, з якою пластина діє на заклепку (рис. 1.7, в). Як і у випадку з'єднанням «вушко – серга», нормальне напруження від зминання в пластині $\sigma_{зм}$ дорівнює відношенню сили F до площі прямокутника, який є проекцією заклепки на пластину. Площа цього прямокутника дорівнює td , тому $\sigma_{зм} = F/(td)$. У той же час середнє нормальне напруження в пластині з отвором $\sigma = F/[t(b-d)]$, тоді як у будь-якій іншій її частині воно відповідає формулі $\sigma = F/(bt)$.

Докладне вивчення однорідної деформації зсуву, показаної на рис. 1.2, почнемо з ілюстрації прикладу гальмівної системи автомобіля, зображеної на рис. 1.8, а, б. Тут шар пружної гальмівної колодки, що прилягає до гальмівного диска, зсувається під час гальмування вправо на величину d відносно шару, який прилягає до гальмівного башмака (рис. 1.8, в, г). Величина зміщення двох взаємно протилежних площин колодки відносно одна одної d має назву **абсолютного зсуву** (абсолютної зсувної деформації). Для оцінювання інтенсивності зсувної деформації вводиться поняття **відносного зсуву**:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{d}{h}. \quad (1.6)$$

Оскільки пружні деформації більшості конструкційних матеріалів є абсолютно малими, то $\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma$, і тому остаточно маємо вираз для визначення відносного зсуву:

$$\gamma = \frac{d}{h}. \quad (1.7)$$

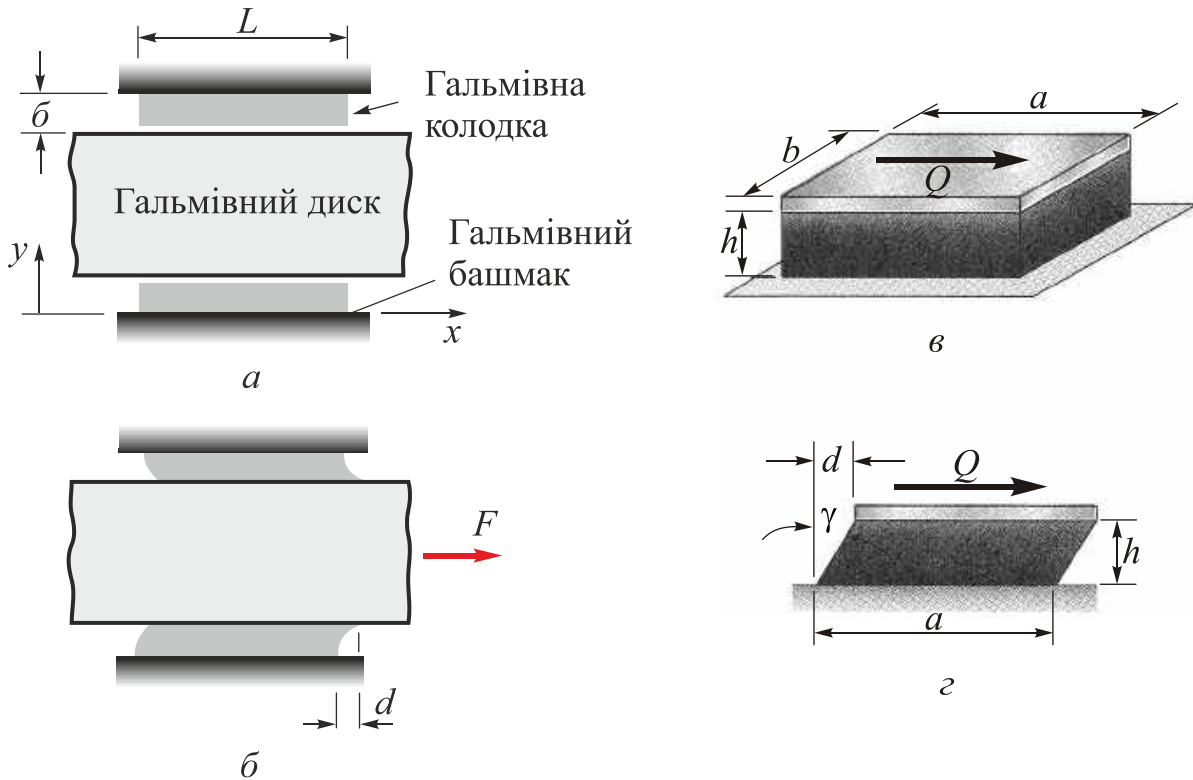


Рис. 1.8. Приклад однорідної деформації зсуву пружної гальмівної колодки: d – абсолютний зсув; γ – кут зсуву (відносний зсув)

Надалі будемо вважати зсувну деформацію додатною, якщо кут між взаємно перпендикулярними площинами пружного елемента зменшується, і навпаки.

Припустивши на підставі експерименту, показаного на рис. 1.2, що дотичні напруження в колодці розподілено однорідно, їх можна обчислити усереднено, поділивши силу зсуву Q на площу колодки:

$$\tau_{сер} = \frac{Q}{ab}. \quad (1.8)$$

Підсумовуючи сказане вище, зазначимо, що і лінійна деформація, і зсувна деформація – величини безрозмірні. На практиці лінійні деформації вимірюють у метрах (або мікрометрах) на метр, а деформації зсуву – у радіанах (або мікро-радіанах). Для більшості конструкційних матеріалів у межах пружних деформацій лінійні деформації рідко перевищують 0,002 або 2000 мкм ($2000 \cdot 10^{-6}$).

1.3. Лінійна пружність при розтяганні-стисканні та зсуві. Закон Гука й коефіцієнт Пуассона. Деформованість і зміна об'єму

Очевидно, що напруження в ДТТ залежать від деформацій. Фізично їх зв'язок визначається ступенем опору того чи іншого матеріалу деформуванню, що залежить насамперед від внутрішньої структури матеріалу. Так, наприклад, опір розтяганню мідного дроту є слабшим, ніж сталевого того ж розміру, тобто його

подовження при одному й тому ж навантаженні буде більшим. Як уже зазначалося, досліди на однорідне розтягання-стискання та зсув зразків з конструкційних матеріалів дають змогу встановити математичний зв'язок між напруженнями й деформаціями.

Велика кількість конструкційних матеріалів, включаючи більшість металів, деревину, кераміку та навіть деякі пластмаси, виявляє при навантаженні лінійно-пружні властивості, тобто діаграми їх розтягання в координатах «напруження – деформація» починаються з прямолінійної ділянки, що виходить із початку координат. Приклад такої діаграми розтягання конструкційної сталі показано на рис. 1.9, вона є зрозумілою кожному, хто вивчав основи матеріалознавства. Прямолінійна ділянка OA завершується досягненням **границі пропорційності** $\sigma_{пц}$.

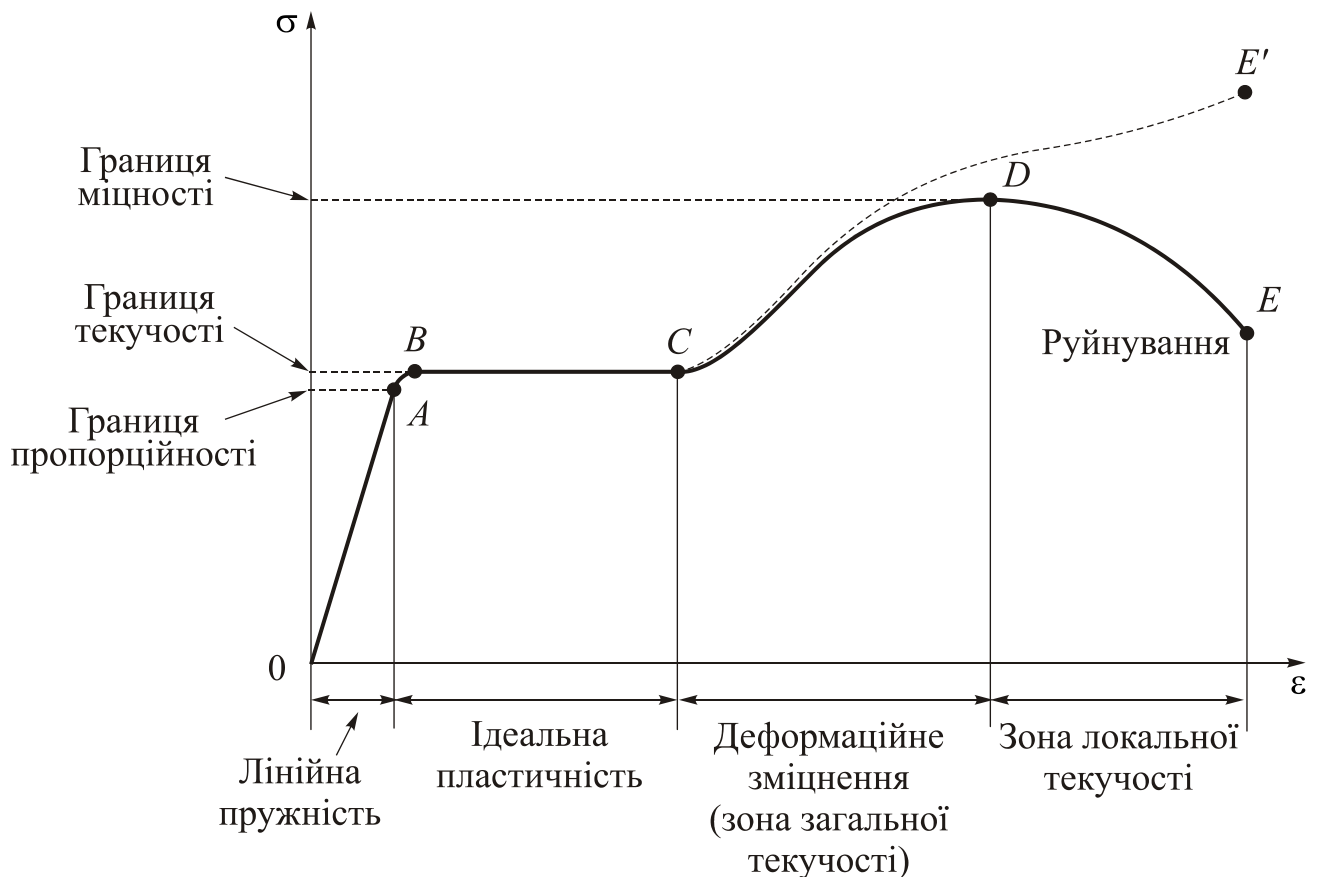


Рис. 1.9. Діаграма розтягання конструкційної сталі

Іншими прикладами лінійно-пружної поведінки до границі пропорційності є діаграми розтягання сплаву на основі алюмінію (рис. 1.10) і стискання міді (рис. 1.11).

Отже, лінійний зв'язок між напруженнями й деформаціями є характерним для початкового етапу деформування, коли завдяки збереженню пружних властивостей матеріал (а отже, і конструкція в цілому) повністю відновлює свою початкову форму й розміри після розвантаження. Зв'язок між напруженнями й де-

формаціями має простий вигляд – лінійна функція, графік якої виходить із початку координат: $y = kx$.

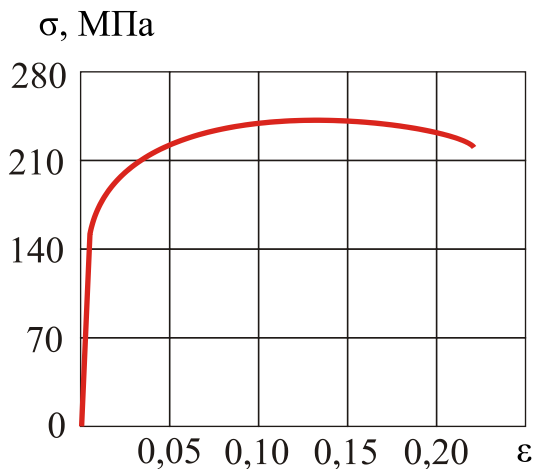


Рис. 1.10. Діаграма розтягання сплаву на основі алюмінію

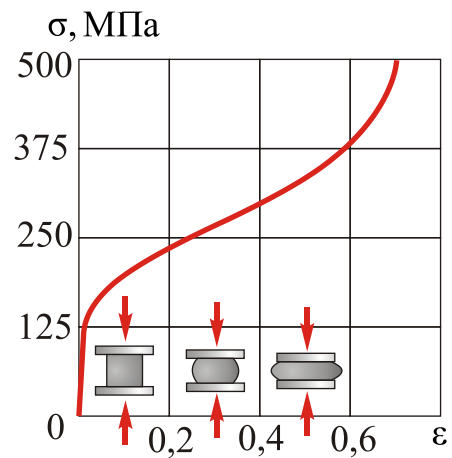


Рис. 1.11. Діаграма стискання міді

1.3.1. Закон Гука

Лінійно-пружна поведінка конструкційних матеріалів істотно спрощує розрахунки конструкцій і машин, оскільки всі вони повинні уникнути появи необоротних пластичних деформацій, тобто появи текучості при першому й наступних навантаженнях. Лінійний зв'язок між напруженням і деформацією розтягання-стискання призматичного бруса відображається відомою формулою

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.9)$$

де σ – нормальне напруження; ε – відносна лінійна деформація; константа E – **модуль поздовжньої пружності** матеріалу при розтяганні-стисканні (по-іншому, модуль пружності, модуль Юнга), величину якого встановлюють експериментально. Оскільки ε – величина безрозмірна, то E має розмірність напруження, тобто вимірюється в паскалях ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$). Через малізну цієї величини зазвичай використовують мегапаскалі ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$) і навіть гігапаскалі ($1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ Па}$). Модуль Юнга отримав свою назву на честь британського фізика Томаса Юнга (Thomas Young (1773–1829)), який уперше ввів поняття «модуль пружності».

Співвідношення (1.9) називають **законом Гука при розтяганні-стисканні**, який було відкрито експериментально й опубліковано 1678 року. Р. Гук першим виміряв подовження довгих дротів під вагою вантажу та дійшов висновку, що *«подовження завжди знаходяться в тій же пропорції, що й вага вантажів, яка їх викликає»*. Він феноменологічно, тобто під час досліду, виявив лінійний взаємозв'язок між прикладеними силами й відповідними подовженнями.

У законі Гука (1.9) величини σ і ε не мають індексів, що пов'язують ці величини з координатними напрямками, оскільки для ізотропних матеріалів вели-

чина E має одне й те ж значення в усіх напрямках. Геометрична суть модуля Юнга впливає з рис. 1.10: це тангенс кута нахилу діаграми «напруження – деформація» на її лінійно-пружній ділянці. Оскільки різні матеріали по-різному опираються на деформування через відмінності у внутрішній структурі, кути нахилу їх діаграм розтягання є різними.

Рівняння (1.9) є найпростішою формою закону Гука, оскільки воно зв'язує напруження й деформації при одновісному розтяганні або стисканні. Більш складні форми закону Гука розглянемо нижче, аналізуючи інші, складніші види навантаження твердих тіл.

Пружність матеріалу виявляється також під дією зсувних навантажень, як, наприклад, при навантаженні гальмівної колодки (див. рис. 1.8). Пружна частина діаграми зв'язку дотичних напружень τ і зсувних деформацій γ теж є похилою прямою, тому можна записати

$$\tau = G\gamma. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.10) має назву **закону Гука при зсуві**. Коефіцієнт пропорційності G називають **модулем зсуву**, або модулем пружності при зсуві. Очевидно, що його, як і E , вимірюють у паскалях.

Величини модуля пружності для різноманітних матеріалів коливаються в широких межах. Відносно великі значення є характерними для конструкційних сталей і сплавів. Наприклад, сталь має модуль Юнга, який дорівнює 200...210 ГПа; для алюмінієвих сплавів ця величина коливається навколо значення 70 ГПа. Менш жорсткі матеріали мають знижений модуль пружності – для пластмас він становить від 0,7 до 14 ГПа. Значення модулів пружності для типових матеріалів зведено в табл. 1.1.

1.3.2. Коефіцієнт Пуассона

1811 року французький математик С. Д. Пуассон (Simeon Deni Poisson (1781–1840)) уперше показав, що осьове розтягання призматичного бруса супроводжується його звуженням у поперечних напрямках (див. рис. 1.6 і 1.12). На рис. 1.12, *а* показано циліндричний стрижень до навантаження, а на рис. 1.12, *б* – після навантаження силою F (пунктиром показано початкову форму стрижня). Було встановлено, що для лінійно-пружних матеріалів відношення поперечної деформації до поздовжньої в межах пружності є постійним, тобто деформація поперечного звуження є пропорційною деформації поздовжнього подовження. Поперечне звуження легко спостерігати неозброєним оком, розтягуючи, наприклад, стрижень з гуми, однак при дослідженні металів таке дослідження потребує застосування високоточних вимірювальних систем через абсолютно малі деформації подовження та звуження.

Твердження про пропорційність поздовжніх і поперечних деформацій стрижня є правильним при використанні сформульованої раніше гіпотези однорідності матеріалу, тобто в припущенні, що матеріал має однакові механічні властивості (а отже, і хімічний склад) у кожній точці.

Відношення модулів поперечної $\varepsilon_{\text{попер}}$ і поздовжньої $\varepsilon_{\text{позд}}$ деформацій має назву коефіцієнта поперечної деформації, або **коефіцієнта Пуассона**:

$$\nu = \frac{|\varepsilon_{\text{попер}}|}{|\varepsilon_{\text{позд}}|}. \quad (1.11)$$

Зауважимо, що при розтяганні стрижня осьова деформація є додатною, а поперечна – від’ємною, оскільки його ширина зменшується. Тому зв’язок між поперечною й поздовжньою деформаціями визначається формулою

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\nu \varepsilon_{\text{позд}}. \quad (1.12)$$

Протилежна ситуація має місце при стисканні, коли стрижень стає коротшим (осьова деформація є від’ємною), але ширшим (поперечна деформація є додатною). Пуассон зробив спробу обчислити цю величину. Він установив, що для ізотропних матеріалів $\nu = 0,25$. Більш сучасні обчислення дають величину $\nu = 0,33$. Обидва ці значення вкладаються в діапазон вимірних значень (0,25...0,35) для більшості металів та інших матеріалів. Майже нульове значення має коефіцієнт Пуассона коркового дерева, а для бетону $\nu = 0,1...0,2$.

Значення коефіцієнта Пуассона для різних матеріалів наведено в табл. 1.1. Уважають, що він має одне й те ж значення при розтяганні й стисканні. При збільшенні напруження в матеріалі до границі текучості коефіцієнт Пуассона дорівнюватиме 0,5.

Модулі пружності при розтяганні-стисканні та зсуві зв’язані співвідношенням

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (1.13)$$

яке показує, що всі пружні властивості матеріалу зв’язані між собою. Оскільки для більшості матеріалів коефіцієнт Пуассона змінюється в діапазоні 0...0,5, із (1.13) випливає, що модуль зсуву G становить від 1/3 до 1/2 від E . Нижче доведемо співвідношення (1.13), а також покажемо, що якщо є відомими коефіцієнт Пуассона й модуль пружності матеріалу, то можна підрахувати зміну його об’єму.

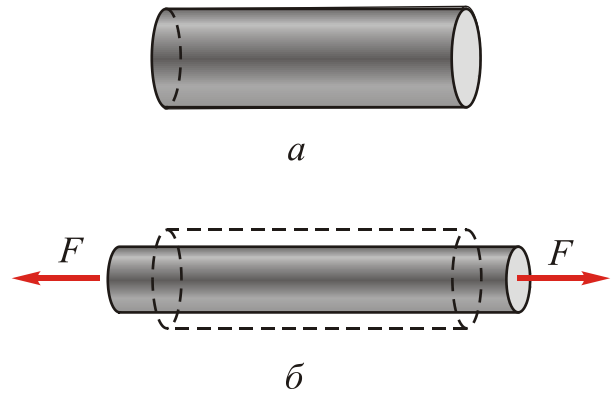


Рис. 1.12. Осьове подовження й поперечне звуження стрижня при розтяганні

Таблиця 1.1

Модулі пружності та коефіцієнти Пуассона для різних матеріалів

Матеріал	Модуль пружності E , ГПа	Модуль зсуву G , ГПа	Коефіцієнт Пуассона, ν
Алюмінієві сплави	70...79	26...30	0,33
Латунь	96...110	36...41	0,34
Бронза	96...120	36...44	0,34
Чавун	83...170	32...69	0,2...0,3
Бетон (стискання)	17...31		0,1...0,2
Мідь і сплави на основі міді	110...120	40...47	0,33...0,36
Скло	48...83	19...35	0,17...0,27
Магнієві сплави	41...45	15...17	0,35
Монель (67 % Ni, 30 % Cu)	170	66	0,32
Нікель	210	80	0,31
Пластмаси:			
поліетилен	2,1...3,4		0,4
найлон	0,7...1,4		0,4
Камінь (стискання):			
граніт, мармур	40...100		0,2...0,3
піщаник	20...70		0,2...0,3
Гума	0,0007...0,0040	0,0002...0,0010	0,45...0,50
Сталь	190...210	75...80	0,27...0,30
Титанові сплави	100...120	39...44	0,33
Вольфрам	340...380	140...160	0,2
Деревина (гнуття):			
ялина	11...13		
дуб	11...12		
сосна	11...14		

1.3.3. Деформованість твердого тіла. Зміна об'єму й форми при однорідних одновісному розтяганні-стисканні та зсуві

Термін «**деформованість**» означає здатність тіла змінювати розміри й форму при зовнішньому навантаженні. Змінення розмірів відбувається через дію нормальних напружень в умовах деформації розтягання-стискання й зумовлює зміну об'єму (рис. 1.13). Змінення форми відбувається через дію дотичних напружень в умовах деформації зсуву, при цьому розміри й об'єм не змінюються, змінюються лише кути між відрізками, які виходять із однієї точки (рис. 1.14).

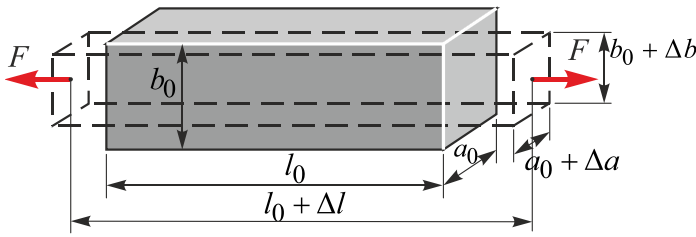


Рис. 1.13. Зміна розмірів та об'єму призматичного бруса при розтяганні

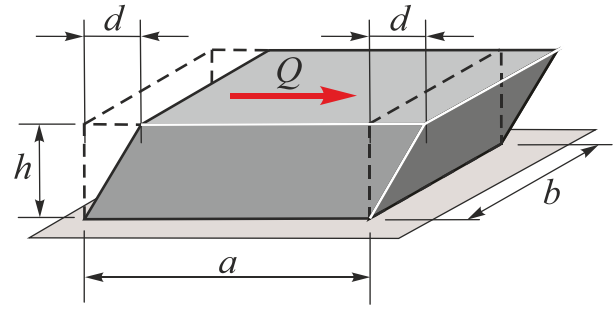


Рис. 1.14. Зміна форми без зміни об'єму при зсуві

Розглянемо, як зміниться об'єм призматичного бруса завдовжки l_0 при осьовому розтяганні в межах пружності. Доведемо, що він, природно, збільшиться. Якщо до навантаження поперечний переріз мав розміри a_0 і b_0 , як показано на рис. 1.13, то початковий об'єм

$$V_0 = a_0 b_0 l_0. \quad (1.14)$$

Під дією зовнішньої сили всі ребра бруса подовжаться, тобто $a = a_0 + \Delta a$, $b = b_0 + \Delta b$, $l = l_0 + \Delta l$. Тоді об'єм розтягнутого бруса

$$V = abl = (a_0 + \Delta a)(b_0 + \Delta b)(l_0 + \Delta l), \quad (1.15)$$

де Δa , Δb , Δl – абсолютні подовження ребер бруса.

Відносні деформації граней у поздовжньому x і поперечних y , z напрямках визначаються виразами

$$\varepsilon_{\text{позд}} = \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a_0} = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b_0} = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (1.18)$$

Звідси

$$\Delta l = \varepsilon_x l_0, \quad \Delta a = \varepsilon_y a_0, \quad \Delta b = \varepsilon_z b_0. \quad (1.19)$$

Підставивши (1.19) у (1.15), розкривши дужки та знехтувавши доданками вищих порядків мализни ε^2 , ε^3 , отримаємо вираз

$$V = V_0 + \Delta V = a_0 b_0 l_0 (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) = a_0 b_0 l_0 (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad (1.20)$$

де ΔV – абсолютна зміна об'єму.

Щоб оцінити інтенсивність деформування твердого тіла, уведемо поняття **відносної зміни об'єму**

$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (1.21)$$

Таким чином, деформованість при однорідному розтяганні можна описати величиною відносної зміни об'єму, що дорівнює сумі трьох відносних деформацій ребер призматичного бруса. Оскільки при розтяганні відбувається осьове подовження, то $\varepsilon_x > 0$. Одночасно у двох поперечних напрямках має місце вкорочення, тобто $\varepsilon_y < 0$, $\varepsilon_z < 0$. Формально рівняння (1.21) не дає прямої відповіді на запитання, як змінюється об'єм. Однак простим підставленням рівнянь (1.16)–(1.18) у (1.21) можемо підтвердити висновок про те, що об'єм пружно деформованого призматичного бруса при розтяганні збільшується, оскільки при пружних деформаціях $\nu < 0,5$, а $\sigma_x > 0$. Тоді

$$e_V = (1 - 2\nu)\varepsilon_x = \frac{1 - 2\nu}{E}\sigma_x > 0. \quad (1.22)$$

Зазначимо, що при стисканні об'єм призматичного бруса буде зменшуватися.

Відсутність зміни об'єму при деформації зсуву проілюстровано на рис. 1.14. Тут через рівність абсолютного зсуву d на лівих і правих межах елемента, а також незмінність розмірів h і b первинний об'єм $V_0 = a_0 b_0 h_0$ залишається незмінним, а вихідний паралелепіпед під дією сили зсуву Q перетворюється на похилу призму.

1.4. Робота зовнішньої сили й потенціальна енергія деформації призматичного бруса

1.4.1. Робота зовнішньої сили й потенціальна енергія деформації при осьовому навантаженні

Робота, що здійснюється зовнішніми силами з деформування твердого тіла, приводить до накопичення в ньому **потенціальної енергії деформації**, яка є одним із фундаментальних понять механіки. По-іншому її називають енергією положення, оскільки вона дійсно залежить від відносного положення атомів або їх шарів у кристалічних ґратках, що визначається силами міжатомної взаємодії. При стисканні, наприклад, кристалічних матеріалів (до них належать метали та сплави) міжатомні відстані стають меншими, а при розтяганні – більшими. В обох випадках енергія деформації стає більшою за її значення в недеформованому стані, оскільки в останньому випадку відстані між атомами відповідають найменшому значенню енергії міжатомної взаємодії.

Обчислення потенціальної енергії деформації почнемо з найпростішого випадку однорідної осьової деформації, використовуючи для цього фундамен-

тальні закони збереження енергії. В основу таких розрахунків буде покладено відоме зі шкільної лави поняття роботи, що здійснюється силою з переміщення тіла.

Розгляньмо призматичний брус завдовжки L , який розтягується під дією сили F (рис. 1.15). При повільному навантаженні брус поступово подовжується, набуваючи максимального подовження δ у момент, коли розтягувальна сила набирає свого кінцевого значення F . Таким чином, більшим силам відповідають більші подовження, причому на початковому етапі деформування залежність між силою й подовженням є лінійною (рис. 1.16).

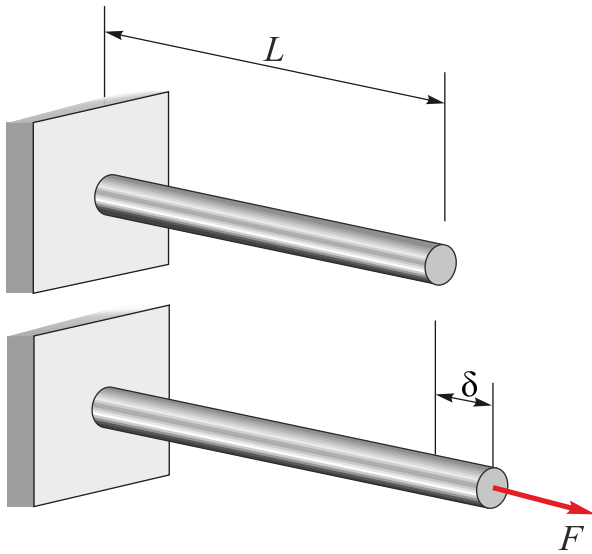


Рис. 1.15. Призматичний брус, навантажений силою F

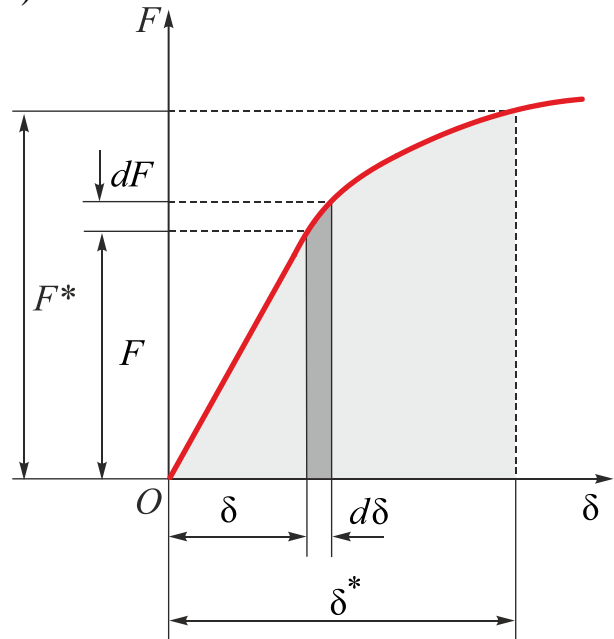


Рис. 1.16. Діаграма «зусилля – переміщення»

При подовженні бруса завдовжки L зовнішня сила F здійснює роботу з переміщення точки її прикладення. У фізиці відомо, що робота – це величина, що дорівнює добутку постійної за величиною сили на величину переміщення. У нашому випадку сила змінюється від нуля до певного максимального значення. Щоб обчислити роботу такої сили, необхідно знати закон змінення сили при переміщенні. Такий закон визначається діаграмою «зусилля – переміщення» (див. рис. 1.16), на якій уздовж вертикальної осі відкладено значення осьової сили, а уздовж горизонтальної – відповідні переміщення точки її прикладення, що дорівнюють подовженню стрижня $\Delta L = \delta$. Зазначимо, що форма кривої залежить від механічних властивостей матеріалу.

Позначимо через F довільне значення розтягувальної сили в діапазоні $(0...F^*)$, а відповідне подовження бруса через δ . Очевидно, що будь-який приріст сили dF буде відповідати приросту подовження $d\delta$. Роботу сили вздовж цього приросту подовження можна обчислити як добуток $Fd\delta$. На діаграмі її зображено затемненою смугою – прямокутником, обмеженим кривою навантаження. У та-

кому разі загальну роботу сили при її змінненні від нуля до максимального значення F^* можна обчислити як суму елементарних робіт, тобто

$$W = \int_0^{\delta^*} F d\delta. \quad (1.23)$$

На діаграмі «зусилля – переміщення» ця робота дорівнює площі, обмеженій діаграмою. Одночасно при подовженні бруса в кожній його точці виникають лінійні деформації, а отже, накопичується потенціальна енергія деформації (енергія деформації). Виходячи із закону збереження енергії, за відсутності її розсіювання можна стверджувати, що енергія деформації дорівнює роботі зовнішньої сили, тому

$$U = W = \int_0^{\delta} F d\delta. \quad (1.24)$$

Енергію деформації U називають **внутрішньою роботою**, або роботою внутрішніх сил. Очевидно, що роботу зовнішніх сил та енергію деформації вимірюють в одних і тих же величинах, тобто джоулях ($1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$).

Оскільки для пружної ділянки діаграми розтягання (див. рис. 1.17) можна записати, що

$$F = c\delta, \quad (1.25)$$

де c – коефіцієнт пропорційності, **потенціальну енергію пружної деформації** можна обчислити таким чином:

$$U = W = \int_0^{\delta} c\delta d\delta = \frac{c\delta^2}{2} = \frac{F\delta}{2}. \quad (1.26)$$

Рівняння (1.26) є підтвердженням **теореми Б. Клапейрона** (В. Р. Е. Clapeyron (1799–1864)), який уперше довів положення про рівність роботи зовнішніх сил і потенціальної енергії деформації для лінійно-пружних матеріалів.

При зникненні зовнішньої сили F (див. рис. 1.17) довжина бруса зменшується. Якщо при розтяганні напруження в брусі не перевищують границю пружності, то початкові розміри бруса повністю відновлюються. Якщо ж границю пружності було перевищено, то брус після розвантаження набере залишкового подовження. Таким чином, або повністю, або частково накопичена енергія деформації перетвориться на роботу з відновлення початкових форми й розмірів бруса. Цей процес показано на діаграмі «сила – переміщення» (рис. 1.18). При навантаженні робота сили дорівнює площі, обмеженій кривою, тобто площі $OABCD$. Після зникнення сили F у точці B , тобто за межами пружності, розвантаження буде відбуватися вздовж лінії BD , паралельної до лінії OA . У підсумку спостерігається залишкове подовження OD , а енергія пружної деформації, використана для відновлення початкової довжини, дорівнює площі затемненого три-

кутника BCD . Площа $OABDO$ відповідає енергії, безповоротно витраченій на пластичне деформування, яку називають **енергією непружної деформації** (енергією пластичної деформації).

Більшість конструкцій спроектовано інженерами з урахуванням того, що при експлуатаційних навантаженнях у кожній точці кожного конструктивного елемента напруження мають бути меншими за границю пружності. У випадку розтягання бруса навантаження, що відповідає границі пружності, на діаграмі «сила – переміщення» зображено точкою A (див. рис. 1.18). Якщо сила F є меншою за це значення, то при розвантаженні вивільниться вся накопичена енергія деформації, тобто довжина бруса набере початкового значення L . Брус у цьому випадку, по суті, є пружиною, що накопичує й вивільняє енергію при навантаженні та розвантаженні.

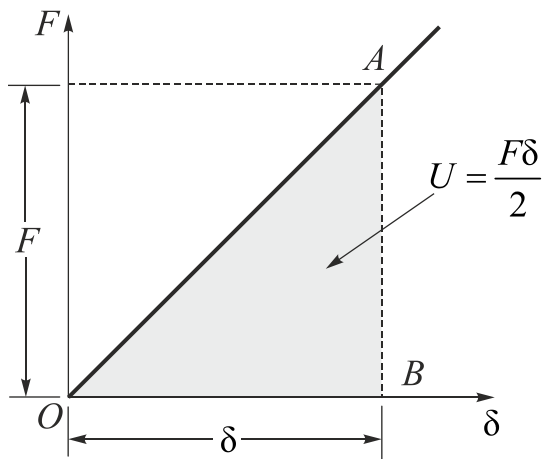


Рис. 1.17. Діаграма «зусилля – переміщення» для лінійно-пружного матеріалу

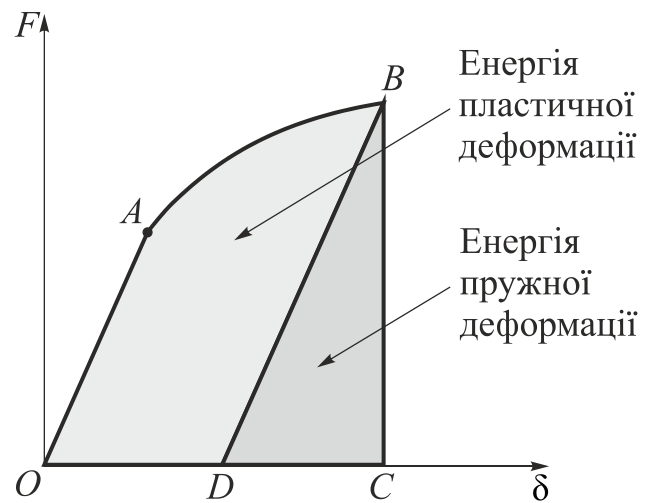


Рис. 1.18. Енергії пружної та непружної (пластичної) деформації

Під час розв’язання багатьох практичних задач дуже важливо вміти обчислювати подовження бруса або троса заданого поперечного перерізу з відомого матеріалу, щоб оцінити його жорсткість при заданому зовнішньому навантаженні. Для цього слід підставити в закон Гука (1.9) $\sigma = F / A$, оскільки $N_x = F$, а також $\epsilon = \Delta L / L$. Одержимо залежність між зовнішньою силою F і подовженням $\Delta l = \delta$ бруса з лінійно-пружного матеріалу (див. рис. 1.15):

$$\Delta l = \delta = \frac{FL}{EA}, \quad (1.27)$$

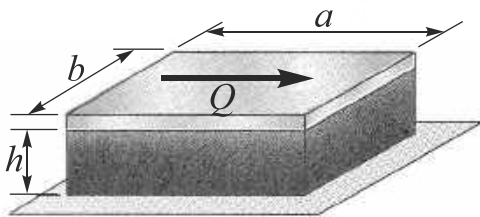
де L – початкова довжина бруса; A і E – площа поперечного перерізу бруса та модуль пружності його матеріалу відповідно.

Розглядаючи (1.26) і (1.27) спільно, енергію деформації лінійно-пружного бруса можна виразити у двох формах – через зовнішню силу і через подовження бруса:

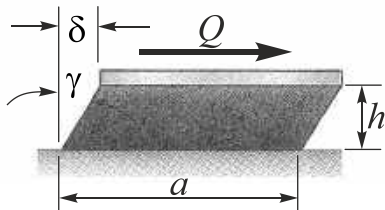
$$U = \frac{F^2 L}{2EA}; \quad U = \frac{EA\delta^2}{2L}. \quad (1.28)$$

Аналізуючи формулу (1.28), неважко дійти висновку, що збільшення довжини бруса приводить до збільшення енергії деформації навіть при незмінній силі, оскільки більший об'єм матеріалу зазнає деформації. З іншого боку, збільшення модуля пружності матеріалу або площі поперечного перерізу приводить до зменшення накопиченої енергії деформації, оскільки в цьому разі стають меншими деформації бруса.

1.4.2. Робота зовнішньої сили та потенціальна енергія деформації при зсуві



а



б

Рис. 1.19. Приклад однорідної деформації зсуву блока гальмівної колодки з пружного матеріалу: δ – абсолютний зсув, γ – кут зсуву (відносний зсув)

Розгляньмо тепер блок з пружного матеріалу у формі паралелепіпеда з розмірами $a \times b \times h$ під дією зовнішньої сили зсуву Q (рис. 1.19, а). При повільному навантаженні блок поступово перетворюється на призму з основою у вигляді паралелограма. Абсолютний зсув δ і деформація відносного зсуву $\delta = d / h$ набувають максимальних значень у момент, коли сила набирає свого кінцевого значення Q . І в цьому випадку більшим силам відповідають більші зсуви, причому на початковому етапі деформування залежність між силою і зміщенням є лінійною.

При зсуві (рис. 1.19, б) зовнішня сила Q здійснює роботу з переміщення верхньої межі блока відносно нижньої. Щоб обчислити роботу такої сили, необхідно використати лінійний закон залежності сили зсуву від абсолютного зсуву δ : $Q = c\delta$. Як і у випадку деформації осьового навантаження, приріст сили dQ буде відповідати приросту зсуву $d\delta$.

Роботу сили вздовж цього приросту можна обчислити як добуток $Qd\delta$.

Загальну роботу сили при її зміні від нуля до максимального значення Q можна обчислити як суму елементарних робіт, тобто

$$W = \int_0^{\delta} Qd\delta. \quad (1.29)$$

Одночасно при однорідному зсуві в кожній точці блока виникають однакові деформації зсуву γ , а отже, накопичується **потенціальна енергія деформації зсуву**.

Виходячи із закону збереження енергії, можна стверджувати, що енергія деформації дорівнює роботі зовнішньої сили, тому

$$U = W = \int_0^{\delta} Q d\delta. \quad (1.30)$$

Оскільки для пружної ділянки діаграми зсуву можна записати, що

$$Q = c\delta, \quad (1.31)$$

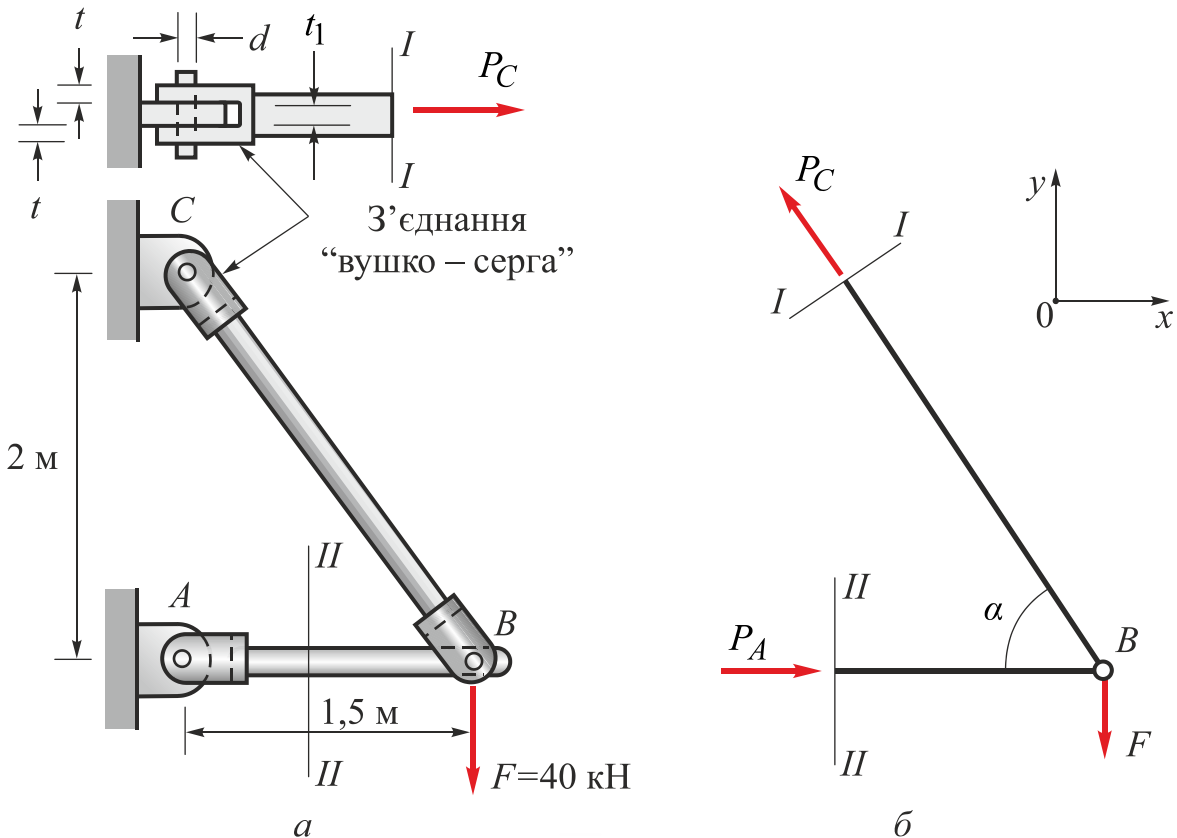
де c – коефіцієнт пропорційності, **потенціальну енергію пружної деформації зсуву** можна обчислити таким чином:

$$U = W = \int_0^{\delta} c\delta d\delta = \frac{c\delta^2}{2} = \frac{Q\delta}{2}. \quad (1.32)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1.1

До ферми з болтовими з'єднаннями у вузлах, що складається з елементів AB і BC , у вузлі B прикладено вертикальну силу $F = 40$ кН (див. рисунок). Площі поперечних перерізів елементів AB і BC є постійними: $A_{AB} = 0,004$ м², $A_{BC} = 0,002$ м². Діаметр d кожного болта дорівнює 20 мм, товщина серги $t = 10$ мм, а товщина вушка $t_1 = 15$ мм. Обчислити нормальне напруження, що діє в кожному елементі, а також дотичне напруження й напруження зминання в болті C .



Розв'язання. Згідно з розрахунковою схемою ферми (рис. б) внутрішні зусилля P_A і P_C , що діють в елементах AB і BC , дорівнюють опорним реакціям у шарнірних з'єднаннях A і C . Їх можна визначити, застосувавши метод перерізів і розглянувши рівновагу вузла B .

1. Обчислюємо внутрішні зусилля у стрижнях. Із умов рівноваги, зображеної на розрахунковій схемі, при $\alpha = \arctg(2/1,5) = 53^\circ$ отримуємо:

$$\sum F_y = 0: P_C \sin \alpha - F = 0; P_C = F / \sin \alpha = 50 \text{ кН (напрявлене вгору);}$$

$$\sum F_x = 0: -P_C \cos \alpha + P_A = 0; P_A = P_C \cos \alpha = 30 \text{ кН (напрявлене вправо).}$$

Зверніть увагу на таке: якщо в розв'язку P_A і P_C є додатними, то їх попередній напрямок на розрахунковій схемі було вибрано правильно, і навпаки. Обчислені внутрішні зусилля P_A і P_C , по суті, є поздовжніми силами, проте в механіці матеріалів прийнято вважати додатною ту внутрішню поздовжню силу, яка відповідає деформації розтягання, і навпаки. Тому для точного визначення поздовжніх сил слід записати: $N_A = -P_A = -30 \text{ кН}$ і $N_C = P_C = +50 \text{ кН}$.

2. Обчислюємо напруження. Нормальне напруження в кожному стрижні дорівнює інтенсивності розподілу поздовжньої сили по поперечному перерізу, тобто

$$\sigma_{AB} = \frac{N_A}{A_{AB}} = -\frac{30 \cdot 10^3}{0,004} = -7,5 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_C}{A_{BC}} = \frac{50 \cdot 10^3}{0,002} = 25 \text{ МПа,}$$

де знак «-» указує на те, що стрижень перебуває в умовах стискування. Відповідно до розрахункової схеми (див. рис. б) напруження подвійного зсуву в болтовому з'єднанні C визначаємо так:

$$\tau_{зс} = \frac{\frac{1}{2} N_C}{\pi d^2 / 4} = \frac{25 \cdot 10^3}{\pi (0,02)^2 / 4} = 79,6 \text{ МПа.}$$

Обчислюємо напруження зминання у вушці з'єднання C :

$$\sigma_{зм} = \frac{N_C}{t_1 d} = \frac{50 \cdot 10^3}{(0,015)(0,02)} = 166,7 \text{ МПа,}$$

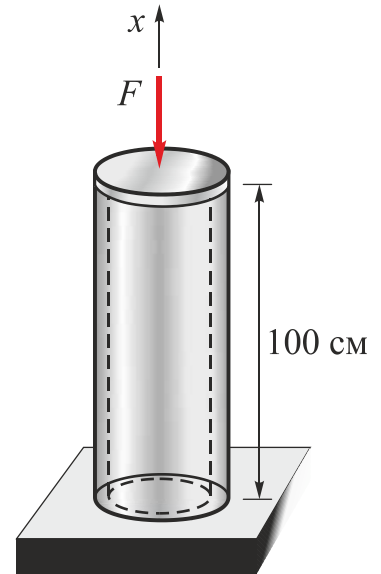
а також напруження зминання в серзі з'єднання C :

$$\sigma_{зм} = \frac{N_C}{2td} = \frac{50 \cdot 10^3}{2(0,01)(0,02)} = 125 \text{ МПа.}$$

Дотичні напруження й напруження зминання в двох інших з'єднаннях обчислюють аналогічно.

Задача 1.2

Підставка, що є порожньою круглою алюмінієвою трубкою, перебуває під дією стискального навантаження $F = 250$ кН (див. рисунок). Внутрішній d_1 та зовнішній d_2 діаметри трубки дорівнюють відповідно 9 см і 13 см. Довжина трубки – 100 см. Під дією навантаження трубка стала коротшою на 0,5 мм. Визначити стискальні напруження й деформацію підставки. Масою підставки можна знехтувати.



Розв'язання. Очевидно, що стискальна поздовжня сила $N_x = -F$ діє в усіх перерізах трубки, за винятком двох зон Сен-Венана в околі точки прикладення сили F та опори. Отже, для обчислення нормального напруження можна використати рівняння $\sigma = N_x / A$. Сила $F = 250$ кН, отже, поздовжня сила $N_x = -F = -250$ Н, а площа поперечного перерізу

$$A = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4} \left[(13 \cdot 10^{-2})^2 - (9 \cdot 10^{-2})^2 \right] = 69,08 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 69,08 \text{ см}^2.$$

Отже, стискальне напруження в підставці

$$\sigma = \frac{N_x}{A} = \frac{-250 \cdot 10^3}{69,08 \cdot 10^{-4}} = -36,19 \cdot 10^6 \text{ Па} = -36,19 \text{ МПа},$$

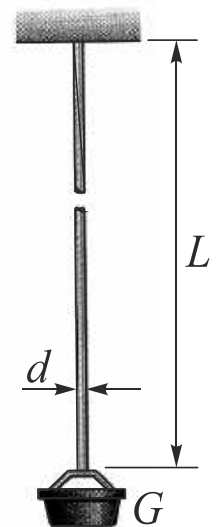
а поздовжня деформація стискання (укорочення)

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{-0,5 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-2}} = -0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Задача 1.3

Круглий сталевий трос завдовжки L і діаметром d висить у стволі шахти й утримує цебер з вугіллям вагою G (див. рисунок). Ураховуючи вагу троса, вивести формулу для обчислення максимального напруження σ_{\max} у ньому. Обчислити максимальне напруження в тросі, якщо $L = 40$ м, $d = 8$ мм, $G = 1,5$ кН.

Розв'язання. Максимальна осьова сила $N_{x_{\max}}$ діє у верхньому перерізі троса й дорівнює сумі ваги цебра G і ваги троса G_0 . Вага G_0 дорівнює добутку питомої ваги сталі γ та об'єму стрижня V : $G_0 = \gamma V = \gamma AL$, де A – площа поперечного перерізу троса. Таким чином, максимальне напруження обчислюємо за формулою



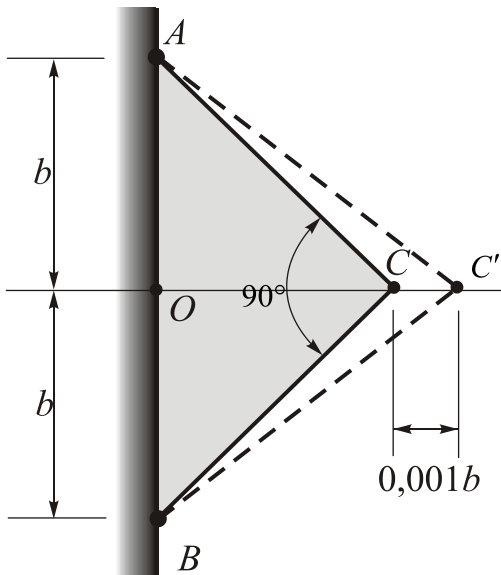
$$\sigma_{\max} = \frac{N_{x_{\max}}}{A} = \frac{G + \gamma AL}{A} = \frac{G}{A} + \gamma L.$$

Для обчислення максимального напруження підставляємо числові значення до цього рівняння. Площа поперечного перерізу $A = \frac{\pi d^2}{4}$, де $d = 8$ мм. Питома вага сталі $\gamma = 77,0$ кН/м³. Отже,

$$\sigma_{\max} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{\pi(8 \cdot 10^{-3})^2 / 4} + (77,0 \cdot 10^3)(40) = 29,84 + 3,11 = 33,0 \text{ МПа.}$$

Зазначимо, що вага троса суттєво впливає на величину максимального напруження, тому ним не можна нехтувати. З іншого боку, напруження й деформації розподіляються по довжині троса неоднорідно. Приклади неоднорідного напруженого й деформованого стану ретельно розглянемо в наступних розділах.

Задача 1.4



Тонка трикутна пластина ABC унаслідок рівномірної деформації набула форми трикутника ABC' (див. рисунок). Обчислити: 1) поздовжню деформацію вздовж центральної лінії OC ; 2) поздовжню деформацію вздовж крайки; 3) деформацію зсуву між крайками AC і BC .

Розв'язання. За рисунком визначаємо $L_{OC} = b$ і $L_{AC} = L_{BC} = b\sqrt{2} = 1,41421b$.

Знаходимо поздовжні деформації. З подовженням відрізка OC на $\Delta b = 0,001b$ рівняння деформації набуває вигляду

$$\varepsilon_{OC} = \frac{0,001b}{b} = 0,001 = 1,0 \cdot 10^{-3}.$$

Довжини zdeформованих крайок

$$L_{AC'} = L_{BC'} = \left[b^2 + (1,001b)^2 \right]^{1/2} = 1,41492b,$$

відповідно

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{BC} = \frac{1,41492 - 1,41421}{1,41421} = 0,502 \cdot 10^{-3}.$$

Обчислюємо деформацію зсуву. Під її дією кут ACB перетворюється на кут

$$AC'B = 2\text{tg}^{-1}\left(\frac{b}{1,001b}\right) = 89,943^\circ.$$

Зміна кута дорівнює $90 - 89,943 = 0,057^\circ$, а відповідна деформація зсуву (у радіанах)

$$\gamma = 0,057 \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0,995 \cdot 10^{-3}.$$

Зазначимо, що кут ACB зменшився, таку деформацію зсуву вважаємо додатною.

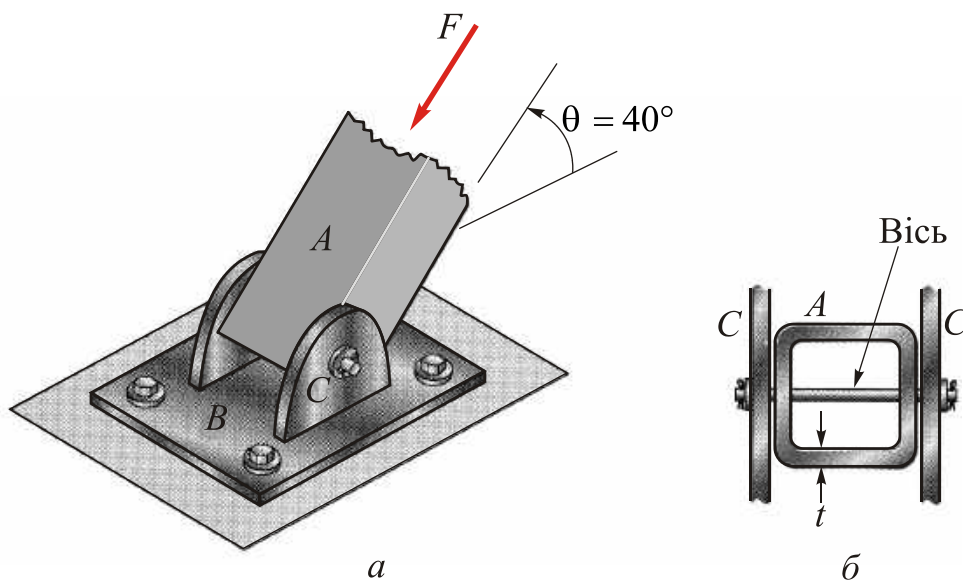
Задача 1.5

Сталевий стояк A передає стискальну силу $F = 54$ кН на поверхню основи B (див. рис. a). Стояк є порожнистим, товщина стінок його квадратного поперечного перерізу $t = 12$ мм (див. рис. b). Кут θ між стояком і горизонталлю становить 40° . Вісь, що проходить через стояк, передає стискальну силу на дві підсилювальні накладки C , приварені до пластини основи. Пластину прикріплено до поверхні основи чотирма анкерними болтами. Діаметр осі $d = 18$ мм, товщина накладок $t_C = 15$ мм, товщина основи пластини $t_B = 8$ мм, діаметр болта $d_B = 12$ мм. Обчислити такі напруження: 1) напруження зминання, що діє між стійкою та віссю; 2) дотичне напруження в осі; 3) напруження зминання, що діє між віссю й накладками; 4) напруження зминання, що діє між анкерними болтами й пластиною основи; 5) дотичне напруження в анкерних болтах. Тертям між пластиною основи й поверхнею основи можна знехтувати.

Розв'язання

1. Визначаємо напруження зминання, що діє між стояком і віссю. Середнє значення напруження зминання, що діє між стояком і віссю, знаходимо, поділивши силу, що діє в стояку, на загальну площу їх зминання. Площа поверхні стикування стояка й осі дорівнює подвоєному (оскільки зминання сталося у двох місцях) добутку товщини стояка на діаметр осі (див. рис. b). Таким чином, напруження зминання стояка

$$\sigma_{зм1} = \frac{F}{2td} = \frac{54 \cdot 10^3}{2(12 \cdot 10^{-3})(18 \cdot 10^{-3})} = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа}.$$



Шарнірне з'єднання між стояком A і пластиною основи B (a) і поперечний переріз стояка A (b)

2. Розраховуємо дотичне напруження в осі. З рис. б бачимо, що вісь піддається дотичним напруженням у двох площинах – між стояком і підсилювальними накладками. Таким чином, середнє дотичне напруження в осі, яка перебуває під дією подвійного зсуву, дорівнює повному навантаженню, прикладеному до осі, поділеному на подвоєну площу її поперечного перерізу:

$$\tau = \frac{F}{2\pi d^2 / 4} = \frac{54 \cdot 10^3}{2\pi(18 \cdot 10^{-3})^2 / 4} = 106 \cdot 10^6 \text{ Па} = 106 \text{ МПа}.$$

3. Обчислюємо напруження від зминання, що діє між віссю й накладками. Вісь діє на підсилювальнікладки у двох місцях, тому площа зминання дорівнює подвоєному добутку товщини накладок і діаметра осі. Отже,

$$\sigma_{зм2} = \frac{F}{2t_C d} = \frac{54 \cdot 10^3}{2(15 \cdot 10^{-3})(18 \cdot 10^{-3})} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа},$$

що є меншим, ніж напруження зминання, яке діє на стояк.

4. Знаходимо напруження від зминання, що діє між анкерними болтами й пластиною основи. Вертикальна складова сили F (див. рис. а) передається на поверхню основи шляхом зминання, що діє між нею та пластиною основи, а горизонтальна складова – через анкерні болти. Середнє напруження зминання, що діє між пластиною основи й анкерними болтами, дорівнює горизонтальній складовій сили F , поділеній на площу зминання чотирьох болтів. Площа зминання одного болта дорівнює добутку товщини пластини основи й діаметра болта. Таким чином, напруження зминання

$$\sigma_{зм3} = \frac{F \cos 40^\circ}{4t_B d_B} = \frac{(54 \cdot 10^3) \cos 40^\circ}{4(8 \cdot 10^{-3})(12 \cdot 10^{-3})} = 108 \cdot 10^6 \text{ Па} = 108 \text{ МПа}.$$

5. Визначаємо дотичне напруження в анкерних болтах. Середнє дотичне напруження в анкерних болтах дорівнює горизонтальній складовій сили F , поділеній на загальну площу поперечного перерізу чотирьох болтів (кожен болт перебуває під дією зсуву). Отже,

$$\tau_B = \frac{F \cos 40^\circ}{4\pi d_B^2 / 4} = \frac{(54 \cdot 10^3) \cos 40^\circ}{4\pi(12 \cdot 10^{-3})^2 / 4} = 119 \cdot 10^6 \text{ Па} = 119 \text{ МПа}.$$

Зверніть увагу, що тертя між пластиною основи й поверхнею підлоги зменшує навантаження на анкерні болти завдяки їх попередньому затягання. Однак при цьому в болтах виникають додаткові розтягувальні напруження.

Задача 1.6

Сталеву трубу завдовжки $L = 150$ см із зовнішнім $d_2 = 15$ см і внутрішнім $d_1 = 11$ см діаметрами стиснено осьовою силою $F = 600$ кН (див. рисунок). Модуль пружності матеріалу труби $E = 210$ ГПа, а коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,30$.

Визначити для труби: укорочення δ ; поперечну деформацію $\varepsilon_{\text{попер}}$; збільшення зовнішнього Δd_2 і внутрішнього Δd_1 діаметрів; збільшення товщини стінки Δt ; зменшення об'єму матеріалу ΔV ; відносну зміну об'єму e_V .

Розв'язання. Через однорідність розподілу напружень і деформацій по об'єму труби для розв'язування задачі скористаємося поняттями середніх напружень і деформацій.

За наявності в перерізах поздовжньої сили $N = -F$ площу поперечного перерізу A і поздовжні напруження σ визначаємо так:

$$A = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4}[(15)^2 - (11)^2] = 81,64 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2;$$

$$\sigma = -\frac{F}{A} = \frac{-600 \cdot 10^3}{81,64 \cdot 10^{-4}} = -73,5 \text{ МПа (стискання)}.$$

Оскільки отримані напруження є суттєво меншими за границю текучості сталі (для сталей вона становить від 200 до 1600 МПа), а матеріал труби зазнає пружних деформацій, поздовжні деформації можна визначити із закону Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-73,5 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} = -0,35 \cdot 10^{-3}.$$

Знак «-» означає зменшення довжини труби.

Знаючи поздовжні деформації, можна визначити зміну довжини труби:

$$\delta = \varepsilon L = (-0,35 \cdot 10^{-3}) \cdot 1,2 = -0,42 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,42 \text{ мм}.$$

Знак «-» означає зменшення довжини труби (укорочення).

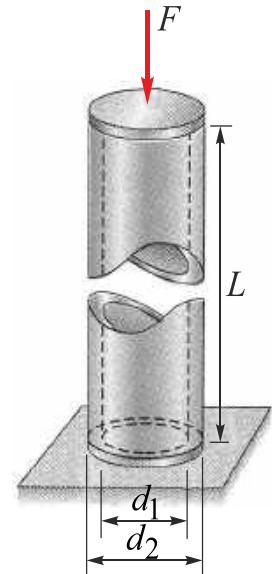
Поперечну деформацію можна обчислити з використанням коефіцієнта Пуассона:

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\nu \varepsilon = -(0,30)(-0,35 \cdot 10^{-3}) = 0,105 \cdot 10^{-3}.$$

Знак «+» означає збільшення розмірів поперечного перерізу при стисканні.

Збільшення зовнішнього діаметра легко обчислити, помноживши поперечну деформацію на діаметр:

$$\Delta d_2 = \varepsilon_{\text{попер}} d_2 = (0,105 \cdot 10^{-3})(15 \cdot 10^{-2}) = 1,575 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$



Подібним чином визначаємо збільшення внутрішнього діаметра:

$$\Delta d_1 = \varepsilon_{nonep} d_1 = (0,105 \cdot 10^{-3}) \cdot 11 = 1,155 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Збільшення товщини стінки можна розрахувати так само, як і збільшення діаметрів:

$$\Delta t = \varepsilon_{nonep} t = (0,105 \cdot 10^{-3}) \cdot 2 = 0,21 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Цей результат перевіримо таким чином:

$$\Delta t = \frac{\Delta d_2 - \Delta d_1}{2} = \frac{1}{2} (1,575 - 1,155) \cdot 10^{-5} = 0,21 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Відносну зміну об'єму визначимо за формулою (1.21):

$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon + \varepsilon_{nonep} + \varepsilon_{nonep} = -0,35 \cdot 10^{-3} + 0,105 \cdot 10^{-3} + 0,105 \cdot 10^{-3} = -0,14 \cdot 10^{-3},$$

тобто об'єм матеріалу труби зменшується на 0,014 %.

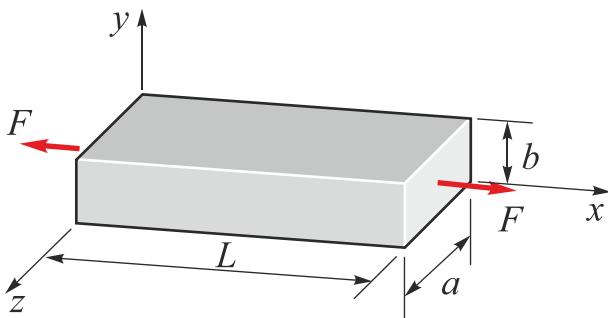
Зміну об'єму матеріалу труби можна обчислити таким чином:

$$\Delta V = e_V V_0 = e_V A L = (-0,14 \cdot 10^{-3}) (81,64 \cdot 10^{-4}) (150 \cdot 10^{-2}) = -1714,44 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2.$$

Від'ємна зміна об'єму вказує на його зменшення при стисканні. Зауважимо також, що при стисканні обидва діаметри й товщина стінки труби збільшуються.

Числові результати розв'язаної задачі показують, що абсолютні значення змін розмірів труби є вкрай малими. Але, незважаючи на це, вони мають важливе значення під час аналізу статично невизначуваних конструкцій.

Задача 1.7



Блок зі сталі прямокутного поперечного перерізу з розмірами $a = 2,4$ см і $b = 1,2$ см зазнає дії розтягувальної сили $F = 45$ кН, як показано на рисунку. Вимірювання свідчать про те, що довжина блока збільшилася на $\delta_x = 7,11 \cdot 10^{-5}$ м (початкова довжина $L = 10$ см), а ширина зменшилася на $\delta_z = 0,533 \cdot 10^{-5}$ м.

Визначити модуль пружності, коефіцієнт Пуассона матеріалу блока й відносну зміну його об'єму.

Розв'язання. Для розв'язування задачі використаємо гіпотезу про однорідність розподілу напружень і деформацій по об'єму блока й поняття середніх напружень і деформацій.

Визначаємо площу поперечного перерізу блока: $A = 2,4 \cdot 1,2 = 2,88 \text{ см}^2$, а також осьові напруження й деформації:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{45 \cdot 10^3}{2,88 \cdot 10^{-4}} = 156,3 \text{ МПа};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{7,11 \cdot 10^{-5}}{10^{-1}} = 7,11 \cdot 10^{-4}.$$

Обчислюємо поперечну деформацію в напрямку z , що визначає зменшення ширини блока:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta_z}{a} = -\frac{0,533 \cdot 10^{-5}}{2,4 \cdot 10^{-2}} = -2,22 \cdot 10^{-4}.$$

Оскільки $\varepsilon_y = \varepsilon_z$, товщина блока теж зменшилась на величину

$$\delta_y = (-2,22 \cdot 10^{-4})(1,2 \cdot 10^{-2}) = -2,664 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Модуль пружності обчислюємо із закону Гука:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{156,3 \cdot 10^6}{7,11 \cdot 10^{-4}} = 219,8 \cdot 10^9 \text{ Па} = 219,8 \text{ ГПа}.$$

Коефіцієнт Пуассона

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{-2,22 \cdot 10^{-4}}{7,11 \cdot 10^{-4}} \right| = 0,31.$$

Відносну зміну об'єму блока визначимо за формулою (1.21):

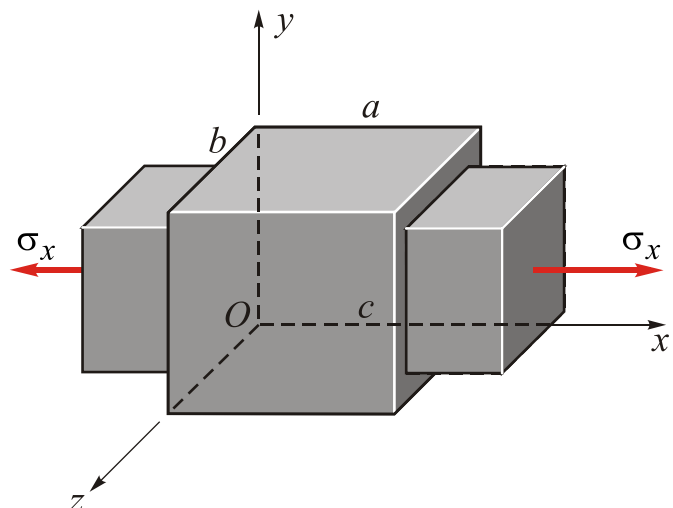
$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 7,11 \cdot 10^{-4} + (-2,22 \cdot 10^{-4}) + (-2,22 \cdot 10^{-4}) = 2,67 \cdot 10^{-4}$$

(об'єм блока збільшився).

Задача 1.8

Паралелепіпед із алюмінію з розмірами $a = 3 \text{ см}$, $b = 2 \text{ см}$ і $c = 4 \text{ см}$ перебуває під дією напруження $\sigma_x = 60 \text{ МПа}$ (див. рисунок). Визначити величини: 1) зміну розмірів Δa , Δb і Δc ; 2) відносну зміну об'єму e_V ; 3) зміну об'єму ΔV . Узяти $E = 70 \text{ ГПа}$ і $\nu = 0,33$.

Розв'язання. Уважатимемо, що в межах об'єму паралелепіпеда напруження розподілено однорідно. Тоді



деформацію ребра a можна обчислити за законом Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{60 \cdot 10^6}{70 \cdot 10^9} = 0,857 \cdot 10^{-3}.$$

Абсолютне подовження паралелепіпеда в напрямку x обчислюємо так:

$$\Delta a = a\varepsilon_x = (3 \cdot 10^{-2})(0,857 \cdot 10^{-3}) = 2,571 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Поперечні деформації вкорочення в напрямках y і z визначаємо з використанням коефіцієнта Пуассона:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -0,33(0,857 \cdot 10^{-3}) = -0,283 \cdot 10^{-3}.$$

Знаходимо абсолютні укорочення ребер b і c :

$$\Delta b = b\varepsilon_y = 2 \cdot 10^{-2}(-0,283 \cdot 10^{-3}) = -0,566 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

$$\Delta c = c\varepsilon_z = 4 \cdot 10^{-2}(-0,283 \cdot 10^{-3}) = -1,131 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Відносну зміну об'єму e_V визначимо за формулою (1.21):

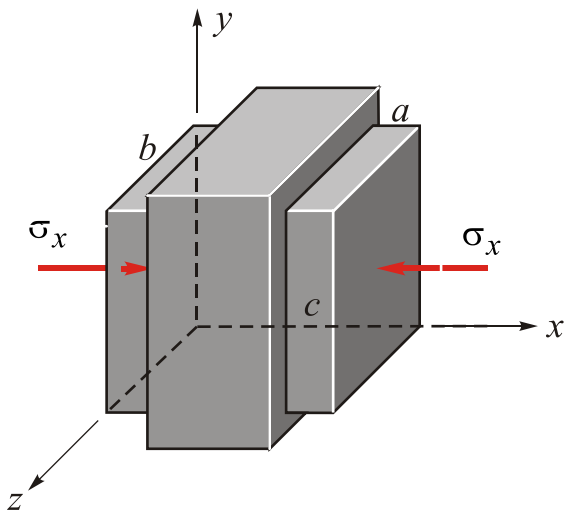
$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,857 \cdot 10^{-3} + (-0,283 \cdot 10^{-3}) + (-0,283 \cdot 10^{-3}) = 0,291 \cdot 10^{-3}.$$

Знак «+» свідчить про те, що об'єм паралелепіпеда збільшився.

Абсолютну зміну об'єму обчислимо так:

$$\Delta V = e_V V_0 = e_V abc = (0,291 \cdot 10^{-3})(3 \cdot 10^{-2})(2 \cdot 10^{-2})(4 \cdot 10^{-2}) = 6,984 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3 \text{ (об'єм паралелепіпеда збільшився).}$$

Задача 1.9



Паралелепіпед зі сталі з розмірами $a = 3$ см, $b = 2$ см і $c = 4$ см перебуває під дією стискальних напружень $\sigma_x = 100$ МПа (див. рисунок). Визначити величини: 1) зміну розмірів Δa , Δb і Δc ; 2) відносну зміну об'єму e_V ; 3) зміну об'єму ΔV . Узяти $E = 200$ ГПа і $\nu = 0,3$.

Розв'язання. Уважатимемо, що в межах об'єму паралелепіпеда напруження розподіляються однорідно. Тоді деформацію стискання ребра a можна обчислити за законом Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{100 \cdot 10^6}{70 \cdot 10^9} = -1,43 \cdot 10^{-3}.$$

Знаходимо абсолютне укорочення паралелепіпеда в напрямку x :

$$\Delta a = a\varepsilon_x = 3 \cdot 10^{-2}(-1,43 \cdot 10^{-3}) = -4,29 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Поперечні деформації подовження в напрямках y і z визначимо з використанням коефіцієнта Пуассона:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -0,33(-1,43 \cdot 10^{-3}) = 0,472 \cdot 10^{-3}.$$

Абсолютні подовження ребер b і c обчислюємо так:

$$\Delta b = b\varepsilon_y = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,472 \cdot 10^{-3} = 0,944 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

$$\Delta c = c\varepsilon_z = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,472 \cdot 10^{-3} = 1,888 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Відносну зміну об'єму e_V визначаємо за формулою (1.21):

$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -1,43 \cdot 10^{-3} + 0,472 \cdot 10^{-3} + 0,472 \cdot 10^{-3} = -0,486 \cdot 10^{-3}.$$

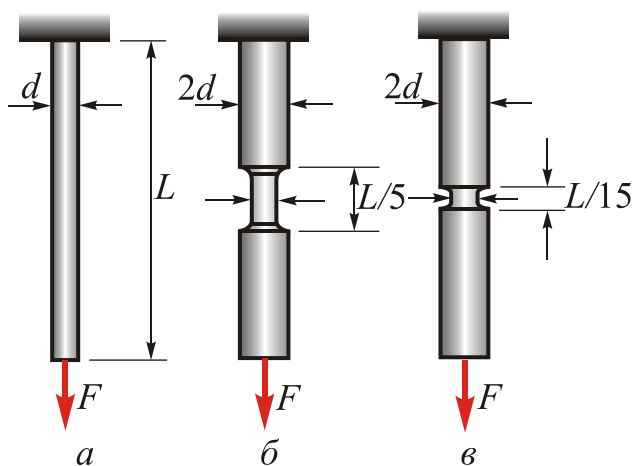
Знак « $-$ » свідчить про те, що об'єм паралелепіпеда зменшився.

Розраховуємо абсолютну зміну об'єму:

$\Delta V = e_V V_0 = e_V abc = (0,291 \cdot 10^{-3})(3 \cdot 10^{-2})(2 \cdot 10^{-2})(4 \cdot 10^{-2}) = 6,984 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$ (об'єм паралелепіпеда зменшився).

Задача 1.10

Три стрижні круглого поперечного перерізу мають однакову довжину L , але різну форму (див. рисунок). Перший стрижень має однаковий за всією довжиною діаметр d . Другий стрижень має діаметр d тільки на одній п'ятій його довжини, а третій – має діаметр d тільки на $1/15$ частині його довжини. На інших ділянках другий і третій стрижні мають діаметр $2d$. Усі три стрижні навантажено однаковою осьювою силою F .



Порівняти величини потенціальної енергії деформації, накопиченої в стрижнях, без урахування ефекту концентрації напружень.

Розв'язання. Енергію деформації U_1 першого стрижня визначаємо безпосередньо з рівняння

$$U_1 = \frac{N^2 L}{2EA},$$

де $F = \pi d^2 / 4$; N – поздовжня сила, $N = F$. Таким чином,

$$U_1 = \frac{F^2 L}{2EA}.$$

Енергію деформації U_2 другого стрижня визначаємо складанням енергій деформації, накопичених на трьох ділянках стрижня:

$$U_2 = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i}.$$

Поздовжня сила $N_x(x)$ згідно з методом перерізів чисельно дорівнює зовнішній силі F , тобто $N = F$. Таким чином,

$$U_2 = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} = \frac{F^2 (L/5)}{2EA} + \frac{F^2 (4L/5)}{2E(4A)} = \frac{F^2 L}{5EA} = \frac{2U_1}{5},$$

що становить тільки 40 % потенціальної енергії першого стрижня.

Енергію деформації U_3 третього стрижня знаходимо з використанням попередніх рівнянь:

$$U_3 = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} = \frac{F^2 (L/15)}{2EA} + \frac{F^2 (14L/15)}{2E(4A)} = \frac{3F^2 L}{20EA} = \frac{3U_1}{10}.$$

Зазначимо, що у цьому разі потенціальна енергія деформації зменшилась на 30 % порівняно з першим стрижнем.

Порівнявши отримані результати, ми дійшли висновку, що енергія деформації зменшується зі збільшенням довжини ділянки стрижня зі збільшеною площею поперечного перерізу. Одна й та ж робота, витрачена на деформування трьох стрижнів, приводить до найбільших напружень у третьому стрижні, оскільки він має найменшу здатність поглинати енергію. Якщо ділянку з діаметром d зменшити ще більше, то здатність поглинати енергію буде зменшуватися. Таким чином, щоб досягти високих напружень у зразку, наприклад, з проточкою, достатньо виконати незначну роботу деформації, і навпаки. У випадку динамічного навантаження здатність конструктивного елемента поглинати енергію є ще більш важливою, тому наявність проточок стає вельми небезпечною.

При статичному навантаженні максимальні напруження є більш важливою характеристикою, ніж здатність поглинати енергію. У наведеній задачі всі три стрижні мають однакові максимальні напруження N_x / F , а отже, і однакову носійну здатність.

Задача 1.11

Визначити вертикальне переміщення δ_B вузла B ферми, показаної на рисунку. Уважати, що обидва елементи ферми мають однакову осьову жорсткість EA .

Розв'язання. Оскільки тільки одну силу прикладено до ферми, можна знайти переміщення, викликане її прикладенням, прирівнюючи роботу, здійснену силою, і потенціальну енергію деформації, накопичену в елементах ферми. Однак, щоб обчислити енергію деформації, необхідно знати зусилля, які діють в них.

Згідно з умовою рівноваги сил, що діють у вузлі B , у кожному брусі поздовжня сила визначається формулою

$$N(x) = \frac{F}{2 \cos \beta}.$$

Виходячи із геометрії ферми, визначаємо, що довжина кожного бруса $L_1 = H / \cos \beta$, де H – висота ферми. Тоді потенціальну енергію, накопичену в обох елементах, розраховуємо так

$$U = 2 \frac{N(x)^2 L_1}{2EA} = \frac{F^2 H}{4EA \cos^3 \beta}.$$

Обчислюємо роботу сили F :

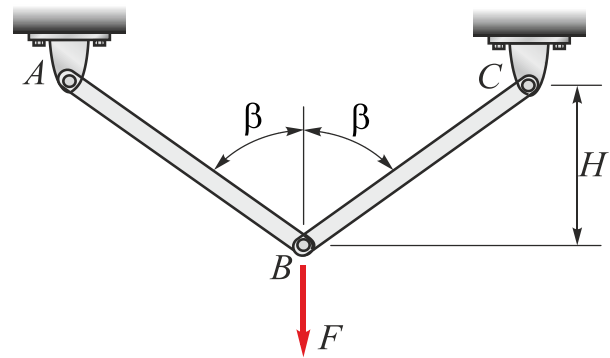
$$W = \frac{F \delta_B}{2},$$

де δ_B – лінійне переміщення вузла B .

Прирівнявши U і W та розв'язавши це рівняння відносно δ_B , отримуємо рівняння для обчислення вертикального переміщення вузла B :

$$\delta_B = \frac{FH}{2EA \cos^3 \beta}.$$

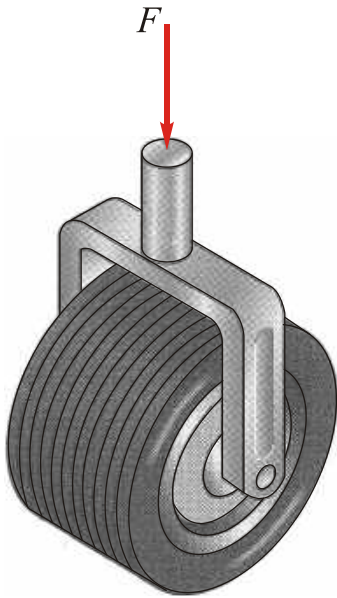
Зазначимо, що запропоноване розв'язання базується тільки на умовах рівноваги й понятті потенціальної енергії деформації.



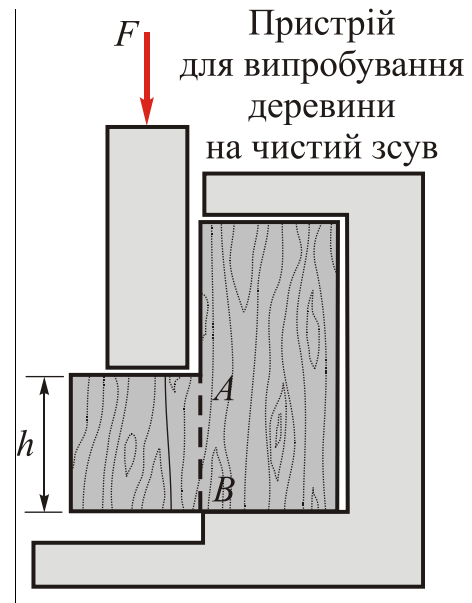
Переміщення ферми під дією зосередженої сили F , прикладеної у вузлі B

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

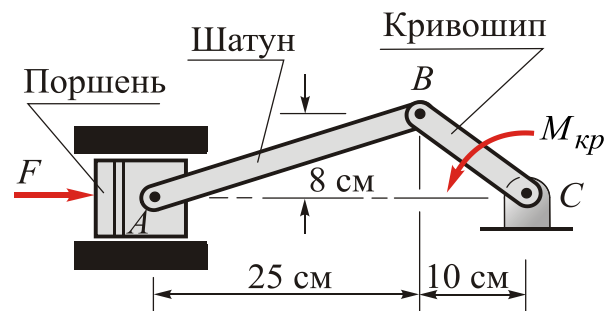
1.1. На переднє колесо транспортного засобу діє вертикальне навантаження, що дорівнює 60 кН. Визначити середнє дотичне напруження $\tau_{сер}$, що діє в осі діаметром 30 мм.



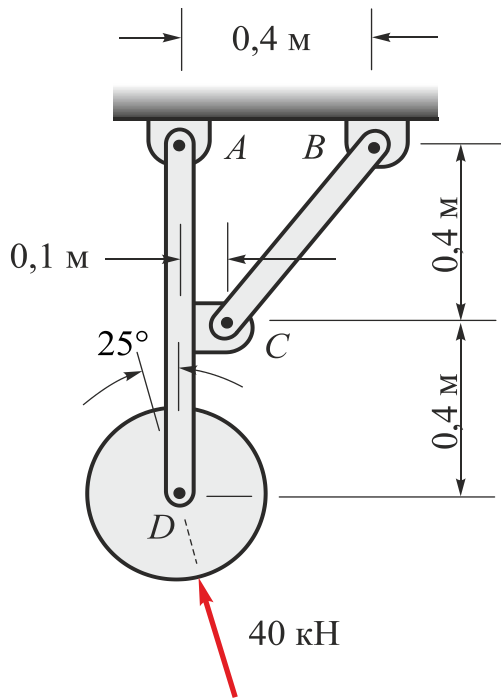
1.2. Дерев'яний брус випробовують на чистий зсув за допомогою спеціального пристрою. Навантаження викликає зсув у зразку вздовж площини AB . Висота площини зсуву $h = 50$ мм, а ширина (перпендикулярно до площини рисунка) становить 100 мм. Визначити середнє дотичне напруження $\tau_{сер}$, яке діє в деревині, якщо відомо, що навантаження $F = 16$ кН.



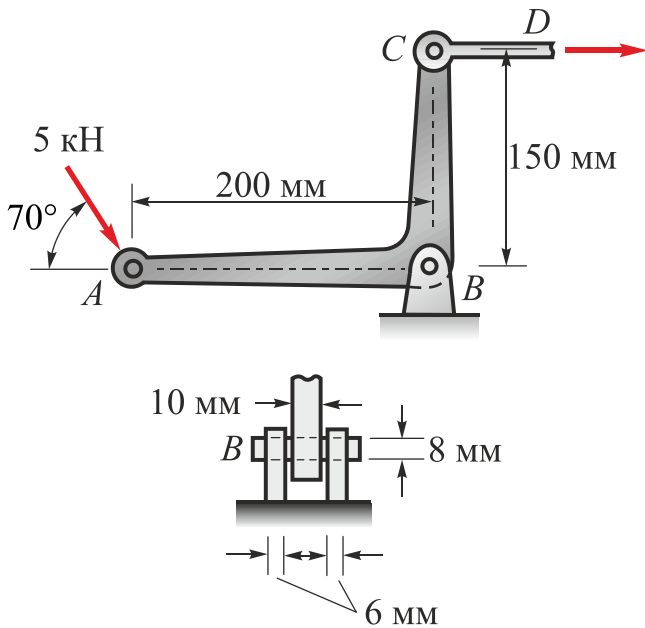
1.3. На рисунку зображено кривошипно-штанунний механізм, що складається з поршня, шатуна та кривошипа. Припустивши, що сила $F = 10$ кН діє так, як показано на рисунку, визначити: 1) крутний момент $M_{кр}$, необхідний для того, щоб система перебувала в рівновазі; 2) нормальне напруження в шатуні AB , якщо площа його поперечного перерізу дорівнює 5 см^2 .



1.4. Обчислити дотичні напруження, що діють в осях системи підвішування шасі в точках A і B . Під час розв'язання вважати, що діаметр осі дорівнює 25 мм, а самі осі зазнають подвійного зсуву.

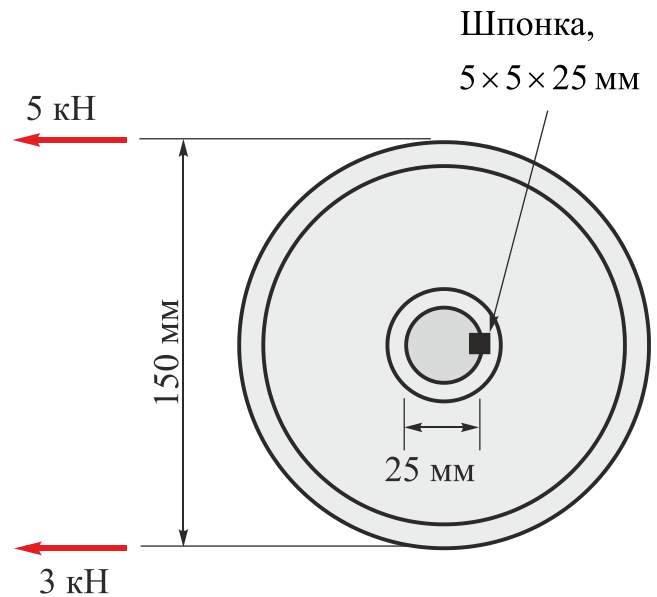


1.5. Зображений на рисунку важіль перебуває в стані рівноваги. Визначити: 1) нормальне напруження в штоку CD ; 2) дотичне напруження в осі в точці B (діаметр осі дорівнює 8 мм); 3) напруження зминання в точці B важеля; 4) напруження зминання в точці B серги (основи).

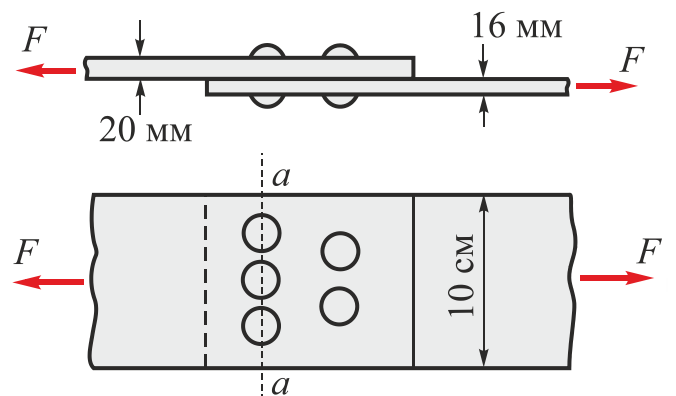


1.6. До вала діаметром 25 мм прикріплено маховик діаметром 150 мм. На маховик діють наванта-

ження, показані на рисунку. Визначити дотичне напруження в шпонці.

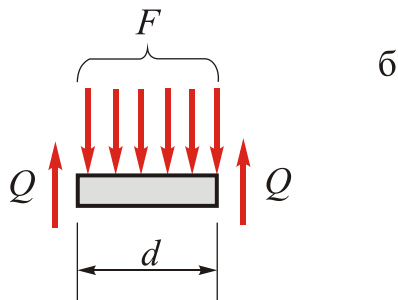
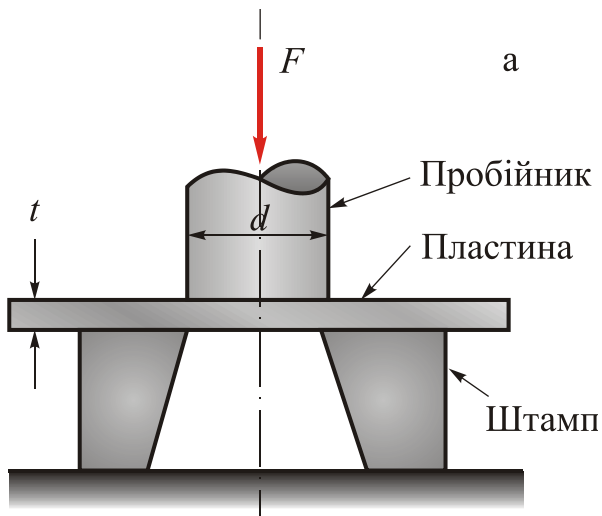


1.7. Показане на рисунку з'єднання нахлестом виконано із застосуванням п'яти заклепок діаметром 2,5 мм. Обчислити: 1) максимальні дотичні напруження в заклепках; 2) максимальне напруження зминання; 3) максимальне напруження розтягання на ділянці $a-a$. Під час розв'язання вважати, що навантаження розподіляється між заклепками рівномірно.

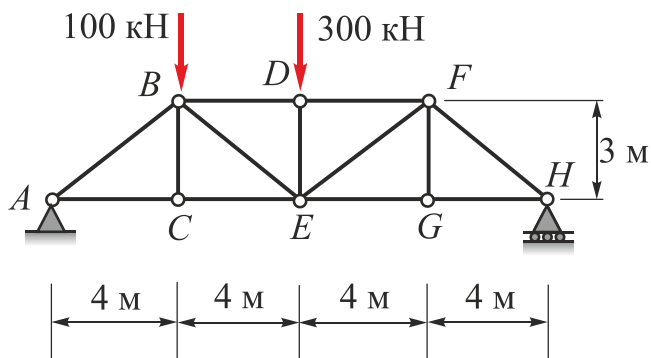


1.8. Пробійник діаметром $d = 2,5$ см використовували для того, щоб пробити отвір у сталевій пластині завтовшки $t = 10$ мм. Обчислити: 1) силу F , при якій дотичне напруження в сталі дорівнює 140 МПа;

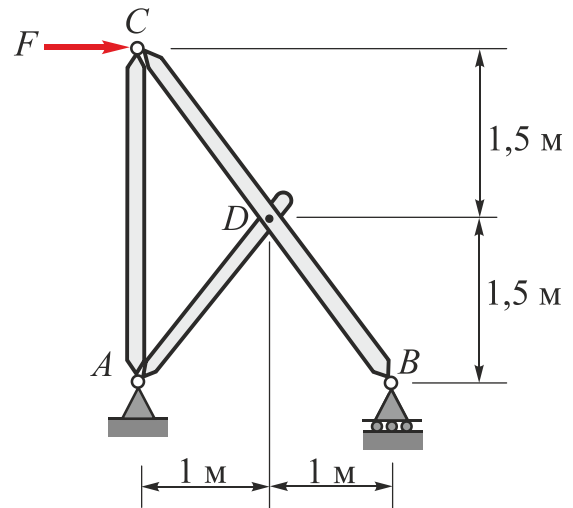
2) відповідне нормальне напруження в пробійнику.



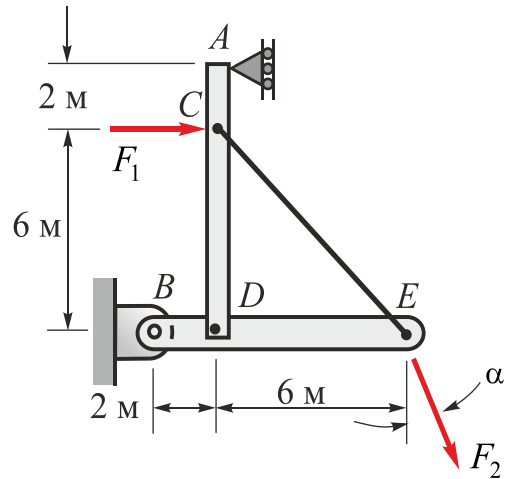
1.9. Визначити напруження, що діють в елементах BE і CE ферми з болтовими вузловими з'єднаннями. Площа постійного перерізу кожного стрижня дорівнює $5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.



1.10. Ферма складається з трьох з'єднаних болтами стрижнів діаметром 2,5 см. Обчислити нормальні напруження в стрижнях AC та AD , якщо $F = 5 \text{ кН}$.

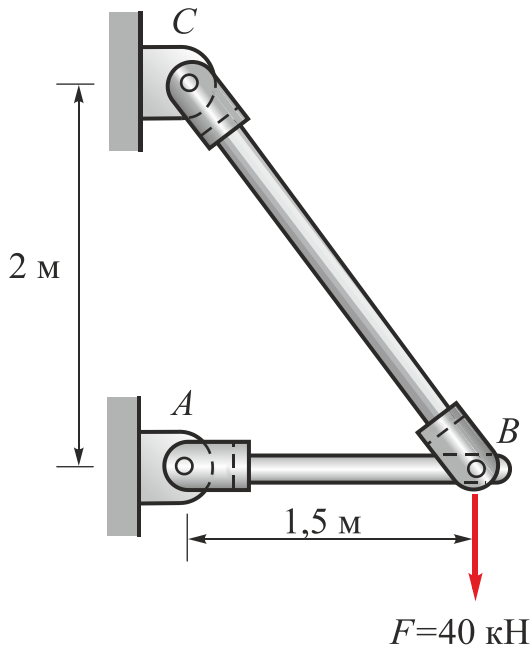


1.11. Ферма зазнає навантаження $F_1 = 5 \text{ кН}$ і $F_2 = 10 \text{ кН}$ при $\alpha = 30^\circ$. Обчислити: 1) нормальне напруження в стрижні CE , постійний поперечний переріз якого дорівнює $15 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$; 2) дотичні напруження в осях D і E , якщо діаметр кожної з них дорівнює 10 мм і вони зазнають подвійного зсуву.

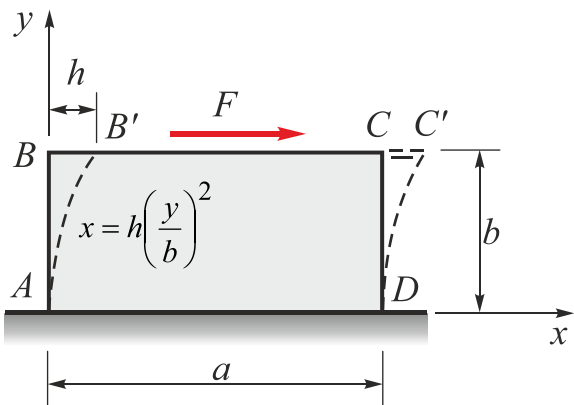


1.12. Під дією тиску діаметр сферичного балона зі стиснутим газом змінюється від 200 до 201 мм. Визначити середню колову деформацію.

1.13. Визначити лінійні деформації елементів AB і CB конструкції, якщо відомо, що точка B перемістилася на 3 мм уліво.



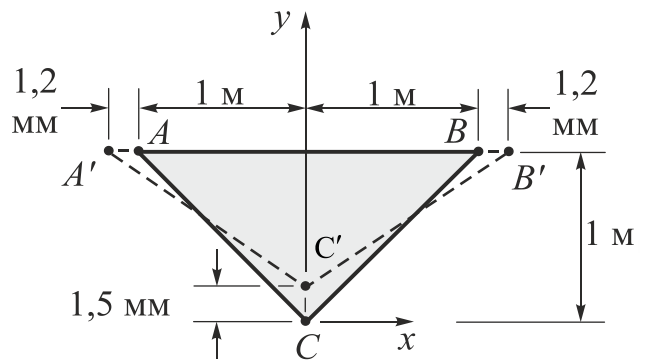
1.14. Під дією зсувної сили F пластина $ABCD$ зайняла положення $AB'C'D$. Обчислити деформацію зсуву: 1) у будь-якій точці пластини; 2) у центрі пластини; 3) у вихідній точці пластини, якщо $b = 200$ мм і $h = 0,5$ мм.



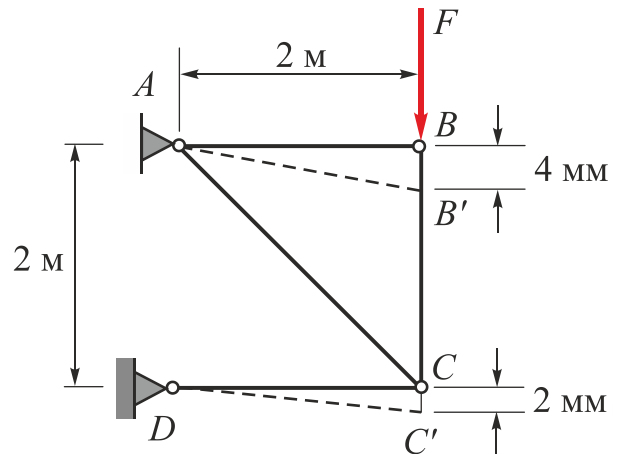
1.15. Квадратна пластина розміром 100×100 мм деформувалася й перетворилася на прямокутник розміром $100 \times 100,2$ мм. Обчислити додатну деформацію зсуву між діагоналями прямокутника.

1.16. Унаслідок однорідної деформації тонка пластина з контуром ABC перетворилася на фігуру $A'B'C'$. Обчислити: 1) складові плоскої деформації ϵ_x , ϵ_y і γ_{xy} ; 2) деформацію зсу-

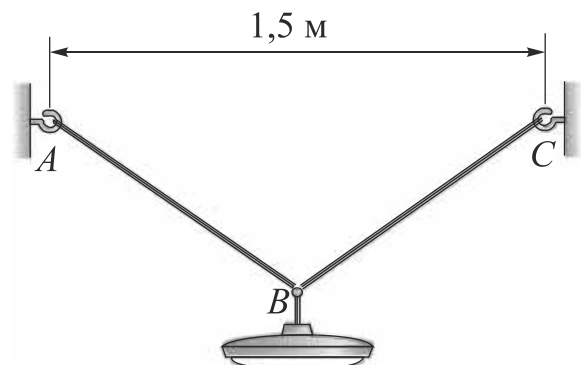
ву між крайками AC і BC .



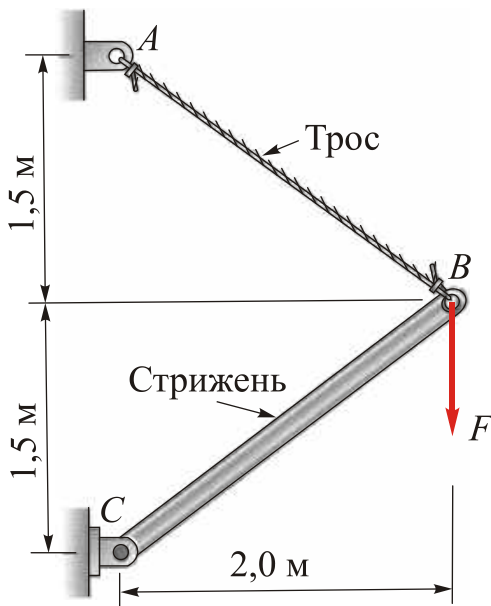
1.17. Шарнірно з'єднана конструкція $ABCD$ деформувалася й перетворилася на фігуру $AB'C'D$. Визначити середні деформації в елементах BC і AC .



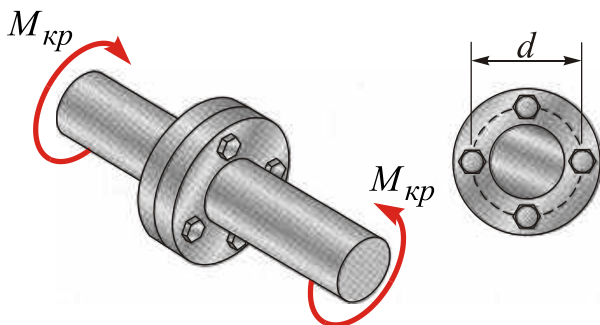
1.18. Між двома опорами, розташованими на відстані 1,5 м одна від одної, на сталевому дроті ABC в його центральній точці підвішено лампу. Довжина дроту становить 2 м, а діаметр – 0,5 мм. Визначити напруження розтягання σ_p , що діє в дроті, якщо лампа важить 60 Н.



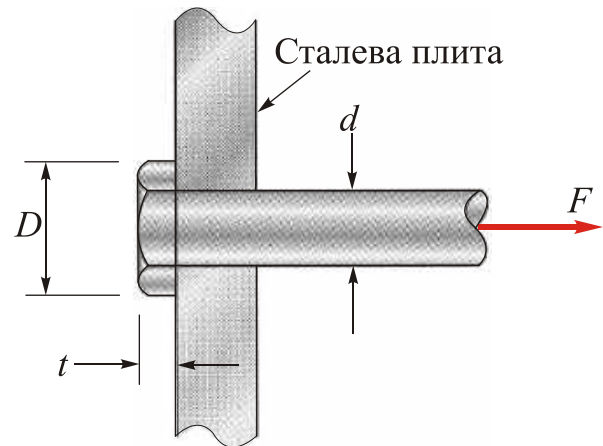
1.19. Конструкція, яка складається з троса AB і сталевго стрижня BC , зазнає вертикального навантаження $F = 12 \text{ кН}$. Площа перерізу троса дорівнює 150 мм^2 , а площа стрижня – 300 мм^2 . Визначити: 1) нормальні напруження σ_{AB} і σ_{BC} у тросі та стрижні, змінення їх довжин (збільшення чи зменшення); 2) деформацію троса, якщо відомо, що він став довшим на $1,1 \text{ мм}$; 3) деформацію стрижня, якщо він став коротшим на $0,35 \text{ мм}$.



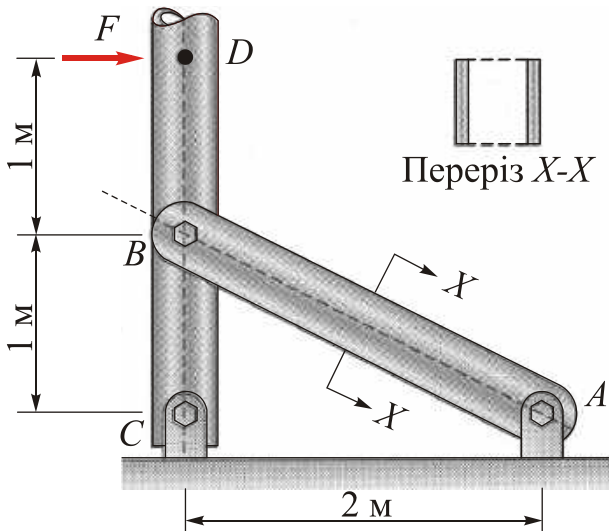
1.20. Чотири болти діаметром 18 мм передають крутний момент $M_{кр} = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ через фланцеве з'єднання. Визначити середні дотичні напруження $\tau_{сер}$, що діють в кожному з болтів, якщо відомо, що діаметр кола для встановлення болтів $d = 150 \text{ мм}$. Затягування болтів не враховувати.



1.21. Болт проходить через сталеву плиту. Діаметр болта $d = 12 \text{ мм}$. Шестигранна головка болта опирається безпосередньо на сталеву плиту. Діаметр кола, описаного навколо шестикутника головки, $D = 20 \text{ мм}$ (сторона шестикутника дорівнює 10 мм). Товщина головки болта $t = 6 \text{ мм}$. Для спрощення обчислень припустити, що розтягувальна сила F , прикладена до болта, дорівнює 5 кН . Визначити: 1) середнє напруження зминання $\sigma_{зм}$, що діє між головкою болта та плитою; 2) середнє дотичне напруження $\tau_{сер}$, що діє в головці болта.

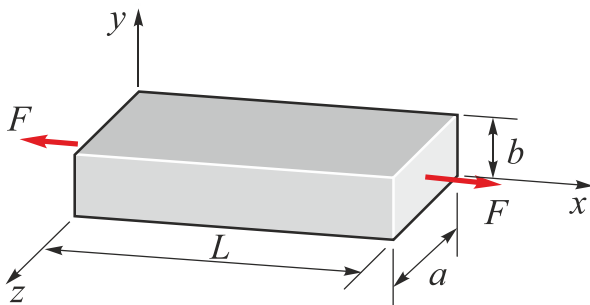


1.22. Ферма складається з вертикальної труби CD і підкоса AB , утвореного двома стрижнями прямокутного перерізу. Конструкцію скріплено двома болтовими з'єднаннями, розташованими в точках A і C . Підкіс прикріплено до труби в точці B болтом діаметром 18 мм . У точці D прикладено горизонтальне навантаження F . Визначити середнє дотичне напруження $\tau_{сер}$ у болті в точці B , якщо відомо, що $F = 15 \text{ кН}$.



1.23. Стрижень діаметром 50,8 мм і завдовжки 1,83 м коротшає на 1,19 мм при навантаженні осьовою силою 178 кН. За умови, що діаметр збільшився на 0,01 мм, обчислити: 1) коефіцієнт Пуассона; 2) модуль пружності; 3) модуль зсуву.

1.24. Призматичний брус зазнає осьового стискання силою $F = 400$ кН. Розміри бруса: $a = 60$ мм, $b = 40$ мм і $L = 200$ мм. Розміри b і L змінилися до величин 40,02 і 199,7 мм відповідно. Обчислити: 1) коефіцієнт Пуассона; 2) модуль пружності; 3) розмір a ; 4) модуль зсуву.

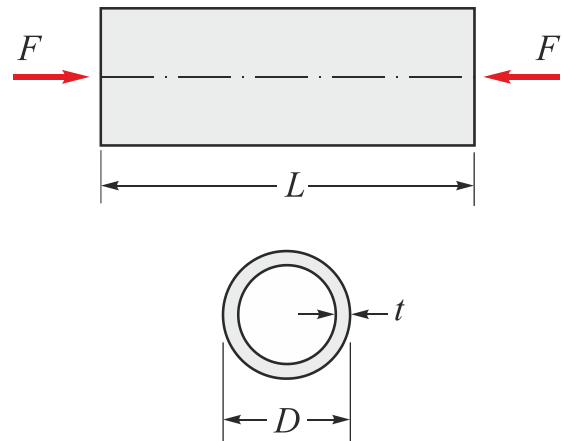


1.25. Сталевий стрижень діаметром 25 мм навантажено розтягувальною осьовою силою F . Зменшення діаметра становить 0,012 мм. Обчислити величину сили F , якщо $E = 200$ ГПа і $\nu = 0,33$.

1.26. Призматичний брус розтягнуто осьовою силою. Обчислити коефіцієнт Пуассона для матеріалу бруса, якщо відношення відносної зміни об'єму до відносної зміни площі поперечного перерізу дорівнює $-0,67$.

1.27. Суцільний латунний стрижень діаметром 5 см ($E = 103$ ГПа, $\nu = 0,3$) установлено в порожнистій бронзовій трубі. Визначити внутрішній діаметр труби, при якому зазор між трубою та стрижнем буде дорівнювати нулю, якщо стрижень навантажити осьовою стискальною силою $F = 180$ кН.

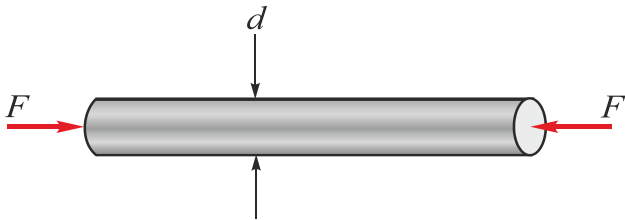
1.28. Чавунна труба ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0,3$), що має довжину $L = 0,5$ м, зовнішній діаметр $D = 150$ мм і товщину стінки $t = 15$ мм, перебуває під дією стискальної осьової сили $F = 200$ кН. Визначити зміни: 1) довжини ΔL ; 2) діаметра ΔD ; 3) товщини Δt .



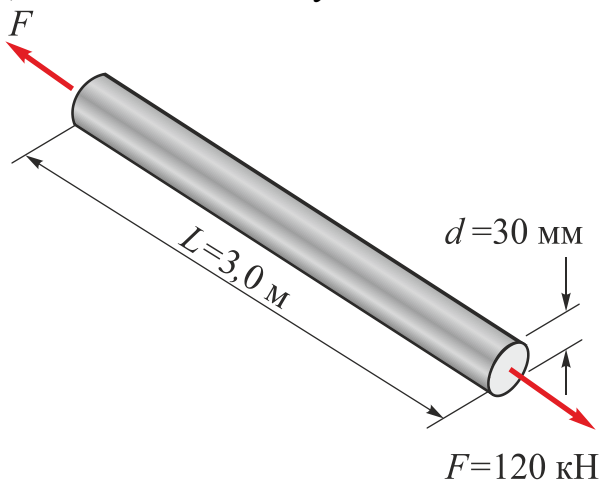
1.29. Чавунний стрижень ($E = 80$ ГПа, $\nu = 0,3$) діаметром $d = 75$ мм і завдовжки $L = 0,5$ м навантажено осьовою стискальною силою $F = 200$ кН. Визначити: 1) збільшення діаметра Δd ; 2) зменшення довжини стрижня ΔL ; 3) зміну об'єму стрижня ΔV .

1.30. Суцільний циліндр діаметром 50 мм і завдовжки 100 мм зазнає дії однорідних напружень розтягання $\sigma = 50$ МПа. Уважаючи, що $E = 205$ МПа і $\nu = 0,33$, обчислити: 1) зміну довжини циліндра; 2) зміну його об'єму.

1.31. Стрижень із надміцної сталі з модулем пружності $E = 200$ ГПа та коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,29$ стиснуто осьювою силою F . Перед навантаженням діаметр стрижня дорівнював 25,000 мм. Для забезпечення роботи конструкції діаметр стрижня не повинен перевищувати 25,025 мм. Яка допустима сила F відповідає цій умові?



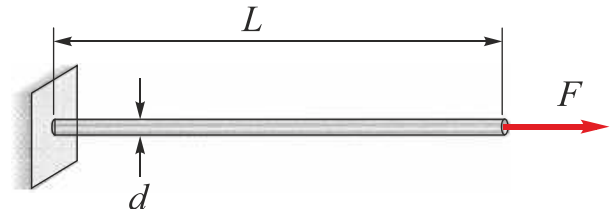
1.32. Стрижень круглого поперечного перерізу навантажено розтягувальною силою $F = 120$ кН. Довжина стрижня $L = 3,0$ м, а діаметр $d = 30$ мм. Матеріал стрижня – алюмінієвий сплав з модулем пружності $E = 73$ ГПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,33$. Обчислити: 1) подовження стрижня δ ; 2) зменшення діаметра Δd ; 3) збільшення об'єму ΔV .



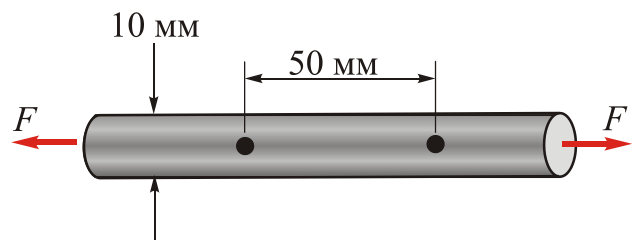
1.33. Дріт із надміцної сталі діаметром 3 мм і завдовжки 15 м під дією розтягувальної сили 4 кН набув подовження 35 мм. Визначити: 1) модуль пружності сталі E ; 2) коефіцієнт Пуассона матеріалу, якщо діаметр дроту зменшився на $2,2 \cdot 10^{-3}$ мм; 3) відносну зміну об'єму дроту.

1.34. Стрижень із алюмінієвого сплаву діаметром 10 мм розтягнуто осьювою силою F . При цьому його діаметр зменшився на 0,016 мм. Визначити: 1) силу F ; 2) відносну зміну об'єму стрижня.

1.35. Стрижень зі сплаву монель (довжина $L = 200$ мм, діаметр $d = 6$ мм) розтягнуто осьювою силою $F = 6,7$ кН. Використовуючи значення $E = 170$ ГПа, $\nu = 0,32$, визначити: 1) збільшення довжини; 2) зменшення діаметра; 3) збільшення об'єму стрижня; 4) відносну зміну його об'єму.



1.36. Під час випробовування на розтягання використовують зразок із латуні діаметром 10 мм і мірною довжиною (базою) 50 мм. Коли розтягувальна сила F набирає значення 20 кН, довжина бази збільшується на 0,122 мм. Визначити: 1) модуль пружності E латуні; 2) коефіцієнт Пуассона, якщо діаметр зменшився на 0,00830 мм; 3) відносний об'єм зразка.



Розділ 2. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

У вступі під час уведення понять нормальних і дотичних напружень у довільній точці ДТТ зазначалося, що в загальному випадку навантаження значення складових істинного повного напруження p (див. рис. В.5) у різних точках площини перерізу будуть різнитися за величиною й напрямком через неоднорідність їх розподілу як по площині перерізу, так і по об'єму ДТТ у цілому. З іншого боку, складові повного напруження p в одній і тій же точці площини перерізу будуть залежати від орієнтації цього перерізу, а отже, і площадки, розташованої в ньому, відносно ДТТ. Настав час вирішити поставлене раніше завдання щодо встановлення зв'язку між діючими напруженнями та орієнтацією площадки в ДТТ. Ще раз зазначимо його виняткову важливість: для подальшого розрахунку на міцність в умовах неоднорідного розподілу діючих напружень по об'єму ДТТ нам необхідно знати їх максимальні значення або небезпечні комбінації в кожній точці ДТТ. Насамперед для цього слід сформулювати поняття **напруженого стану в точці твердого тіла** й математично описати його.

Напружений стан у точці деформованого твердого тіла – це сукупність напружень, які діють у безлічі нескінченно малих площадок, що проходять через задану точку.

Виявляється, що для того щоб обчислити напруження в будь-якій із безлічі площадок, які проходять через точку O (див. рис. В.5), і таким чином описати напружений стан у цій точці, достатньо обчислити складові повного напруження, що діють у трьох взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через цю точку. Ці площадки, що є перпендикулярними до координатних осей, можна подати як три сторони паралелепіпеда нескінченно малого розміру, тобто з розмірами dx , dy , dz , який називають **нескінченно малим елементом ДТТ** (надалі **елемент ДТТ**). Напружений стан є предметом вивчення спеціального розділу механіки ДТТ – так званої **теорії напружень**.

2.1. Основи теорії напружень

Основним завданням теорії напружень є встановлення зв'язку між величинами напружень, що діють у точці ДТТ, і орієнтацією площадки, у якій вони діють. Ці розрахунки в **теорії напруженого стану** проводять для того, щоб знайти максимальні значення напружень у будь-якій точці ДТТ, досліджуючи на екстремум функції залежності напружень від кутів нахилу площадки, яка проходить через досліджувану точку. Для цього з ДТТ в околі досліджуваної точки O виокремлюють елемент ДТТ з розмірами dx , dy , dz (рис. 2.1). Його зображено ізольовано на рис. 2.2. Очевидно, що він перебуває в стані рівноваги як частина ДТТ, яке є зрівноваженим. Напруження, що діють на гранях цього елемента, відображають вплив твердого тіла, яке його оточує, а інтенсивність самого впливу, тобто величини напружень, визначається системою зовнішніх сил $F_1, F_2, \dots, F_k; F_{k+1}, \dots, F_{n-1}, F_n$.

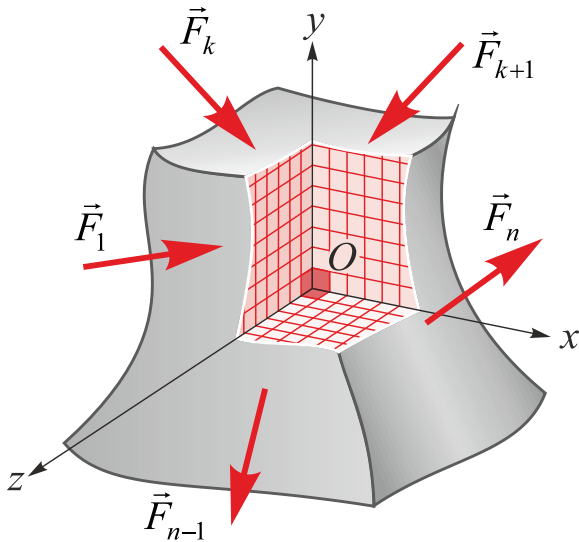


Рис. 2.1. Нескінченно малий об'єм ДТТ (елемент ДТТ), виокремлений в околі досліджуваної точки O

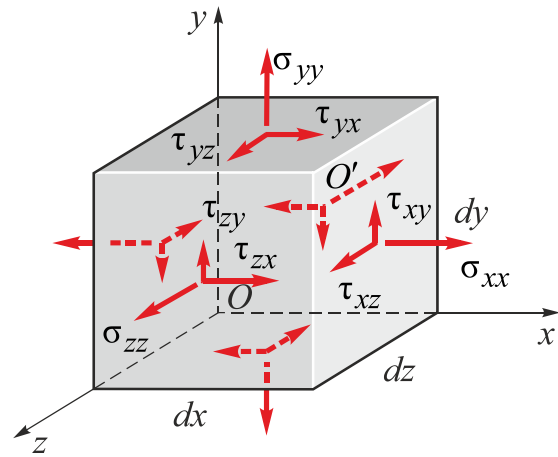


Рис. 2.2. Сукупність напружень, що діють на гранях елемента ДТТ

Якщо розміри елемента зменшувати, то він буде стягуватися в точку O . При цьому всі грані елемента можна вважати такими, що проходять через неї, але є по-різному орієнтованими, у цьому випадку – взаємно перпендикулярними. Таким чином, напруження в цих гранях будуть напруженнями, які діють у трьох взаємно перпендикулярних площадках, що містять точку O . Кожні дві попарно протилежні паралельні грані можна вважати зворотними сторонами однієї й тієї ж площадки. Отже, напруження, що діють у паралельних і попарно протилежних гранях, дорівнюють одне одному та є протилежно напрямленими. Елемент, показаний на рис. 2.2, відображає напружений стан у досліджуваній точці ДТТ. Уважають, що через нескінченну мализну елемента напруження в точках O і O' є однаковими й рівномірно розподіленими по кожній із граней. На рис. 2.2 їх позначено векторами, що діють у центрі кожної грані. Дев'ять складових напруженого стану в системі координат x, y, z , тобто напруження $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$, утворюють три групи напружень, які діють у взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через точку O . Таке подання напруженого стану отримало назву **тензора напружень**. Тензор напружень є тензором другого порядку, тому для позначення його елементів або складових необхідні два індекси. Зазначимо, що вектори вважають тензорами першого порядку, а скалярні величини – нульового порядку.

Уведемо правило знаків (може застосовуватися як для нормальних, так і для дотичних напружень), яке ґрунтується на співвідношенні між напрямком зовнішньої нормалі до площадки й напрямком складових повного напруження на ній. Нехай напрямок зовнішньої нормалі ν до площадки збігається з додатним напрямком якої-небудь координатної осі, наприклад осі x на рис. 2.3, *a*. Таку площадку будемо вважати додатною. У цьому разі напрямок додатних нормальних

напружень на площадці (тут це σ_{xx}) теж збігається з додатним напрямком координатної осі. Фізично додатні нормальні напруження спричиняють розтягання елемента ДТТ. Дотичні напруження на такій додатній площадці будемо вважати додатними, якщо вони напрямлені в додатних напрямках відповідних координатних осей (y і z).

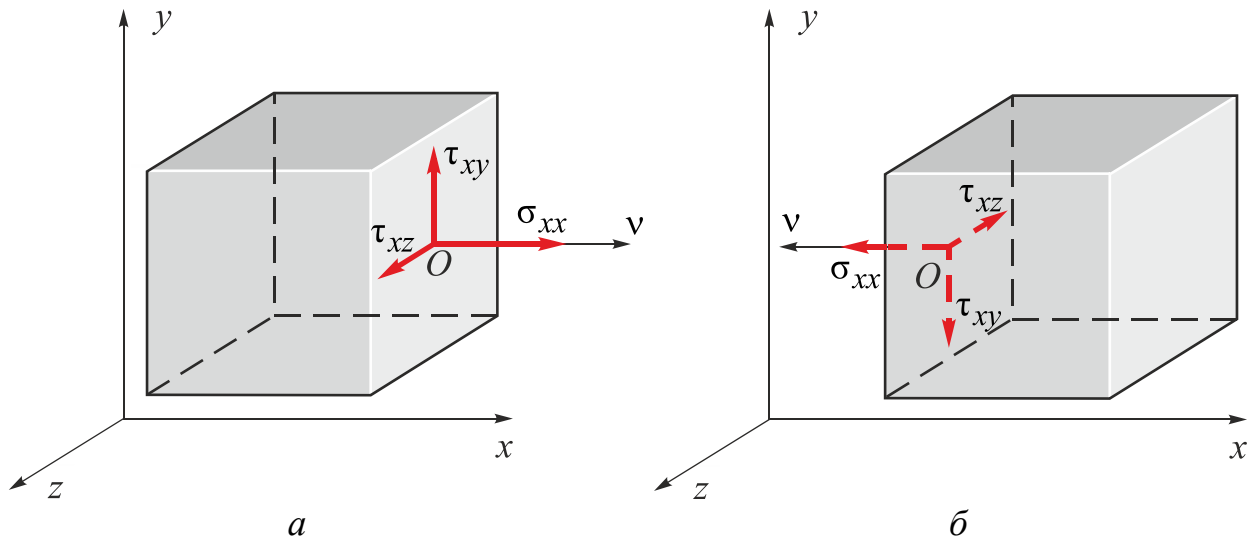


Рис. 2.3. Ілюстрація поняття додатної площадки

Аналогічно, якщо зовнішня нормаль до площадки збігається з від'ємним напрямком координатної осі (таку площадку будемо називати від'ємною (рис. 2.3, б)), то усі три складові повного напруження на такій від'ємній площадці теж будемо вважати додатними, якщо вони напрямлені в бік від'ємних напрямків відповідних координатних осей (y і z).

Таким чином, усі напруження на трьох додатних (верхній, передній, правій) гранях елемента, зображеного на рис. 2.2, а також на трьох від'ємних (нижній, задній, лівій) його гранях є додатними.

Вивчаючи напруження в ДТТ, необхідно відрізнити однорідний і неоднорідний напружені стани. У разі однорідного напруженого стану напруження є однаковими в кожній точці довільного перерізу у всіх паралельних йому перерізах. Тоді розміри елементів ДТТ, виокремлених для вивчення напруженого стану, не мають значення, оскільки напруження є однаковими в усіх точках будь-якої грані елемента, а отже, є рівномірно розподіленими по кожній грані.

При неоднорідному напруженому стані елемент уважають нескінченно малим. Тоді припущення про рівномірність розподілу напружень по його гранях виконується з точністю до нескінченно малих другого порядку. Вибравши нескінченно малі розміри елемента ДТТ, виокремлені елементи можна розглядати як такі, що перебувають в умовах однорідного напруженого стану незалежно від того, однорідним чи неоднорідним є напружений стан ДТТ.

2.1.1. Закон парності (рівності) дотичних напружень

Розгляньмо властивості дотичних напружень, які впливають із рівноваги сил, що діють на елемент ДТТ (див. рис. 2.2). Система сил, прикладених до елемента, має задовольняти умови рівноваги. По-перше, сума проєкцій усіх сил, прикладених до елемента, на три взаємно перпендикулярні осі (x, y, z) повинна дорівнювати нулю. Ці три рівності виконуються тотожно, оскільки зусилля, що діють на попарно протилежних гранях, є однаковими за величиною й протилежними за напрямком. По-друге, визначимо, при яких умовах суми моментів усіх сил відносно осей x, y, z перетворюються на нуль. Використаємо для цього рис. 2.2:

$$\sum M_x(F_i) = 0 \rightarrow (\tau_{zy} dx dy) dz - (\tau_{yz} dz dx) dy = 0, \text{ звідки } \rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz}; \quad (2.1)$$

$$\sum M_y(F_i) = 0 \rightarrow (\tau_{xz} dy dz) dx - (\tau_{zx} dy dx) dz = 0, \text{ звідки } \rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad (2.2)$$

$$\sum M_z(F_i) = 0 \rightarrow (\tau_{yx} dx dz) dy - (\tau_{xy} dz dy) dx = 0, \text{ звідки } \rightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy}. \quad (2.3)$$

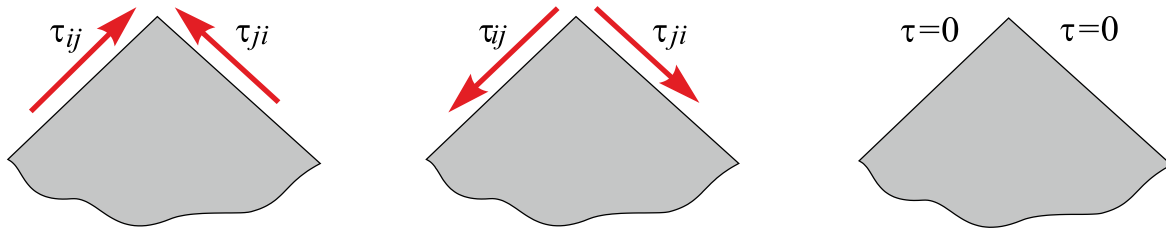


Рис. 2.4. Ілюстрація закону парності дотичних напружень

Співвідношення (2.1)–(2.3) мають назву **закон парності (рівності) дотичних напружень** і є його аналітичним формулюванням: *дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках і є перпендикулярними до спільного ребра, завжди будуть однаковими за абсолютною величиною й напрямленими одночасно або до ребра, або від ребра* (рис. 2.4).

Таким чином, закон парності дотичних напружень дає змогу зменшити кількість незалежних компонентів напружень, які характеризують напружений стан у точці, з дев'яти до шести.

2.1.2. Визначення напружень у площадці довільної орієнтації

Зазначимо, що твердження про те, що дев'ять напружень $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ описують напружений стан у точці, потребує доведення, оскільки поки що не очевидно, чи можна, знаючи ці напруження, визначити напруження на площадці довільної орієнтації, яка містить точку O . Доведемо це, сформулювавши задачу таким чином.

Задано: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, тобто шість компонентів напруженого стану в трьох взаємно перпендикулярних гранях виокремленого елемента (їх прикладено до граней елементів на рис. 2.2, 2.5, але на рис. 2.5 не показано).

Необхідно: визначити напруження на нескінченно малій площадці з нормаллю v , орієнтація якої в системі координат x, y, z визначається напрямними косинусами $l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma$, тобто на **площадці довільної орієнтації** ABC . Зауважимо, що тетраедр (призма) $OABC$, як і елемент, має нескінченно малі розміри, що дає змогу вважати напруження на гранях елемента та площадці ABC напруженнями, що діють на площадках, які містять точку O й мають різну орієнтацію.

Очевидно, що вектор повного напруження p_v на площадці ABC можна подати його складовими (проекціями на координатні осі) p_x, p_y, p_z , які підлягають визначенню для подальшого обчислення σ і τ на похилій площадці. Очевидно також, що повне напруження визначається як сума векторних величин p_x, p_y, p_z , тобто

$$p_v = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}. \quad (2.4)$$

Якщо припустити, що площа трикутника ABC дорівнює dA , то

$$\begin{aligned} dA_x &= l dA, \\ dA_y &= m dA, \\ dA_z &= n dA, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де dA_x – площа трикутника OAC ; dA_y – площа трикутника OAB ; dA_z – площа трикутника OCB .

Оскільки тетраедр $ABCO$ перебуває в рівновазі, то слід дотримуватися трьох умов рівноваги сил:

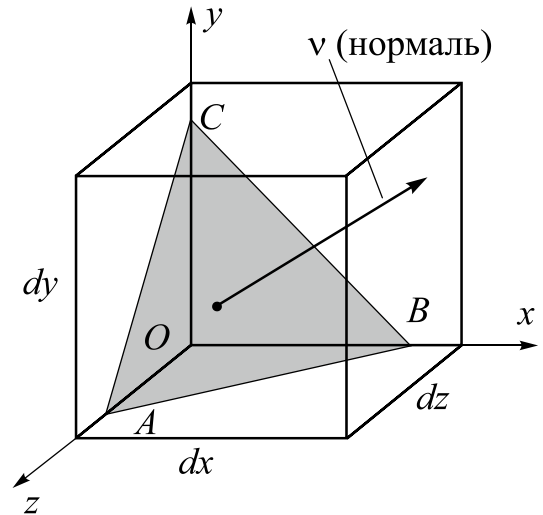


Рис. 2.5. Похила площадка ABC , виокремлена в околі точки O

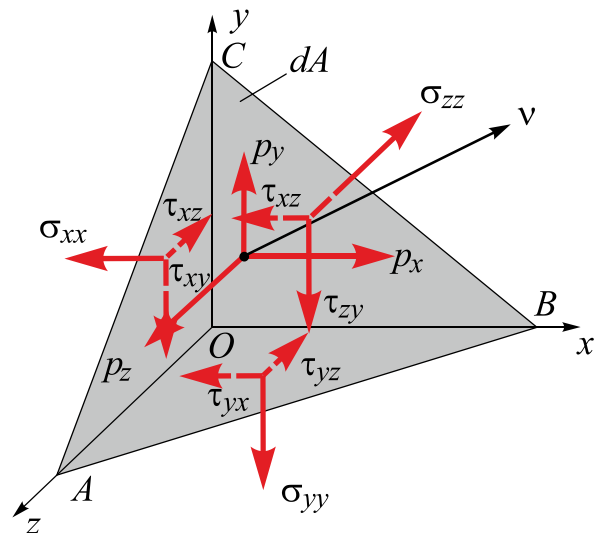


Рис. 2.6. Рівновага тетраедра $OABC$ під дією напружень на гранях елемента ДТТ і похилій площадці ABC

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0, \\ \sum F_{yi} &= 0, \\ \sum F_{zi} &= 0,\end{aligned}\tag{2.6}$$

тобто

$$\begin{aligned}p_x dA &= \sigma_{xx} dA_x + \tau_{yx} dA_y + \tau_{zx} dA_z, \\ p_y dA &= \tau_{xy} dA_x + \sigma_{yy} dA_y + \tau_{zy} dA_z, \\ p_z dA &= \tau_{xz} dA_x + \tau_{yz} dA_y + \sigma_{zz} dA_z.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Поділивши праві й ліві частини співвідношень (2.7) на dA і врахувавши (2.5), отримаємо **співвідношення Коші** (Augustin Louis Cauchy (1789–1857)):

$$\begin{aligned}p_x &= \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n, \\ p_y &= \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n, \\ p_z &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Далі визначаємо повне, нормальне й дотичне напруження в площадці ABC , тобто в площадці довільної орієнтації, що містить точку O :

$$p_v = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2},\tag{2.9}$$

$$\sigma_v = p_x l + p_y m + p_z n,\tag{2.10}$$

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}.\tag{2.11}$$

Таким чином, якщо відомо шість компонентів напруженого стану в будь-яких трьох взаємно перпендикулярних площадках, які містять точку, то можна визначити напруження в будь-якій площадці (площадці довільної орієнтації), що містить цю точку. Це означає, що напружений стан у точці повністю визначають шість його компонентів σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} .

2.1.3. Головні площадки, головні напруження й види напруженого стану в точці

У теорії пружності доводять, що в кожній точці ДТТ при довільному характері його навантаження завжди існують три взаємно перпендикулярні площадки, у яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Ці площадки називають **головними площадками напруженого стану**. Нормальні напруження, що діють у головних площадках, називають **головними напруженнями**. Лінії дії головних напружень називають **головними напрямками напруженого стану** в певній точці ДТТ (надалі позначені p_1 , p_2 , p_3).

Головні напруження позначають σ_1 , σ_2 , σ_3 . При цьому індекси слід розставляти так, щоб виконувалася нерівність $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Ця нерівність є алгебричною. Елемент ДТТ в умовах головних напружень показано на рис. 2.7. На ньому також показано головні напрямки p_1 , p_2 , p_3 . Приклад елемента в умовах голов-

них напружень показано на рис. 2.8, де напруження σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} залежно від їх величин мають бути перейменовані на σ_1 , σ_2 , σ_3 . Наприклад, якщо $\sigma_{xx} = 100$ МПа, $\sigma_{yy} = -150$ МПа, $\sigma_{zz} = -300$ МПа, то маємо $\sigma_1 = 100$ МПа, $\sigma_2 = -150$ МПа, $\sigma_3 = -300$ МПа.

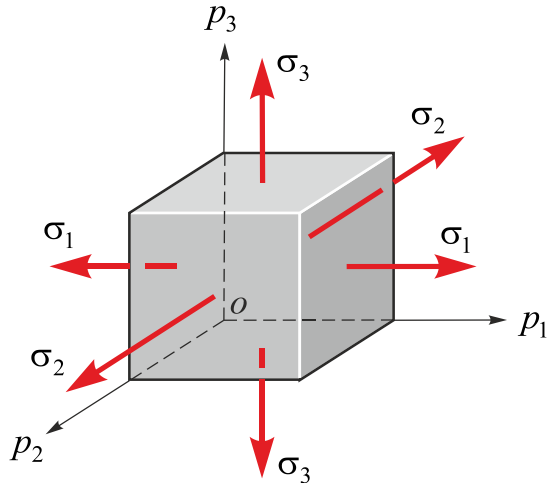


Рис. 2.7. Головні напрямки напруженого стану p_1 , p_2 , p_3

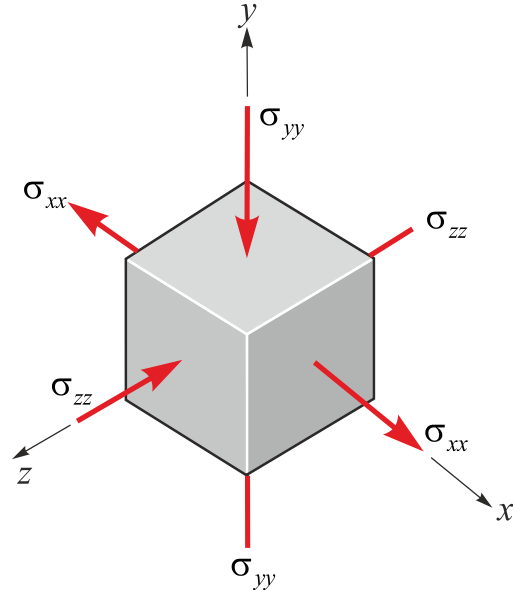


Рис. 2.8. Елемент ДТТ в умовах головних напружень у системі координат x , y , z

За кількістю головних напружень, відмінних від нуля, розрізняють три види напруженого стану в точці:

- 1) **лінійний**, або **одновісний**, напружений стан, при якому тільки одне з головних напружень є відмінним від нуля, а два інші – нульові;
- 2) **плоский**, або **двовісний**, напружений стан, при якому тільки одне з головних напружень дорівнює нулю, а два інші – ненульові;
- 3) **об'ємний**, або **тривісний**, напружений стан, при якому всі три головні напруження не дорівнюють нулю.

На рис. 2.9 ці напружені стани показано з розтягувальними напруженнями, хоча дійсно можливими є різні комбінації напружень.

Лінійний напружений стан може бути двох типів:

- одновісне розтягання: $\sigma_1 \neq 0$ і $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;
- одновісне стискання: $\sigma_3 \neq 0$ і $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Плоский напружений стан може бути трьох типів:

- двовісне розтягання: $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$, де $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$;
- двовісне стискання: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$, де $\sigma_2 < 0$, $\sigma_3 < 0$;
- змішаний напружений стан: $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 \neq 0$, де $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$.

Об'ємний напружений стан може бути трьох типів:

- тривісне розтягання: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 > 0$;

- тривісне стискання: $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$;
- змішаний напружений стан: $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 < 0$ або $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$.

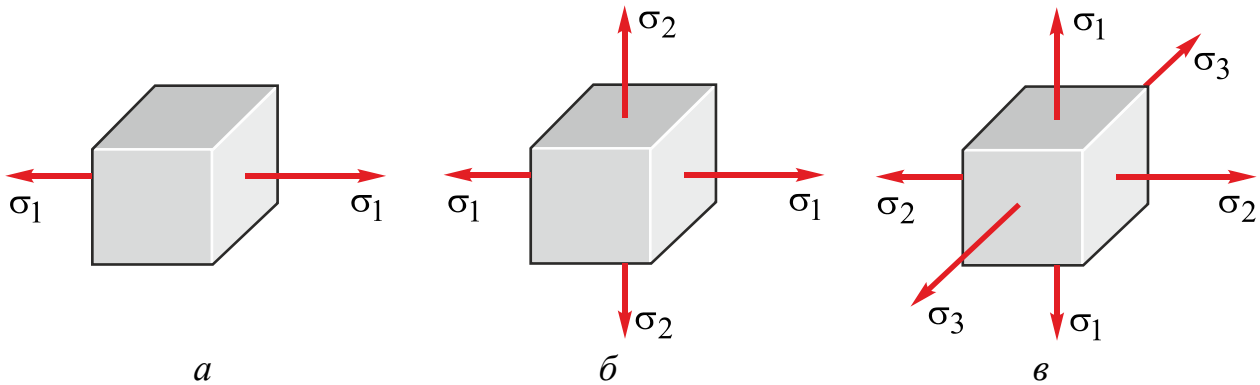


Рис. 2.9. Лінійний (а), плоский (б) та об'ємний (в) напружені стани в умовах розтягання

Плоский та об'ємний напружені стани називають **складними**, лінійний напружений стан – **простим**.

Приклад лінійного напруженого стану в конструктивних елементах показано на рис. 2.10, плоского – на рис. 2.11, а об'ємного – на рис. 2.12. Тут важливо зазначити, що напружений стан, зображений на рис. 2.11, є плоским тому, що грань елемента, яка збігається з поверхнею, є вільною від напружень, тобто одне з головних напружень σ_z очевидно дорівнює нулю. Об'ємний напружений стан за умови загального навантаження зображено на рис. 2.12.

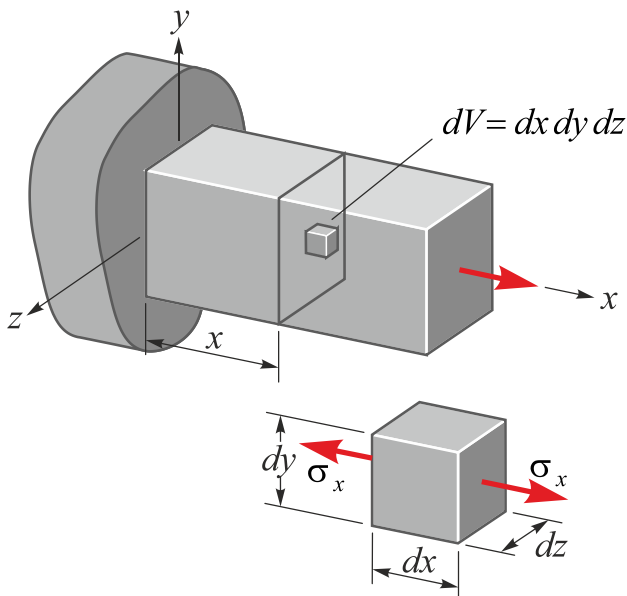


Рис. 2.10. Лінійний напружений стан у довільному перерізі розтягнутого стрижня, де $\sigma_x = \sigma_1$

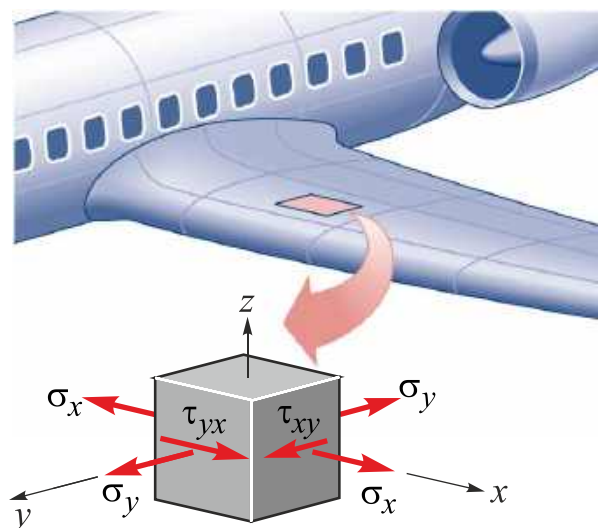


Рис. 2.11. Плоский напружений стан обшивки крила (площина з нормаллю z є вільною від напружень; очевидно, що $\sigma_z = \sigma_3 = 0$)

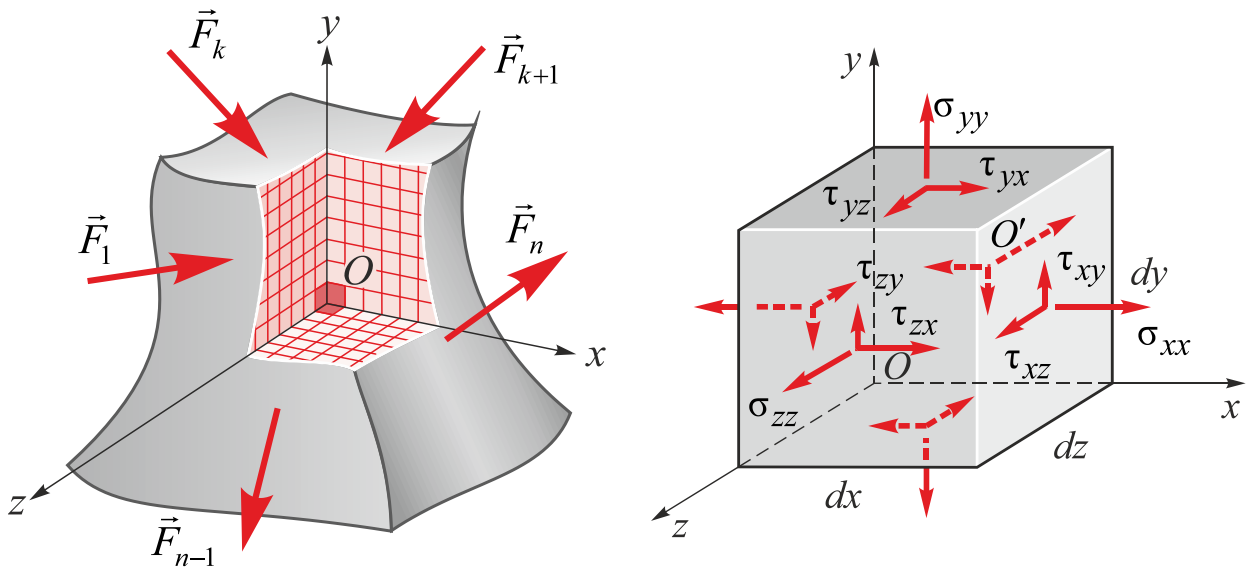


Рис. 2.12. Об'ємний напружений стан у точці O пружного масиву з напруженнями, що діють на гранях елемента ДТТ

2.2. Основи теорії деформацій

Вище було показано, що напруження в ДТТ зв'язані з деформаціями й у найпростішому випадку лінійної пружності осьової деформації нормальні напруження й лінійні деформації зв'язані між собою законом Гука. У разі деформації чистого зсуву дотичні напруження й кутові деформації зв'язані законом Гука при зсуві. Функціональні зв'язки між напруженнями й деформаціями в точці ДТТ показано на рис. 2.13. Виходячи з принципу суперпозиції, складний напружений стан завжди можна подати у загальному вигляді як суму шести найпростіших доданків, показаних на рис. 2.13. Із них може бути побудовано будь-який складний напружений стан. Доданки 1, 3, 5 – перша найпростіша складова будь-якого складного напруженого стану – чисте розтягання-стискання. Доданки 2, 4, 6 – друга найпростіша складова будь-якого складного напруженого стану – чистий зсув.

Нижче будемо обговорювати зв'язок між напруженнями й деформаціями, оскільки без його встановлення неможливо визначити ні напруження, ні деформації. Зараз же аналогічно складовим тензора напружень σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} , τ_{zy} уведемо до розгляду три лінійні й шість кутових деформацій ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , γ_{xy} , γ_{yx} , γ_{xz} , γ_{zx} , γ_{yz} , γ_{zy} , що утворюють так званий **тензор деформацій**, який має властивості, аналогічні властивостям тензора напружень. Сукупність лінійних і кутових деформацій, що виникають уздовж різних осей та в різних площинах, які проходять через певну точку, називають **деформованим станом у точці ДТТ**.

Властивості деформованого стану:

1) якщо задано шість складових деформованого стану у точці в системі координат x, y, z , то можна визначити лінійні й кутові деформації в будь-якій тріаді взаємно перпендикулярних площин, що перетинаються в цій точці;

2) у кожній точці ДТТ завжди існують три взаємно перпендикулярні осі, у системі яких є відсутніми кутові деформації. Ці осі називають **головними осями** деформованого стану, а лінійні деформації в системі цих осей – **головними деформаціями**;

3) у межах прийнятих раніше гіпотез при простому навантаженні головні напрямки напруженого й деформованого станів збігаються.

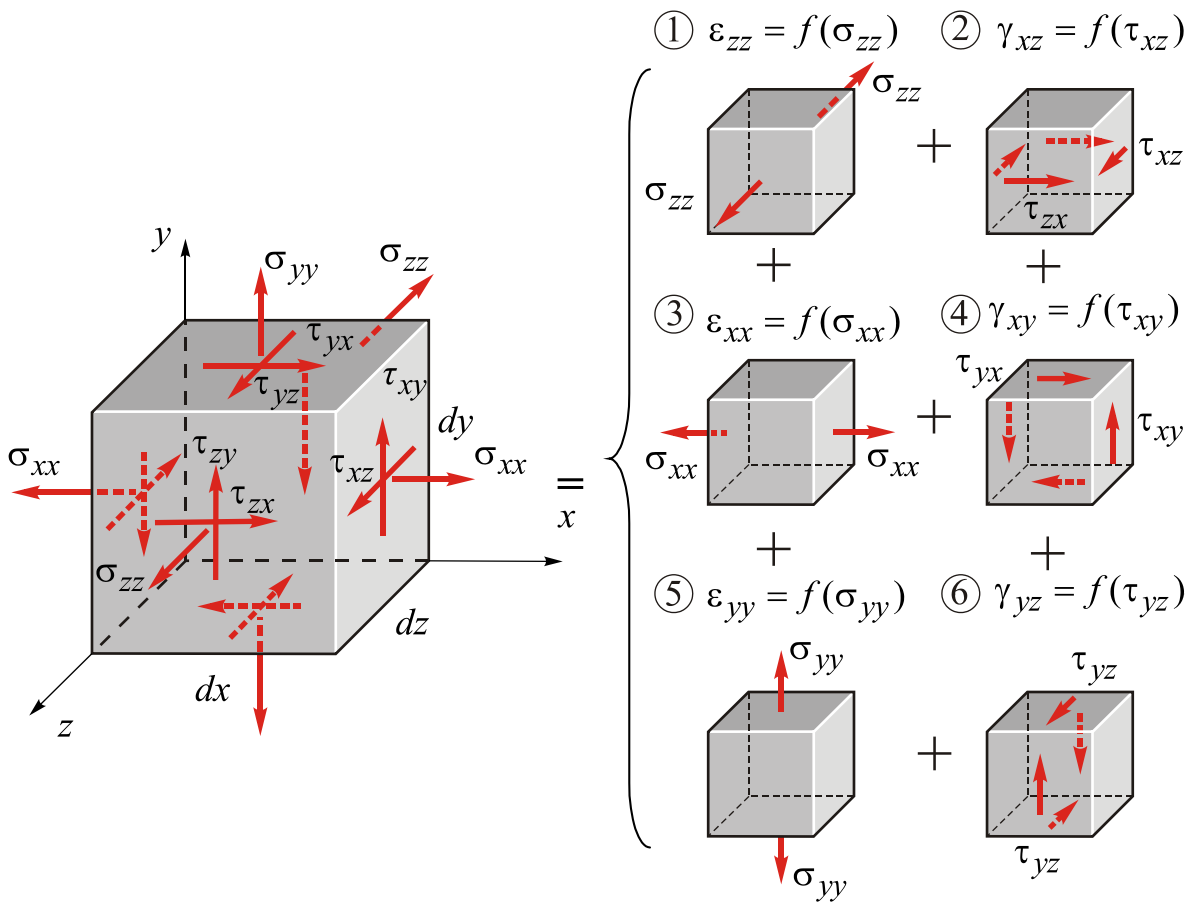


Рис. 2.13. Функціональні зв'язки між складовими напруженого й деформованого станів

2.3. Зв'язок між деформаціями й переміщеннями

2.3.1. Зв'язок між деформаціями й переміщеннями при лінійному напруженому стані

У вступі йшлося про те, що деформації є зв'язаними з переміщеннями точок ДТТ. У найпростішому випадку осьової деформації (його зображено на рис. 2.14 у довільній точці A призматичного бруса), яка відповідає складовим 1, 3, 5 функціональних зв'язків між складовими напруженого й деформованого станів на

рис. 2.13, точка A , в околі якої виокремлено елемент ДТТ, переміщується вздовж осі x на величину **переміщення** u , а точка B – на $u + du$. Таким чином, маємо подовження відрізка AB , що дорівнює $A'B' - AB = (dx + u + du - u) - dx = du$. Тоді подовжня відносна деформація

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (2.12)$$

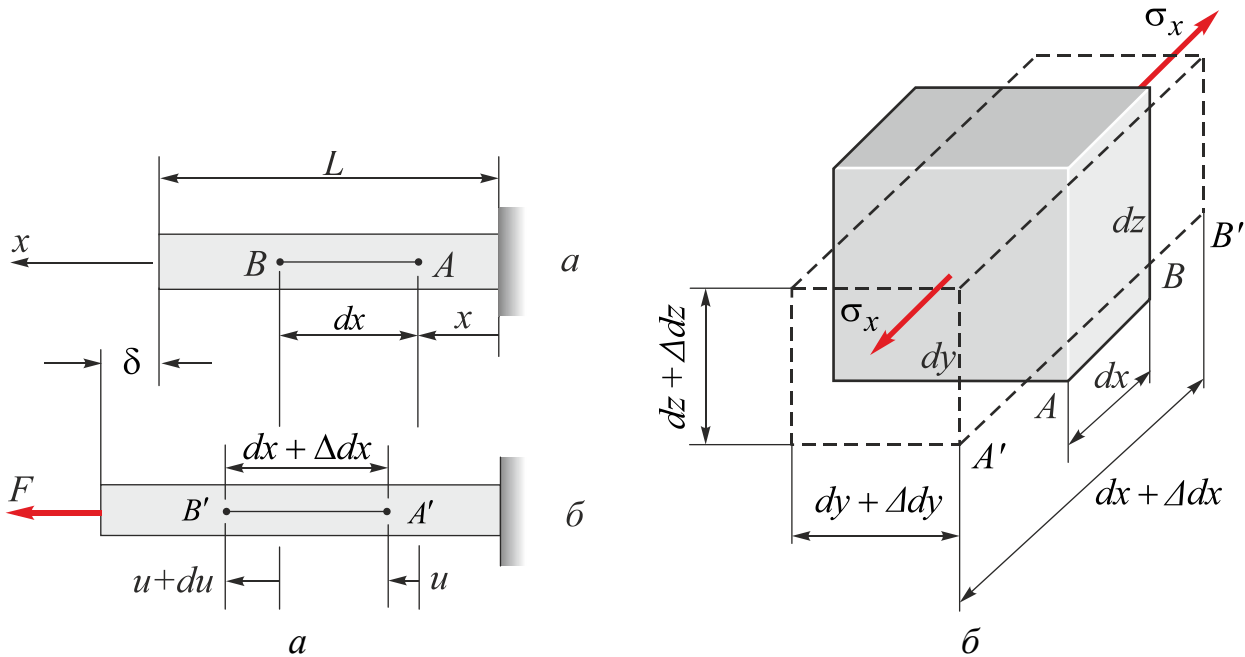


Рис. 2.14. Подовжня деформація й переміщення нескінченно малого елемента в околі довільної точки A призматичного бруса у випадку однорідної деформації одновісного розтягання: a – деформація ребра нескінченно малого елемента завдовжки $AB = dx$; $б$ – рівновага нескінченно малого елемента

Отже, *подовжня лінійна деформація дорівнює похідній осьового переміщення за довжиною.*

2.3.2. Зв'язок між деформаціями й переміщеннями при складному напруженому стані

При плоскій деформації всі точки ДТТ залишаються в одній і тій же площині, але в ній їх положення змінюються. Таким чином, елемент одиничної товщини, розміри якого dx і dy , може зазнавати лінійних деформацій (рис. 2.15, a) і деформацій зсуву (рис. 2.15, $б$), які можна розглянути окремо згідно з принципом суперпозиції, а потім скласти. Оскільки переміщення в цьому разі є функціями двох координат x і y , для визначення приростів довжин відрізків необхідно використати частинні похідні. Наприклад, ступінь змінення u в напрямку осі y характеризується величиною $\partial u / \partial y$, а ступінь змінення v в напрямку осі x – величи-

ною $\partial v / \partial x$. Тоді відповідні прирости переміщень дорівнюють $(\partial u / \partial y)dy$ і $(\partial v / \partial x)dx$. Кут повороту відрізка AD у площині xOy дорівнює відношенню різниці між переміщеннями точок A і D уздовж осі x до довжини відрізка $AD = dx$:

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x} dx / dx = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.12)$$

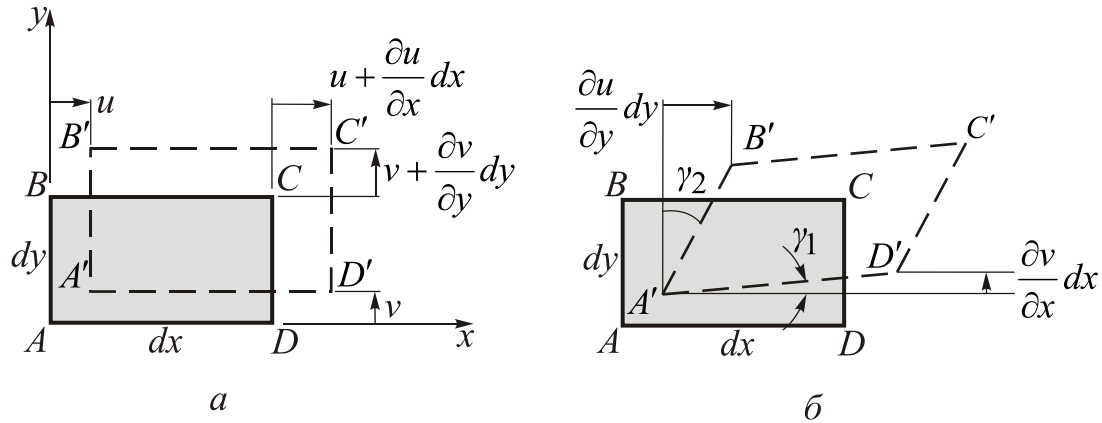


Рис. 2.15. Деформації елемента ДТТ в умовах плоскої деформації: *a* – лінійна деформація; *б* – деформація зсуву

Відповідно кут повороту відрізка AB у площині xOy

$$\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} dy / dy = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.14)$$

Відносний зсув у площині xOy дорівнює зміні кута BAD , тобто

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.15)$$

Як результат, використовуючи (2.12) і (2.15), можна записати

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.16)$$

Очевидно, що γ_{xy} – це деформація зсуву, яка виникає між осями x і y (або y і x).

Звідси $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

Аналогічно можна обчислити деформації в точці елемента ДТТ зі сторонами dx , dy і dz при об'ємній деформації (див. рис. 2.12). Складові тривимірної деформації, окрім ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} , є такими:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.17)$$

де $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ і $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$. Наведені визначення показують, що шість складових деформацій лінійно залежать від похідних за довжиною трьох складових переміщень точки – u , v , w . Таким чином, визначивши описані вище деформації в точці, можна дізнатися, як змінюються форма й розміри елемента в цій точці.

Рівняння (2.16), (2.17), які вперше отримав французький математик О. Л. Коші, мають назву **рівнянь Коші**. Вони належать до основних рівнянь механіки суцільного деформованого середовища.

Функції ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , γ_{xy} , γ_{yx} , γ_{xz} , γ_{zx} , γ_{yz} , γ_{zy} , що входять у рівняння Коші, повинні відповідати певним вимогам, оскільки для збереження суцільності ДТТ при деформуванні функції u , v , w мають бути неперервними. Отже, компоненти деформованого стану повинні бути такими функціями, які забезпечують цю неперервність. Для визначення взаємозв'язку між ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} застосовують шість рівнянь, які називають **рівняннями сумісності деформацій**. Уперше їх отримав 1860 року Б. Сен-Венан. Тому їх називають **рівняннями Сен-Венана**. Рівняння сумісності деформацій мають глибинну фізичну суть: вони стверджують, що деформація тіла є безперервною. У фізичному розумінні це означає, що в ДТТ не утворюються пустоти.

У механіці матеріалів уведено експериментально підтвержене спрощувальне припущення, що стосується розподілу деформацій у перерізах призматичного бруса, – так звану **гіпотезу плоских перерізів**. Її застосування обумовлює автоматичне виконання умов сумісності деформацій, що спрощує завдання з визначення напружень і деформацій.

Розділ 3. ЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

3.1. Порівняння однорідного й неоднорідного напружених станів

Визначення лінійного (одновісного) напруженого стану, що впливає з рис. 2.10, дає змогу вважати лінійним напружений стан у довільній точці як призматичного бруса в умовах однорідного осьового навантаження (рис. 3.1), так і бруса довільного перерізу в умовах неоднорідного осьового навантаження (рис. 3.2). В обох випадках напружений стан нескінченно малого елемента відповідає рис. 3.3, а розподіл напружень у поперечному перерізу є однорідним. Але в першому випадку розподіл напружень і деформацій по довжині бруса є рівномірним, а в другому – розподіл залежить від осьової координати перерізу, що підтверджено багатьма експериментами. Існують також відмінності в закономірності змінення переміщень перерізів по довжині: у випадку однорідного по довжині стрижня напружено-деформованого стану переміщення перерізів будуть лінійною функцією довжини стрижня, а у випадку неоднорідного напружено-деформованого стану вони змінюються по довжині стрижня за параболічним законом згідно з встановленим раніше зв'язком між деформаціями й переміщеннями (див. формулу (2.12)).

В обох випадках для визначення деформацій у довільній точці A стрижня, зображеного на рис. 3.1 (однорідний напружений стан) і рис. 3.2 (неоднорідний напружений стан), необхідно розглянути рівновагу нескінченно малого елемента ДТТ, зображеного на рис. 3.3. Унаслідок прикладення зовнішнього навантаження, яке породжує осьове розтягання, очевидно, що буде мати місце подовження елемента dx на величину Δdx у напрямку дії напруження σ_x . Тоді величина Δdx є абсолютним подовженням елемента ДТТ. Оскільки воно не дає уявлення про інтенсивність деформування тіла, для її оцінювання в точці раніше було введено поняття відносного подовження, або відносної деформації, елемента ДТТ (відносної деформації у точці A в напрямку x):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}. \quad (3.1)$$

Уздовж двох інших осей прямокутної системи координат теж матимуть місце складові деформації – відносні деформації ε_y і ε_z . Таким чином, поздовжня де-

формація $\varepsilon_{\text{позд}} = \frac{\Delta dx}{dx}$ діє одночасно з двома поперечними

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \frac{\Delta dy}{dy} \text{ і } \varepsilon_{\text{попер}} = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (3.2)$$

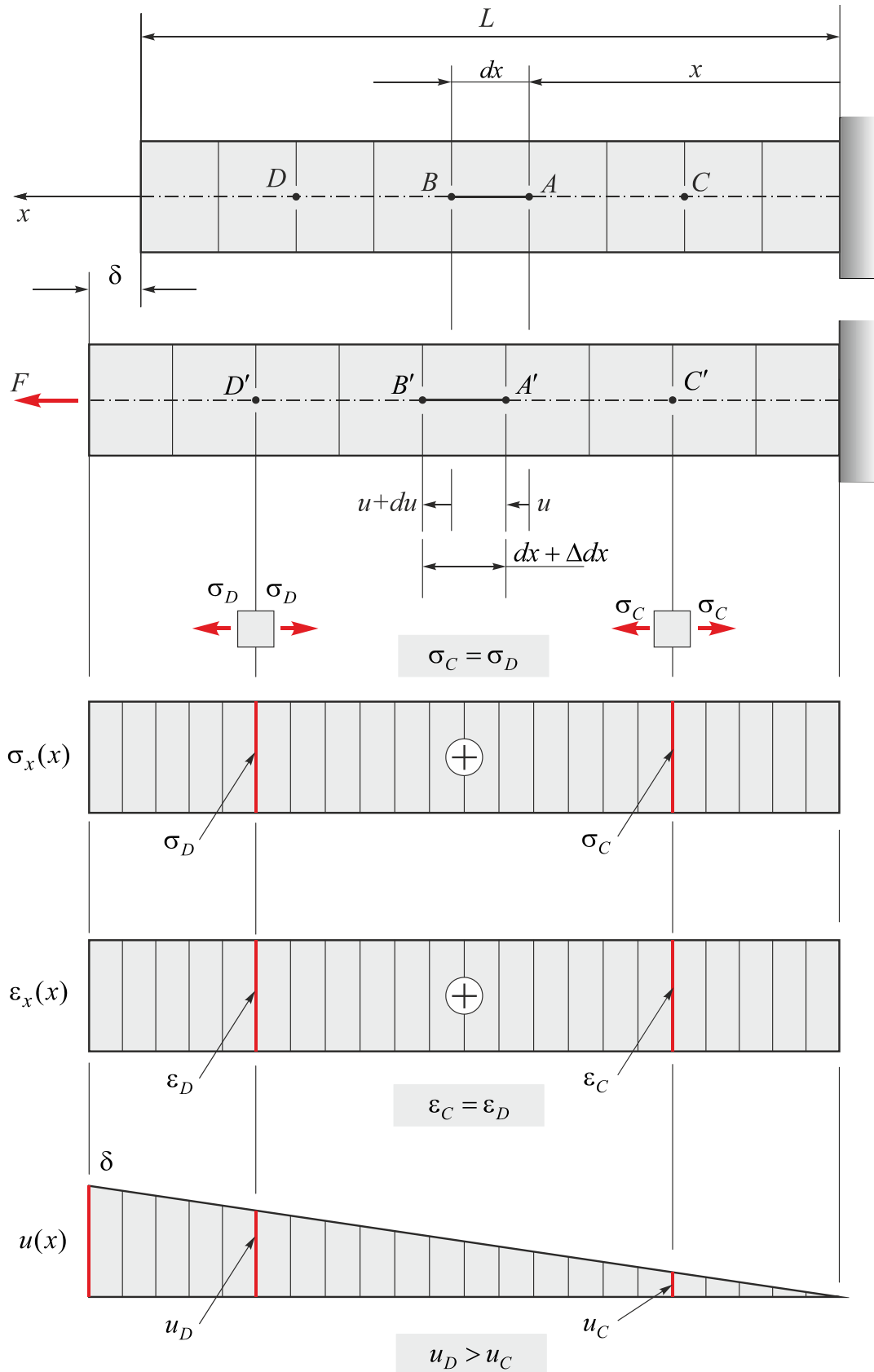


Рис. 3.1. Осьова деформація призматичного бруса. Розподіл напружень, деформацій і переміщень по довжині бруса в умовах однорідної деформації (виокремлений в околі довільної точки A елемент ДТТ показано на рис. 3.3)

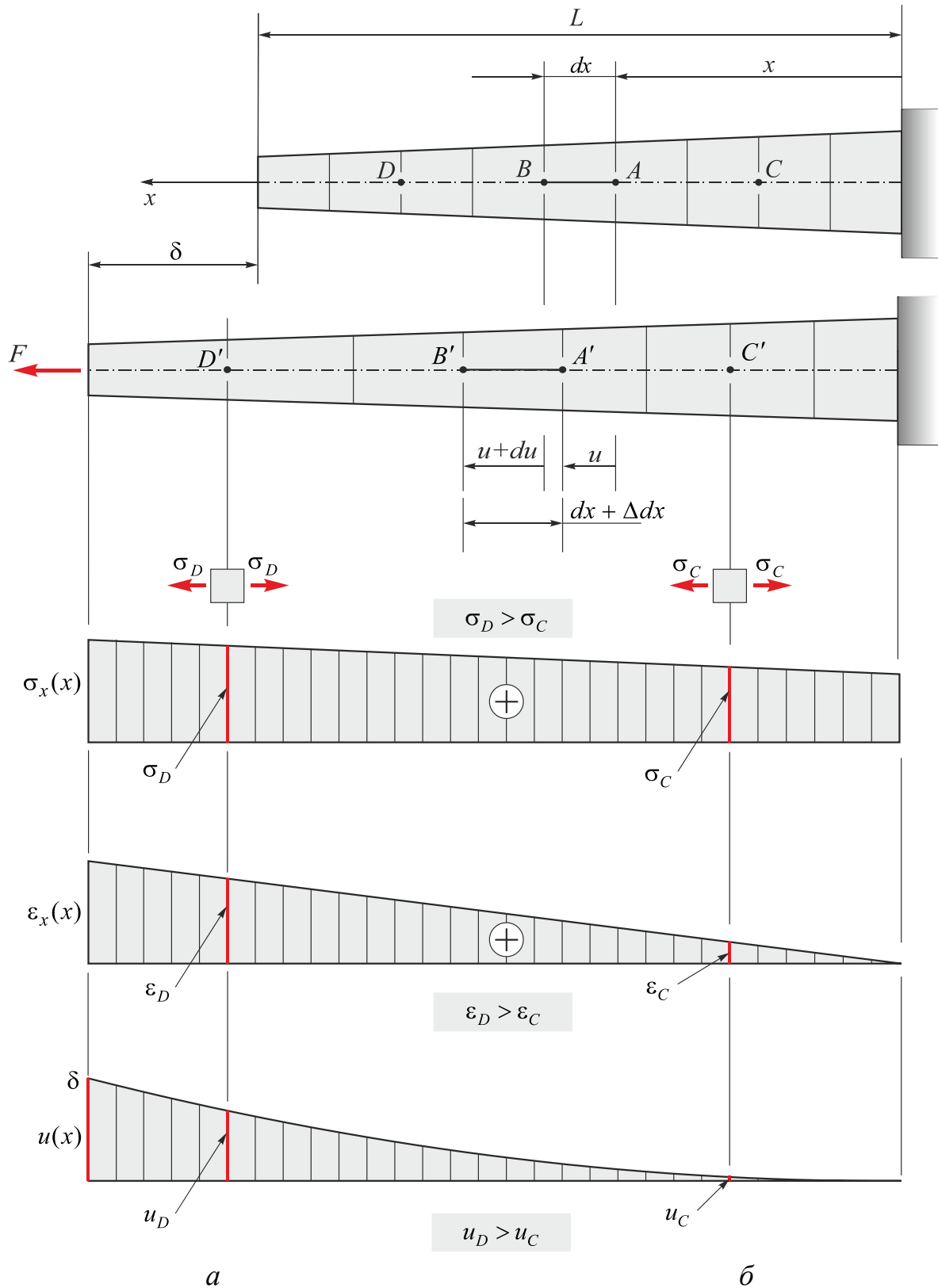


Рис. 3.2. Осьова деформація бруса змінного прямокутного поперечного перерізу (постійна товщина, лінійно змінна ширина). Розподіл напружень, деформацій і переміщень по довжині бруса в умовах неоднорідної деформації (виокремлений в околі довільної точки A елемент ДТТ показано на рис. 3.3)

Очевидно, що, використовуючи поняття подовження елемента ДТТ в умовах осьової деформації, можна обчислити абсолютне подовження стрижня, інтегруючи подовження його нескінченно малих елементів. Для цього розглянемо ще раз поздовжню деформацію призматичного бруса, зображеного на рис. 3.1. Якщо на відстані x від початку бруса виокремити його нескінченно мале ребро AB завдовжки dx , тобто $AB = dx$, то після навантаження елемент набуде збільшення довжини Δdx відповідно до формули

$$\Delta dx = \varepsilon_x dx. \quad (3.3)$$

Загальне подовження бруса, тобто його абсолютну деформацію, можна обчислити, склавши подовження нескінченно малих відрізків:

$$\Delta l = \delta = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \varepsilon_x dx. \quad (3.4)$$

Зауважимо, що ця формула придатна для визначення подовжень бруса як для однорідного, так і для неоднорідного напруженого стану.

Якщо припустити, що деформації розподіляються по довжині стрижня рівномірно, що відповідає осьовому навантаженню призматичного бруса, то відносну деформацію ε_x можна вважати незалежною від x (див. рис. 3.1). Тоді

$$\Delta l = \delta = \varepsilon_x \int_0^L dx = \varepsilon_x L. \quad (3.5)$$

Остаточно $\delta = \varepsilon_x L$, звідки

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L}, \quad (3.6)$$

що збігається з виразом (1.3).

Зазначимо ще раз, що в умовах однорідної деформації величина поздовжньої відносної деформації ε_x не змінюється по довжині стрижня, тоді як її первісна, переміщення u , змінюється по довжині стрижня за лінійним законом від нульового значення в опорному перерізі до максимального значення, що дорівнює подовженню стрижня $\Delta l = \delta$ (див. рис. 3.1). В умовах же неоднорідного напруженого стану, проілюстрованого на рис. 3.2, для визначення подовжень слід використовувати загальну формулу (3.4). Для цього необхідно знати закон розподілу деформацій по довжині стрижня.

Далі більш детально дослідимо лінійний напружений стан, оскільки практично важливим є визначення напружень не тільки в поперечних перерізах приз-

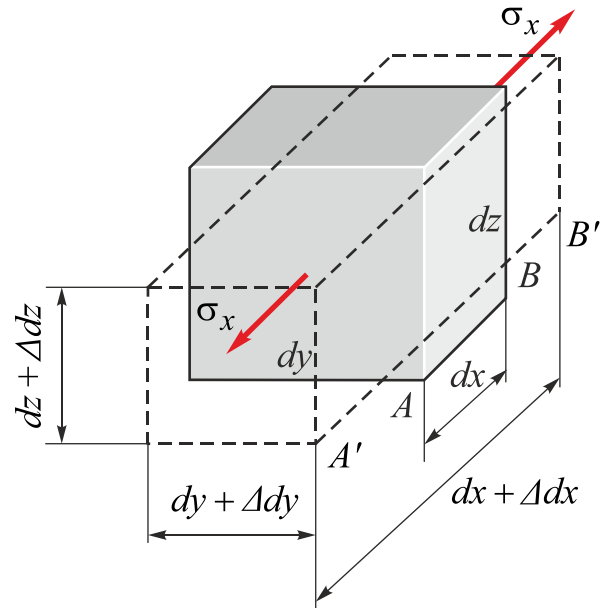


Рис. 3.3. Рівновага нескінченно малого елемента призматичного бруса у випадку деформації одновісного розтягання, а також його деформації в поздовжньому й поперечних напрямках

матичного бруса, а й у перерізах, нахилених відносно його поздовжньої осі. Такими перерізами можуть бути поверхні склеювання або зварювання, що мають міцнісні властивості, відмінні від властивостей матеріалу бруса. Отже, для оцінювання міцності перерізів склеювання або зварювання необхідно насамперед обчислити напруження, які в них діють.

3.2. Напруження на похилих площинах при лінійному напруженому стані

Розгляньмо ще раз призматичний брус AB в умовах осьового розтягання зрівноваженими силами F , прикладеними в центрі ваги поперечного перерізу бруса (рис. 3.4, *a*). Якщо подумки відсікти перпендикулярним до поздовжньої осі x перерізом $m-n$ ліву частину бруса й розглянути її в рівновазі, очевидним є висновок про те, що рівновагу спільно забезпечують зовнішня сила F і внутрішня поздовжня сила $N_x = F$ з інтенсивністю розподілу $\sigma_x = N_x / A$ (рис. 3.4, *б*). При цьому, як і раніше, на основі результатів експериментів припускаємо, що напруження σ_x розподіляються по перерізу рівномірно, тобто напружений стан у перерізі $m-n$ є однорідним. Без такого припущення необхідно було б внутрішню поздовжню силу зв'язати з напруженням у точці інтегрально:

$$N_x = \int_{(A)} \sigma_x(y, z) dA. \quad (3.7)$$

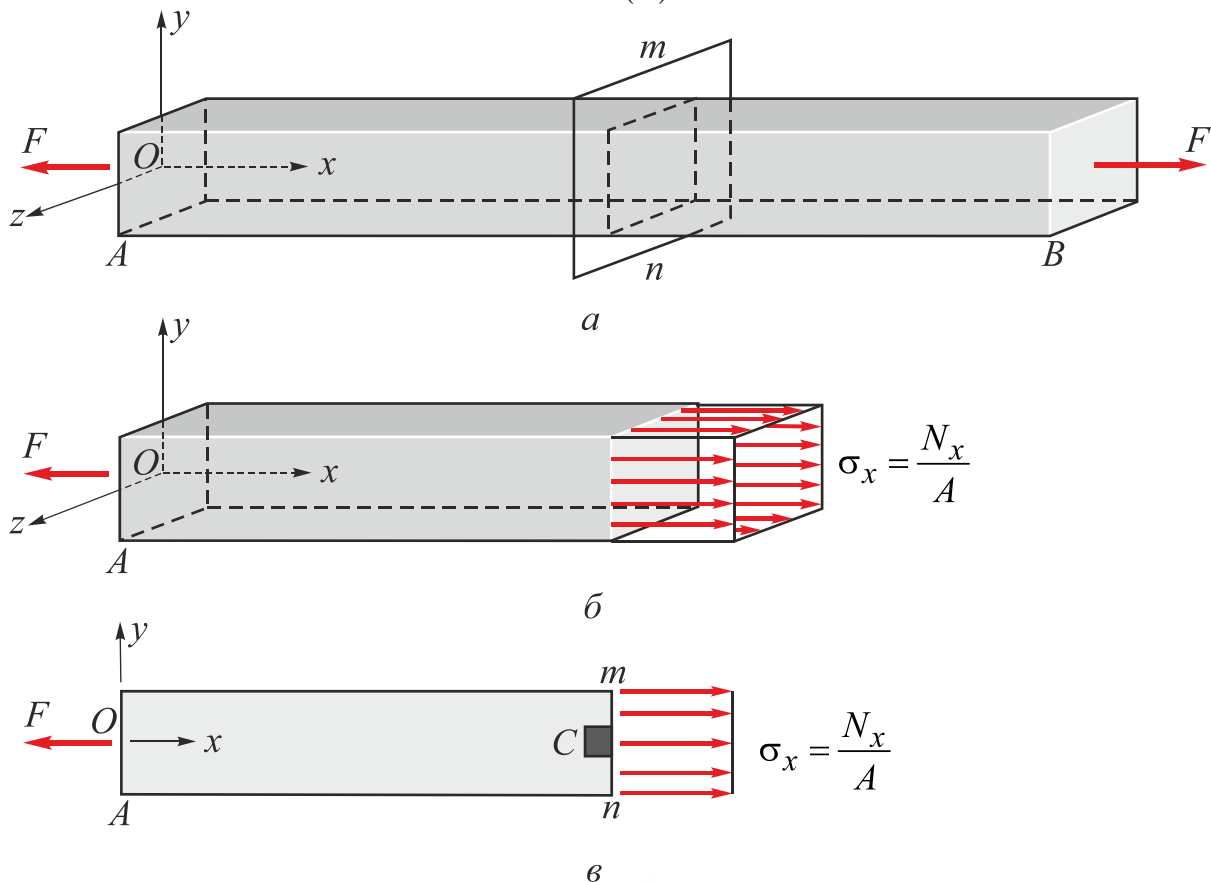


Рис. 3.4. Призматичний брус в умовах осьового розтягання: *a* – розтягання бруса силою F ; *б* – об’ємне зображення розподілу напружень у перерізі $m-n$; *в* – плоске зображення розподілу напружень у перерізі $m-n$

Ще одним припущенням у подальших розмірковуваннях буде припущення про те, що переріз $m-n$ достатньо віддалений від точок прикладення зовнішніх сил, де спосіб прикладення зовнішньої сили до бруса (зварювання, болтове або заклепочне з'єднання тощо) впливає на закон розподілу напружень у перерізі. Такі області були названі раніше зонами Сен-Венана.

Оскільки поперечний переріз $m-n$ є перпендикулярним до осі бруса, у ньому немає дотичних напружень з відповідною поперечною силою. Це очевидно з умови рівноваги лівої частини бруса.

Для оцінювання напруженого стану в околі довільної точки C у загальному випадку неоднорідного напруженого стану подумки виокремимо навколо неї нескінченно малий паралелепіпед – елемент матеріалу з розмірами dx , dy , dz (рис. 3.5). Його праву вертикальну грань для визначеності сумістимо з перерізом $m-n$. Очевидно, що однакові за величиною нормальні напруження σ_x діють лише на гранях, перпендикулярних до поздовжньої осі x .

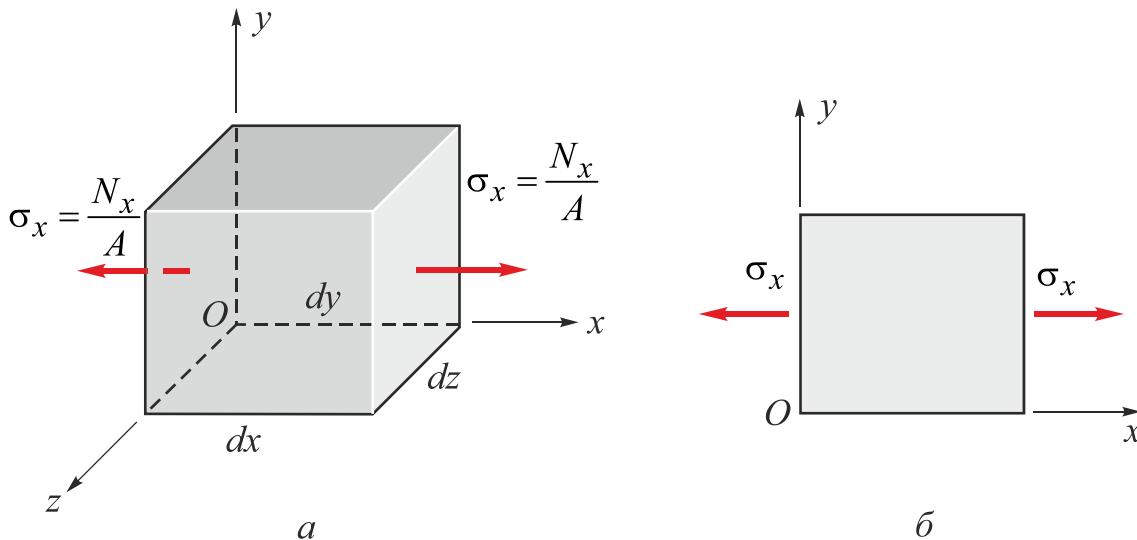


Рис. 3.5. Елемент ДТТ у довільній точці призматичного бруса, показано на рис. 3.4, в, при розтяганні: а – тривимірне зображення елемента; б – плоске зображення

Виникає резонне запитання: «Чи зміняться напруження на гранях елемента, якщо змінити орієнтацію перерізу $m-n$?». Для відповіді відсічемо подумки ліву частину бруса, але не перпендикулярним, як раніше, а похилим під певним кутом θ перерізом $p-q$, як показано на рис. 3.6, а. Очевидно, що в межах наших припущень напруження по перерізу $p-q$ будуть також розподілені рівномірно (рис. 3.6, б, в), а за умовою рівноваги їх результуюча повинна дорівнювати зовнішній силі F (показано пунктиром на рис. 3.6, б, в).

Порівнявши рис. 3.4 і 3.6, можна стверджувати, що переріз $m-n$ розташований під кутом $\theta = 0^\circ$ порівняно з перерізом $p-q$. Отже, кут θ для правої грані елемента на рис. 3.4 дорівнює нулю, для верхньої – 90° , для лівої – 180° , а для нижньої – 270° (або -90°).

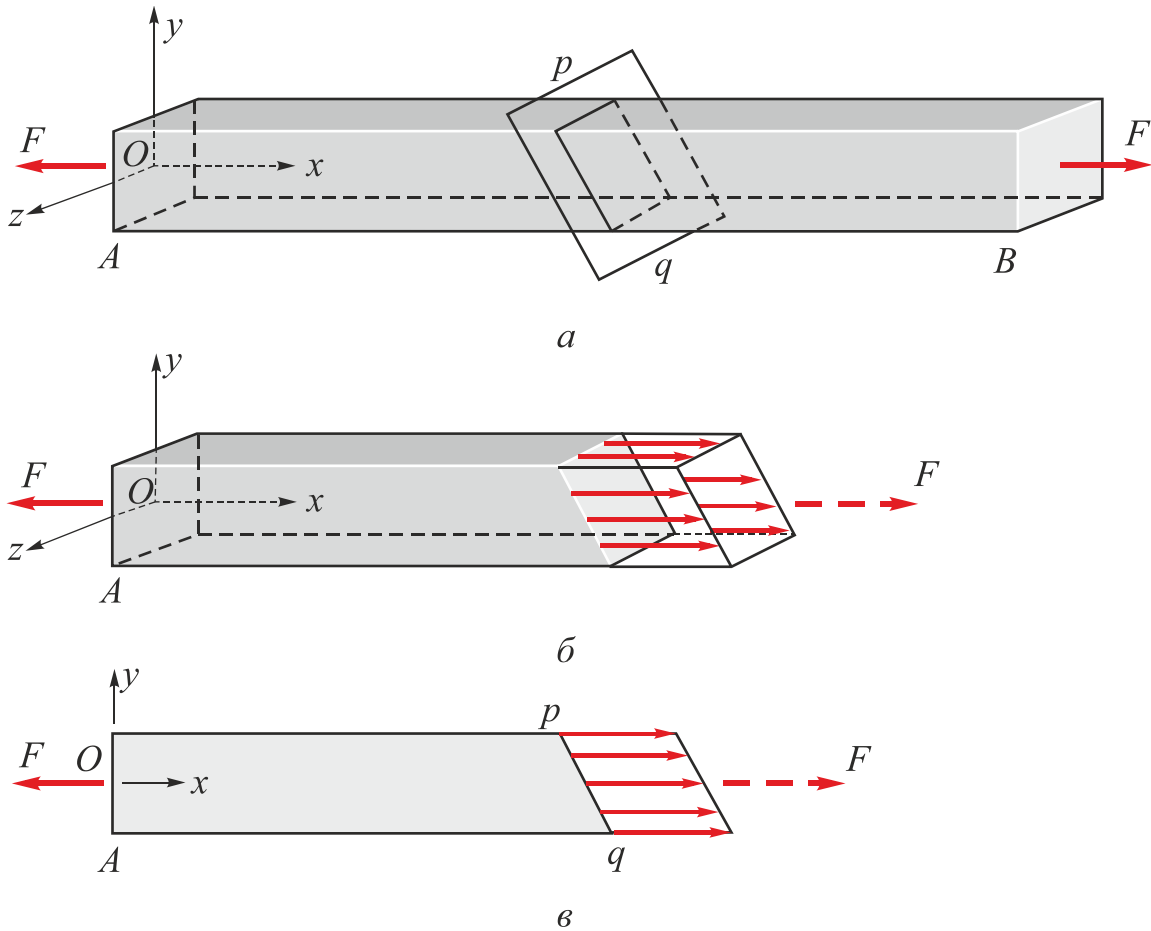


Рис. 3.6. Призматичний брус в умовах розтягання (діючі напруження показано в похилому перерізі $p-q$)

Щоб обчислити напруження, що діють у перерізі $p-q$ (рис. 3.7, б), спочатку розкладемо вектор F на дві його проекції – поздовжню силу N , перпендикулярну до похилого перерізу $p-q$, і поперечну силу Q , яка лежить у його площині:

$$N = F \cos \theta, \quad Q = F \sin \theta. \quad (3.8)$$

У припущенні рівномірного розподілу напружень по площі перерізу $p-q$ можна записати, що

$$\sigma = \frac{N}{A_1}, \quad \tau = \frac{Q}{A_1}. \quad (3.9)$$

Тут A_1 – площа похилого поперечного перерізу:

$$A_1 = A / \cos \theta. \quad (3.10)$$

Очевидно, що напруження σ і τ збігаються за напрямком дії з векторами N і Q , що показано на рис. 3.7, в, г.

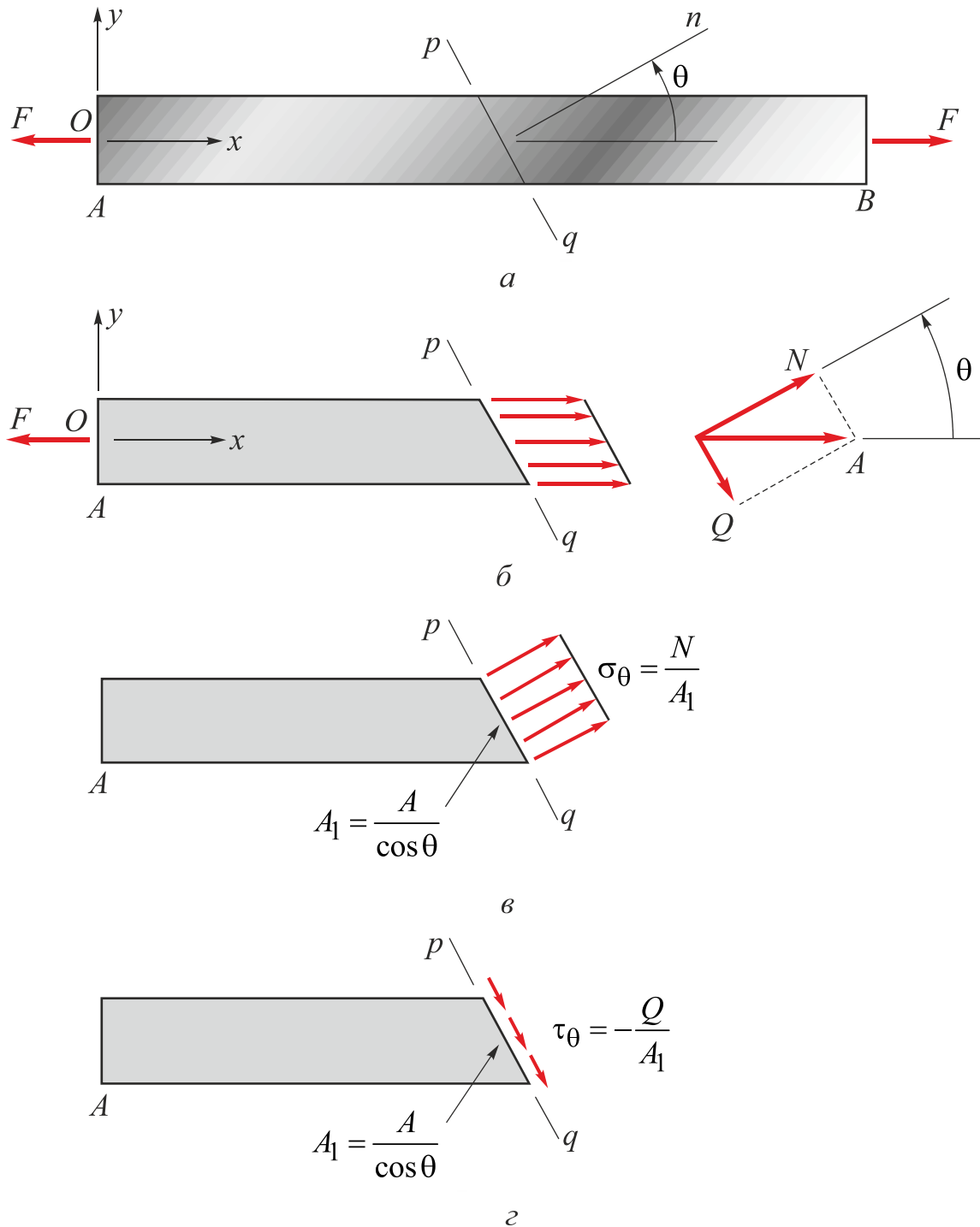


Рис. 3.7. Призматичний брус при розтяганні з напруженнями, що діють на похилій площині $p-q$

Тепер необхідно встановити правила знаків для напружень, що діють на похилих площинах, і дотримуватися їх надалі. По-перше, індекс θ будемо використовувати для позначення напружень, що діють на похилій площині з нормаллю, нахилений під кутом θ до правосторонньої горизонтальної осі x (рис. 3.8). По-друге, індекс x будемо використовувати для позначення напружень на площині, перпендикулярній до осі x , тобто під кутом $\theta = 0$ (див. рис. 3.4). По-третє,

нормальні напруження σ_θ будемо вважати додатними, якщо вони розтягувальні, а дотичні τ_θ – додатними, якщо вони намагаються обертати розглядувану частину бруса проти годинникової стрілки (див. рис. 3.8). Наприклад, для розтягнутого бруса (див. рис. 3.7) поздовжня сила N створює додатні нормальні напруження σ_θ (див. рис. 3.7, в), а поперечна сила Q – від’ємні дотичні напруження τ_θ (див. рис. 3.7, з). Ці напруження можна визначити таким чином:

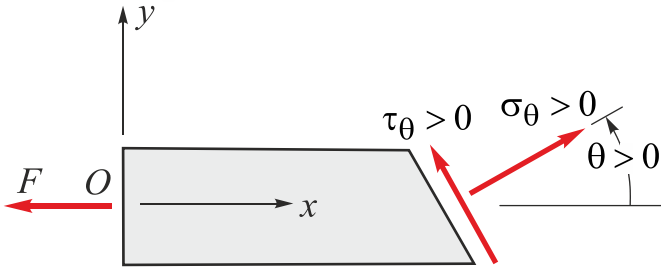


Рис. 3.8. Правила знаків для напружень на похилій площині

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_1} = \frac{F}{A} \cos^2 \theta, \quad (3.11)$$

$$\tau_\theta = -\frac{Q}{A_1} = -\frac{F}{A} \cos \theta \sin \theta. \quad (3.12)$$

Замінюючи $F/A = \sigma_x$ і використовуючи тригонометричні співвідношення

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad (3.13)$$

отримуємо

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad (3.14)$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_x}{2}(\sin 2\theta). \quad (3.15)$$

Зазначимо, що рівняння (3.14) і (3.15) було виведено з використанням винятково рівнянь статичної рівноваги, тобто вони є незалежними від виду матеріалу (наприклад, він не обов’язково має бути лінійно-пружним).

Графіки залежності напружень на похилих площинах від кута їх орієнтації показано на рис. 3.9. Тут по вертикалі відкладено напруження σ_θ і τ_θ , а по горизонталі – кути положення похилих площин у діапазоні від -90° до $+90^\circ$. Тут і надалі будемо вважати $\theta > 0$, якщо поворот відносно осі x здійснюється проти годинникової стрілки, і навпаки.

Графіки на рис. 3.9 є зручними для аналізу лінійного напруженого стану. Так, наприклад, при $\theta = 0$ $\sigma_\theta = \sigma_x$. При зміні θ до $\pm 90^\circ$ нормальні напруження зникають, тобто на горизонтальних гранях елемента (див. рис. 3.5, б) нормальних напружень немає. Легко вирішується також проблема знаходження найбільших нормальних напружень у точці, що мають важливе практичне значення для оцінювання в подальшому міцності бруса:

$$\sigma_\theta = \sigma_{\max} = \sigma_x. \quad (3.16)$$

При $\theta = \pm 45^\circ$ нормальні напруження дорівнюють половині від їх максимального значення. Дотичні напруження τ_θ перетворюються на нуль при $\theta = 0$, тобто на вертикальних площинах, так, як і при $\theta = \pm 90^\circ$, тобто на горизонтальних площинах. Найбільшого додатного значення вони набувають при $\theta = -45^\circ$, а найбільшого від'ємного – при $\theta = +45^\circ$. Ці максимальні дотичні напруження мають одне й те саме абсолютне значення

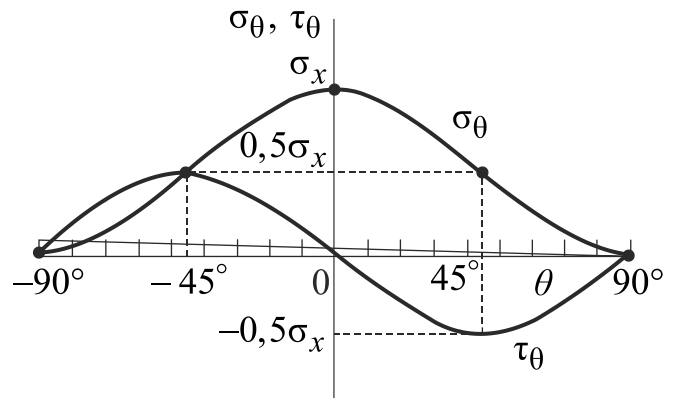


Рис. 3.9. Графіки залежності нормальних і дотичних напружень на похилих площинах від їх орієнтації відносно поздовжньої осі бруса

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}, \quad (3.17)$$

проте вони намагаються повертати елемент у протилежних напрямках. Це, утім, очевидно з умов його рівноваги.

Максимальні напруження в точках розтягнутого бруса показано на рис. 3.10. Для цього перший елемент в околі точки A є зорієнтованим під кутом $\theta = 0^\circ$, а другий елемент B – під кутом $\theta = +45^\circ$. Елемент A перебуває в умовах найбільших нормальних напружень (рівняння (3.16)), а елемент B – в умовах найбільших дотичних напружень (рівняння (3.17)). Найбільші нормальні напруження σ_x за відсутності дотичних напружень раніше було названо головними напруженнями та по-іншому індексовано.

Окрім максимальних дотичних напружень, які діють на гранях елемента B , на обох його взаємно перпендикулярних гранях одночасно діють нормальні напруження. Розгляньмо, наприклад, верхню праву грань, розміщену під кутом $+45^\circ$ до горизонтальної осі x . На ній згідно з рівняннями (3.14) і (3.15) діють нормальні $+\sigma_x/2$ і дотичні $-\sigma_x/2$ напруження. Таким чином, нормальні напруження є розтягувальними, а дотичні – намагаються повернути елемент за годинниковою стрілкою, оскільки є від'ємними. Напруження на інших гранях можна обчислити, підставивши в (3.14) і (3.15) $\theta = 135^\circ$, $\theta = -45^\circ$ і $\theta = -135^\circ$.

Ще раз повторимо: з умов рівноваги елемента впливає, що дотичні напруження, які діють на двох взаємно перпендикулярних гранях елемента, є однаковими за величиною й напрямлені або до спільного ребра, або від нього (так званий закон парності дотичних напружень).

Якщо брус стиснено в осьовому напрямку, то напруження σ_x будуть стискальними, тобто від'ємними. Отже, усі напруження, що діють на елемент, будуть напрямлені протилежно їх напрямку при розтяганні. Це впливає з рівнянь (3.14) і (3.15) після підставлення в них від'ємних напружень σ_x .

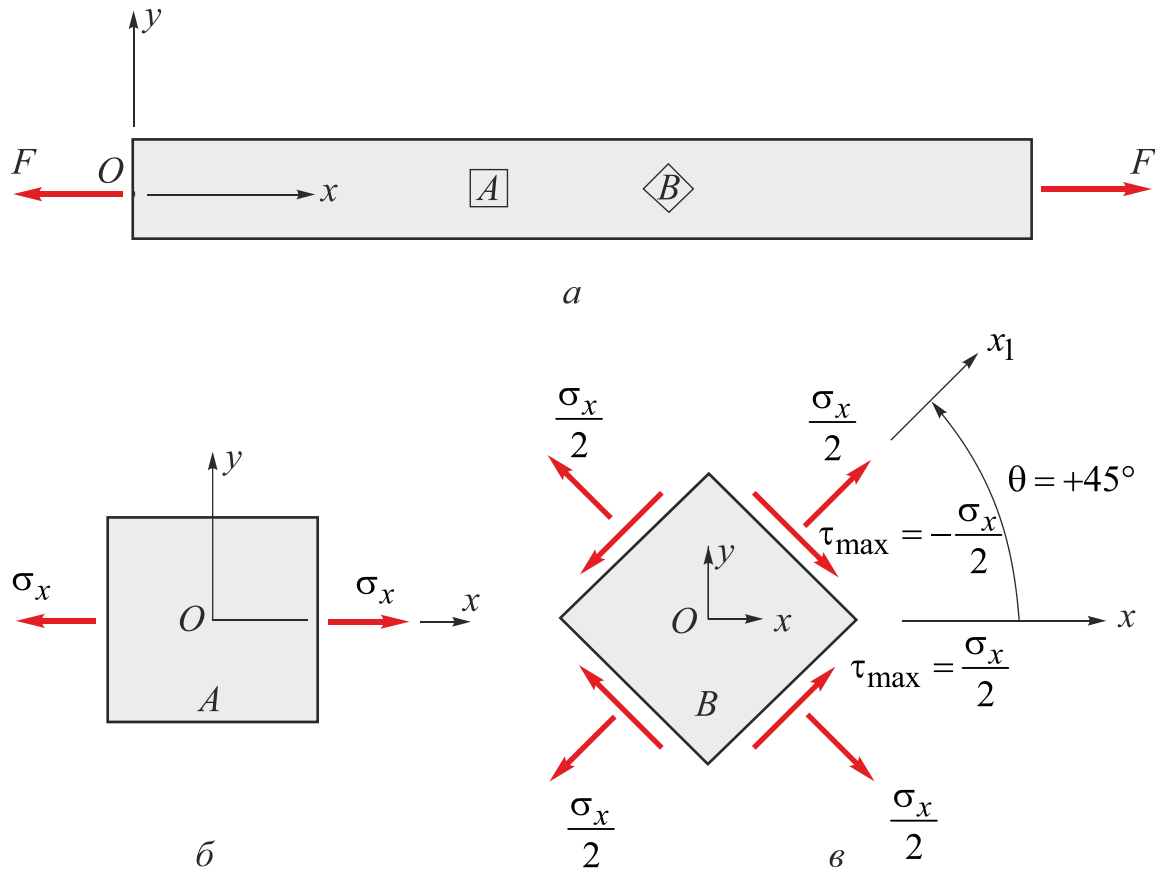


Рис. 3.10. Нормальні й дотичні напруження на гранях по-різному орієнтованих елементів (т. A : $-\theta = 0^\circ$, т. B : $-\theta = +45^\circ$) при деформації розтягання

Розв'язана задача про знаходження найбільших нормальних і дотичних напружень у точці ДТТ має важливе практичне значення. Хоча в розтягнутому брусі максимальні дотичні напруження дорівнюють лише половині максимальних нормальних напружень, вони можуть стати причиною руйнування, якщо матеріал менш міцний на зсув, ніж на розтягання або стискання (це залежить здебільшого від внутрішньої структури). Приклад руйнування від зсуву подано на рис. 3.11, де зображено руйнування при стисканні дерев'яного куба по площині руйнування, розташованій під кутом 45° до напрямку стискання. Це руйнування відбулося через надмірні дотичні напруження. Подібна поведінка є характерною для м'якої сталі при розтяганні. На рис. 3.12 показано, як під час випробувань на розтягання плоского зразка з низьковуглецевої сталі на його полірованих поверхнях з'являються видимі неозброєним оком **лінії ковзання**, розташовані приблизно під кутом 45° до напрямку розтягання. Вони свідчать про руйнування матеріалу від надмірних дотичних напружень. Уперше лінії ковзання виявили Г. Пйоберт 1842 року і В. Людерс 1860 року. Сьогодні ці лінії називають **лініями Людерса**. Вони починають з'являтися, коли напруження в матеріалі досягають границі текучості (т. B на рис. 1.9).

Навантаження



Навантаження

Рис. 3.11. Руйнування дерев'яного блока при стисканні по площині найбільших дотичних напружень

Навантаження



Навантаження

Рис. 3.12. Лінії ковзання (лінії Людерса) на полірованій поверхні плоского зразка з м'якої сталі при розтяганні

Отже, описаний напружений стан можна назвати одновісним з тієї причини, що брус зазнає деформацій розтягання або стискання лише в одному напрямку. Нормальні напруження σ_x при $\theta = 0^\circ$ є головними напруженнями, оскільки на відповідних площинах немає дотичних напружень. Найбільш важливими положеннями елемента матеріалу при одновісному напруженому стані є $\theta = 0^\circ$ і $\theta = 45^\circ$ (див. рис. 3.10): у першому випадку на гранях елемента діють найбільші нормальні напруження, а в другому – максимальні дотичні. У довільній точці поперечного перерізу бруса, нахиленого під відомим кутом θ , будуть діяти напруження, що визначаються рівняннями (3.14) і (3.15). Одновісний напружений стан можна розглядати як окремий випадок більш загального напруженого стану, який називають двовісним, або плоским. Такий напружений стан розглянемо нижче як у загальному вигляді, так і в усіх практично важливих випадках.

3.3. Зміна об'єму при лінійному напруженому стані

Раніше вже було визначено відносну зміну об'єму призматичного бруса при однорідній осьовій деформації з використанням поняття середньої деформації (формула (1.21)). У загальному випадку неоднорідного розподілу напруженого стану по об'єму ДТТ для цього необхідно насамперед визначити деформації елемента ДТТ з початковим об'ємом $V_0 = dx dy dz$ при його подовженні вздовж осі x під дією однойменних напружень σ_x , як показано на рис. 3.13. У цьому разі $\sigma_y = \sigma_z = 0$, а поперечні деформації зв'язані з подовжньою деформацією рівнянням

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}. \quad (3.18)$$

Із рис. 3.13 зрозуміло, що після деформування об'єм елемента

$$V = (dx + \varepsilon_x dx)(dy + \varepsilon_y dy)(dz + \varepsilon_z dz) = (1 + \varepsilon_x)dx(1 + \varepsilon_y)dy(1 + \varepsilon_z)dz. \quad (3.19)$$

Розкриваючи дужки та нехтуючи доданками вищих порядків мализни ε^2 і ε^3 , отримуємо формулу

$$V = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dxdydz = V_0 + \Delta V = V_0 + (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)V_0, \quad (3.20)$$

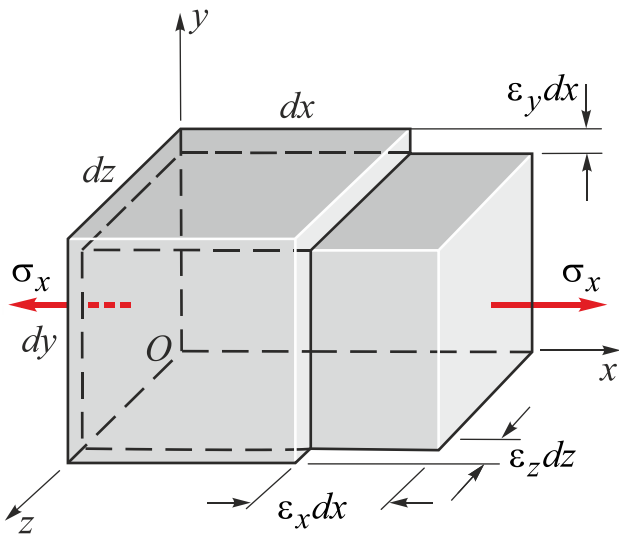


Рис. 3.13. Поперечне звуження елемента ДТТ в умовах одновісного напруженого стану (деформація розтягання)

$\nu = 0,5$. При пружному деформуванні, природно, $\nu < 0,5$, оскільки має місце зміна об'єму. В умовах пластичного деформування об'єм практично є незмінним, тому вважають, що $\nu = 0,5$.

Зауважимо, що рівняння (3.21) збігається з рівнянням (1.21), отриманим в умовах однорідного розтягання-стискання.

3.4. Потенціальна й питома потенціальна енергія деформації при лінійному напруженому стані

Як уже зазначалося, робота, що здійснюється зовнішніми силами з деформування твердого тіла, приводить до накопичення в ДТТ потенціальної енергії деформації. Оскільки в ідеально пружних тілах не існує будь-якого розсіювання енергії, накопичена енергія деформації дає змогу повністю відновити початкову форму й розміри ДТТ після усунення дії зовнішніх сил.

У підрозд. 1.4 уже обчислювали потенціальну енергію деформації призматичного бруса в умовах однорідного осевого навантаження, виходячи з умови, що

де ΔV – абсолютна зміна об'єму. Відносна зміна об'єму

$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.21)$$

Підставивши в (3.21) рівняння (3.18), отримаємо

$$e_V = (1 - 2\nu)\varepsilon_x = \frac{1 - 2\nu}{E}\sigma_x, \quad (3.22)$$

з якого стає очевидним, що розтягувальні напруження спричиняють збільшення об'єму, а стискальні – його зменшення.

У випадку **нестискного матеріалу** об'єм не змінюється, тобто $e_V = 0$, і з (3.22) випливає, що це є можливим при

потенціальна енергія дорівнює роботі зовнішніх пружних сил згідно із законом збереження енергії. Тепер використаємо цей підхід для визначення потенціальної енергії деформації та її питомого значення в умовах неоднорідного напруженого стану, починаючи з елемента ДТТ, навантаженого внутрішніми силами. Після розв'язання цієї задачі спробуємо просумувати отримані значення за об'ємом призматичного бруса, щоб зіставити результат із попереднім розв'язком.

Для визначення енергії деформації в загальному випадку неоднорідного напруженого стану виокремимо елемент ДТТ з розтягнутого зразка, діаграму розтягання якого показано на рис. 1.9. Припустимо, що через малізну елемента енергія деформації розподіляється по його об'єму рівномірно. Такий елемент із ідеально пружного матеріалу в умовах одновісного розтягання зображено на рис. 3.14, а, а його діаграму розтягання – на рис. 3.14, б. Припустимо також, що перед прикладенням напруження σ_x елемент перебував у ненавантаженому стані. Під дією внутрішньої сили $\sigma_x dydz$ має місце абсолютне подовження грані елемента на величину $\varepsilon_x dx$, де ε_x – відносне подовження (відносна деформація) у напрямку осі x . Оскільки матеріал елемента є ідеально пружним, то можна застосувати закон Гука $\sigma_x = E\varepsilon_x$ аж до досягнення границі пропорційності $\sigma_{mц}$ (рис. 3.14, б). Виходячи із закону збереження енергії, будемо вважати, що енергія деформації U , накопичена в об'ємі елемента $dV = dxdydz$, дорівнює роботі, що здійснюється пружною силою $F = \sigma_x dydz$ (у ньютонках) на переміщенні $\delta = \varepsilon_x dx$ (у метрах). Через ідеальну пружність матеріалу залежність між пружною силою й переміщенням є лінійною, тобто $F = c\delta$, де c – коефіцієнт пропорційності. Цю залежність показано на рис. 3.14, в. Через зміну пружної сили під час деформування її роботу W будемо обчислювати, підсумовуючи елементарні роботи dW (нескінченно тонкі прямокутники на рис. 3.14, в). Тоді

$$\begin{aligned} U = W &= \int_0^{\delta} dW = \int_0^{\delta} Fd\delta = \int_0^{\delta} c\delta d\delta = c \frac{\delta^2}{2} = F \frac{\delta}{2} = \\ &= \sigma_x dydz \frac{\varepsilon_x dx}{2} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x (dxdydz) = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV, \end{aligned} \quad (3.23)$$

де dV – об'єм елемента ДТТ.

Інтенсивність розподілу енергії деформації по об'єму dU/dV , яку називають **питомою енергією деформації** (або **густиною енергії деформації**), позначимо через U_0 . Тоді можна записати, що

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x. \quad (3.24)$$

Це рівняння дає змогу визначити накопичену питому енергію деформації як через напруження, так і через деформації, використовуючи рівняння закону Гука (1.9):

$$U_0 = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2. \quad (3.25)$$

Зазначимо, що геометричним аналогом (3.24) є виділена сірим кольором площа трикутника на діаграмі розтягання ідеально пружного матеріалу (рис. 3.14, б). Важливо розуміти: якщо матеріал не підпорядковується закону Гука, тобто якщо зв'язок між деформаціями й напруженнями не є лінійним, то накопичена питома енергія деформації теж дорівнює площі, зображеній на рис. 3.14, б, але розташованій під кривою деформування (показано пунктирною лінією).

Площу, розташовану над кривою деформування, називають **питомою додатковою енергією деформації** й позначають U_0^* (рис. 3.14, б).

Одиницею виміру питомої енергії деформації в СІ є 1 Дж/м^3 . Енергія деформації завжди є додатною, а рівняння (3.24) можна використовувати для її обчислення як при розтяганні, так і при стисканні.

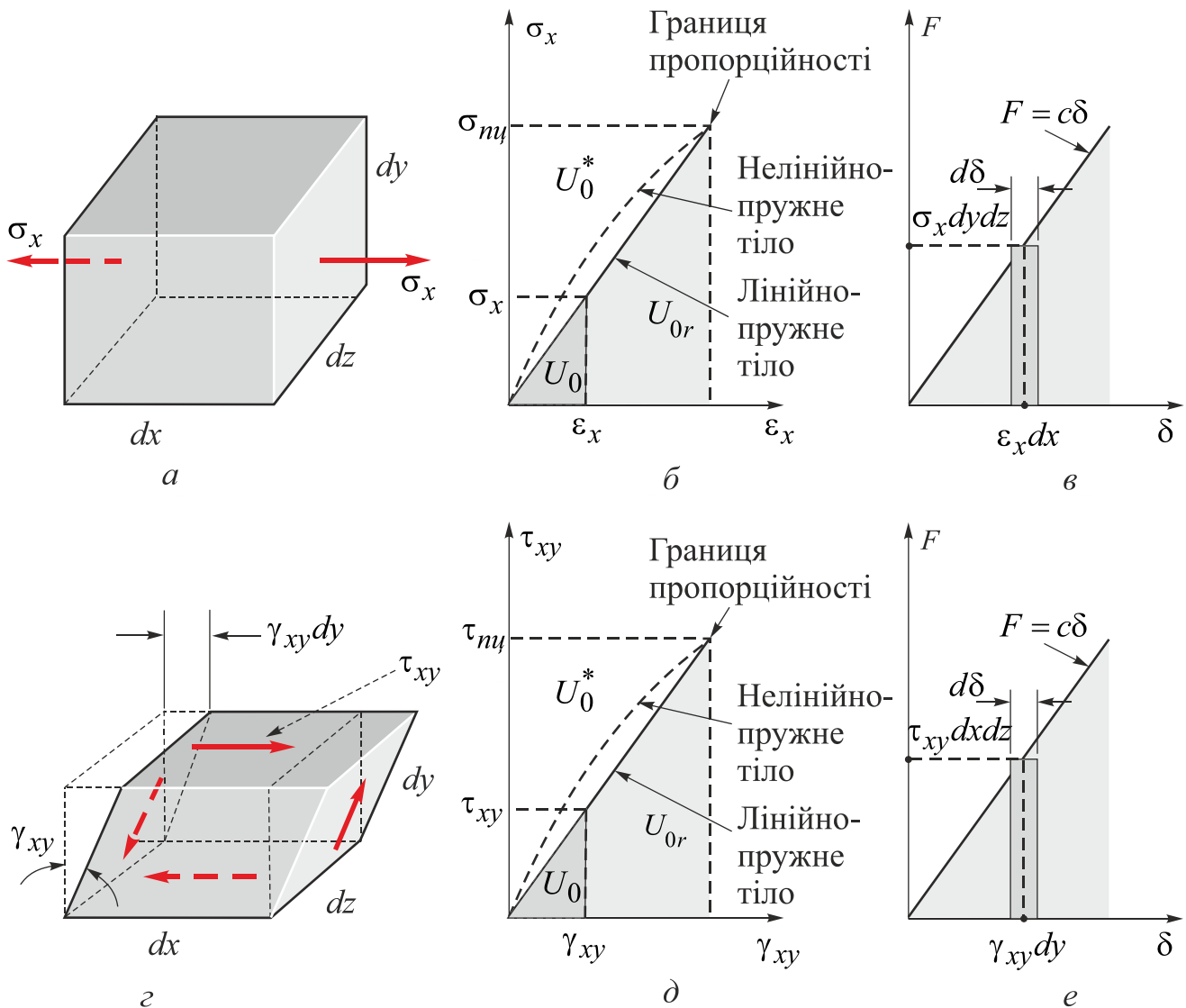


Рис. 3.14. Обчислення потенціальної й питомої потенціальної енергії деформації: а – елемент ДТТ в умовах розтягання-стискання; б – діаграма розтягання в координатах «напруження – деформація»; в – діаграма розтягання в координатах «сила – переміщення»; г – елемент ДТТ в умовах чистого зсуву; д – діаграма зсуву в координатах «напруження – деформація»; е – діаграма зсуву в координатах «сила – переміщення»

Величину питомої енергії деформації, яка накопичується в матеріалі до появи текучості, називають **питомою енергією пружної деформації**. Вона дорівнює площі, розташованій під прямолінійною ділянкою діаграми розтягання, яка досягає границі пропорційності (виділена сірим кольором площа на рис. 3.14, б, 3.15, а), і характеризує здатність матеріалу накопичувати енергію без появи пластичних деформацій:

$$U_{0r} = \frac{\sigma_{nc}^2}{2E}, \quad (3.26)$$

де σ_{nc} – границя пропорційності матеріалу.

Наприклад, питома енергія пружної деформації м'якої вуглецевої сталі

$$U_{0r} = \frac{\sigma_{nc}^2}{2E} = \frac{(250 \cdot 10^6)^2}{2(200 \cdot 10^9)} = 156 \text{ кДж/м}^3.$$

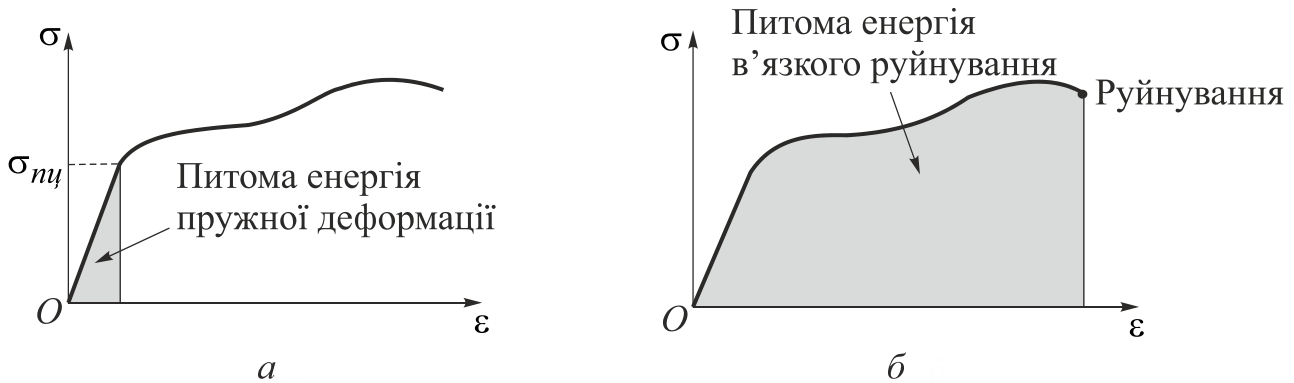


Рис. 3.15. Типова діаграма розтягання: а – питома енергія пружної деформації; б – питома енергія в'язкого руйнування

Іншою важливою характеристикою енергоємності матеріалу при деформуванні є **питома енергія в'язкого руйнування**. Вона дорівнює площі під діаграмою розтягання аж до моменту руйнування (рис. 3.15, б). Питома енергія в'язкого руйнування є мірою оцінювання здатності матеріалу накопичувати енергію деформації без руйнування.

При неоднорідному напруженому стані енергію деформації бруса при одновісному розтяганні-стисканні можна обчислити інтегруванням питомої енергії деформації (3.25) по об'єму бруса:

$$U = \int_{(V)} \frac{\sigma_x^2}{2E} dV. \quad (3.27)$$

Цей підхід можна застосовувати як при деформації розтягання-стискання, так і при деформації гнуття, оскільки всі шари балки при чистому гнутті стискаються або розтягуються.

Обчислимо тепер енергію деформації зсуву, спричиненого дією напружень τ_{xy} (див. рис. 3.14, *з*). Із рисунка зрозуміло, що під дією сили $F = \tau_{xy} dx dz$ мають місце переміщення $\delta = \gamma_{xy} dy$. Використовуючи лінійну залежність між силою й переміщенням, що є характерною для пружних сил, обчислимо роботу W , підсумовуючи елементарні роботи dW (нескінченно тонкі прямокутники на рис. 3.14, *е*):

$$\begin{aligned} U = W &= \int_0^{\delta} dW = \int_0^{\delta} F d\delta = \int_0^{\delta} c \delta d\delta = c \frac{\delta^2}{2} = F \frac{\delta}{2} = \tau_{xy} dx dz \frac{\gamma_{xy} dy}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} (dx dy dz) = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV. \end{aligned} \quad (3.28)$$

У такому випадку питома енергія деформації зсуву

$$U_0 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}. \quad (3.29)$$

Це рівняння має такий самий геометричний сенс, що й (3.24). Величина U_0 і тут дорівнює площі трикутника $\tau_{xy} \gamma_{xy} / 2$, обмеженого прямолінійною ділянкою діаграми зсуву (див. рис. 3.14, *д*). Рівняння (3.29) дає змогу обчислити накопичену питому енергію деформації як через напруження, так і через деформації, використовуючи рівняння закону Гука при зсуві (1.10):

$$U_0 = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2. \quad (3.30)$$

При неоднорідному напруженому стані енергію деформації зсуву, як і раніше при розтяганні-стисканні, можна визначити інтегруванням питомої енергії деформації по об'єму матеріалу:

$$U = \int_{(V)} \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV. \quad (3.31)$$

Це рівняння можна використати для розрахунку енергії деформації валів при крученні та балок при поперечному гнутті.

Інтегрування рівняння (3.27) буде найбільш простим для випадку призматичного бруса завдовжки L , що розтягується силою F (див. рис. 1.15), оскільки можна припустити, що напруження й деформації розподіляються по перерізу та по довжині бруса рівномірно. Тоді можна записати таке:

$$U = \int_{(V)} \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \frac{\sigma_x^2}{2E} \int_{(V)} dV = \frac{\sigma_x^2}{2E} V = \frac{\sigma_x^2}{2E} AL = \frac{AL}{2E} \frac{F^2}{A^2} = \frac{F^2 L}{2EA}, \quad (3.32)$$

що відповідає результату, отриманому за формулою (1.28).

Формулу (3.32) можна переписати таким чином:

$$U = \frac{F^2 L}{2EA} = \frac{EA\delta^2}{2L}. \quad (3.33)$$

За формулою (3.32) енергію деформації визначають через зовнішню силу, а за (3.33) – через подовження бруса.

Інтегрування рівняння (3.31) буде найбільш простим у випадку однорідної деформації зсуву блока з пружного матеріалу (див. рис. 1.19), оскільки можна припустити, що напруження й деформації розподіляються по об'єму блока рівномірно. Тоді можна записати вираз

$$U = \int_{(V)} \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \int_{(V)} dV = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} V = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} abh = \frac{abh}{2G} \left(\frac{Q}{ab} \right)^2 = \frac{Q^2 h}{2Gab} = \frac{Q^2 h}{2GA}, \quad (3.34)$$

де A – площа прикладення сили зсуву Q .

Загальна енергія деформації U бруса, що складається з декількох ділянок, дорівнює сумі енергій деформації цих ділянок. Наприклад, енергія деформації бруса, зображеного на рис. 3.16, дорівнює сумі енергій деформації ділянок AB і BC . Це можна виразити загальним рівнянням

$$U = \sum_{i=1}^n U_i, \quad (3.35)$$

де U_i – енергія деформації ділянки i ; n – номер ділянки.

Припустімо, що матеріал бруса є лінійно-пружним і що на кожній ділянці діє окрема внутрішня осьова сила N_{xi} , яка визначається системою зовнішніх сил, що діють одночасно. Згідно з методом перерізів вона чисельно дорівнює алгебричній сумі зовнішніх осьових сил, що діють на розглядувану частину бруса. У разі прикладення єдиної зовнішньої сили F (див. рис. 1.15) очевидно, що в будь-якому перерізі $N_x = F$, і тому рівняння (3.33) можна записати так:

$$U = \frac{N_x^2 L}{2EA} \quad \text{або} \quad U = \frac{EA\delta^2}{2L}. \quad (3.36)$$

У випадку, наведеному на рис. 3.16, рівняння (3.35) і (3.36) можна подати у вигляді

$$U = \frac{N_1^2 L_1}{2EA_1} + \frac{N_2^2 L_2}{2EA_2}, \quad (3.37)$$

де $N_1 = N_{BC} = +F_2$, $N_2 = N_{AB} = F_2 + F_1$, $L_1 = L_{BC}$, $L_2 = L_{AB}$, $A_1 = A_{BC}$, $A_2 = A_{AB}$; E – модуль пружності, однаковий для обох ділянок, оскільки брус виготовлено з одного матеріалу.

Добуток EA називають **осьовою жорсткістю бруса**, оскільки він дійсно містить характеристику перерізу (A) і характеристику матеріалу (E), які обернено пропорційно впливають на деформування.

Якщо необхідно визначити енергію деформації бруса змінного поперечного перерізу під дією осьової сили, що неперервно змінюється (наприклад, урахувати дію власної ваги навантаженого бруса на рис. 3.17), то слід застосувати рівняння (3.36) до нескінченно малого елемента бруса (затемненого на рис. 3.17), а потім знайти інтеграл від питомої енергії по довжині бруса:

$$U = \int_0^L \frac{[N(x)]^2 dx}{2EA(x)}, \quad (3.38)$$

де $N(x)$ – внутрішня осьова (поздовжня) сила; $A(x)$ – площа поперечного перерізу на відстані x від основи бруса.

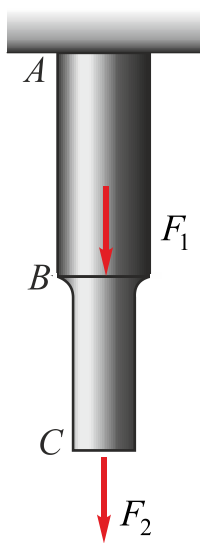


Рис. 3.16. Стрижень, що складається з двох ділянок з різними поперечними перерізами

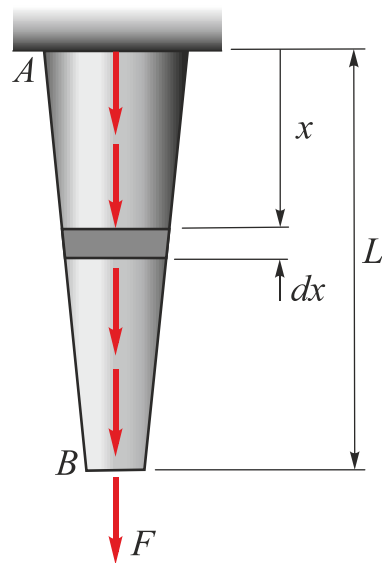


Рис. 3.17. Стрижень змінного поперечного перерізу, навантажений зовнішньою силою з урахуванням власної ваги

Вирази (3.33)–(3.38) показують, що енергія деформації не є лінійною функцією зовнішніх навантажень навіть у випадку лінійно-пружного матеріалу. У випадку бруса, показаного на рис. 3.16, загальна енергія деформації не є сумою енергій деформації, спричинених силами F_1 і F_2 , що діють окремо.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1

Призматичний брус з площею поперечного перерізу $A = 1200 \text{ мм}^2$ стиснено осьовою силою $F = 90 \text{ кН}$ (рис. а). Визначити: 1) напруження, що діють на площині $p-q$, нормаль до якої нахилена до осі x під кутом $\theta = 25^\circ$; 2) напружений стан у її точках і показати напруження на гранях поверненого елемента.

РОЗДІЛ 3. ЛІНІЙНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Розв'язання. 1. Обчислюємо напруження, що діють на похилій площині. Щоб знайти напруження на площині з нормаллю до осі x під кутом $\theta = +25^\circ$, наперед обчислюємо напруження σ_x , що діють у поперечному перерізі:

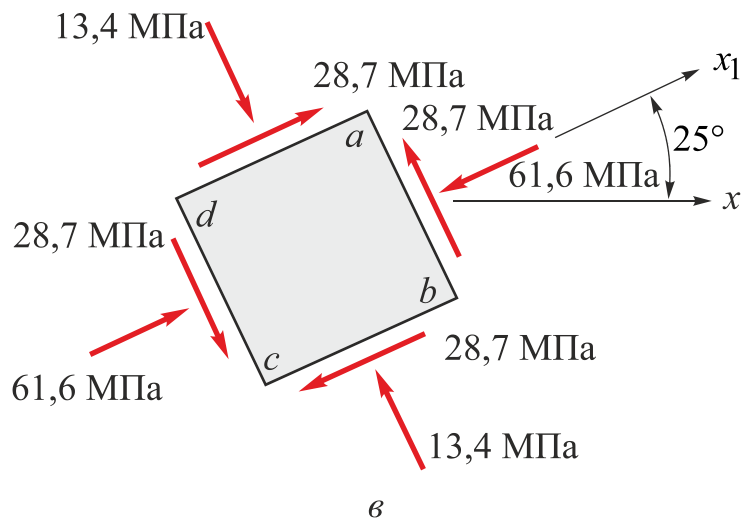
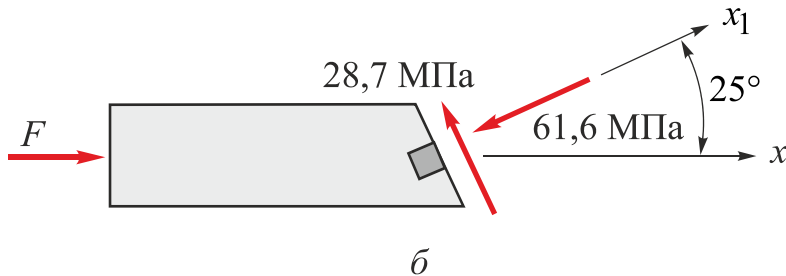
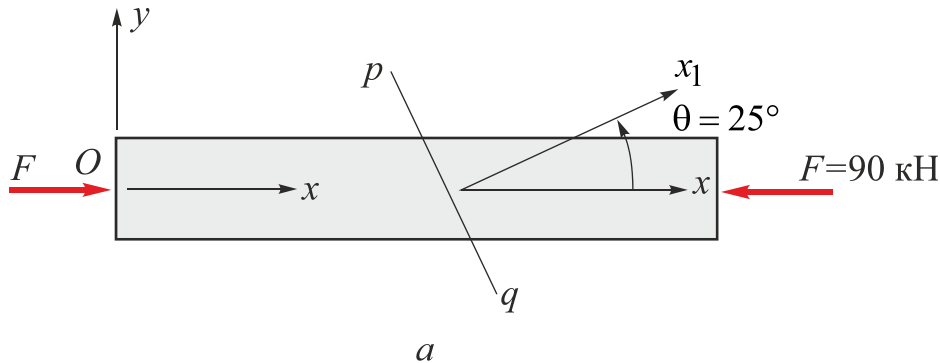
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = -\frac{F}{A} = -\frac{90}{1200} = -75 \text{ МПа},$$

де знак «мінус» означає, що напруження є стискальними. Далі визначаємо нормальні дотичні напруження з рівнянь (3.14) і (3.15) при $\theta = +25^\circ$:

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta = (-75)(\cos 25^\circ)^2 = -61,6 \text{ МПа},$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta = -(-75)(\sin 25^\circ)(\cos 25^\circ) = +28,7 \text{ МПа}.$$

Ці напруження показано на рис. б. Нормальне напруження σ_θ є від'ємним (стискальним). Дотичне напруження τ_θ є додатним (тобто таким, що діє проти годинникової стрілки). Їх показано також прикладеними до граней поверненого елемента на рис. в.



2. Визначаємо напружений стан, тобто напруження на гранях елемента, нахиленого під кутом $\theta = 25^\circ$. Щоб визначити повний напружений стан елемента, знайдемо напруження на всіх його гранях (рис. в). Грань ab , для якої $\theta = +25^\circ$, має ту ж орієнтацію, що й похила площина, показана на рис. б. Тому на ній мають місце такі самі напруження, що й обчислені раніше.

Напруження на зворотній грані cd є такими самими, що й на грані ab . Це можна перевірити, підставляючи $\theta = 25^\circ + 180^\circ = 205^\circ$ у рівняння (3.14) і (3.15).

Для грані bc підставимо $\theta = 25^\circ - 90^\circ = -65^\circ$ у рівняння (3.14) і (3.15) і отримаємо $\sigma_\theta = -13,4$ МПа (стискальне), $\tau_\theta = -28,7$ МПа (діюче за годинниковою стрілкою). Такі самі напруження діють на протилежній грані ad , що можна перевірити підстановкою $\theta = 25^\circ + 90^\circ = 115^\circ$ у рівняння (3.14) і (3.15). Нормальне напруження є стискальним, а дотичне напруження діє за годинниковою стрілкою. Повний напружений стан елемента показано на рис. в.

Задача 3.2

Стиснений брус квадратного поперечного перерізу завширшки b повинен витримувати силу $F = 37$ кН (рис. а). Дві частини бруса з'єднано з використанням клею по площині $p-q$, розташованій під кутом $\alpha = 40^\circ$ до поздовжньої осі бруса. Брус виготовлено з конструкційної пластмаси з допустимими напруженнями на стискання $7,6$ МПа і на зсув $4,1$ МПа. Додатково допустимі напруження в клейовому з'єднанні дорівнюють $5,2$ МПа на стискання та $3,4$ МПа на зсув. Визначити мінімальну ширину b бруса.

Розв'язання. Схему бруса зображено на рис. б у горизонтальному положенні, щоб можна було застосувати рівняння для напружень на похилій площині подібно до рис. 3.6 і 3.7.

Із рисунка випливає, що кут між нормаллю n до площини клейового з'єднання (площина $p-q$) і поздовжньою віссю бруса становить $\beta = 90^\circ - \alpha$, або 50° . Оскільки кут θ визначено як додатний при обертанні проти годинникової стрілки (див. рис. 3.8), вважаємо, що $\theta = -50^\circ$ для клейового з'єднання.

Площа поперечного перерізу A зв'язана зі стискальною поздовжньою силою $N_x = -F$ і напруженням σ_x у поперечному перерізі рівнянням

$$A = \frac{|N_x|}{\sigma_x} = \frac{F}{\sigma_x}. \quad (a)$$

Тому, щоб знайти необхідну площу, насамперед визначимо напруження σ_x , що відповідають кожному з чотирьох допустимих напружень. Тоді найменше значення σ_x буде визначати потрібну площу. Запишемо рівняння (3.14) і (3.15) у такому вигляді:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_\theta}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_x = -\frac{\tau_\theta}{\sin \theta \cos \theta}. \quad (б)$$

Застосуємо ці рівняння як до пластмаси, так і до клейового з'єднання.

1. *Визначаємо σ_x з умови міцності клейового з'єднання.* В умовах стискання клейового з'єднання маємо $\sigma_\theta = [\sigma]_{cm} = -5,2$ МПа і $\theta = -50^\circ$. Підставивши в рівняння (б), отримуємо

$$\sigma_x = \frac{-5,2}{(\cos(-50^\circ))^2} = -12,59 \text{ МПа.} \quad (\text{в})$$

Під час зсуву в клейовому з'єднанні допустимі напруження дорівнюють $[\tau] = 3,4$ МПа. Однак невідомо, якими вони є – додатними чи від'ємними. Тому логічно буде підставити напруження $+3,4$ МПа та $-3,4$ МПа у друге рівняння (б) і вибрати від'ємне значення σ_x . Інше значення σ_x буде додатним, його не можна застосувати до бруса, що перебуває в умовах стискання. Можна також проаналізувати сам брус (рис. б) і визначити, які дотичні напруження будуть діяти за годинниковою стрілкою відносно площини $p-q$. Це означає, що дотичне напруження є від'ємним. Отже, підставляємо $\tau_\theta = -3,4$ МПа і $\theta = -50^\circ$ у друге рівняння (б):

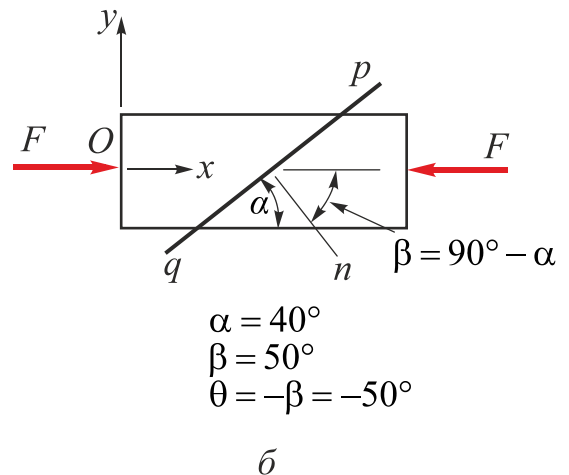
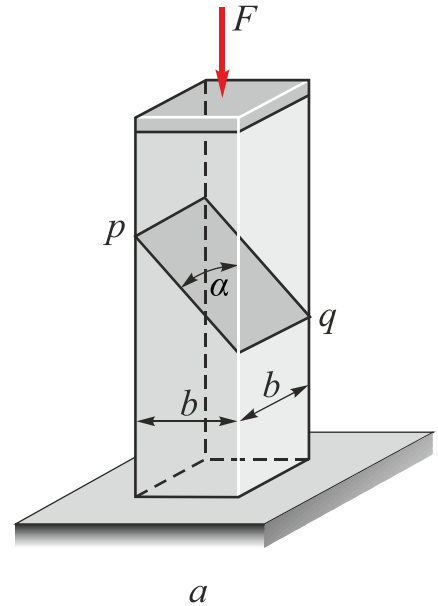
$$\sigma_x = -\frac{-3,4}{(\sin(-50^\circ))(\cos(-50^\circ))} = -6,9 \text{ МПа.} \quad (\text{г})$$

2. *Визначаємо σ_x з умови досягнення допустимих напружень у пластмасі.* Очевидно, що максимальні стискальні напруження в пластмасі діють у поперечному перерізі. Оскільки допустимі напруження на стискання $[\sigma]_{cm} = -7,6$ МПа, очевидно, що $\sigma_x = -7,6$ МПа.

Максимальне дотичне напруження діє на площині під кутом 45° і чисельно дорівнює $\sigma_x / 2$ (див. рівняння (3.16)). Оскільки допустимі напруження при зсуві $[\tau] = 4,1$ МПа,

$$\sigma_x = -8,2 \text{ МПа.} \quad (\text{д})$$

Такий же результат можна отримати з другого рівняння (б) шляхом підстановки $\tau_\theta = 4,1$ МПа і $\theta = 45^\circ$.



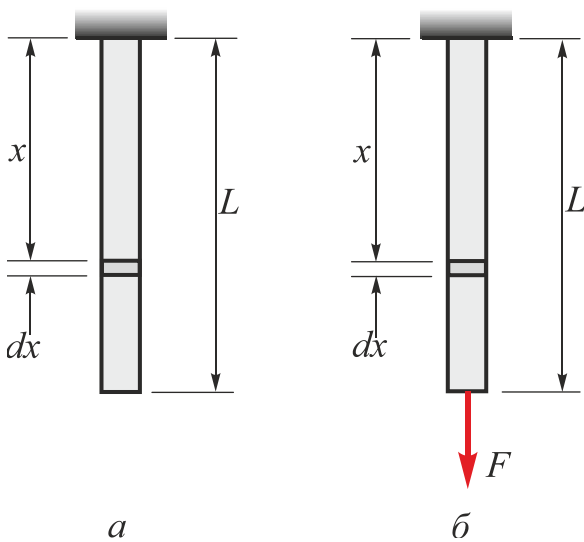
3. Визначаємо мінімальну ширину бруса. Порівнявши чотири величини σ_x , знаходимо, що найменше значення $\sigma_x = -6,9$ МПа. Саме тому цю величину необхідно взяти до уваги під час проектування. Підставляємо її в рівняння (а) та отримуємо потрібну площу:

$$A = \frac{37000}{6,9 \cdot 10^6} = 5,36 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Оскільки брус має квадратний поперечний переріз ($A = b^2$), його мінімальна ширина

$$b_{\min} = \sqrt{A} = \sqrt{5,36 \cdot 10^{-3}} = 7,32 \text{ см.}$$

Задача 3.3



Визначити потенціальну енергію призматичного бруса, закріпленого верхнім кінцем. Розглянути такі випадки навантаження: 1) вага самого бруса; 2) вага бруса з додатковою силою F , прикладеною до його нижньої точки. Матеріал уважати лінійно-пружним.

Розв'язання. 1. Визначаємо потенціальну енергію деформації, накопичену від дії власної ваги бруса (рис. а). У цьому випадку брус зазнає дії змінної осьової сили, яка дорівнює нулю в нижній точці бруса та є максимальною в його верхній точці. Щоб знайти осьову внутрішню силу, розглянемо елемент завдовжки dx на відстані x від

Брус під дією: а – власної ваги; б – власної ваги та зовнішньої сили F

верхнього кінця бруса. Внутрішня поздовжня сила $N(x)$, що діє в перерізі цього елемента, дорівнює вазі бруса, розташованого нижче елемента:

$$N(x) = \rho g A(L - x), \quad (a)$$

де ρ – густина матеріалу; g – прискорення вільного падіння; A – площа поперечного перерізу. Підставивши величину змінної поздовжньої сили в рівняння

$$U = \int_0^L \frac{[N(x)]^2 dx}{2EA(x)} \quad (б)$$

та обчисливши інтеграл, отримуємо вираз для загальної потенціальної енергії деформації:

$$U = \int_0^L \frac{[N(x)]^2 dx}{2EA(x)} = \int_0^L \frac{[\rho g A(L-x)]^2 dx}{2EA} = \frac{\rho^2 g^2 AL^3}{6E}. \quad (\text{в})$$

Такий же результат можна отримати, використовуючи поняття питомої потенціальної енергії деформації. У довільному перерізі бруса, розташованому на відстані x від опори, напруження

$$\sigma = \frac{N(x)}{A} = \rho g(L-x), \quad (\text{г})$$

а питома потенціальна енергія

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\rho^2 g^2 (L-x)^2}{2E}. \quad (\text{д})$$

Загальну потенціальну енергію можна знайти інтегруванням U_0 по об'єму бруса:

$$U = \int U_0 dV = \int_0^L U_0 F dx = \int_0^L \frac{\rho^2 g^2 F(L-x)^2 dx}{2E} = \frac{\rho^2 g^2 FL^3}{6E}, \quad (\text{е})$$

що відповідає рівнянню (в).

2. *Визначаємо потенціальну енергію деформації, накопичену від дії власної ваги бруса, а також сили F (рис. б). У цьому випадку в довільному перерізі діє поздовжня сила*

$$N(x) = \rho g A(L-x) + F. \quad (\text{ж})$$

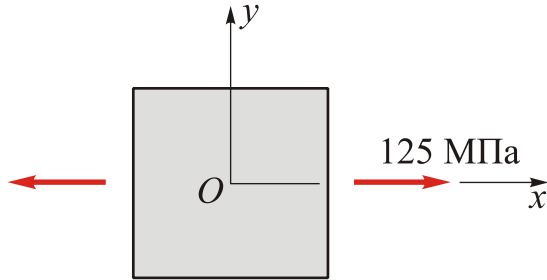
Остаточно маємо

$$U = \int_0^L \frac{[\rho g A(L-x) + F]^2 dx}{2EA} = \frac{\rho^2 g^2 AL^3}{6E} + \frac{\rho g FL^2}{2E} + \frac{F^2 L}{2EA}. \quad (\text{з})$$

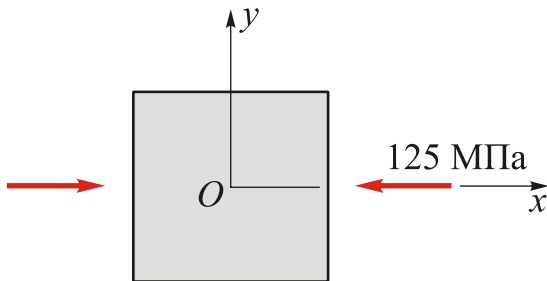
Зауваження. Перший доданок у одержаному рівнянні описує потенціальну енергію, накопичену від дії власної ваги бруса, і відповідає рівнянню (в). Третій доданок описує потенціальну енергію від дії осьової сили F (див. рівняння (3.31)). Проте другий доданок містить як густину ρ , так і силу F , тобто залежить як від ваги бруса, так і від прикладеної сили. Ця задача ілюструє, що потенціальна енергія бруса, який зазнає дії двох сил, не дорівнює сумі окремих потенціальних енергій від дії цих сил, тобто *принцип суперпозиції є неприйнятним при обчисленні енергії деформації.*

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

3.1. Елемент в умовах одновісного напруженого стану зазнає дії розтягувальних напружень $\sigma_x = 125$ МПа. Визначити: 1) напруження, що діють на гранях елемента, нахиленого під кутом $\theta = 30^\circ$ до осі x ; 2) максимальні дотичні напруження й нормальні напруження, що їм відповідають.



3.2. Елемент в умовах одновісного напруженого стану зазнає дії стискальних напружень $\sigma_x = 125$ МПа. Визначити: 1) напруження, що діють на гранях елемента, нахиленого під кутом $\theta = -30^\circ$ до осі x ; 2) максимальні дотичні напруження й нормальні напруження, що їм відповідають.

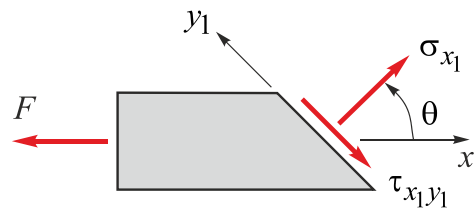
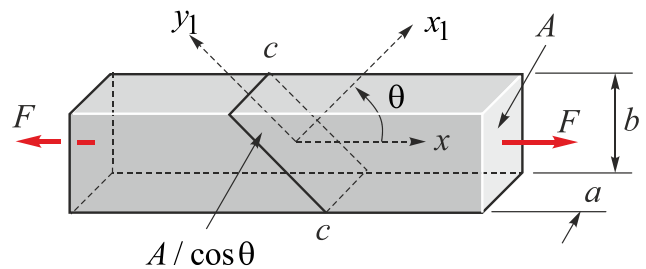


3.3. Обчислити максимальні й дотичні напруження в брусі круглого поперечного перерізу діаметром 30 мм, який зазнає осьового стискання силою $F = 90$ кН.

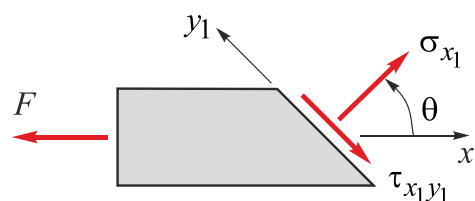
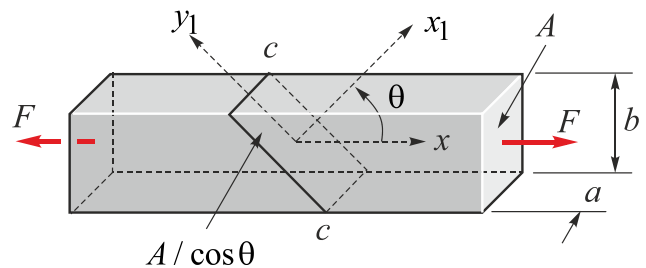
3.4. Порожнистий циліндр із внутрішнім радіусом 50 мм і товщиною стінки 5 мм має спіральний зварний шов під кутом 40° до осі x . Циліндр зазнає дії осьової стискальної сили 10 кН, прикладеної через жорсткі пластини на його кінцях. Визначити нор-

мальні σ і дотичні τ напруження, що діють у площині зварювання.

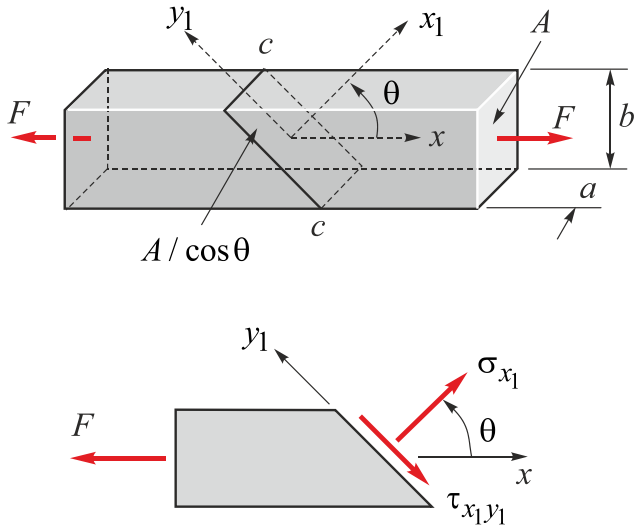
3.5. Визначити максимальне значення осьової розтягувальної сили F , яку може бути прикладено до дерев'яного бруса, якщо обмежити дотичні напруження величиною $\tau_{x_1y_1} = 10$ МПа або нормальні напруження величиною $\sigma_{x_1} = 30$ МПа на похилій площині $c-c$. Узяти $\theta = 60^\circ$, $a = 20$ мм і $b = 50$ мм.



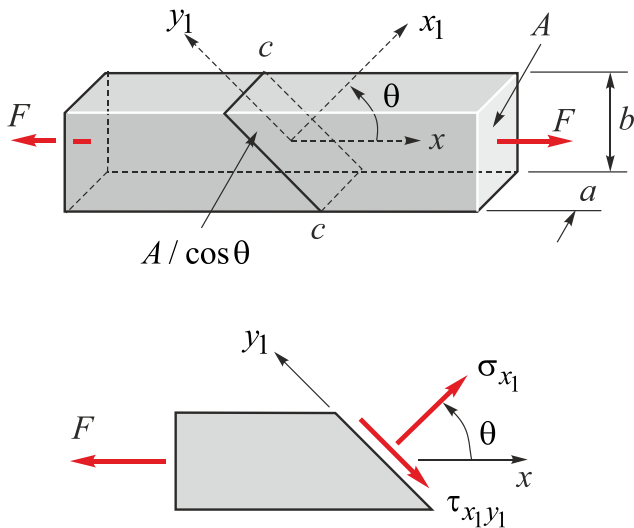
3.6. Обчислити нормальні й дотичні напруження на похилій площині, нормаль до якої складає кут 30° з напрямком сили $F = 120$ кН. Узяти $a = 15$ мм і $b = 30$ мм.



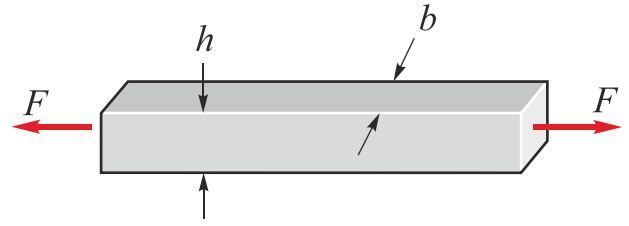
3.7. Напруження на похилій площині $c-c$ в розтягнутому брусі $\sigma_{x_1} = 20$ МПа і $\tau_{x_1 y_1} = 10$ МПа. Визначити осьову силу F і кут θ , якщо $a = 30$ мм і $b = 60$ мм.



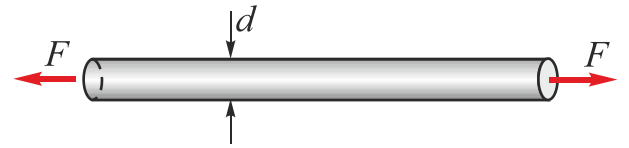
3.8. Обчислити нормальні й дотичні напруження на площині, розташованій під кутом 15° до вектора сили $F = 120$ кН. Узяти $a = 15$ мм і $b = 30$ мм.



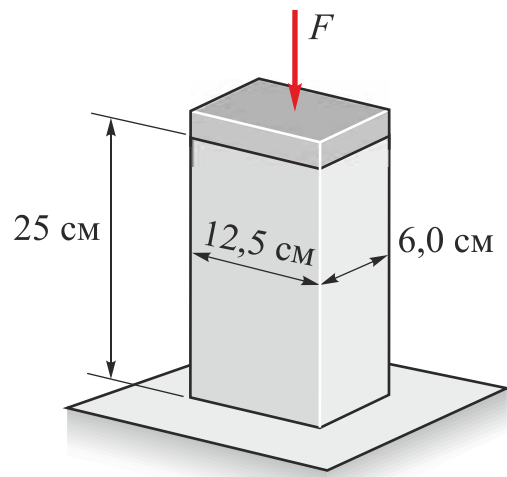
3.9. Стальний брусок квадратного поперечного перерізу (35×35 мм) знає дії розтягувальної сили F . Допустимі напруження на розтягання та зсув дорівнюють відповідно 125 і 75 МПа. Визначити допустиме значення сили F .



3.10. Стальний стрижень діаметром d розтягнуто силою $F = 80$ кН. Допустимі напруження на розтягання та зсув дорівнюють відповідно 120 і 55 МПа. Обчислити мінімальний допустимий діаметр стрижня $[d]$.

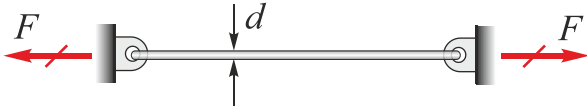


3.11. Цеглу з розмірами $25 \times 12,5 \times 6,0$ см стиснуто у випробувальній машині. Якщо граничне напруження зсуву для цегли становить $7,5$ МПа, а граничне стискальне напруження – 25 МПа, то яка сила $F_{гран}$ зруйнує цеглу?

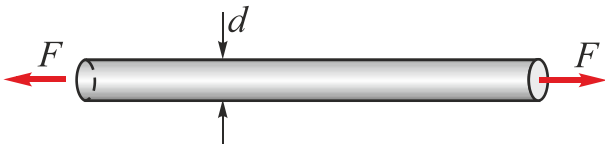


3.12. Латунний дріт діаметром $d = 2$ мм розтягнуто між жорсткими опорами так, що в ньому діє розтягувальна сила $F = 140$ Н. Яким може бути допустиме падіння температури ΔT , якщо допустиме напруження на зсув матеріалу дроту дорівнює 80 МПа?

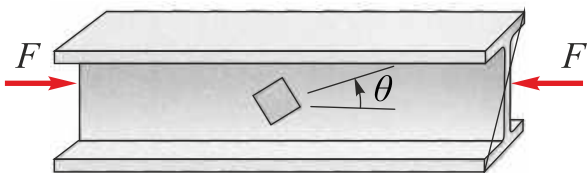
(Коефіцієнт лінійного теплового розширення латуні дорівнює $19,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, а модуль пружності $E = 105 \text{ ГПа}$.)



3.13. Стальний стрижень діаметром 20 мм навантажено розтягувальною силою $F = 25 \text{ кН}$. Обчислити: 1) максимальні нормальні напруження σ_{\max} у стрижні; 2) максимальні дотичні напруження τ_{\max} . Зобразити елемент стрижня під кутом 45° до його осі та прикласти до його граней діючі напруження.

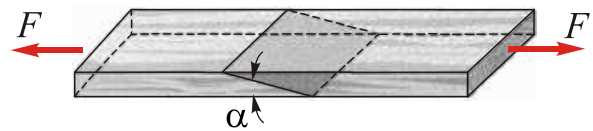


3.14. Стиснута складова ферми має форму двотавра. Площа його поперечного перерізу $A = 6640 \text{ мм}^2$, а осьова сила $F = 400 \text{ кН}$. Визначити нормальні й дотичні напруження, що діють на гранях елемента, виокремленого в стінці двотавра й повернутого відносно його осі на кут: 1) $\theta = 0^\circ$; 2) $\theta = 22,5^\circ$; 3) $\theta = 45^\circ$. Зобразити відповідні елементи з прикладеними напруженнями.

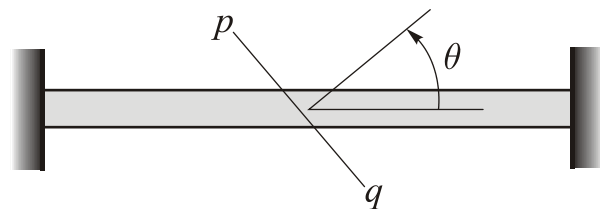


3.15. Дві дошки з'єднано склеюванням. На практиці кут α між площиною з'єднання й поверхнями дошок

має бути меншим за 45° або дорівнювати 45° . Під дією розтягувальної сили F нормальні напруження в дошці дорівнюють $5,0 \text{ МПа}$. Знайти нормальні дотичні напруження в клейовому з'єднанні при $\alpha = 20^\circ$. Яким буде найбільше допустиме значення кута α , якщо допустиме напруження на зсув у з'єднанні дорівнює $2,25 \text{ МПа}$? При якому куті α дотичне напруження в клейовому з'єднанні буде у два рази більшим, ніж нормальне?

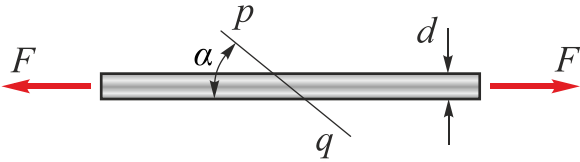


3.16. Брус з міді зафіксовано нерухомо між двома жорсткими опорами. Допустимі напруження на похилій площині $p-q$ (кут нахилу $\theta = 50^\circ$) дорівнюють 50 МПа на стискання та 30 МПа на зсув. Обчислити таке допустиме збільшення температури бруса ΔT , щоб допустимі напруження на площині $p-q$ не були перевищені. Якщо температура перевищить допустиме значення, то якими будуть напруження на площині $p-q$? Узяти $\alpha = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ і $E = 125 \text{ ГПа}$.

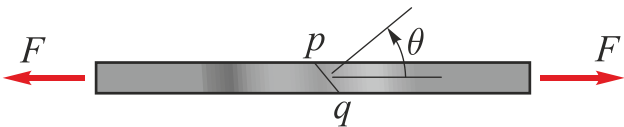


3.17. Латунний стрижень діаметром d складається з двох частин, з'єднаних паянням у площині $p-q$, розташованій під кутом $\alpha = 30^\circ$ до поздовжньої осі бруса. Допустимі напруження латуні на розтягання дорівнюють

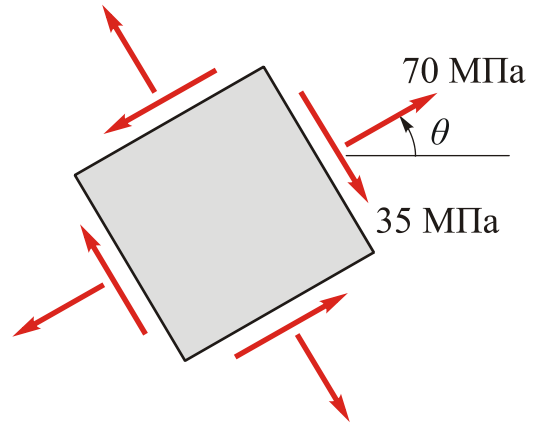
ють 90 МПа, а на зсув – 50 МПа. У перерізі спаювання допустимі напруження дорівнюють 40 МПа на розтягання та 24 МПа на зсув. Якщо необхідно забезпечити міцність бруса при розтягувальній силі 30 кН, то яким має бути мінімальний діаметр бруса d_{\min} ?



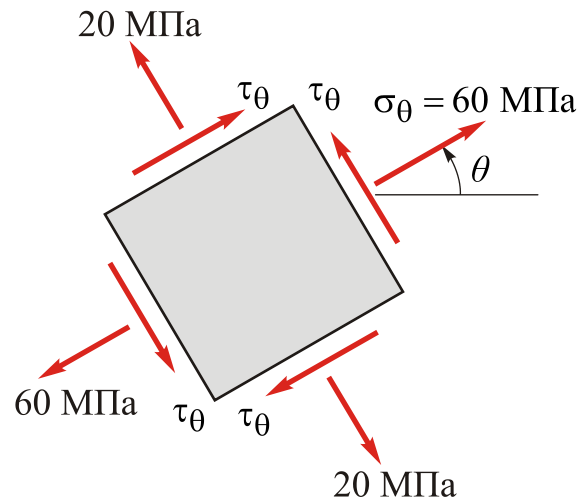
3.18. Конструктивний елемент із полімерного матеріалу, що перебуває в умовах розтягання, складається з двох частин, склеєних по площині p – q . За конструктивними міркуваннями, кут θ має становити $25^\circ \dots 45^\circ$. Допустимі напруження в клейовому з'єднанні на розтягання та зсув дорівнюють 15 і 10 МПа відповідно. Визначити кут θ , при якому брус здатний витримати найбільшу силу F . Обчислити допустиму силу $[F]$ для бруса з поперечним перерізом 600 мм^2 .



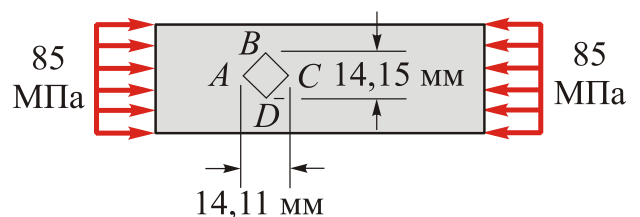
3.19. Призматичний брус навантажено осьювою силою, що спричиняє появу розтягувальних $\sigma_\theta = 70 \text{ МПа}$ і дотичних $\tau_\theta = -35 \text{ МПа}$ напружень на заданій похилій площині. Визначити напруження, що діють на гранях елемента, розташованого під кутом $\theta = 50^\circ$ до горизонталі.



3.20. На гранях елемента, виокремленого з навантаженого осьювою силою бруса, діють нормальні напруження 60 і 20 МПа. Визначити кут θ і дотичне напруження τ_θ . Обчислити максимальні нормальне σ_{\max} і дотичне τ_{\max} напруження у матеріалі.



3.21. Квадрат $ABCD$ розміром $10 \times 10 \text{ мм}$ нанесено на поверхню конструктивного елемента перед навантаженням. Після навантаження квадрат перетворюється на ромб. Визначити: 1) модуль пружності матеріалу конструктивного елемента; 2) його коефіцієнт Пуассона.

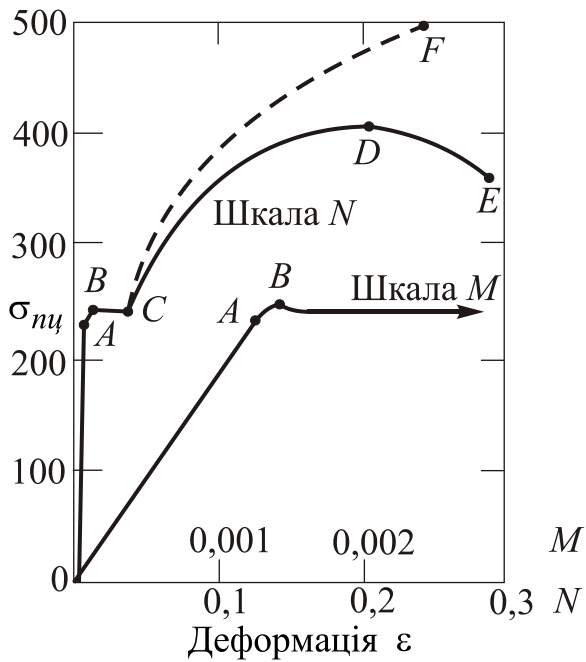


3.22. Вивести формулу для обчислення збільшення об'єму ΔV призматичного бруса завдовжки L , підвишеного вертикально, який перебуває під дією власної ваги (G – загальна вага бруса).

3.23. Використовуючи діаграму «напруження – деформація» конструкційної сталі, визначити питому енергію пружної деформації.

3.24. Обчислити питому енергію пружної деформації для двох марок сталі: 1) вуглецевої (границя текучості на розтягання $\sigma_T = 340$ МПа, модуль пружності $E = 200$ ГПа); 2) холоднокатаної нержавіючої сталі (границя текучості на розтягання $\sigma_T = 520$ МПа, модуль пружності $E = 190$ ГПа).

Напруження σ , МПа



Розділ 4. ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Плоский напружений стан слід дослідити якнайдетальніше, тому що він частіше за інші реалізується в деформаціях кручення, гнуття, а також їх комбінаціях. Щоб детально описати плоский напружений стан, розглянемо нескінченно малий елемент ДТТ (рис. 4.1). Координатні осі x, y, z спрямуємо паралельно до ребер елемента, а найменування його граней будемо визначати відповідно до напрямків їх зовнішніх нормалей.

Якщо плоский напружений стан має місце в xOy -площині, то це означає, що тільки x - і y -грані елемента навантажені напруженнями, паралельними одній з осей $-x$ або y (рис. 4.1, *a*). Індекси напружень візьмемо такими. Нормальні напруження σ матимуть індекс, що відповідає нормалі до грані, на якій вони діють (другий індекс можна опустити). Наприклад, напруження σ_x діє на x -грані елемента, а σ_y – на його y -грані. Оскільки елемент нескінченно малий, нормальні напруження на протилежних гранях є однаковими. Правило знаків для напружень залишимо попереднім – розтягальне нормальне напруження буде додатним, а стискальне – від'ємним. Дотичне напруження τ буде додатним, якщо воно діє на додатній грані елемента в додатному напрямку осі, і від'ємним, якщо воно діє на додатній грані елемента у від'ємному напрямку осі. Так, наприклад, напруження τ_{xy} і τ_{yx} , що діють на додатних x - і y -гранях елемента на (див. рис. 4.1, *a*), є додатними дотичними напруженнями. Так само, на від'ємній грані елемента дотичне напруження буде додатним, якщо воно діє у від'ємному напрямку осі. Тобто напруження τ_{xy} і τ_{yx} , що діють на від'ємних x - і y -гранях елемента, також будуть додатними. Ще раз зазначимо, що з умов рівноваги нескінченно малого елемента випливає: *дотичні напруження на протилежних гранях мають бути однаковими за величиною й протилежними за напрямком*.

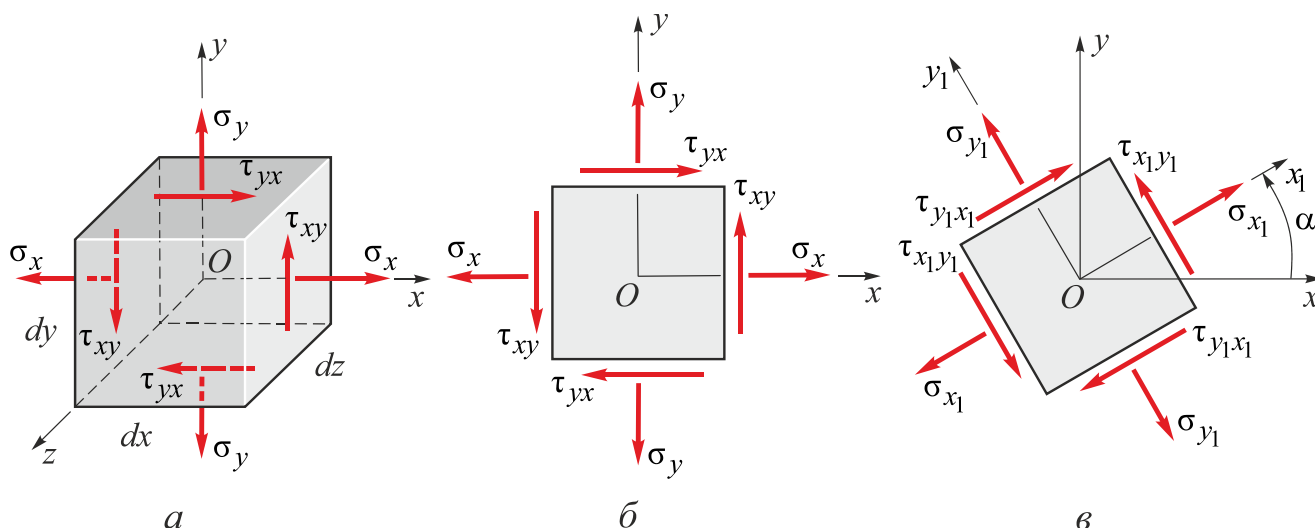


Рис. 4.1. Елемент ДТТ в умовах плоского напруженого стану:

a – тривимірне зображення в системі координат xuz ; *б* – плоска проекція в системі координат xOy ; *в* – проекція в системі координат x_1y_1z , поверненої відносно початкової системи xuz на кут $\alpha > 0$

Таким чином, відповідно до прийнятого правила знаків додатне напруження τ_{xy} напрямлене вгору на додатній x -грані (див. рис. 4.1, *a*) і вниз на від'ємній x -грані. Так само напруження τ_{yx} , що діють на верхній і нижній гранях, є додатними, хоча напрямлені протилежно.

Уже відомо, що дотичні напруження на взаємно перпендикулярних гранях є однаковими за величиною, але напрямленими протилежно, тобто або від спільного ребра, або до нього. Оскільки τ_{xy} і τ_{yx} є додатними в тих напрямках, які показано на рис. 4.1, підтверджується теза про те, що дотичні напруження на взаємно перпендикулярних гранях елемента є однаковими:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (4.1)$$

4.1. Напруження на похилих площадках (площадках довільної орієнтації)

Першим завданням є визначення напружень на гранях елемента, поверненого проти годинникової стрілки на додатний кут α відносно початкового його положення, коли відомі σ_x , σ_y , τ_{xy} (див. рис. 4.1, *b, в*). Грані такого елемента називають **площадками довільної орієнтації**. Розглянемо цей довільно нахилений елемент, виокремлений в околі точки O (див. рис. 4.1, *в*). Зв'яжемо з поверненим елементом систему осей x_1 , y_1 і z_1 , хоча очевидно, що вісь z_1 збігається з початковою z -віссю. Позначимо напруження, що діють на гранях поверненого елемента, через σ_{x_1} , σ_{y_1} , $\tau_{x_1y_1}$ і $\tau_{y_1x_1}$, використовуючи введені вище означення напружень і правила знаків. Застосуємо закон парності дотичних напружень, тобто

$$\tau_{x_1y_1} = \tau_{y_1x_1} \quad (4.2)$$

Це рівняння, а також рівняння рівноваги дають змогу стверджувати таке: якщо дотичні напруження можна визначити хоча б на одній грані поверненого елемента, то можна знайти всі чотири дотичні напруження.

Напруження, що діють на гранях нахиленого елемента (див. рис. 4.1, *в*), тобто напруження σ_{x_1} , σ_{y_1} , $\tau_{x_1y_1}$, можна виразити через напруження на гранях початкового елемента σ_x , σ_y , τ_{xy} , якщо скористатися умовами рівноваги останнього. З цією метою розглянемо у рівновазі ліву частину початкового елемента (див. рис. 4.1, *a*), відокремлену від іншої частини похилою площиною з нормаллю, яка збігається з напрямком x_1 похилого елемента, зображеного на рис. 4.1, *в*. Похилу площадку (грань нахиленого елемента), що відокремлює ліву частину початкового елемента від правої, показано на рис. 4.2. Через нескінченну малість елемента вважають, що площадка проходить через точку O , а напруження на ній дорівнюють напруженням на правій грані нахиленого елемента на рис. 4.1, *в*,

тобто напруженням σ_{x_1} і $\tau_{x_1y_1}$. Відокремлена частина елемента має форму призми з трикутною основою, її двома іншими гранями є x - та y -грані (рис. 4.2, а).

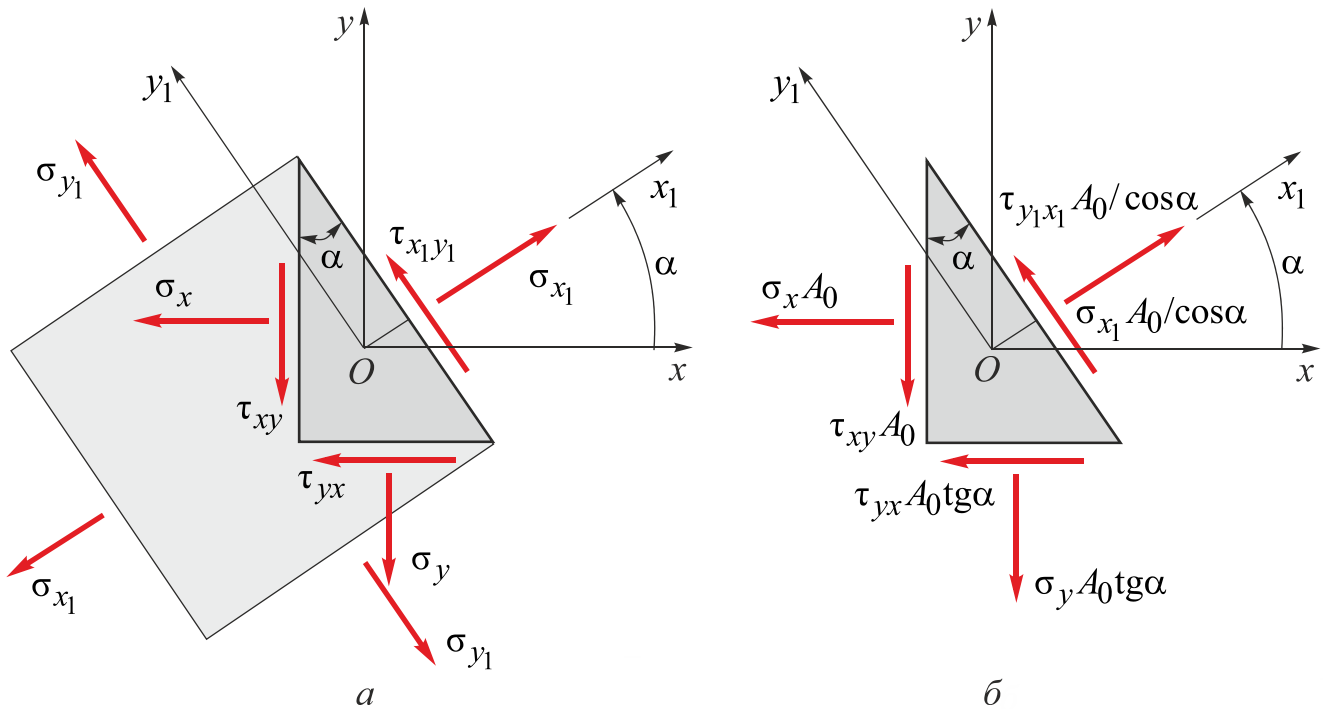


Рис. 4.2. Елемент ДТТ у вигляді призми, виокремленої для складання рівнянь його рівноваги: а – напруження, прикладені до граней призми; б – внутрішні сили, що діють на її гранях

Щоб записати рівняння рівноваги призми і знайти за ними напруження σ_{x_1} і $\tau_{x_1y_1}$ на похилій площадці, заздалегідь слід обчислити внутрішні зусилля, що створюються прикладеними до граней призми напруженнями, у припущенні їх рівномірного розподілу в межах елемента ДТТ. Якщо позначити площу лівої грані призми (від'ємної x -грані) як A_0 , тобто $A_0 = dydz$, то поздовжні й поперечні сили на цій грані будуть дорівнювати $\sigma_x A_0$ і $\tau_{xy} A_0$ відповідно, як показано на рис. 4.2, б. Площа нижньої грані (від'ємної y -грані) буде дорівнювати $A_0 \operatorname{tg} \alpha$, а площа похилої грані (додатної x_1 -грані) – $A_0 / \cos \alpha$. Усі внутрішні сили, що діють на гранях призми, зображено на рис. 4.2, б. Нагадаємо, що передня грань призми вільна від напружень, тобто є головною площадкою.

Спроекуємо усі сили, прикладені до граней призми, на напрямки x_1 та y_1 і запишемо рівняння рівноваги сил:

– на x_1 -напрямок:

$$\sigma_{x_1} A_0 / \cos \alpha - \sigma_x A_0 \cos \alpha - \tau_{xy} A_0 \sin \alpha - \sigma_y A_0 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - \tau_{yx} A_0 \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = 0; \quad (4.3)$$

– на y_1 -напрямок:

$$\tau_{x_1y_1} A_0 / \cos \alpha + \sigma_x A_0 \sin \alpha - \tau_{xy} A_0 \cos \alpha - \sigma_y A_0 \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha + \tau_{yx} A_0 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = 0. \quad (4.4)$$

Використовуючи умову $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, після спрощень отримуємо такі рівняння:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha; \quad (4.5)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (4.6)$$

Рівняння (4.5) і (4.6) дають змогу обчислити напруження, які діють на площадці довільної орієнтації з нормаллю x_1 , розташованій під додатним кутом α до x -напрямку. Звернемо увагу на те, що ці формули чутливі до індексів напружень (x – напрямок управо, y – напрямок уверх).

При $\alpha = 0$ рівняння (4.5) і (4.6) дають $\sigma_{x_1} = \sigma_x$ і $\tau_{x_1 y_1} = \tau_{xy}$, а при $\alpha = 90^\circ$ – $\sigma_{x_1} = \sigma_y$ і $\tau_{x_1 y_1} = -\tau_{xy} = -\tau_{yx}$. В останньому випадку, оскільки вісь x_1 при $\alpha = 90^\circ$ стає вертикальною, напруження $\tau_{x_1 y_1}$ буде додатним, якщо воно напрямлене вліво. Проте напруження τ_{yx} діє вправо, тому $\tau_{x_1 y_1} = -\tau_{yx}$.

Рівняння (4.5) і (4.6) можна подати в іншій формі, використовуючи такі тригонометричні співвідношення:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.7)$$

Застосувавши їх, маємо

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (4.8)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.5) і (4.6), а також (4.8) і (4.9) називають рівняннями зв'язку напружень при повороті осей плоского напруженого стану.

Зазначимо таке:

1. У кожній точці ДТТ має місце властивий тільки їй напружений стан, який не залежить від орієнтації елемента, виокремленого в околі цієї точки, тобто в системі осей xu напружений стан визначається напруженнями σ_x , σ_y , τ_{xy} (див. рис. 4.1, б), а в системі осей $x_1 y_1$ – напруженнями σ_{x_1} , σ_{y_1} , $\tau_{x_1 y_1}$ (див. рис. 4.1, в).

2. Оскільки рівняння зв'язку напружень було виведено з використанням виключно рівнянь рівноваги, вони є придатними для опису напруженого стану будь-якого матеріалу, а не тільки лінійно-пружного.

З рівнянь (4.8), (4.9) можна отримати цікаві результати. Нормальне напруження σ_{y_1} , що діє на y_1 -грані (див. рис. 4.1, в), можна знайти підстановкою в (4.8) $\alpha + 90^\circ$ замість α :

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} = \sigma_{x_1}(90^\circ + \alpha) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2(90^\circ + \alpha) - \tau_{xy} \sin 2(90^\circ + \alpha) = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Складаючи формули для σ_{x_1} і σ_{y_1} , тобто (4.8) і (4.10), маємо

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}. \quad (4.11)$$

Звідси маємо важливий практичний висновок: *сума нормальних напружень, що діють на двох взаємно перпендикулярних гранях елемента ДТТ, не залежить від кута повороту α , іншими словами, є інваріантною до повороту осей.*

Аналогічним чином можна отримати формулу для дотичного напруження $\tau_{y_1x_1}$, що діє на y_1 -грані:

$$\begin{aligned} \tau_{y_1x_1} = \tau_{x_1y_1}(90^\circ + \alpha) &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2(90^\circ + \alpha) + \tau_{xy} \cos 2(90^\circ + \alpha) = \\ &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_{x_1y_1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Графіки функцій напружень $\sigma_{x_1}(\alpha)$ і $\tau_{x_1y_1}(\alpha)$ з урахуванням рівнянь (4.8) і (4.9) зображено на рис. 4.3, де їх побудовано для конкретного випадку: $\sigma_y = 0,2\sigma_x$ і $\tau_{xy} = 0,8\sigma_x$. З них випливає, що при деяких кутах повороту елемента нормальні напруження набувають екстремальних значень, при інших – зменшуються до нуля. Аналогічно поведуться й дотичні напруження.

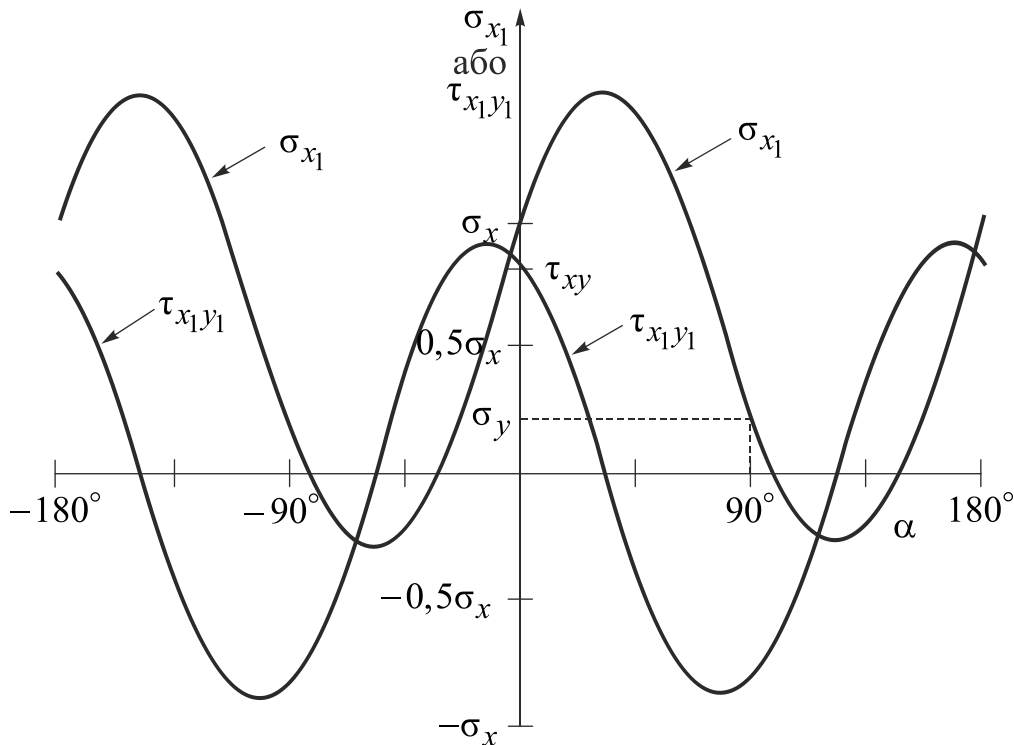


Рис. 4.3. Залежність напружень, що діють на похилих площадках, від кута повороту елемента ДТТ (для випадку, коли $\sigma_y = 0,2\sigma_x$ і $\tau_{xy} = 0,8\sigma_x$)

Найбільш просту форму рівняння зв'язку напружень при повороті осей плоского напруженого стану (4.5), (4.6) або (4.8), (4.9) мають у разі, коли початковий елемент ДТТ навантажений виключно головними напруженнями, як пока-

зано на рис. 4.4, де його зображено під дією двох розтягальних головних напружень. У цьому випадку рівняння (4.5), (4.6) для визначення напружень на площадці з нормаллю x_1 , розташованій під кутом α до осі x , у стандартних позначеннях спрощуються до такої форми:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha; \quad (4.13)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.14)$$

а формули (4.8), (4.9), записані через подвійний кут 2α , набувають такого вигляду:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha; \quad (4.15)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.16)$$

Оскільки напруження σ_x і σ_y у цьому випадку є головними напруженнями, причому напруження σ_x напрямлене вздовж горизонтальної осі x управо, а σ_y – уздовж вертикальної осі y уверх (припустимо, що $\sigma_x > \sigma_y$, тоді $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_3 = 0$), можна застосувати спрощену форму запису рівнянь для напружень на похилій площадці з нормаллю під кутом α , яка збігається з віссю x_1 :

$$\sigma_{x_1} = \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (4.17)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \tau_\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.18)$$

або через подвійний кут 2α :

$$\sigma_{x_1} = \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (4.19)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.20)$$

На перпендикулярній площадці з нормаллю під кутом $\beta = 90^\circ + \alpha$, що збігається з віссю y_1 , діятимуть напруження, які можна обчислити, підставивши в (4.17) і (4.18) $\beta = 90^\circ + \alpha$:

$$\sigma_{y_1} = \sigma_\beta = \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_x \sin^2 \alpha = \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha; \quad (4.21)$$

$$\tau_{y_1 x_1} = \tau_\beta = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.22)$$

або через подвійний кут 2α :

$$\sigma_{y_1} = \sigma_\beta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (4.23)$$

$$\tau_{y_1x_1} = \tau_\beta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.24)$$

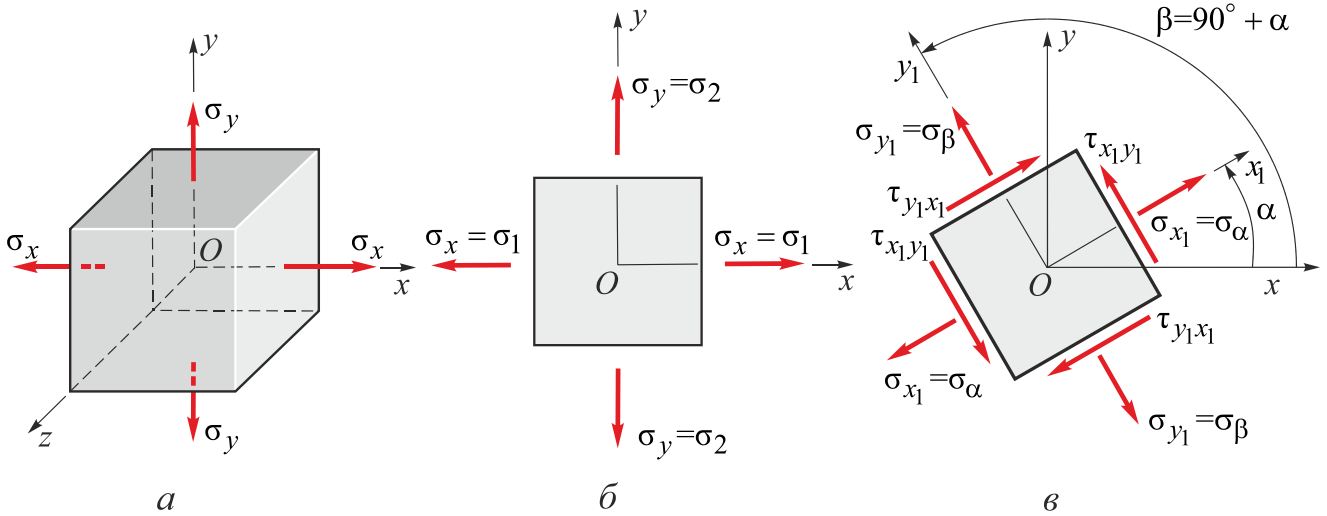


Рис. 4.4. Елемент ДТТ в умовах плоского напруженого стану під дією головних напружень (випадок, коли $\sigma_x > \sigma_y$), причому більше з них напрямлене уздовж осі x : a – тривимірне зображення в системі координат xuz ; b – плоска проекція в системі координат xOy ; v – проекція в системі координат x_1y_1z , поверненій відносно початкової системи xuz на кут $\alpha > 0$

Як і раніше,

$$\tau_\beta = \tau_\alpha, \quad (4.25)$$

а також

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (4.26)$$

4.2. Лінійний напружений стан як окремий випадок плоского напруженого стану

Якщо всі напруження, прикладені до граней елемента на рис. 4.1, дорівнюють нулю, за винятком одного головного, наприклад $\sigma_x > 0$, то очевидно, що елемент перебуває в умовах лінійного напруженого стану (рис. 4.5), який детально розглянуто в розд. 3. Відповідні рівняння зв'язку напружень при повороті осей у такому випадку спрощуються до вигляду

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \sigma_x \cos^2 \alpha, \quad (4.27)$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x}{2}(\sin 2\alpha). \quad (4.28)$$

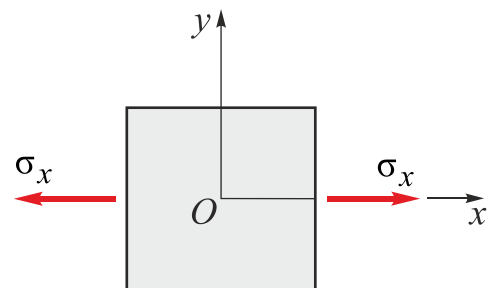


Рис. 4.5. Елемент ДТТ в умовах лінійного напруженого стану (деформація розтягання)

4.3. Чистий зсув як окремий випадок плоского напруженого стану

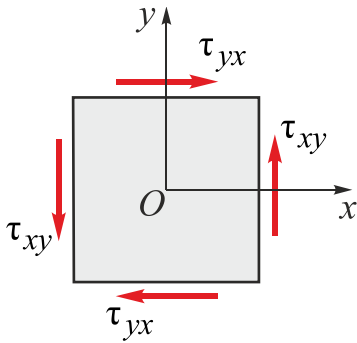


Рис. 4.6. Елемент ДТТ в умовах чистого зсуву

Елемент ДТТ під дією виключно дотичних напружень зображено на рис. 4.6. Після підстановки $\sigma_x = 0$ і $\sigma_y = 0$ в рівняння (4.13) і (4.14) маємо

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{\alpha} = \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (4.29)$$

$$\tau_{x_1y_1} = \tau_{\alpha} = \tau_{xy} \cos 2\alpha, \quad (4.30)$$

тобто, використовуючи рівняння зв'язку напружень для плоского напруженого стану, маємо змогу знайти напруження на похилих площадках. Деформацію під дією дотичних напружень $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ було названо деформацією чистого зсуву. Вона має місце, наприклад, у процесах різання листового металу ножицями.

4.4. Головні напруження й головні напрямки плоского напруженого стану. Найбільші дотичні напруження

Коли дотичні напруження, прикладені до граней елемента, дорівнюють нулю, нормальні напруження σ_x і σ_y , що залишилися, описують більш простий вид плоского напруженого стану. Різні комбінації прикладення до елемента нормальних напружень зображено на рис. 4.7. Як зазначалося раніше, такі нормальні напруження називають головними напруженнями.

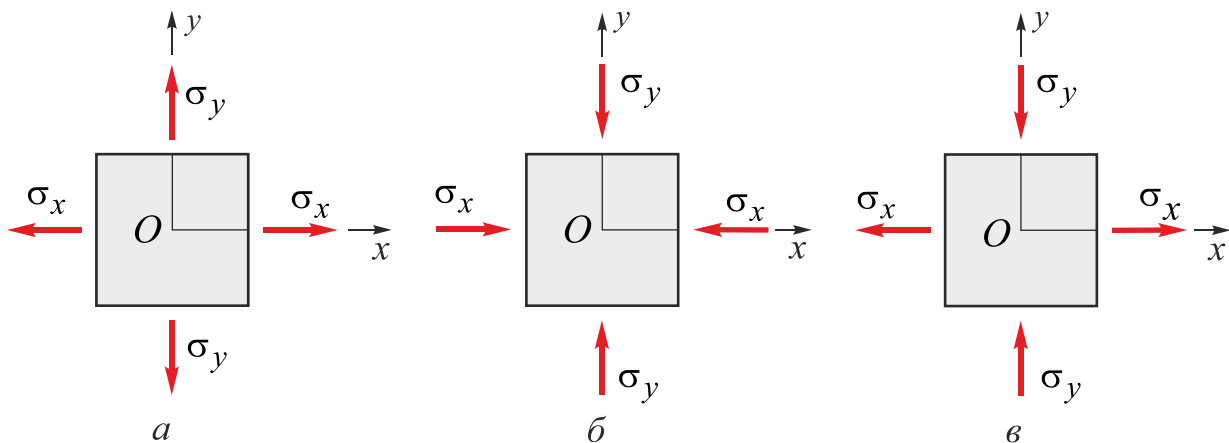


Рис. 4.7. Різні види плоского напруженого стану під дією головних напружень

Рівняння (4.5), (4.6), (4.8), (4.9) для визначення напружень на похилих площадках в такому випадку мають найпростіший вигляд, саме рівняння (4.13)–(4.16).

Аналізуючи графіки змінення нормальних і дотичних напружень при повороті осей (див. рис. 4.3), бачимо, що, *по-перше*, і нормальні, і дотичні напруження набувають максимальних і мінімальних значень в інтервалі кутів повороту

$0^\circ \dots 90^\circ$, по-друге, нормальні напруження набувають максимальних і мінімальних значень у ті моменти, коли дотичні напруження дорівнюють нулю, тобто головні напруження мають властивість екстремальності за відсутності дотичних напружень.

Обчислення максимальних і мінімальних напружень є важливим практичним завданням розрахунку на міцність. Для цього слід застосувати рівняння зв'язку напружень при повороті осей, які, так само як і поняття про головні напруження, уперше було введено в практику інженерних розрахунків завдяки дослідженням французьких математиків О. Л. Коші і Б. Сен-Венана, а також шотландського інженера У. Д. Ренкіна (W. J. Rankine (1820–1872)).

4.4.1. Визначення головних напружень у точці

Головні, тобто найбільше й найменше, нормальні напруження можна визначити за рівнянням для σ_{x_1} (4.15), якщо спочатку обчислити похідну $d\sigma_{x_1} / d\alpha$ і прирівняти її нулю для визначення кута нахилу елемента, який відображає положення головних площадок напруженого стану:

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0, \quad (4.31)$$

звідки випливає, що

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.32)$$

Індекс 0 означає, що кут повороту α початкових осей x, y набуває значення α_0 , при якому напрямки осей стають **головними напрямками напруженого стану**, а на головних площадках виникають головні (тобто найбільше і найменше) напруження.

Виходячи із властивості періодичності функції тангенса ($\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \pi)$), два кути $2\alpha_0$, що відрізняються один від одного на 180° , задовольняють рівнянню (4.32). Відповідно два кути α_0 , що відрізняються один від одного на 90° , називають **головними кутами**. Один із них відповідає максимальному значенню σ_{x_1} , тобто **найбільшому головному напруженню**, інший дає змогу знайти **найменше головне напруження**. Оскільки головні кути відрізняються один від одного на 90° , зрозуміло, що *головні напруження діють на взаємно перпендикулярних площадках*.

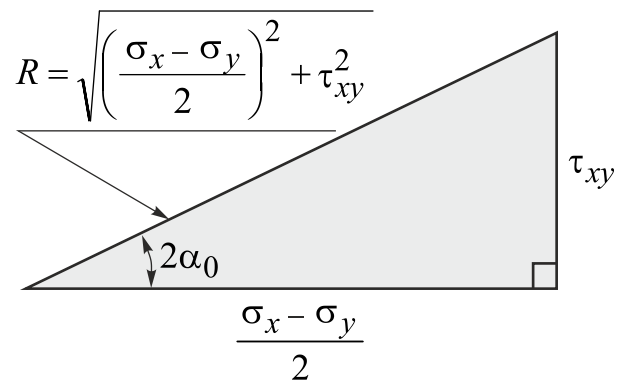


Рис. 4.8. Геометрична аналогія рівняння для обчислення положення головних площадок

Головні напруження можна обчислити шляхом підстановки кожного з двох головних кутів α_0 у рівняння (4.15). Отримаємо формули для головних напружень, використовуючи геометричну аналогію рівняння (4.32), зображену на рис. 4.8. Відповідно до теореми Піфагора гіпотенуза трикутника

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.33)$$

Величина R завжди є додатною і, як дві інші сторони трикутника, має розмірність напруження. Насамперед отримаємо з цього трикутника два важливі співвідношення:

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}, \quad (4.34)$$

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\tau_{xy}}{R}. \quad (4.35)$$

Підставимо тепер їх у рівняння (4.15) і отримаємо алгебрично більше напруження:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.36)$$

Зауважимо, що в цьому прикладі більшому головному напруженню присвоєно індекс 1, оскільки розглядається двовісне розтягання (див. рис. 4.7, а). Алгебрично менше головне напруження σ_2 найпростіше обчислити з умови інваріантності суми нормальних напружень при повороті осей (4.11):

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y. \quad (4.37)$$

Підставивши сюди вираз для σ_1 , одержуємо вираз

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.38)$$

Вирази для σ_1 і σ_2 можна записати у вигляді єдиної формули:

$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.39)$$

4.4.2. Визначення головних напрямків і кутів нахилу головних площадок

Визначимо тепер з рівняння (4.32) відповідність головних кутів α_{01} і α_{02} головним напруженням σ_1 і σ_2 . Для цього слід по черзі підставити значення α_{01} і

α_{0_2} у рівняння (4.8) і за значенням головного напруження знайти відповідний кут (α_{0_1} або α_{0_2}), наприклад:

$$\sigma_{x_1}(\alpha_{0_1}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_{0_1} + \tau_{xy} \sin 2\alpha_{0_1} = \sigma_{\max} \quad , \quad (4.40)$$

(min)

$$\sigma_{x_1}(\alpha_{0_2}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_{0_2} + \tau_{xy} \sin 2\alpha_{0_2} = \sigma_{\min} \quad . \quad (4.41)$$

(max)

Після визначення головних напружень і положень головних площадок можна довести, що на головних площадках дійсно немає дотичних напружень. Використаємо для цього рівняння зв'язку дотичних напружень при повороті осей (4.9). Якщо покласти, що дотичне напруження $\tau_{x_1y_1} = 0$, отримаємо рівняння, яке збігається з (4.32). Це означає, що кути нахилу площадок з нульовими дотичними напруженнями дорівнюють кутам нахилу головних площадок. Отже, правомірним є висновок, що головними для елементів в умовах лінійного й плоского напружених станів будуть x - і y -площинки (рис. 4.9), оскільки $\text{tg} 2\alpha_0 = 0$ (див. формулу (4.32)), а дві величини для α_0 дорівнюють 0 і 90° . Додатковим доказом цього є відсутність на вказаних площадках дотичних напружень.

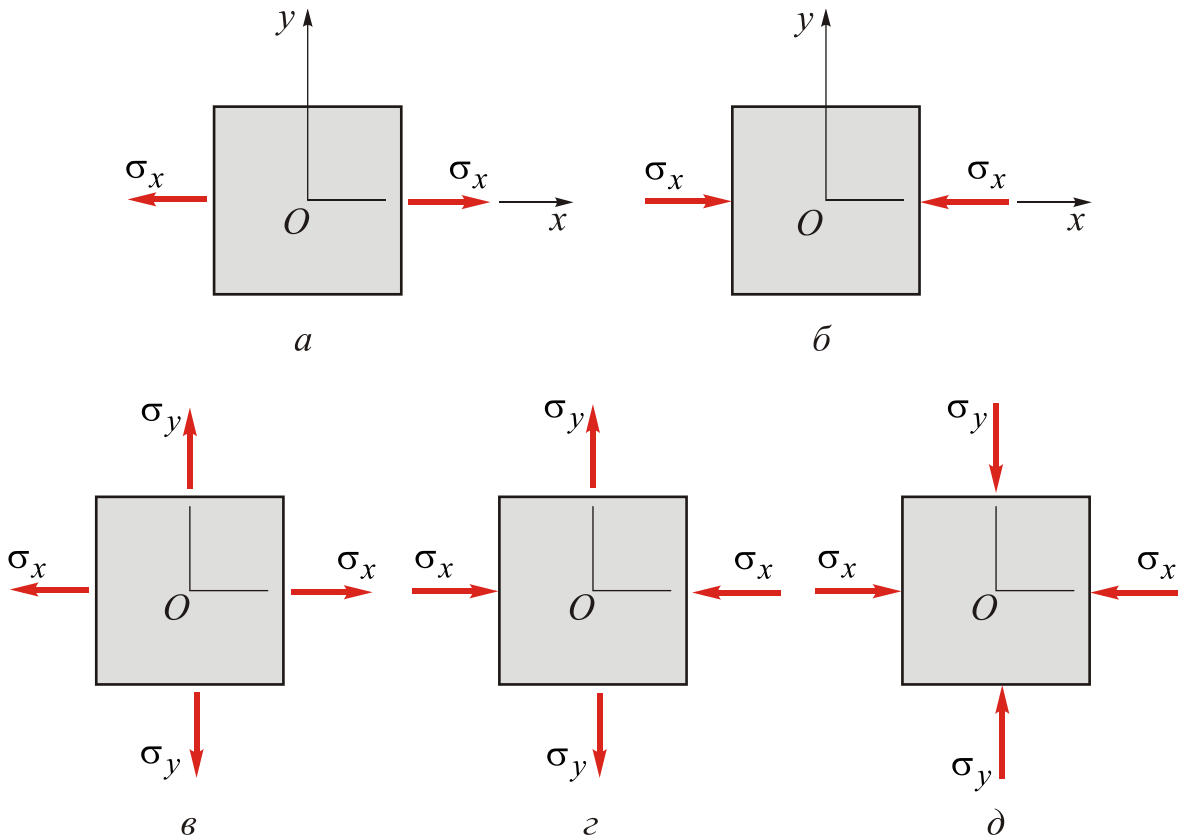


Рис. 4.9. Елемент ДТТ в умовах лінійного (а, б) і плоского (в–д) напружених станів

Для елемента в умовах чистого зсуву (рис. 4.10, а) головні площадки розташовуються під кутом 45° до x -осі (рис. 4.10, б), оскільки $\operatorname{tg}2\alpha_0 = \infty$ і два значення для α_0 дорівнюють 45° і 135° . Зазначимо, що якщо напруження τ_{xy} є додатним, то головні напруження $\sigma_1 = \tau_{xy}$ і $\sigma_3 = -\tau_{xy}$ при $\sigma_2 = 0$.

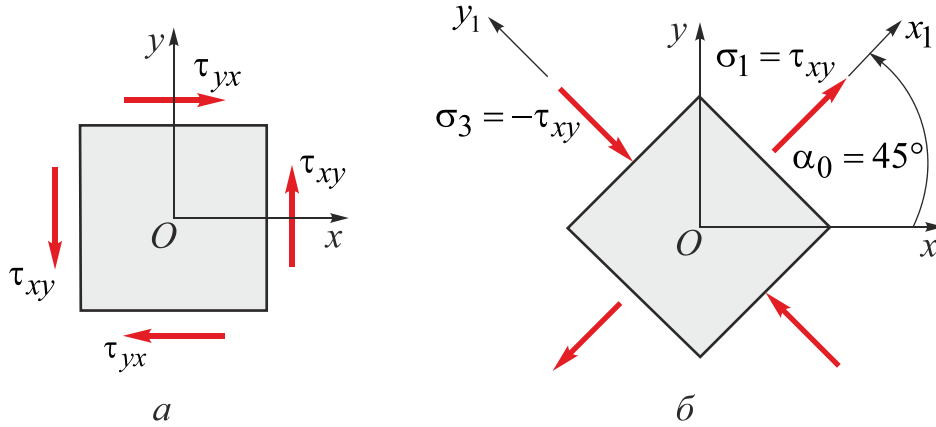


Рис. 4.10. Елемент ДТТ в умовах чистого зсуву (а) і напрямки дії головних напружень (б)

4.4.3. Максимальні дотичні напруження

Завдання визначення максимальних дотичних напружень має велике практичне значення через різну міцність конструкційних матеріалів на відрив (визначається допустимим нормальним напруженням) і зсув (визначається допустимим дотичним напруженням) і, отже, через небезпеку руйнування від надмірних напружень розтягання або зсуву. Почнемо визначати максимальні дотичні напруження та площадки їх дії. Нагадаємо, що рівняння (4.9) дає змогу обчислити дотичне напруження $\tau_{x_1y_1}$, що діє на похилій площадці з нормаллю x_1 . Прирівнявши нулю похідну $d\tau_{x_1y_1} / d\alpha$, отримуємо спочатку кути нахилу площадок з максимальними дотичними напруженнями:

$$\frac{d\tau_{x_1y_1}}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_s - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha_s = 0, \quad (4.42)$$

звідки

$$\operatorname{tg}2\alpha_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \quad (4.43)$$

Індексом s позначимо кут, що відповідає орієнтації площадок, де діють найбільші додатне й від'ємне дотичні напруження. Оскільки функція тангенса є періодичною, за рівнянням (4.43) можна обчислити одне значення α_s в інтервалі $0^\circ \dots 90^\circ$, а інше – в інтервалі $90^\circ \dots 180^\circ$. Ці дві величини відрізняються одна від одної на 90° , тобто *максимальні дотичні напруження діють на взаємно перпендикулярних площадках*. Оскільки дотичні напруження на взаємно перпендикуляр-

них площадках є однаковими за абсолютною величиною (закон парності дотичних напружень), найбільше додатне дотичне напруження відрізняється від від'ємного тільки знаком.

Порівнюючи (4.43) зі значенням α_0 з (4.32), отримуємо

$$\operatorname{tg} 2\alpha_s = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} = -\operatorname{ctg} 2\alpha_0. \quad (4.44)$$

Перепишемо цей вираз у вигляді

$$\frac{\sin 2\alpha_s}{\cos 2\alpha_s} + \frac{\cos 2\alpha_0}{\sin 2\alpha_0} = 0, \quad (4.45)$$

або

$$\sin 2\alpha_s \sin 2\alpha_0 + \cos 2\alpha_s \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (4.46)$$

Останнє рівняння можна подати у вигляді

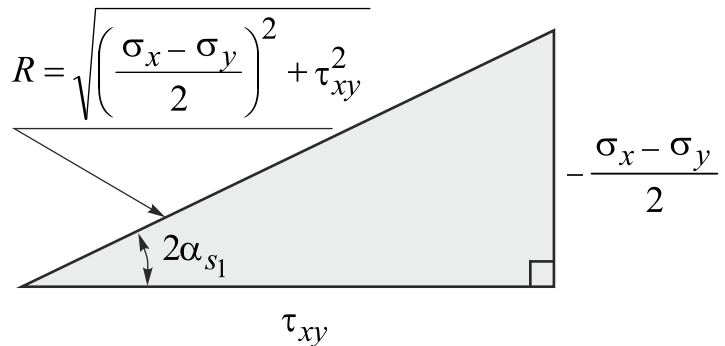
$$\cos(2\alpha_s - 2\alpha_0) = 0,$$

звідки

$$2\alpha_s - 2\alpha_0 = \pm 90^\circ, \quad \alpha_s = \alpha_0 \pm 45^\circ. \quad (4.47)$$

Таким чином, з рівняння (4.47) випливає, що *площадки дії найбільших дотичних напружень розташовані під кутом 45° до площадок дії головних напружень*.

Площадка дії максимального додатного напруження τ_{\max} визначається кутом α_{s_1} , для якого правильними є співвідношення, що випливають з геометричної аналогії рівняння (4.43), зображеної на рис. 4.11:



$$\sin 2\alpha_{s_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}, \quad (4.48)$$

$$\cos 2\alpha_{s_1} = \frac{\tau_{xy}}{R}. \quad (4.49)$$

Рис. 4.11. Геометрична аналогія рівняння для обчислення положення площадок дії максимальних дотичних напружень

Тут R визначається рівнянням (4.33). При цьому кути α_{s_1} і α_{0_1} зв'язані співвідношенням

$$\alpha_{s_1} = \alpha_{0_1} - 45^\circ, \quad (4.50)$$

яке єдиним чином задовольняє рівнянням (4.34), (4.35), (4.48).

Відповідне максимальне дотичне напруження можна обчислити підстановкою виразів для $\cos 2\alpha_{s_1}$ і $\sin 2\alpha_{s_1}$ у рівняння для $\tau_{x_1 y_1}$ (4.9):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.51)$$

Зауваження. З огляду на практичне використання, знаки максимальних дотичних напружень не мають сенсу, оскільки в розрахунках важливим є тільки значення найбільшого дотичного напруження, за яким роблять висновок про опір матеріалу деформації зсуву.

У разі, коли початкові площадки є головними, а σ_x і σ_y – головними напруженнями (наприклад, $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$), значення τ_{xy} у (4.51) дорівнює нулю. Тоді формула (4.51) спрощується до вигляду

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.52)$$

Таким чином, *максимальне дотичне напруження дорівнює половині різниці головних напружень плоского напруженого стану*. Зауважимо, що у разі тривісного (об'ємного) напруженого стану, коли $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, найбільше істинне дотичне напруження в ДТТ визначається як піврізниця найбільшого і найменшого з головних напружень:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (4.53)$$

Максимальні дотичні напруження діють на площадках, рівнонахилених до площадок дії найбільшого і найменшого головних напружень.

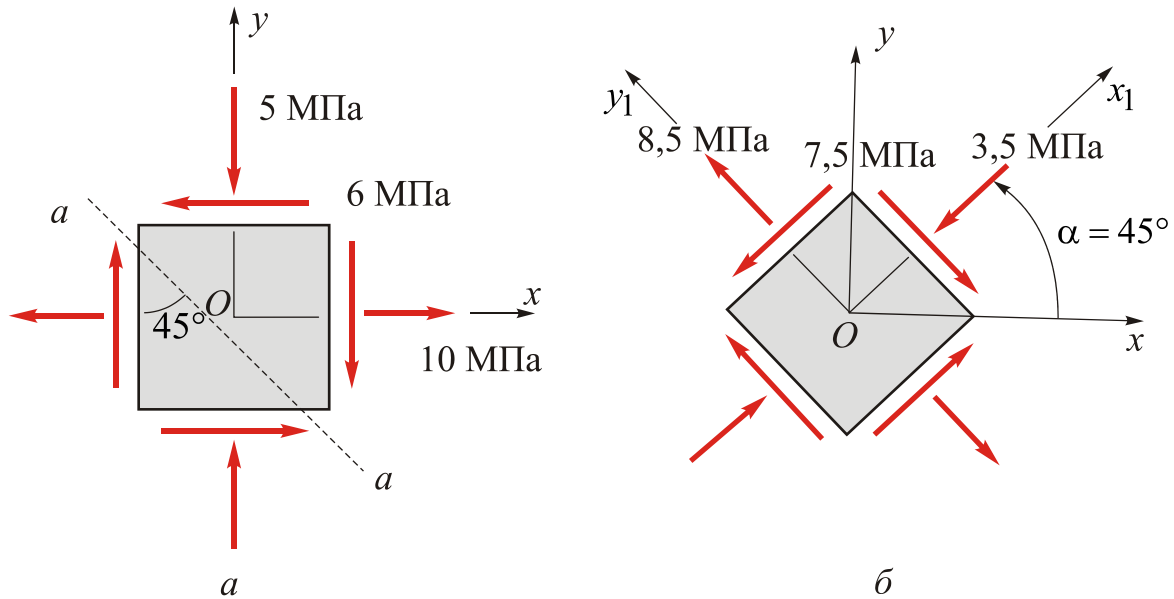
Важливо зрозуміти, що на площадках дії найбільших дотичних напружень діють також і нормальні напруження. Те з них, яке діє на площадці найбільшого додатного напруження, можна знайти, підставляючи вирази $\sin 2\alpha_{s_1}$ і $\cos 2\alpha_{s_1}$ з (4.48) і (4.49) у рівняння для σ_{x_1} (4.8). Воно дорівнює **середнім нормальним напруженням** на x - і y -гранях:

$$\sigma_{\text{сеп}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (4.54)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 4.1

Напружений стан у точці конструктивного елемента показано на рис. *a*. Визначити нормальне й дотичне напруження, що діють на похилій площадці, паралельній лінії *a–a*.



Розв'язання. Позначимо нормаль до похилої площадки через x_1 . Будучи перпендикулярною до лінії $a-a$, ця нормаль нахилена в системі координат xOy під додатним кутом $\alpha = 45^\circ$. Слід обчислити напруження в системі координат x_1Oy_1 через відомі напруження в системі координат xOy . При цьому використовувати-мемо прийняту раніше систему знаків.

Застосуємо рівняння (4.8)–(4.10) при $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_x = 10$ МПа, $\sigma_y = -5$ МПа і $\tau_{xy} = -6$ МПа:

$$\sigma_{x_1} = \frac{1}{2}(10 - 5) + \frac{1}{2}(10 + 5)\cos 90^\circ + (-6)\sin 90^\circ = -3,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{1}{2}(10 + 5)\sin 90^\circ + (-6)\cos 90^\circ = -7,5 \text{ МПа};$$

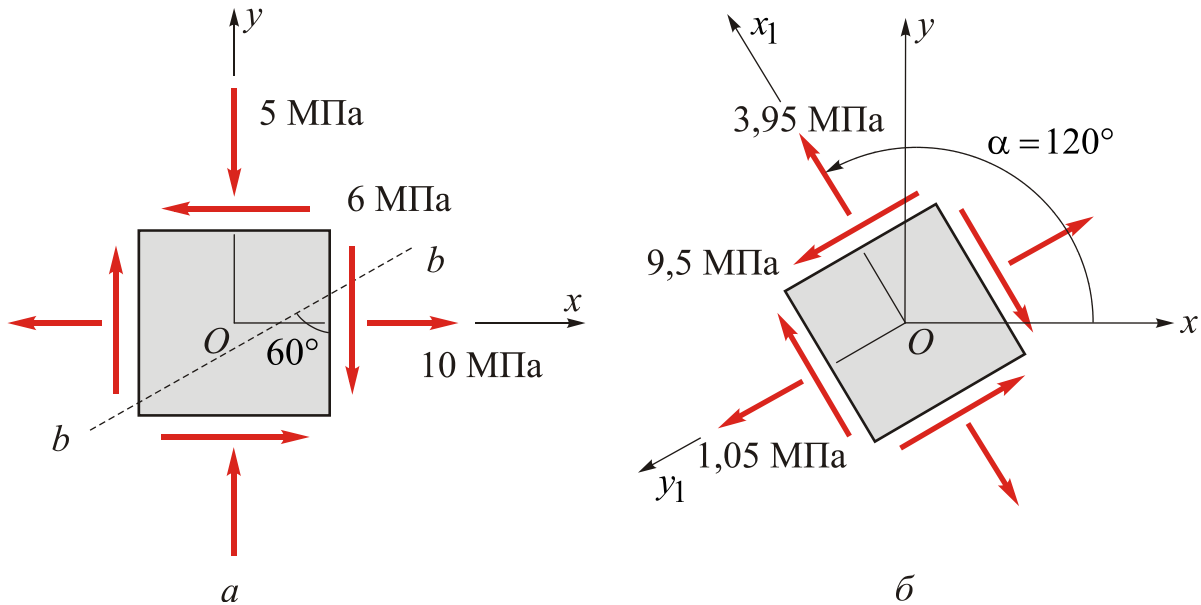
$$\sigma_{y_1} = \frac{1}{2}(10 - 5) - \frac{1}{2}(10 + 5)\cos 90^\circ - (-6)\sin 90^\circ = 8,5 \text{ МПа}.$$

Результати показано на рис. б.

Зазначимо, що сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках залишається постійною при повороті елемента, а це свідчить про правильність розв'язку.

Задача 4.2

Напружений стан у точці конструктивного елемента зображено на рис. а. Визначити нормальне й дотичне напруження, що діють на похилій площадці, паралельній лінії $b-b$.



Розв'язання. Позначимо нормаль до похилої площадки через x_1 . Нормаль нахилена під додатним кутом $\alpha = 120^\circ$ до осі x . Слід обчислити напруження в системі координат x_1Oy_1 через відомі напруження в системі координат xOy .

Застосовуємо рівняння (4.8)–(4.10) при $\alpha = 120^\circ$, $\sigma_x = 10$ МПа, $\sigma_y = -5$ МПа і $\tau_{xy} = -6$ МПа:

$$\sigma_{x_1} = \frac{1}{2}(10 - 5) + \frac{1}{2}(10 + 5)\cos 240^\circ + (-6)\sin 240^\circ = 3,95 \text{ МПа};$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{1}{2}(10 + 5)\sin 240^\circ + (-6)\cos 240^\circ = 9,5 \text{ МПа};$$

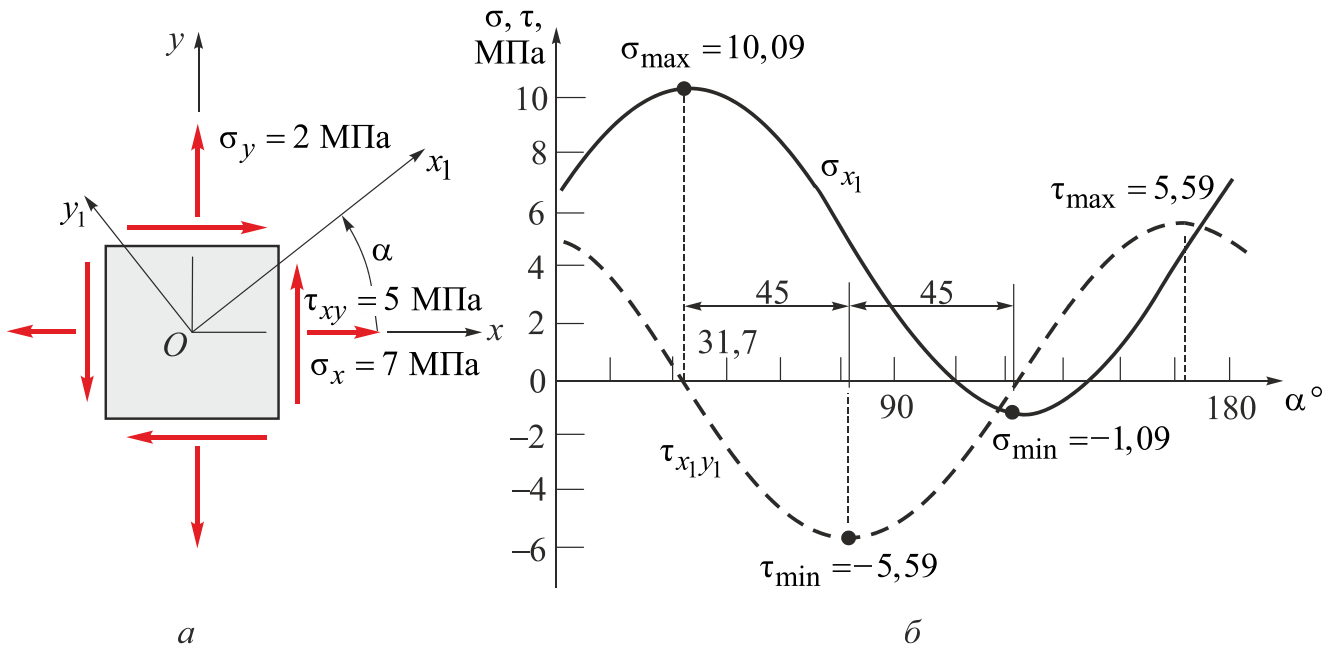
$$\sigma_{y_1} = \frac{1}{2}(10 - 5) - \frac{1}{2}(10 + 5)\cos 240^\circ - (-6)\sin 240^\circ = 1,05 \text{ МПа}.$$

Результати показано на рис. б.

Зазначимо, що сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках залишається постійною при повороті елемента, а це свідчить про правильність розв'язку.

Задача 4.3

Плоский напружений стан у точці конструкції зображено на рис. а. Записати рівняння зв'язку напруження при повороті осей. Обчислити σ_{x_1} і $\tau_{x_1y_1}$ у діапазоні змінення α від 0° до 180° з інтервалом 15° для $\sigma_x = 7$ МПа, $\sigma_y = 2$ МПа і $\tau_{xy} = 5$ МПа. Накреслити графіки $\sigma_{x_1}(\alpha)$ і $\tau_{x_1y_1}(\alpha)$.



Графіки змінення нормального й дотичного напружень σ_{x_1} і $\tau_{x_1y_1}$ при повороті осей в діапазоні $0^\circ \dots 180^\circ$

Розв'язання. Подамо рівняння (4.8) і (4.9) у такому вигляді:

$$\sigma_{x_1} = A + B \cos 2\alpha + C \sin 2\alpha ;$$

$$\tau_{x_1y_1} = -B \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha ,$$

де $A = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$, $B = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$, $C = \tau_{xy}$.

Їх підстановка в (4.8) і (4.9) дає

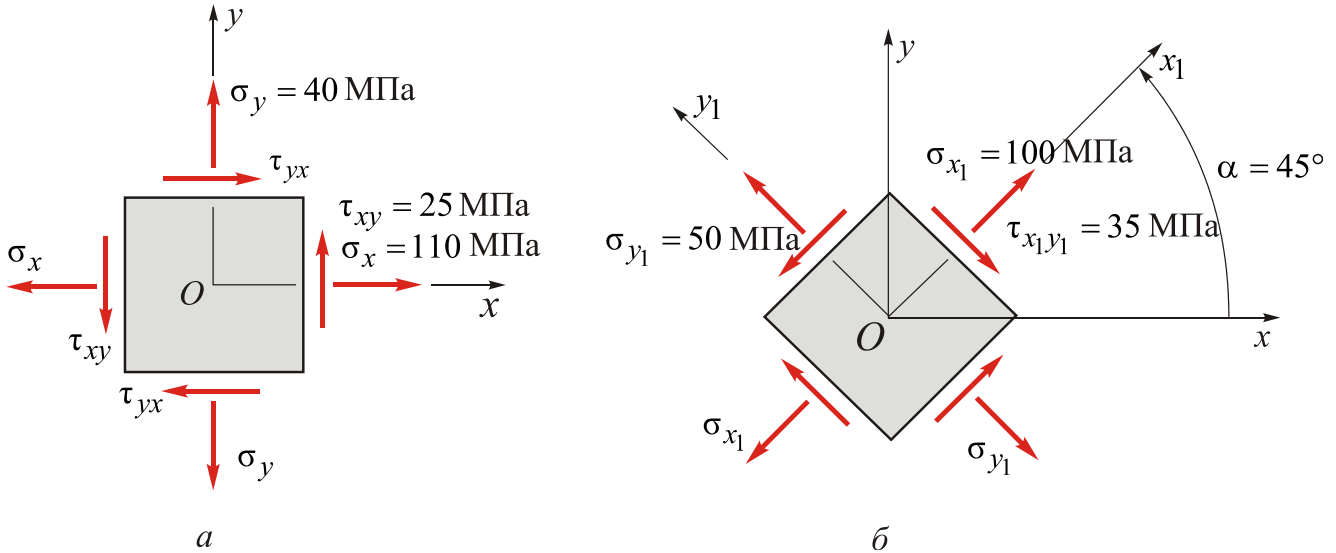
$$\sigma_{x_1} = 4,5 + 2,5 \cos 2\alpha + 5 \sin 2\alpha ,$$

$$\tau_{x_1y_1} = -2,5 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha .$$

Змінюючи α від 0° до 180° через кожні 15° , побудуємо графіки цих залежностей (рис. б). Вони ілюструють змінення напружень при повороті елемента в цій точці. Зазначимо, що площадки дії максимального (мінімального) дотичного напруження розташовані під кутом, що дорівнює половині кута між максимальним і мінімальним нормальними напруженнями. Більше того, нормальні напруження набувають максимальних або мінімальних значень (тобто стають головними напруженнями) на площадках, розташованих під кутами $\alpha = 31,7^\circ$ і $\alpha = 31,7^\circ + 90^\circ$ відповідно, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. *Зазначимо, що вказане вище справджується для будь-якого плоского напруженого стану.*

Задача 4.4

Елемент в умовах плоского напруженого стану перебуває під дією напружень $\sigma_x = 110$ МПа, $\sigma_y = 40$ МПа і $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 25$ МПа (рис. а). Визначити напруження, що діють на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 45^\circ$.



a – початковий елемент в умовах плоского напруженого стану; *б* – елемент, нахилений під кутом $\alpha = 45^\circ$

Розв’язання. Щоб визначити напруження, що діють на гранях нахиленого елемента, використаємо рівняння зв’язку напружень при повороті осей (4.8) і (4.9). При заданих початкових даних отримаємо такі величини для підстановки в рівняння (4.8), (4.9):

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 75 \text{ МПа}, \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 35 \text{ МПа}, \quad \tau_{xy} = 25 \text{ МПа},$$

$$\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1, \quad \cos 2\alpha = \cos 90^\circ = 0.$$

Виконуємо підстановку:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = 75 + (35)(0) + (25)(1) = 100 \text{ МПа},$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = -(35)(1) + (25)(0) = -35 \text{ МПа}.$$

Напруження σ_{y_1} визначаємо з рівняння (4.10):

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = 75 - (35)(0) - (25)(1) = 50 \text{ МПа}.$$

Обчислені напруження прикладемо до граней елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 45^\circ$ (рис. б), з урахуванням правил для знаків напружень. Зазначимо та-

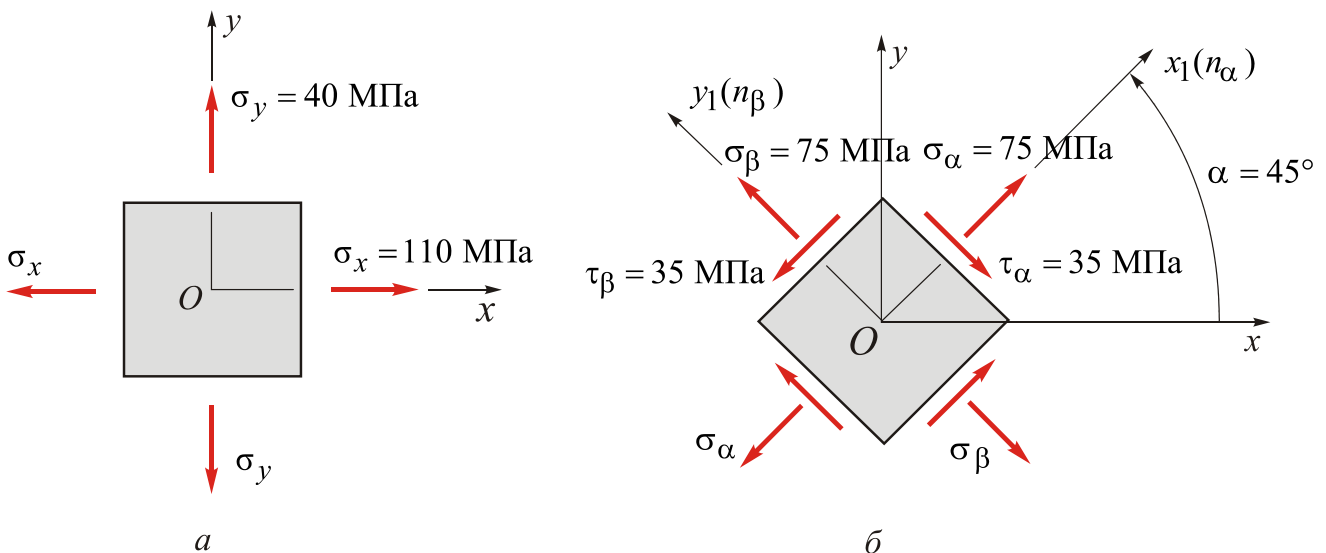
кож, що сума нормальних напружень залишається постійною й дорівнює 150 МПа, що випливає з (4.11):

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y = 150 \text{ МПа.}$$

Зауважимо, що отримані напруження (див. рис. б), відображають той же напружений стан, що й задані напруження (див. рис. а). При цьому значення напружень залежать від кута повороту елемента, виокремленого в околі заданої точки.

Задача 4.5

Елемент в умовах плоского напруженого стану перебуває під дією головних напружень $\sigma_x = 110$ МПа і $\sigma_y = 40$ МПа (рис. а). Визначити напруження, що діють на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 45^\circ$ (рис. б).



а – початковий елемент в умовах плоского напруженого стану; б – елемент, нахилений під кутом $\alpha = 45^\circ$

Розв’язання. Заданий елемент зазнає дії головних напружень, причому $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$. Щоб визначити напруження, що діють на гранях нахиленого елемента, скористаємося рівняннями зв’язку напружень при повороті осей у спрощеній формі (4.17) і (4.18):

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = 110 \cos^2(45^\circ) + 40 \sin^2(45^\circ) = 55 + 20 = 75 \text{ МПа,}$$

$$\tau_\alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha = -(110 - 40) \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) = -35 \text{ МПа.}$$

На перпендикулярній площадці з нормаллю n_β під кутом $\beta = 90^\circ + \alpha$, що збігається з віссю y_1 , діятимуть напруження, які можна обчислити, користуючись формулами (4.21) і (4.22):

$$\sigma_\beta = \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha = 40 \cos^2(45^\circ) + 110 \sin^2(45^\circ) = 20 + 55 = 75 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{\beta} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha = -(110 - 40) \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) = -35 \text{ МПа.}$$

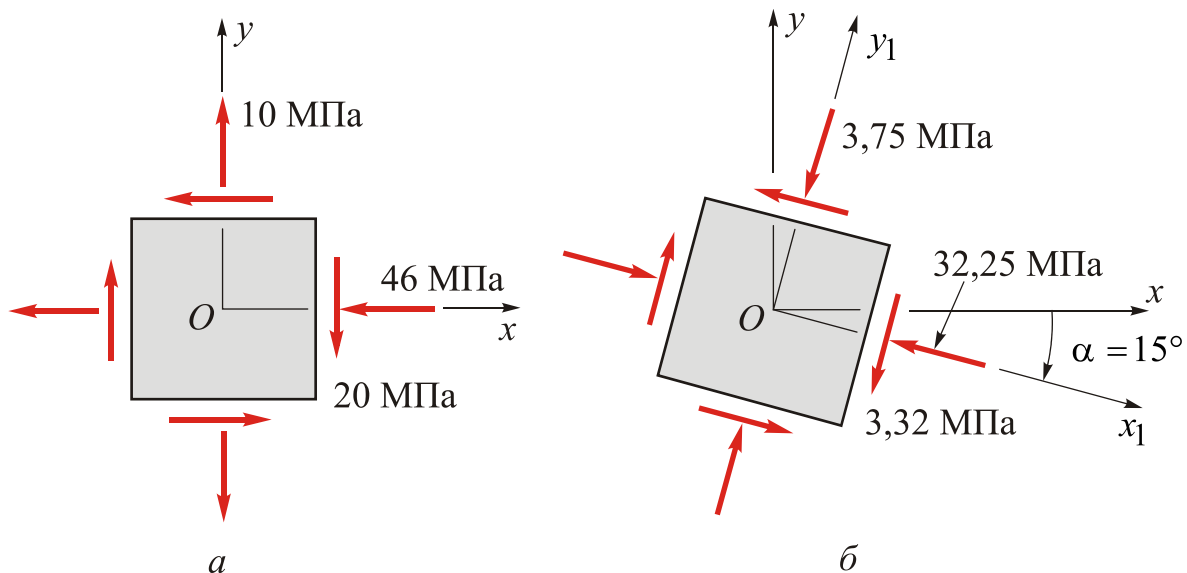
Обчислені напруження прикладемо до граней елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 45^\circ$ (рис. б), з урахуванням правил для знаків напружень. Зазначимо також, що сума нормальних напружень залишається постійною й дорівнює 150 МПа, що випливає з (4.11):

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 = 150 \text{ МПа.}$$

Зауважимо, що отримані напруження (див. рис. б) відображають той же напружений стан, що й задані напруження (див. рис. а). Природно, що значення напружень залежать від кута повороту елемента, виокремленого в околі заданої точки.

Задача 4.6

На рис. а зображено плоский напружений стан у точці, розташованій на поверхні конструктивного елемента. Визначити напруження на гранях елемента, поверненого за годинниковою стрілкою на кут 15° .



а – початковий елемент в умовах плоского напруженого стану;

б – елемент, нахилений під кутом $\alpha = -15^\circ$

Розв’язання. На гранях початкового елемента діють такі напруження:

$$\sigma_x = -46 \text{ МПа, } \sigma_y = 10 \text{ МПа, } \tau_{xy} = -20 \text{ МПа.}$$

Вісь x_1 поверненого елемента розташована під кутом $\alpha = -15^\circ$ до осі x (обертання за годинниковою стрілкою, як відомо, прийнято від’ємним).

Обчислюватимемо напруження на грані з нормаллю x_1 під кутом $\alpha = -15^\circ$, використовуючи рівняння (4.8) і (4.9). Знайдемо їх складові:

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -18 \text{ МПа, } B = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = -28 \text{ МПа,}$$

$$\sin 2\alpha = \sin(-30^\circ) = -0,5, \quad \cos 2\alpha = \cos(-30^\circ) = 0,8660.$$

Підставляємо ці величини в рівняння зв'язку напружень при повороті осей:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= (-18) + (-28)(0,8661) + (-20)(-0,5) = -32,25 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{x_1 y_1} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \\ &= -(-28)(-0,5) + (-20)(0,8660) = -3,32 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Нормальне напруження на площадці з нормаллю y_1 обчислюємо за (4.10):

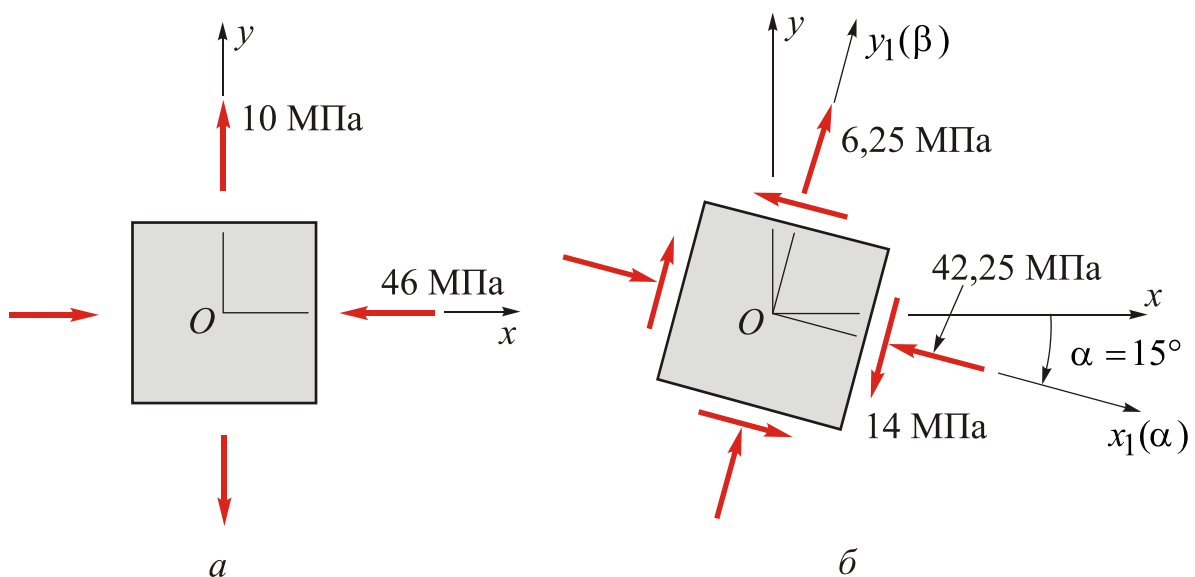
$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= (-18) - (-28)(0,8661) - (-20)(-0,5) = -3,75 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Перевірка результату показує, що і в цьому випадку $\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y$.

Істинні напрями напружень, прикладених до граней поверненого елемента, показано на рис. б. Ще раз зазначимо, що і заданий, і повернений елементи перебувають в одному і тому ж напруженому стані.

Задача 4.7

На рис. а зображено плоский напружений стан у точці, розташованій на поверхні конструктивного елемента, в умовах дії головних напружень. Визначити напруження на гранях елемента, поверненого за годинниковою стрілкою на кут 15° .



a – початковий елемент в умовах плоского напруженого стану під дією головних напружень; *б* – елемент, повернений на кут $\alpha = -15^\circ$

Розв'язання. На гранях початкового елемента (див. рис. *a*) діють такі головні напруження:

$$\sigma_x = \sigma_3 = -46 \text{ МПа}, \quad \sigma_y = \sigma_1 = 10 \text{ МПа}.$$

Вісь x_1 поверненого елемента розташована під кутом $\alpha = -15^\circ$ до осі x . Щоб визначити напруження, що діють на гранях поверненого елемента, скористаємося рівняннями зв'язку напружень при повороті осей у найбільш простій формі (4.17) і (4.18):

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha = (-46) \cos^2(-15^\circ) + (+10) \sin^2(-15^\circ) = \\ &= (-46)(0,9659)^2 + (+10)(-0,2588)^2 = -42,25 \text{ МПа}; \\ \tau_\alpha &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha = -((-46) - 10) \sin(-15^\circ) \cos(-15^\circ) = \\ &= -(-56)(-0,2588)(0,9659) = -14 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

На перпендикулярній площадці з нормаллю під кутом $\beta = 90^\circ + \alpha$, що збігається з віссю y_1 , діятимуть напруження, які можна обчислити, користуючись формулами (4.21) і (4.22):

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_x \sin^2 \alpha = 10 \cos^2(-15^\circ) + (-46) \sin^2(-15^\circ) = \\ &= 10(0,9659)^2 + (-46)(-0,2588)^2 = 6,25 \text{ МПа}; \\ \tau_\beta &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha = -((-46) - (-10)) \sin(-15^\circ) \cos(-15^\circ) = \\ &= -(-56)(-0,2588)(0,9659) = -14 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Обчислені напруження прикладемо до граней елемента, поверненого на кут $\alpha = -15^\circ$ (рис. *b*), з урахуванням раніше прийнятих правил для знаків напружень. Зазначимо також, що сума нормальних напружень залишається постійною й дорівнює -36 МПа, що впливає з (4.11):

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y = -36 \text{ МПа}.$$

Істинні напрямки напружень, прикладених до граней поверненого елемента, показано на рис. *b*. Зазначимо, що і заданий, і повернений елементи перебувають в одному й тому самому напруженому стані.

Задача 4.8

Елемент матеріалу перебуває під дією напружень $\sigma_x = 80$ МПа, $\sigma_y = -25$ МПа і $\tau_{xy} = -30$ МПа (рис. а). Визначити головні й максимальні дотичні напруження і прикласти їх до граней відповідного елемента.

Розв'язання. Обчислюємо головні напруження. Кути нахилу головних площадок α_0 можна отримати з рівняння (4.32):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(-30)}{80 - (-25)} = -0,5714.$$

Зважаючи на періодичність функції тангенса, отримуємо дві сім'ї кутів:

$$2\alpha_0 = -29,745^\circ \text{ і } \alpha_0 = -14,872^\circ;$$

$$2\alpha_0 = -29,745^\circ + 180^\circ = 150,255^\circ \text{ і } \alpha_0 = 75,138^\circ.$$

Головні напруження можна обчислити, підставляючи обидва значення кута $2\alpha_0$ у рівняння для σ_{x_1} (4.19). Визначимо спочатку такі величини:

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 - 25}{2} = 27,5 \text{ МПа,}$$

$$B = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{80 - (-25)}{2} = 52,5 \text{ МПа.}$$

Підставляємо перше значення кута $2\alpha_0 = -29,745^\circ$ у (4.19):

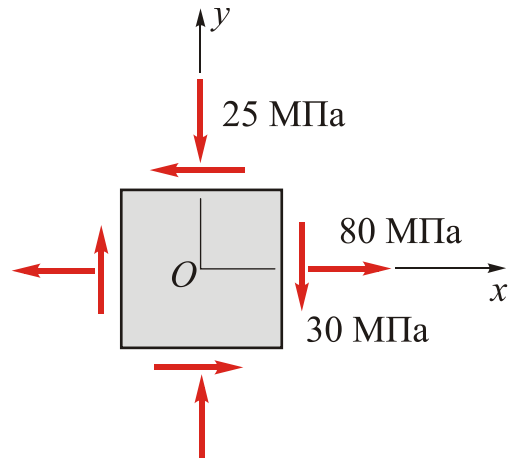
$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_0 + \tau_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 27,5 + (52,5) \cos(-29,745^\circ) + (-30) \sin(-29,745^\circ) = 87,96 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Так само підставляємо друге значення кута $2\alpha_0 = 150,255^\circ$ у (4.19):

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_0 + \tau_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 27,5 + (52,5) \cos(150,255^\circ) + (-30) \sin(150,255^\circ) = -32,96 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Отже, головні напруження й кути нахилу головних площадок, що відповідають їм, є такими:

$$\sigma_1 = 87,96 \text{ МПа і } \alpha_{0_1} = -14,872^\circ,$$



а – елемент в умовах плоского напруженого стану

РОЗДІЛ 4. ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

$$\sigma_3 = -32,96 \text{ МПа і } \alpha_{0_2} = 75,128^\circ.$$

Не слід забувати, що головне напруження $\sigma_2 = 0$ діє у напрямку осі z . Зазначимо також, що кути α_{0_1} і α_{0_2} відрізняються один від одного на 90° і $\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y$. Головні напруження показано на рис. б. Природно, що головні площадки вільні від дотичних напружень.

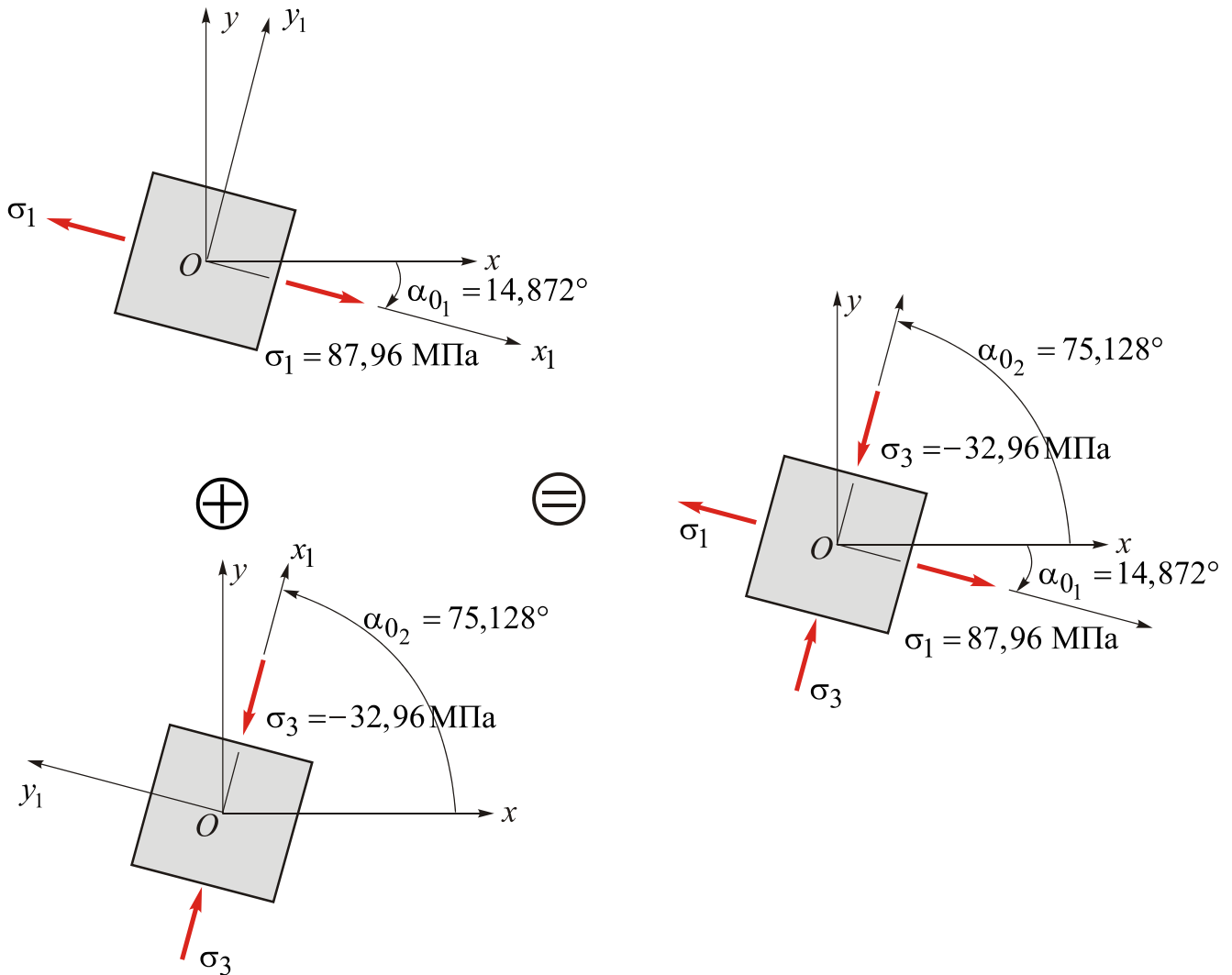
Головні напруження можна також обчислити безпосередньо з рівняння (4.39):

$$\sigma_{1,2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 27,5 \pm \sqrt{52,5^2 + (-30)^2};$$

$$\sigma_{1,2(3)} = (27,50 \pm 60,47) \text{ МПа.}$$

Отже,

$$\sigma_1 = 87,97 \text{ МПа, } \sigma_3 = -32,97 \text{ МПа, } \sigma_2 = 0.$$



б – елемент ДТТ під дією головних напружень, зображений з використанням принципу суперпозиції

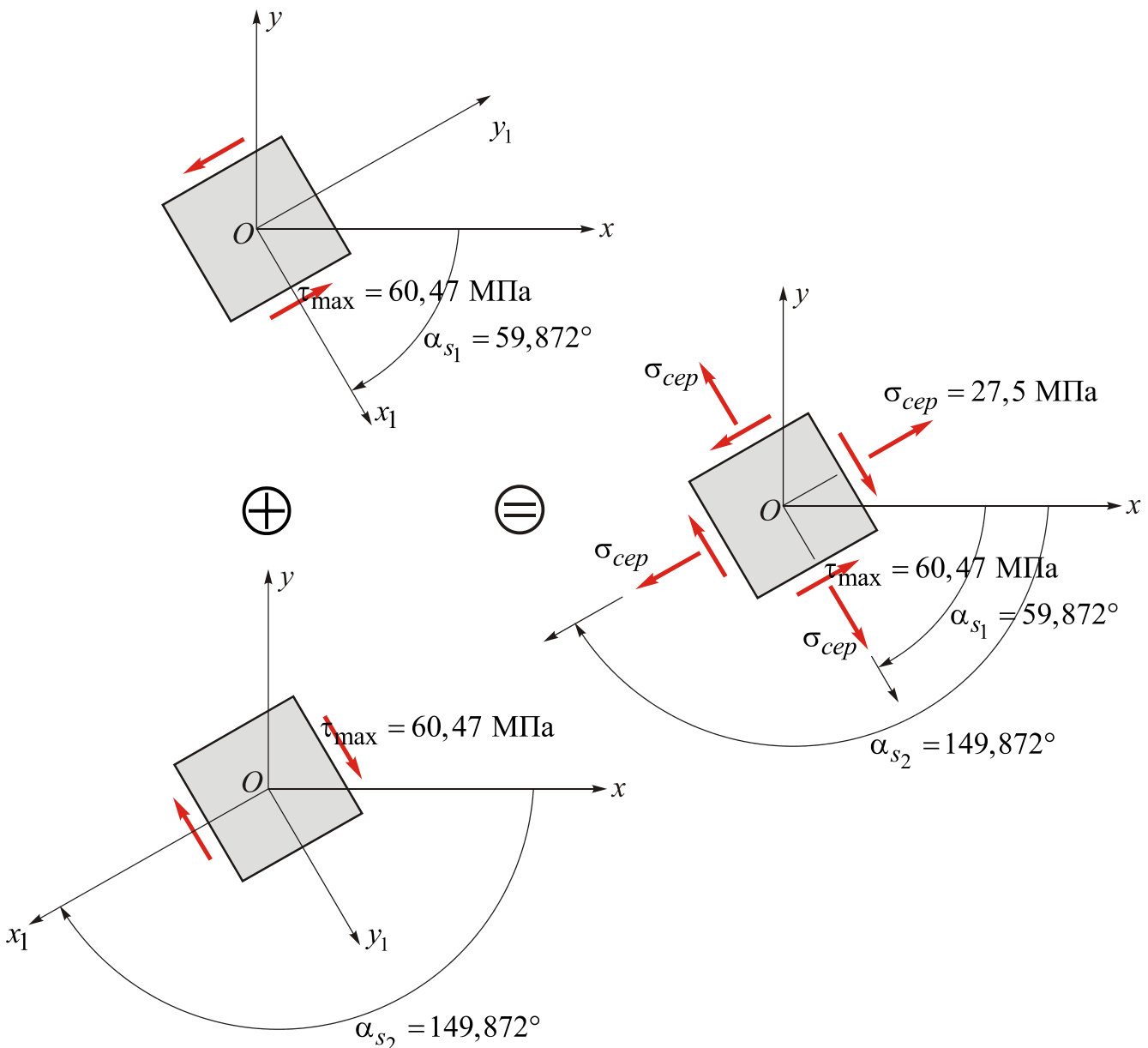
РОЗДІЛ 4. ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Обчислюємо максимальні дотичні напруження. Використаємо з цією метою рівняння (4.51):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(52,5)^2 + (-30)^2} = 60,47 \text{ МПа.}$$

Кут α_{s_1} , що визначає положення максимального додатного дотичного напруження, розраховуємо з рівняння (4.50):

$$\alpha_{s_1} = \alpha_{0_1} - 45^\circ = -14,872^\circ - 45^\circ = -59,872^\circ.$$



v – елемент ДТТ під дією максимальних дотичних напружень (максимальне додатне відповідає куту α_{s_1} , а максимальне від’ємне – куту α_{s_2}), зображений з використанням принципу суперпозиції (на правому рисунку показано також одночасно діючі середні нормальні напруження)

Максимальне від'ємне дотичне напруження діє на площадці з нормаллю під кутом $\alpha_{s_2} = -59,872^\circ - 90^\circ = -149,872^\circ$.

Нормальні напруження на площадках, де діють максимальні дотичні напруження, обчислюємо, використовуючи рівняння (4.54):

$$\sigma_{сер} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 27,5 \text{ МПа.}$$

Елемент під дією максимальних дотичних напружень зобразимо (рис. в) як суперпозицію додатного і від'ємного максимальних дотичних напружень, а також одночасно діючих середніх нормальних напружень.

Задача 4.9

Плоский напружений стан показано на рис. а. Записати рівняння для визначення головних напружень та обчислити їх. Визначити максимальні дотичні напруження й нормальні напруження, що їм відповідають.

Розв'язання. Обчислюємо головні напруження. Для цього рівняння (4.8), (4.32) і (4.39) записуємо в такій формі:

$$\sigma_1 = A + (B^2 + C^2)^{1/2};$$

$$\sigma_3 = A - (B^2 + C^2)^{1/2};$$

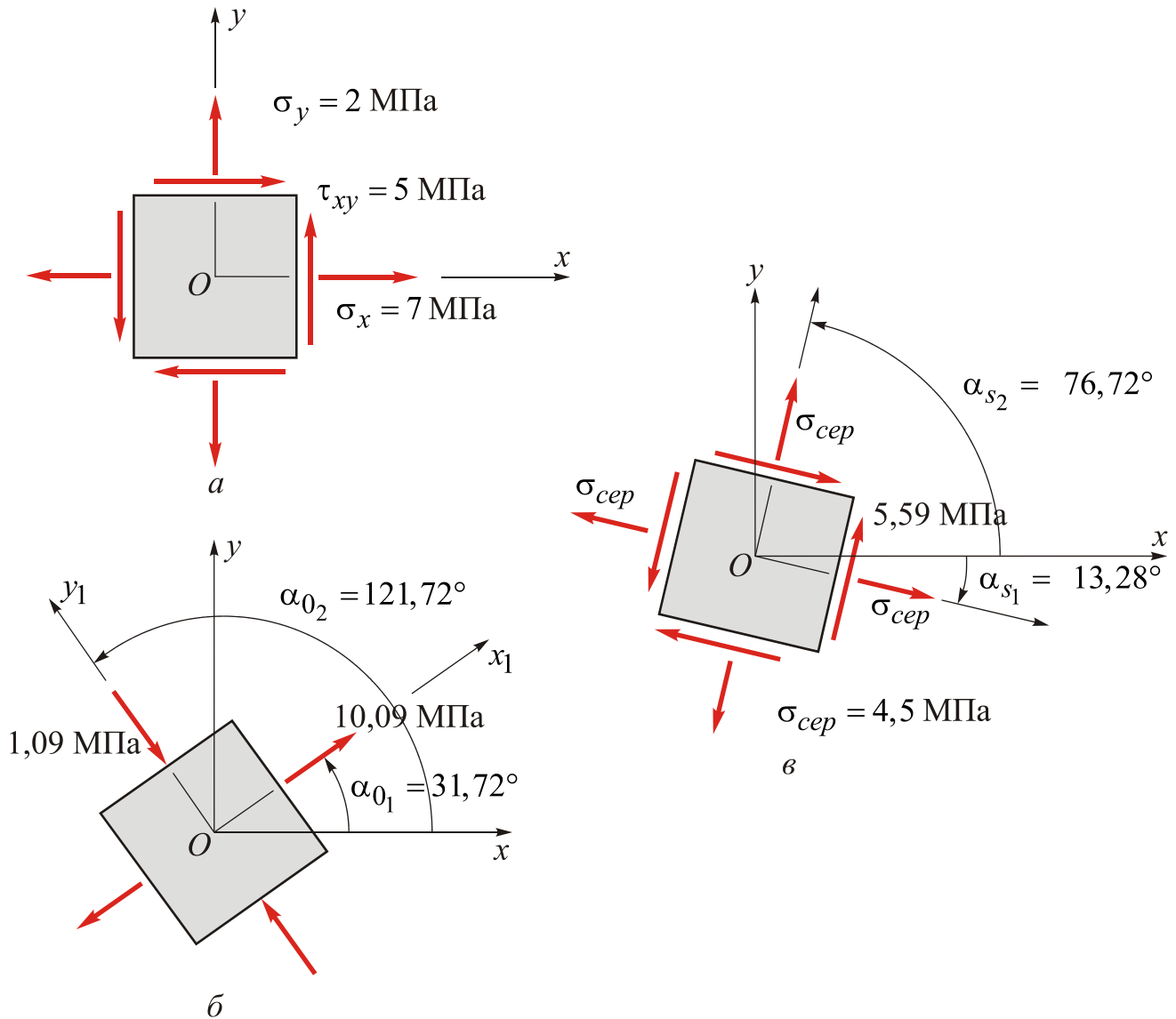
$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{C}{B};$$

$$\sigma_{x_1} = A + B \cos 2\alpha + C \sin 2\alpha,$$

де
$$A = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad B = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), \quad C = \tau_{xy}.$$

Кути нахилу головних площадок α_0 можна отримати з рівняння (4.32):

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+5)}{7 - (+2)} = +2,0.$$



a – елемент ДТТ в умовах плоского напруженого стану; *б* – елемент ДТТ під дією головних напружень; *в* – елемент ДТТ під дією максимальних дотичних напружень і відповідних середніх нормальних напружень

Відповідні головні кути:

$$2\alpha_0 = 63,43^\circ \text{ і } \alpha_0 = 31,72^\circ;$$

$$2\alpha_0 = 243,43^\circ \text{ і } \alpha_0 = 121,72^\circ.$$

Головні напруження можна обчислити послідовною підстановкою обох кутів $2\alpha_0$ у рівняння для σ_{x_1} (4.8). Визначимо спочатку такі величини:

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{7 + 2}{2} = 4,5 \text{ МПа};$$

$$B = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{7 - 2}{2} = 2,5 \text{ МПа}.$$

Тепер підставляємо перше значення кута $2\alpha_0$ у (4.8):

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_0 + \tau_{xy} \sin 2\alpha_0 = A + B \cos 2\alpha_0 + C \sin 2\alpha_0 = \\ &= 4,5 + (2,5)(\cos 63,43^\circ) + (5)(\sin 63,43^\circ) = +10,09 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Так само підставляємо друге значення кута $2\alpha_0$ і отримуємо $\sigma_{x_1} = -1,09$ МПа. Отже, маємо головні напруження й кути нахилу головних площадок, що їм відповідають:

$$\sigma_1 = +10,09 \text{ МПа і } \alpha_{0_1} = 31,72^\circ;$$

$$\sigma_3 = -1,09 \text{ МПа і } \alpha_{0_2} = 121,72^\circ.$$

Ще раз зазначимо, що кути α_{0_1} і α_{0_2} відрізняються один від одного на 90° і $\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y$.

Головні напруження прикладені до елемента, показаного на рис. б. Природно, що на головних площадках немає дотичних напружень.

Головні напруження можна також обчислити безпосередньо з рівняння (4.46):

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2(3)} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = A \pm \sqrt{B^2 + C^2} = 4,5 \pm \sqrt{(2,5)^2 + (5,0)^2}; \\ \sigma_{1,2(3)} &= (4,50 \pm 5,59) \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Отже, $\sigma_1 = 10,09$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -1,09$ МПа.

Визначаємо максимальні дотичні напруження. Ці напруження обчислюємо, використовуючи рівняння (4.51):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{7-2}{2}\right)^2 + 5^2} = 5,59 \text{ МПа.}$$

Кут нахилу площадки з найбільшим додатним дотичним напруженням α_{s_1} визначаємо з рівняння (4.50):

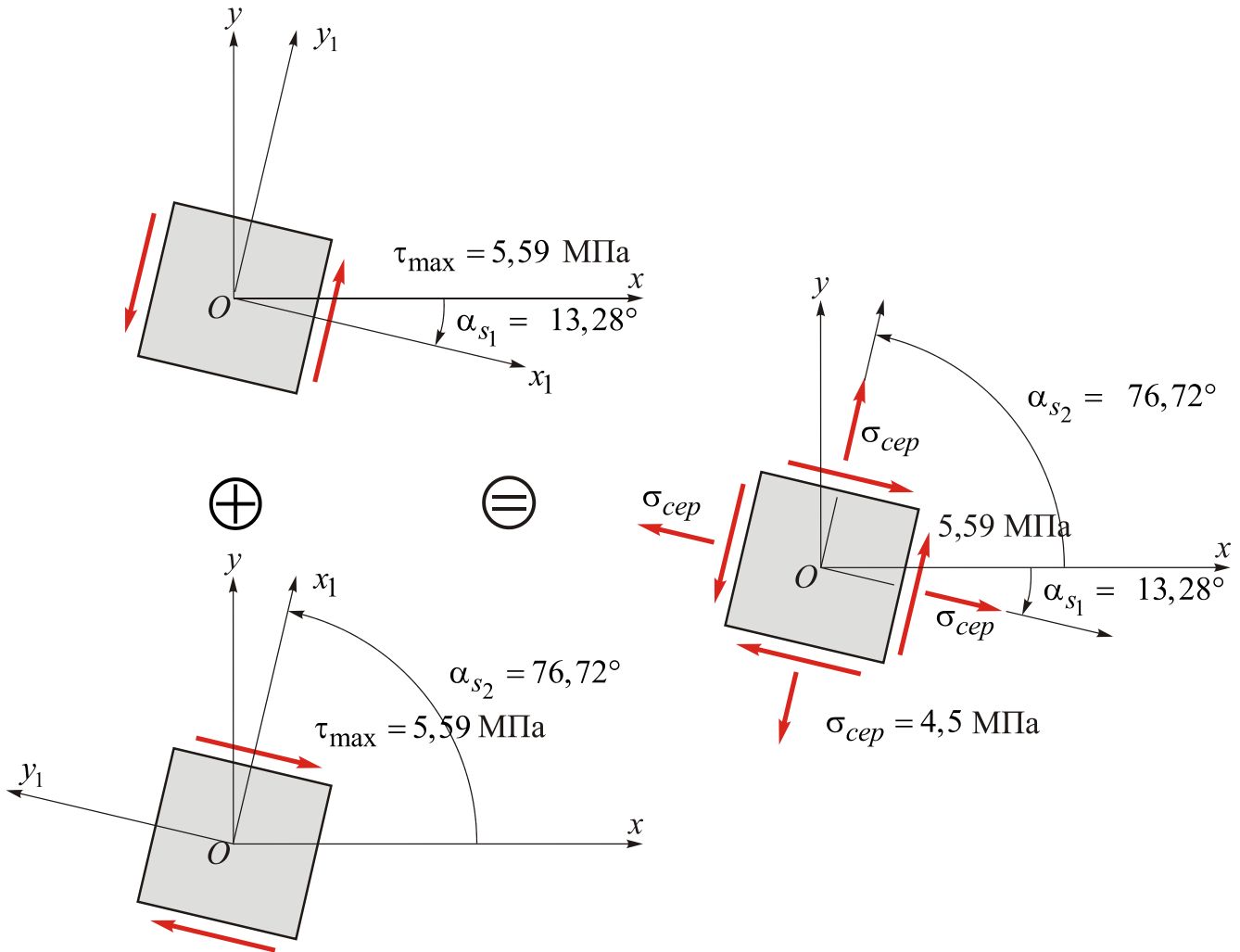
$$\alpha_{s_1} = \alpha_{0_1} - 45^\circ = 31,72^\circ - 45^\circ = -13,28^\circ.$$

Максимальне від'ємне дотичне напруження діє на площадці з кутом нахилу $\alpha_{s_2} = -13,28^\circ + 90^\circ = 76,72^\circ$. Нормальні напруження, що діють на площадках з максимальними дотичними напруженнями, обчислюємо за рівнянням (4.54):

$$\sigma_{\text{сер}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 4,5 \text{ МПа.}$$

РОЗДІЛ 4. ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

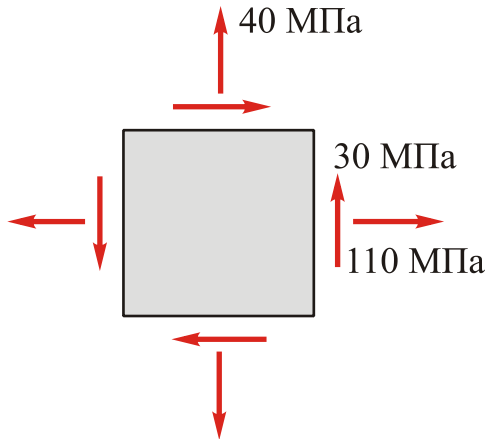
Елемент під дією максимальних дотичних напружень зображено на рис. 2 як суперпозиція додатних і від'ємних максимальних дотичних напружень, а також одночасно діючих середніх нормальних напружень.



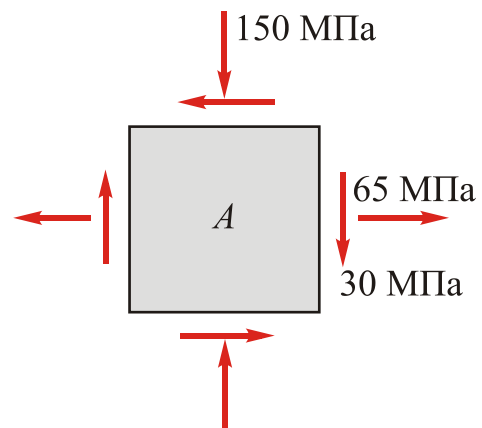
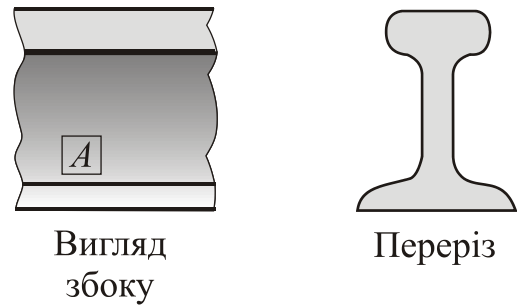
2 – элемент ДТТ под действием максимальных дотичных напружень (максимальное додатне відповідає куту α_{s_1} , а максимальное від'ємне – куту α_{s_2}), зображений з використанням принципу суперпозиції (на правому рисунку показано також одночасно діючі середні нормальні напруження)

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

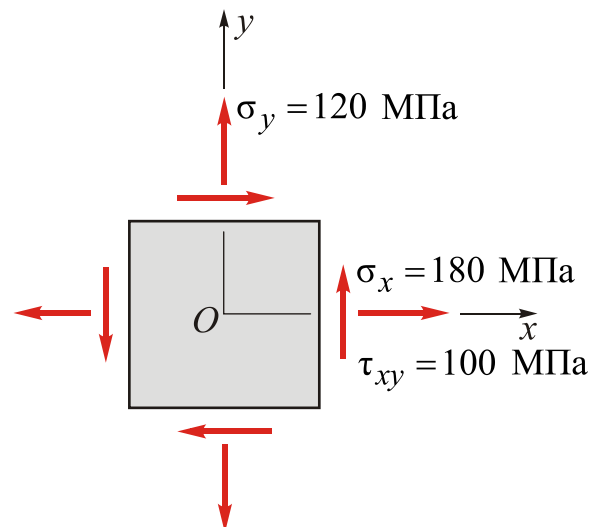
4.1. До елемента прикладені напруження $\sigma_x = 110$ МПа, $\sigma_y = 40$ МПа і $\tau_{xy} = 30$ МПа, як показано на рисунку. Визначити напруження на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = -30^\circ$ до осі x .



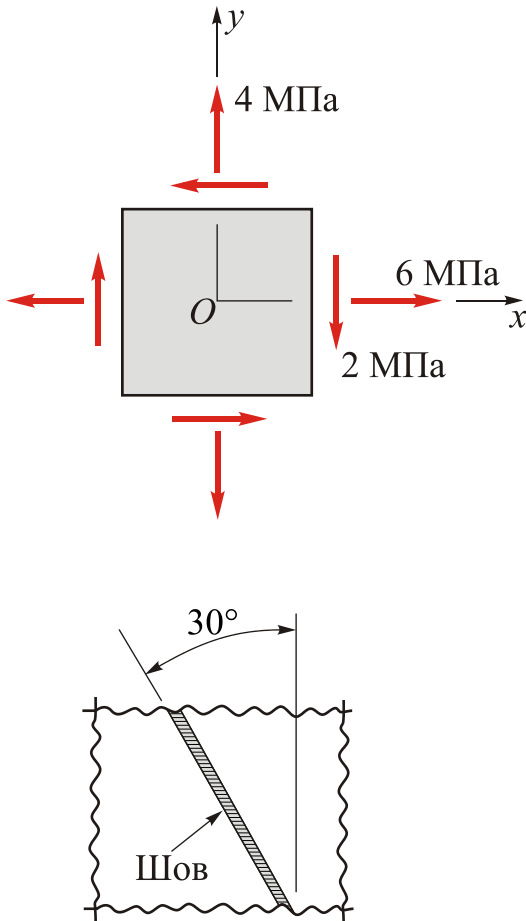
4.2. Напруження у точці A , викремленій у стінці рейки, дорівнюють 65 МПа (розтягання) у горизонтальному напрямку і 150 МПа (стискання) у вертикальному напрямку. Дотичні напруження дорівнюють 30 МПа і напрямлені, як показано на рисунку. Визначити напруження на гранях елемента, поверненого проти годинникової стрілки на кут 60° відносно горизонтальної осі.



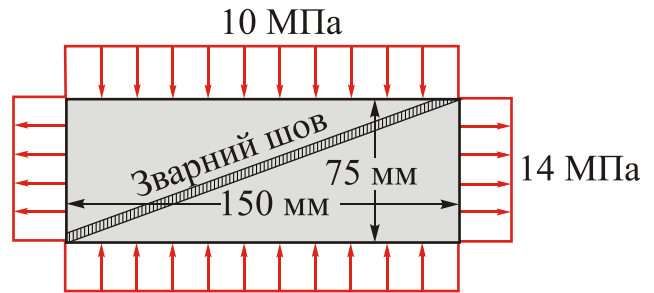
4.3. До елемента прикладені напруження $\sigma_x = 180$ МПа, $\sigma_y = 120$ МПа і $\tau_{xy} = 100$ МПа, як показано на рисунку. Визначити напруження на гранях елемента, поверненого на кут $\alpha = 60^\circ$ відносно осі x (обертання проти годинникової стрілки вважають додатним).



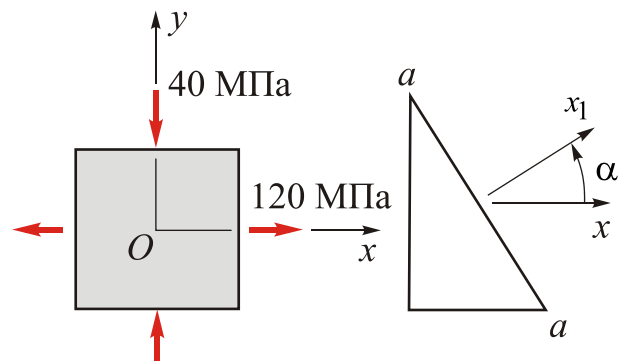
4.4. У точці бочки з поліетилену діють напруження $\sigma_x = 6$ МПа, $\sigma_y = 4$ МПа і $\tau_{xy} = -2$ МПа, як показано на рисунку. Визначити нормальні й дотичні напруження, що діють у перерізі спаювання, розташованому під кутом 30° до вертикалі.



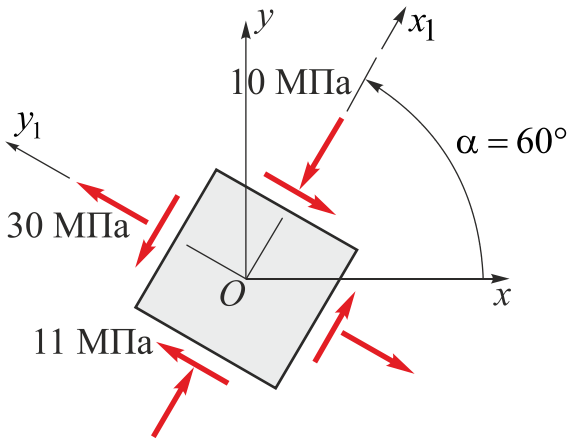
4.5. Тонку прямокутну плиту з розмірами 75×200 мм зварено з двох трикутних пластин. До плити прикладені стискальне напруження $3,0$ МПа в поздовжньому напрямку й розтягальне напруження $9,0$ МПа в поперечному напрямку. Визначити нормальне напруження σ_{36} , що діє перпендикулярно до лінії зварювання, а також дотичне напруження τ_{36} , що діє у зварному шві.



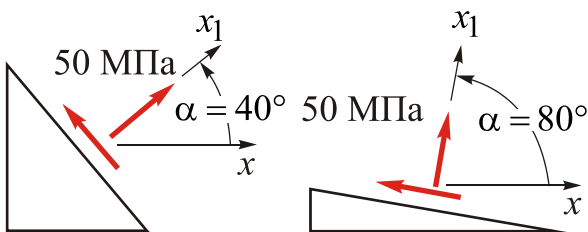
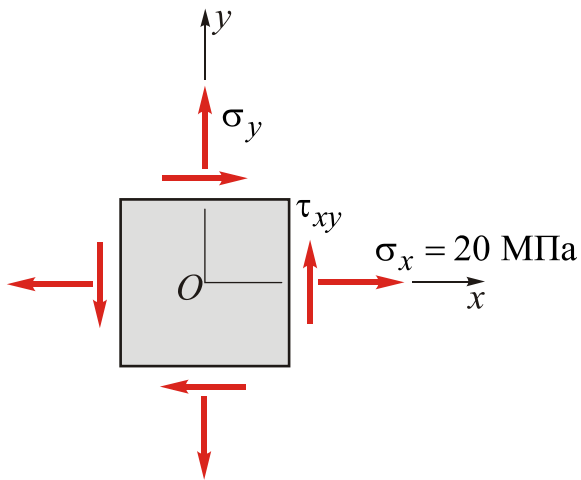
4.6. В одній із точок на поверхні конструктивного елемента матеріал перебуває в умовах двовісного напруженого стану з напруженнями $\sigma_x = 120$ МПа і $\sigma_y = -40$ МПа. Площадка $a-a$ проходить через ту саму точку, але нахилена до осі x під кутом α . Визначити всі значення кута α , при яких на площадці $a-a$ не буде нормальних напружень. Для кожного такого кута зобразити відповідний елемент і прикласти до нього діючі напруження.



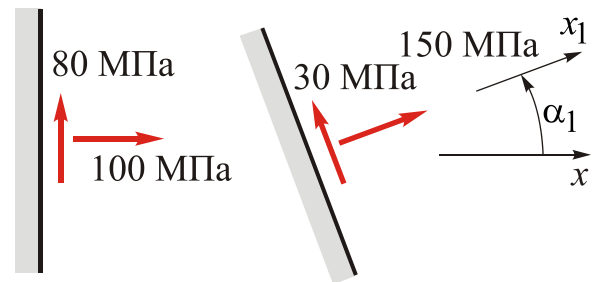
4.7. Елемент в умовах плоского напруженого стану нахилений під кутом $\alpha = 60^\circ$, а на його гранях діють напруження, як показано на рисунку. Визначити нормальні й дотичні напруження, що діють на елемент з гранями, паралельними до осей x і y , тобто визначити σ_x , σ_y і τ_{xy} .



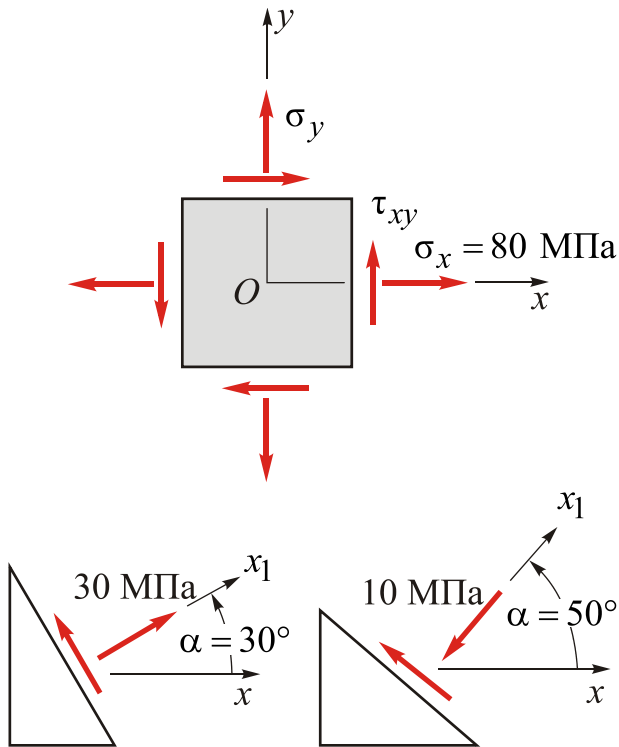
4.8. Тонка плита в умовах плоского напруженого стану перебуває під дією нормальних напружень σ_x і σ_y , а також дотичного напруження τ_{xy} . Під кутами 40° і 80° до осі x нормальне напруження дорівнює 50 МПа. Якщо напруження σ_x дорівнює 20 МПа, то які значення мають напруження σ_y і τ_{xy} ?



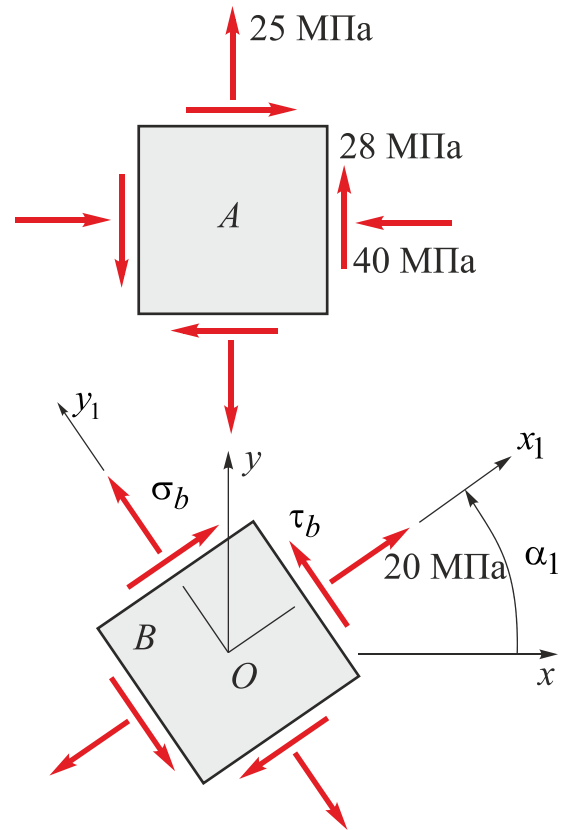
4.9. У заданій точці конструктивного елемента матеріал перебуває в умовах плоского напруженого стану, причому на вертикальній площадці, що проходить через точку, діють нормальні напруження 100 МПа (розтяг) і дотичні напруження 80 МПа. На площадці, розташованій під кутом α_1 , нормальне напруження дорівнює 150 МПа (розтяг), а дотичне – 30 МПа. Знайти кут α_1 .



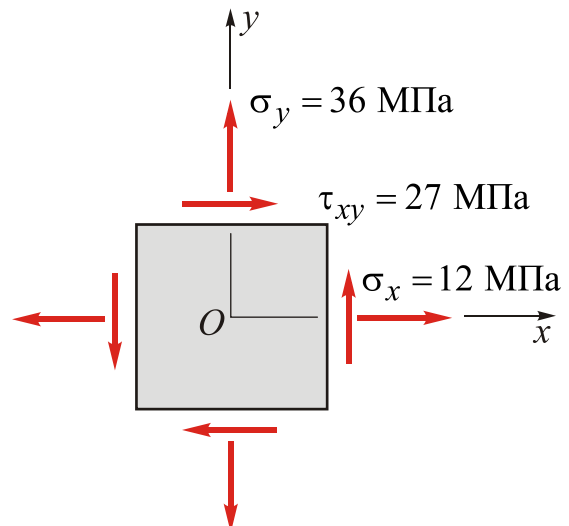
4.10. Елемент обшивки крила літака перебуває в умовах плоского напруженого стану з нормальними напруженнями σ_x і σ_y , а також з дотичним напруженням τ_{xy} . Під кутом $\alpha = 30^\circ$ до осі x нормальне напруження дорівнює 30 МПа (розтяг), а під кутом $\alpha = 50^\circ$ воно дорівнює 10 МПа. Якщо напруження σ_x дорівнює 80 МПа (розтяг), то якими є напруження σ_y і τ_{xy} ?



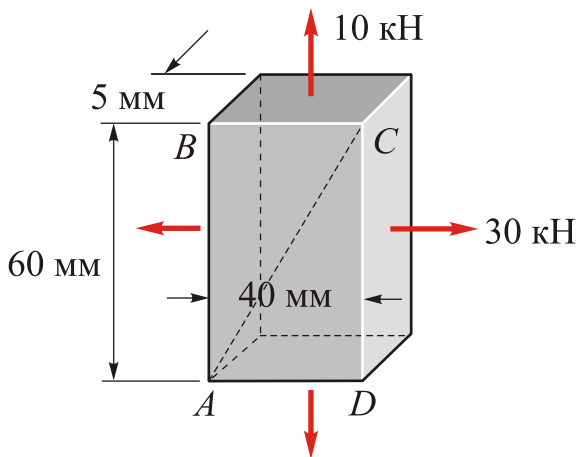
4.11. У точці конструктивного елемента, що перебуває в умовах плоского напруженого стану, виокремлено елемент *A*, на гранях якого діють напруження, показані на рисунку. Елемент *B*, виокремлений у тій самій точці, розташовується під кутом α_1 (від нуля до 90°). Обчислити нормальне напруження σ_b , дотичне напруження τ_b і кут α_1 .



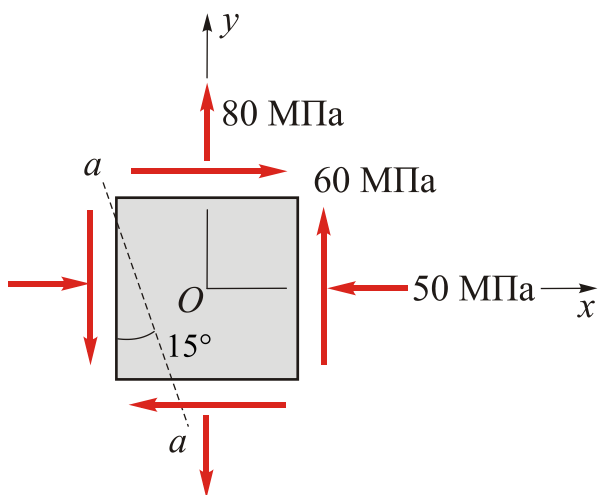
4.12. На поверхні крюка підйомного пристрою діють напруження $\sigma_x = 12 \text{ МПа}$, $\sigma_y = 36 \text{ МПа}$ і $\tau_{xy} = 27 \text{ МПа}$, як показано на рисунку. Для яких кутів α у діапазоні $0 \dots 90^\circ$ (проти годинникової стрілки) діючі нормальні напруження є вдвічі більшими, ніж дотичні? Зобразити кожен з таких елементів і прикласти до їх граней діючі напруження.



4.13. Плита з розмірами 60×40 мм і завтовшки 5 мм перебуває під дією однорідно розподілених сил. Які нормальні й дотичні напруження діють уздовж діагоналі AC ? Для розв'язання використати рівняння рівноваги частини плити ABC .

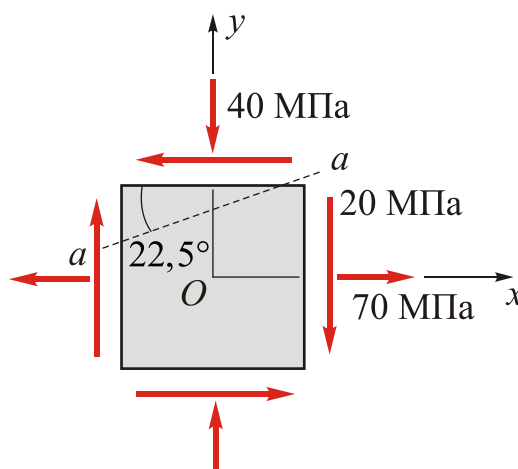


4.14. Напружений стан у точці тіла, що деформується, показано на рисунку. Визначити нормальні й дотичні напруження, що діють на вказаній похилій площадці. Використати для розв'язання умови рівноваги відокремленої частини елемента.

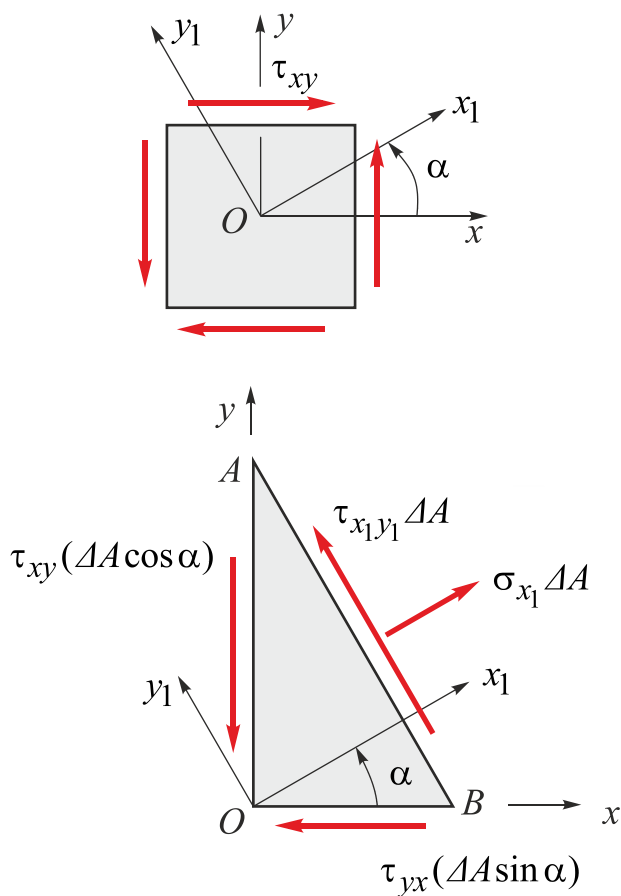


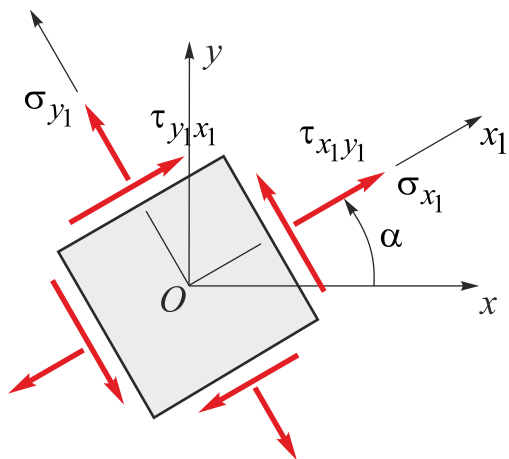
4.15. Напружений стан у точці конструктивного елемента показано на рисунку. Визначити нормальні й дотичні напруження, що діють на похилій

площині. Використати для розв'язання умови рівноваги відокремленої частини елемента.

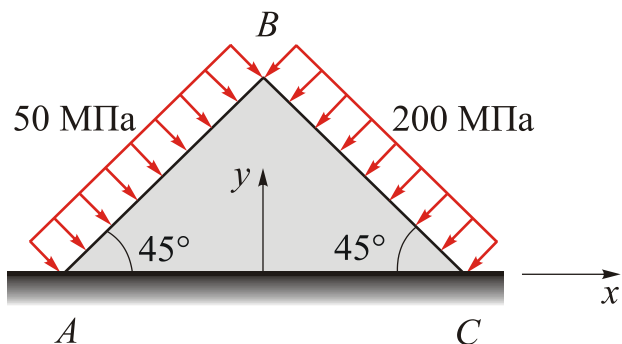


4.16. Напруження у точці ДТТ дорівнюють $\sigma_x = \sigma_y = 0$ і $\tau_{xy} = 100$ МПа (чистий зсув). Визначити напруження на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 25^\circ$.

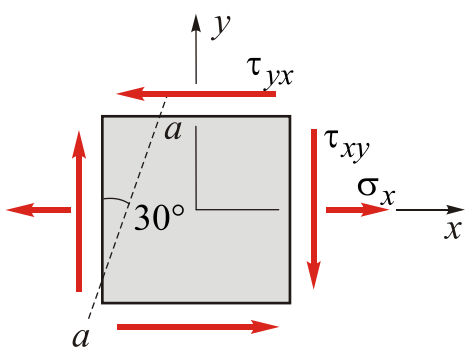




4.17. Трикутна плита перебуває під дією напружень, як показано на рисунку. Визначити σ_x , σ_y і τ_{xy} і прикласти їх до відповідного елемента.

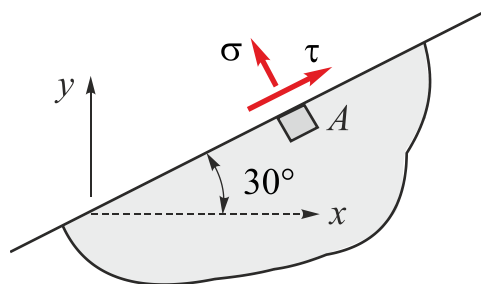


4.18. Обчислити нормальне й дотичне напруження, що діють на похилій площадці з нормаллю y_1 , якщо $\tau = 30$ МПа, а $\sigma = 40$ МПа.

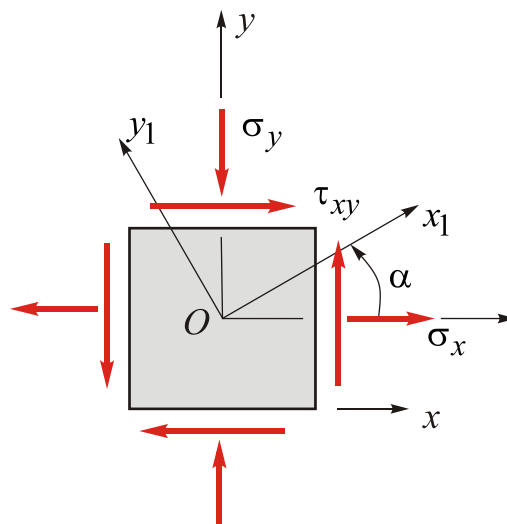


4.19. У небезпечній точці А конструктивного елемента на похилій площадці діють напруження $\sigma = 28$ МПа і $\tau = 12$ МПа. Нормальне напруження на площадці з нормаллю y дорівнює нулю. Обчислити нормальне й дотичне напруження на площадці з

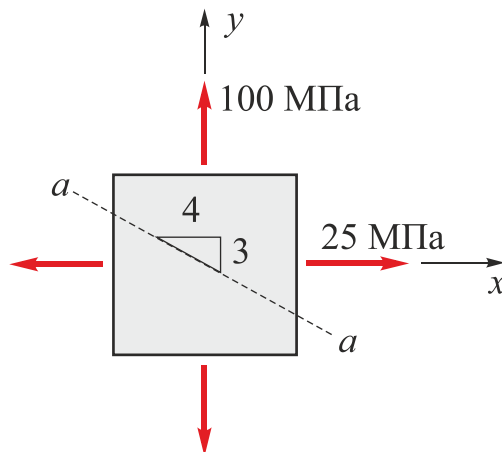
нормаллю x . Прикласти знайдені напруження до граней елемента.



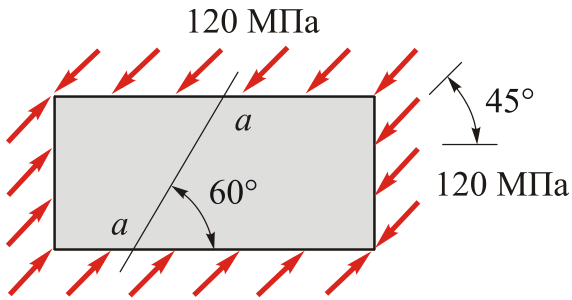
4.20. У заданій точці конструктивного елемента діють напруження $\sigma_x = 40$ МПа, $\sigma_y = -25$ МПа і $\tau_{xy} = 0$. Визначити нормальні й дотичні напруження на площадках з нормаллю під кутом -30° і 120° до осі x .



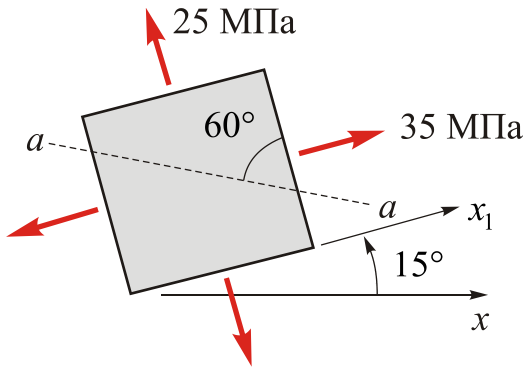
4.21. Напруження в точці акумулятора тиску прикладені до елемента, як показано на рисунку. Обчислити нормальне й дотичне напруження, що діють на вказаній похилій площадці.



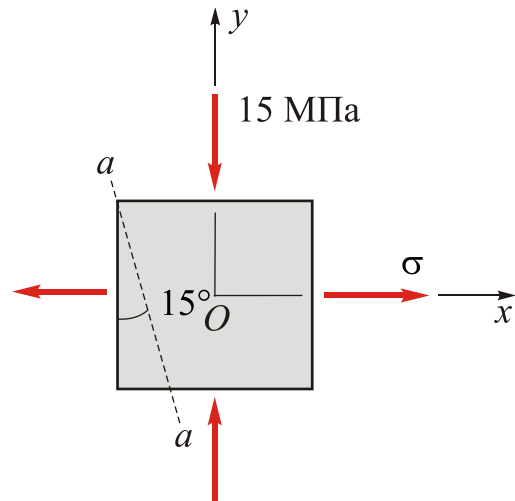
4.22. Напруження, рівномірно розподілені по гранях тонкої прямокутної плити, показано на рисунку. Визначити напруження на площадках, паралельних і перпендикулярних до лінії $a-a$.



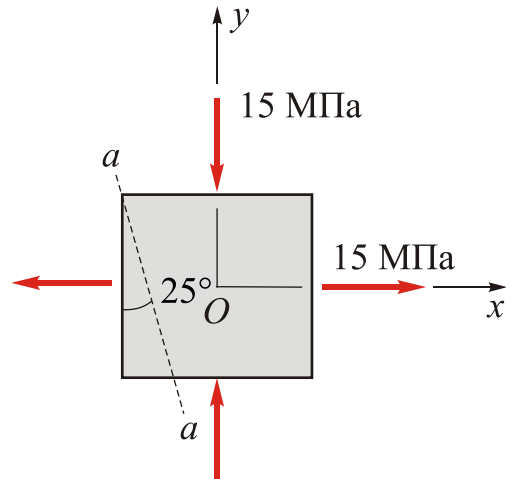
4.23. Напружений стан у точці показано на рисунку. Обчислити нормальні й дотичні напруження, що діють на вказаній похилій площадці.



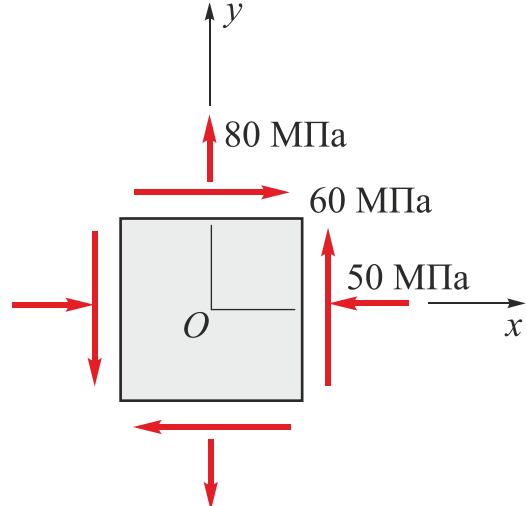
4.24. У точці конструктивного елемента діють напруження, як показано на рисунку. Обчислити допустиме значення напруження σ , якщо нормальне й дотичне напруження, що діють на вказаній похилій площадці, обмежені величинами 35 і 20 МПа відповідно.



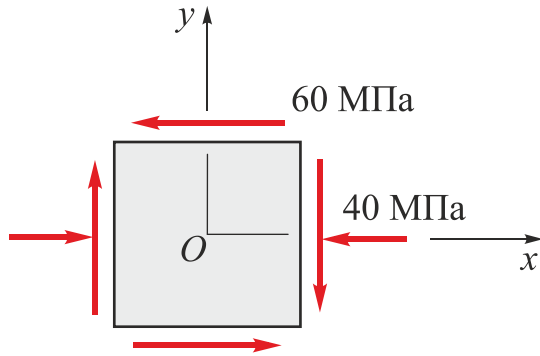
4.25. Обчислити нормальне й дотичне напруження, що діють на похилій площадці, якщо $\sigma_x = 15$ МПа і $\sigma_y = -15$ МПа.



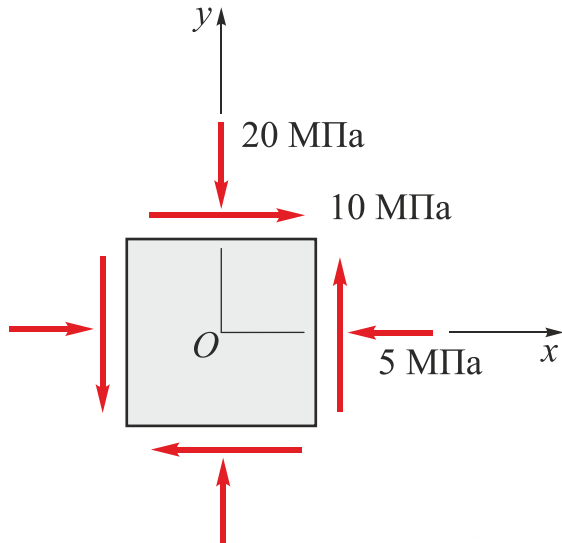
4.26. Для напруженого стану, зображеного на рисунку, обчислити головні напруження й визначити положення головних площадок.



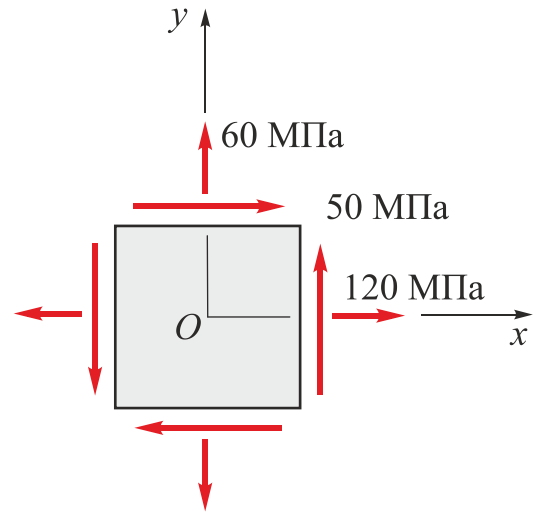
4.27. Напружений стан у точці конструктивного елемента показано на рисунку. Обчислити головні напруження, максимальні дотичні напруження, а також нормальні напруження, що їм відповідають.



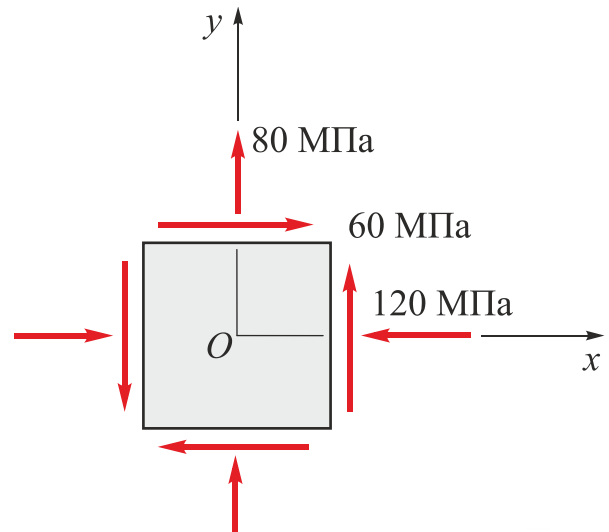
4.28. Напружений стан у точці зображено на рисунку. Обчислити головні напруження, максимальні дотичні напруження, а також нормальні напруження, що їм відповідають.



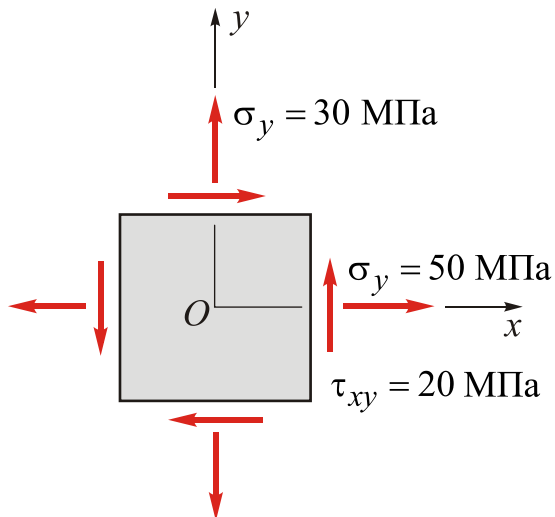
4.29. Напружений стан у точці показано на рисунку. Обчислити головні напруження, максимальні дотичні напруження, а також нормальні напруження, що їм відповідають.



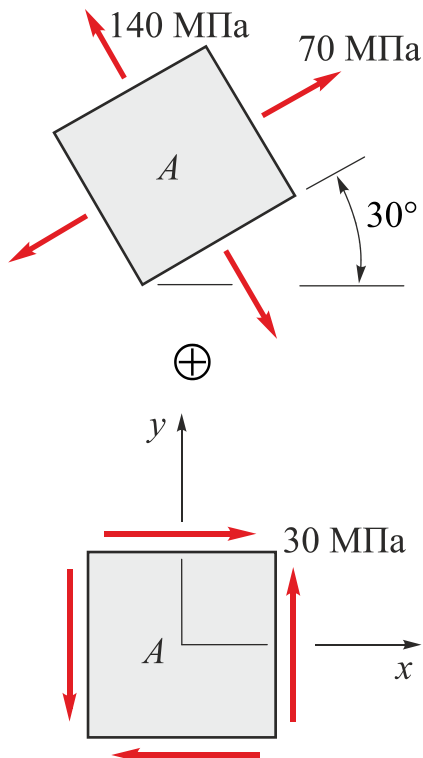
4.30. Напруження в точці конструктивного елемента зображено на рисунку. Обчислити головні напруження, максимальні дотичні напруження, а також нормальні напруження, що їм відповідають.



4.31. Елемент в умовах плоского напруженого стану перебуває під дією напружень $\sigma_x = 50$ МПа, $\sigma_y = 30$ МПа і $\tau_{xy} = 20$ МПа. Обчислити головні напруження в точці.

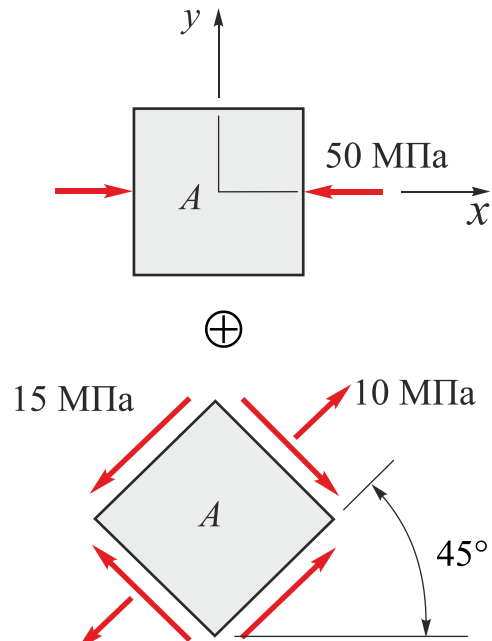


4.32. Конструктивний елемент зазнає дії двох зовнішніх навантажень, кожне з яких призводить до появи напружень у точці A , як показано на рисунку. Обчислити й зобразити на рисунку головні площадки й головні напруження, спричинені спільною дією обох навантажень.

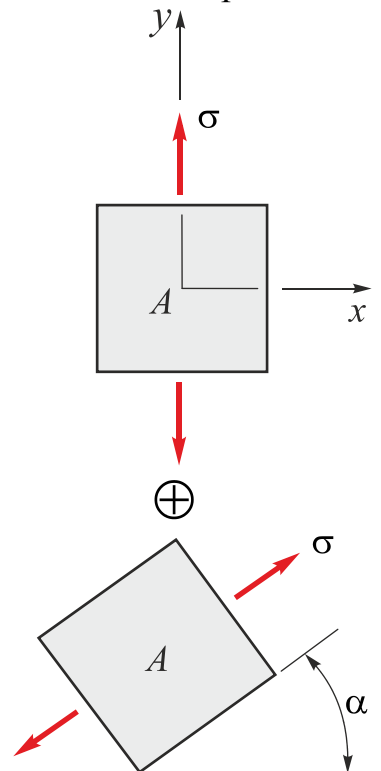


4.33. Конструктивний елемент перебуває під дією двох зовнішніх навантажень, кожне з яких призводить до появи напружень у точці A , як показано на рисунку. Визначити й зобразити на рисунку головні площадки й головні

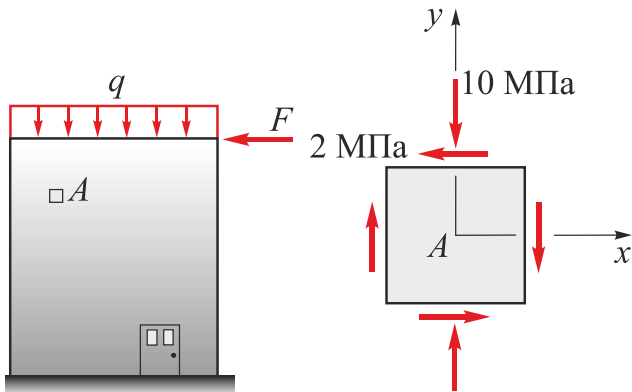
напруження, спричинені спільною дією обох навантажень.



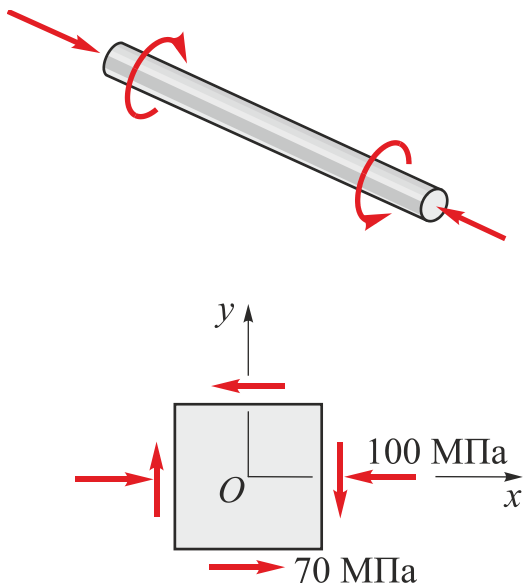
4.34. Конструктивний елемент зазнає дії двох зовнішніх навантажень, кожне з яких призводить до появи напружень у точці A , як показано на рисунку. Обчислити й зобразити на рисунку головні площадки й головні напруження, спричинені спільною дією обох навантажень, якщо σ і α відомі за величиною і напрямком.



4.35. Підпірна стінка з бетону навантажена вертикальним рівномірно розподіленим навантаженням q і горизонтальною силою F . Напруження у точці A на поверхні стінки показано на рисунку. Визначити: головні напруження в точці, максимальні дотичні напруження й нормальні напруження, що їм відповідають.

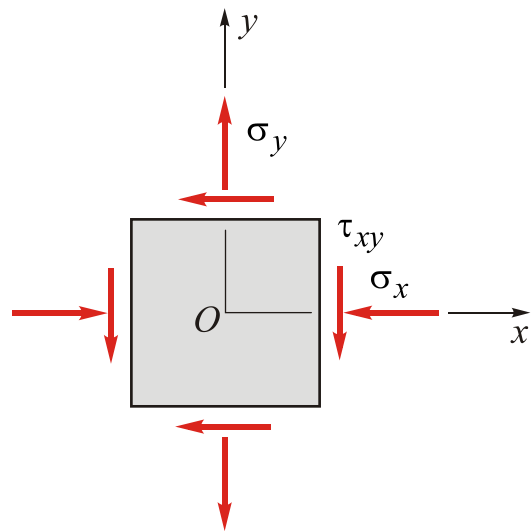


4.36. Вал двигуна зазнає спільної дії кручення й осевого стискання. Вал має витримувати дотичні 70 МПа і нормальні 100 МПа напруження. Обчислити головні напруження, максимальні дотичні напруження і нормальні напруження, що їм відповідають.

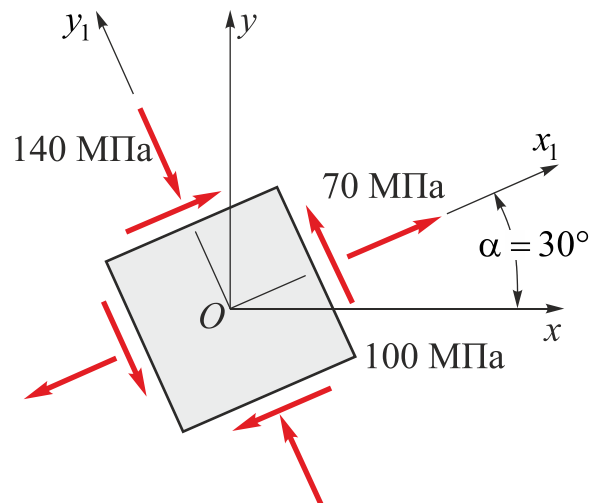


4.37. Елемент перебуває під дією напружень $\sigma_x = -80$ МПа,

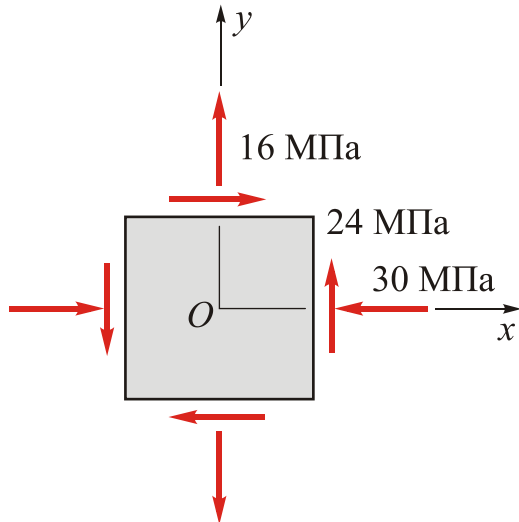
$\sigma_y = 130$ МПа і $\tau_{xy} = -35$ МПа. Визначити головні напруження й положення головних площадок, максимальні дотичні напруження й відповідні нормальні напруження, а також показати елемент, до якого вони прикладені.



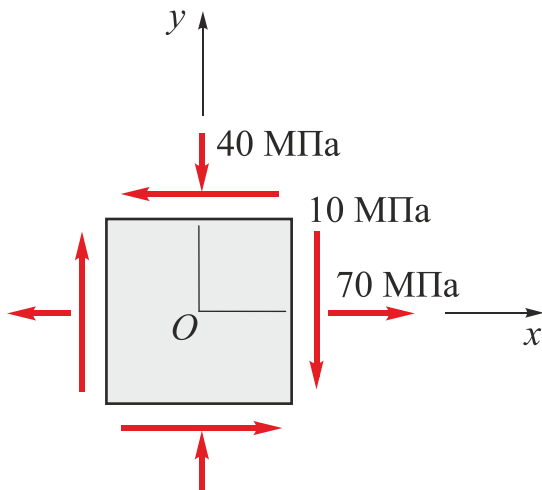
4.38. На гранях елемента, виокремленого на поверхні конструкції та поверненого на кут $\alpha = 30^\circ$ відносно осі x , діють напруження, як показано на рисунку. Визначити головні напруження й положення головних площадок, максимальні дотичні напруження й відповідні нормальні напруження. Показати елемент, до якого вони прикладені.



4.39. Елемент зазнає дії напружень $\sigma_x = -30$ МПа, $\sigma_y = 16$ МПа і $\tau_{xy} = 24$ МПа. Визначити головні напруження й положення головних площадок, максимальні дотичні напруження й відповідні нормальні напруження. Прикласти знайдені напруження до граней елемента.

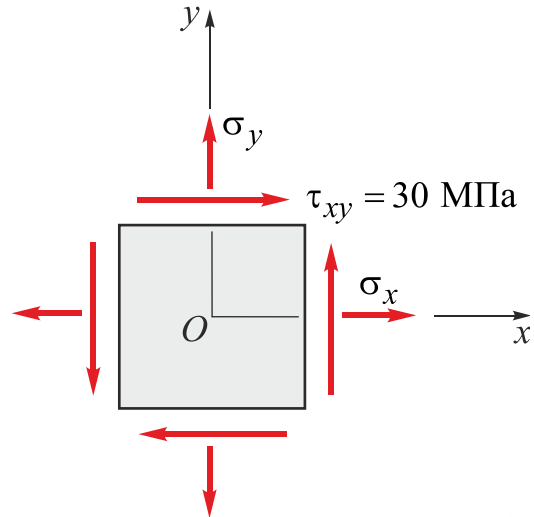


4.40. Обчислити найбільші дотичні напруження й відповідні нормальні напруження для напруженого стану, зображеного на рисунку.

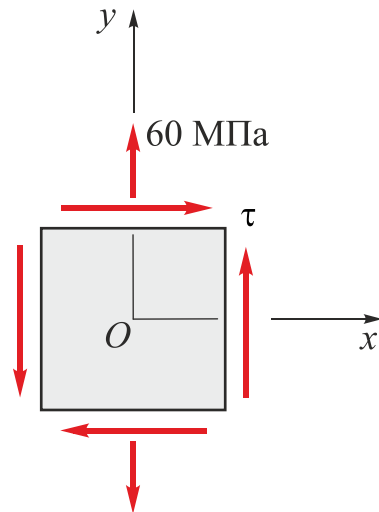


4.41. Дотичні напруження на гранях показаного елемента $\tau_{xy} = 30$ МПа. Головні напруження в цій же точці $\sigma_1 = 35$ МПа і

$\sigma_3 = -55$ МПа. Визначити σ_x і σ_y та показати головні й максимальні дотичні напруження, прикладені до елемента.

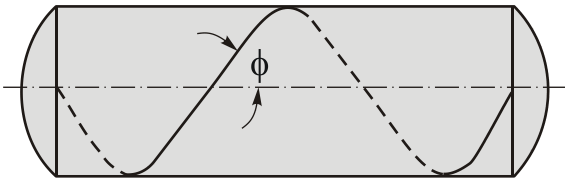


4.42. Напружений стан у точці показано на рисунку. Обчислити дотичні напруження τ , якщо найбільші дотичні напруження не повинні перевищувати 70 МПа.

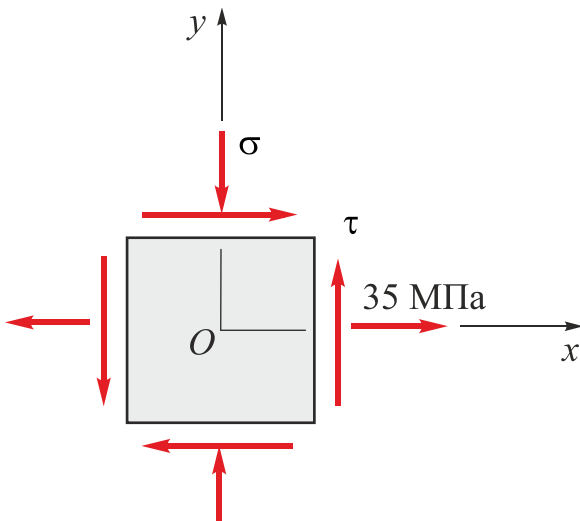


4.43. Циліндричний акумулятор тиску виготовлено навиванням стрічки на циліндричну оправку з подальшим зварюванням. Допустиме напруження на розтяг матеріалу зварного шва – 80 % від відповідної величини для сталі. Обчислити максимальну величину кута навивання φ , якщо міцність

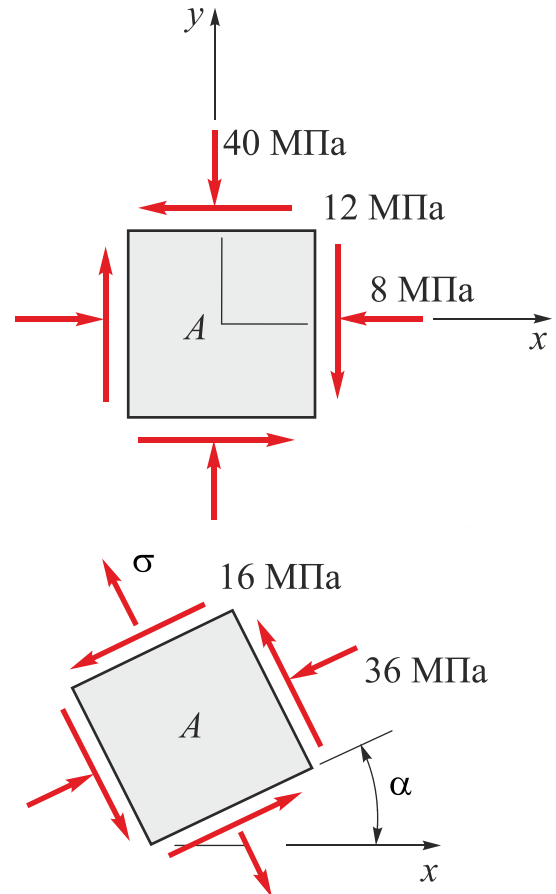
сталі на розтяг обмежена заданою величиною. Під час розв'язання колове напруження визначити за формулою $\sigma_c = pr/t$ (p – тиск, r – радіус, t – товщина), а осьове напруження – за формулою $\sigma_a = pr/2t$.



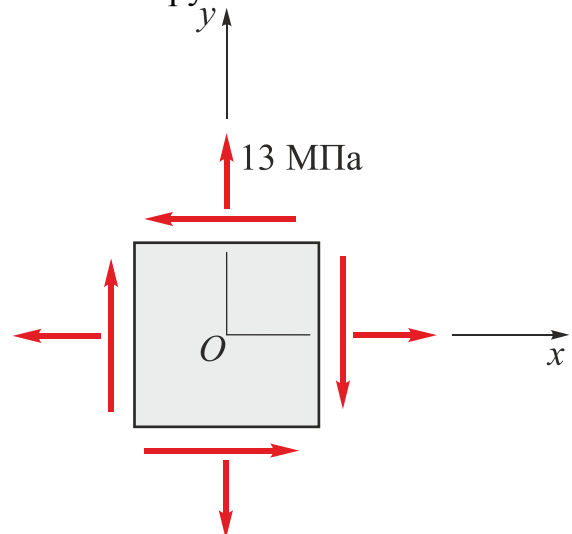
4.44. Напружений стан у точці, як впливає з рисунка, відомий неповністю. Проте відомо, що в цій точці $\sigma_3 = -50$ МПа і $\tau_{\max} = 55$ МПа. Визначити напруження σ , τ і σ_1 .



4.45. Напружений стан у точці A зображено на рисунку. Обчислити нормальне напруження σ і кут α .

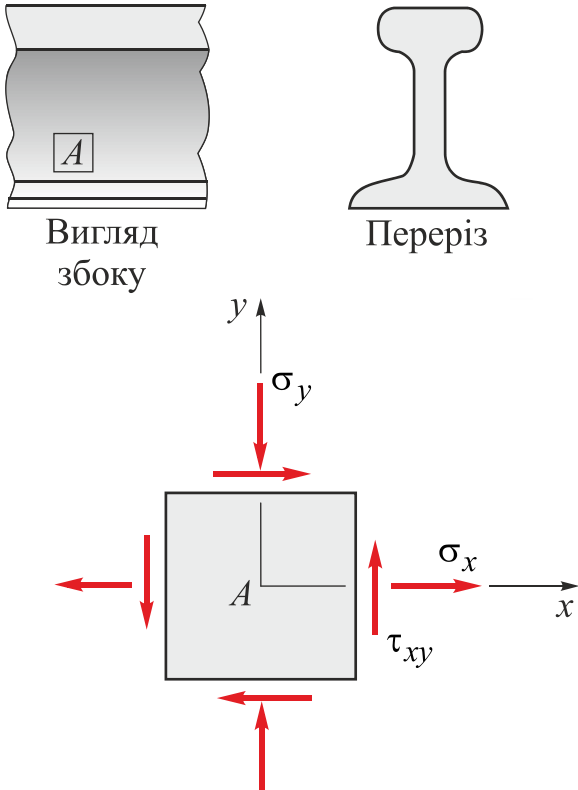


4.46. У точці конструкції нормальне напруження $\sigma_y = 13$ МПа діє одночасно з дотичними напруженнями. Одне з головних напружень у точці дорівнює 7 МПа (розтяг), а максимальні дотичні напруження дорівнюють -35 МПа. Обчислити невідомі напруження на гранях елемента і невідоме головне напруження.

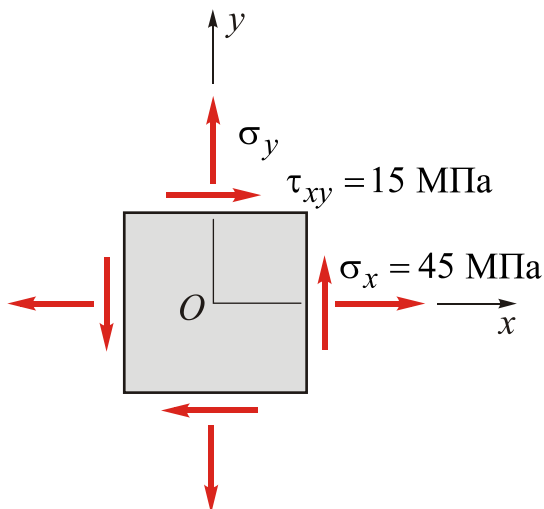


4.47. Елемент в умовах плоского

напруженого стану зазнає дії напружень $\sigma_x = 65$ МПа, $\sigma_y = -150$ МПа і $\tau_{xy} = 35$ МПа. Визначити максимальні дотичні напруження і нормальні напруження, що їм відповідають.

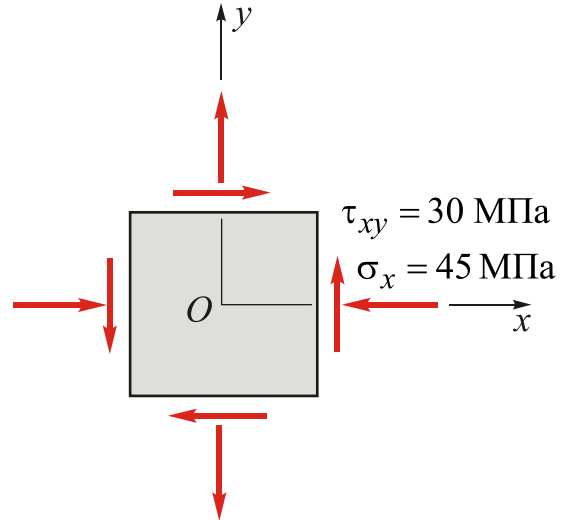


4.48. У точці поверхні крила діють напруження $\sigma_x = 45$ МПа і $\tau_{xy} = 15$ МПа. Визначити допустимий діапазон величин напруження σ_y , якщо максимальні дотичні напруження обмежено величиною $[\tau] = 20$ МПа.

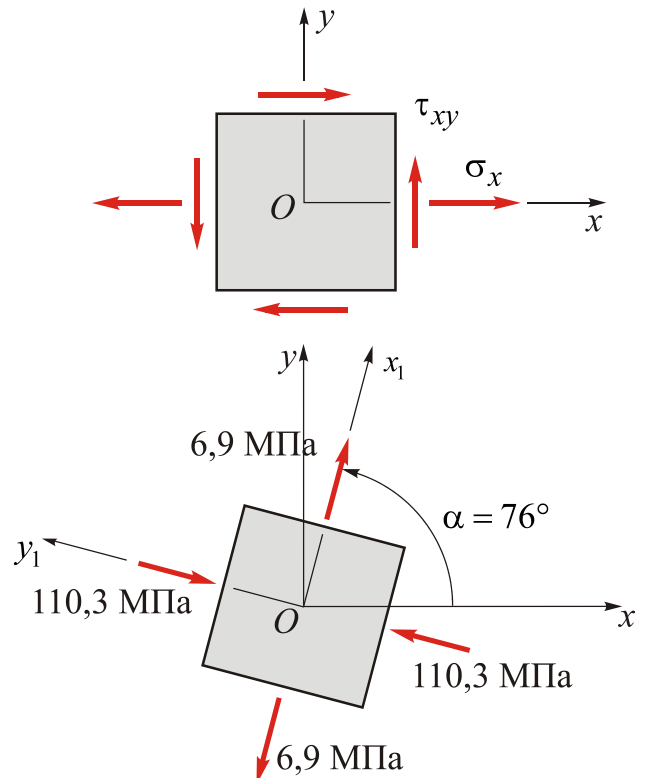


4.49. У точці поверхні конструк-

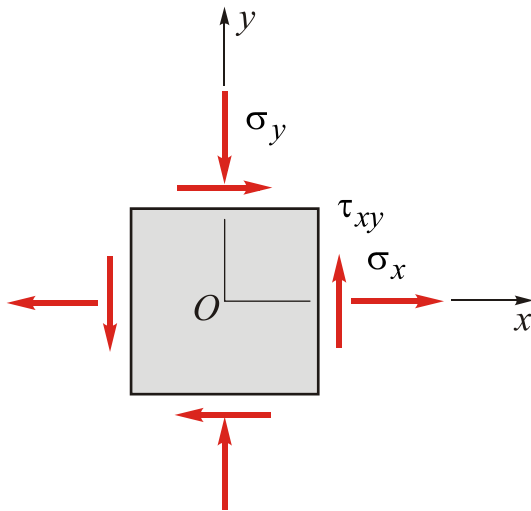
тивного елемента діють напруження $\sigma_x = -45$ МПа і $\tau_{xy} = 30$ МПа. Визначити допустимий діапазон величин напруження σ_y , якщо максимальні дотичні напруження обмежено величиною $[\tau] = 25$ МПа.



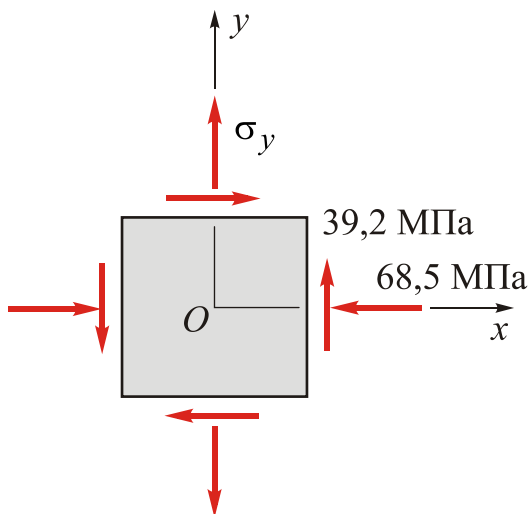
4.50. У точці стінки сталеві балки діють напруження σ_x і τ_{xy} (див. рисунок). У цій же точці головні напруження 6,9 МПа (розтяг) і 110,3 МПа (стиск) діють під кутом $\alpha = 76^\circ$. Визначити напруження σ_x і τ_{xy} .



4.51. Елемент в умовах плоского напруженого стану зазнає дії напружень $\sigma_x = 45$ МПа, $\sigma_y = -185$ МПа і $\tau_{xy} = 55$ МПа. Визначити головні напруження, максимальні дотичні напруження і відповідні нормальні напруження.



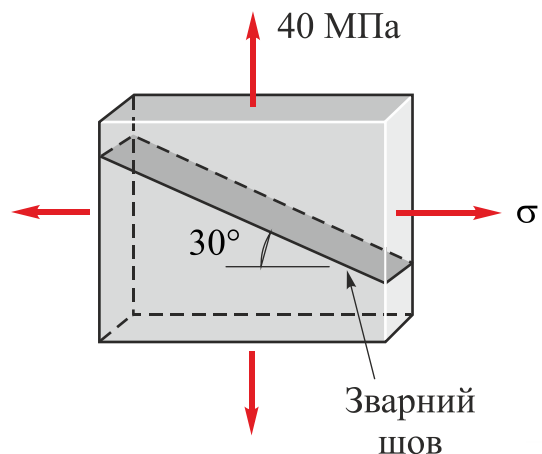
4.52. Елемент в умовах плоского напруженого стану зазнає дії напружень $\sigma_x = -68,5$ МПа і $\tau_{xy} = 39,2$ МПа. Відомо, що одне з головних напружень дорівнює 26,1 МПа. Визначити напруження σ_y , друге головне напруження й положення головних площадок. Прикласти головні напруження до елемента.



4.53. Обчислити напруження на площадках з максимальними дотичними напруженнями, якщо в цій точці діють такі головні напруження:
 1) $\sigma = 60$ МПа і $\sigma = 20$ МПа;
 2) $\sigma = 30$ МПа і $\sigma = -7$ МПа;
 3) $\sigma = -10$ МПа і $\sigma = -30$ МПа.

4.54. Циліндричний бак з товщиною стінки 10 мм навантажений внутрішнім тиском 6 МПа. Обчислити максимальний діаметр бака, якщо максимальні дотичні напруження в ньому обмежено величиною 30 МПа. Для такого бака визначити граничне значення розтягальних напружень. Відомо, що колове напруження обчислюють за формулою $\sigma_c = pr / t$ (p – тиск, r – радіус, t – товщина), а осьове – за формулою $\sigma_a = pr / 2t$.

4.55. Плита, що складається з двох частин, з'єднаних зварюванням, перебуває в умовах однорідного двовісного розтягання. Обчислити максимальне напруження σ , якщо для зварного шва є відомими допустиме напруження зсуву 25 МПа й допустиме нормальне напруження 60 МПа.



4.5. Графічне розв'язування задач плоского напруженого стану. Круги Мора

Отримані раніше рівняння зв'язку напружень при повороті осей (4.8)–(4.10) можна подати в графічній формі. Графічним зображенням, виконаним у масштабі, можна скористатися для обчислення напружень на похилих площадках, головних напружень, а також максимальних дотичних напружень. Графічний метод запропонував німецький інженер Отто Крістіан Мора (Christian Otto Mohr (1835–1918)), який 1882 року вперше побудував графік, названий **кругом Мора**. Цей графік придатний для дослідження не лише напруженого, але й деформованого стану, а також моментів інерції плоских фігур.

Рівняння кола, яке обмежує круг Мора, можна вивести з рівнянь зв'язку напружень при повороті осей плоского напруженого стану (4.8), (4.9). Для цього запишемо їх у такому вигляді:

$$\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (4.55)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (4.56)$$

Піднесемо обидва рівняння до другого степеня і складемо їх. Унаслідок цього отримаємо відоме рівняння круга:

$$\left(\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (4.57)$$

У простішій формі його можна переписати, зважаючи на те, що

$$\sigma_{сер} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad (4.58)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.59)$$

Тоді (4.57) набере вигляду загальновідомого рівняння кола:

$$(\sigma_{x_1} - \sigma_{сер})^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = R^2. \quad (4.60)$$

У координатах σ_{x_1} і $\tau_{x_1 y_1}$ це коло має радіус R , а його центр – координати $\sigma_{x_1} = \sigma_{сер}$ і $\tau_{x_1 y_1} = 0$. Воно обмежує круг, названий на ім'я Мора.

Подамо круг Мора графічно, відкладаючи додатні нормальні напруження σ_{x_1} управо, а додатні дотичні напруження $\tau_{x_1 y_1}$ – униз, як показано на рис. 4.12. У такому зображенні круга Мора кут 2α буде додатним, якщо його відкладати проти годинникової стрілки, що збігається з додатним напрямком 2α , узятим при виведенні рівнянь зв'язку напружень при повороті осей.

При побудові круга Мора припустимо, що напруження на x - і y -гранях відомі, тобто відомі σ_x , σ_y і τ_{xy} (рис. 4.13, *a*). Завдання полягає в знаходженні напружень на гранях похилого елемента, тобто величин σ_{x_1} , σ_{y_1} і $\tau_{x_1y_1}$ (рис. 4.13, *б*). Необхідно також отримати можливість визначати максимальні нормальні й дотичні напруження, які конче необхідні для подальших розрахунків на міцність.

Порядок побудови круга Мора є таким (рис. 4.13, *в*):

1. Створюємо систему координат: додатна абсциса σ_{x_1} напрямлена вправо, а додатна ордината $\tau_{x_1y_1}$ – униз.

2. Визначаємо центр круга Мора з координатами $\sigma_{x_1} = \sigma_{сер}$ і $\tau_{x_1y_1} = 0$ (див. (4.58) і (4.60)).

3. Установлюємо положення точки A , що описує напруження на x -площині елемента, показаного на рис. 4.13, *a*: горизонтальна координата на рис. 4.13, *a* відповідає напруженню $\sigma_{x_1} = \sigma_x$, вертикальна – напруженням $\tau_{x_1y_1} = \tau_{xy}$. Як впливає з попереднього аналітичного розв’язання, точці A відповідає кут $\alpha = 0$. На рис. 4.13, *a* x -площадку елемента позначено буквою « A », щоб показати її відповідність точці A на крузі Мора.

4. Установлюємо положення точки B , що описує напруження на y -площині елемента, зображеного на рис. 4.13, *a* (горизонтальна координата $\sigma_{x_1} = \sigma_y$ і $\tau_{x_1y_1} = -\tau_{xy}$). Точка B відповідає куту $\alpha = 90^\circ$ або $2\alpha = 180^\circ$, а y -площадку елемента на рис. 4.13, *a* позначено буквою « B », щоб показати її відповідність точці B на крузі Мора.

5. З’єднуємо точки A і B діаметром круга Мора, що проходить через точку C . Отже, точки A і B , що визначають напруження на взаємно перпендикулярних початкових площадках, лежать на діаметрі круга Мора.

6. Використовуючи точку C як центр, проводимо круг Мора через точки A і B . Такий круг матиме радіус R (див. рівняння (4.59)).

Якщо круг Мора побудувати в масштабі, то координати всіх його точок відповідатимуть аналітично визначеним напруженням. З використанням круга Мора можна з інженерною точністю розв’язати всі розглянуті вище задачі плоского напруженого стану.

1. *Напруження на похилих площадках (площадках довільної орієнтації)*. Напруження на площадці, розташованій під кутом α (див. рис. 4.13, *б*), позначено на крузі точкою, кутове положення якої відносно початкової точки A визначається

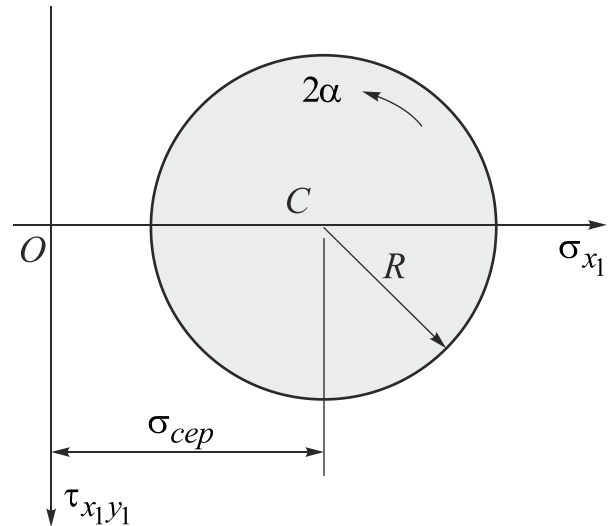


Рис. 4.12. Правила знаків, що використовуються при побудові круга Мора: додатні $\tau_{x_1y_1}$ напрямлені вниз, а додатний кут 2α відкладено проти годинникової стрілки

РОЗДІЛ 4. ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

кутом 2α . Таким чином, якщо обертаємо систему осей x_1Oy_1 проти годинникової стрілки на кут α (див. рис. 4.13, б), то точка, що відповідає площадці x_1 , рухається по колу Мора проти годинникової стрілки на кут 2α до положення D з напруженнями на площадці з нормаллю під кутом α (позначена буквою « D » на рис. 4.13, б). Точка D' , діаметрально протилежна до точки D , описує напруження на площадці з нормаллю під кутом $90^\circ + \alpha$ (позначена буквою « D' » на рис. 4.13, б). Її координатами є напруження σ_{y_1} і $-\tau_{x_1y_1}$.

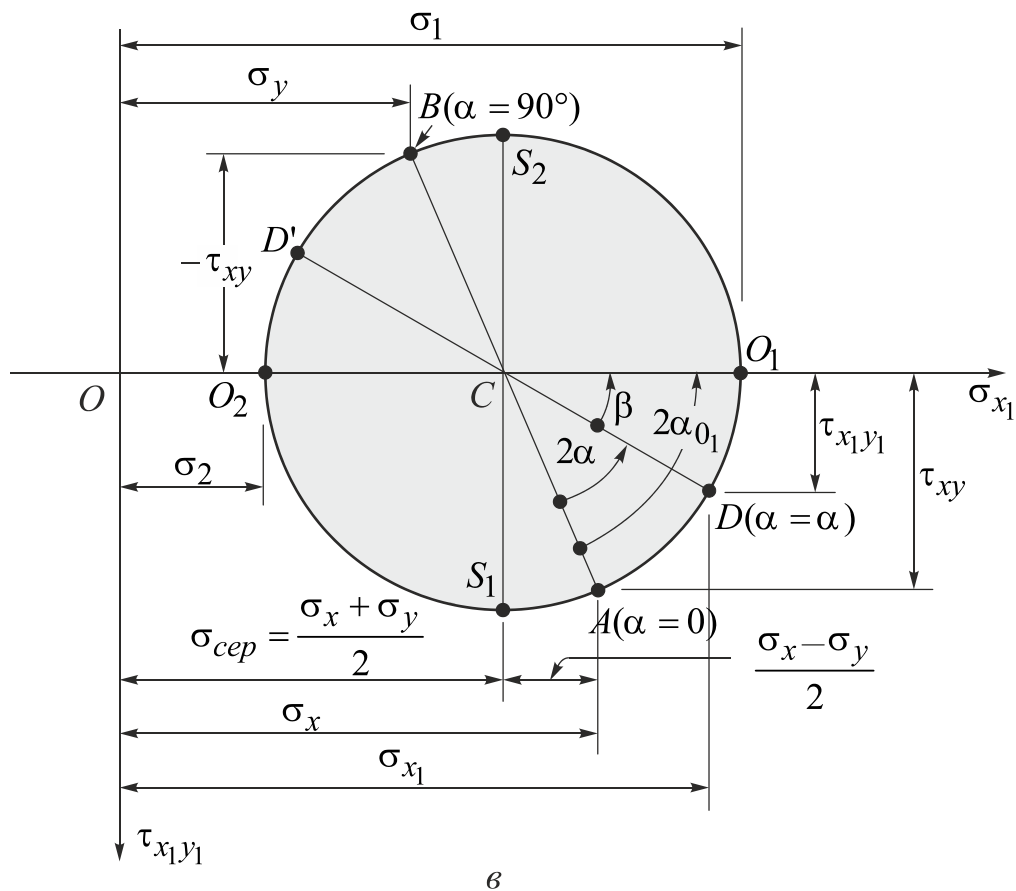
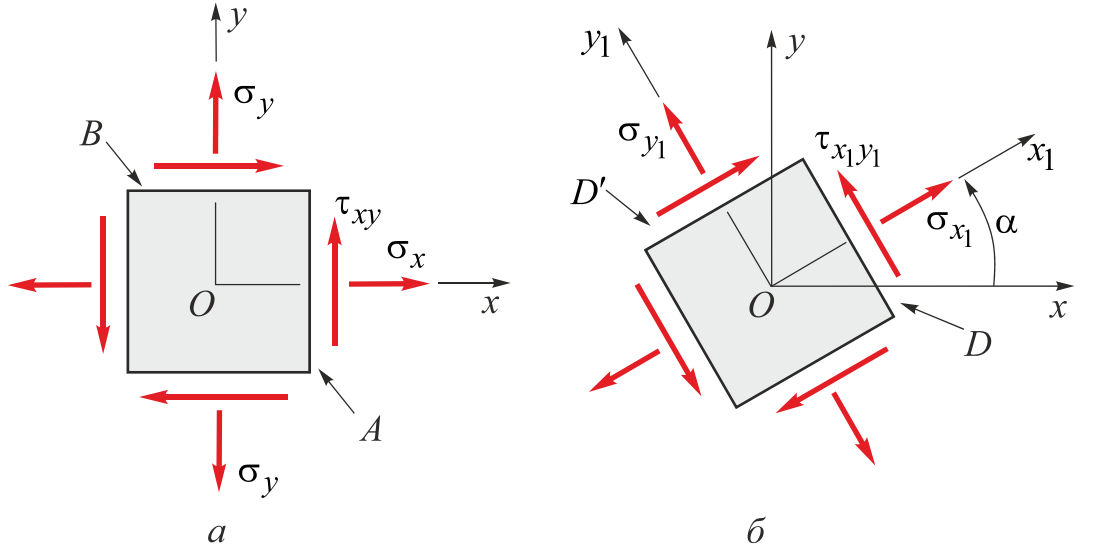


Рис. 4.13. Побудова кола Мора для плоского напруженого стану

2. *Головні напруження.* Визначення головних напружень є найбільш простим і практично значущим застосуванням круга Мора. Якщо рухаємося по колу Мора (див. рис. 4.13, в), то неминуче приходимо в точку O_1 , у якій нормальне напруження дорівнює нулю. Таким чином, точка O_1 дає алгебрично більше головне напруження, а її кут $2\alpha_{O_1}$ відносно початкової точки A ($\alpha = 0$) визначає положення головної площадки з алгебрично більшим головним напруженням. Наступна головна площадка, що відповідає алгебрично меншому головному напруженню, позначена точкою O_2 , діаметрально протилежною до точки O_1 .

3. *Максимальні дотичні напруження.* З рис. 4.13, в випливає, що точки S_1 і S_2 , які лежать на діаметрі круга Мора, визначають найбільші додатне й від'ємне дотичні напруження. Вони розташовані під кутом $2\alpha = 90^\circ$ до точок найбільших нормальних напружень O_1 і O_2 , що відповідає раніше зробленому висновку про те, що площадки максимальних дотичних напружень розташовані під кутом 45° до головних площадок. Найбільші дотичні напруження чисельно дорівнюють радіусу круга R . На площадках дії максимально дотичних напружень нормальні напруження відповідають абсцисі точки C , тобто середньому нормальному напруженню $\sigma_{сер}$.

Запропоновану методику можна застосувати до будь-якого плоского напруженого стану. На рис. 4.14 показано деякі приклади побудови кругів Мора для різних характерних напружених станів. У разі тривісного (об'ємного) напруженого стану (рис. 4.14, а) круг Мора будується для кожної проекції тривимірного елемента (рис. 4.14, б). Три круга Мора в цьому випадку зображують цей тривісний напружений стан (рис. 4.14, в).

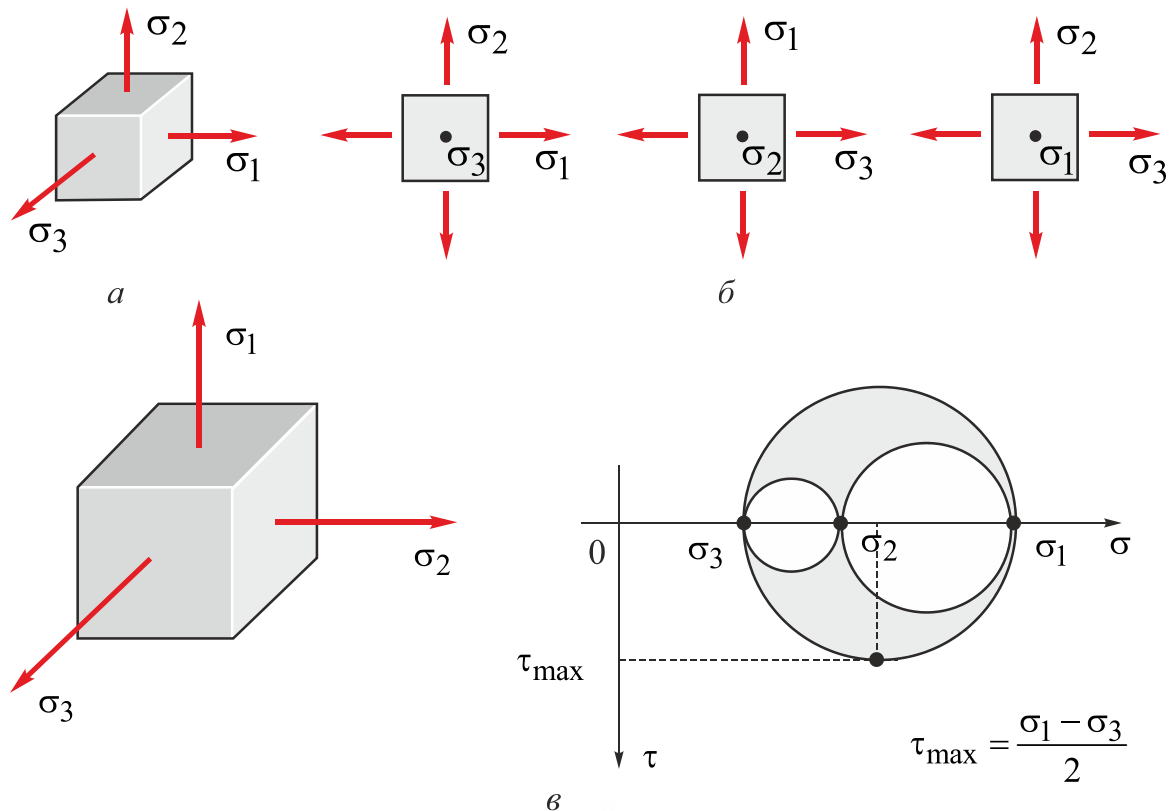


Рис. 4.14. Об'ємний напружений стан та його проекції, проілюстровані відповідними кругами Мора

У разі двовісного стиску з таким же за величиною розтягом (рис. 4.15) тривісний напружений стан удається описати одним кругом Мора.

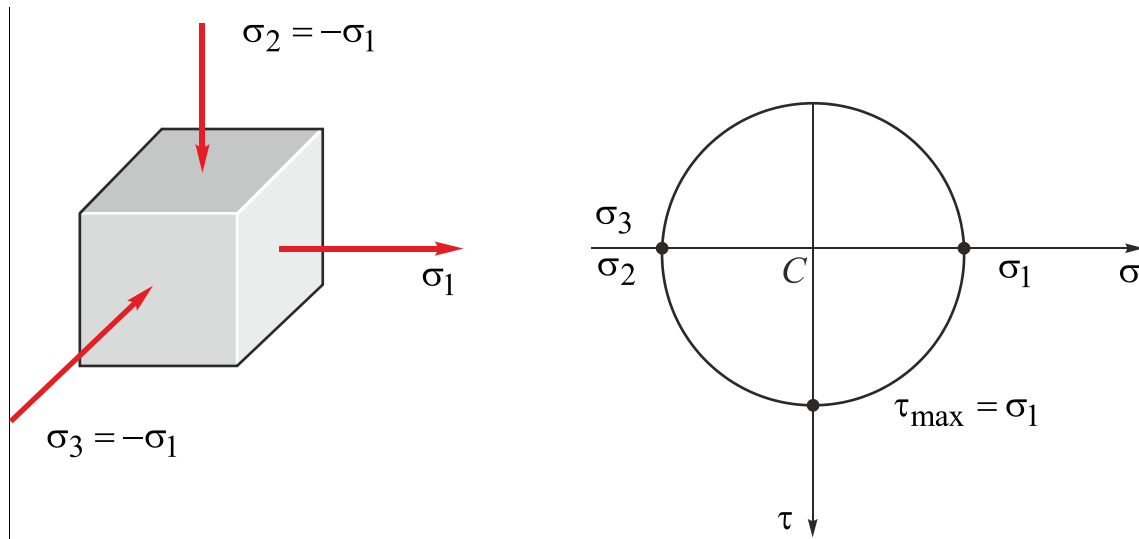


Рис. 4.15. Окремий випадок об'ємного напруженого стану, описаний одним кругом Мора

У разі деформації чистого зсуву круг Мора має вигляд, зображений на рис. 4.16.

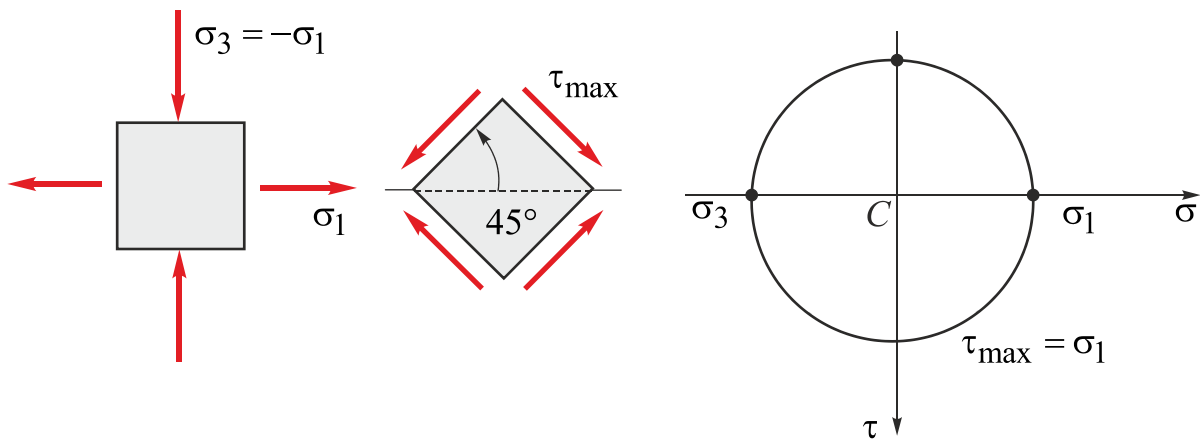


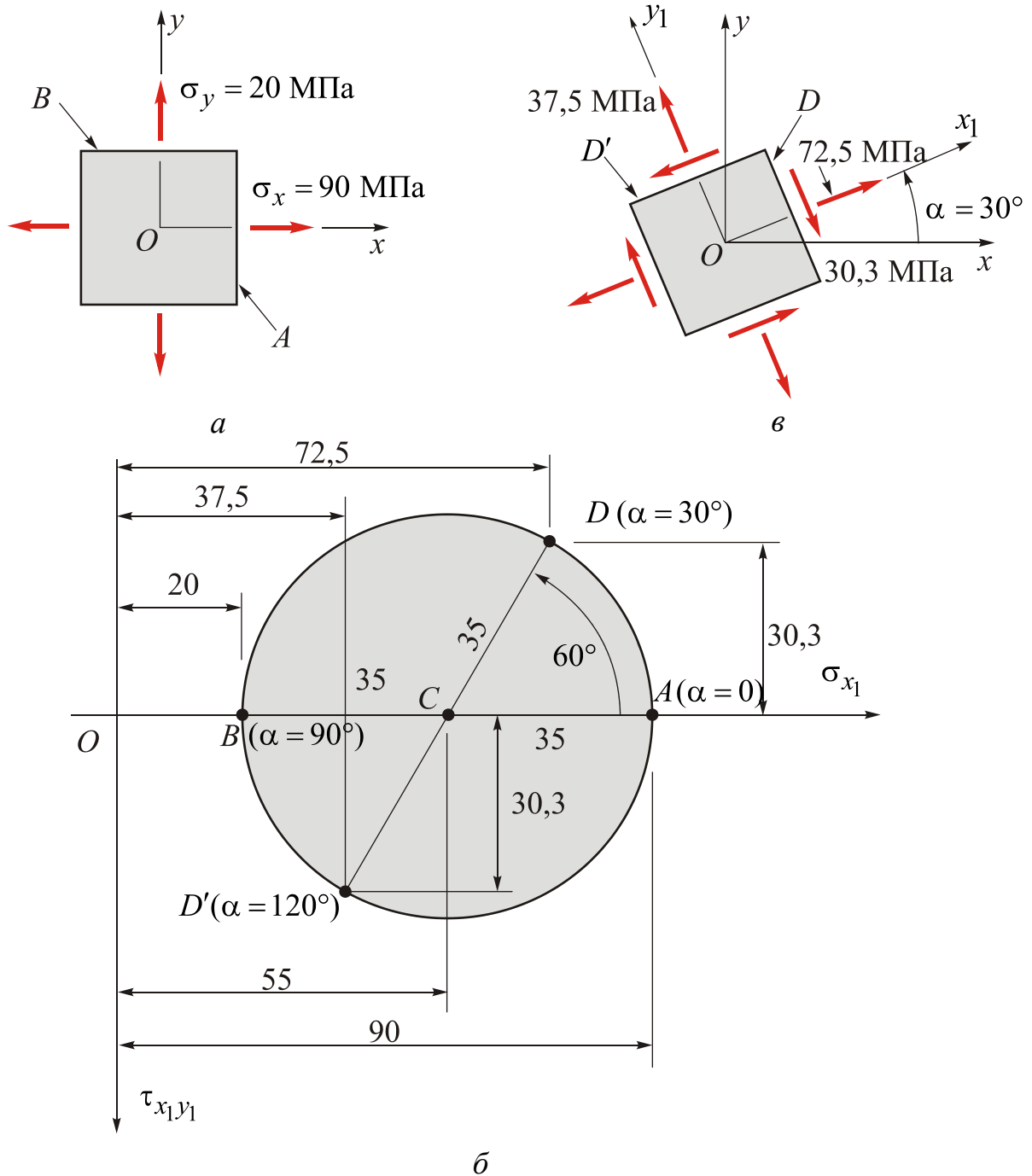
Рис. 4.16. Круг Мора при деформації чистого зсуву

Зазначимо, що круги Мора не потребують використання формул зв'язку напружень при повороті осей, а всі важливі задачі можна розв'язувати з допомогою нескладних геометричних побудов, користуючись лінійкою й транспортиром.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 4.10

У точці поверхні циліндра, навантаженого внутрішнім тиском, матеріал перебуває в умовах плоского напруженого стану ($\sigma_x = 90$ МПа і $\sigma_y = 20$ МПа), як показано на рис. *a*. Використовуючи круг Мора, визначити напруження, що діють на гранях елемента, поверненого на кут $\alpha = 30^\circ$.



a – елемент в умовах плоского напруженого стану; *б* – відповідний круг Мора; *в* – напруження, прикладені до елемента, поверненого на кут $\alpha = 30^\circ$

Розв'язання. 1. *Конструюємо круг Мора.* Уведемо систему осей: додатні σ_{x_1} напрямлені вправо, а додатні $\tau_{x_1y_1}$ – униз, як зображено на рис. б. Розташуємо центр круга Мора C на осі σ_{x_1} у точці, де нормальні напруження дорівнюють середнім нормальним напруженням:

$$\sigma_{сер} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{90 + 20}{2} = 55 \text{ МПа.}$$

Точка A , що відповідає нормальному напруженню на площадці з нормаллю x ($\alpha = 0$) і відображає площадку A на рис. а, має координати

$$\sigma_{x_1} = 90 \text{ МПа, } \tau_{x_1y_1} = 0.$$

Так само координатами точки B , що описує напруження на перпендикулярній площадці B з нормаллю y ($\alpha = 90^\circ$), є

$$\sigma_{x_1} = 20 \text{ МПа, } \tau_{x_1y_1} = 0.$$

Проведемо коло через точки A і B з центром у точці C і з радіусом R :

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{90 - 20}{2}\right)^2 + 0} = 35 \text{ МПа.}$$

Круг Мора зображено на рис. б.

2. *Визначаємо напруження на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 30^\circ$.* Напруження, що діють на площадці під кутом $\alpha = 30^\circ$, визначаються координатами точки D , розташованої під кутом $2\alpha = 60^\circ$ відносно точки A (рис. в). Аналізуючи круг Мора, доходимо висновку, що координати точки D відповідають таким напруженням:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{сер} + R \cos 60^\circ = 55 + 35 \cos 60^\circ = 72,5 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{x_1y_1} = -R \sin 60^\circ = -35 \sin 60^\circ = -30,3 \text{ МПа.}$$

Аналогічно можна знайти напруження в точці D' , яка відповідає куту $\alpha = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ (або $2\alpha = 240^\circ$):

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{сер} - R \cos 60^\circ = 55 - 35 \cos 60^\circ = 37,5 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{x_1y_1} = R \sin 60^\circ = 35 \sin 60^\circ = 30,3 \text{ МПа.}$$

Результати показано на рис. в.

Зазначимо, що сума нормальних напружень на гранях нахиленого елемента дорівнює $\sigma_x + \sigma_y$, тобто 110 МПа.

Задача 4.11

Елемент в умовах плоского напруженого стану зазнає дії напружень $\sigma_x = 100$ МПа, $\sigma_y = 35$ МПа і $\tau_{xy} = 30$ МПа, як показано на рис. а. Використовуючи круг Мора, визначити такі величини: 1) напруження, що діють на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 40^\circ$; 2) головні напруження; 3) максимальні дотичні напруження. Прикласти обчислені напруження до граней відповідного елемента.

Розв'язання. 1. *Конструюємо круг Мора.* Уведемо систему осей: додатні σ_{x_1} напрямлені вправо, а додатні $\tau_{x_1y_1}$ – униз, як показано на рис. в. Центр S круга Мора розташований на осі σ_{x_1} у точці, де напруження дорівнюють середнім нормальним напруженням:

$$\sigma_{сер} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 + 35}{2} = 67,5 \text{ МПа.}$$

Точка A , що відповідає напруженням на площадці з нормаллю x ($\alpha = 0$), згідно з рис. а, має координати

$$\sigma_{x_1} = 100 \text{ МПа, } \tau_{x_1y_1} = 30 \text{ МПа.}$$

Так само координатами точки B , яка відображає напруження на площадці з нормаллю y ($\alpha = 90$), відповідно до рис. а є

$$\sigma_{x_1} = 35 \text{ МПа, } \tau_{x_1y_1} = -30 \text{ МПа.}$$

Проведемо коло через точки A і B з центром у точці S . Його радіус

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{100 - 35}{2}\right)^2 + 30^2} = 44,2 \text{ МПа.}$$

2. *Визначаємо напруження на гранях елемента, нахилоного під кутом $\alpha = 40^\circ$.* Ці напруження визначаються координатами точки D , розташованої під кутом $2\alpha = 80^\circ$ відносно точки A (див. рис. в). Щоб обчислити її координати, необхідно знати кут між лінією CD і віссю σ_{x_1} (тобто кут DCO_1), для обчислення якого слід знати кут між лінією CA і віссю σ_{x_1} (кут ACO_1). Ці кути знаходимо з геометрії круга:

$$\overline{\tan ACO_1} = \frac{30}{32,5} = 0,923, \quad \overline{ACO_1} = 42,7^\circ,$$

$$\overline{DCO_1} = 80^\circ - \overline{ACO_1} = 80^\circ - 42,7^\circ = 37,3^\circ.$$

Тепер можна визначити координати точки D :

$$\sigma_{x_1} = 67,5 + 44,2 \cos 37,3^\circ = 102,66 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{x_1y_1} = -44,2 \sin 37,3^\circ = -26,78 \text{ МПа.}$$

Аналогічно знаходимо напруження, відображені точкою D' , яка відповідає площадці, нахилений під кутом $\alpha = 130^\circ$ (або $2\alpha = 260^\circ$):

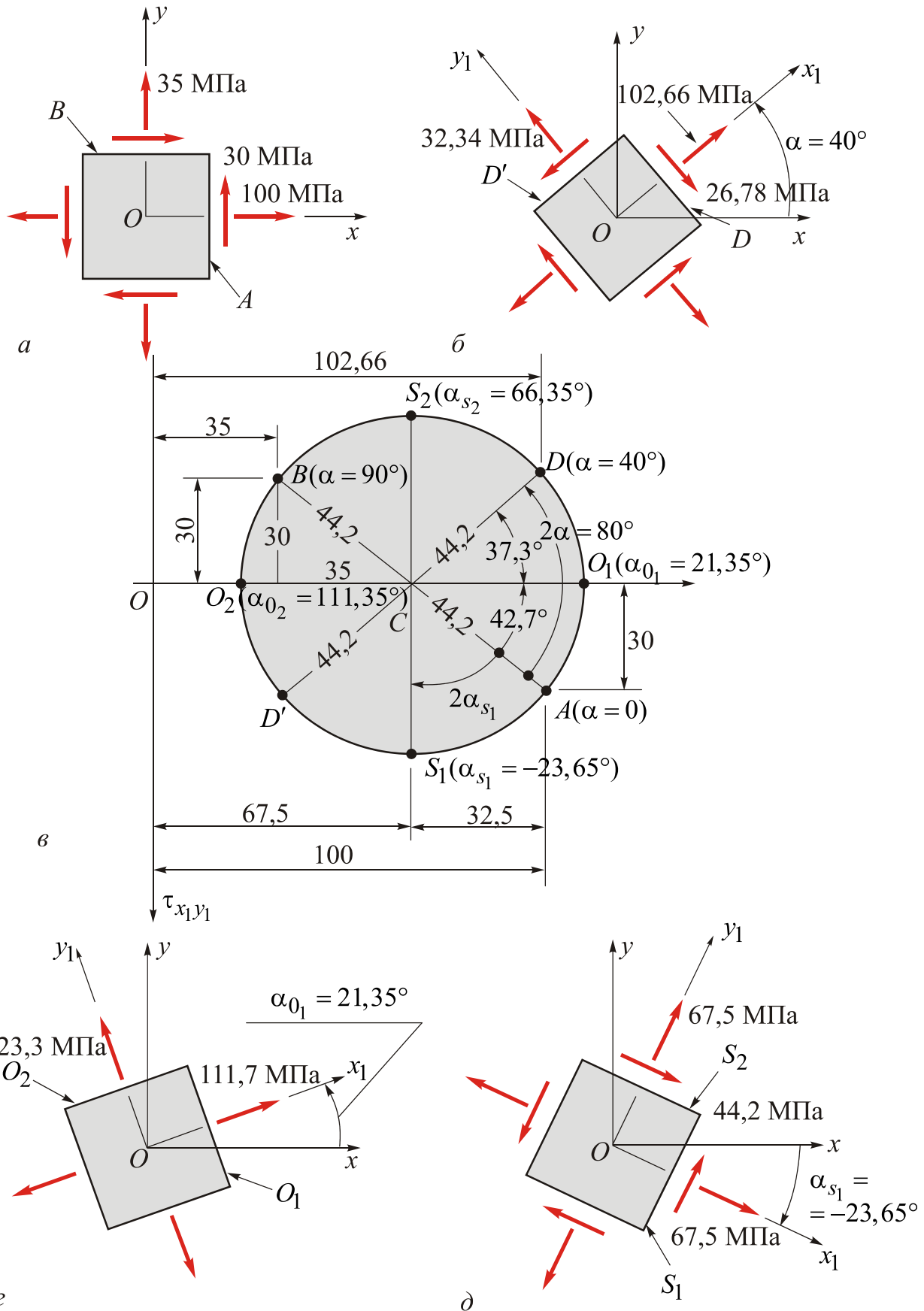
$$\sigma_{x_1} = 67,5 - 44,2 \cos 37,3^\circ = 32,34 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{x_1y_1} = 44,2 \sin 37,3^\circ = 26,78 \text{ МПа.}$$

Ці напруження показано на рис. б з урахуванням їх істинних напрямків.

Зазначимо, що сума нормальних напружень дорівнює $\sigma_x + \sigma_y$, тобто 135 МПа.

РОЗДІЛ 4. ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН



а – элемент в условиях плоского напряженного стану; б – напряжения на гранях элемента, наклоненого под углом $\alpha = 40^\circ$; в – круг Мора; г – главные напряжения; д – максимальные дотичні напряжения і відповідні середні нормальні напряжения

3. *Обчислюємо головні напруження.* Головні напруження відображено на крузі Мора точками O_1 і O_2 (див. рис. в). Алгебрично більше головне напруження діє у точці O_1 :

$$\sigma_1 = 67,5 + 44,2 = 111,7 \text{ МПа},$$

що впливає з круга Мора. Кут $2\alpha_{O_1}$ від точки A до точки O_1 на крузі Мора зображено як ACO_1 :

$$\overline{ACO_1} = 2\alpha_{O_1} = 42,7^\circ, \quad \alpha_{O_1} = 21,35^\circ.$$

Таким чином, площадка дії алгебрично більшого головного напруження розташована під кутом $\alpha_{O_1} = 21,35^\circ$, як показано на рис. з.

Алгебрично менше головне напруження, відображене точкою O_2 , також можна обчислити, використовуючи круг Мора:

$$\sigma_2 = 67,5 - 44,2 = 23,3 \text{ МПа}.$$

Кут $2\alpha_{O_2}$, під яким на крузі Мора розташована точка O_2 , дорівнює $42,7^\circ + 180^\circ = 222,7^\circ$, друга головна площадка розташована під кутом $\alpha_{O_2} = 111,35^\circ$. Головні напруження й головні площадки зображено на рис. г. *Зазначимо, що сума головних напружень дорівнює 135 МПа.*

4. *Визначаємо максимальні дотичні напруження.* Максимальні дотичні напруження відображено на крузі Мора точками S_1 і S_2 , отже, максимальне дотичне напруження дорівнює радіусу круга Мора:

$$\tau_{\max} = 44,2 \text{ МПа}.$$

Кут ACS_1 між точками A і S_1 дорівнює $90^\circ - 42,7^\circ = 47,3^\circ$, отже, і кут $2\alpha_{S_1}$, під яким розташована точка S_1 , чисельно є таким самим:

$$2\alpha_{S_1} = -47,3^\circ.$$

Цей кут від'ємний, оскільки його отримано обертанням за годинниковою стрілкою. Відповідний кут α_{S_1} , під яким розташована площадка найбільшого додатного дотичного напруження, дорівнює його половині, тобто $\alpha_{S_1} = -23,65^\circ$, що впливає з рис. в і г. Максимальне від'ємне дотичне напруження (точка S_2 на крузі Мора) має таке саме числове значення (44,2 МПа).

Нормальні напруження, що діють на площадках максимальних дотичних напружень, дорівнюють $\sigma_{\text{сер}}$, тобто абсцисі центра C круга Мора (67,5 МПа). Ці напруження також показано на рис. д.

Зазначимо, що площадки максимальних дотичних напружень розташовані під кутом 45° до головних площадок.

Задача 4.12

У точці на поверхні вала напруження дорівнюють $\sigma_x = -50$ МПа, $\sigma_y = 10$ МПа і $\tau_{xy} = -40$ МПа, як показано на рис. а. Використовуючи круг Мора, визначити такі величини: 1) напруження, що діють на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 45^\circ$; 2) головні напруження; 3) максимальні дотичні напруження.

Розв'язання. 1. *Конструюємо круг Мора.* Осі взятої системи координат показано на рис. в (σ_{x_1} – додатно вправо, $\tau_{x_1y_1}$ – додатно вниз). Центр С круга Мора розташований на осі σ_{x_1} у точці з напруженнями, що дорівнюють середнім нормальним напруженням:

$$\sigma_{сер} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-50 + 10}{2} = -20 \text{ МПа.}$$

Точка А, якою позначено напруження на площадці з нормаллю x ($\alpha = 0$), має координати

$$\sigma_{x_1} = -50 \text{ МПа, } \tau_{x_1y_1} = -40 \text{ МПа.}$$

Так само координати точки В, якою позначено напруження на площадці з нормаллю y ($\alpha = 90^\circ$), є такими:

$$\sigma_{x_1} = 10 \text{ МПа, } \tau_{x_1y_1} = 40 \text{ МПа.}$$

Круг Мора проходить через точки А і В, розташовані на його діаметрі, його радіус R визначаємо так:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-50 - 10}{2}\right)^2 + (-40)^2} = 50 \text{ МПа.}$$

2. *Обчислюємо напруження на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 45^\circ$.* Ці напруження визначаються координатами точки D, розташованої під кутом $2\alpha = 90^\circ$ відносно точки А (рис. в). Щоб їх визначити, необхідно знати кут між лінією CD і від'ємною віссю σ_{x_1} (тобто кут DCO_2), для знаходження якого, у свою чергу, слід знати кут між лінією CA і від'ємною віссю σ_{x_1} (кут ACO_2). Ці кути знаходимо, використовуючи геометрію круга:

$$\overline{ACO_2} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}, \quad \overline{ACO_2} = 53,13^\circ,$$

$$\overline{DCO_2} = 90^\circ - \overline{ACO_2} = 90^\circ - 53,13^\circ = 36,87^\circ.$$

Визначивши ці кути, обчислюємо координати точки D безпосередньо з круга Мора:

$$\sigma_{x_1} = -20 - 50 \cos 36,87^\circ = -60 \text{ МПа},$$

$$\tau_{x_1 y_1} = 50 \sin 36,87^\circ = 30 \text{ МПа}.$$

Так само можна знайти напруження, що визначаються точкою D' і відповідають площадці, нахиленій під кутом $\alpha = 135^\circ$ (або $2\alpha = 270^\circ$):

$$\sigma_{x_1} = -20 + 50 \cos 36,87^\circ = 20 \text{ МПа},$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -50 \sin 36,87^\circ = -30 \text{ МПа}.$$

Ці напруження показано на рис. б, причому напруження прикладені в їх дійсних напрямках.

Зазначимо, що сума нормальних напружень дорівнює $\sigma_x + \sigma_y$, тобто -40 МПа.

3. *Визначаємо головні напруження.* На крузі Мора ці напруження відображають точки O_1 і O_2 . Алгебрично більше головне напруження (точка O_1)

$$\sigma_1 = -20 + 50 = 30 \text{ МПа}.$$

Визначаємо кут $2\alpha_{0_1}$ від точки O_1 до точки A , тобто кут ACO_1 , відкладений проти годинникової стрілки:

$$\overline{ACO_1} = 2\alpha_{0_1} = 53,13^\circ + 180^\circ = 233,13^\circ, \quad \alpha_{0_1} = 116,6^\circ.$$

Таким чином, площадка дії алгебрично більшого головного напруження розташована під кутом $\alpha_{0_1} = 116,6^\circ$.

Алгебрично менше головне напруження (точка O_2) обчислюємо з круга Мора аналогічним чином:

$$\sigma_3 = -20 - 50 = -70 \text{ МПа}.$$

Кут $2\alpha_{0_2}$ до точки O_2 на крузі дорівнює $53,13^\circ$. Друге головне напруження визначається кутом $\alpha_{0_2} = 26,6^\circ$. Головні напруження й головні площадки показано на рис. г.

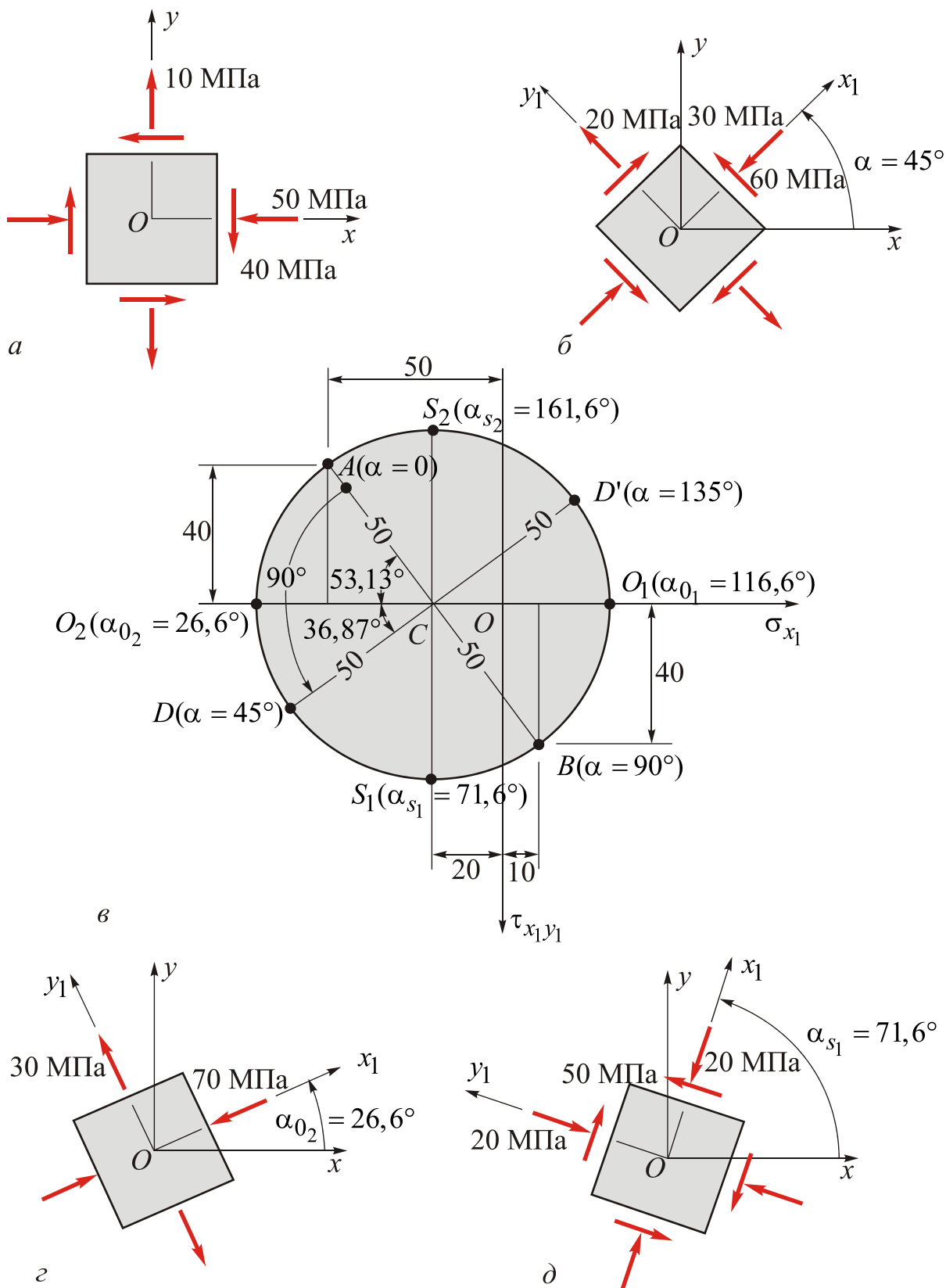
Зазначимо, що сума головних напружень дорівнює $\sigma_x + \sigma_y$, тобто -40 МПа.

4. *Розраховуємо максимальні дотичні напруження.* Максимальні додатне й від'ємне дотичні напруження відображені на крузі Мора точками S_1 і S_2 (див. рис. в). Їх величини дорівнюють радіусу круга, тобто

$$\tau_{\max} = 50 \text{ МПа}.$$

Кут ACS_1 від точки A до точки S_1 дорівнює $90 + 53,13 = 143,13^\circ$, тобто для точки S_1

$$2\alpha_{s_1} = 143,13^\circ.$$



a – елемент в умовах плоского напруженого стану; *б* – напруження на гранях елемента, нахиленого під кутом $\alpha = 45^\circ$; *в* – круг Мора; *г* – головні напруження; *д* – максимальні дотичні напруження й відповідні середні нормальні напруження

Кут α_{s_1} , що визначає положення площадки з максимальним додатним дотичним напруженням, дорівнює $71,6^\circ$, як зображено на рис. д. Максимальне від'ємне дотичне напруження (точка S_2) має таке саме числове значення (50 МПа).

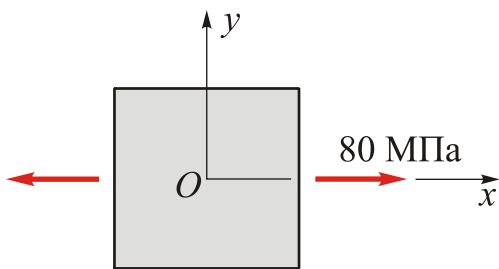
Нормальні напруження, що діють на площадках максимальних дотичних напружень, дорівнюють $\sigma_{сер}$, тобто вони відображаються координатою центра С круга Мора (-20 МПа).

Ці напруження також показано на рис. д у їх дійсних напрямках.

Зазначимо, що площадки максимальних дотичних напружень розташовані під кутом 45° до головних площадок.

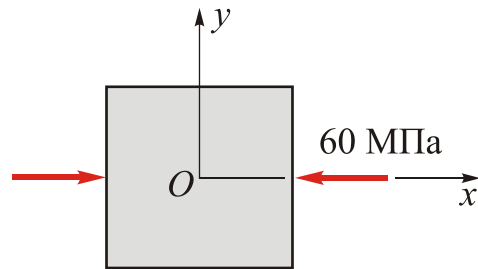
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

4.56. Елемент в умовах одновісного (лінійного) напруженого стану зазнає дії розтягальних напружень $\sigma_x = 80$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити: 1) напруження на гранях елемента, поверненого відносно осі x на кут $\alpha = 30^\circ$ проти годинникової стрілки; 2) максимальні дотичні напруження й нормальні напруження, що відповідають їм. Прикласти знайдені напруження до граней елемента.

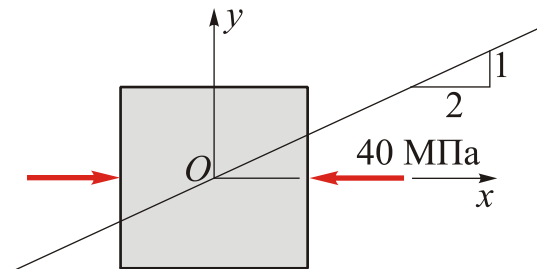


4.57. Елемент в умовах одновісного (лінійного) напруженого стану перебуває під дією стискальних напружень $\sigma_x = 60$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити: 1) напруження, що діють на гранях елемента, поверненого відносно осі x на кут $\alpha = 30^\circ$ за годинниковою стрілкою; 2) максимальні дотичні напруження й нормальні напруження, що

відповідають їм. Прикласти знайдені напруження до граней елемента.

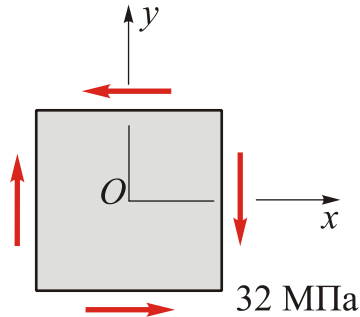


4.58. Елемент в умовах одновісного (лінійного) напруженого стану зазнає дії стискальних напружень $\sigma_x = 40$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити: 1) напруження на гранях елемента, поверненого відносно осі x під кутом $\alpha = 30^\circ$; 2) максимальні дотичні напруження й відповідні нормальні напруження. Прикласти знайдені напруження до граней елемента.

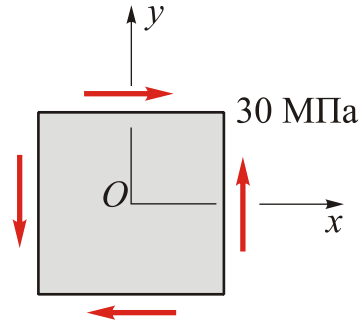


4.59. Елемент в умовах чистого зсуву перебуває під дією напружень $\tau_{xy} = -32$ МПа. Використовуючи круг

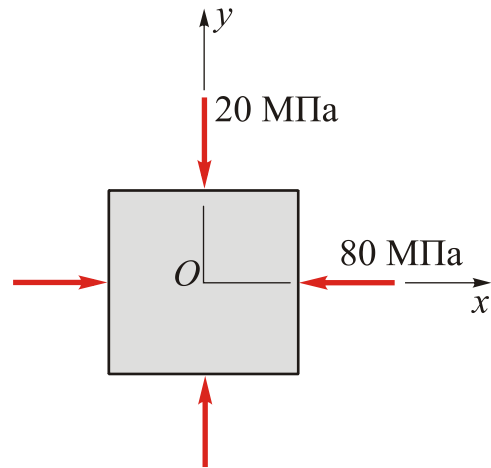
Мора, визначити: 1) напруження, що діють на гранях елемента, поверненого відносно осі x на кут $\alpha = 20^\circ$ за годинниковою стрілкою; 2) головні напруження.



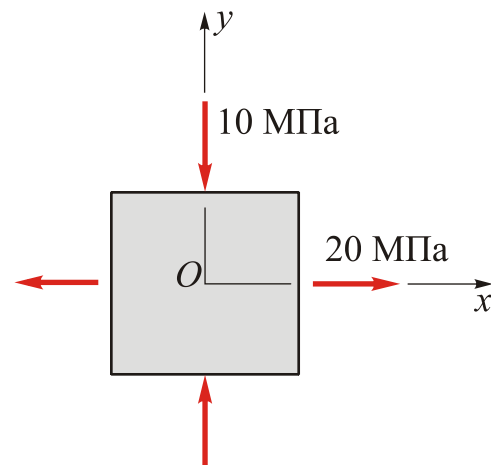
4.60. Елемент в умовах чистого зсуву перебуває під дією напружень $\tau_{xy} = 30$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити: 1) напруження, що діють на гранях елемента, поверненого відносно осі x на кут $\alpha = 75^\circ$ проти годинникової стрілки; 2) головні напруження.



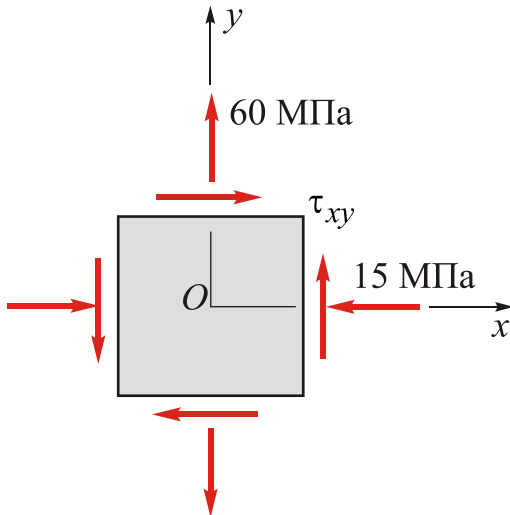
4.61. Елемент в умовах плоского напруженого стану зазнає дії напружень $\sigma_x = -80$ МПа і $\sigma_y = -20$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити: 1) напруження, що діють на гранях елемента, поверненого відносно осі x на кут $\alpha = 30^\circ$ за годинниковою стрілкою; 2) максимальні дотичні напруження й відповідні нормальні напруження. Прикласти вказані напруження до граней елемента.



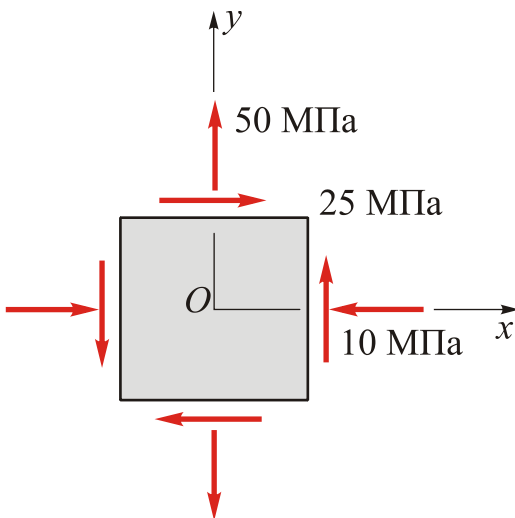
4.62. Елемент в умовах плоского напруженого стану перебуває під дією напружень $\sigma_x = 20$ МПа і $\sigma_y = -10$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити: 1) напруження, що діють на гранях елемента, поверненого відносно осі x на кут $\alpha = 60^\circ$ за годинниковою стрілкою; 2) максимальні дотичні напруження й відповідні нормальні напруження. Прикласти вказані напруження до граней елемента.



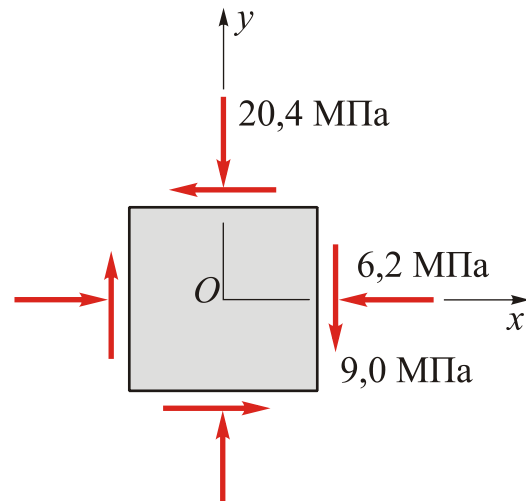
4.63. Для елемента в умовах плоского напруженого стану відомі діючі напруження $\sigma_x = -15$ МПа і $\sigma_y = 60$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити допустимі напруження τ_{xy} , якщо допустиме зсувне напруження матеріалу дорівнює 65 МПа.



4.64. Елемент в умовах плоского напруженого стану зазнає дії напружень $\sigma_x = -10$ МПа, $\sigma_y = 50$ МПа і $\tau_{xy} = 50$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити напруження на гранях елемента, нахиленого до осі x під кутом $\alpha = 45^\circ$ за годинниковою стрілкою. Прикласти ці напруження до граней нахиленого елемента.



4.65. Елемент в умовах плоского напруженого стану перебуває під дією напружень $\sigma_x = -6,2$ МПа, $\sigma_y = -20,4$ МПа і $\tau_{xy} = -9,0$ МПа. Використовуючи круг Мора, визначити напруження на гранях елемента, нахиленого до осі x під кутом $\alpha = 30^\circ$ за годинниковою стрілкою. Прикласти ці напруження до граней нахиленого елемента.



**4.6. Закон Гука для плоского напруженого стану та його особливі випадки.
Зміна об'єму, співвідношення між E , G і ν**

Рівняння зв'язку напружень при повороті осей плоского напруженого стану (4.8)–(4.10) було виведено виключно з умов рівноваги елемента. Якщо ж необхідно визначити деформації у матеріалі, елемент якого показано на рис. 4.17, то необхідно знати також його пружні властивості, що характеризують реакцію матеріалу на навантаження. У подальшому обмежимося тільки такими матеріалами: а) однорідні й ізотропні; б) лінійно пружні (тобто підпорядковуються закону Гу-

ка). З використанням цих обмежень необхідно встановити зв'язок між напруженим й деформованим станами. Звичайно ж, як і раніше, уважатимемо, що дотичні напруження не створюють лінійних деформацій, а нормальні, у свою чергу, не спричиняють зміння прямих кутів між гранями елемента, зображеного на рис. 4.17. Це полегшить виконання завдання, яке почнемо з визначення лінійних деформацій елемента ДТТ під дією тільки двох головних нормальних напружень (рис. 4.18).

Насамперед слід виходити з того, що при плоскому напруженому стані деформований стан є тривимірним (об'ємним), тобто в загальному випадку $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \neq 0$. Цей факт підтверджується на рис. 4.18, де показано подовження всіх трьох ребер малого елемента ДТТ з розмірами a, b, c . У цьому прикладі, де обидва нормальні напруження σ_x і σ_y є додатними, два абсолютні подовження в їх напрямках теж будуть додатними, тобто довжини ребер a і b збільшуватимуться ($\varepsilon_x > 0, \varepsilon_y > 0$). Одночасно довжина ребра c буде зменшуватися, тобто $\varepsilon_z < 0$. Застосовуючи принцип суперпозиції, кожену деформацію подамо у вигляді суми двох доданків, спричинених дією кожного з двох головних напружень. Так, деформація ε_x у x -напрямку, обумовлена напруженням σ_x , дорівнює σ_x / E , де E – модуль пружності. Додаткова деформація ε_x , обумовлена напруженням σ_y , яке діє в поперечному напрямку, дорівнює $-\nu\sigma_y / E$, де ν – коефіцієнт Пуассона. Загалом сумарна лінійна деформація в x -напрямку

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y). \quad (4.61)$$

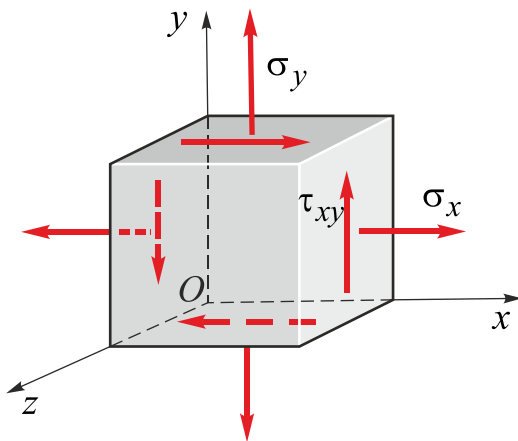


Рис. 4.17. Елемент матеріалу при плоскому напруженому стані ($\sigma_z = 0$)

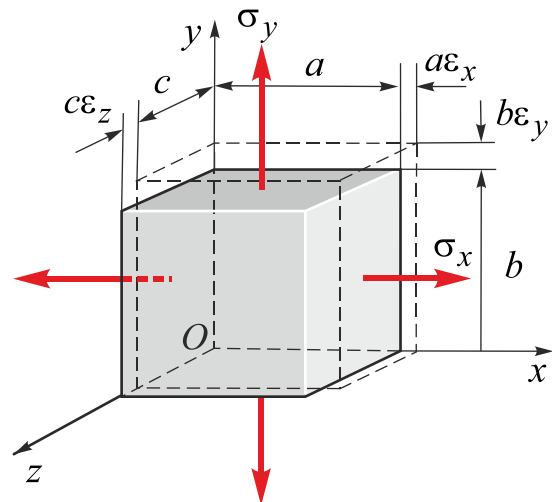


Рис. 4.18. Об'ємний деформований стан елемента ДТТ, що перебуває в умовах плоского напруженого стану під дією розтягальних головних нормальних напружень σ_x і σ_y , коли

$$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \neq 0, \text{ причому } \varepsilon_x > 0, \\ \varepsilon_y > 0, \varepsilon_z < 0$$

Так само отримаємо рівняння зв'язку складових напруженого й деформованого станів в y - і z -напрямах:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (4.62)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_y). \quad (4.63)$$

Таким чином, рівняння (4.61)–(4.63) дають змогу знайти лінійні деформації об'ємного деформованого стану в умовах плоского напруженого стану, спричиненого дією двох головних нормальних напружень.

Дотичне напруження τ_{xy} (див. рис. 4.17) приводить лише до зміни форми елемента, тобто перетворює прямокутник на паралелограм або квадрат на ромб (рис. 4.19). Деформація зсуву γ_{xy} є, по суті, зменшенням кута між x - і y -гранями. Нагадаємо, що зсувні деформації зв'язані з дотичними напруженнями законом Гука при зсуві:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (4.64)$$

де G – модуль зсуву.

Ще раз підкреслимо, що розтягальні головні нормальні напруження σ_x і σ_y не впливають на деформацію γ_{xy} .

Таким чином, рівняння (4.61)–(4.64) дають змогу обчислити компоненти деформованого стану при плоскому напруженому стані, зображеному на рис. 4.17. Перші два рівняння (4.61) і (4.62) виражають лінійні деформації через нормальні напруження. Їх неважко звести до такої форми:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad (4.65)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x). \quad (4.66)$$

Додатково дотичні напруження зв'язані з деформаціями зсуву рівнянням

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (4.67)$$

Рівняння (4.65)–(4.67) дають змогу знайти напруження плоского напруженого стану, якщо відомі компоненти деформованого стану. Природно, у цьому випадку нормальне напруження $\sigma_z = 0$.

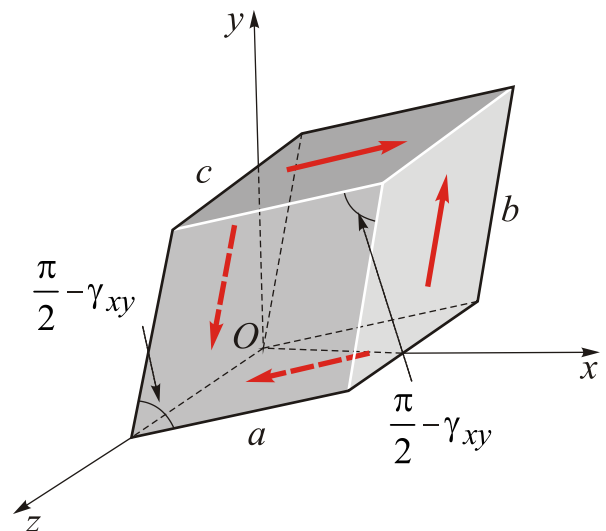


Рис. 4.19. Деформація зсуву γ_{xy} і відповідна зміна форми передньої грані елемента ДТТ під дією напруження τ_{xy}

Рівняння (4.61)–(4.67), які називають **законом Гука для плоского напруженого стану**, містять три механічні характеристики матеріалу (E , G і ν), зв'язані співвідношенням (1.22):

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.68)$$

4.6.1. Особливі випадки запису закону Гука для плоского напруженого стану

1. В окремому випадку плоского напруженого стану, коли до граней прикладені тільки головні нормальні напруження, а дотичні дорівнюють нулю, рівняння закону Гука спрощуються:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_y), \end{aligned} \quad (4.69)$$

або

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Ці рівняння збігаються з рівняннями (4.61)–(4.63), (4.65), (4.66), оскільки нормальні напруження не спричиняють деформацій зсуву і, навпаки, дотичні напруження не спричиняють лінійних деформацій. Оскільки нормальні напруження σ_x , σ_y у цьому випадку є головними напруженнями, їх, залежно від величини, необхідно перейменувати у відповідні пари: або (σ_1, σ_2) , або (σ_2, σ_3) , або (σ_1, σ_3) . Так само лінійні деформації ε_x , ε_y , ε_z необхідно перейменувати: ε_1 , ε_2 , ε_3 .

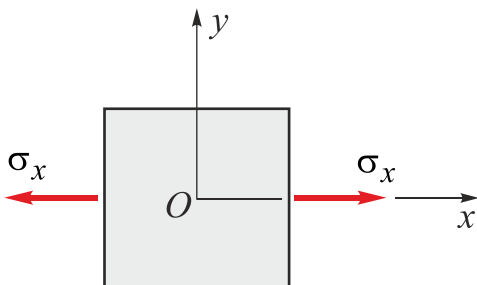


Рис. 4.20. Лінійний напружений стан (випадок, коли $\sigma_x = \sigma_1$, $\tau_{xy} = 0$)

2. У разі лінійного напруженого стану, коли $\sigma_y = 0$ і $\tau_{xy} = 0$ (рис. 4.20), рівняння закону Гука для плоского напруженого стану зводяться до закону Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (4.71)$$

3. У разі чистого зсуву (рис. 4.21), коли $\sigma_x = \sigma_y = 0$, маємо

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \quad (4.72)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (4.73)$$

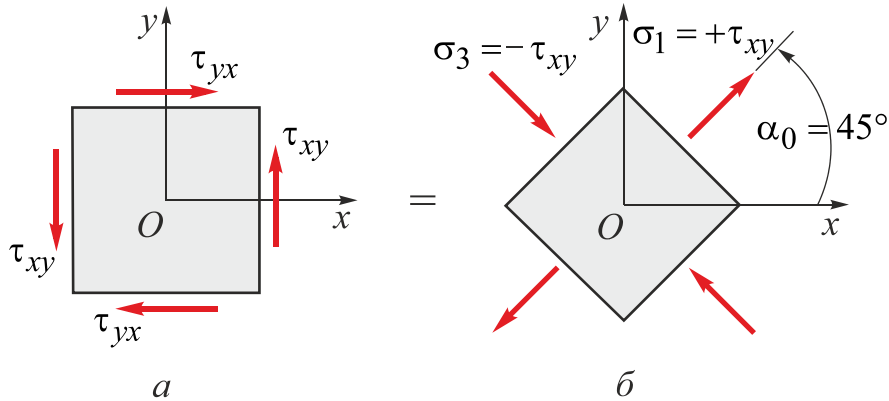


Рис. 4.21. Елемент ДТТ в умовах чистого зсуву: *a* – під дією зсувних напружень; *б* – під дією головних напружень

Зауважимо, що в усіх цих трьох окремих випадках плоского напруженого стану передня грань елемента вільна від напружень, тобто $\sigma_z = 0$.

4.6.2. Зміна об'єму при плоскому напруженому стані

Розглянемо відносну зміну об'єму, виокремленого в околі точки ДТТ (див. рис. 4.18). Нехай початковий об'єм $V_0 = abc$, тоді об'єм після деформування

$$V = abc(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z). \quad (4.74)$$

Після розкриття дужок маємо

$$V = abc(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z). \quad (4.75)$$

Оскільки деформації в межах пружності є абсолютно малими величинами, можна знехтувати добутками деформацій порівняно з самими деформаціями. Тоді формула для об'єму після деформування набуває вигляду

$$V = abc(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad (4.76)$$

а абсолютна його зміна після деформації визначається формулою

$$\Delta V = V - V_0 = abc(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (4.77)$$

Відносну зміну об'єму можна обчислити за формулою

$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.78)$$

Зазначимо, що формула (4.78) дає змогу обчислити відносну зміну об'єму через відомі деформації і є правдивою незалежно від того, відповідає матеріал

закону Гука, чи ні. Очевидно також, що дотичні напруження не спричиняють зміни об'єму, оскільки не впливають на зміну довжини сторін елемента ДТТ.

Якщо матеріал відповідає закону Гука, можна підставити (4.61)–(4.63) у (4.78) та отримати формулу для визначення відносної зміни об'єму через відомі напруження на площадках довільної орієнтації:

$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.79)$$

Отримавши формули для e_V , можна обчислити зміну об'єму будь-якого конструктивного елемента в умовах плоского напруженого стану, інтегруючи e_V по його об'єму.

Зазначимо, що нормальні напруження, зображені на рис. 4.17, не є головними. Підставивши їх у (4.79), можна обчислити відносну зміну об'єму через напруження на площадках довільної орієнтації. Якщо ж маємо справу з головними напруженнями σ_x , σ_y , які зображено на рис. 4.18, то, використовуючи (4.79), можна знайти таку саму відносну зміну об'єму, бо, як відомо, сума нормальних напружень при повороті осей не змінюється. Звичайно, у такому випадку σ_x і σ_y краще перейменувати на відповідні пари (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) , (σ_1, σ_3) залежно від їх величин. Також головні деформації на рис. 4.18 мають бути перейменовані на ε_1 , ε_2 , ε_3 .

4.6.3. Зв'язок між модулем пружності, модулем зсуву і коефіцієнтом Пуассона

Настав час довести одне з фундаментальних співвідношень (4.68), зв'язавши модулі пружності E і G з коефіцієнтом Пуассона. Розглянемо для цього малий елемент ДТТ розміром $a \times a$ в умовах чистого зсуву (рис. 4.22). Круг Мора в цьому випадку (див. рис. 4.16) показує, що $\sigma_1 = +\tau_{\max}$ і $\sigma_3 = -\tau_{\max}$ на гранях, розташованих під кутом 45° до площадок найбільшого дотичного напруження $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Це підтверджує також рис. 4.21. На рис. 4.22 ΔS – абсолютний зсув верхньої грані елемента відносно нижньої, паралельної до неї. Головні напрямки напруженого й деформованого станів збігаються з діагоналями квадрата $a \times a$.

Обчислимо відносний зсув γ_{xy} :

$$\operatorname{tg} \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy} = \frac{\Delta S}{a}. \quad (4.80)$$

Це співвідношення є справедливим, оскільки $\Delta S \ll a$. Визначимо тепер відносну лінійну деформацію в першому головному напрямку, тобто вздовж відрізка OA , розташованого під кутом 45° до площадки зсуву:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{OA}. \quad (4.81)$$

Оскільки

$$\Delta l_1 = \Delta S \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}, \quad (4.82)$$

а також

$$OA = \sqrt{2}a, \quad (4.83)$$

маємо вираз

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S}{a}. \quad (4.84)$$

Підставляючи $\Delta S/a$ з (4.80) у (4.84), остаточно визначаємо, що

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \gamma_{xy}. \quad (4.85)$$

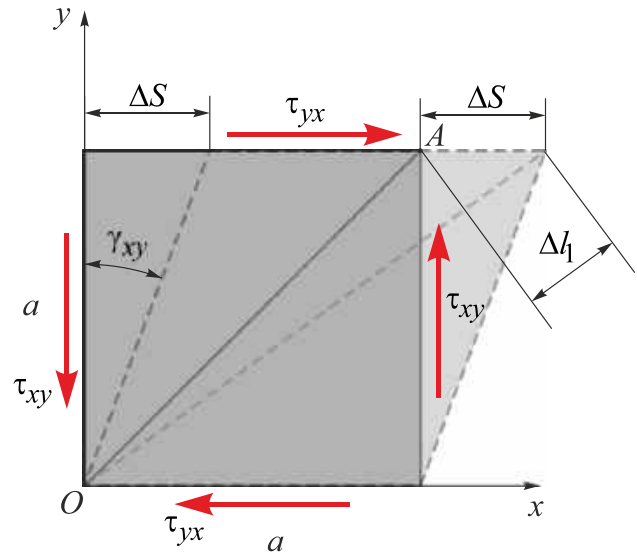


Рис. 4.22. Елемент ДТТ в умовах чистого зсуву

З іншого боку, рівняння лінійної деформації уздовж головного напрямку (діагоналі OA (4.61)) при підстановці $\varepsilon_x = \varepsilon_1$, $\sigma_x = \sigma_1 = +\tau_{xy}$, $\sigma_y = \sigma_3 = -\tau_{xy}$ ($\tau_{xy} > 0$) набуває вигляду

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E} (1 + \nu). \quad (4.86)$$

Прирівнявши праві частини (4.85) і (4.86), отримуємо

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{E} (1 + \nu), \quad (4.87)$$

або

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} \frac{2(1 + \nu)}{E}. \quad (4.88)$$

Як відомо, закон Гука при зсуві зв'язує деформацію зсуву й дотичне напруження коефіцієнтом пропорційності, названим раніше модулем зсуву G . Отже,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.89)$$

Співвідношення (4.89) має місце при будь-якій орієнтації координатних осей x і y , тому всі рівняння зв'язку напружень і деформацій для ізотропного пружного матеріалу можна записати з використанням двох із цих трьох констант.

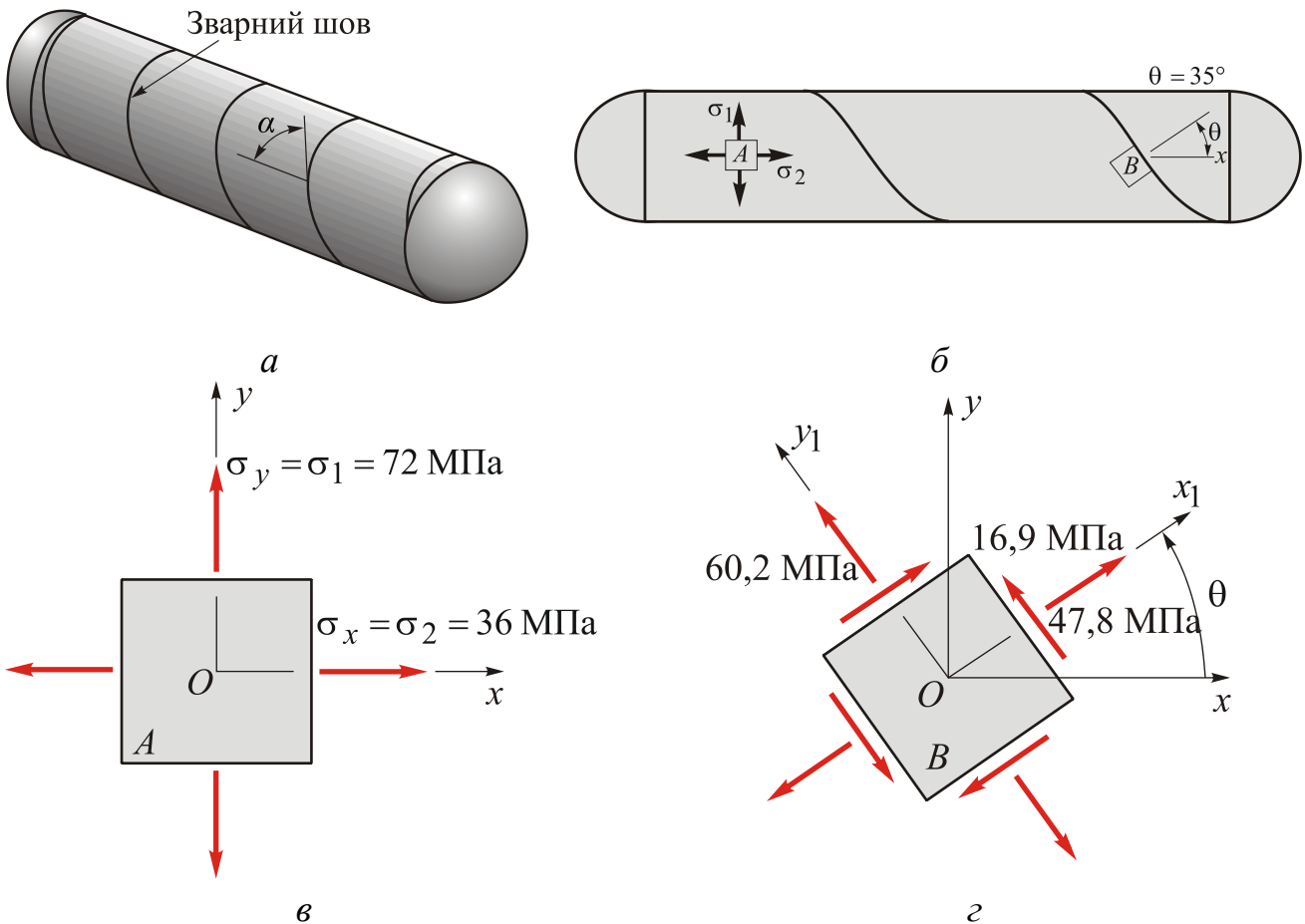
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 4.13

Циліндричний балон для стиснутого газу виготовлено навиванням смуги на циліндричну оправку з подальшим зварюванням стиків, які являють собою гвин-

РОЗДІЛ 4. ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

тову лінію (рис. *a*). Зварний шов розташований під кутом $\alpha = 55^\circ$ до твірної балона. Внутрішній радіус балона $r = 1,8$ м і товщина стінки $t = 20$ мм. Матеріал – сталь з модулем пружності $E = 200$ ГПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,30$. Внутрішній тиск p дорівнює 800 кПа. Обчислити для циліндричної частини балона: 1) колові й меридіональні напруження σ_1 і σ_2 ; 2) максимальні дотичні напруження; 3) колові й меридіональні деформації ε_1 і ε_2 ; 4) нормальні $\sigma_{3\theta}$ і дотичні $\tau_{3\theta}$ напруження, що діють у зварному шві.



a – загальний вигляд циліндричного балона для стиснутого газу з гвинтовим зварним швом; *б* – вигляд збоку; *в* – плоский напружений стан у точці *A* балона в системі координат xOy ; *г* – плоский напружений стан у точці *A* балона в системі координат x_1Oy_1

Розв’язання. 1. *Визначаємо колові й меридіональні напруження.* Ці напруження σ_1 і σ_2 зображено на рис. *б* у довільній точці *A* циліндричної частини балона. Їх можна обчислити з рівнянь рівноваги:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}, \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2t}, \quad \text{отже,} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} = 36 \text{ МПа.}$$

Напружений стан у точці A показано на рис. ν , де вісь x збігається з поздовжньою віссю циліндра, а вісь y має коловий напрямок. Можна припустити, що в перпендикулярному z -напрямку напруження відсутні ($\sigma_z = 0$), тобто елемент перебуває в умовах плоского напруженого стану. Це припущення ґрунтується на порівнянні величин внутрішнього тиску, що дорівнює за модулем третьому головному напруженню, і меншого з двох знайдених головних напружень, тобто σ_2 . Дійсно, відношення внутрішнього тиску (800 кПа) до меншого з двох головних напружень (36 МПа) дорівнює 0,022. Зазначимо, що з цієї причини напружений стан тонкостінних посудин під тиском завжди вважається плоским, тобто третім головним напруженням нехтують.

2. *Обчислюємо максимальні дотичні напруження.* У площині xOy найбільші дотичні напруження діють на площадках, розташованих під кутом 45° і паралельних до осі z (див. рівняння (4.53)):

$$(\tau_{\max})_z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1}{4} = \frac{pr}{4t} = 18 \text{ МПа.}$$

У площині yOz найбільші дотичні напруження діють на площадках, розташованих під кутом 45° і паралельних до осі x :

$$(\tau_{\max})_x = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{2t}.$$

У площині xOz найбільші дотичні напруження діють на площадках, розташованих під кутом 45° і паралельних до осі y :

$$(\tau_{\max})_y = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{pr}{4t}.$$

Оскільки нормальні напруження у напрямку осі z не розглядаємо, то найбільші дотичні напруження у стінці балона

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{2t} = 36 \text{ МПа.}$$

3. *Знаходимо колові й меридіональні деформації.* Оскільки найбільші напруження є меншими за границю текучості сталі, можна застосувати закон Гука, а деформації в x - і y -напрявках (рис. ν) можна обчислити з рівнянь закону Гука для плоского напруженого стану (4.61):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x).$$

Зазначимо, що ці деформації є головними, так само як і напруження, що відповідають їм. Таким чином, рівняння для деформацій можна переписати в такому вигляді:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{2E}(2 - \nu) = \frac{pr}{2tE}(2 - \nu),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E}(1 - 2\nu) = \frac{pr}{2tE}(1 - 2\nu).$$

Підставивши числові значення, знаходимо меридіональну й колову деформації відповідно:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{2E}(2 - \nu) = \frac{72(2 - 0,30)}{2 \cdot 200 \cdot 10^3} = 306 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E}(1 - 2\nu) = \frac{36[1 - 2(0,30)]}{200 \cdot 10^3} = 72 \cdot 10^{-6}.$$

4. *Визначаємо нормальні й дотичні напруження у зварному шві.* Елемент у точці *B* стінки балона (рис. 2) розташований так, що його сторони паралельні й перпендикулярні до зварного шва. Кут нахилу елемента

$$\theta = 90^\circ - \alpha = 35^\circ,$$

як показано на рис. 2. Щоб обчислити нормальні й дотичні напруження, що діють на гранях цього елемента, використаємо рівняння зв'язку напружень при повороті осей. Нормальне σ_{x_1} і дотичне $\tau_{x_1y_1}$ напруження, що діють на грані з нормаллю x_1 , отримаємо з рівнянь (4.8) і (4.9), переписаних у вигляді

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta,$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta.$$

Підставивши $\sigma_x = \sigma_2 = pr/2t$, $\sigma_y = \sigma_1 = pr/t$ і $\tau_{xy} = 0$, отримуємо

$$\sigma_{x_1} = \frac{pr}{4t}(3 - \cos 2\theta), \quad \tau_{x_1y_1} = \frac{pr}{4t} \sin 2\theta.$$

Ці формули дають змогу обчислити нормальні й дотичні напруження, що діють на площадці, нахиленій під кутом θ до поздовжньої осі балона.

Підставивши $pr/4t = 18$ МПа і $\theta = 35^\circ$ у наведені вище формули, отримуємо

$$\sigma_{x_1} = 47,8 \text{ МПа}, \quad \tau_{x_1y_1} = 16,9 \text{ МПа}.$$

Ці напруження прикладено до граней елемента, зображеного на рис. 2.

Нормальні напруження σ_{y_1} , що діють на грані з нормаллю y_1 , отримаємо з умови інваріантності нормальних напружень при повороті осей:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}.$$

Підставимо числові значення:

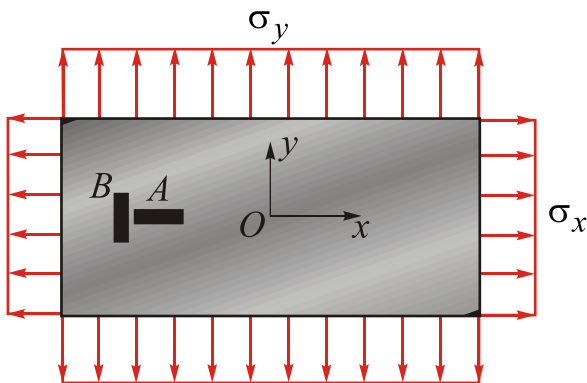
$$\sigma_{y_1} = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_{x_1} = 72 + 36 - 47,8 = 60,2 \text{ МПа (див. рис. з)}.$$

Таким чином, маємо нормальні й дотичні напруження, що діють у зварному шві:

$$\sigma_{зв} = 47,8 \text{ МПа}, \quad \tau_{зв} = 16,9 \text{ МПа}.$$

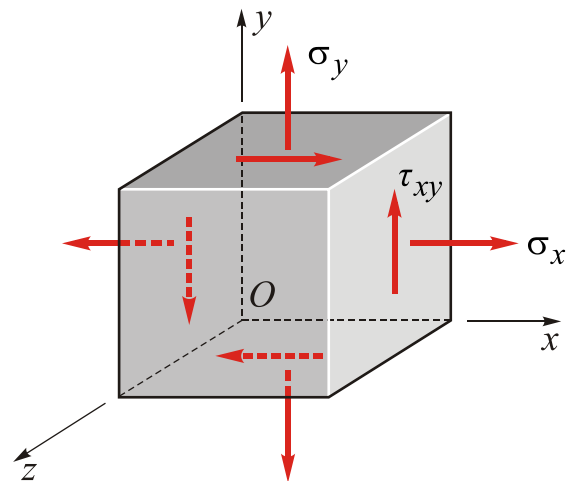
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

4.66. Прямокутна сталева плита завтовшки $t = 6,0$ мм навантажена однорідно розподіленими напруженнями σ_x і σ_y . Тензометри A і B наклеєно на її поверхню в напрямках x і y відповідно. Унаслідок вимірів отримано $\epsilon_x = 0,00062$ (подовження) і $\epsilon_y = -0,00045$ (укорочення). Узявши $E = 210$ ГПа і $\nu = 0,3$, визначити напруження σ_x і σ_y , а також зміну товщини плити Δt .

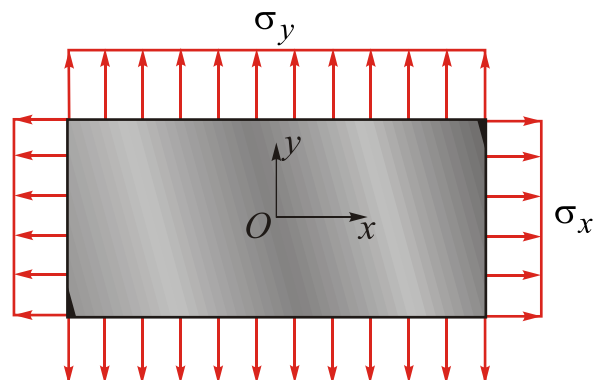


4.67. Поздовжні деформації ϵ_x і ϵ_y ребер елемента виміряно за допомогою тензометрів. Отримати: 1) формулу для обчислення деформації ϵ_z через відомі ϵ_x , ϵ_y , а також коефіцієнт Пуассона ν ; 2) формулу для обчислення відносної зміни об'єму e_V як

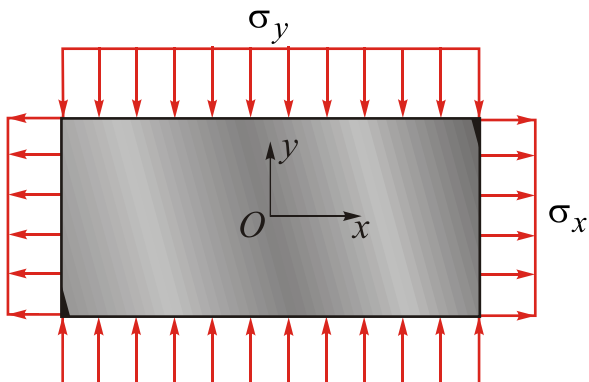
функції ϵ_x , ϵ_y і коефіцієнта Пуассона ν .



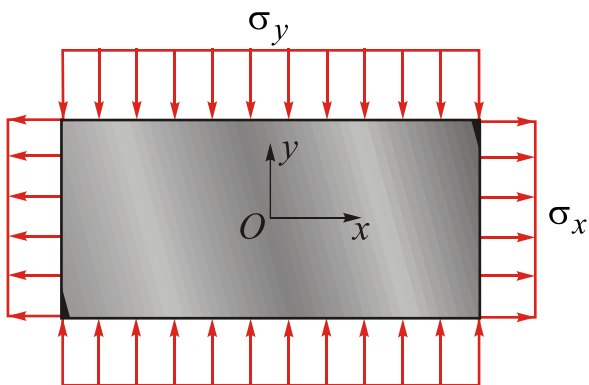
4.68. Плита навантажена однорідними розтягальними напруженнями $\sigma_x = 30$ МПа і $\sigma_y = 15$ МПа. Відповідні деформації $\epsilon_x = 550 \cdot 10^{-6}$ і $\epsilon_y = 100 \cdot 10^{-6}$. Визначити коефіцієнт Пуассона і модуль пружності матеріалу.



4.69. Сталева плита навантажена однорідними розтягальними $\sigma_x = 125$ МПа і стискальними $\sigma_y = -62$ МПа напруженнями. Відповідні деформації дорівнюють $\varepsilon_x = 700 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_y = -500 \cdot 10^{-6}$. Визначити коефіцієнт Пуассона ν і модуль пружності E матеріалу пластини.

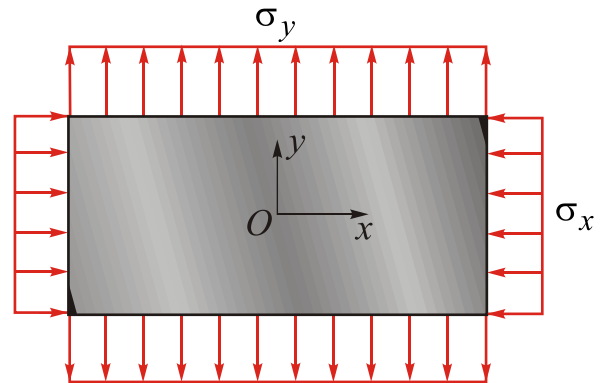


4.70. Прямокутна плита перебуває під дією однорідних нормальних напружень $\sigma_x = 65$ МПа (розтяг) і $\sigma_y = -30$ МПа (стиск). Розміри плити $200 \times 300 \times 15$ мм. Пливу виготовлено з алюмінію з модулем пружності $E = 70$ ГПа і $\nu = 0,33$. Визначити: 1) максимальну кутову деформацію γ_{\max} у плиті; 2) зміну товщини плити Δt ; 3) зміну об'єму плити ΔV .

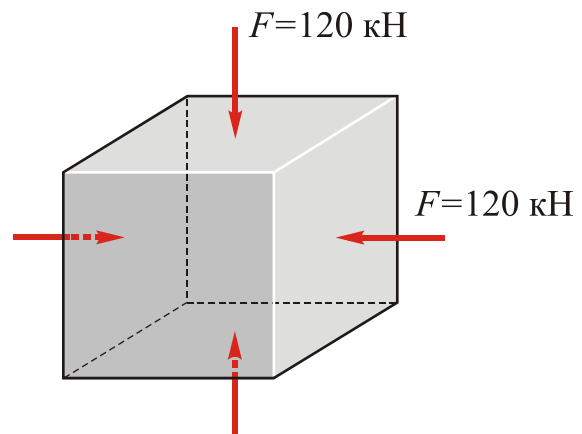


4.71. Прямокутна плита зазнає дії однорідних нормальних напружень

$\sigma_x = -60$ МПа (стиск) і $\sigma_y = 20$ МПа (розтяг). Розміри плити $200 \times 400 \times 20$ мм. Пливу виготовлено з алюмінію з модулем пружності $E = 70$ ГПа і $\nu = 0,33$. Визначити: 1) максимальну кутову деформацію γ_{\max} у плиті; 2) зміну товщини плити Δt ; 3) зміну об'єму плити ΔV .

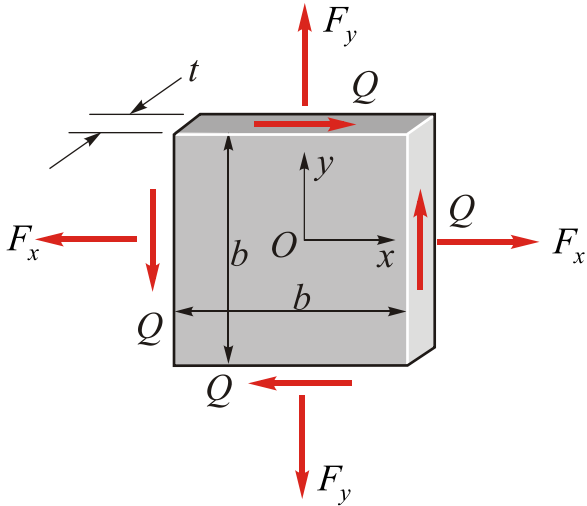


4.72. Куб з латуні розміром $50 \times 50 \times 50$ мм рівномірно стиснутий у двох перпендикулярних напрямках силами $F = 100$ кН. Обчислити зменшення об'єму куба ΔV , уважаючи, що $E = 100$ ГПа і $\nu = 0,34$.

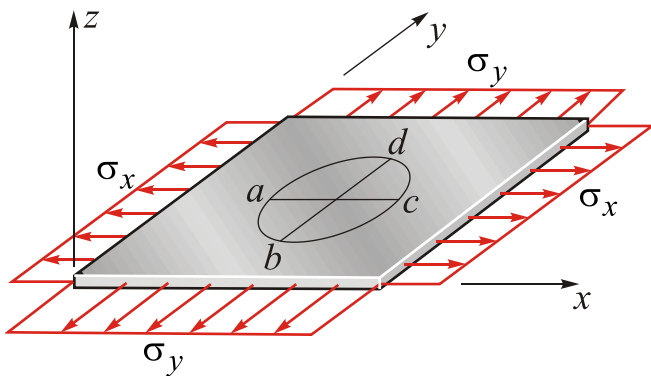


4.73. Квадратна плита завширшки b і завтовшки t навантажена нормальними силами F_x і F_y , а також силами зсуву Q . Ці сили створюють однорідно розподілені напруження на кожній грані плити. Обчислити зміну об'єму плити ΔV , якщо її розміри

$b = 500$ мм і $t = 30$ мм. Матеріал плити – магнієвий сплав з $E = 45$ ГПа і $\nu = 0,35$. Відомо, що $F_x = 450$ кН, $F_y = 150$ кН і $Q = 100$ кН.

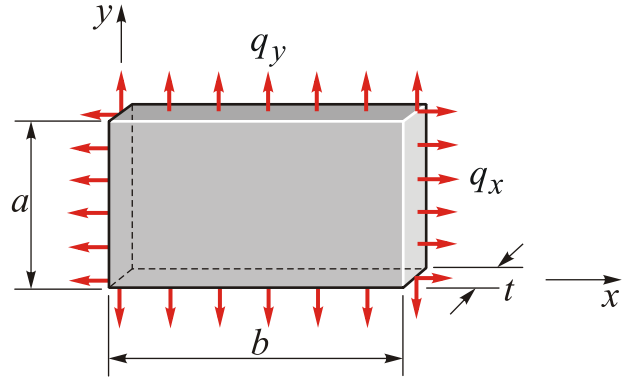


4.74. На латунній плиті накреслено круг діаметром $d = 200$ мм. Розміри плити $500 \times 500 \times 20$ мм. Сили, прикладені до плити, створюють рівномірно розподілені напруження $\sigma_x = 40$ МПа і $\sigma_y = 15$ МПа. Обчислити зміну таких величин: 1) діаметра ac , тобто Δac ; 2) діаметра bd , тобто Δbd ; 3) товщини плити Δt ; 4) об'єму плити ΔV . Узяти $E = 100$ ГПа і $\nu = 0,34$.

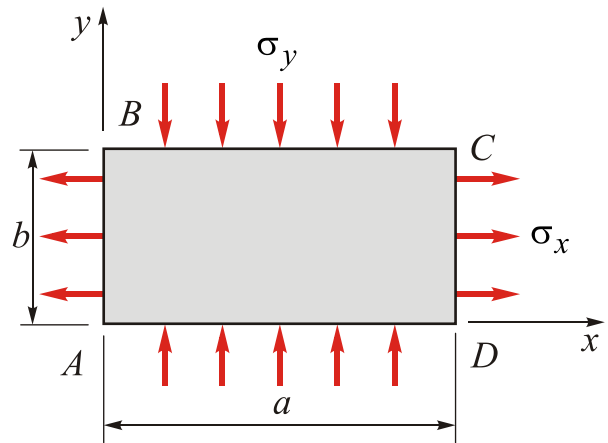


4.75. Прямокутна плита з алюмінію ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0,3$) однорідно навантажена розподіленим навантаженням. Визначити величини q_x і q_y (у кілоньютонах на метр), які спричи-

няють зміну довжини плити у напрямку осі x на $1,5$ мм і у напрямку осі y на 2 мм. Відомо, що $a = 2$ м, $b = 3$ м і $t = 5$ мм.



4.76. Сталева плита $ABCD$ завтовшки $t = 5$ мм навантажена рівномірно розподіленими зусиллями, які створюють напруження $\sigma_x = 100$ МПа і $\sigma_y = -60$ МПа. При $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,33$, $a = 160$ мм і $b = 200$ мм обчислити такі зміни: 1) довжини ребра AB ; 2) довжини ребра AD ; 3) довжини діагоналі BD ; 4) товщини.



4.77. Циліндричний паровий котел з внутрішнім діаметром $1,2$ м завдовжки 3 м виготовлений з 8 -міліметрової сталі. Знаючи, що $E = 200$ ГПа і $\nu = 0,3$, обчислити при заданому внутрішньому тиску 3 МПа зміну: 1) внутрішнього діаметра; 2) товщини; 3) довжини.

4.7. Енергія деформації та питома енергія деформації при плоскому напруженому стані

Нагадаємо, що питома потенціальна енергія деформації дорівнює енергії деформації, накопиченої в одиниці об'єму матеріалу при пружній деформації. Для її обчислення ще раз використаємо елемент, зображений на рис. 4.18 і 4.19. Оскільки лінійні й кутові деформації не взаємозв'язані, тобто *нормальні напруження не здійснюють роботу на кутових переміщеннях, а дотичні напруження – на лінійних переміщеннях*, можна скласти енергії деформації, визначені окремо від дії нормальних і дотичних напружень.

Обчислимо спочатку потенціальну енергію розтягання-стискання (див. рис. 4.18). На x -грань елемента діє внутрішня пружна сила $\sigma_x bc$. При статичному навантаженні конструктивного елемента навантаження повільно збільшується від нуля до його кінцевого значення. Так само поводитьься і внутрішня сила $\sigma_x bc$, переміщаючи x -грань на відстань $a\varepsilon_x$. Отже, робота внутрішньої пружної сили визначається формулою

$$\frac{1}{2}(\sigma_x bc)(a\varepsilon_x). \quad (4.90)$$

Внутрішня сила $\sigma_y ac$, що діє на y -грані, також здійснює роботу

$$\frac{1}{2}(\sigma_y ac)(b\varepsilon_y). \quad (4.91)$$

Сума цих двох робіт є потенціальною енергією пружної деформації розтягання-стискання, накопиченою в елементі abc :

$$U_1 = \frac{abc}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y). \quad (4.92)$$

Тоді питома енергія деформації, спричиненої нормальними напруженнями, відповідає формулі

$$U_{01} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y). \quad (4.93)$$

Потенціальну енергію деформації зсуву (див. рис. 4.19) можна знайти подібним чином. Для цього розглянемо малий елемент матеріалу під дією дотичних напружень (рис. 4.23, *a*). Припустимо, що він має бічну сторону у вигляді квадрата зі стороною h , а товщину t . Під дією дотичних напружень передня грань елемента перетворюється на ромб, як показано на рис. 4.23, *б*. Зміна прямого кута є кутовою деформацією γ_{xy} .

Внутрішні сили Q , що діють на гранях елемента (рис. 4.23, *в*), можна знайти, помноживши відповідні дотичні напруження на площу грані:

$$Q = \tau ht. \quad (4.94)$$

Ці сили здійснюють роботу зі змінення початкової форми (див. рис. 4.23, *a*) на деформовану (див. рис. 4.23, *б*). Щоб обчислити цю роботу, слід визначити величину лінійного зміщення δ грані елемента під дією Q . З цією метою елемент (див. рис. 4.23, *в*) як жорстке тіло повернемо до положення, коли верхня й нижня його грані стануть горизонтальними, як показано на рис. 4.23, *г*. Зазначимо, що при

такому обертанні сили Q не здійснюють ніякої роботи, оскільки вони створюють дві пари сил (вертикальних і горизонтальних), однакових за величиною й протилежно напрямлених.

Як впливає з рис. 4.23, *г*, верхня грань елемента буде зміщена горизонтально відносно нижньої на величину

$$\delta = \gamma_{xy}h, \quad (4.95)$$

де γ_{xy} – малий кут.

Якщо вважаємо, що матеріал є лінійно пружним, тобто відповідає закону Гука, то робота внутрішньої пружної сили Q дорівнює $Q\delta/2$, а отже, такою буде й енергія деформації, накопичена в елементі:

$$U = W = \frac{Q\delta}{2}. \quad (4.96)$$

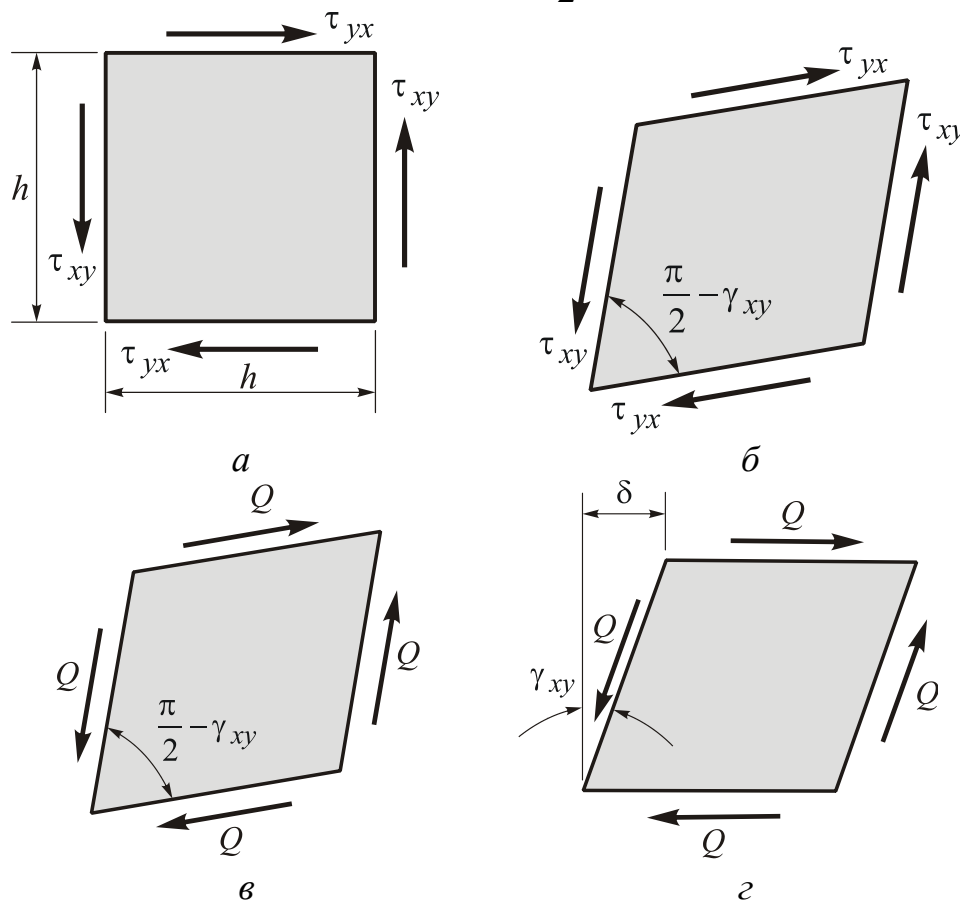


Рис. 4.23. Проекція плоского деформованого стану елемента матеріалу, що перебуває під дією дотичних напружень τ_{xy}

Зазначимо, що сили Q , які діють на бічних гранях елемента, не здійснюють роботи. Підставивши (4.94) і (4.95) у (4.96), отримуємо потенціальну енергію деформації зсуву елемента

$$U_2 = \frac{\tau\gamma_{xy}h^2t}{2}. \quad (4.97)$$

Оскільки об'єм елемента $V = h^2t$, питома енергія деформації чистого зсуву визначається формулою

$$U_{02} = \frac{\tau_{xy}\gamma_{xy}}{2}. \quad (4.98)$$

Складаючи два доданки (4.93) і (4.98), визначаємо питому енергію деформації в загальному вигляді плоского напруженого стану:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (4.99)$$

Підставивши сюди вирази для деформації з узагальненого закону Гука (4.61)–(4.64), визначаємо ту ж питому енергію деформації через напруження на площадках довільної орієнтації:

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}. \quad (4.100)$$

Підставивши в (4.100) компоненти напружень (4.65)–(4.67), визначаємо питому енергію деформації через деформації площадок довільної орієнтації:

$$U_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) + \frac{G\gamma_{xy}^2}{2}. \quad (4.101)$$

Щоб обчислити питому енергію деформації через головні напруження плоского напруженого стану, слід виключити компоненти дотичних напружень у рівняннях (4.99)–(4.100). У випадку дії тільки двох нормальних (тобто головних) напружень формула (4.100) для питомої потенціальної енергії деформації спрощується:

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2]. \quad (4.102)$$

У разі лінійного напруженого стану слід підставити $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$, $\gamma_{xy} = 0$ у рівняння (4.100) і (4.101):

$$U_0 = \frac{\sigma_x^2}{2E} \quad \text{або} \quad U_0 = \frac{E\varepsilon_x^2}{2}. \quad (4.103)$$

У випадку чистого зсуву в рівняння (4.100) і (4.101) для U_0 підставимо $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$:

$$U_0 = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \quad \text{або} \quad U_0 = \frac{G\gamma_{xy}^2}{2}. \quad (4.104)$$

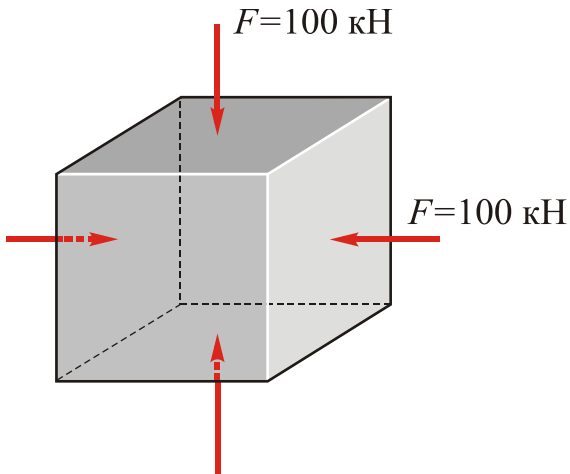
Потенціальну енергію пружної деформації елемента матеріалу при плоскому напруженому стані можна визначити інтегруванням питомої енергії деформації по об'єму матеріалу:

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{1}{E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right] dV. \quad (4.105)$$

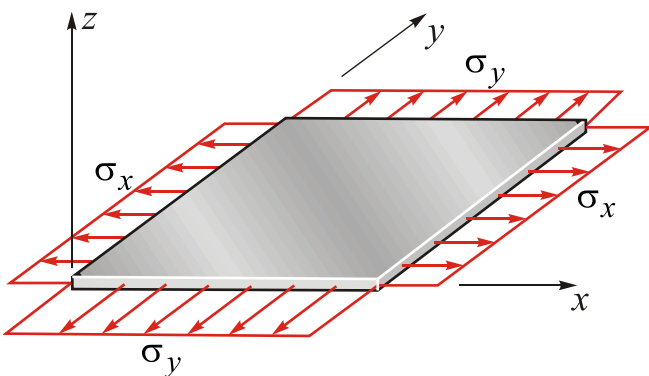
Зазначимо, що енергія деформації є нелінійною (квадратичною) функцією напруження або деформації. З цієї причини принцип суперпозиції для обчислення енергії деформації є непридатним.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

4.78. Латунний куб розміром $20 \times 20 \times 20$ мм стиснуто у двох перпендикулярних напрямках силами $F = 100$ кН. Обчислити енергію деформації U , накопичену в кубі, вважаючи, що $E = 90$ ГПа і $\nu = 0,34$.

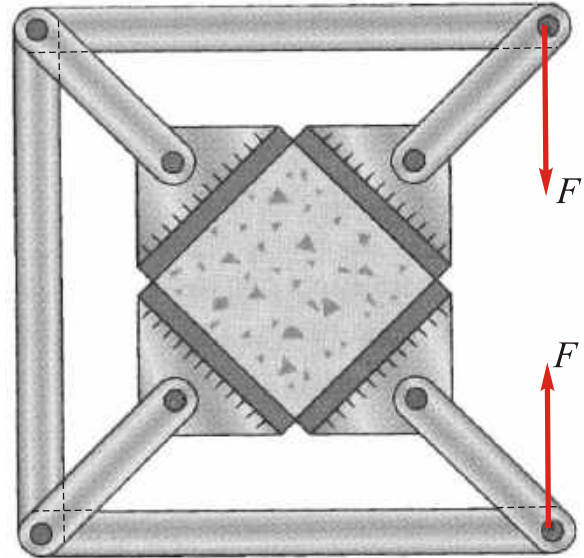


4.79. Латунна плита має розміри $400 \times 400 \times 10$ мм. Сили, прикладені до неї, створюють однорідно розподілені напруження $\sigma_x = 30$ МПа і $\sigma_y = 20$ МПа. Обчислити енергію деформації U , накопичену в плиті. Покласти $E = 100$ ГПа і $\nu = 0,34$.

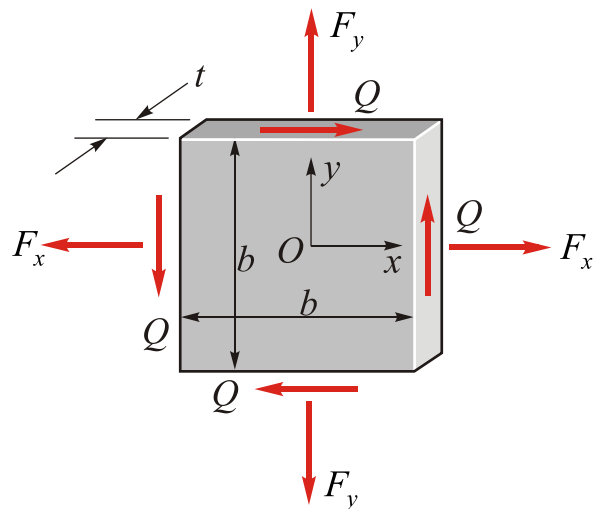


4.80. Куб бетону розміром $7 \times 7 \times 7$ см ($E = 20$ ГПа, $\nu = 0,1$) стиснуто у двох напрямках із застосуванням спеціального пристрою. Уважаючи, що кожна сила F дорівнює 50 кН,

обчислити енергію деформації U , накопичену в кубі.



4.81. Квадратна плита завширшки b і завтовшки t навантажена нормальними силами F_x і F_y , а також зсувними силами Q . Ці сили створюють однорідно розподілені напруження на гранях плити. Обчислити потенціальну енергію U , накопичену в плиті, якщо її розміри $b = 100$ мм і $t = 10$ мм. Матеріал плити – магнієвий сплав з $E = 45$ ГПа і $\nu = 0,35$. Відомо, що $F_x = 150$ кН, $F_y = 250$ кН і $Q = 80$ кН.



Розділ 5. ОБ'ЄМНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Напружений стан елемента ДТТ, який зазнає дії виключно трьох нормальних напружень σ_x , σ_y , σ_z , що діють на трьох взаємно перпендикулярних гранях, у розд. 2 було названо об'ємним. Самі ці напруження було названо головними напруженнями σ_1 , σ_2 , σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) (рис. 5.1). У загальному ж випадку об'ємного напруженого стану до граней елемента прикладено три нормальних і шість дотичних напружень (рис. 5.2).

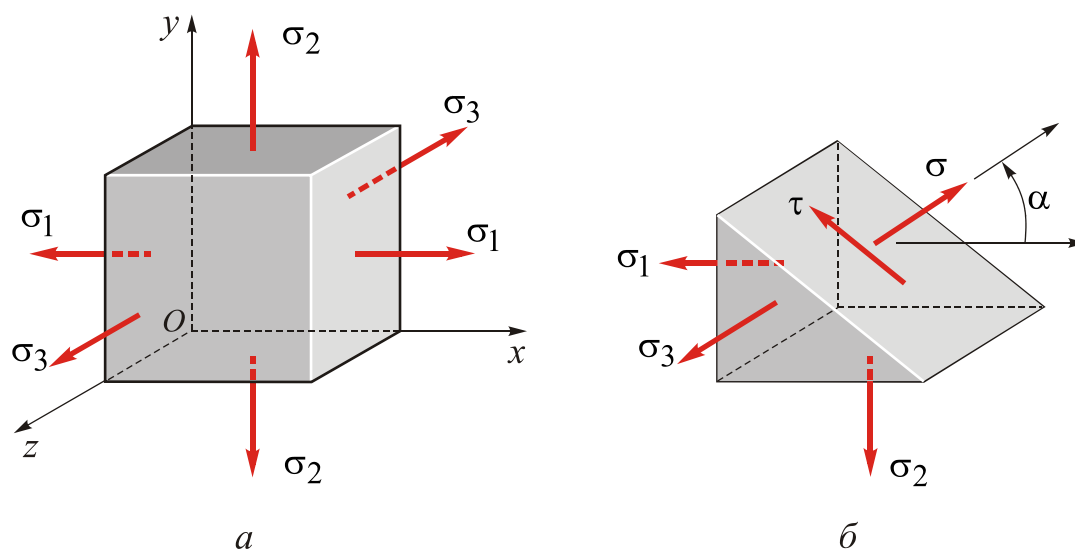


Рис. 5.1. Елемент ДТТ в умовах об'ємного напруженого стану та дії головних напружень (а), рівновага частини елемента, відсіченої похилою площадкою з нормаллю під кутом α та нормальними σ і дотичними τ напруженнями на ній (б)

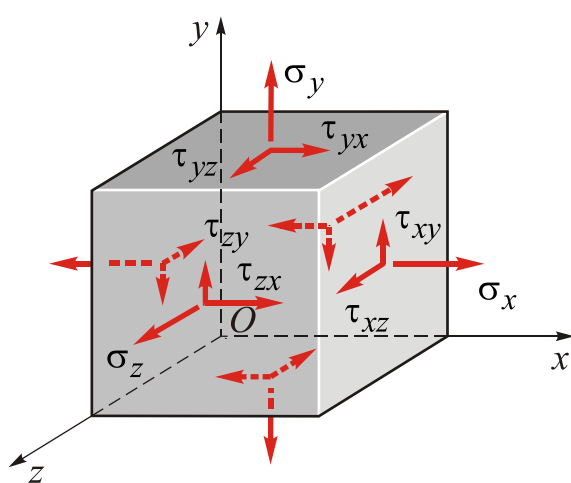


Рис. 5.2. Загальний випадок об'ємного напруженого стану

У разі, коли похила площадка є паралельною до осі z (рис. 5.1, б), на ній діють тільки нормальне σ і дотичне τ напруження, які лежать у xOy -площині. Раніше зазначалося, що вони не залежать від нормального напруження $\sigma_z = \sigma_3$. Отже, можна використати рівняння зв'язку напружень при повороті осей плоского напруженого стану, а також застосувати круги Мора для визначення напружень σ і τ . Такий самий висновок можна зробити щодо двох інших похилих площадок, паралельних до осей x і y .

5.1. Максимальні дотичні напруження

Як уже відомо, при плоскому напруженому стані максимальні дотичні напруження діють на площадках, нормаль до яких розташована під кутом 45° до головних напрямків напруженого стану. Якщо матеріал перебуває в умовах об'ємного напруженого стану та під дією головних напружень (рис. 5.1, а), то максимальні дотичні напруження діють на гранях елементів ДТТ, повернених на 45° відносно осей x , y і z . Наприклад, елемент, повернений на 45° відносно z -осі, перебуває під дією напружень

$$(\tau_{\max})_z = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (5.1)$$

а відносно осей x і y – під дією напружень

$$(\tau_{\max})_x = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad (5.2)$$

$$(\tau_{\max})_y = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (5.3)$$

Напруження, що діють на гранях елементів, розташованих під різними кутами відносно осей x , y і z , легко визначити, використовуючи круги Мора для кожного з трьох плоских напружених станів, які складають даний об'ємний напружений стан. Для елементів, повернених відносно z -осі, відповідний круг Мора позначено А на рис. 5.3. Зауважимо, що цей круг побудовано для випадку $\sigma_1 > \sigma_2$, а також $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$.

Подібним чином можна побудувати круги Мора для елементів ДТТ, повернених відносно осей x і y відповідно. Радіуси цих кругів є максимальними дотичними напруженнями, які обчислюють з використанням рівнянь (5.1)–(5.3). Очевидно, що абсолютне максимальне дотичне напруження дорівнює радіусу найбільшого круга С.

Як і раніше, нормальні напруження, що діють на площадках найбільших дотичних напружень, дорівнюють за величиною абсцисам центрів відповідних кругів Мора. Зазначимо, що елемент матеріалу можна виокремити площинами, нахиленими відносно осей x , y і z довільно. Нормальні й дотичні напруження, що діють на таких площадках довільної орієнтації, уже визначали в розд. 2 (співвідношення Коші). Величини нормальних напружень, які діють на площадках довільної орієнтації,

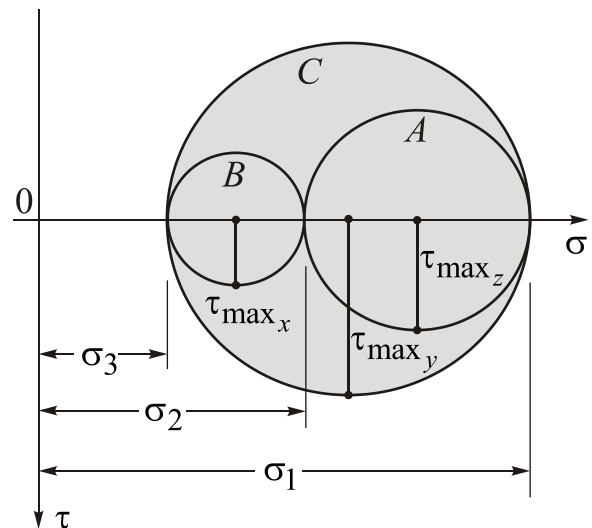


Рис. 5.3. Круги Мора для елемента ДТТ в умовах об'ємного напруженого стану

лежать у діапазоні між алгебрично найбільшим і найменшим головними напруженнями, а дотичні напруження на площадках довільної орієнтації за абсолютним значенням є меншими, ніж максимальні дотичні напруження, що обчислюють за формулами (5.1)–(5.3). Із них випливає, що максимальне дотичне напруження в точці дорівнює піврізниці найбільшого й найменшого головних напружень (формула (5.3)).

5.2. Закон Гука для об'ємного напруженого стану (узагальнений закон Гука)

Зв'язок між напруженнями й деформаціями для лінійно-пружного тіла (закон Гука) при одновісному напруженому стані було вперше розглянуто в розд. 1 (рівняння (1.9)). Нагадаємо, що для його застосування до плоского й об'ємного напруженого станів у розд. 2 було введено експериментально обґрунтовані припущення про те, що нормальні напруження не створюють деформацій зсуву, а дотичні напруження, навпаки, створюють тільки деформації зсуву. Окрім того, принцип суперпозиції є придатним для визначення подовжень (деформацій), спричинених декількома напруженнями, оскільки, як і раніше, маємо справу з абсолютно малими деформаціями. Зазначимо, що всі ці припущення є правильними для ізотропних матеріалів, які деформуються в межах лінійної пружності.

Розгляньмо ще раз елемент матеріалу одиничної товщини в загальному випадку плоского напруженого стану (рис. 5.4) і застосуємо до нього принцип суперпозиції. Під дією нормального напруження σ_x очевидно є поява не лише осьової деформації розтягання $\varepsilon_x(\sigma_x) = \sigma_x / E$, але й деформації поперечного звуження $\varepsilon_y(\sigma_x) = -\nu\sigma_x / E$. Подібним чином напруження σ_y створює в напрямку y деформацію подовжнього подовження $\varepsilon_y(\sigma_y) = \sigma_y / E$, а також деформацію поперечного звуження $\varepsilon_x(\sigma_y) = -\nu\sigma_y / E$. Запишемо складові деформацій:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}, \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (5.5)$$

В умовах чистого зсуву зв'язок між напруженнями й деформаціями має вигляд

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (5.6)$$

Ще раз зауважимо, що напруження τ_{xy} створює лише деформацію зсуву γ_{xy} . Із рівнянь (5.4)–(5.6) можна отримати рівняння зв'язку напружень і деформацій, виведені раніше як (4.65)–(4.67):

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad (5.7)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad (5.8)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (5.9)$$

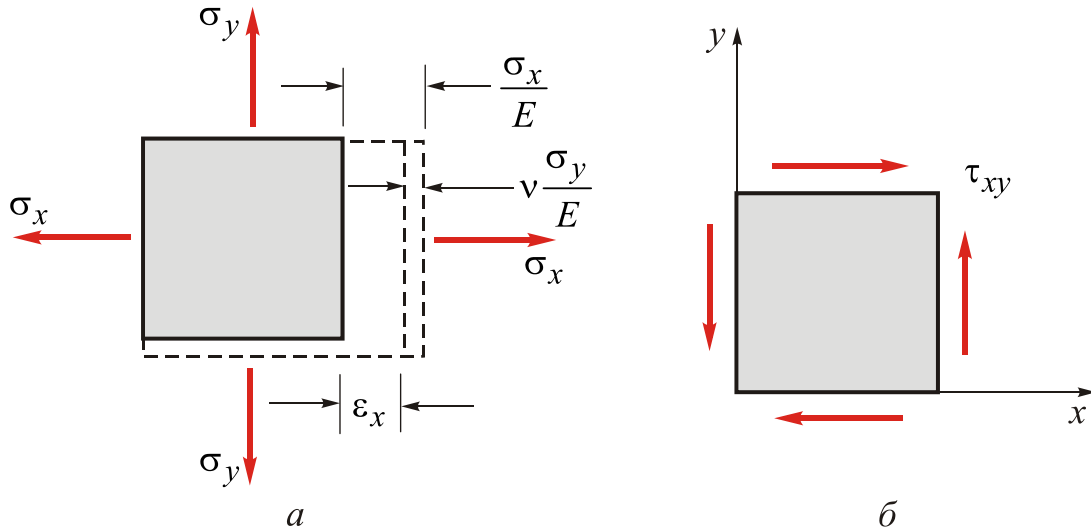


Рис. 5.4. Елемент в умовах плоского напруженого стану: *a* – під дією головних напружень; *б* – в умовах чистого зсуву

Рівняння (5.4)–(5.6) або (5.7)–(5.9) було названо законом Гука для плоского напруженого стану в запису для площадок довільної орієнтації. Такий метод визначення зв'язку складових напруженого й деформованого станів можна застосувати для об'ємного напруженого стану (див. рис. 5.2). У цьому найбільш загальному випадку навантаження елемента рівняння зв'язку напружень і деформацій називають **узагальненим законом Гука**:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad (5.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (5.13)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad (5.14)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad (5.15)$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G}, \quad (5.16)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}, \quad (5.17)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (5.18)$$

Додатні знаки складових нормальних напружень і лінійних деформацій означають розтягання (подовження), а від'ємні – стиснення (укорочення).

У більш простому випадку, коли на гранях елемента немає дотичних напружень, нормальні напруження стають головними, узагальнений закон Гука набуває спрощеної форми, а напруження σ_x , σ_y , σ_z – позначення σ_1 , σ_2 , σ_3 (зі збереженням умови $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), \quad \text{або} \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad (5.19)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x), \quad \text{або} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \text{або} \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (5.21)$$

Перепишемо ці рівняння для обчислення головних напружень:

$$\sigma_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_1 + \nu(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]; \quad (5.22)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_2 + \nu(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)]; \quad (5.23)$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_3 + \nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]. \quad (5.24)$$

Природно, що з рівнянь (5.19)–(5.21) шляхом підстановки $\sigma_z = 0$ можна отримати більш просту форму закону Гука для плоского напруженого стану, а підстановкою $\sigma_x = 0$ і $\sigma_z = 0$ – закон Гука для лінійного напруженого стану.

5.3. Відносна зміна об'єму

Відносну зміну об'єму для об'ємного напруженого стану можна визначити способом, який застосовувався для плоского напруженого стану (див. підрозд. 4.6.2). Якщо елемент зазнає дії головних напружень σ_1 , σ_2 , σ_3 , а його грані перебувають під дією головних деформацій ε_1 , ε_2 і ε_3 , можна використати рівняння (4.78):

$$e_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (5.25)$$

Зазначимо, що рівняння (5.25) є правдивим для будь-якого матеріалу, якщо тільки деформації будуть абсолютно малими. Підставимо в (5.25) деформації з (5.19)–(5.21):

$$e_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.26)$$

Також зауважимо, що рівняння (5.25) і (5.26) дають змогу обчислити відносну зміну об'єму при об'ємному напруженому стані як через головні напруження й головні деформації, так і через нормальні напруження й лінійні деформації на площадках довільної орієнтації завдяки інваріантності суми нормальних напружень і лінійних деформацій при повороті системи координат. При цьому через рівність нулю зміни об'єму, тобто через **нестисливість** матеріалу, з рівняння (5.26) випливає, що $\nu = 0,5$. Це ще раз підтверджує, що для пружно деформованих тіл $0 \leq \nu \leq 0,5$, а для ідеально пластичних тіл $\nu = 0,5$.

5.4. Питома енергія деформації та енергія деформації при об'ємному напруженому стані

Питому енергію деформації при об'ємному напруженому стані можна обчислити за методом, описаним у підрозд. 4.7. Згідно з (4.69) під дією двох головних напружень $\sigma_x = \sigma_1$ і $\sigma_y = \sigma_2$ виникають головні деформації $\varepsilon_x = \varepsilon_1$ і $\varepsilon_y = \varepsilon_2$, а в лінійно-пружному ДТТ накопичується питома потенціальна енергія деформації

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2). \quad (5.27)$$

У випадку об'ємного напруженого стану маємо

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3). \quad (5.28)$$

Підставивши у (5.28) рівняння деформацій (5.19)–(5.21), питому енергію деформації виражаємо через головні напруження:

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]. \quad (5.29)$$

Використовуючи рівняння (5.22)–(5.24), питому енергію деформації можна виразити через головні деформації:

$$U_0 = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + 2\nu(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) \right]. \quad (5.30)$$

У загальному випадку об'ємного напруженого стану, тобто при наявності нормальних і дотичних напружень, питома енергія деформації визначається формулою

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2). \quad (5.31)$$

Зазначимо, що при обчисленні питомої енергії деформації необхідно підставляти напруження й деформації з їх знаками.

Загальну енергію деформації, накопичену в пружному тілі, можна визначити інтегруванням питомої енергії деформації по об'єму матеріалу:

$$U = \int_V U_0 dV. \quad (5.32)$$

Також зауважимо, що енергія деформації є нелінійною (квадратичною) функцією напружень або деформацій, тому при її обчисленні принцип суперпозиції не застосовують.

5.5. Сферичний напружений стан та об'ємна деформація

Сферичний напружений стан – це окремий випадок об'ємного напруженого стану, коли всі три головні напруження є однаковими (рис. 5.5):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0. \quad (5.33)$$

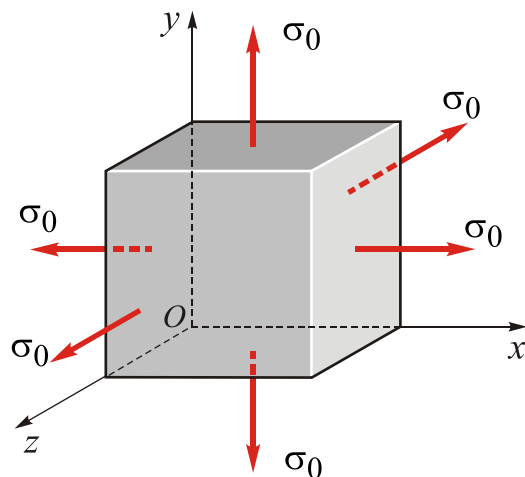


Рис. 5.5. Елемент в умовах сферичного (кульового) напруженого стану

Напруження σ_0 називають **сферичним (кульовим) напруженням**.

При такому напруженому стані змінюється тільки об'єм матеріалу, а не його форма. У цьому разі будь-яка похила площадка зазнає дії однакових нормальних напружень σ_0 і є вільною від дотичних напружень. Кожна грань елемента ДТТ є головною площадкою, а три круги Мора, зображені на рис. 5.3, перетворюються на точку.

Лінійні деформації в цьому випадку за величиною також будуть однаковими в усіх напрямках, якщо матеріал є однорідним та ізотропним. Якщо до матеріалу можна засто-

сувати закон Гука, то лінійні деформації згідно з (5.19)–(5.21) визначаються формулою

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}(1 - 2\nu). \quad (5.34)$$

Деформацію ε_0 називають **сферичною (кульовою) деформацією**.

Оскільки дотичних напружень немає, довжини ребер елемента, який має форму куба, змінюються однаково, і елемент залишається кубом. Загалом, будь-яке тверде тіло, що зазнає дії сферичних напружень, буде зберігати одні й ті ж пропорції в розмірах, проте буде розширюватися або стискатися залежно від знака σ_0 . Відносну зміну об'єму в цьому випадку можна обчислити за формулою (5.25), підставляючи складові деформацій з (5.34). Отже,

$$e_V = 3\varepsilon_0 = \frac{3\sigma_0(1 - 2\nu)}{E}. \quad (5.35)$$

Рівняння (5.35) можна подати в більш стислій формі, попередньо ввівши поняття **об'ємного модуля пружності**, який визначається формулою

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (5.36)$$

Тоді відносна зміна об'єму

$$e_V = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (5.37)$$

а об'ємний модуль пружності

$$K = \frac{\sigma_0}{e_V}. \quad (5.38)$$

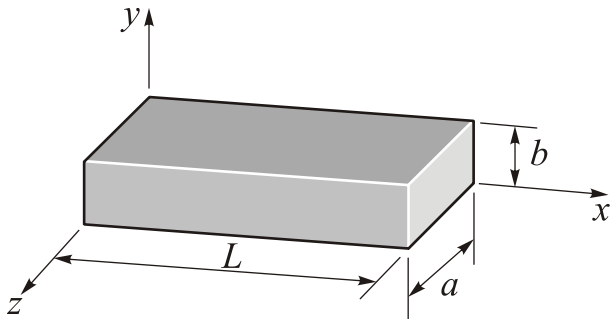
Таким чином, об'ємний модуль пружності можна визначити як відношення сферичного напруження до відносної зміни об'єму, що є аналогічним визначенню модуля пружності E при лінійному напруженому стані. *Зазначимо, що формули для e_V і K отримано, виходячи з припущення, що деформації є малими, а матеріал відповідає закону Гука.*

З рівняння (5.36) стає зрозумілим, що коли коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, то модулі K і E чисельно дорівнюють один одному. Із $\nu = 0$ випливає, що $K = E/3$, а якщо $\nu = 0,5$, то K стає нескінченною величиною, яка відповідає абсолютно жорсткому нестисливому матеріалу, що не змінює свого об'єму при навантаженні. Через це теоретично максимальною величиною для коефіцієнта Пуассона є $\nu = 0,5$. Про це вже говорили раніше.

Формули для сферичних напружень було отримано для елемента, однаково розтягнутого в усіх напрямках. Очевидно, що всі формули можна застосовувати до елемента в умовах усебічного стискання, однак у цьому разі напруження й деформації мають від'ємні знаки. Усебічне стискання має місце під час прикладення до матеріалу тиску p . Такий напружений стан часто називають **гідростатичним напруженим станом**.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 5.1



Стальний прямокутний брус з усіх сторін стиснуто рівномірним тиском $p = 150$ МПа. Обчислити зміну об'єму бруса та його розмірів, якщо $a = 40$ мм, $b = 30$ мм і $L = 100$ мм. Узяти $E = 200$ ГПа і $\nu = 0,3$.

Розв'язання.

Підставляємо

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0 = -p$ у рівняння (5.10)–(5.12) і вважаємо, що $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_0$. Тоді

$$\varepsilon_0 = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu);$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{150 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9}(1 - 0,6) = -0,3 \cdot 10^{-3}.$$

Таким чином, застосовуючи рівняння (5.35), зміну об'єму бруса можна виразити у вигляді $\Delta V = 3\varepsilon_0(abL) = -108$ мм³. Обчислюємо також деформації ребер у напрямках x , y і z :

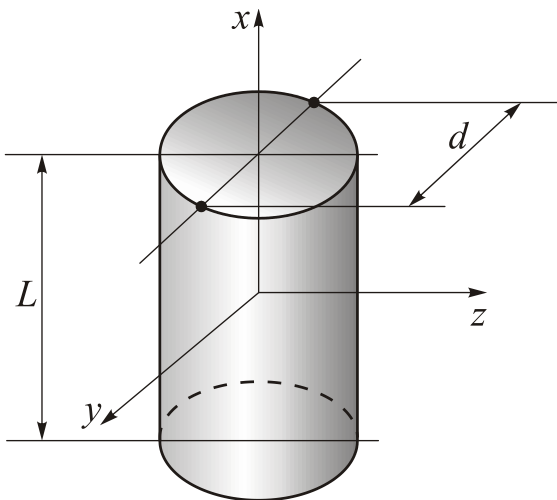
$$\Delta l_x = \delta_x = \varepsilon_0 L = (-0,3 \cdot 10^{-3}) \cdot 100 = -0,030 \text{ мм},$$

$$\Delta l_y = \delta_y = \varepsilon_0 b = (-0,3 \cdot 10^{-3}) \cdot 30 = -0,009 \text{ мм},$$

$$\Delta l_z = \delta_z = \varepsilon_0 a = (-0,3 \cdot 10^{-3}) \cdot 40 = -0,012 \text{ мм}.$$

Зазначимо, що від'ємний знак деформації означає укорочення довжини ребра бруса. Незважаючи на однакові відносні деформації в трьох головних напрямках, зміни довжин ребер бруса є різними.

Задача 5.2



Суцільний циліндр з чавуну перебуває під дією осьових і радіальних стискальних напружень 40 і 10 МПа відповідно. Узявши $E = 100$ ГПа, $\nu = 0,25$, $d = 120$ мм і $L = 200$ мм, визначити зміни: 1) довжини ΔL і діаметра Δd ; 2) об'єму циліндра ΔV .

Розв'язання.

Зауважимо, що $\sigma_x = -40$ МПа, а в радіальному напрямку $\sigma_y = \sigma_z = \sigma_0 = -10$ МПа. Відповідні осьову й радіальну деформації можна обчислити з рівнянь (5.10)–(5.12):

$$\varepsilon_x = -\frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_0 + \sigma_0)] = -\frac{10^6}{100 \cdot 10^9} \left[40 - \frac{1}{4}(10 + 10) \right] = -350 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_0 = -\frac{1}{E}[\sigma_0 - \nu(\sigma_0 + \sigma_x)] = -\frac{1}{100 \cdot 10^9} \left[10 - \frac{1}{4}(10 + 40) \right] = 25 \cdot 10^{-6}.$$

1. Знаходимо зменшення довжини та збільшення діаметра:

$$\Delta L = \varepsilon_x L = (-350 \cdot 10^{-6}) \cdot 200 = -0,07 \text{ мм},$$

$$\Delta d = \varepsilon d = (25 \cdot 10^{-6}) \cdot 120 = 0,003 \text{ мм}.$$

2. Відповідну зміну об'єму визначаємо з рівняння (5.25):

$$e_V = \varepsilon_x + 2\varepsilon_0 = (-350 + 2 \cdot 25) \cdot 10^{-6} = -300 \cdot 10^{-6}.$$

Отже, абсолютна зміна об'єму

$$\Delta V = e_V V_0 = (-300 \cdot 10^{-6}) [\pi(60)^2 \cdot 200] = -679 \text{ мм}^3,$$

причому знак «-» означає його зменшення.

Задача 5.3

Довга тонка плита завтовшки t , завширшки b і завдовжки L зазнає осьового навантаження F , яке створює в плиті рівномірно розподілені стискальні напруження σ_x . Вертикальні поверхні плити ($y = \pm b/2$) обмежено двома абсолютно жорсткими гладкими стінками, що запобігають розширенню плити в напрямку y . Визначити складові напружень і деформацій плити.

Розв'язання. Очевидно, що в плиті є відсутніми такі деформації та напруження: $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$, $\varepsilon_y = 0$, $\sigma_z = 0$, а також $\sigma_x = -F / (bt)$. Підставимо ці значення в рівняння (5.10)–(5.12):

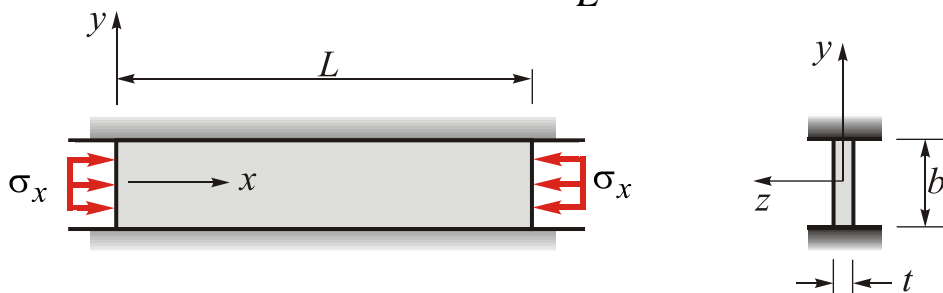
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad (\text{а})$$

$$0 = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (\text{б})$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \nu\sigma_y), \quad (\text{в})$$

звідки

$$\sigma_y = \nu\sigma_x, \quad \varepsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E}\sigma_x.$$



Використовуючи ці рівняння, визначаємо, що $\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x / (1 - \nu)$, а також

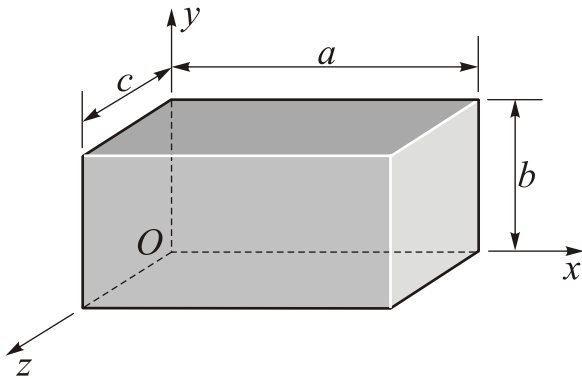
$$\sigma_x = -\frac{F}{bt}, \quad \sigma_y = -\nu\frac{F}{bt}, \quad \varepsilon_x = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{F}{bt}, \quad \varepsilon_z = \frac{\nu(1+\nu)}{E} \frac{F}{bt}.$$

Слід зазначити, що мають місце такі співвідношення:

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

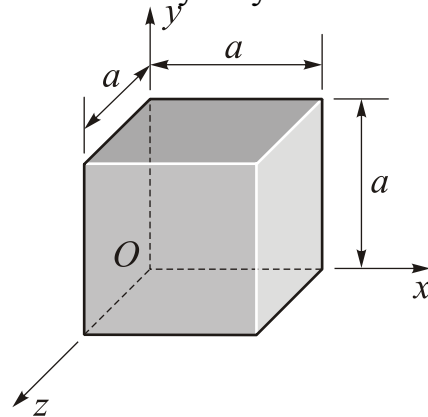
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

5.1. Стальний паралелепіпед ($E = 200$ ГПа, $\nu = 0,30$) з розмірами $a = 250$ мм, $b = 200$ мм і $c = 150$ мм перебуває під дією напружень $\sigma_x = -50$ МПа, $\sigma_y = -60$ МПа і $\sigma_z = -30$ МПа. Визначити такі величини: 1) максимальне дотичне напруження в матеріалі τ_{\max} ; 2) зміни розмірів Δa , Δb і Δc ; 3) зміну об'єму ΔV ; 4) енергію деформації U , накопичену в паралелепіпеді.

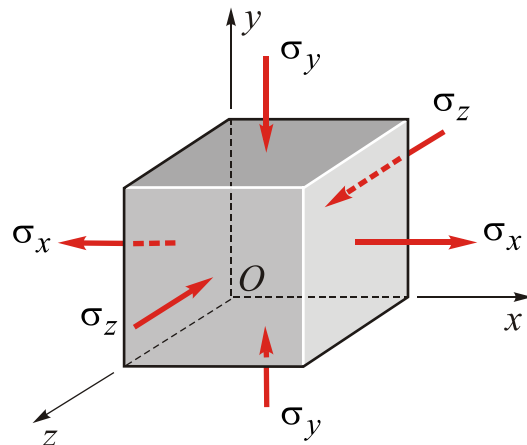


5.2. Чавунний куб ($E = 95$ ГПа і $\nu = 0,25$) з розміром сторін $a = 8$ см випробовують у лабораторії в умовах об'ємного напруженого стану. Унаслідок вимірів одержано такі стискальні деформації: $\varepsilon_x = -350 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -65 \cdot 10^{-6}$. Визначити такі величини: 1) нормальні напруження σ_x , σ_y і σ_z , прикладені до граней куба; 2) максимальне дотичне напру-

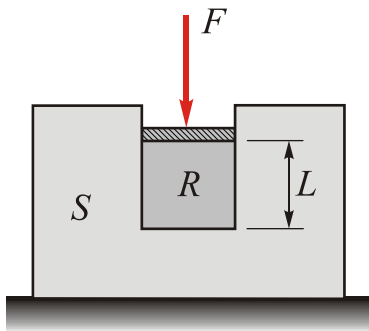
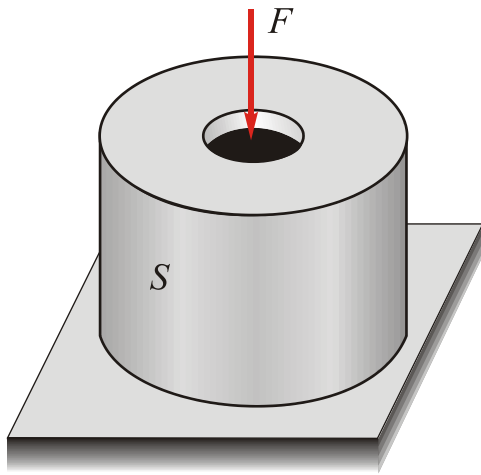
ження τ_{\max} у матеріалі; 3) зміну об'єму куба ΔV ; 4) енергію деформації U , накопичену в кубі.



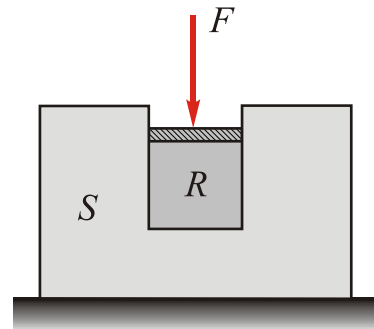
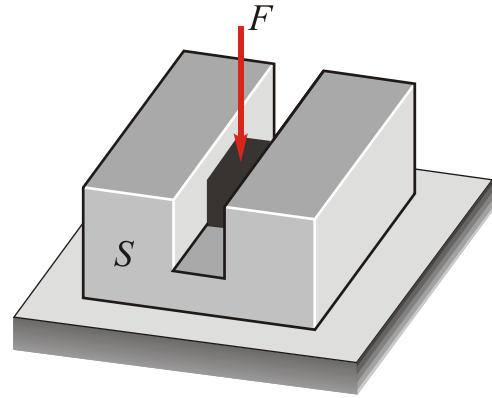
5.3. Елемент з алюмінію перебуває під дією напружень $\sigma_x = 40$ МПа, $\sigma_y = -35$ МПа і $\sigma_z = -20$ МПа. Відомо, що лінійні деформації вздовж осей x і y відповідають $\varepsilon_x = 713,8 \cdot 10^{-6}$ (подовження) і $\varepsilon_y = -502,3 \cdot 10^{-6}$ (укорочення). Обчислити об'ємний модуль пружності K алюмінію.



5.4. Циліндр із пружного матеріалу (гуми) радіусом R , завдовжки L і з поперечним перерізом A стиснуто всередині жорсткої сталюї оболонки S силою F , яка створює рівномірно розподілений тиск p_0 на поверхню гуми. Вивести формули для обчислення: 1) тиску p на межі гуми з оболонкою, не враховуючи тертя між гумою та сталлю; 2) зменшення висоти циліндра δ . Оболонку вважати абсолютно жорсткою порівняно з циліндром.



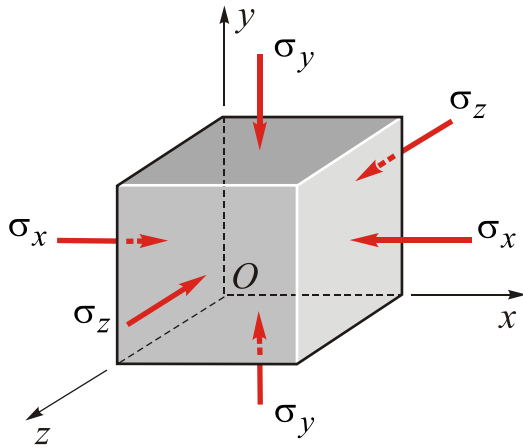
5.5. Блок із каучуку R установлено всередині жорсткого сталюго блока S без зазору. Однорідний тиск p_0 прикладений до блока внаслідок дії сили F . Вивести формули для обчислення: 1) поперечного тиску p між каучуком і сталлю, нехтуючи тертям між ними; 2) відносної зміни об'єму e блока; 3) питомої енергії деформації, накопиченої в каучуку.



5.6. Суцільна сталюа сфера ($E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$) перебуває під дією гідростатичного тиску p , унаслідок чого її об'єм зменшився на $0,4\%$. Обчислити: 1) тиск p ; 2) об'ємний модуль пружності сталі K ; 3) потенціальну енергію деформації U , накопичену у сфері, якщо її діаметр $d = 120$ мм.

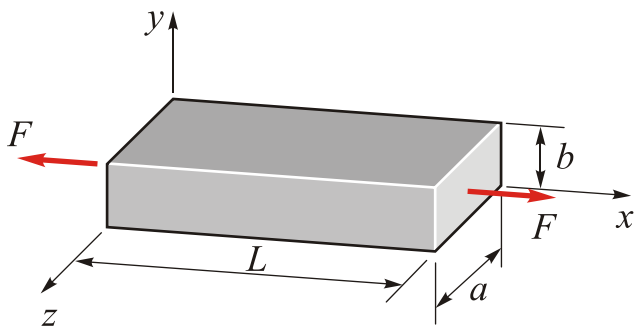
5.7. Суцільну латунну сферу ($E = 105$ ГПа, $\nu = 0,34$) занурено в океан на глибину 5000 м. Діаметр сфери дорівнює 25 см. Визначити зменшення діаметра Δd , зменшення об'єму ΔV і накопичену енергію деформації U .

5.8. Елемент із полімеру зазнає дії напружень $\sigma_x = -4,5$ МПа, $\sigma_y = -3,6$ МПа і $\sigma_z = -2,1$ МПа. Відомо також, що лінійні деформації в x - і y -напрявках є рівнозначними $\epsilon_x = -740 \cdot 10^{-6}$ і $\epsilon_y = -320 \cdot 10^{-6}$. Обчислити об'ємний модуль пружності K полімеру.

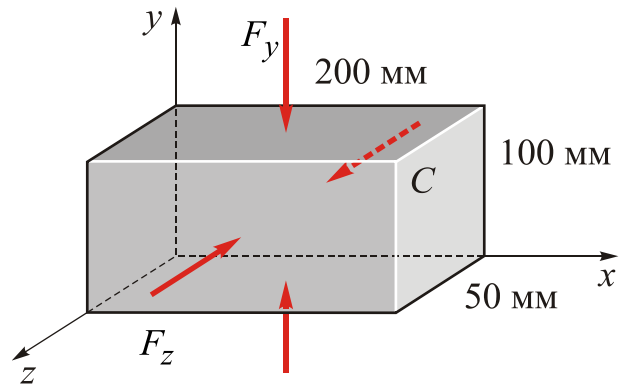


5.9. Куб із магнію розміром $100 \times 100 \times 100$ мм занурено у воду на глибину, при якій довжина кожного ребра зменшується на $0,018$ мм. Уважаючи, що $E = 45$ ГПа і $\nu = 0,35$, обчислити такі величини: 1) глибину d занурення куба; 2) ступінь збільшення густини магнію.

5.10. Визначити осьову деформацію бруса, навантаженого осьовою силою 20 кН. Брус затиснено в y - і z -напрявках. У розрахунках узяти $a = 6,0$ мм, $b = 10,0$ мм, $L = 10,0$ см, $E = 70$ ГПа і $\nu = 0,33$.



5.11. Прямокутний бетонний блок навантажено силами $F_x = 0$, $F_y = 150$ кН і $F_z = 50$ кН. Обчислити: 1) зміну довжини ребер паралелепіпеда; 2) стискальну силу, прикладену в y -напрямку, яка, будучи розподіленою по поверхні паралелепіпеда, створює в напрямку осі y деформацію, що дорівнює деформації від прикладених сил. Узяти $E = 24$ ГПа і $\nu = 0,2$.



5.12. Суцільний циліндр діаметром 50 мм і завдовжки 100 мм навантажено гідростатичним тиском із напруженнями $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -50$ МПа. Узяти $E = 205$ ГПа і $\nu = 0,33$. Обчислити зміни довжини та об'єму циліндра.

Розділ 6. ПЛОСКИЙ ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН

Величини деформацій у точці ДТТ змінюються залежно від орієнтації грани елеента ДТТ аналогічно зміні величин напружень. Важливим практичним завданням є отримання рівнянь зв'язку між деформаціями уздовж напрямків, розташованих під заданими кутами відносно вихідної системи координат, і відомими деформаціями вздовж її осей. Вони мають широке застосування в експериментальних дослідженнях напружено-деформованого стану з використанням результатів вимірювання деформацій.

6.1. Вимірювання деформацій

Вимірювання деформацій ДТТ є основним методом експериментальної перевірки розрахунків у механіці матеріалів, а також визначення опору матеріалів деформуванню при встановленні зв'язку між напруженнями й деформаціями. На сьогодні створено велику кількість різноманітних механічних, електричних і оптичних систем для вимірювання лінійних деформацій на поверхні конструктивних елементів. Очевидно, що всі її точки перебувають в умовах плоского напруженого стану, оскільки напруження в напрямку нормалі до поверхні дорівнює нулю (див. рис. 2.11). Найбільш поширеними серед існуючих систем вимірювання деформацій є електричні датчики деформації, які називають **електричними тензометрами**. Наприклад, при статичних випробуваннях літаків використовують десятки тисяч таких тензометрів. Значення тензометричних вимірювань важко переоцінити, оскільки за їх результатами можна поновити картину діючих напружень і визначити таким чином «слабкі» місця конструкції.

Електричний тензометр складається з послідовно з'єднаних тонких провідників струму, що утворюють решітку, виконану з тонкого дроту або фольги з матеріалу з високим електричним опором та обклеєну з двох боків папером або полімерною плівкою (підкладкою) (рис. 6.1, *a*). Підкладка призначена для того, щоб ізолювати решітку від металевої поверхні, до якої вона жорстко кріпиться (зазвичай за допомогою клею). В основному для виготовлення решітки використовується 0,03-міліметровий дріт або фольга такої ж товщини. Самі тензометри за довжиною (так званою базою) мають достатньо малі розміри (від 2 до 20 мм), щоб забезпечити високу точність вимірювання деформації в околі тієї чи іншої точки ДТТ (можливим є вимірювання деформації до $1 \cdot 10^{-6}$). Оскільки тензометри жорстко прикріплено до поверхні деформованого конструктивного елемента, зміна їх довжини дорівнює абсолютній деформації поверхні ДТТ у цьому ж напрямку, осередненій у межах площі тензометра і пропорційній відносній лінійній деформації. Відносна лінійна деформація визначається за зміною величини електричного струму, що проходить через послідовно з'єднані дроти решітки, для чого використовується особлива електрична схема підключення решітки до джерела струму, яка називається **містком Уїтстона**. Збільшуючи кількість дротів у решітці, можна збільшити так звану **тензочутливість**, тобто збільшити зміну струму при тому ж абсолютному подовженні решітки тензометра.

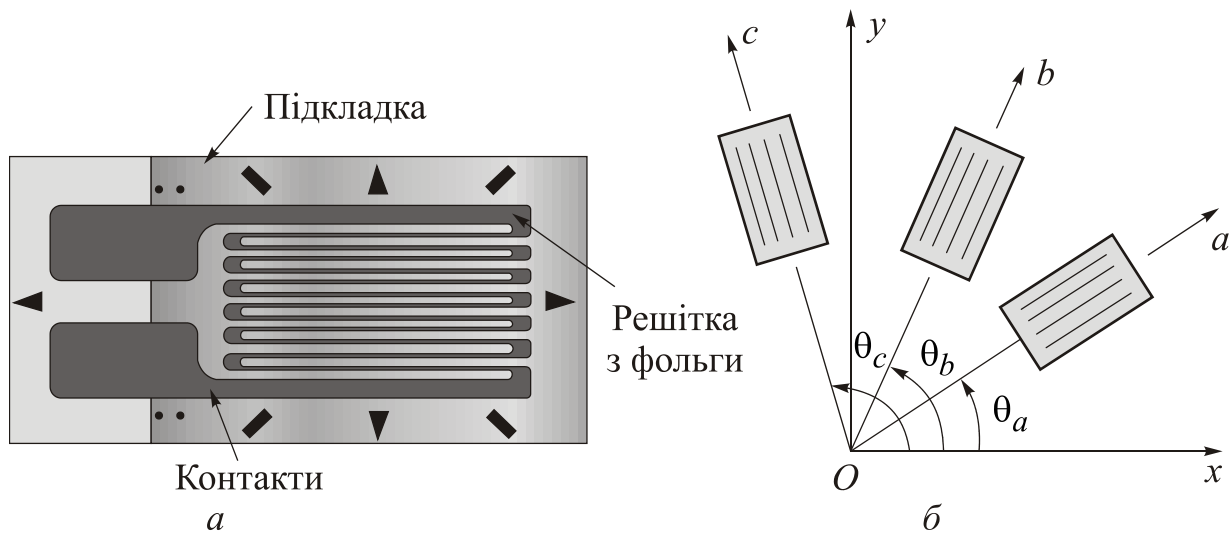


Рис. 6.1. Електричний тензометр (а) і розетка тензометрів (б)

6.2. Порівняння понять «плоский напружений стан» і «плоский деформований стан»

Щоб порівняти поняття «плоский напружений стан» і «плоский деформований стан», розглянемо елемент ДТТ із розмірами a , b , c у відповідних x -, y -, z -напрявках (рис. 6.2, а). Якщо деформація має місце, наприклад, у xOy -площині, то їй відповідають у загальному випадку три компоненти деформованого стану: лінійна деформація ε_x у x -напрявку (рис. 6.2, б), лінійна деформація ε_y у y -напрявку (рис. 6.2, в), а також деформація зсуву γ_{xy} (рис. 6.2, г). Кажуть, що в цьому випадку елемент матеріалу перебуває в плоскому деформованому стані, тобто в умовах плоскої деформації. При цьому відсутні є лінійна деформація ε_z у z -напрявку та деформації зсуву γ_{xz} і γ_{yz} у xOz - і yOz -площинах відповідно. У підсумку плоска деформація визначається умовами

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (6.1)$$

Решта складників (ε_x , ε_y і γ_{xy}) у загальному випадку є ненульовими. Така плоска деформація має місце, коли передню й задню грані елемента на рис. 6.2, а абсолютно жорстко затиснено. Природно, такі граничні умови рідко мають місце при розрахунку конструктивних елементів, однак будемо їх використовувати під час виведення рівнянь зв'язку складових деформованого стану при повороті його напрямків (осей).

Визначення плоскої деформації (рівняння (6.1)) відрізняється від визначення плоского напруженого стану, для якого виконуються умови

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (6.2)$$

у той час як решта напружень (σ_x , σ_y і τ_{xy}) у загальному випадку мають ненульові значення, тобто напруження діють у xOy -площині. На рис. 6.3 проілюстровано порівняння плоских напруженого й деформованого станів.

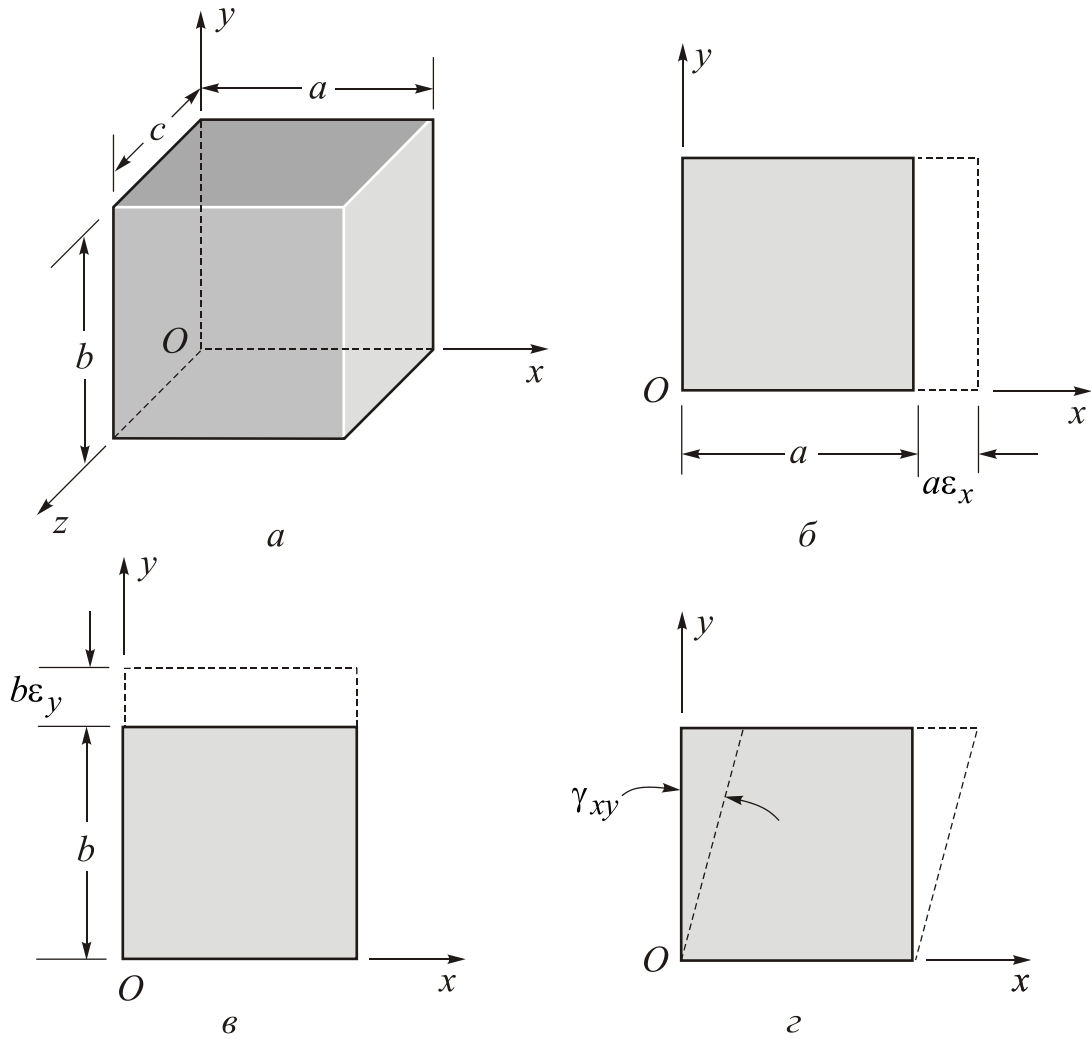


Рис. 6.2. Компоненти плоского деформованого стану ε_x , ε_y і γ_{xy} у xOy -площині (передню і задню грані елемента абсолютно жорстко затиснено)

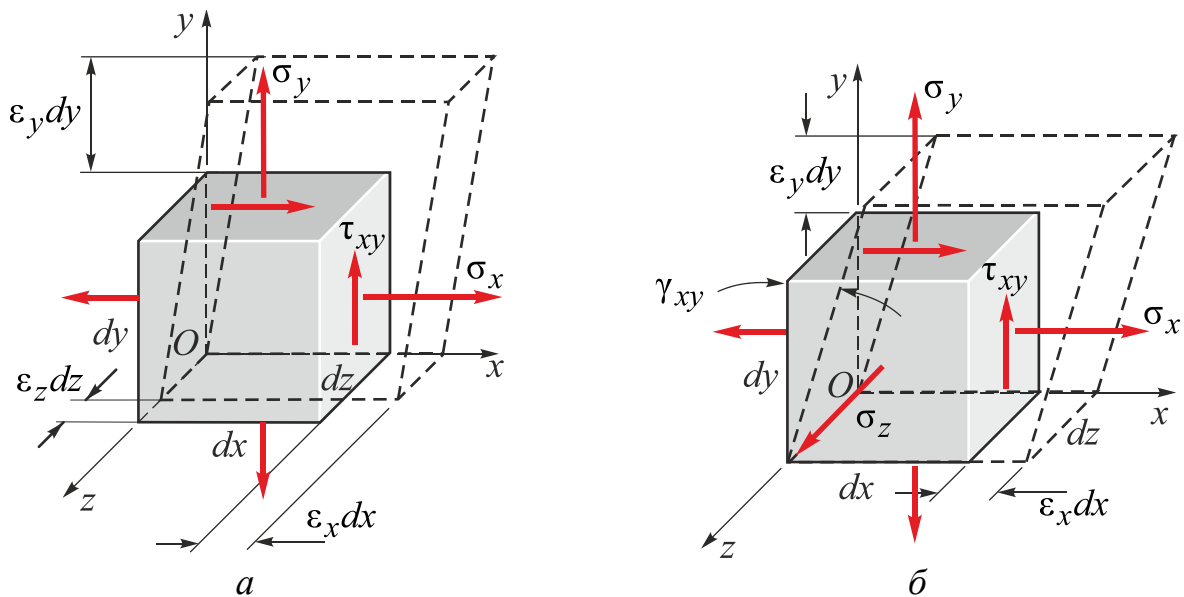


Рис. 6.3. Порівняння плоских напруженого й деформованого станів: *a* – плоский напружений стан; *б* – плоский деформований стан (в обох випадках пунктирами умовно показано деформований стан зі збільшенням об'єму)

Зазвичай плоский напружений стан і плоский деформований стан не виявляються в одній і тій же точці одночасно. Елемент в умовах плоского напруженого стану (рис. 6.3, а) відповідно до узагальненого закону Гука буде деформуватися вздовж осі z ($\varepsilon_z \neq 0$). Так само елемент в умовах плоского деформованого стану зазнає дії ненульових напружень σ_z , які виникають при накладанні абсолютно жорстких обмежень на переміщення вздовж осі z ($\varepsilon_z = 0$). Отже, його напружений стан – тривимірний (об’ємний). Винятком є випадок, коли елемент матеріалу, що відповідає закону Гука, в умовах плоского напруженого стану зазнає дії однакових за величиною й протилежних за напрямком напружень, тобто $\sigma_x = -\sigma_y$. У цьому разі в напрямку осі z лінійних деформацій немає, а отже, елемент перебуває в умовах плоского деформованого стану. Інший гіпотетичний випадок має місце, коли матеріал елемента має нульовий коефіцієнт Пуассона. Для такого елемента будь-який плоский напружений стан одночасно є і плоским деформованим станом, бо $\varepsilon_z = 0$ (див. рівняння (4.63)).

Рівняння зв’язку нормальних і дотичних напружень при плоскому напруженому стані в xOy -площині (рівняння (4.8) і (4.9)) є правдивими навіть за наявності ненульового напруження σ_z . Цей висновок базується на тому, що напруження σ_z не входить у рівняння рівноваги, які було використано при виведенні рівнянь (4.8) і (4.9). Із цієї причини *рівняння зв’язку складових плоского напруженого стану при повороті осей можна використовувати також для обчислення напружень плоского деформованого стану.*

Одночасно рівняння зв’язку лінійних і кутових деформацій при плоскому деформованому стані в xOy -площині є правдивими, якщо навіть має місце ненульова лінійна деформація ε_z . Причина цього є простою: деформація ε_z не впливає на геометричні співвідношення, які було використано під час виведення. Таким чином, *рівняння зв’язку складових плоского деформованого стану можна використовувати для обчислення деформацій при плоскому напруженому стані.*

Якщо читач пам’ятає, рівняння зв’язку складових плоского напруженого стану при повороті осей було виведено з використанням лише умов рівноваги елемента. Тому вони є правдивими для будь-якого матеріалу, а не тільки для лінійно-пружного, який відповідає закону Гука. Такого ж висновку можна дійти при оцінюванні рівнянь зв’язку складових плоского деформованого стану при повороті осей, оскільки ці рівняння було виведено з використанням виключно геометричних перетворень. Ці рівняння також не залежать від властивостей матеріалу.

6.3. Рівняння зв'язку складових плоского деформованого стану при повороті осей координат

Для виведення цих рівнянь будемо використовувати систему координат, показану на рис. 6.4. Припустимо, що лінійні деформації ε_x і ε_y , а також кутова деформація γ_{xy} у системі координат xOy є відомими (див. рис. 6.2). Метою цього дослідження є визначення лінійної деформації ε_{x_1} і кутової деформації $\gamma_{x_1y_1}$ у системі координат x_1, y_1 , повернутої відносно початкової на певний додатний кут θ (поворот проти годинникової стрілки). При цьому для обчислення лінійної деформації ε_{y_1} не будемо виводити окреме рівняння, а підставимо в рівняння для ε_{x_1} значення кута $\theta + 90^\circ$.

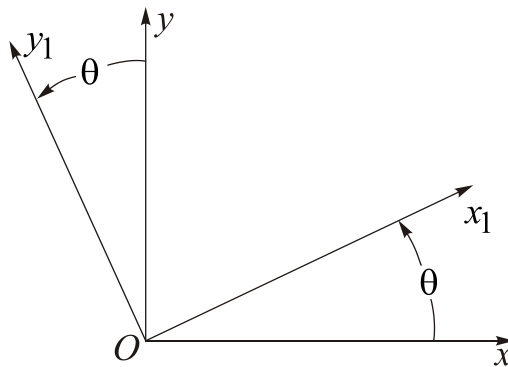


Рис. 6.4. Початкова (xOy) і повернута на кут $\theta > 0$ (x_1Oy_1) системи координат

6.3.1. Визначення лінійної деформації ε_{x_1}

Щоб визначити лінійну деформацію ε_{x_1} у напрямку осі x_1 , розглянемо нескінченно малий елемент матеріалу, розташований таким чином, що вісь x_1 збігається з його діагоналлю, а осі x і y збігаються з його сторонами (рис. 6.5, а). Вісь z тривимірного елемента напрямлена перпендикулярно до площини фігури.

Деформація ε_x уздовж осі x спричиняє подовження сторони елемента dx , що дорівнює $\varepsilon_x dx$ (рис. 6.5, а), унаслідок чого довжина діагоналі елемента збільшується на величину

$$\varepsilon_x dx \cos \theta.$$

Деформація ε_y уздовж осі y спричиняє подовження сторони елемента dy , що дорівнює $\varepsilon_y dy$ (рис. 6.5, б), унаслідок чого довжина діагоналі елемента збільшується на величину

$$\varepsilon_y dy \sin \theta.$$

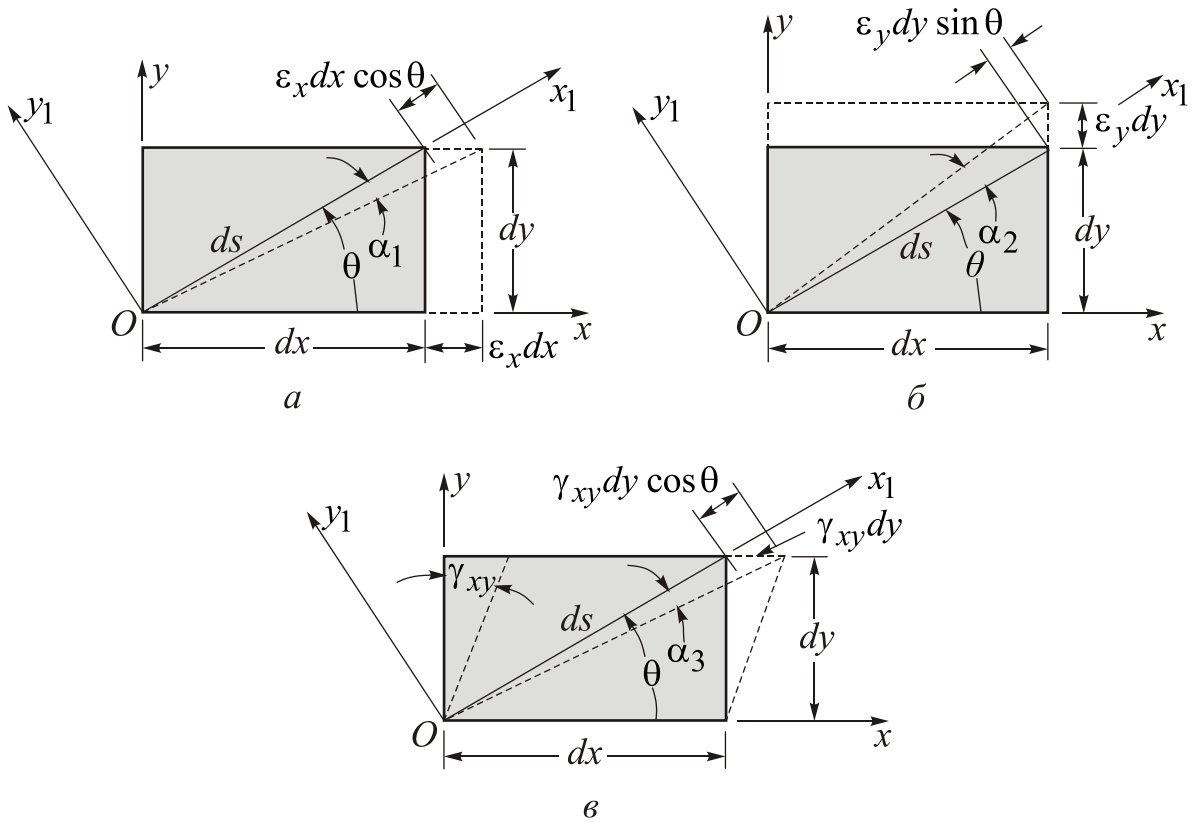


Рис. 6.5. Деформації елемента в умовах плоского деформованого стану, обумовлені: *a* – лінійною деформацією ε_x ; *б* – лінійною деформацією ε_y ; *в* – деформацією зсуву γ_{xy}

Із рис. 6.5 видно, як впливає кутова деформація γ_{xy} на зміну довжини діагоналі елемента. Ця деформація приводить до зміни форми елемента (прямокутник перетворюється на паралелограм). При цьому лівий нижній кут елемента зменшується на величину, що дорівнює кутовій деформації γ_{xy} . Отже, абсолютний зсув верхньої сторони елемента вправо відносно нижньої сторони дорівнює $\gamma_{xy}dy$. Унаслідок цього довжина діагоналі збільшується на значення

$$\gamma_{xy}dy \cos \theta.$$

Підсумкові збільшення Δds довжини діагоналі ds є сумою трьох доданків:

$$\Delta ds = \varepsilon_x dx \cos \theta + \varepsilon_y dy \sin \theta + \gamma_{xy} dy \cos \theta.$$

Лінійна деформація ε_{x_1} у напрямку x_1 визначається відношенням приросту довжини діагоналі до її початкової довжини ds :

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon_x \frac{dx}{ds} \cos \theta + \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \sin \theta + \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \cos \theta.$$

Оскільки $dx/ds = \cos \theta$ і $dy/ds = \sin \theta$, рівняння набирає вигляду

$$\varepsilon_{x_1} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta. \quad (6.3)$$

Лінійну деформацію ε_{y_1} у напрямку осі y_1 можна визначити, підставивши у (6.3) значення кута $\theta_1 = \theta + 90^\circ$.

6.3.2. Визначення кутової деформації $\gamma_{x_1 y_1}$

Кутова деформація $\gamma_{x_1 y_1}$ дорівнює зменшенню кута між осями x_1 і y_1 . Для обчислень використовуємо зв'язок між системами координат xOy і x_1Oy_1 , зображений на рис. 6.6.

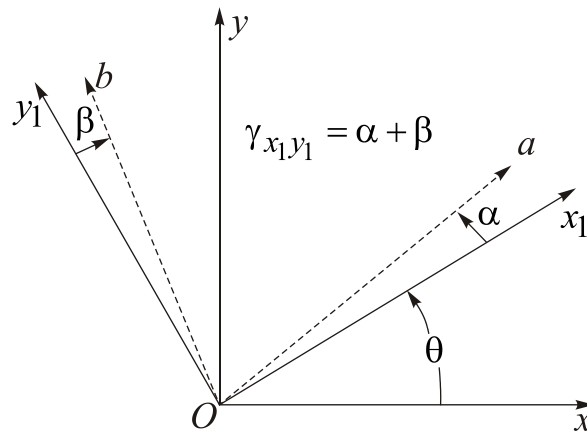


Рис. 6.6. Деформація зсуву $\gamma_{x_1 y_1}$ у системі координатних осей $x_1 O y_1$

Нехай лінія Oa є лінією на елементі, яка спочатку була напрямлена вздовж осі x_1 , тобто вздовж діагоналі елемента на рис. 6.5. Переміщення під дією деформацій ε_x , ε_y і γ_{xy} (див. рис. 6.5) спричинили поворот лінії Oa проти годинникової стрілки на кут α до положення, показаного на рис. 6.6. Подібним чином лінія Ob , яка була спочатку напрямлена вздовж осі y_1 , унаслідок переміщень виявилася повернутою за годинниковою стрілкою на кут β до положення, показаного на рис. 6.6. Отже, кутова деформація $\gamma_{x_1 y_1}$ є зменшенням кута між двома вказаними лініями, розташованими під кутом 90° одна до одної:

$$\gamma_{x_1 y_1} = \alpha + \beta. \quad (6.4)$$

Для визначення $\gamma_{x_1 y_1}$ необхідно обчислити кути α і β . Кут α можна знайти через переміщення, показані на рис. 6.5. Деформація ε_x (див. рис. 6.5, a) спричиняє поворот діагоналі елемента за годинниковою стрілкою. Позначимо цей кут як α_1 . Він дорівнює відстані $\varepsilon_x dx \sin \theta$, поділеній на довжину діагоналі ds :

$$\alpha_1 = \varepsilon_x \frac{dx}{ds} \sin \theta.$$

Подібним чином деформація ε_y спричиняє поворот діагоналі ds проти годинникової стрілки на кут α_2 (див. рис. 6.5, б). Цей кут дорівнює відстані $\varepsilon_y dy \cos \theta$, поділеній на ds :

$$\alpha_2 = \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \cos \theta.$$

Додатково кутова деформація γ_{xy} спричиняє поворот діагоналі за годинниковою стрілкою на кут α_3 (див. рис. 6.5, в), який дорівнює відношенню відстані $\gamma_{xy} dy \sin \theta$ до довжини діагоналі ds :

$$\alpha_3 = \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \sin \theta.$$

Підсумковий поворот діагоналі ds проти годинникової стрілки (див. рис. 6.5) дорівнює куту α , показаному на рис. 6.6:

$$\alpha = -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -\varepsilon_x \frac{dx}{ds} \sin \theta + \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \cos \theta - \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \sin \theta.$$

Оскільки $dx/ds = \cos \theta$ і $dy/ds = \sin \theta$, рівняння набуває вигляду

$$\alpha = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \sin^2 \theta. \quad (6.5)$$

Кут повороту лінії Ob (див. рис. 6.6), спочатку розташованої під кутом 90° до лінії Oa , можна обчислити шляхом підстановки кута $\theta + 90^\circ$ замість θ у вираз (6.5) для α :

$$\begin{aligned} \alpha(90^\circ + \theta) &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin(\theta + 90^\circ) \cos(\theta + 90^\circ) - \gamma_{xy} \sin^2(\theta + 90^\circ) = \\ &= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Оскільки було прийнято, що додатний кут α відкладається проти годинникової стрілки, одержаний кут $\alpha(90^\circ + \theta)$ також буде додатним. У цьому ж випадку кут β відкладається за годинниковою стрілкою (див. рис. 6.6), тому вважаємо, що

$$\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta. \quad (6.7)$$

Склавши α і β , отримуємо деформацію зсуву $\gamma_{x_1 y_1}$ (див. рівняння (6.4)):

$$\begin{aligned} \gamma_{x_1 y_1} &= -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \\ &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Таким чином, удалося отримати рівняння для деформації зсуву $\gamma_{x_1 y_1}$ у системі осей $x_1 y_1$ через складові деформованого стану ε_x , ε_y , γ_{xy} , обчислені в системі осей xOy .

6.3.3. Універсальна форма запису рівнянь зв'язку складових плоского деформованого стану при повороті осей координат

Рівняння для визначення лінійних і кутових деформацій уздовж координатних напрямків x_1, y_1 , повернених відносно початкових напрямків x, y (рівняння (6.3) і (6.8)), можна звести до універсальної форми, якщо використати тригонометричні функції подвійного кута, тобто такі співвідношення:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

Тоді рівняння зв'язку складових плоского деформованого стану при повороті осей координат набувають вигляду

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta, \quad (6.9)$$

$$\frac{\gamma_{x_1 y_1}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta. \quad (6.10)$$

Зауважимо, що ці рівняння за формою подібні до рівнянь (4.8) і (4.9) для плоского напруженого стану, якщо припустити, що ε_{x_1} відповідає σ_{x_1} , $\gamma_{x_1 y_1}/2 - \tau_{x_1 y_1}$, $\varepsilon_x - \sigma_x$, $\varepsilon_y - \sigma_y$ і, урешті-решт, $\gamma_{xy}/2$ відповідає τ_{xy} .

Аналогія між рівняннями зв'язку складових напруженого й деформованого станів показує, що всі ті зауваження, які наводилися в розд. 4 стосовно плоского напруженого стану, головних напружень, максимальних дотичних напружень, а також кругів Мора, є правильними й при плоскій деформації. Наприклад, сума лінійних деформацій щодо будь-якої пари взаємно перпендикулярних напрямків є величиною незмінною (порівняйте з рівнянням (4.11)):

$$\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{y_1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y. \quad (6.11)$$

Цю рівність легко довести, підставивши в (6.11) вирази для ε_{x_1} (рівняння (6.9)) і ε_{y_1} (рівняння (6.9), але із заміною θ на $\theta + 90^\circ$).

6.4. Головні деформації

Головні деформації діють уздовж двох взаємно перпендикулярних напрямків, розташованих під кутом θ_0 відносно початкових напрямків. Аналогічно рівнянню (4.32) головні напрямки плоского деформованого стану визначаються формулою

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \quad (6.12)$$

Головні деформації можна обчислити з рівняння

$$\varepsilon_{\max, \min} = \varepsilon_{1, 2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}, \quad (6.13)$$

яке за формою повністю відповідає рівнянню (4.39) для визначення головних напружень.

Зазначимо, що при плоскому деформованому стані третя головна деформація $\varepsilon_z = 0$, а деформацій зсуву в головних площинах немає.

6.5. Найбільші деформації зсуву

Найбільші деформації зсуву в площині xOy зв'язані з осями, розташованими під кутом 45° до головних напрямків деформованого стану. Алгебрично більша деформація зсуву (у xOy -площині) визначається таким рівнянням:

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \quad (6.14)$$

Алгебрично менша деформація зсуву має таке саме значення, але з протилежним знаком.

У напрямках максимальних деформацій зсуву діють середні лінійні деформації

$$\varepsilon_{\text{сер}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}. \quad (6.15)$$

Зауважимо, що це рівняння є аналогічним за формою рівнянню (4.54) для напруженого стану.

Максимальні деформації зсуву в площинах xOz і yOz визначаються виразами, аналогічними (6.14).

У випадку об'ємного напружено-деформованого стану максимальна деформація зсуву в точці визначається з рівняння, подібного до (4.53):

$$(\gamma_{\max})_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \quad (6.16)$$

Тут ε_1 і ε_3 – алгебрично найбільша і найменша головні деформації відповідно.

Раніше було показано, що при плоскому напруженому стані на гранях елемента, який перебуває під дією головних напружень, немає дотичних напружень. Отже, деформація зсуву $\gamma_{x_1y_1}$ для цього елемента дорівнює нулю. Із цього, у свою чергу, випливає, що лінійні деформації цього елемента є головними. Таким чином, у будь-якій точці ДТГ головні деформації та головні напруження діють уздовж одних і тих же напрямків, тобто головні напрямки напруженого й деформованого станів збігаються.

6.6. Круг Мора для плоского деформованого стану

Методика побудови круга Мора для плоскої деформації подібна до його побудови для плоского напруженого стану. На рис. 6.7 показано, що лінійна деформація ε_{x_1} є віссю абсцис (додатний напрямок – управо). Половина деформації зсуву $\gamma_{x_1y_1}/2$ відповідає осі ординат (додатний напрямок – униз). Центр кола C має горизонтальну координату, що дорівнює середній деформації $\varepsilon_{сер}$ (формула (6.15)). Точка A описує деформації вздовж x -напрямку ($\theta = 0$), тобто має координати ε_x і $\gamma_{xy}/2$. Протилежна до неї (тобто, що належить діаметру кола) точка B має координати ε_y і $-\gamma_{xy}/2$, а отже, відображає деформації в системі осей, повернених на кут $\theta = 90^\circ$.

Деформації, що діють у системі осей, повернених на кут θ (тобто ε_{x_1} , ε_{y_1} , $\gamma_{x_1y_1}$), показано на колі точкою D , яка належить діаметру, поверненому проти годинникової стрілки на кут 2θ відносно початкового діаметра AB . Головні деформації позначено точками O_1 і O_2 , а максимальні деформації зсуву – точками S_1 і S_2 .

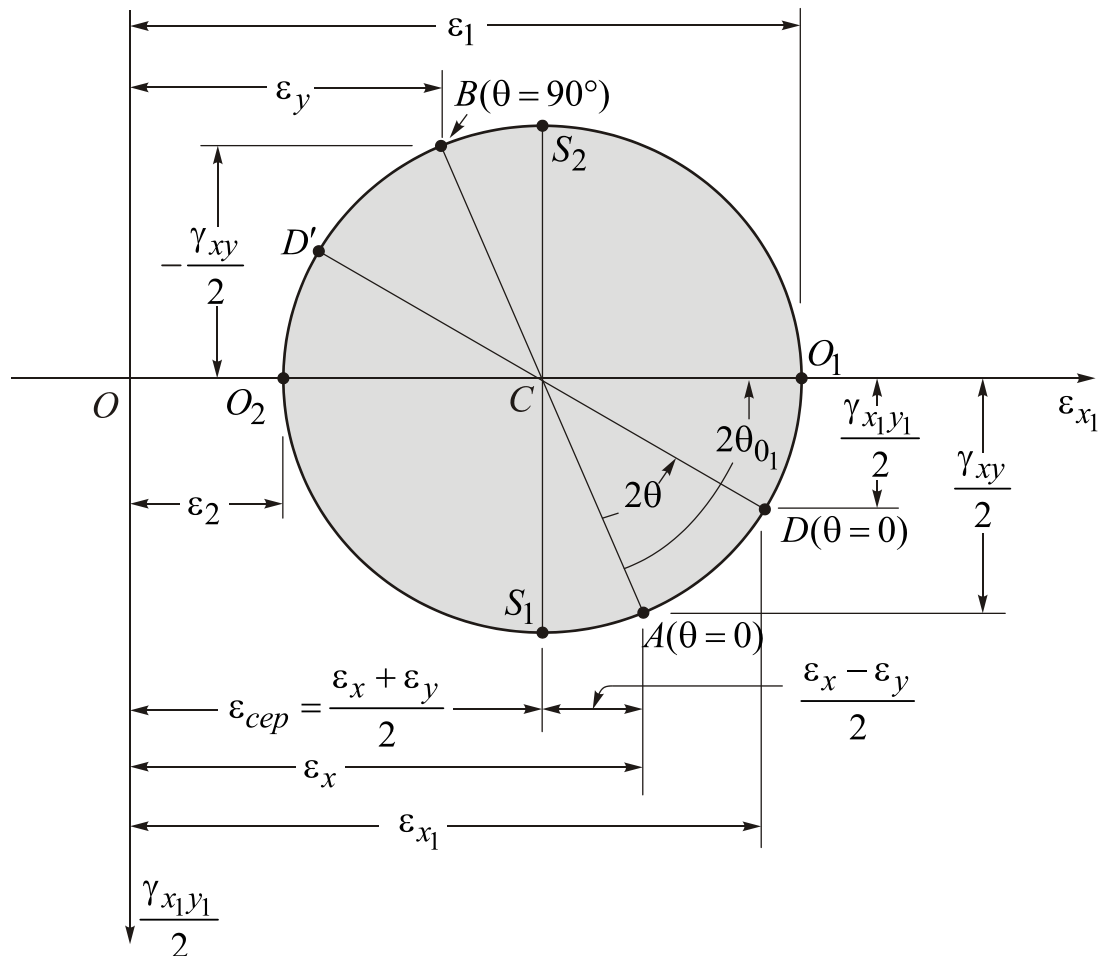


Рис. 6.7. Круг Мора для плоского деформованого стану

6.7. Обчислення напружень за результатами вимірювань деформацій

Раніше вже зазначалося, що застосування електричних тензометрів є найбільш точним і надійним методом вимірювання лінійних деформацій, але, на жаль, лише на поверхні конструктивного елемента, де має місце плоска деформація. Набуті знання допоможуть зараз вирішити проблему визначення лінійних деформацій у будь-якому напрямку (насамперед головних деформацій) за результатами вимірювань складових деформованого стану електричними тензометрами.

Позначивши зовнішню нормаль до поверхні конструкції через z , маємо $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Оскільки переміщення поверхні вздовж осі z нічим не обмежене, деформований стан можна описати складовими ε_x , ε_y , γ_{xy} , а також $\varepsilon_z \neq 0$. Із узагальненого закону Гука випливає, що $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Отже, ε_z є головною деформацією. Її треба знати, якщо необхідно обчислити найбільшу деформацію зсуву (рівняння (6.16)). Виразимо спочатку головну деформацію ε_z через ε_x і ε_y , використовуючи рівняння, отримане з (4.69):

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (6.17)$$

Оскільки кожен тензометр вимірює лінійну деформацію лише в одному напрямку, а головні напрямки деформованого стану на поверхні зазвичай є невідомими, необхідно використати комбінацію з трьох тензометрів, які вимірюють лінійні деформації в трьох різних напрямках. За результатами таких вимірювань можна обчислити лінійну деформацію в будь-якому напрямку. Для таких вимірювань використовують **розетку тензометрів**, яка є системою з трьох тензометрів, заздалегідь установлених відносно один одного під відомими кутами, зазвичай 45° або 60° , як показано на рис. 6.1.

Оскільки розетку жорстко з'єднано з поверхнею конструктивного елемента, матеріал якого перебуває в умовах плоского напруженого стану, стає можливим використання отриманих раніше рівнянь зв'язку складових деформованого стану при повороті осей для обчислення деформацій у різних напрямках.

Розгляньмо з цією метою три тензометри, розташовані під кутами θ_a , θ_b і θ_c до початкової осі x (див. рис. 6.1, б). Три відповідні лінійні деформації можна обчислити з рівняння (6.3), використовуючи його для складання системи трьох рівнянь відносно трьох невідомих деформацій ε_x , ε_y і γ_{xy} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_a + \varepsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a, \\ \varepsilon_b &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_b + \varepsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b, \\ \varepsilon_c &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_c + \varepsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Підставляючи в (6.18) відомі значення кутів θ_a , θ_b і θ_c , а також виміряні величини ε_a , ε_b , ε_c , визначають значення складових деформованого стану на повертні конструктивного елемента ε_x , ε_y і γ_{xy} .

Уже зазначалося, що рівняння зв'язку деформацій при повороті осей ϵ , по суті, геометричними, тобто рівняннями перетворення координат. Їх можна використовувати для будь-якого матеріалу, пружного чи непружного. Якщо ж за результатами вимірювання деформацій необхідно обчислити напруження з метою подальшого оцінювання міцності в тій або іншій точці ДТТ, то тут не обійтися без знань про пружні властивості матеріалу. Якщо вони відповідають закону Гука, то можна обчислити напруження, використовуючи відповідні рівняння зв'язку напружень і деформацій (у підрозд. 4.6 для плоского напруженого стану або в підрозд. 5.2 для об'ємного напруженого стану).

Припустимо, що матеріал перебуває в умовах плоского напруженого стану й деформації ε_x , ε_y і γ_{xy} є відомими за результатами вимірювання. У цьому разі можна використати рівняння закону Гука для плоского напруженого стану (4.65)–(4.67), щоб обчислити напруження в матеріалі.

Припустимо також, що вже визначено три головні деформації в заданій точці матеріалу ε_1 , ε_2 , ε_3 (якщо в точці має місце плоска деформація, то $\varepsilon_3 = 0$). Знаючи ці головні деформації, за узагальненим законом Гука для об'ємного напруженого стану (див. рівняння (5.22)–(5.24)) можна обчислити головні напруження. Знаючи головні напруження, неважко обчислити напруження на похилих площадках, використавши рівняння зв'язку напружень для плоского напруженого стану, а також оцінити міцність у точці, про що йтиметься в наступному розділі.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

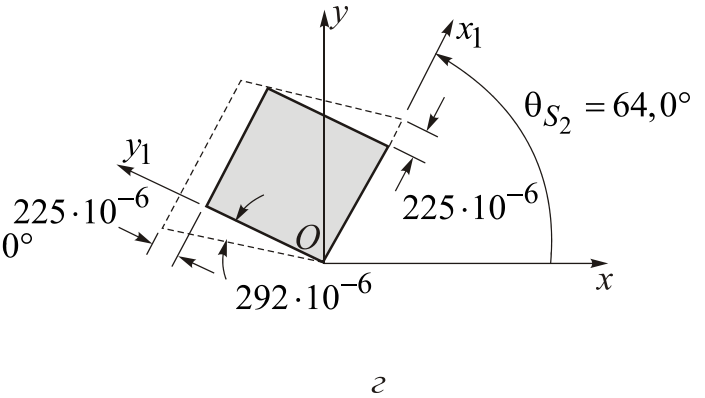
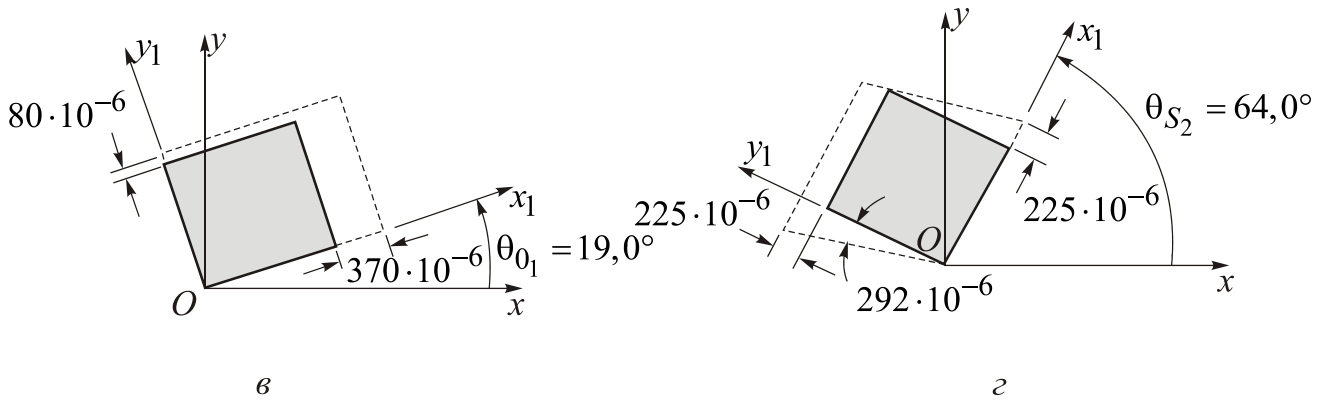
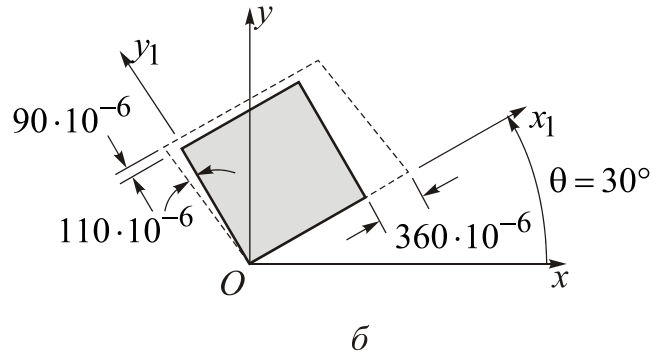
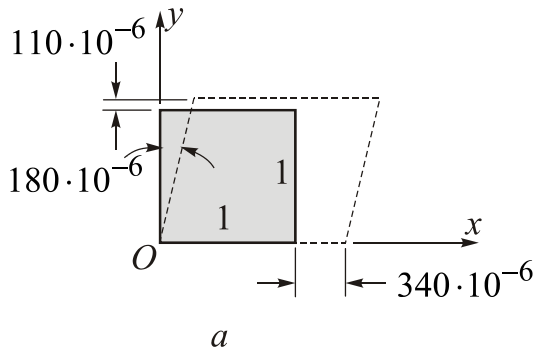
Задача 6.1

Елемент одиничних розмірів в умовах плоскої деформації зазнає дії таких деформацій (рис. а):

$$\varepsilon_x = 340 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_y = 110 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma_{xy} = 180 \cdot 10^{-6}.$$

Оскільки грані елемента мають одиничну довжину, то зміни лінійних розмірів відповідають за величиною лінійним деформаціям ε_x і ε_y . Деформація зсуву γ_{xy} є зменшенням нижнього лівого кута елемента.

Визначити такі величини: 1) деформації граней елемента, поверненого на кут $\theta = 30^\circ$; 2) головні деформації; 3) максимальні деформації зсуву.



Елемент матеріалу з одиничною довжиною ребер в умовах плоскої деформації:
a – елемент в системі осей x, y ; *б* – елемент, повернений на кут $\theta = 30^\circ$;
в – головні деформації; *г* – максимальні деформації зсуву

Розв'язання. 1. Деформації елемента, нахиленого під кутом $\theta = 30^\circ$. Деформації елемента, поверненого на кут θ відносно осі x , можна знайти з рівнянь (6.9) і (6.10) після таких попередніх обчислень:

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{(340 + 110) \cdot 10^{-6}}{2} = 225 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \frac{(340 - 110) \cdot 10^{-6}}{2} = 115 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = 90 \cdot 10^{-6}.$$

Підставимо знайдені величини в рівняння (6.9) і (6.10):

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta =$$

$$= (225 \cdot 10^{-6}) + (115 \cdot 10^{-6}) \cos 60^\circ + (90 \cdot 10^{-6}) \sin 60^\circ = 360 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{\gamma_{x_1 y_1}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta =$$

$$= -(115 \cdot 10^{-6}) \sin 60^\circ + (90 \cdot 10^{-6}) \cos 60^\circ = -55 \cdot 10^{-6}.$$

Отже, деформація зсуву

$$\gamma_{x_1y_1} = -110 \cdot 10^{-6}.$$

Деформацію ε_{y_1} обчислюємо з рівняння (6.11):

$$\varepsilon_{y_1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_{x_1} = (340 + 110 - 360) \cdot 10^{-6} = 90 \cdot 10^{-6}.$$

Деформації ε_{x_1} , ε_{y_1} і $\gamma_{x_1y_1}$ показано на рис. б для елемента, нахиленого під кутом $\theta = 30^\circ$. Зазначимо, що кут між положеннями лівої грані елемента в початковому й деформованому станах збільшується, оскільки деформація $\gamma_{x_1y_1}$ є від'ємною.

2. Головні деформації. Головні деформації неважко визначити з рівняння (6.13):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \\ &= 225 \cdot 10^{-6} \pm \sqrt{(115 \cdot 10^{-6})^2 + (90 \cdot 10^{-6})^2} = 225 \cdot 10^{-6} \pm 146 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Маємо пару головних деформацій

$$\varepsilon_1 = 370 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_2 = 80 \cdot 10^{-6}$$

(ε_1 – алгебрично більша головна деформація, а ε_2 – алгебрично менша головна деформація).

Кути нахилу головних напрямків деформованого стану визначаємо з рівняння (6.12):

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{180}{340 - 110} = 0,7826.$$

Величини кутів $2\theta_0$, що лежать у діапазоні між 0° і 360° , дорівнюють $38,0^\circ$ і $218,0^\circ$. Таким чином, кути нахилу головних напрямків деформованого стану

$$\theta_0 = 19,0^\circ \quad \text{і} \quad \theta_0 = 109,0^\circ.$$

Щоб визначити величину однієї з головних деформацій, необхідно підставити $\theta_0 = 19,0^\circ$ у перше рівняння (6.9):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta = \\ &= (225 \cdot 10^{-6}) + (115 \cdot 10^{-6}) \cos 38^\circ + (90 \cdot 10^{-6}) \sin 38,0^\circ = 370 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Таким чином, більша з головних деформацій ε_1 діє вздовж осі під кутом $\theta_{0_1} = 19,0^\circ$. Менша головна деформація ε_2 діє під кутом 90° до напрямку більшої головної деформації, тобто під кутом $\theta_{0_2} = 109,0^\circ$. Отже,

$$\varepsilon_1 = 370 \cdot 10^{-6} \text{ і } \theta_{0_1} = 19,0^\circ \quad (\varepsilon_1 > \varepsilon_{x_1}, \text{ тобто } 370 \cdot 10^{-6} > 360 \cdot 10^{-6}),$$

$$\varepsilon_2 = 80 \cdot 10^{-6} \text{ і } \theta_{0_2} = 109,0^\circ \quad (\varepsilon_2 < \varepsilon_{y_1}, \text{ тобто } 80 \cdot 10^{-6} < 90 \cdot 10^{-6}).$$

Зазначимо, що $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y$:

$$370 \cdot 10^{-6} + 80 \cdot 10^{-6} = 360 \cdot 10^{-6} + 90 \cdot 10^{-6}.$$

Головні деформації показано на рис. в. *Зауважимо, що деформації зсуву на головних площадках деформованого стану не діють.*

3. *Максимальна деформація зсуву в площині.* Максимальну деформацію зсуву обчислюємо з рівняння (6.14):

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{(115 \cdot 10^{-6})^2 + (90 \cdot 10^{-6})^2} = 146 \cdot 10^{-6},$$

$$\gamma_{\max} = 292 \cdot 10^{-6}.$$

Елемент із максимальними деформаціями зсуву розташований під кутом 45° до напрямків головних напружень, тобто $\theta_s = 19,0^\circ + 45^\circ = 64,0^\circ$ і $2\theta_s = 128,0^\circ$. Підставивши величину $2\theta_s$ у рівняння (6.10), визначаємо знак деформації зсуву в цьому напрямку:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{x_1 y_1}}{2} &= -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta = \\ &= -(115 \cdot 10^{-6}) \sin 128,0^\circ + (90 \cdot 10^{-6}) \cos 128,0^\circ = -146 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Цей результат показує, що елемент, повернений на кут $\theta_{s_2} = 64,0^\circ$, має найбільшу від'ємну деформацію зсуву. Такий же результат можна отримати, беручи до уваги, що кут θ_{s_1} , який визначає напрямок максимальної додатної деформації зсуву, буде завжди на 45° меншим, ніж θ_{0_1} . Таким чином,

$$\theta_{s_1} = \theta_{0_1} - 45^\circ = 19,0^\circ - 45^\circ = -26,0^\circ,$$

$$\theta_{s_2} = \theta_{s_1} + 90^\circ = 64,0^\circ.$$

Визначаємо деформації зсуву, що відповідають кутам θ_{s_1} і θ_{s_2} :

$$\gamma_{\max} = 290 \cdot 10^{-6} \text{ і } \gamma_{\min} = -290 \cdot 10^{-6}.$$

Знайдемо середнє значення лінійної деформації елемента, який зазнає дії найбільших і найменших деформацій зсуву:

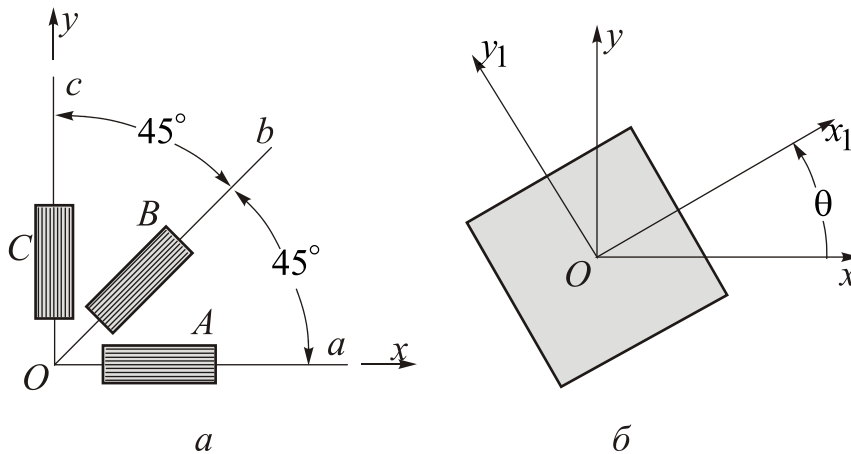
$$\varepsilon_{сер} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 225 \cdot 10^{-6}.$$

Елемент, який зазнає дії максимальних деформацій зсуву, зображено на рис. 2.

Задача 6.2

45-градусна розетка тензометрів складається з трьох елементів, розташованих так, щоб вимірювати деформації в двох перпендикулярних напрямках, а також під кутом 45° один до одного, як показано на рис. а. Розетку наклеєно на поверхню конструкції. Тензометри А, В і С вимірюють лінійні деформації ε_a , ε_b і ε_c уздовж ліній Оа, Об і Ов.

Обчислити деформації ε_{x_1} , ε_{y_1} і $\gamma_{x_1y_1}$ елемента, нахиленого під кутом θ відносно осей x , y (рис. б), використовуючи вимірювання ε_a , ε_b і ε_c .



а – 45-градусна розетка тензометрів; б – елемент, повернений на кут θ відносно осей x , y

Розв’язання. На поверхні досліджуваної конструкції матеріал перебуває в умовах плоского напруженого стану. Оскільки рівняння зв’язку деформацій при повороті осей (6.9) і (6.10) можна застосувати як до плоского напруженого стану, так і до плоского деформованого стану, використаємо їх, щоб визначити деформації в будь-якому напрямку.

1. *Деформації в системі осей x , y .* Осі тензометрів А і С збігаються з напрямками осей x і y , це дає змогу виміряти деформації ε_x і ε_y безпосередньо:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_c.$$

Для визначення деформації зсуву γ_{xy} використаємо рівняння зв’язку лінійних деформацій (6.9):

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta.$$

Для кута $\theta = 45^\circ$ $\varepsilon_{x_1} = \varepsilon_b$ (див. рис. *a*), тому попереднє рівняння запишемо у вигляді

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} (\cos 90^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\sin 90^\circ).$$

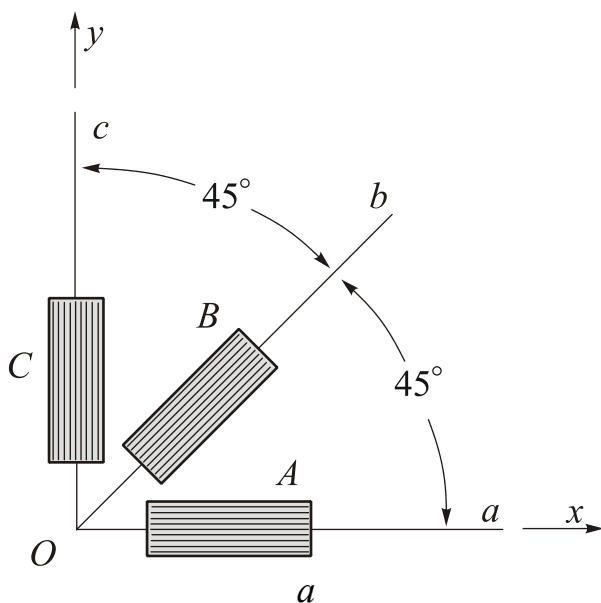
Розв'яжемо його відносно γ_{xy} :

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c.$$

Таким чином, деформації ε_x , ε_y і γ_{xy} можна визначити за результатами вимірювань трьома вказаними вище тензометрами.

2. Деформації в системі осей x_1y_1 . Знаючи деформації ε_x , ε_y і γ_{xy} , можна обчислити деформації елемента, розташованого під будь-яким кутом θ (див. рис. *b*), використавши рівняння зв'язку деформацій (6.9), (6.10) або застосувавши круг Мора. Можна також обчислити головні деформації й максимальні деформації зсуву з рівнянь (6.13) і (6.14) відповідно.

Задача 6.3



45-градусна розетка тензометрів

Із використанням 45-градусної розетки тензометрів (див. рис. *a*) було виміряно три деформації на поверхні навантаженого конструктивного елемента: $\varepsilon_a = 900 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 700 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_c = -100 \cdot 10^{-6}$. Деформації відповідають кутам $\theta_a = 0^\circ$, $\theta_b = 45^\circ$ і $\theta_c = 90^\circ$ (див. рис. *a*). Визначити складові деформацій ε_x , ε_y і γ_{xy} , а також головні лінійні й максимальні деформації зсуву в площині.

Розв'язання. 1. *Визначення деформацій початкового деформованого стану.* Застосуємо для розв'язання задачі рівняння (6.18), які набувають такого вигляду:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_b = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}), \quad \varepsilon_c = \varepsilon_y,$$

або

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_c, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c).$$

Підставивши числові значення, отримаємо $\varepsilon_x = 900 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_y = -100 \cdot 10^{-6}$ і $\gamma_{xy} = 600 \cdot 10^{-6}$.

2. Головні деформації. Для їх визначення використаємо рівняння (6.13):

$$\varepsilon_{1,3} = \left[\frac{900-100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{900+100}{2}\right)^2 + \left(\frac{600}{2}\right)^2} \right] \cdot 10^{-6},$$

звідки

$$\varepsilon_1 = 983 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_3 = -183 \cdot 10^{-6}.$$

Виконаємо перевірку: $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 800 \cdot 10^{-6}$.

Площини дії головних деформацій та відповідні кути нахилу головних напрямків деформованого стану знаходимо з рівняння (6.12):

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \left(\frac{600}{900+100} \right) \cdot 10^{-6} = 0,60.$$

Величини кутів $2\theta_0$ у діапазоні між 0° і 360° :

$$2\theta_0 = 31^\circ \text{ і } 2\theta_0 = 31^\circ + 180^\circ = 211^\circ \text{ або } \theta_0 = 15,5^\circ \text{ і } \theta_0 = 105,5^\circ.$$

Щоб визначити кути θ_0 , що відповідають кожній головній деформації, підставимо $\theta_0 = 15,5^\circ$ у перше рівняння зв'язку деформацій (6.9) і розв'яжемо його відносно деформацій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta = \\ &= 400 \cdot 10^{-6} + (500 \cdot 10^{-6}) \cos 31^\circ + (300 \cdot 10^{-6}) \sin 31,0^\circ = 983 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що найбільша головна деформація ε_1 діє під кутом $\theta_{0_1} = 15,5^\circ$.

Найменша головна деформація ε_3 діє під кутом 90° до найбільшої ($\theta_{0_2} = 105,5^\circ$).

Отже,

$$\varepsilon_1 = 983 \cdot 10^{-6} \text{ і } \theta_{0_1} = 15,5^\circ \text{ (} \varepsilon_1 > \varepsilon_{x_1} \text{, тобто } 983 \cdot 10^{-6} > 900 \cdot 10^{-6} \text{),}$$

$$\varepsilon_3 = -183 \cdot 10^{-6} \text{ і } \theta_{0_2} = 105,5^\circ \text{ (} \varepsilon_3 < \varepsilon_{y_1} \text{, тобто } -183 \cdot 10^{-6} < -100 \cdot 10^{-6} \text{).}$$

Головні деформації показано на рис. б. Зазначимо, що на головних площадках деформованого стану немає деформацій зсуву.

3. Максимальні деформації зсуву в площині. Ці деформації визначаються рівнянням (6.14):

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \left[\pm \sqrt{\left(\frac{900+100}{2}\right)^2 + \left(\frac{600}{2}\right)^2} \right] \cdot 10^{-6} = \pm 583 \cdot 10^{-6}.$$

Алгебрично найбільша деформація зсуву γ_{\max} дорівнює $+1166 \cdot 10^{-6}$. Алгебрично найменша має таку саму величину, але від'ємний знак.

Елемент, що перебуває під дією максимальних деформацій зсуву, повернено на кут 45° відносно головних напрямків деформованого стану: відповідно $\theta_s = 15,5^\circ + 45^\circ = 60,5^\circ$ і $2\theta_s = 121,0^\circ$. Підставляючи значення $2\theta_s$ у друге рівняння перетворення деформацій (6.10), можна визначити знак деформації зсуву, що відповідає цьому напрямку:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{x_1y_1}}{2} &= -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta = \\ &= -(500 \cdot 10^{-6}) \sin 121,0^\circ + (300 \cdot 10^{-6}) \cos 121,0^\circ = -583 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що елемент, повернений на кут $\theta_{s_2} = 60,5^\circ$, має найбільшу від'ємну деформацію зсуву.

Той же результат можна отримати, виходячи з того, що кут θ_{s_1} напрямку найбільшої додатної деформації зсуву завжди на 45° менший, ніж θ_{0_1} . Звідси

$$\begin{aligned} \theta_{s_1} &= \theta_{0_1} - 45^\circ = 15,5^\circ - 45^\circ = -29,5^\circ, \\ \theta_{s_2} &= \theta_{s_1} + 90^\circ = 60,5^\circ. \end{aligned}$$

Деформації зсуву, що відповідають кутам θ_{s_1} і θ_{s_2} , є рівнозначними:

$\gamma_{\max} = +1166 \cdot 10^{-6}$ і $\gamma_{\min} = -1166 \cdot 10^{-6}$. Елемент під дією максимальних деформацій зсуву показано на рис. в. Початковий і деформований елементи зображено відповідно суцільними й пунктирними лініями.

Лінійні деформації, що відповідають максимальним деформаціям зсуву γ_{\max} , визначаються формулою

$$\varepsilon_{\text{сер}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \left(\frac{900 - 100}{2} \right) \cdot 10^{-6} = 400 \cdot 10^{-6}.$$

Оскільки на поверхні конструкції напружений стан є плоским, а деформований стан – об'ємним, знаходження третьої головної деформації в напрямку, перпендикулярному до поверхні конструктивного елемента, є важливим практичним завданням, бо дає змогу знайти максимальну деформацію зсуву в точці, яку часто називають **істинною деформацією**:

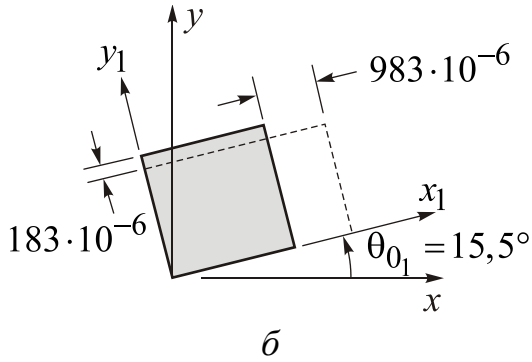
$$(\gamma_{\max})_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

Третю головну деформацію для розглядуваного елемента при $\nu = 0,3$ обчислюємо з рівняння (6.16):

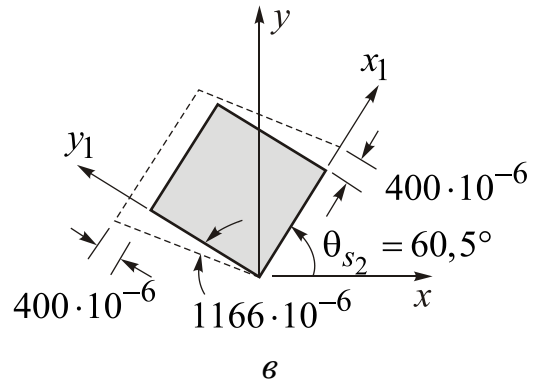
$$\varepsilon_z = \varepsilon_3 = -\frac{0,3}{1-0,3} (900 - 100) \cdot 10^{-6} = -343 \cdot 10^{-6}.$$

Тоді максимальна деформація зсуву в точці

$$(\gamma_{\max})_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = (983 + 343) \cdot 10^{-6} = 1326 \cdot 10^{-6}.$$



Головні деформації та відповідні кути нахилу головних площадок деформованого стану



Елемент під дією максимальних деформацій зсуву та відповідних середніх лінійних деформацій

Задача 6.4

У точці на вільній поверхні конструкції за результатами показань 60-градусної розетки тензometrів (рис. а) отримано $\epsilon_a = 70 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_b = 850 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_c = 250 \cdot 10^{-6}$ для $\theta_a = 0^\circ$, $\theta_b = 60^\circ$ і $\theta_c = 120^\circ$. Обчислити: 1) головні лінійні деформації; 2) максимальні деформації зсуву; 3) максимальну деформацію зсуву в точці ($\nu = 0,3$).

Розв'язання. У цьому випадку з рівнянь (6.18) отримуємо:

$$\epsilon_a = \epsilon_x,$$

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{1}{4}(\epsilon_x - \epsilon_y) - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy},$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{1}{4}(\epsilon_x - \epsilon_y) + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy},$$

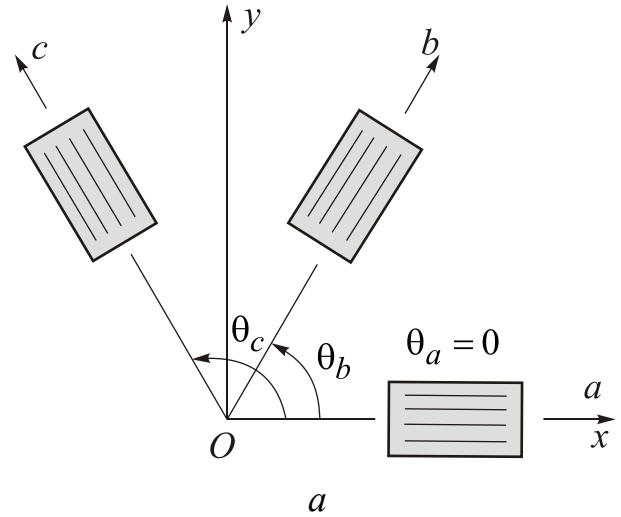
звідки $\epsilon_x = \epsilon_a = 70 \cdot 10^{-6}$,

$$\epsilon_y = \frac{1}{3}[2(\epsilon_b + \epsilon_c) - \epsilon_a] = \frac{1}{3}[2(850 \cdot 10^{-6} + 250 \cdot 10^{-6}) - 70 \cdot 10^{-6}] = 710 \cdot 10^{-6},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c) = \frac{2}{\sqrt{3}}(850 \cdot 10^{-6} - 250 \cdot 10^{-6}) = 693 \cdot 10^{-6}.$$

Рівняння (6.13) і (6.14) набувають вигляду

$$\epsilon_{1,3} = \left[\frac{70 + 710}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{70 - 710}{2}\right)^2 + \left(\frac{693}{2}\right)^2} \right] \cdot 10^{-6},$$



60-градусна розетка тензometrів

$$\gamma_{\max} = \left[\pm 2 \sqrt{\left(\frac{70 - 710}{2} \right)^2 + \left(\frac{693}{2} \right)^2} \right] \cdot 10^{-6},$$

звідки

$$\varepsilon_1 = 862 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_3 = -82 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma_{\max} = \pm 943 \cdot 10^{-6}.$$

Лінійні деформації, що відповідають найбільшій деформації зсуву γ_{\max} :

$$\varepsilon_{\text{сер}} = \frac{1}{2}(70 + 710) = 390 \cdot 10^{-6}.$$

Напрямки головних осей визначаються рівнянням (6.12):

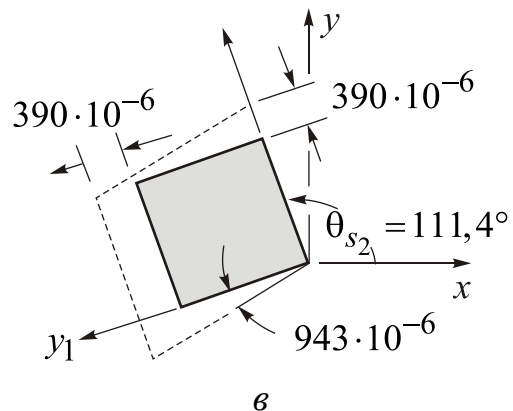
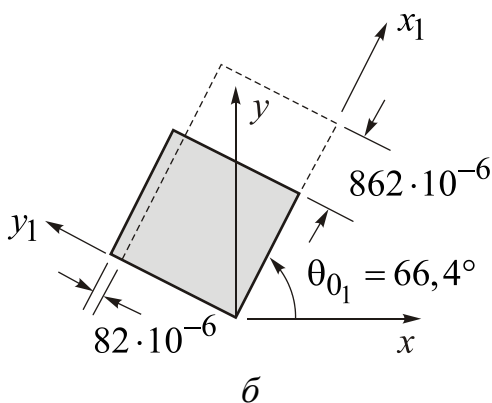
$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{693}{70 - 710} = -1,083.$$

Величини двох кутів $2\theta_0$ у діапазоні від 0 до 360° : $2\theta_0 = -47,2^\circ$ і $2\theta_0 = -47,2 + 180^\circ = 132,8^\circ$ або $\theta_0 = -23,6^\circ$ і $\theta_0 = 66,4^\circ$.

Щоб обчислити значення кута θ_0 , яке відповідає кожній головній деформації, підставимо $\theta_0 = 66,4^\circ$ у перше рівняння зв'язку деформацій (6.9) і розв'яжемо його відносно деформацій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta = \\ &= 390 \cdot 10^{-6} + (320 \cdot 10^{-6}) \cos 132,8^\circ + (346,8 \cdot 10^{-6}) \sin 132,8^\circ = 862 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Результат свідчить, що більша головна деформація ε_1 напрямлена під кутом $\theta_{0_1} = 66,4^\circ$ до початкової осі x (рис. б). Подібним чином для $\theta_s = 66,4^\circ + 45^\circ = 111,4^\circ$ рівняння (6.11) дає $\gamma_{x_1 y_1} = -\gamma_{\max}$. Отже, елемент, повернений на кут $\theta_{s_2} = 111,4^\circ$, має максимальну від'ємну деформацію зсуву (рис. в).



Головні деформації й відповідні кути нахилу головних площадок деформованого стану

Максимальні деформації зсуву й кути нахилу площадок їх дії, а також відповідні середні лінійні деформації

Для знаходження максимальної деформації зсуву в точці конструктивного елемента попередньо обчислимо, використовуючи рівняння (6.17), третю головну деформацію ε_z у напрямку, перпендикулярному до поверхні конструктивного елемента:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_3 = -\frac{0,3}{1-0,3}(70+710) \cdot 10^{-6} = -334 \cdot 10^{-6}.$$

Тоді максимальна деформація зсуву в точці відповідає величині

$$(\gamma_{\max})_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = (862 + 334) \cdot 10^{-6} = 1196 \cdot 10^{-6}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

6.1–6.5. Деформовані стани в заданих точках описано деформаціями згідно з таблицею. Визначити деформований стан елемента, який визначається заданим кутом θ . Використати при розв'язанні рівнянь (6.9), (6.10).

Задача	$\varepsilon_x, 10^{-6}$	$\varepsilon_y, 10^{-6}$	$\gamma_{xy}, 10^{-6}$	θ
6.1	-500	600	1500	30°
6.2	500	1200	-1200	-45°
6.3	200	400	100	45°
6.4	-300	500	200	60°
6.5	-750	-200	200	-30°

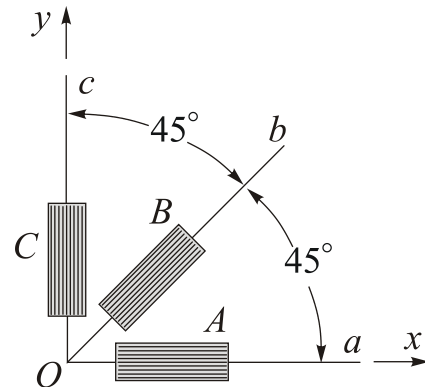
6.6–6.10. Деформовані стани в точці тонкої плити описано деформаціями згідно з таблицею. Обчислити: 1) головні лінійні деформації й максимальні деформації зсуву; 2) максимальну деформацію зсуву в точці ($\nu = 0,3$). Проілюструвати розв'язання ескізом відповідного елемента.

Задача	$\varepsilon_x, 10^{-6}$	$\varepsilon_y, 10^{-6}$	$\gamma_{xy}, 10^{-6}$
6.6	400	0	300
6.7	-900	-400	-300
6.8	-200	600	600
6.9	830	-300	250
6.10	-360	-500	-300

6.11. Під час статичних випробувань панелі крила з використанням 45-градусної розетки тензометрів на вільній поверхні було виміряно такі деформації:

$$\varepsilon_a = -400 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_b = -500 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_c = 200 \cdot 10^{-6}.$$

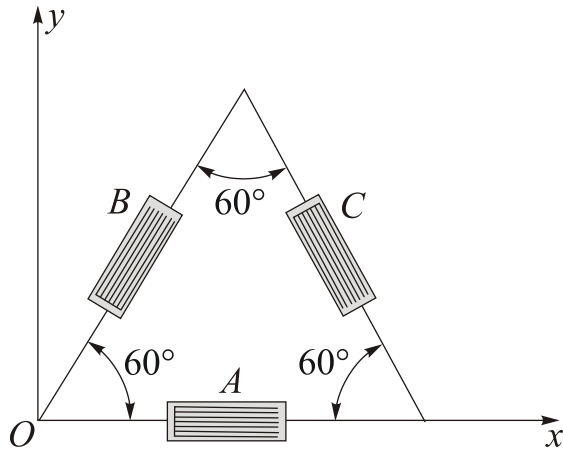
Обчислити головні деформації й зобразити відповідний елемент.



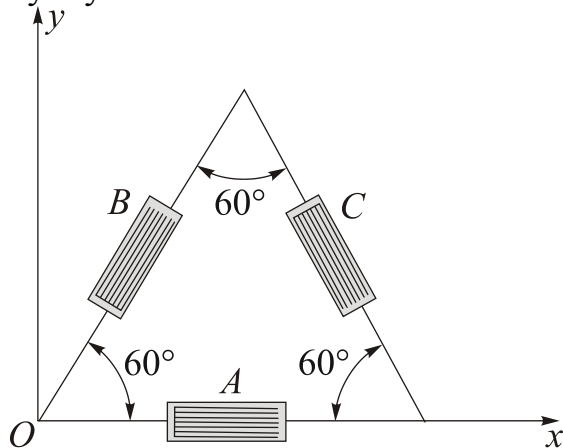
6.12. Із використанням 60-градусної розетки тензометрів у точці ферми було виміряно такі деформації:

$$\varepsilon_a = -200 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_b = -350 \cdot 10^{-6} \quad \text{і} \quad \varepsilon_c = -550 \cdot 10^{-6}.$$

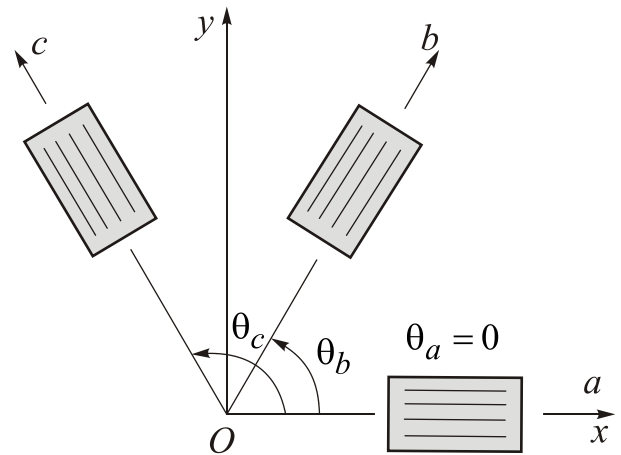
Визначити: 1) максимальні деформації зсуву й відповідні лінійні деформації; 2) істинну максимальну деформацію зсуву. Використати $\nu = 0,3$. Показати результати на ескізі елемента.



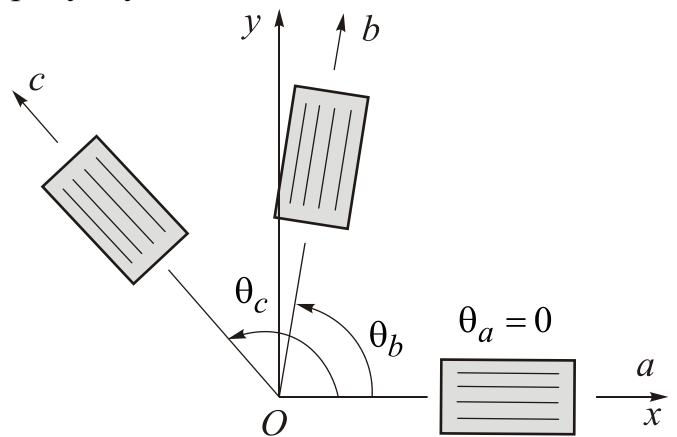
6.13. На поверхні сталевого конструктивного елемента ($E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$), що перебуває в умовах плоского напруженого стану, з допомогою 60-градусної розетки тензометрів виміряно такі деформації: $\varepsilon_a = 1200 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = -650 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_c = 550 \cdot 10^{-6}$. Визначити: 1) головні лінійні деформації та їх напрямки; 2) відповідні головні напруження й максимальне дотичне напруження. Показати результати розрахунків на рисунку.



6.14. У точці на поверхні конструкції виміряно такі деформації: $\varepsilon_a = -200 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = -500 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_c = -900 \cdot 10^{-6}$ для $\theta_a = 0^\circ$, $\theta_b = 120^\circ$ і $\theta_c = 240^\circ$. Обчислити: 1) головні лінійні деформації; 2) максимальні деформації зсуву в точці при $\nu = 0,3$. Показати результати на рисунку.

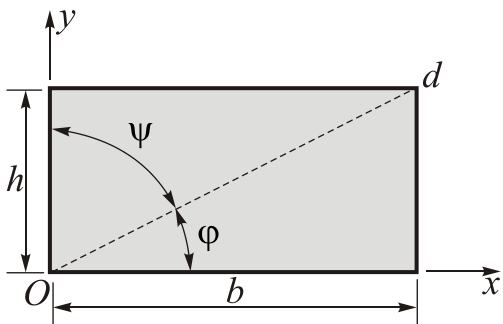
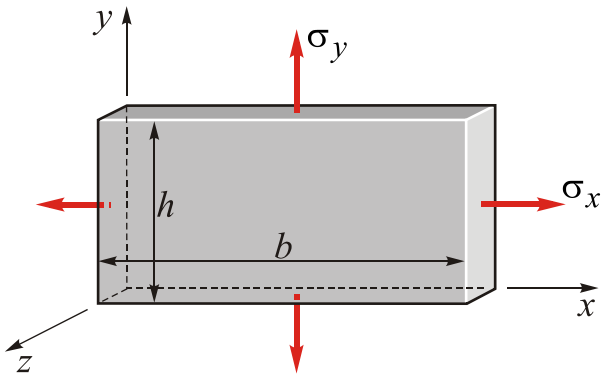


6.15. На поверхні конструктивного елемента (плоский напружений стан) виміряно такі деформації: $\varepsilon_a = 500 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 350 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_c = 800 \cdot 10^{-6}$ для $\theta_a = 0$, $\theta_b = 60^\circ$ і $\theta_c = 135^\circ$. Обчислити: 1) максимальні деформації зсуву; 2) максимальну деформацію зсуву в точці ($\nu = 0,33$). Показати результати розрахунків на рисунку.

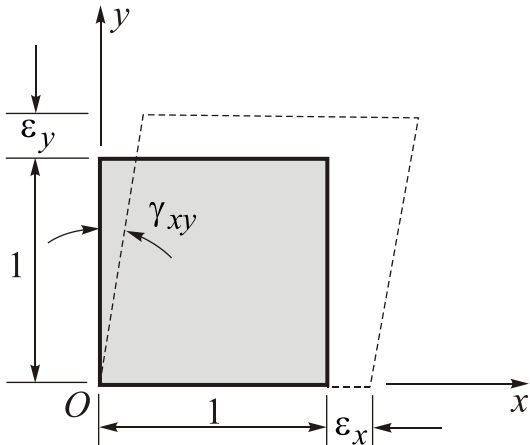


6.16. Тонка прямокутна плита в умовах плоского напруженого стану перебуває під дією напружень σ_x і σ_y . Ширина й висота плити відповідно дорівнюють $b = 20$ см і $h = 10$ см. Вимірювання показують, що лінійні деформації в x - і y -напрявках відповідають $\varepsilon_x = 195 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_y = -125 \cdot 10^{-6}$. Визначити такі величини: 1) збільшення Δd довжини діагоналі Od ; 2) зміну $\Delta \phi$ кута ϕ між діагональ-

лю Od і віссю x ; 3) зміну $\Delta\psi$ кута ψ між діагоналлю Od і віссю y .

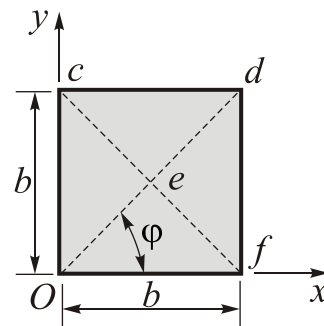
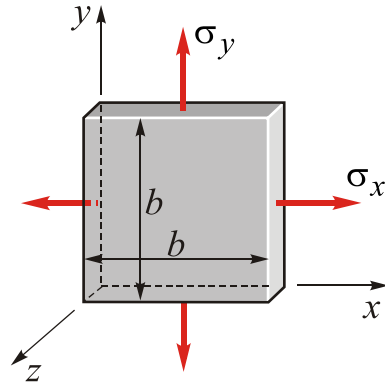


6.17. Елемент матеріалу перебуває в умовах такого плоского деформованого стану: $\epsilon_x = 110 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_y = 240 \cdot 10^{-6}$ і $\gamma_{xy} = 90 \cdot 10^{-6}$. Обчислити деформації елемента, повернутого на кут $\theta = 30^\circ$, і показати ці деформації на рисунку.

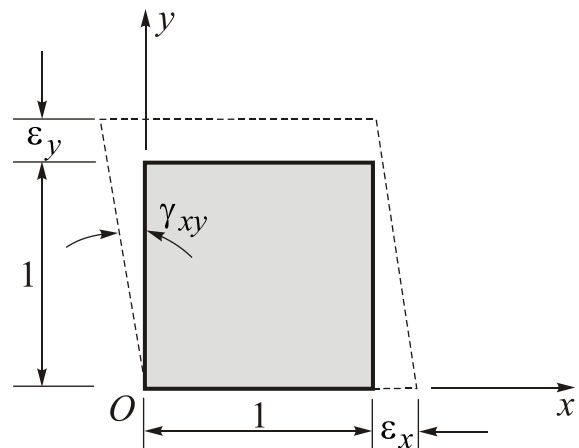


6.18. Тонка квадратна плита (плоский напружений стан) перебуває під дією напружень σ_x і σ_y . Ширина плити $b = 30$ мм. Вимірювання показують, що лінійні деформації в x - і y -напрямах відповідають

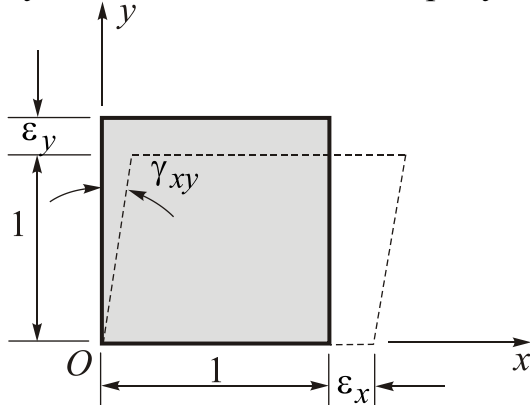
$\epsilon_x = 214 \cdot 10^{-6}$ і $\epsilon_y = 56 \cdot 10^{-6}$. Визначити такі величини: 1) збільшення Δd довжини діагоналі Od ; 2) зміну $\Delta\phi$ кута ϕ між діагоналлю Od і віссю x ; 3) деформацію зсуву γ між діагоналями Od і cf (тобто знайти величину зменшення кута ced).



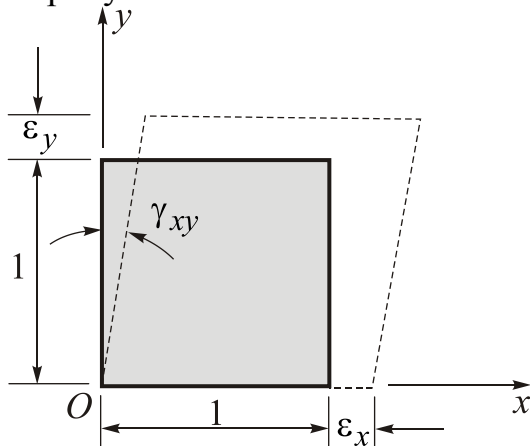
6.19. Елемент матеріалу перебуває в умовах такого плоского деформованого стану: $\epsilon_x = 500 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_y = 150 \cdot 10^{-6}$ і $\gamma_{xy} = -340 \cdot 10^{-6}$. Визначити головні деформації й найбільшу деформацію зсуву, а також показати їх на рисунку.



6.20. Плоский деформований стан подано такими деформаціями: $\varepsilon_x = 120 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_y = -450 \cdot 10^{-6}$ і $\gamma_{xy} = 360 \cdot 10^{-6}$. Визначити головні деформації й найбільшу деформацію зсуву, а також показати їх на рисунку.

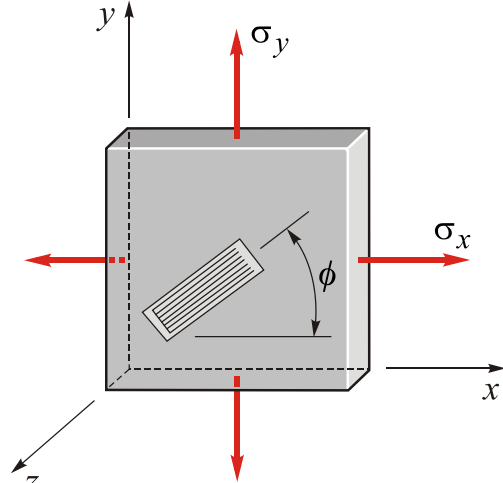


6.21. Елемент матеріалу при плоскому деформованому стані перебуває під дією таких деформацій: $\varepsilon_x = 480 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 70 \cdot 10^{-6}$ і $\gamma_{xy} = 420 \cdot 10^{-6}$. Визначити такі величини: 1) лінійні деформації елемента, нахиленого під кутом $\theta = 70^\circ$; 2) головні деформації; 3) максимальну деформацію зсуву. Результати показати на рисунках.

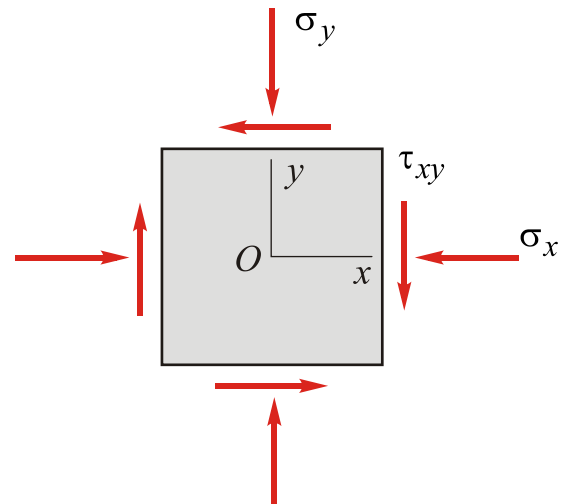


6.22. Сталева плита (модуль пружності $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,30$) перебуває в умовах двовісного напруженого стану. Електротензометр закріплено під кутом $\phi = 30^\circ$. Якщо напруження σ_x

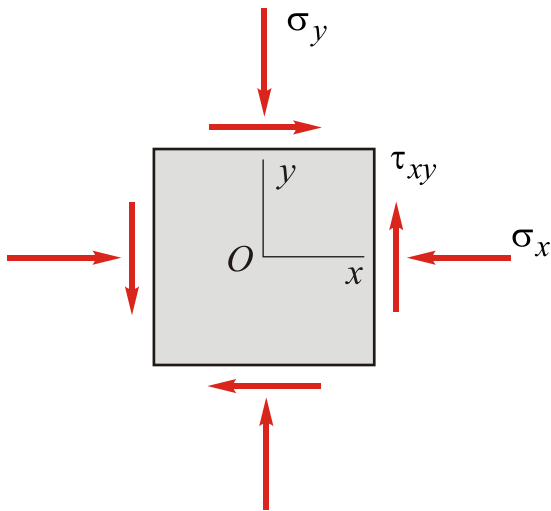
дорівнює 120 МПа, а виміряна лінійна деформація $\varepsilon = 400 \cdot 10^{-6}$, то якими будуть найбільше дотичне напруження $(\tau_{\max})_{xy}$, а також найбільша деформація зсуву $(\gamma_{\max})_{xy}$? Якими будуть максимальна кутова деформація $(\gamma_{\max})_{xz}$ в xOz -площині та $(\gamma_{\max})_{yz}$ в yOz -площині?



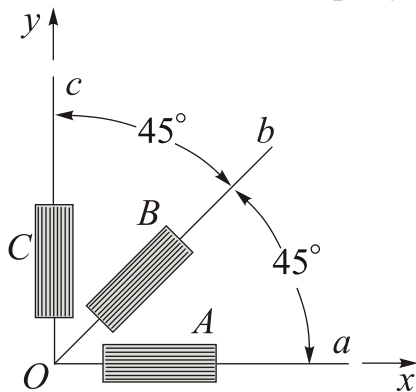
6.23. Елемент конструкції з алюмінію перебуває під дією напружень $\sigma_x = -60$ МПа, $\sigma_y = 7$ МПа і $\tau_{xy} = -10$ МПа. Модуль пружності $E = 70$ ГПа і коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$. Визначити такі величини: 1) лінійні деформації елемента, нахиленого під кутом $\theta = 30^\circ$; 2) головні деформації; 3) максимальну деформацію зсуву. Результати подати на рисунках.



6.24. Елемент конструкції з латуні перебуває під дією напружень $\sigma_x = -150$ МПа, $\sigma_y = -210$ МПа і $\tau_{xy} = 15$ МПа. Модуль пружності $E = 100$ ГПа і коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,34$. Визначити такі величини: 1) лінійні деформації елемента, нахиленого під кутом $\theta = 50^\circ$; 2) головні деформації; 3) максимальну деформацію зсуву. Результати показати на рисунках.

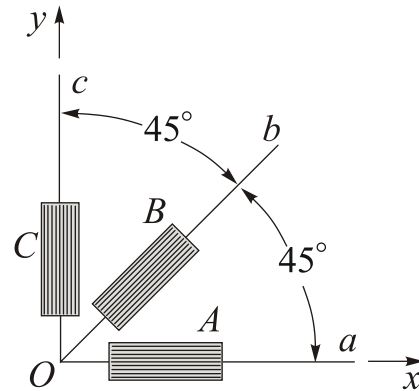


6.25. Під час статичних випробувань крила літака з використанням 45-градусної розетки тензометрів виміряно такі деформації: тензометром $A - 520 \cdot 10^{-6}$; тензометром $B - 360 \cdot 10^{-6}$ і тензометром $C - -80 \cdot 10^{-6}$. Визначити головні деформації, а також максимальну деформацію зсуву та показати їх на відповідних рисунках.

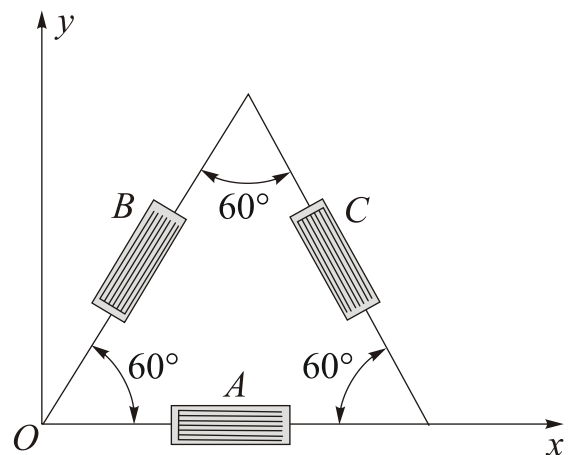


6.26. 45-градусною розеткою тензометрів, яку закріплено на поверхні

рами, виміряно такі деформації: тензометром $A - \epsilon_a = 310 \cdot 10^{-6}$; тензометром $B - \epsilon_b = 280 \cdot 10^{-6}$; тензометром $C - \epsilon_c = -160 \cdot 10^{-6}$. Визначити головні деформації, а також найбільшу деформацію зсуву, показати їх на відповідних рисунках.

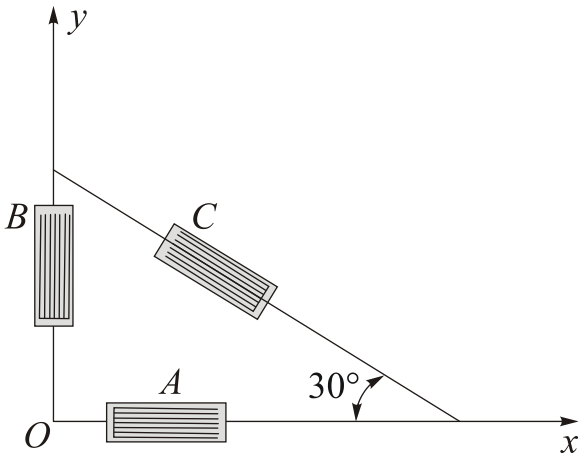


6.27. 60-градусна розетка тензометрів використовується для вимірювання деформацій у трьох напрямках. Тензометр A вимірює лінійну деформацію ϵ_a у напрямку осі x . Тензометри B і C вимірюють деформації ϵ_b і ϵ_c у напрямках, показаних на рисунку. Отримати рівняння для визначення деформацій ϵ_x , ϵ_y і γ_{xy} .

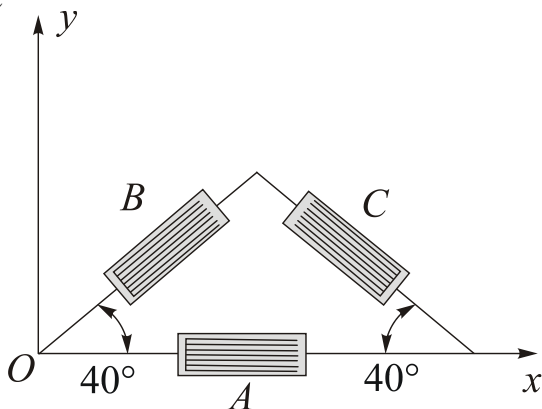


6.28. На поверхні силового елемента літального апарата деформації вимірюються з допомогою тензометрів, розташованих, як показано на рисунку. Під час польоту було зареєстровано такі деформації:

$\varepsilon_a = 1100 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 200 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_c = 200 \cdot 10^{-6}$. Визначити головні деформації та головні напруження в матеріалі силового елемента, виготовленого з магнієвого сплаву ($E = 41$ ГПа і $\nu = 0,35$). Зобразити головні деформації й головні напруження на відповідних рисунках.

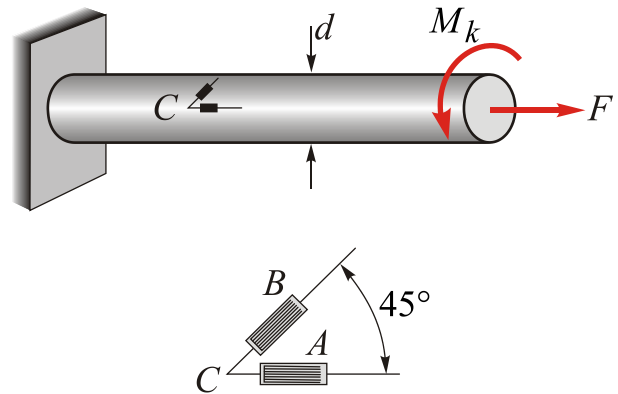


6.29. Деформації на поверхні силового конструктивного елемента, виготовленого з алюмінієвого сплаву ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0,33$), було виміряно з використанням тензометрів. Їх орієнтацію показано на рисунку, а результати вимірювань є такими: $\varepsilon_a = 1100 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 1500 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_c = -40 \cdot 10^{-6}$. Визначити напруження σ_x .

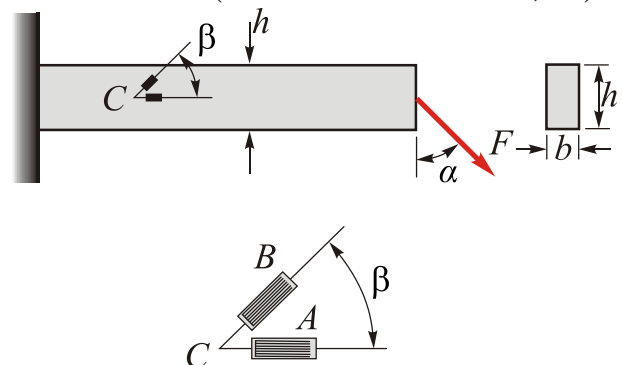


6.30. Суцільний циліндричний вал діаметром $d = 3$ см навантажено осьовою силою F і крутним моментом M_k . Тензометри A і B , закріплені на

поверхні вала, зареєстрували деформації $\varepsilon_a = 100 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_b = -55 \cdot 10^{-6}$. Вал виготовлено зі сталі ($E = 210$ ГПа і $\nu = 0,30$). Визначити: 1) осьову силу F і крутний момент M_k ; 2) максимальну деформацію зсуву γ_{\max} і максимальне дотичне напруження τ_{\max} у валі.



6.31. Консольну балку прямокутного поперечного перерізу (ширина $b = 50$ мм, висота $h = 100$ мм) навантажено силою F , прикладеною в центрі тяжіння правого перерізу балки під кутом α до вертикальної осі. Два тензометри розміщено в точці C , розташованій на центральній осі балки. Тензометр A вимірює деформацію в горизонтальному напрямку, а тензометр B – лінійну деформацію під кутом $\beta = 60^\circ$ до горизонтальної осі балки. Результати вимірювань є такими: $\varepsilon_a = 120 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon_b = -370 \cdot 10^{-6}$. Визначити силу F і кут α , уважаючи, що балку виготовлено зі сталі ($E = 200$ ГПа і $\nu = 0,33$).



Розділ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

Визначення напруженого стану в околі довільної точки ДТТ є тільки частиною важливої практичної проблеми механіки деформованого твердого тіла – пошуку умов втрати міцності точки, за якою простежується втрата міцності деформованого твердого тіла в цілому. Втрата міцності – це синонім руйнування матеріалу, яке асоціюється з настанням в околі точки граничного напруженого стану, пов'язаного з появою непружних деформацій. Як відомо з курсу матеріалознавства, руйнування буває пластичним, тобто від надмірних пластичних деформацій у разі перевищення границі текучості матеріалу, або крихким, тобто від збільшення до небезпечних розмірів наявних мікротріщин.

При лінійному напруженому стані поведінку конструкційного матеріалу під навантаженням однозначно описує його **діаграма розтягування** (син. **діаграма «напруження – деформація»**). У цьому випадку точку переходу матеріалу з пружного стану в непружний через появу локальної текучості в пластичному матеріалі або появу тріщини в крихкому матеріалі можна визначити з досить високою точністю під час дослідів. Напруження, що відповідає точці переходу з пружного в непружний стан, раніше назвали **граничним напруженням** (границя текучості σ_T для пластичного матеріалу або границя міцності σ_B для крихкого матеріалу). Якщо при лінійному напруженому стані граничне напруження матеріалу є відомим, то розрахунок на міцність зводиться до визначення дійсного напруженого стану (діючого головного напруження) і порівняння його з граничним напруженням у матеріалі.

Проте матеріали більшості конструктивних елементів перебувають в умовах складного напруженого стану, і визначення **граничного напруженого стану**, тобто такого напруженого стану, при якому в пластичному матеріалі виникають пластичні (залишкові) деформації, а в крихкому – виявляються тріщини, є важким завданням. Навіть навчившись визначати діючі напруження (наприклад, головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) в усіх точках ДТТ при заданому зовнішньому навантаженні, неможливо передбачити, чи приведе та чи інша комбінація головних напружень до руйнування матеріалу, оскільки неможливо дослідним шляхом встановити зв'язок між фактом руйнування й величинами головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ насамперед через безліч їх можливих комбінацій у досліді. Для передбачення появи граничного напруженого стану у випадках, коли починається руйнування крихких і текучість пластичних матеріалів, розроблено декілька **теорій граничного стану** (**теорій руйнування**) і відповідних **теорій міцності**. Умову граничного стану матеріалу зображують аналітично у вигляді рівняння й графічно у вигляді поверхні (у разі плоского напруженого стану – межі, контуру) у системі координат, якими є головні напруження σ_1, σ_2 і σ_3 .

Маючи поверхню або контур границі текучості (руйнування) і заданий тривісний напружений стан з відомими величинами головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$,

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

легко визначити, де знаходиться відповідна точка з трьома координатами (величинами головних напружень), – на поверхні текучості (руйнування), *усередині* неї або *зовні*. У першому випадку цей напружений стан є граничним і в точці ДТТ з'являються деформації текучості (має місце руйнування). У другому випадку матеріал у цій точці перебуває в пружному стані. У третьому випадку матеріал має руйнуватися за крихким або пластичним типом.

Далі розглянемо тільки класичні дві теорії крихкого і дві теорії пластичного руйнування. При цьому позначатимемо граничне напруження в досліді на одно-вісне розтягання через $\sigma_{гран_p}$, а в досліді на стискання через $\sigma_{гран_c}$. Будемо, як і раніше, уважати, що складний напружений стан можна подати його головними напруженнями $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. І, нарешті, зауважимо, що наведені далі теорії граничного стану й теорії міцності, побудовані на їх основі, є придатними тільки для опису граничного стану ізотропних матеріалів.

Важливе значення для вивчення теорій руйнування і теорій міцності мають поняття **коефіцієнта запасу міцності, рівнонебезпечних напружених станів і еквівалентного напруження**.

Коефіцієнтом запасу міцності при складному напруженому стані називають число, що показує, у скільки разів необхідно одночасно збільшити всі компоненти напруженого стану, щоб він став граничним.

Два напружені стани називають рівнонебезпечними, або рівноміцними, якщо вони мають однакові значення коефіцієнта запасу міцності.

Напруженням, еквівалентним розглядуваному складному напруженому стану, називають таке напруження, яке слід створити в зразку для випробувань при його розтяганні, щоб лінійний напружений стан точок матеріалу в межах бази зразка і розглядуваний складний напружений стан були рівнонебезпечними (рівноміцними).

Суть усіх теорій граничного стану і міцності полягає у визначенні вигляду функції, що описує граничну поверхню:

$$\sigma_{екв} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (7.1)$$

З допомогою цієї функції здійснюється перехід від складного напруженого стану до рівнонебезпечного лінійного, тобто здійснюється визначення еквівалентного з точки зору міцності або можливого руйнування напруження. Саме його порівнюють з результатами механічних випробувань, роблячи таким чином висновок про рівень вичерпання міцності при складному напруженому стані.

7.1. Теорія найбільших нормальних напружень

Теорія максимальних нормальних напружень (яку іноді називають **теорією Галілея – Ренкіна**) (Galileo Galilei (1564–1642), William John Macquorn Rankine (1820–1872)) задовільно описує граничний напружений стан багатьох крихких матеріалів, для яких небезпечними є напруження розтягання, бо вони мають

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

низьку міцність на розтягання. У теорії стверджується, що руйнування матиме місце, якщо найбільше (σ_1) або найменше (σ_3) з головних напружень набуде граничного значення, що визначається з досліду на розтягання або стискання зразка матеріалу. З цього виходить, що граничний стан матиме місце, якщо

$$\sigma_1 = \sigma_{гран_p} \quad \text{або} \quad |\sigma_3| = \sigma_{гран_c}. \quad (7.2)$$

Для матеріалів, що чинять однаковий опір розтягання і стисканню ($\sigma_{гран_p} = \sigma_{гран_c} = \sigma_{гран}$), у разі плоского напруженого стану ($\sigma_3 = 0$) рівняння (7.2) набуває вигляду

$$\sigma_1 = \sigma_{гран} \quad \text{або} \quad |\sigma_2| = \sigma_{гран}. \quad (7.3)$$

Очевидно, що руйнування не відбудеться, якщо

$$\sigma_1 < \sigma_{гран} \quad \text{або} \quad |\sigma_2| < \sigma_{гран}. \quad (7.4)$$

Умову (7.4) графічно зображено на рис. 7.1. Руйнування матиме місце при будь-якій комбінації двох головних напружень плоского напруженого стану, поданого точкою, що лежить на контурі квадрата або поза квадратом. З іншого боку, безліч напружених станів, описаних точками всередині квадрата, не є граничними для цього матеріалу. Експерименти показали, що за цією теорією можна передбачити руйнування обмеженої кількості крихких матеріалів (зокрема, у першому квадранті на рис. 7.1), тому її застосовують у практиці розрахунків конструкцій саме з таких матеріалів (камінь, цегла, кераміка, інструментальні сталі). Як граничне напруження використовують границю міцності σ_B .

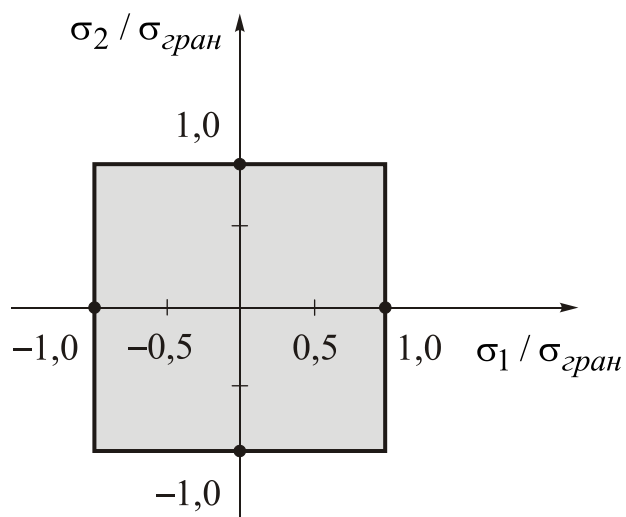


Рис. 7.1. Графічна інтерпретація теорії руйнування, що базується на обмеженні максимальних головних напружень

7.2. Теорія найбільших лінійних деформацій

Теорія найбільших лінійних деформацій пов'язана з іменами Э. Маріотта і Б. Сен-Венана (Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1886), Edme Mariotte (1620–1684)). Ця теорія граничного стану ґрунтується на припущенні про те, що причиною руйнування є неприпустимо великі лінійні деформації, які виникають при деформації твердих тіл, особливо крихких. У цій теорії стверджується, що руйнування відбудеться в тій точці ДТТ, у якій найбільша лінійна деформація ε_1

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

набуде граничного значення, що відповідає появі граничних напружень у зразку матеріалу при його одновісному розтяганні. Використавши узагальнений закон Гука й обчисливши найбільшу лінійну деформацію ε_1 через головні напруження, а одновісну деформацію границі міцності через границю міцності матеріалу σ_B , отримаємо умову граничного стану у вигляді

$$[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \sigma_B. \quad (7.5)$$

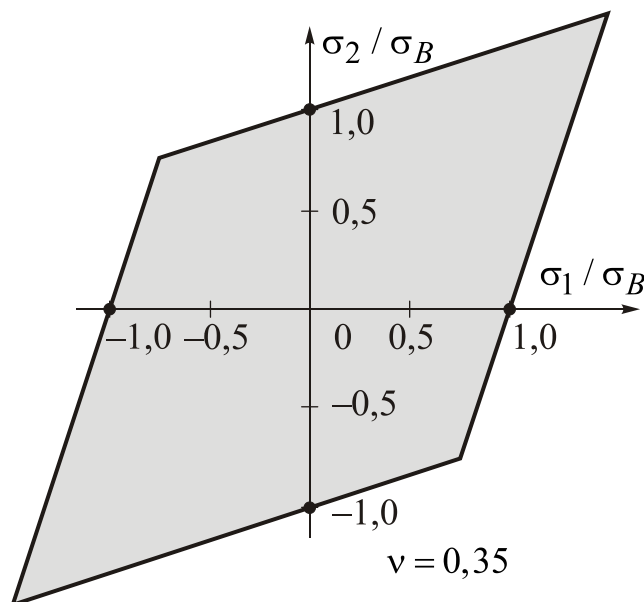


Рис. 7.2. Графічна інтерпретація теорії руйнування, що ґрунтується на обмеженні максимальних головних деформацій

Перевірка цієї теорії дослідом виявила, що теоретичні й експериментальні результати узгоджуються лише для деяких випадків крихкого стану матеріалу (наприклад, для легованого чавуну і високоміцних сталей після низького відпуску). Слід також зазначити, що застосування теорії найбільших лінійних деформацій є неприпустимим для матеріалів, що не відповідають закону Гука або знаходяться за границею пропорційності.

7.3. Теорія найбільших дотичних напружень

У розробленні теорії найбільших дотичних напружень значний внесок зробили Ш.-О. Кулон, А. Е. Треска, І. Баушингер (Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806), Henri Édouard Tresca (1814–1885), Johann Vauschinger (1834–1893)). Ця теорія, що застосовується для більшості пластичних металічних матеріалів, базується на ідеї про необхідність обмеження величини найбільших діючих дотичних напружень граничним рівнем, тобто у момент появи текучості в зразку матеріалу при його розтяганні. У теорії постулюється, що граничний стан (текучість) в умовах об'ємного напруженого стану матиме місце у разі, коли найбільше дотичне напруження набуде граничного значення, що дорівнює значенню,

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

отриманому в досліді на просте розтягання, тобто в момент появи в зразку напружень границі текучості σ_T . Відомо, що максимальне дотичне напруження

$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$. При одновісному розтяганні $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, тобто $\tau_{\max} = \sigma_1 / 2$. У

момент появи текучості в зразку $\tau_{\max} = \sigma_T / 2$. Таким чином, при граничному напруженому стані має місце рівність

$$\tau_{\max} = \sigma_T \quad \text{або} \quad |\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_T. \quad (7.6)$$

У разі плоского напруженого стану ($\sigma_3 = 0$), коли σ_1 і σ_2 мають протилежні знаки, умова (критерій) текучості має вигляд

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_T \quad \text{або} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_T} - \frac{\sigma_2}{\sigma_T} = 1. \quad (7.7)$$

Якщо σ_1 і σ_2 мають один і той же знак, то максимальне дотичне напруження дорівнює половині чисельно більшого головного напруження σ_1 або σ_2 . Критерій, що відповідає такому випадку, має вигляд

$$|\sigma_1| = \sigma_T \quad \text{або} \quad |\sigma_2| = \sigma_T. \quad (7.8)$$

Рівняння (7.7) і (7.8) графічно зображено на рис. 7.3. Зазначимо, що рівняння (7.7) описує 2-й і 4-й квадранти на рис. 7.3. У 1-му і 3-му квадрантах критерій текучості описують рівняння (7.8). Межа шестикутника на рис. 7.3 – це межа появи текучості. Область усередині затемненого шестикутника відповідає безлічі пружних напружених станів.

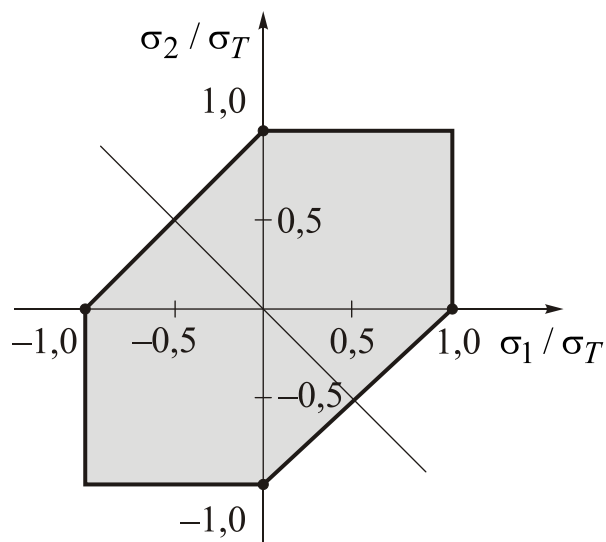


Рис. 7.3. Графічне зображення теорії граничного стану, яка ґрунтується на обмеженні максимальних дотичних напружень

Теорія найбільших дотичних напружень набула широкого застосування в розрахунках машин і споруд, передусім, завдяки своїй простоті, а також хорошій збіжності теоретичних розрахунків і результатів численних експериментальних перевірок на багатьох пластичних матеріалах. Її очевидним недоліком є ігнорування в умові граничного стану середніх головних напружень. Тільки одна теорія граничного стану – теорія потенціальної енергії деформації формозміни – точніше визначає небезпеку руйнування, ніж теорія Кулона – Треска, хоча відмінності між результатами розрахунків згідно з цими теоріями рідко перевищують 15 %.

7.4. Теорія найбільшої потенціальної енергії деформації формозміни

Основи цієї теорії граничного стану закладено в роботах М. Губера і Р. Е. Мізеса (Maksymilian Tytus Huber (1872–1950), Richard Edler von Mises (1883–1953)). Головний її постулат базується на обмеженні накопичення в точці ДТТ потенціальної енергії деформації, пов'язаної зі зміною форми ДТТ, тобто енергії, що накопичується внаслідок дії дотичних напружень. Енергію, що накопичується в одиниці об'єму ДТТ при його деформуванні (тобто питому енергію деформації), можна подати у вигляді суми двох доданків. Перший з них означає питому енергію зміни об'єму, а другий – питому енергію зміни форми (формозміни). У теорії стверджується, що граничний стан текучості в пластичному матеріалі в умовах складного напруженого стану настає тоді, коли питома енергія формозміни набуває деякого граничного значення, обчисленого за наслідками досліду на одновісне розтягання у момент появи в зразку місцевої текучості, тобто напруження σ_T .

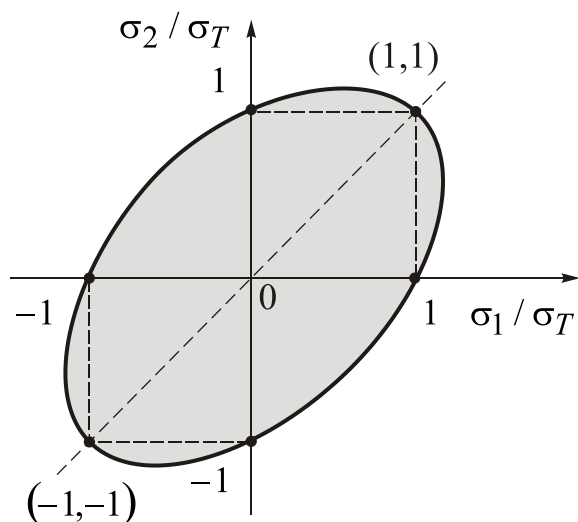


Рис. 7.4. Графічне зображення критерію граничного стану, який базується на обмеженні потенціальної енергії формозміни

що є рівнянням еліпса, зображеного на рис. 7.4. Численні напружені стани, показані точками всередині еліпса, не є граничними.

Цю теорію, яку найчастіше називають **теорією Мізеса**, було повноцінно експериментально підтверджено, і сьогодні вона набула широкого застосування в інженерних розрахунках конструктивних елементів з металічних матеріалів.

Умовою граничного стану в цьому випадку є рівність

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = 2\sigma_T^2. \quad (7.9)$$

У разі плоского напруженого стану рівняння (7.9) спрощується до вигляду

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2, \quad (7.10)$$

7.5. Критерії (умови) міцності, що відповідають різним теоріям граничного напруженого стану

Щоб не допустити появи в тій або іншій точці ДТТ граничного напруженого стану, слід зменшити праву частину кожної з умов граничного напруженого стану, обмеживши напруження в зразку матеріалу їх допустимими значеннями

$$[\sigma] = \sigma_{гран} / n, \quad (7.11)$$

де n – коефіцієнт запасу міцності.

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

Тоді з умов граничного стану (7.2)–(7.10) можна отримати умови міцності:

а) за теорією найбільших нормальних напружень:

– для об'ємного напруженого стану

$$\sigma_{екв}^I = \sigma_1 \leq [\sigma] \quad \text{або} \quad |\sigma_3| \leq [\sigma], \quad (7.12)$$

– для плоского напруженого стану

$$\sigma_{екв}^I = \sigma_1 \leq [\sigma] \quad \text{або} \quad |\sigma_2| \leq [\sigma]; \quad (7.13)$$

б) за теорією найбільших лінійних деформацій

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]; \quad (7.14)$$

в) за теорією найбільших дотичних напружень:

– для об'ємного напруженого стану

$$\sigma_{екв}^{III} = |\sigma_1 - \sigma_3| \leq [\sigma], \quad (7.15)$$

– для плоского напруженого стану:

якщо σ_1 і σ_2 мають різні знаки, то

$$\sigma_{екв}^{III} = |\sigma_1 - \sigma_2| \leq [\sigma], \quad (7.16)$$

якщо σ_1 і σ_2 мають однакові знаки, то

$$\sigma_{екв}^{III} = |\sigma_1| \leq [\sigma] \quad \text{або} \quad |\sigma_2| \leq [\sigma]; \quad (7.17)$$

г) за теорією найбільшої енергії формозміни:

– для об'ємного напруженого стану

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \leq 2[\sigma]^2 \quad (7.18)$$

або

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma];$$

– для плоского напруженого стану:

$$(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) \leq [\sigma]^2 \quad (7.19)$$

або

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \leq [\sigma].$$

Зазначимо, що всі умови міцності записано через головні напруження, тоді як існує можливість подати їх через напруження на площадках довільної орієнтації, використовуючи формули їх зв'язку з головними напруженнями. Нижче

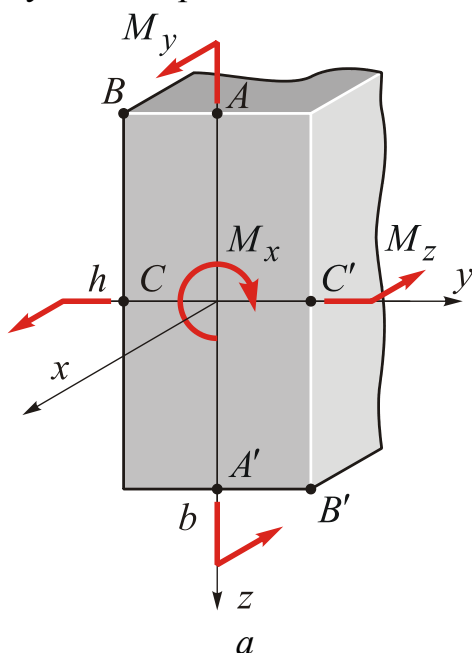
РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

викладено декілька практичних задач з визначення розмірів різних поперечних перерізів призматичного бруса при довільному навантаженні з використанням умов міцності.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 7.1

У прямокутному поперечному перерізі бруса (рис. а) діють два внутрішні згинальні моменти $M_y = 7,5$ кН·м, $M_z = 3,2$ кН·м, а також крутний момент $M_x = 7,0$ кН·м. Допустиме напруження матеріалу бруса $[\sigma] = 160$ МПа. Знайти розміри поперечного перерізу h і b , вважаючи, що $h/b = 2$. Використати в розрахунках теорію найбільших дотичних напружень.



Розв'язання. Графіки розподілу напружень, спричинених кожним із внутрішніх зусиль, що діють у перерізі, показано на рис. б. Таблиця коефіцієнтів для обчислення моменту опору при крученні $W_K = \alpha hb^2$ дає змогу, знайшовши $\alpha = 0,246$ і $\gamma = 0,795$, визначити максимальне дотичне напруження (рис. б).

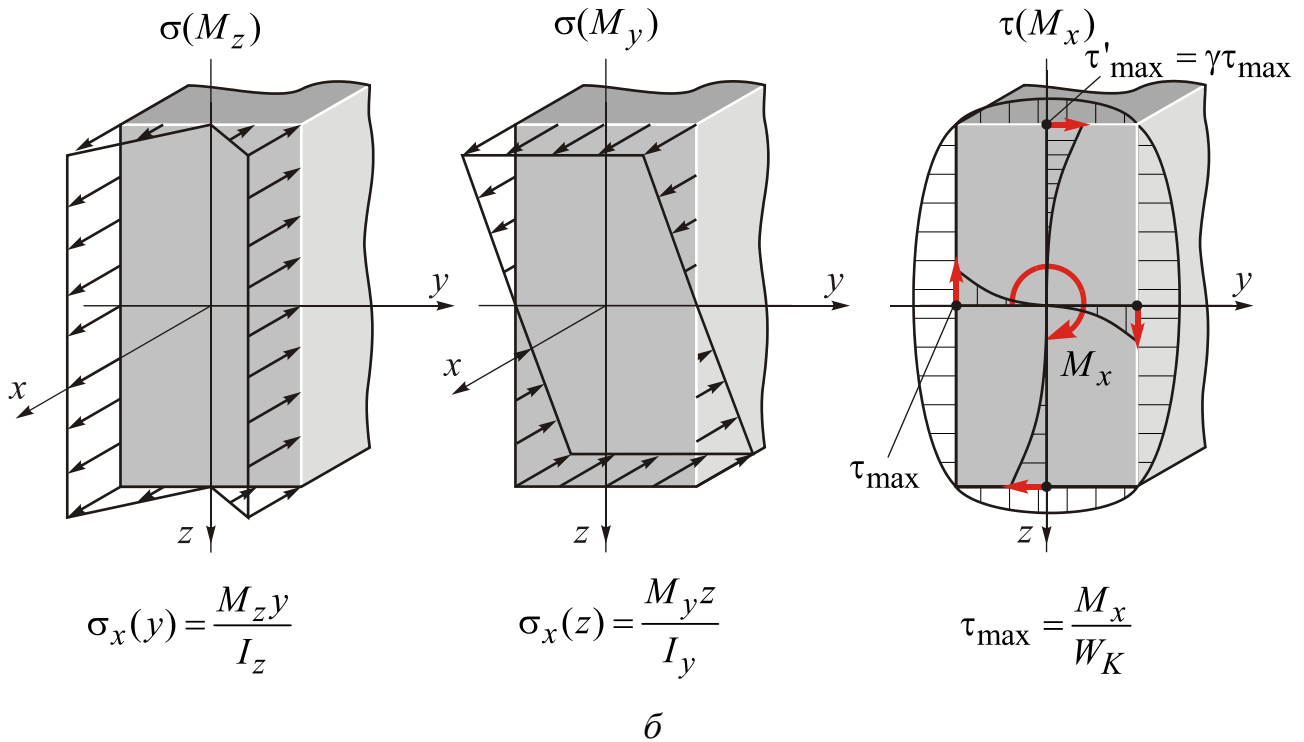
Наступним етапом розв'язання є знаходження потенційно небезпечних точок перерізу. Для цього оцінимо спільну дію нормального і дотичного напружень, а також запишемо умови міцності в кожній з них, беручи до уваги вид напруженого стану в точці (одновісний чи складний). Як випливає з рис. б, у двох кутових точках B і B' діють максимальні нормальні напруження

$$\sigma_{x_{\max}} = \sigma_B = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}.$$

Таблиця коефіцієнтів для обчислення моменту опору перерізу

$\frac{h}{b}$	1	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	>10
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

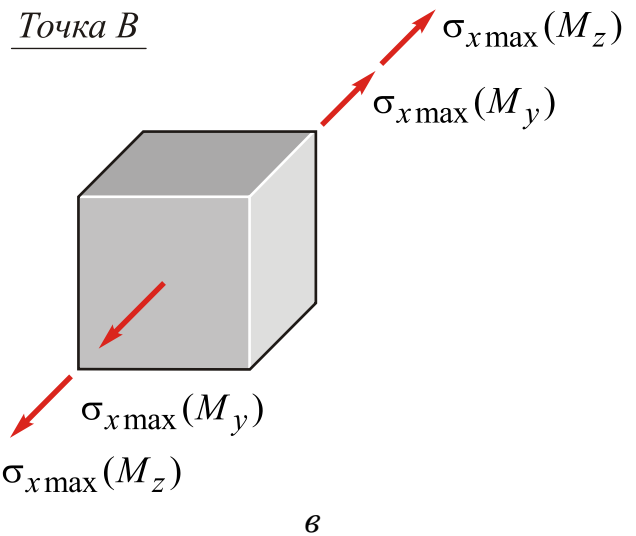


Зазначимо, що дотичні напруження в точках B і B' дорівнюють нулю:

$$\tau_B = 0.$$

Оскільки напружений стан у точках B і B' є лінійним (рис. в), умова міцності – це фактично порівняння максимального діючого нормального напруження з допустимим напруженням:

$$\sigma_{x_{\max}} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma].$$

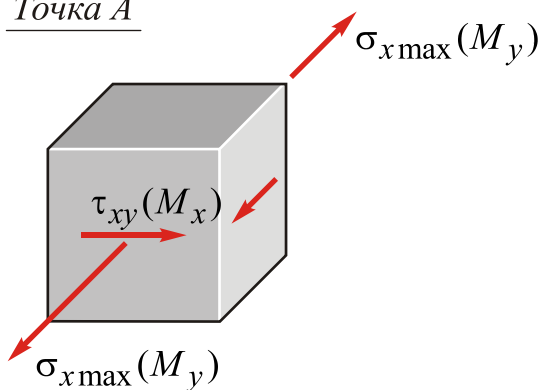


Тут $W_y = bh^2/6$, $W_z = hb^2/6$. З цієї умови перше з трьох можливих значень ширини перерізу b_1 визначається формулою

$$b_1 \geq \sqrt[3]{\frac{3M_y/2 + 3M_z}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7,5 \cdot 10^3 / 2 + 3 \cdot 3,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 5,07 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

Точка А



г

Двома іншими потенційно небезпечними точками є точки А (або А') і С (або С'), у яких модулі діючих напружень є однаковими:

$$\sigma_{x_{\max}} = \frac{M_y}{W_y},$$

$$\tau_{xy} = \tau'_{\max} = \gamma \frac{M_x}{W_K} = \gamma \frac{M_x}{\alpha h b^2}.$$

Визначимо головні напруження через напруження на площадках довільної орієнтації, які мають місце у цьому випадку:

$$\sigma_{1,2(3)} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Слід зауважити, що в точці А має місце двовісний напружений стан (рис. г). Згідно з теорією найбільших дотичних напружень (третьою теорією міцності) умова міцності має вигляд

$$\sigma_{екв}^{III} = (\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\sigma],$$

або для площадок довільної орієнтації

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma] \quad \text{або}$$

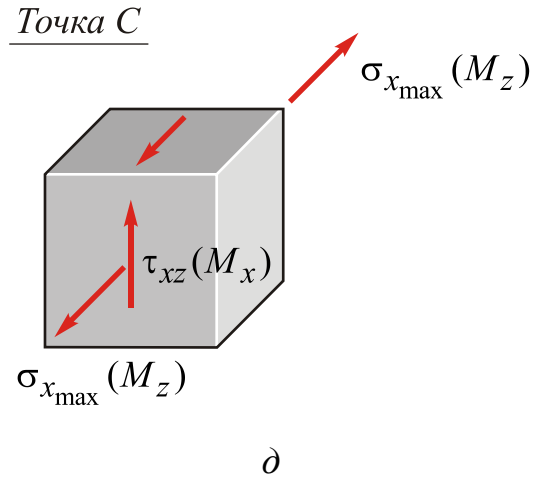
$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha h b^2}\right)^2} \leq [\sigma].$$

З цієї умови друге з трьох можливих значень ширини перерізу

$$b_2 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(3M_y/2)^2 + (\gamma M_x/\alpha)^2}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(3/2 \cdot 7,5 \cdot 10^3)^2 + (0,795 \cdot 7,0 \cdot 10^3/0,246)^2}}{160 \cdot 10^6}} = 5,40 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

**РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ**

Точка C є останньою потенційно небезпечною точкою перерізу (див. рис. δ). Її напружений стан – двовісний, оскільки $\sigma_{x_{\max}} = M_z / W_z$ і $\tau_{xz} = \tau_{\max} = M_x / \alpha hb^2$. З цієї причини також використаємо теорію найбільших дотичних напружень для запису умови міцності аналогічно точці A :



$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Зважаючи на те, що $W_z = hb^2/6$, обчислимо третє значення ширини:

$$b_3 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{9(M_z)^2 + (M_x/\alpha)^2}}{[\sigma_{all}]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{9(3,2 \cdot 10^3)^2 + (7,0 \cdot 10^3/0,246)^2}}{160 \cdot 10^6}} = 5,725 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Порівнявши три значення b , найбільше з них вибираємо як дійсну ширину перерізу: $b_{\max} = b_3 = 5,725 \cdot 10^{-2}$ м. Відповідно $h_{\max} = 2b_{\max} = 11,46 \cdot 10^{-2}$ м.

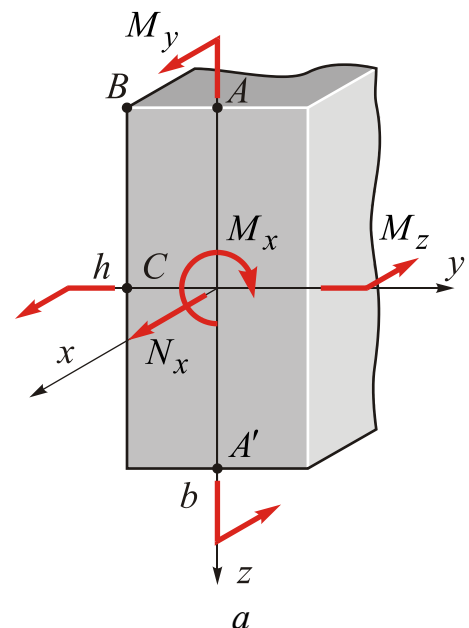
Задача 7.2

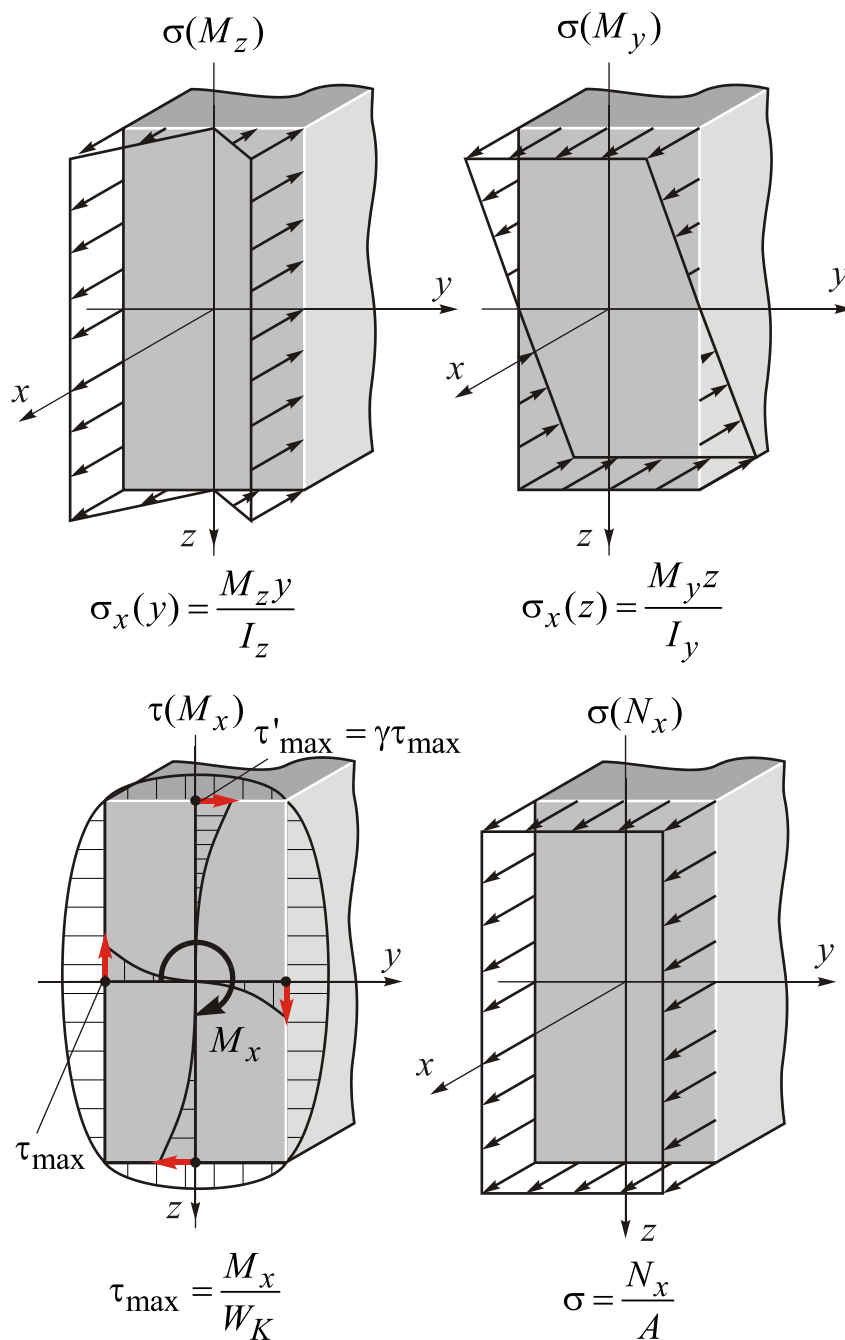
У поперечному перерізі прямокутного бруса (рис. a) діють два згинальні моменти $M_y = 7,5$ кН·м і $M_z = 3,2$ кН·м, а також крутний момент $M_x = 7,0$ кН·м і подовжня сила $N_x = 2,0$ кН. Уважаючи, що допустиме напруження матеріалу бруса $[\sigma] = 160$ МПа, обчислити розміри поперечного перерізу h і b . Узяти до уваги, що $h/b = 2$, і використати теорію найбільших дотичних напружень.

Розв’язання. Графіки розподілу напружень, спричинених кожним внутрішнім зусиллям, зображено на рис. δ . Таблиця коефіцієнтів, необхідних для обчислення моментів опору $W_K = \alpha hb^2$, дає змогу використати значення $\alpha = 0,246$ і $\gamma = 0,795$ під час розрахунку максимальних дотичних напружень (рис. δ).

Передусім необхідно визначити потенційно небезпечні точки перерізу. Як впливає з рис. δ , максимальне нормальне напруження діє в єдиній кутовій точці B :

$$\sigma_{x_{\max}} = \sigma_B = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}. \quad (a)$$





б

Таблиця коефіцієнтів для обчислення моменту опору перерізу

h/b	1	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	>10
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

Зазначимо, що дотичне напруження в точці B (рис. в) дорівнює нулю:

$$\tau_B = 0.$$

Оскільки напружений стан у точці B є лінійним, умова міцності – це порівняння найбільшого діючого нормального напруження з допустимим напруженням:

$$\sigma_{x_{\max}} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma],$$

де $W_y = bh^2/6$, $W_z = hb^2/6$.

Щоб спростити розв'язання, розглянемо його в двох ітераціях. Наближений результат (на першій ітерації) можна отримати, нехтуючи $\sigma(N_x)$. Тоді перше з трьох можливих значень ширини поперечного перерізу

$$b_1 > \sqrt[3]{\frac{3M_y/2 + 3M_z}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7,5 \cdot 10^3 / 2 + 3 \cdot 3,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 5,07 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

У другій ітерації оцінимо перенапруження точки B , порівнюючи дійсне напруження відповідно до формули (а) з допустимим напруженням:

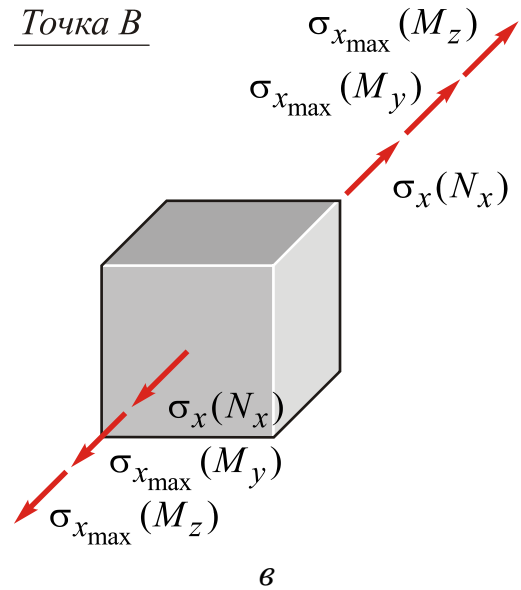
$$\begin{aligned} \sigma_{x_{\max}} = \sigma_B &= \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{N_x}{bh} + \frac{6M_y}{bh^2} + \frac{6M_z}{hb^2} = \frac{N_x}{2b^2} + \frac{3M_y}{2b^3} + \frac{3M_z}{b^3} = \\ &= \frac{2,0 \cdot 10^3}{2(5,07 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{3 \cdot 7,5 \cdot 10^3}{2(5,07 \cdot 10^{-2})^3} + \frac{3 \cdot 3,2 \cdot 10^3}{(5,07 \cdot 10^{-2})^3} = \\ &= (3,89 + 86,33 + 73,67) \cdot 10^6 = 163,89 \cdot 10^6 \text{ Па} = 163,89 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Оцінимо перенапруження точки B :

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{x_{\max}} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{163,89 - 160}{160} = 0,0243 = 2,43 \%$$

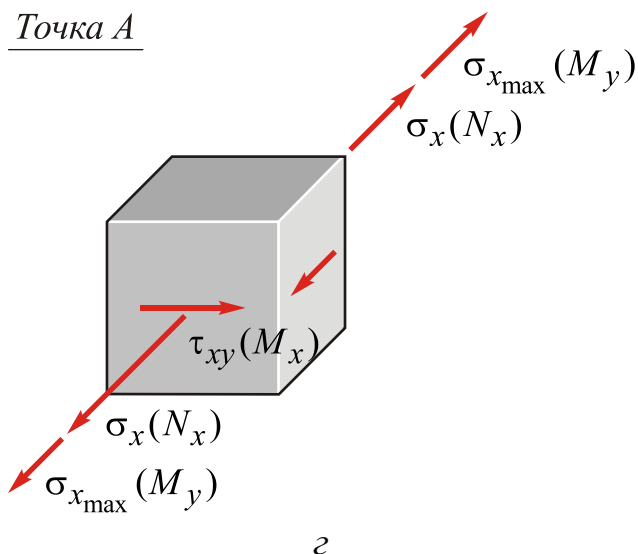
У практичних розрахунках 5 % перенапруження вважається допустимим. Це означає, що ширина $b_1 = 5,07$ см є остаточним значенням, що задовольняє умову міцності в точці B .

Двома іншими потенційно небезпечними точками є A і C (рис. з і д). У першому наближенні нехтуватимемо доданком $\sigma(N_x)$ в обох точках і передусім знайдемо наближені значення ширини b . У другому наближенні оцінюватимемо перенапруження цих точок з урахуванням доданка $\sigma(N_x)$, оскільки 5 % перенапруження вважається допустимим:



РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

Точка А



$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y};$$

$$\tau_{xy} = \tau'_{\max} = \gamma \frac{M_x}{\alpha h b^2}.$$

Оскільки напружений стан в точці А є плоским, відповідно до теорії найбільших дотичних напружень умову міцності запишемо у вигляді

$$\sigma_{екв}^{III} = (\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\sigma],$$

або у першій ітерації через напруження на площадках довільної орієнтації:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma], \quad \text{або} \quad \sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha h b^2}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Отже, визначаємо наближене значення ширини поперечного перерізу:

$$b_2 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(3M_y/2)^2 + (\gamma M_x/\alpha)^2}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(3/2 \cdot 7,5 \cdot 10^3)^2 + (0,795 \cdot 7,0 \cdot 10^3 / 0,246)^2}}{160 \cdot 10^6}} = 5,40 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

У другій ітерації обчислимо перенапруження точки А, спричинене дією $\sigma(N_x)$, та оцінимо його. Діюче еквівалентне напруження

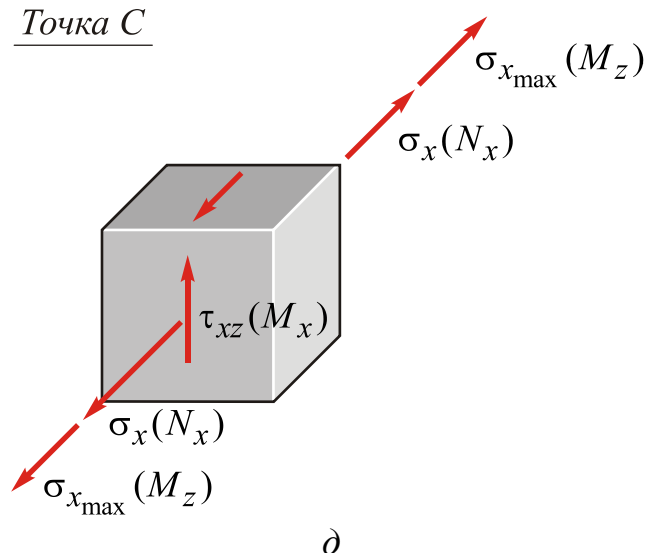
$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{III} &= \sqrt{\left(\frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha h b^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{N_x}{2b^2} + \frac{3M_y}{2b^3}\right)^2 + \left(\gamma \frac{M_x}{\alpha b^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2,0 \cdot 10^3}{2(5,40 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{3 \cdot 7,5 \cdot 10^3}{2(5,40 \cdot 10^{-2})^3}\right)^2 + \left(\frac{0,795 \cdot 7,0 \cdot 10^3}{0,246(5,40 \cdot 10^{-2})^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(0,34 \cdot 10^6 + 71,44 \cdot 10^6)^2 + (143,66 \cdot 10^6)^2} = 160,59 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Перенапруження $\Delta\sigma = \frac{\sigma_{екв}^{III} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{160,59 - 160}{160} = 0,0037 = 0,37 \%$.

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

Оскільки перенапруження $\Delta\sigma < 5\%$ вважається допустимим, то ширина $b_2 = 5,40$ см є остаточною з огляду на міцність потенційно небезпечної точки А.

Точка С – остання потенційно небезпечна точка перерізу. Її напружений стан – двовісний, оскільки в ній діють $\sigma_x = N_x/A + M_z/W_z$ і $\tau_{xz} = \tau_{\max} = M_x / (\alpha hb^2)$. З цієї причини використовуватимемо теорію найбільших дотичних напружень, щоб записати умову міцності по аналогії з точкою А:



$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\left(\frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (б)$$

Зважаючи на те, що $W_z = hb^2/6$, обчислимо спочатку наближене значення ширини перерізу без урахування $\sigma(N_x)$:

$$b_3 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{9(M_z)^2 + (M_x/\alpha)^2}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{9(3,2 \cdot 10^3)^2 + (7,0 \cdot 10^3/0,246)^2}}{160 \cdot 10^6}} = 5,725 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

У другій ітерації визначимо перенапруження точки С з урахуванням $\sigma(N_x)$ та оцінимо його. З цією метою знайдемо дійсне значення еквівалентного напруження, підставивши b_3 у формулу (б):

$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{III} &= \sqrt{\left(\frac{N_x}{2b^2} + \frac{3M_z}{b^3}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{\alpha b^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2,0 \cdot 10^3}{2(5,725 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{3 \cdot 3,2 \cdot 10^3}{(5,725 \cdot 10^{-2})^3}\right)^2 + \left(\frac{7,0 \cdot 10^3}{0,246(5,725 \cdot 10^{-2})^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(0,305 \cdot 10^6 + 51,16 \cdot 10^6)^2 + (151,65 \cdot 10^6)^2} = 160,14 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160,14 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

**РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ**

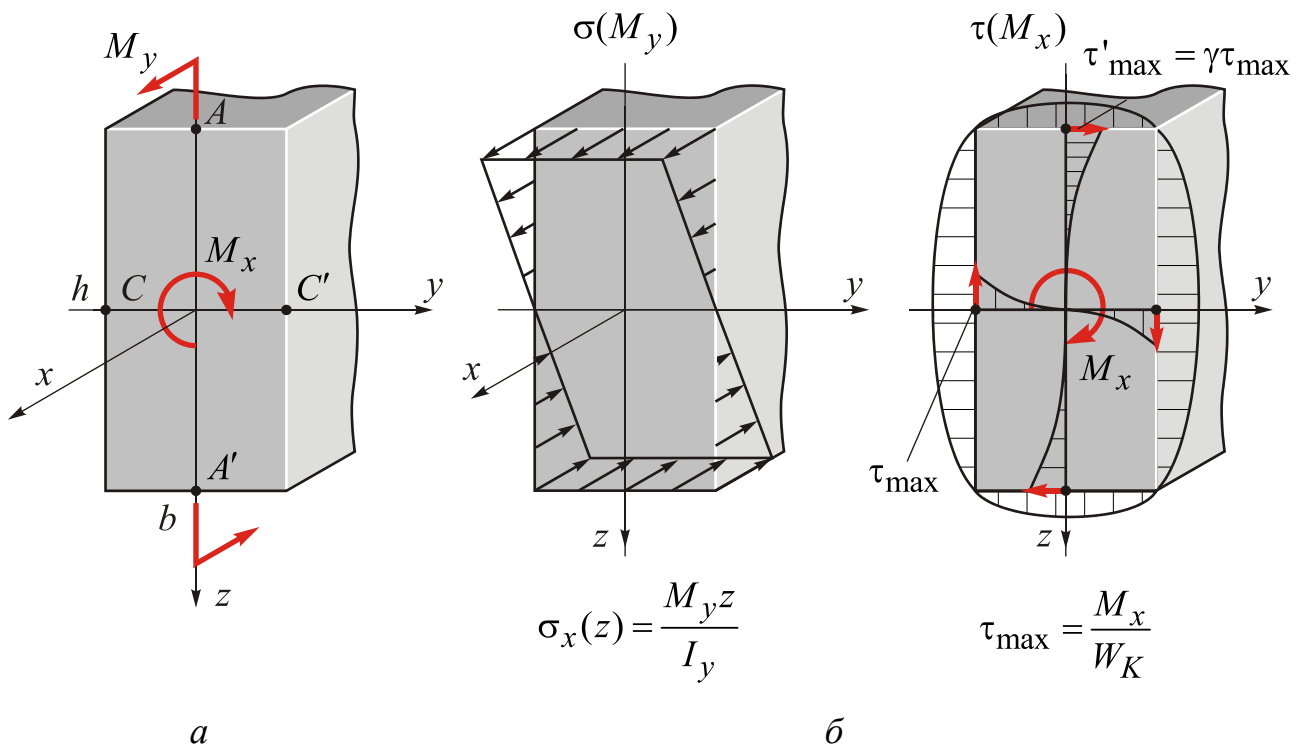
Перенапруження $\Delta\sigma = \frac{\sigma_{екв}^{III} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{160,14 - 160}{160} = 0,00088 = 0,088 \%$. Таке перенапруження є допустимим, і ширина $b_3 = 5,725$ см є остаточним результатом розрахунків при умові міцності точки С.

Порівнявши три обчислені значення b , найбільше з них вибираємо як ширину поперечного перерізу: $b_{\max} = b_3 = 5,725 \cdot 10^{-2}$ м. Відповідно $h_{\max} = 11,45 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 7.3

У поперечному перерізі прямокутного бруса (рис. а) діють згинальний момент $M_y = 7,5$ кНм, а також крутний момент $M_x = 7,0$ кН·м. Уважаючи, що допустиме напруження матеріалу бруса $[\sigma] = 160$ МПа, обчислити розміри поперечного перерізу h і b . Візьмемо $h/b = 2$ і використаємо теорію найбільших дотичних напружень.

Розв’язання. Графіки розподілу напружень, спричинених кожним внутрішнім зусиллям, показано на рис. б. З таблиці коефіцієнтів, необхідних для обчислення моменту опору при крученні $W_K = \alpha hb^2$, вибираємо $\alpha = 0,246$ і $\gamma = 0,795$, які використаємо далі під час розрахунку максимальних дотичних напружень.

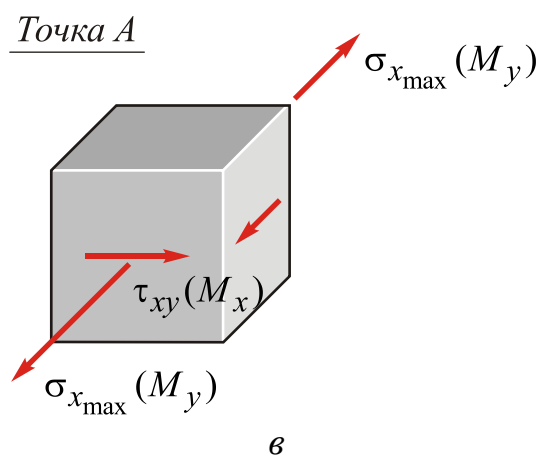


РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

Таблиця коефіцієнтів для обчислення моменту опору перерізу

$\frac{h}{b}$	1	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	>10
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Потенційно небезпечні точки перерізу з урахуванням спільної дії нормальних і дотичних напружень зображено на рис. а. Зазначимо, що точки А і А' – це дві рівнонебезпечні точки з найбільшими за модулем нормальними напруженнями, а точки С і С' – дві рівнонебезпечні точки з максимальними дотичними напруженнями. Таким чином, А і С (або А' і С') – дві потенційно небезпечні точки цього перерізу. Умови міцності в цих точках слід записувати з урахуванням складного напруженого стану в них, тобто використовуючи під час розрахунків певну теорію міцності.



Як впливає з рис. а, найбільше нормальне напруження в точці А діє спільно з відносно великим дотичним напруженням τ'_{\max} (рис. в):

$$\sigma_{x\max} = \frac{M_y}{W_y};$$

$$\tau_{xy} = \tau'_{\max} = \frac{M_x}{W_K} = \gamma \frac{M_x}{\alpha h b^2}.$$

Оскільки напружений стан у точці А є плоским, запишемо умову міцності, використовуючи теорію найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = (\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Для площадок довільної орієнтації умова міцності має вигляд

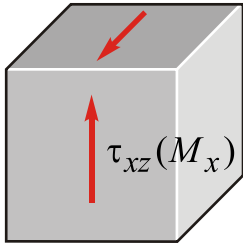
$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma], \quad \text{тобто} \quad \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha h b^2}\right)^2} \leq [\sigma],$$

звідки

$$b_1 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(3M_y/2)^2 + (\gamma M_x/\alpha)^2}}{[\sigma]}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(3/2 \cdot 7,5 \cdot 10^3)^2 + (0,795 \cdot 7,0 \cdot 10^3 / 0,246)^2}}{160 \cdot 10^6}} = 5,40 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Точка С



г

Точка С є другою потенційно небезпечною точкою перерізу з деформацією чистого зсуву, яка є окремим випадком плоского напруженого стану. Діюче напруження $\tau_{xz} = \tau_{\max} = M_x / (\alpha h b^2)$ (рис. г). Умову міцності запишемо по аналогії з точкою А:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{0 + 4 \left(\frac{M_x}{\alpha h b^2} \right)^2} \leq [\sigma],$$

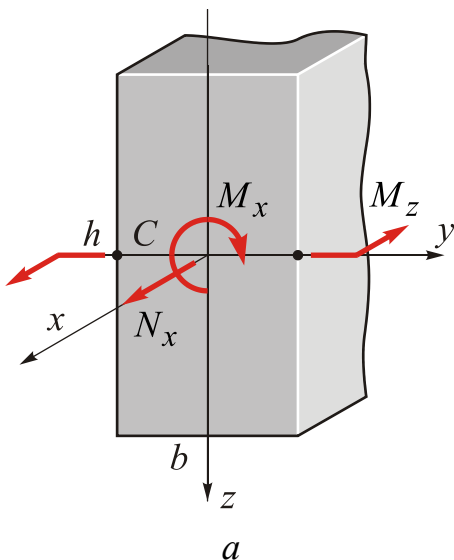
звідки

$$b_2 \geq \sqrt[3]{\frac{M_x/\alpha}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{7,0 \cdot 10^3 / 0,246}{160 \cdot 10^6}} = 5,62 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Порівнявши два значення b , більше з них пропонуємо як ширину перерізу: $b_{\max} = b_2 = 5,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Відповідно $h_{\max} = 11,24 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

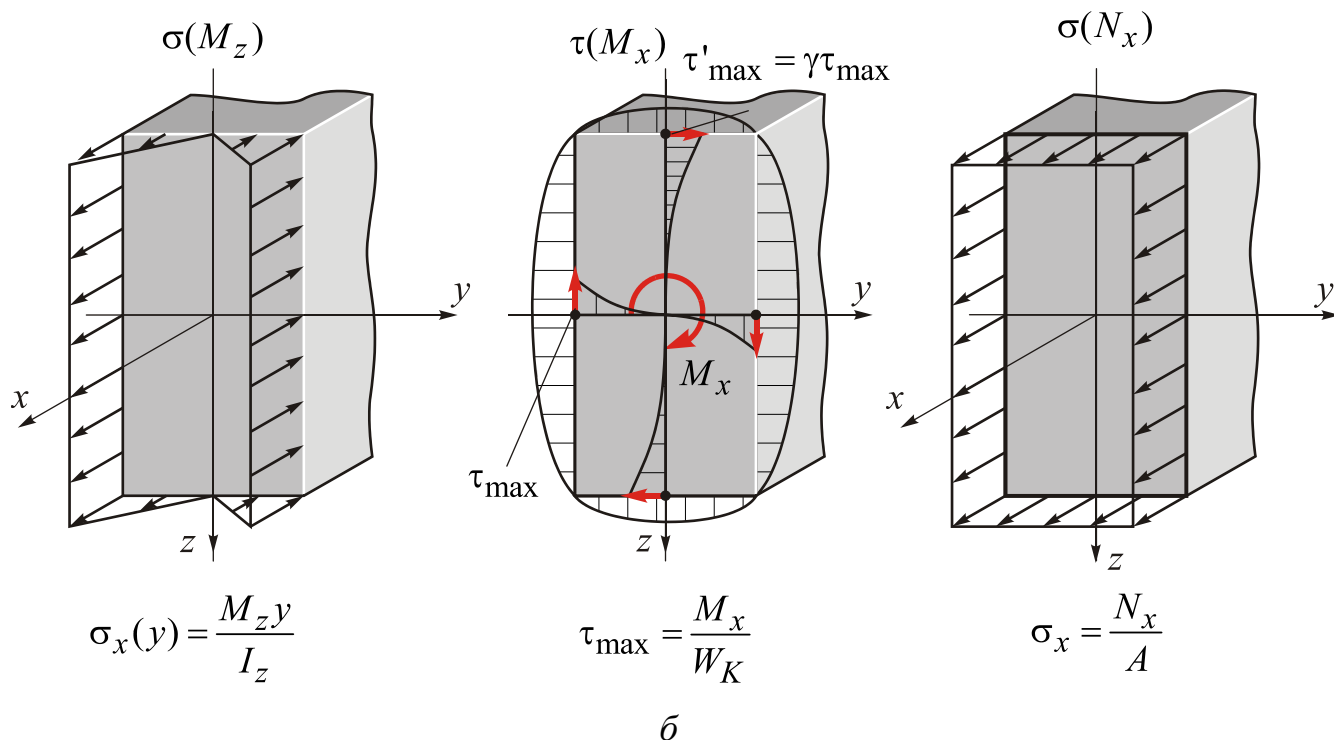
Задача 7.4

У поперечному перерізі прямокутного бруса (рис. а) діють згинальний момент в горизонтальній площині $M_z = 3,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$, а також крутний момент $M_x = 7,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і поздовжня сила $N_x = 2,0 \text{ кН}$. Уважаючи, що допустиме напруження матеріалу бруса $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, а також $h/b = 2$, обчислити розміри поперечного перерізу h і b із застосуванням теорії найбільших дотичних напружень.



Розв'язання. Графіки розподілу напружень, спричинених кожним із діючих внутрішніх зусиль, зображено на рис. б. Для знаходження моменту опору при крученні $W_K = \alpha h b^2$ з таблиці коефіцієнтів візьмемо $\alpha = 0,246$ і $\gamma = 0,795$, що дає змогу обчислити максимальне дотичне напруження (рис. б).

**РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ**

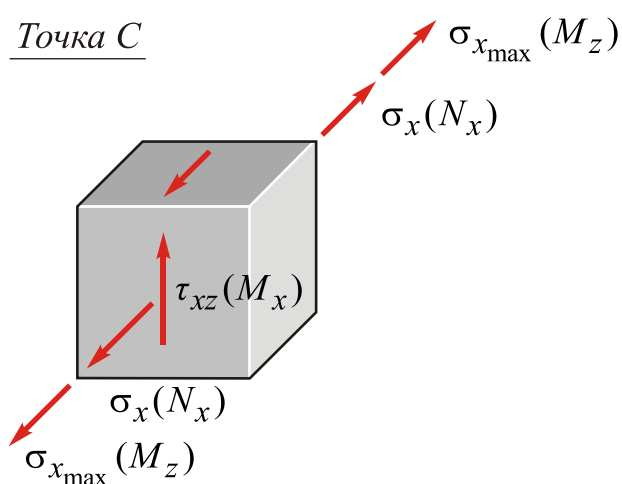


Таблиця коефіцієнтів для обчислення моменту опору перерізу

<i>h/b</i>	1	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	>10
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Передусім знаходимо потенційно небезпечні точки, розглядаючи спільну дію нормальних і дотичних напружень. З аналізу графіків, зображених на рис. б, стає очевидним, що в цьому випадку має місце єдина небезпечна точка *C*, у якій діють найбільші нормальне й дотичне напруження (рис. в).

Щоб спростити розв'язання, застосуємо дві ітерації. У першій ітерації знехтуємо напруженнями $\sigma(N_x)$ і знайдемо наближене значення ширини *b*. У другій ітерації оцінимо перенапруження в цій точці, спричинене дією напружень $\sigma(N_x)$.



в

Напружений стан у точці *C* – двовісний, оскільки $\sigma_x = N_x/A + M_z/W_z$ і $\tau_{xz} = \tau_{\max} = M_x/(\alpha h b^2)$. З цієї причини умову міцності запишемо, використовуючи теорію найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\left(\frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (a)$$

Оскільки $W_z = hb^2/6$, для обчислення ширини b без урахування $\sigma(N_x)$ використаємо формулу

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{9(M_z)^2 + (M_x/\alpha)^2}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{9(3,2 \cdot 10^3)^2 + (7,0 \cdot 10^3/0,246)^2}}{160 \cdot 10^6}} = 5,725 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

У другій ітерації визначимо перенапруження в точці C з урахуванням додаткових напружень $\sigma(N_x)$, якими раніше нехтували. Для цього знайдемо дійсне еквівалентне напруження в точці, підставляючи обчислене $b = 5,725 \cdot 10^{-2}$ м у формулу (a):

$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{III} &= \sqrt{\left(\frac{N_x}{2b^2} + \frac{3M_z}{b^3}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{\alpha b^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2,0 \cdot 10^3}{2(5,725 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{3 \cdot 3,2 \cdot 10^3}{(5,725 \cdot 10^{-2})^3}\right)^2 + \left(\frac{7,0 \cdot 10^3}{0,246(5,725 \cdot 10^{-2})^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(0,305 \cdot 10^6 + 51,16 \cdot 10^6)^2 + (151,65 \cdot 10^6)^2} = 160,14 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160,14 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Перенапруження $\Delta\sigma = \frac{\sigma_{екв}^{III} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{160,14 - 160}{160} = 0,00088 = 0,088 \%$ істотно менше 5 %, тому ширина $b = 5,725$ см і висота $h = 11,45$ см забезпечують міцність точки C , а отже, і міцність усього перерізу.

Задача 7.5

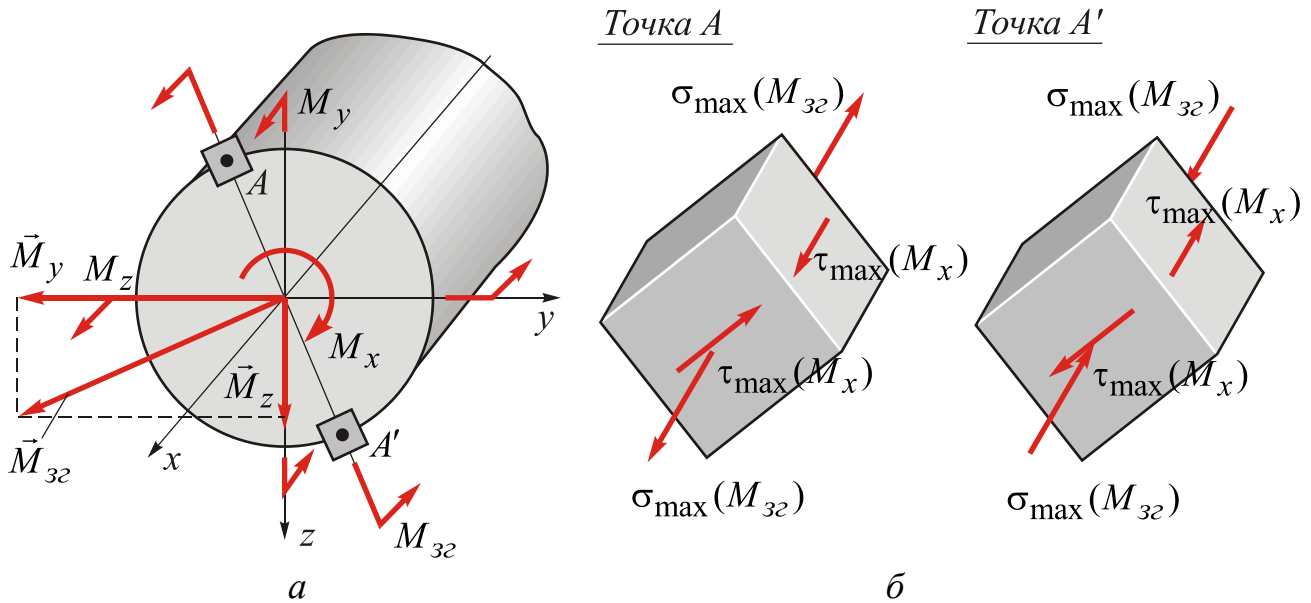
Брус круглого суцільного поперечного перерізу (рис. *a*) навантажений в одному з перерізів внутрішніми згинальними моментами $M_y = 7,5$ кН·м і $M_z = 3,2$ кН·м, які діють відповідно у вертикальній і горизонтальній площинах симетрії перерізу, а також крутним моментом $M_x = 7,0$ кН·м. Зважаючи на те, що допустимі напруження матеріалу бруса $[\sigma] = 160$ МПа, визначити діаметр поперечного перерізу d . Використати теорію найбільших дотичних напружень.

Розв'язання. Щоб знайти небезпечні точки цього полярно-симетричного поперечного перерізу, передусім знайдемо результувний згинальний момент M_{32} . Його скалярна величина

$$M_{32} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(7,5 \cdot 10^3)^2 + (3,2 \cdot 10^3)^2} = 8,154 \cdot 10^3 \text{ кН·м.}$$

**РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ**

Точки перетину площини дії моменту M_{z2} і площини поперечного перерізу (точки A і A' на рис. *a*) – це точки найбільших нормальних напружень (рис. *б*).



У цих рівнонебезпечних точках $\sigma_{x_{\max}} = M_{z2}/W_{н.о}$ і $\tau_{\max} = M_x/W_{\rho}$. Це свідчить про те, що має місце плоский напружений стан, а для запису умови міцності необхідно застосувати одну з теорій міцності, у цьому випадку теорію найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_{z2}}{W_{н.о}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Оскільки $W_{\rho} = 2W_{н.о}$, то

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_{н.о}},$$

або

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{M^{III}}{W_{н.о}} \leq [\sigma],$$

де

$$M^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(7,0 \cdot 10^3)^2 + (7,0 \cdot 10^3)^2 + (3,2 \cdot 10^3)^2} = 10,747 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Ураховуючи, що $W_{н.о} = \pi d^3 / 32$, обчислюємо діаметр:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M^{III}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10,747 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 8,813 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

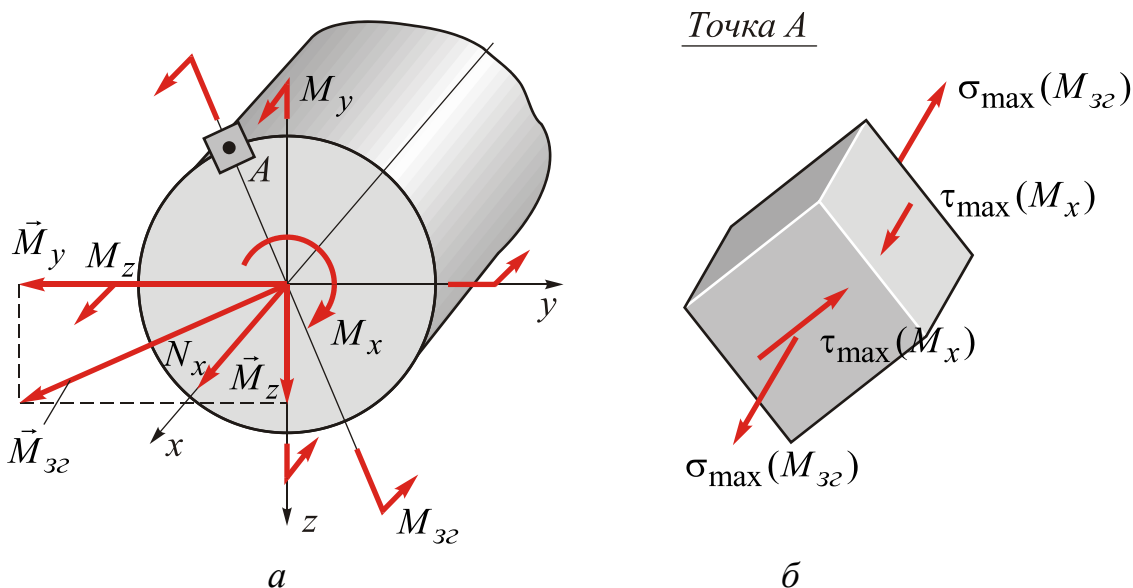
Задача 7.6

Брус круглого суцільного поперечного перерізу (рис. а) навантажений в одному з перерізів внутрішніми згинальними моментами $M_y = 7,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і $M_z = 3,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$, що діють відповідно у вертикальній і горизонтальній площинах симетрії перерізу, а також крутним моментом $M_x = 7,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і поздовжньою силою $N_x = 2,0 \text{ кН}$. Зважаючи на те, що допустимі напруження матеріалу бруса $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, обчислити діаметр поперечного перерізу d . Під час розв'язання задачі використати третю теорію міцності.

Розв'язання. Щоб знайти небезпечні точки полярно-симетричного поперечного перерізу, передусім обчислимо результувний згинальний момент M_{32} . Його скалярне значення

$$M_{32} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(7,5 \cdot 10^3)^2 + (3,2 \cdot 10^3)^2} = 8,154 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Через наявність у перерізі розтягальної поздовжньої сили N_x існує єдина небезпечна точка А, у якій одночасно діють найбільші нормальне й дотичне напруження. Напружений стан у цій точці зображено на рис. б.



У точці А має місце плоский напружений стан, оскільки $\sigma_A = \sigma_{\max} = N_A / A + M_{32} / W_{H.O}$ і $\tau_A = \tau_{\max} = M_x / W_\rho$. У зв'язку з цим умову міцності запишемо, застосовувавши теорію найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{N_x}{A} + \frac{M_{32}}{W_{H.O}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma], \quad W_\rho = 2W_{H.O}. \quad (\text{a})$$

Щоб спростити розв'язання, як і раніше, використовуватимемо дві ітерації. У першій ітерації знехтуємо напруженнями $\sigma(N_x)$, тому отримаємо наближене

**РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ**

значення діаметра d . У другій ітерації оцінимо рівень перенапруження, спричиненого дією напруження $\sigma(N_x)$.

Спрощена умова міцності має вигляд

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_{32}}{W_{н.о}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma],$$

або

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_{н.о}} \leq [\sigma],$$

або

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{M^{III}}{W_{н.о}} \leq [\sigma],$$

де

$$\begin{aligned} M^{III} &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \\ &= \sqrt{(7,0 \cdot 10^3)^2 + (7,5 \cdot 10^3)^2 + (3,2 \cdot 10^3)^2} = 10,747 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що $W_{н.о} = \pi d^3/32$, визначаємо діаметр d таким чином:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M^{III}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10,747 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 8,813 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

У другій ітерації обчислимо перенапруження в точці А, спричинене напруженням $\sigma(N_x)$. Для цього визначимо еквівалентні напруження, що діють у цій точці, підставляючи d у формулу (а):

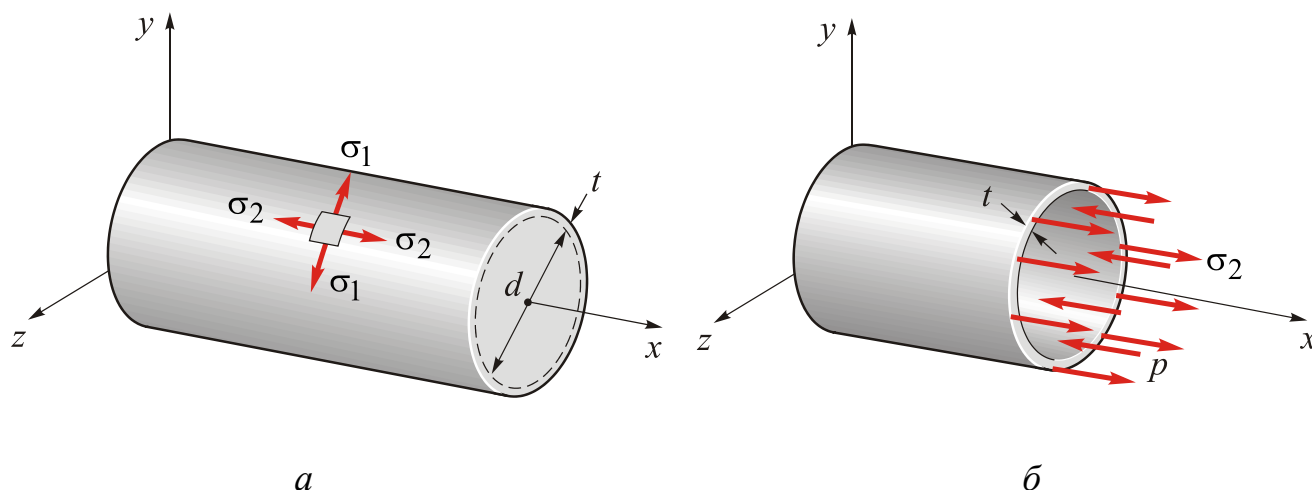
$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{III} &= \sqrt{\left(\frac{N_x}{A} + \frac{M_{32}}{W_{н.о}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4N_x}{\pi d^2} + \frac{32\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16M_x}{\pi d^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{(4 \cdot 2,0 \cdot 10^3)}{3,14 \cdot (8,813 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{32\sqrt{(7,5 \cdot 10^3)^2 + (3,2 \cdot 10^3)^2}}{3,14 \cdot (8,813 \cdot 10^{-2})^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16 \cdot 7,0 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (8,813 \cdot 10^{-2})^3}\right)^2} = \\ &= 160,25 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

Перенапруження $\Delta\sigma = \frac{\sigma_{екв}^{III} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{160,25 - 160}{160} = 0,00156 = 0,156 \%$. Оскільки перенапруження не перевищує 5 %, знайдений діаметр $d = 8,813$ см забезпечує міцність небезпечної точки А, а отже, і всього перерізу.

Задача 7.7

Циліндричну оболонку (рис. а) з плоскими днищами діаметром $d = 0,61$ м і товщиною стінки $t = 12,7$ мм виготовлено зі сталі з границею текучості $\sigma_T = 240$ МПа. Визначити допустимий внутрішній тиск $[p]$, який оболонка здатна витримати з коефіцієнтом запасу міцності $n = 2$. Під час розв'язання застосувати теорію найбільших дотичних напружень та енергетичну теорію міцності Мізеса (теорію найбільшої енергії формозміни).



Розв'язання. Колове, осьове й радіальне напруження визначаємо за формулами, що випливають з рівнянь рівноваги:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = 24p, \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = 12p, \quad \sigma_3 = 0.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (7.15), знаходимо допустимий тиск за теорією найбільших дотичних напружень:

$$24[p] - 0 = \frac{1}{2}(240 \cdot 10^6), \quad \frac{1}{2}(240 \cdot 10^6) = \frac{\sigma_T}{n};$$

$$[p] = 5,0 \text{ МПа.}$$

Підставляючи ті самі напруження в рівняння (7.10), визначаємо допустимий тиск за енергетичною теорією Мізеса:

$$[p](24^2 - 24 \cdot 12 + 12^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(240 \cdot 10^6),$$

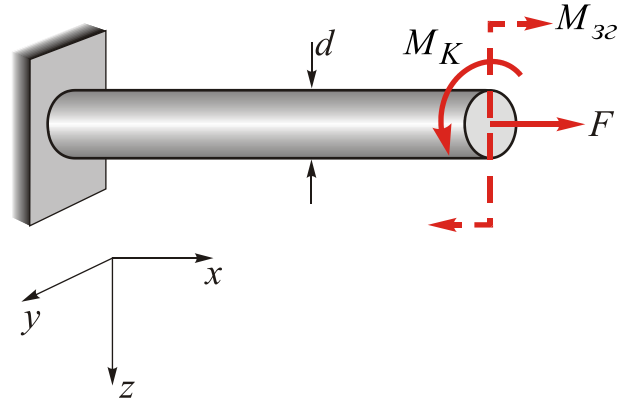
$$[p] = 5,77 \text{ МПа.}$$

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ

Очевидно, що допустимий внутрішній тиск має бути обмежений меншою з двох величин, тобто 5,0 МПа. Зауважимо, що повний розрахунок подібних оболонок повинен супроводжуватися аналізом напружень у місцях з'єднання оболонок з днищами, а також у самих днищах, розрахувати які методами механіки матеріалів неможливо.

Задача 7.8

Вал круглого поперечного перерізу діаметром d , який виготовлено з матеріалу з границею текучості σ_T , навантажений одночасно осьюовою розтягальною силою F і крутним моментом M_K (див. рисунок). Визначити згинальний момент M_{32} , який можна додатково прикласти до вала. Використати коефіцієнт запасу міцності n та енергетичну теорію міцності Мізеса. При обчисленні M_{32} використати такі дані: $F = 100$ кН; $M_K = 5$ кН·м; $d = 60$ мм, $\sigma_T = 300$ МПа; $n = 1,2$.



Розв'язання. Зазначимо, що всі точки на поверхні вала є рівнонебезпечними, за виключенням зон Сен-Венана в околі правого перерізу та лівої жорсткої опори. Нормальне й дотичне напруження в зовнішніх точках вала визначимо за формулами:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_{n.o}} + \frac{N_x}{A} = \frac{32M_{32}}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2}, \quad \text{оскільки } |M_y| = |M_{32}| \text{ і } N_x = F; \quad (\text{а})$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho} = \frac{16M_K}{\pi d^3}, \quad \text{оскільки } |M_x| = |M_K| \text{ згідно з методом перерізів.}$$

Очевидно, що напружений стан зовнішніх точок вала – плоский, тоді головні напруження

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Використовуючи енергетичну теорію міцності Мізеса, а також урахуваючи, що $[\sigma] = \sigma_T / n$, отримуємо

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = [\sigma]^2. \quad (\text{б})$$

Підставляємо σ_{\max} і τ_{\max} з рівнянь (а) у рівняння (б):

$$\left(\frac{32M_{32}}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2}\right)^2 + 3\left(\frac{16M_K}{\pi d^3}\right)^2 = [\sigma]^2.$$

Після спрощення останнього виразу отримуємо квадратне рівняння відносно M :

$$M_{3z}^2 + (0,25Fd)M_{3z} + \left[0,75M_K^2 + 0,0156F^2d^2 - 0,0096[\sigma]^2d^6 \right] = 0,$$

розв'язком якого є

$$M_{3z} = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}\left[c_1^2 - 4(c_2 + c_3 - c_4) \right]^{1/2},$$

де $c_1 = 0,25Fd$, $c_2 = 0,75M_K^2$, $c_3 = 0,0156F^2d^2$ і $c_4 = 0,0096[\sigma]^2d^6$. Після підстановки числових значень визначаємо, що $M_{3z} = 2,29$ кН·м.

Задача 7.9

Круглий вал з насадженими 300-міліметровими шківками обпирається на підшипники кочення A і B . Вал навантажений, як показано на рис. a . Узв'язавши $[\tau] = 70$ МПа, обчислити потрібний діаметр вала відповідно до теорії найбільших дотичних напружень.

Розв'язання. Розрахункову схему вала зображено на рис. b . Для обчислення найбільшої величини розрахункового моменту $(M_z^2 + M_y^2 + M_x^2)^{1/2}$ використовуватимемо діаграми згинальних і крутних моментів (рис. b). У точці C знаходимо

$$(M_z^2 + M_y^2 + M_x^2)^{1/2} = (1^2 + 5,5^2 + 0,6^2)^{1/2} = 5,62 \text{ кН·м},$$

тоді як в точках D і B розрахунковий момент відповідно дорівнює 5,44 і 4,01 кН·м. Отже, у точці C має місце небезпечний переріз вала.

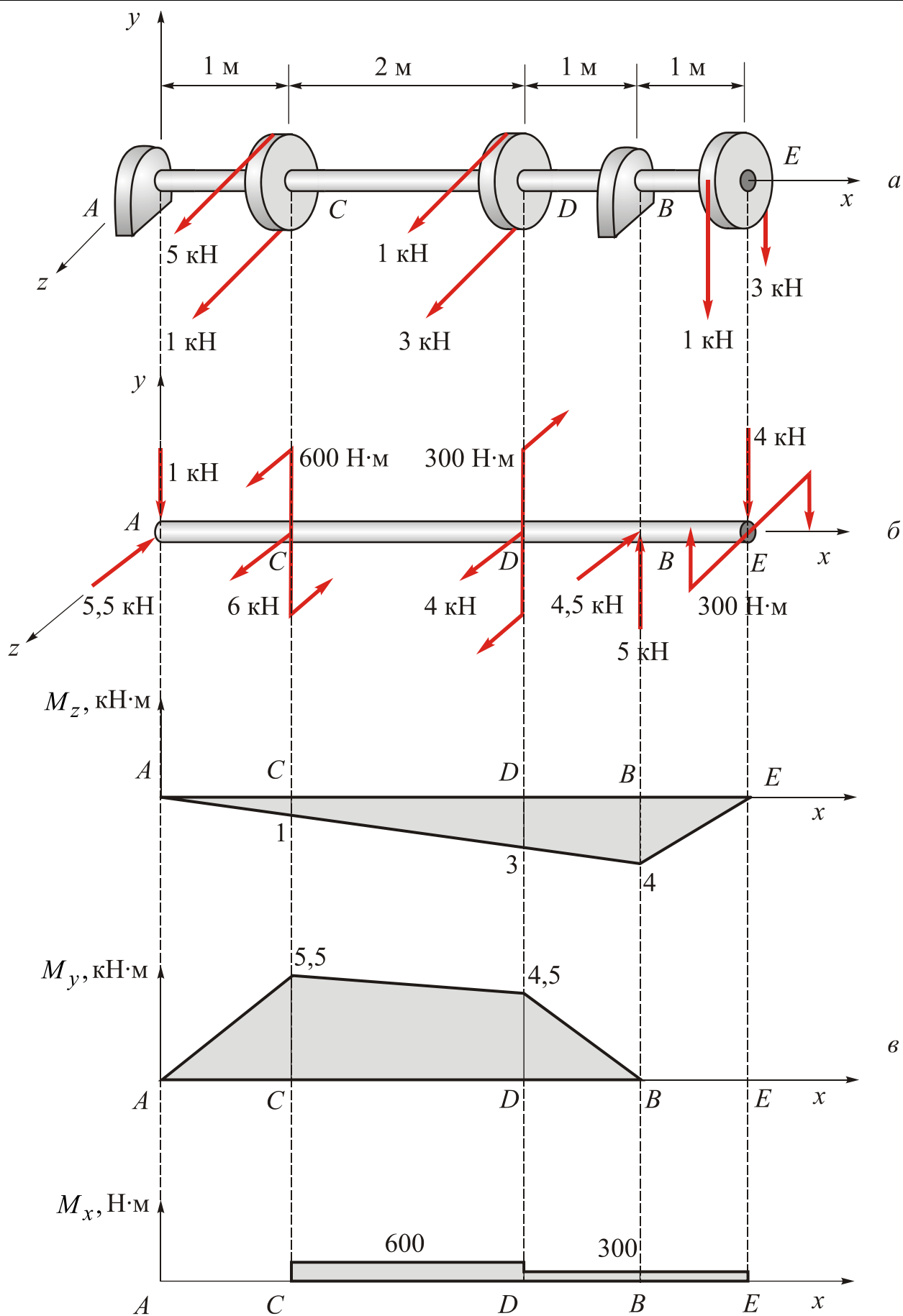
З умови міцності за теорією найбільших дотичних напружень з урахуванням того, що $[\sigma] = 2[\tau]$, отримуємо

$$d = 3\sqrt{\frac{16}{\pi[\tau]} \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_x^2}}.$$

Підставивши числові значення, визначаємо діаметр вала:

$$d = 3\sqrt{\frac{16(5,62 \cdot 10^3)}{\pi(70 \cdot 10^6)}} = 7,42 \text{ мм}.$$

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЯ МІЦНОСТІ



Задача 7.10

Чавунний вал ($\sigma_{B_{розт}} = 160$ МПа і $\sigma_{B_{ст}} = 520$ МПа), що обертається зі швидкістю 600 об/хв і передає від двигуна до виконавчого механізму потужність 40 кВт, навантажений згинальним моментом $M_{зг} = 400$ Н·м. З урахуванням того, що коефіцієнт запасу міцності $n = 2$, визначити потрібний діаметр вала за теорією найбільших головних напружень (першою теорією міцності).

Розв'язання. Оскільки частота обертання вала $f = 600$ об/хв = 10 Гц, обчислюємо крутний момент за відомою формулою:

$$M_x = \frac{159 \text{ кВт}}{f} = \frac{159 \cdot 40}{10} = 636 \text{ Н·м.}$$

Допустимі напруження при розтяганні й стисканні дорівнюють відповідно 80 і 260 МПа. Оскільки головні й максимальне дотичне напруження в конструктивних елементах при гнутті й крученні визначаються формулами

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2};$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2},$$

відповідно до теорії найбільших нормальних напружень, узявши $\sigma_1 = [\sigma]$, отримаємо формулу для обчислення діаметра:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi[\sigma]} \left(M_{зг} + \sqrt{M_{зг}^2 + M_x^2} \right)}.$$

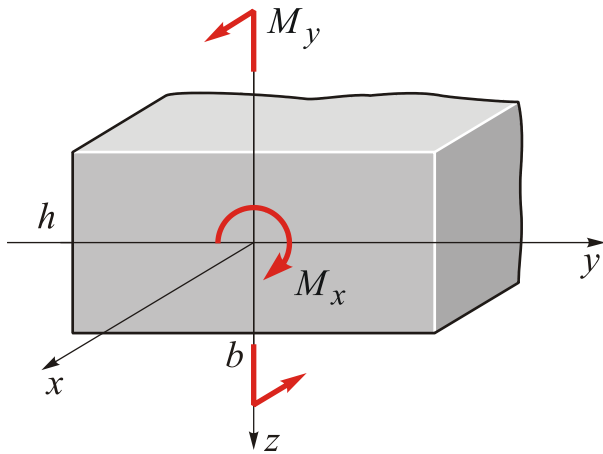
Оскільки для чавуну меншим є допустиме напруження на розтягання, для підстановки в останню формулу беремо $[\sigma] = [\sigma]_{розт} = 80$ МПа. Отже, діаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi(80 \cdot 10^6)} \left(400 + \sqrt{400^2 + 636^2} \right)} = 41,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 41,9 \text{ мм.}$$

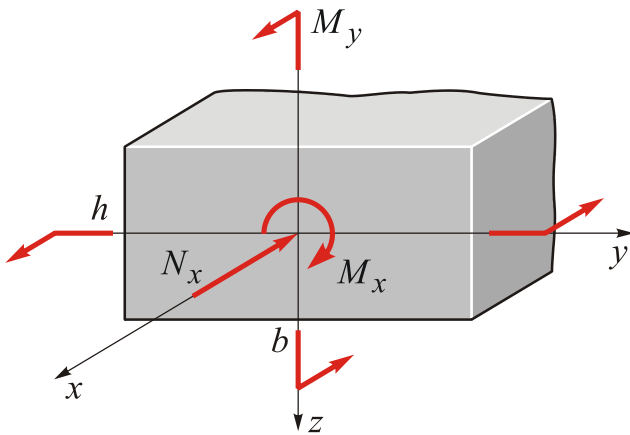
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

7.1. У прямокутному поперечному перерізі бруса діють згинальний момент $M_y = 10$ кН·м у вертикальній площині симетрії перерізу, а також крутний момент $M_x = 70$ кН·м. Уважаючи, що допустиме напруження

матеріалу $[\sigma] = 160$ МПа, обчислити розміри перерізу b і h , якщо $b/h = 2$. Під час розв'язання використати теорію найбільших дотичних напружень, а також енергетичну теорію Мізеса.

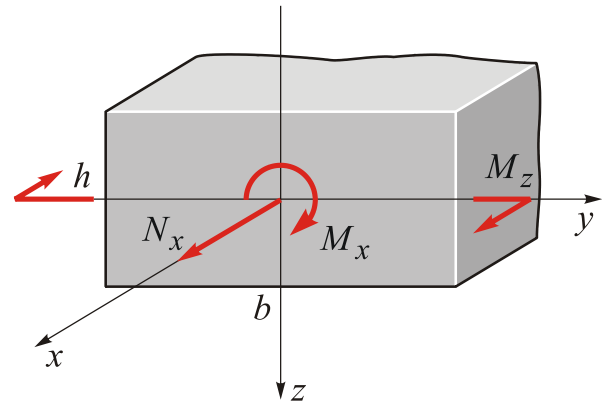


7.2. Оцінити міцність прямокутного поперечного перерізу бруса, навантаженого двома згинальними моментами $M_y = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і $M_z = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$, а також крутним моментом $M_x = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і поздовжня силою $N_x = 20 \text{ кН}$. Уважати, що $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $h = 15 \text{ см}$, $b = 30 \text{ см}$. Використати теорію найбільших дотичних напружень.

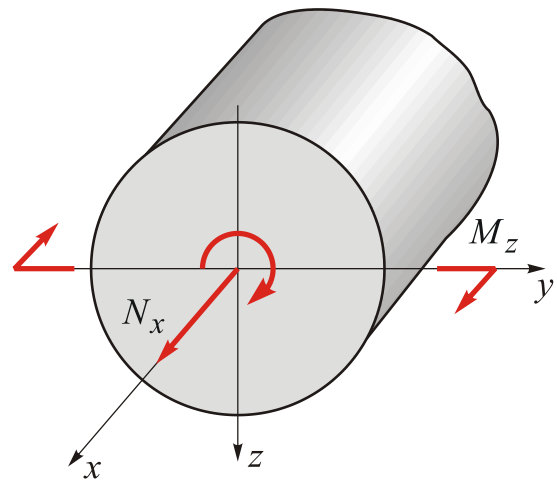


7.3. У прямокутному поперечному перерізі бруса діють згинальний момент у горизонтальній площині $M_z = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, а також крутний момент $M_x = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і поздовжня сила $N_x = 60 \text{ кН}$. Зважаючи на те, що допустиме напруження матеріалу бруса $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$, обчислити розміри поперечного перерізу h і b , якщо $b/h = 2$. Використати теорію

найбільших дотичних напружень та енергетичну теорію міцності Мізеса.

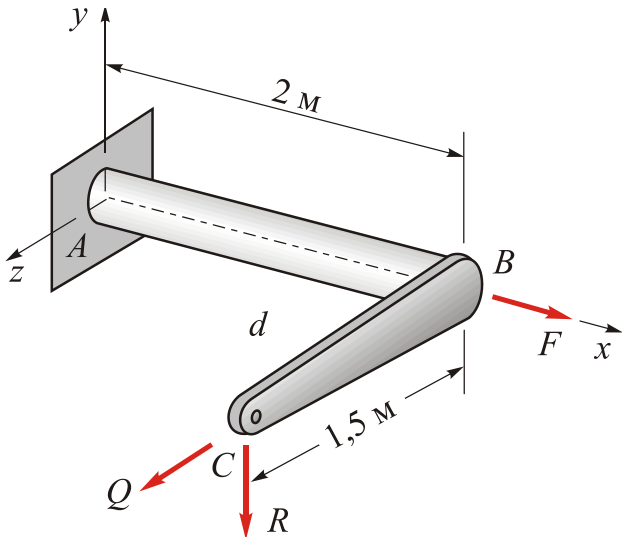


7.4. У поперечному перерізі круглого суцільного бруса діють згинальний момент $M_z = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, а також крутний момент $M_x = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і поздовжня сила $N_x = 100 \text{ кН}$. Уважаючи, що допустимі напруження матеріалу $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити діаметр поперечного перерізу d за енергетичною теорією міцності Мізеса.

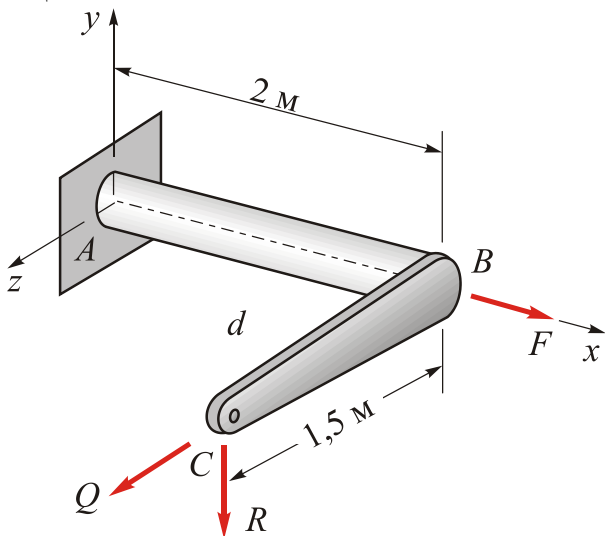


7.5. Сталевий вал діаметром $d = 50 \text{ мм}$ ($\sigma_T = 260 \text{ МПа}$, $\tau_T = 140 \text{ МПа}$) навантажений силою R , а $F = Q = 0$. Узявши коефіцієнт запасу міцності $n = 2$, обчислити допустиме значення сили R з використанням теорії найбільших дотичних напружень та енергетичної теорії міцності Мізеса.

РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ



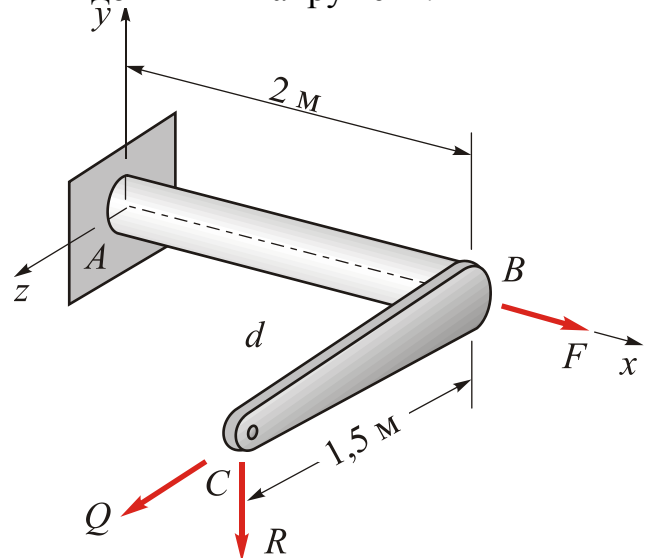
7.6. Сталевий вал діаметром $d = 50$ мм ($\sigma_T = 260$ МПа, $\tau_T = 140$ МПа) навантажений силами R і $F = 30R$, а $Q = 0$. Узяти коефіцієнт запасу міцності $n = 2$. Визначити допустиме значення сили R , використовуючи теорію найбільших дотичних напружень та енергетичну теорію міцності Мізеса.



7.7. Сталевий брус діаметром 50 мм ($\sigma_T = 200$ МПа) навантажений в кінцевих перерізах крутними моментами M та осьовими стискальними силами F . Для $M = 2,0$ кН·м обчислити допустиме значення сили F , використовуючи енергетичну теорію міцності Мізеса.

7.8. Визначити діаметр круглого сталевого вала ($\tau_T = 60$ МПа), наван-

таженого силами $R = 500$ Н, $Q = 300$ Н і $F = 0$. Коефіцієнт запасу міцності $n = 1,4$. Використати теорію найбільших дотичних напружень.



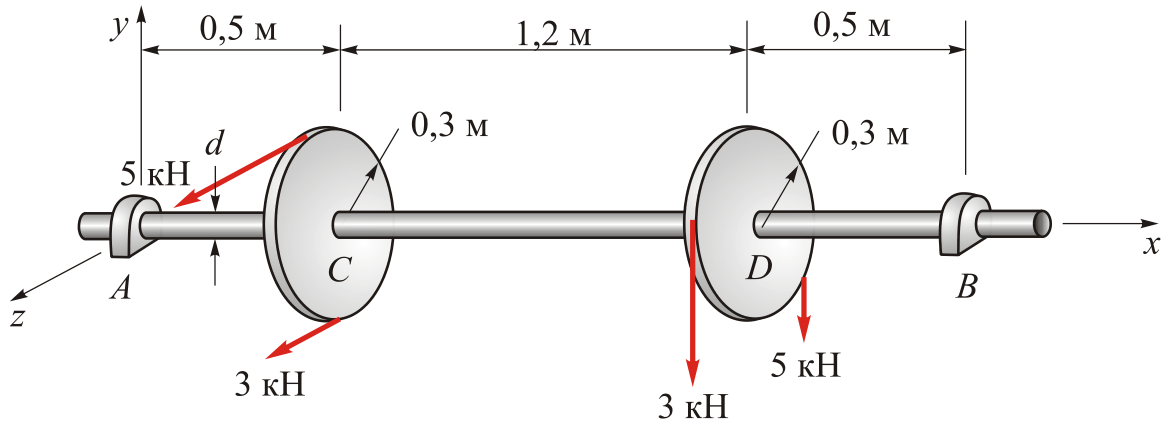
7.9. Тонкостінна металева труба із закритими днищами ($\sigma_{T_{розт}} = 250$ МПа, $\sigma_{T_{ст}} = 380$ МПа) із зовнішнім і внутрішнім діаметрами відповідно 20 і 19 см перебуває під дією внутрішнього тиску 5 МПа і крутного моменту 50 кН·м. Визначити коефіцієнт запасу міцності n відповідно до теорії найбільших нормальних напружень.

7.10. Консольна балка завдовжки 2 м з прямокутним поперечним перерізом 40×80 мм навантажена зосередженою силою $F = 5$ кН, прикладеною до її вільного кінця. При $\sigma_T = 240$ МПа обчислити коефіцієнт запасу міцності n . Використати енергетичну теорію міцності Мізеса.

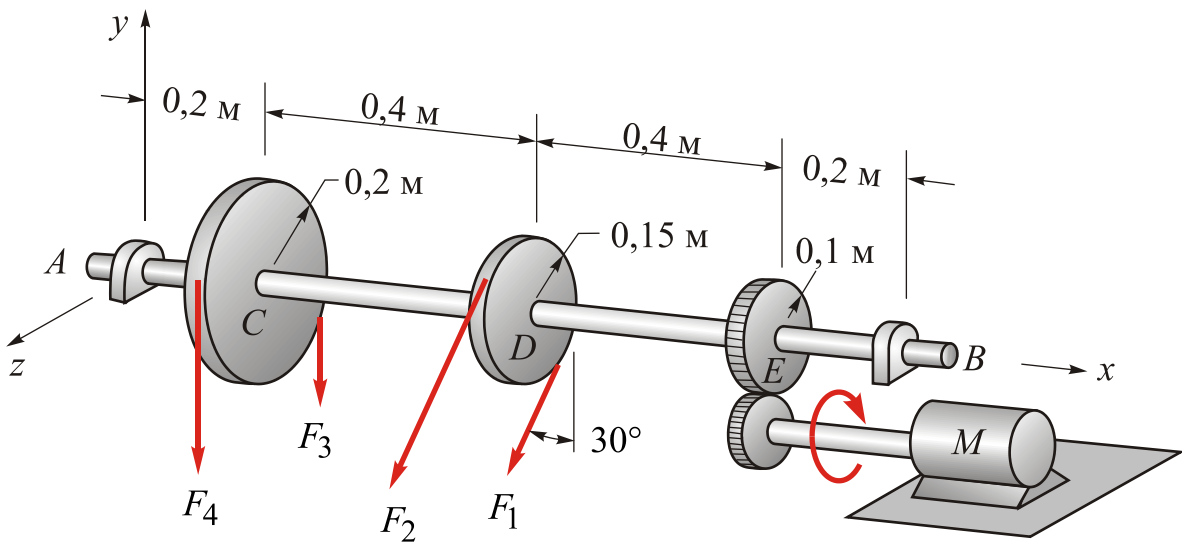
7.11. Сталевий двоопорний вал завдовжки 6 м, який виготовлено з матеріалу з допустимим напруженням $[\sigma] = 120$ МПа, навантажений крутним моментом 500 Н·м, а також своєю власною вагою. Густина матеріалу вала $\rho = 7,86 \cdot 10^3$ кг/м³. Визначити діаметр вала, застосувавши енергетичну теорію міцності Мізеса.

**РОЗДІЛ 7. ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН, ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОГО СТАНУ
І ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ**

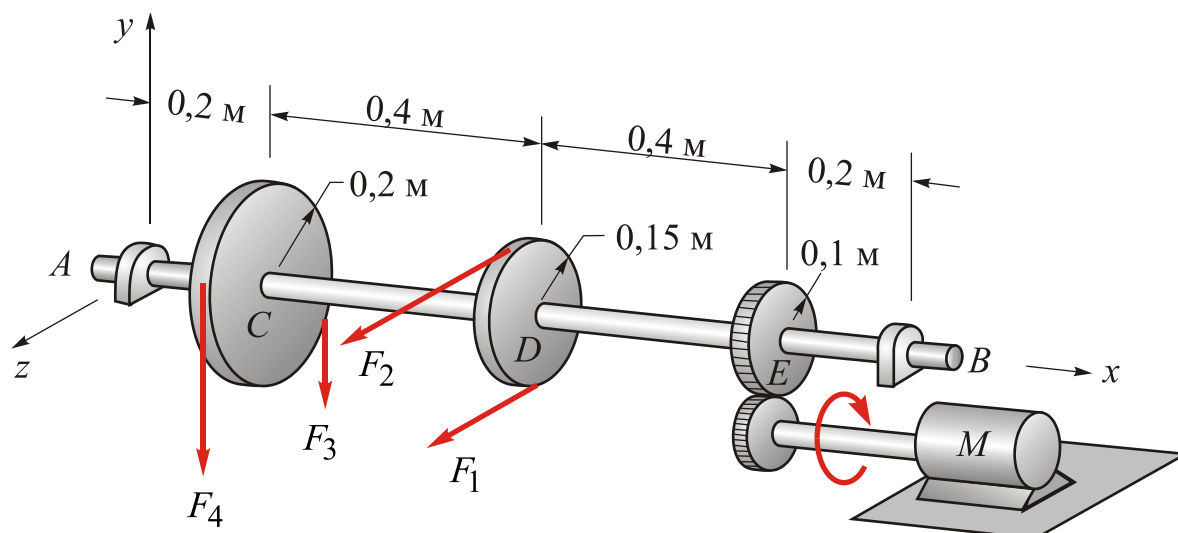
7.12. Визначити діаметр d навантаженого вала. Узяти $[\sigma]=160$ МПа й використати теорію найбільших нормальних напружень.



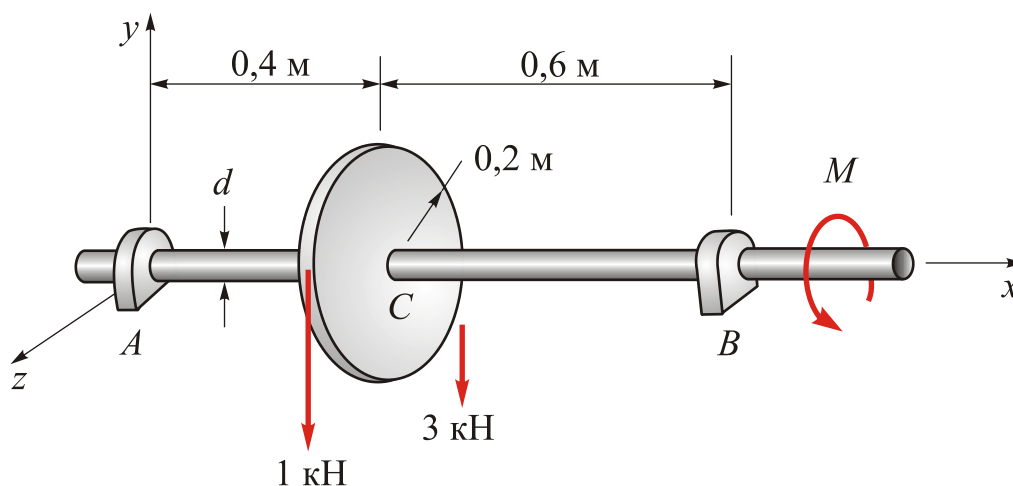
7.13. Суцільний вал AB при швидкості обертання 180 об/хв передає потужність 20 кВт від двигуна через зубчасту передачу до шківів D , де відбирається потужність 8 кВт, а також до шківів C , де відбирається решта потужності – 12 кВт. Зважаючи на те, що відношення між силами $F_1/F_2=3$ і $F_3/F_4=3$, а $[\sigma]=250$ МПа, визначити потрібний діаметр вала AB за теорією найбільших дотичних напружень.



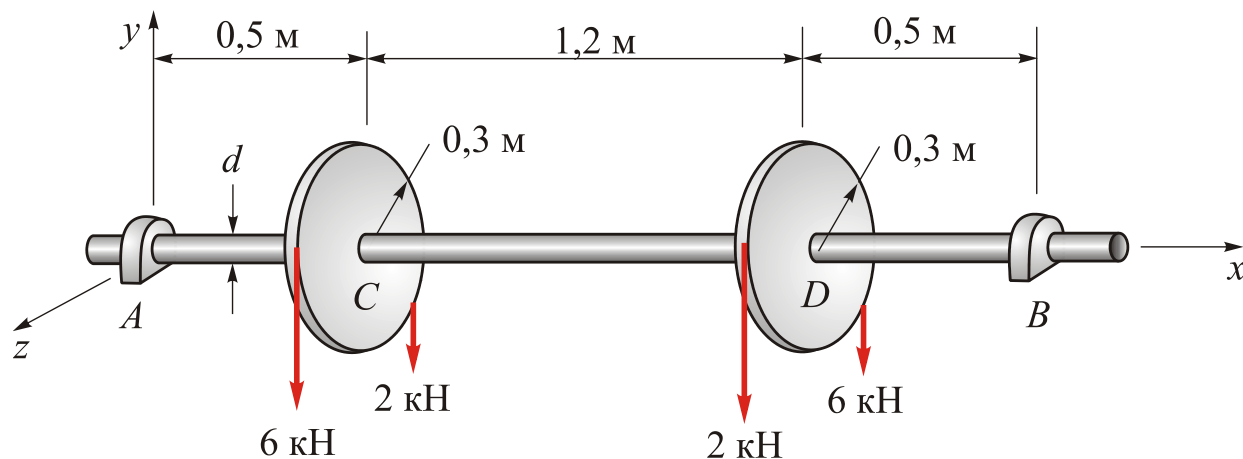
7.14. Суцільний вал AB при швидкості обертання 180 об/хв передає потужність 20 кВт від двигуна через зубчасту передачу до шківів D , де відбирається потужність 8 кВт, а також до шківів C , де відбирається решта потужності – 12 кВт. Уважаючи, що відношення між силами $F_1/F_2=3$ і $F_3/F_4=3$, а $[\sigma]=50$ МПа, визначити потрібний діаметр вала AB за енергетичною теорією міцності Мізеса.



7.15. Спроекувати сталевий вал ($\sigma_T = 300$ МПа), застосувавши теорію найбільших дотичних напружень і взявши коефіцієнт запасу міцності $n = 1,4$.



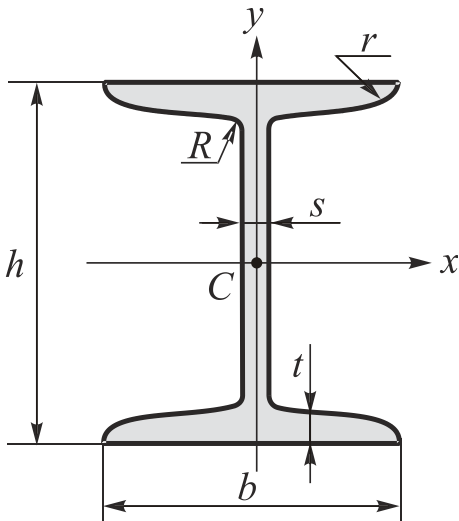
7.16. Визначити діаметр d навантаженого вала. Уважати, що $[\sigma] = 160$ МПа. Застосувати теорію найбільших дотичних напружень.



СОРТАМЕНТИ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ

Таблиця Д.1.1

Сталь гарячекатана. Балки двотаврові (ГОСТ 8239–72)



Позначення:

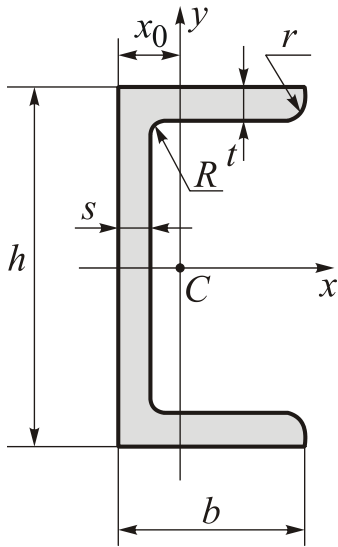
 h – висота балки; b – ширина полиці; s – товщина стінки; t – середня товщина полиці; I – момент інерції; W – момент опору; i – радіус інерції; S_x^T – статичний момент півперерізу

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x^T , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
	h	b	s	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	5,4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	389	419	69,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	519	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	35962	2035	21,8	1181	1366	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1481	1725	182	3,54

ДОДАТОК 1. СОРТАМЕНТИ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ

Таблиця Д.1.2

Сталь гарячекатана. Швелери з паралельними гранями полиць (ГОСТ 8240–72)



Позначення:

h – висота швелера;

b – ширина полиці;

s – товщина стінки;

t – середня товщина полиці;

W – момент опору;

i – радіус інерції;

S_x – статичний момент півперерізу;

I – момент інерції;

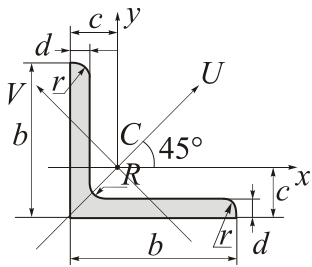
x_0 – координата центра мас

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	x_0 , см
	h	b	s	t									
5	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,26	2,75

ДОДАТОК 1. СОРТАМЕНТИ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ

Таблиця Д.1.3

Сталь прокатна кутова рівнополічна (ГОСТ 8509–72)



Позначення:

b – ширина полиці;

d – товщина полиці;

I – момент інерції;

i – радіус інерції;

c – відстань від центра мас до зовнішньої грані полиці

Номер профілю	b d		Площа перерізу, см^2	Осі						c , см
	мм			$x-x$		$U-U$		$V-V$		
	I_x , см^4	i_x , см		$I_{U_{\max}}$, см^4	$i_{U_{\max}}$, см	$I_{V_{\min}}$, см^4	$i_{V_{\min}}$, см			
2	20	3	1,13	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,6
		4	1,46	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,76
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,8
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	0,94
3,6	36	3	2,1	2,56	1,1	4,06	1,39	1,06	0,71	0,99
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,7	1,04
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	1,13
4,5	45	5	3,79	5,53	1,2	8,75	1,54	2,3	0,79	1,17
		3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
5	50	5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,3
		3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	1,38
5,6	56	5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
7	70	6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	1,78
		4,5	6,2	29	2,16	46	2,72	12	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,9
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
7,5	75	8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20	1,37	2,02
		5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,1
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
8	80	9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	2,18
		5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
10	100	9	15,6	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
		6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
10	100	14	26,3	237	3	375	3,78	99,3	1,94	2,99
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	3,06

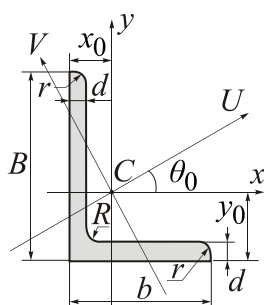
ДОДАТОК 1. СОРТАМЕНТИ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ

Закінчення табл. Д.1.3

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, см ²	Осі						c, см
				x-x		U-U		V-V		
				I_x , см ⁴	i_x , см	$I_{U_{max}}$, см ⁴	$i_{U_{max}}$, см	$I_{V_{min}}$, см ⁴	$i_{V_{min}}$, см	
11	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	2,96
12,5	125	8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3
		8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,4
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
14	140	14	33,4	482	3,8	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,9
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,3
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
18	180	18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,1	589	3,12	4,7
		11	38,8	1216	5,6	1133	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
		12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
20	200	13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,7
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
22	220	30	111,5	4020	6	6351	7,55	1688	3,89	6,07
		14	60,4	2814	6,83	1170	8,6	1159	4,38	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
		16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
25	250	20	97	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

Таблиця Д.1.4

Сталь прокатна кутова нерівнополічна (ГОСТ 8510–72)



Позначення:

B – ширина більшої полиці;
 b – ширина меншої полиці;
 d – товщина полиці;

I – момент інерції;

i – радіус інерції;

x_0, y_0 – відстані від центра мас до зовнішніх граней полиць

Номер профілю	B	b	d	Площа перерізу, см ²	Осі								tg θ_0
					x-x		y-y		V-V		x_0	y_0	
					I_x , см ⁴	i_x , см	I_y , см ⁴	i_y , см	$I_{V_{min}}$, см ⁴	$i_{V_{min}}$, см	см	см	
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,7	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	1	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374

ДОДАТОК 1. СОРТАМЕНТИ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ

Закінчення табл. Д.1.4

Номер профілю	B	b	d	Площа перерізу, см ²	Осі						tgθ ₀		
					x-x		y-y		V-V			x ₀	y ₀
					I _x , см ⁴	i _x , см	I _y , см ⁴	i _y , см	I _{V_{min}} , см ⁴	i _{V_{min}} , см		см	см
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,7	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,8	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,6	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,17	1,6	1,99	0,91	1,18	0,7	0,72	1,6	0,403
			4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,9	1,52	0,69	0,76	1,85	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4,0	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	2	6,26	1,12	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,9	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,2	0,386
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
			5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
7,5/5	75	50	6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,4	10,9	1,07	1,29	2,52	0,43
			5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	1,13	2,6	0,387
			6	7,55	49	2,55	14,8	1,4	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
10/6,3	100	63	8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	1,36	3,04	0,38
			6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113	3,19	35	1,78	20,8	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	1,5	3,32	0,391
11/7	110	70	10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	1,58	3,4	0,387
			6,5	11,4	142	3,53	45,6	2	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
12,5/8	125	80	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	1,64	3,61	0,4
			7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	1,8	4,01	0,407
			8	16	256	4	83	2,28	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
14/9	140	90	12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	2	4,22	0,4
			8	18	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
16/10	160	100	10	22,2	444	4,47	146	2,56	58,5	1,96	2,12	4,58	0,409
			9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,2	2,23	5,19	0,391
18/11	180	110	10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	2,28	5,23	0,39
			12	30	784	5,11	239	2,82	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	5,09	272	2,8	162	2,16	2,43	5,4	0,385
			10	28,3	952	5,8	276	3,12	165	2,42	2,44	5,88	0,375
20/12,5	200	125	12	33,7	1123	5,77	324	3,1	194	2,4	2,52	5,97	0,374
			11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	2,79	6,5	0,392
25/16	250	160	12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	2,91	6,62	0,39
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	2,99	6,71	0,388
			12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	3,53	7,97	0,41
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,5	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	866	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	3,85	8,31	0,405

МЕХАНИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОСНОВНИХ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Таблиця Д.2.1

*Модулі пружності та коефіцієнт Пуассона
для основних класів матеріалів (при кімнатній температурі)*

Матеріал	Модуль пружності, ГПа	Модуль зсуву, ГПа	Коефіцієнт Пуассона
Металеві матеріали			
Вольфрам	340...100	140...170	0,20
Сталь	190...210	75...80	0,27...0,30
Нікель	210	80	0,31
Титанові сплави	100...120	39...44	0,33
Мідь та сплави на її основі	110...120	40...47	0,33...0,36
Латунь	96...100	36...41	0,34
Алюмінієві сплави	70...79	26...30	0,33
Магнієві сплави	41...45	15...17	0,35
Бронза	96...120	36...44	0,34
Чавун	83...170	32...69	0,2...0,3
Керамічні матеріали			
Оксид алюмінію	270...390	—	0,22
Карбід кремнію	345	—	0,17
Нітрид кремнію	304	—	0,30
Оксид магнію	225	—	0,18
Оксид цирконію	205	—	0,31
Склокераміка	120	—	0,25
Оксид кремнію	73	—	0,17
Скло	48...83	19...35	0,17...0,27
Полімери			
Фенолформальдегід	2,76...4,83	—	—
Полівінілхлорид	2,41...4,14	—	0,38
Поліестер	2,76...4,14	—	—
Полістирен	2,28...3,28	—	0,33
Поліметилметакрилат	2,24...3,24	—	—
Полікарбонат	2,38	—	0,36
Найлон	1,58...3,80	—	0,39
Поліпропілен	1,14...1,55	—	—
Поліетилен високої густини	1,08	—	—
Політетрафторетилен	0,40...0,55	—	0,46
Поліетилен низької густини	0,17...0,28	—	—

Таблиця Д.2.2

*Механічні властивості при розтяганні основних класів матеріалів
(при кімнатній температурі)*

Матеріал	Границя текучості, МПа	Границя міцності, МПа	Відносне подовження в момент розриву
Металеві матеріали			
Молибден	565	655	35
Титан	450	520	25

**ДОДАТОК 2. МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОСНОВНИХ
КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Закінчення табл. Д.2.2

Матеріал	Границя текучості, МПа	Границя міцності, МПа	Відносне подовження в момент розриву
Вуглецева сталь	180	380	25
Нікель	138	480	40
Залізо	130	262	45
Латунь (70 % Cu, 30 % Zn)	75	300	68
Мідь	69	200	45
Алюміній	35	90	40
Керамічні матеріали			
Оксид цирконію	—	800...1500	—
Нітрид кремнію	—	250...1000	—
Оксид алюмінію	—	275...700	—
Карбід кремнію	—	100...820	—
Склокераміка	—	247	—
Оксид кремнію	—	110	—
Оксид магнію	—	105	—
Скло	—	69	—
Полімери			
Найлон	44,8...82,8	75,9...94,5	15...300
Полікарбонат	62,1	62,8...72,4	110...150
Поліестер	59,3	48,3...72,4	30...300
Поліметилметалкрилат	53,8...73,1	48,3...72,4	2,0...5,5
Полівінілхлорид	40,7...44,8	40,7...51,7	40...80
Полістирен	—	35,9...51,7	1,2...2,5
Поліпропілен	31,0...37,2	31,0...41,4	100...600
Поліетилен високої густини	26,2...33,1	22,1...31,0	10...1200
Політетрафторетилен	—	20,7...34,5	200...400
Поліетилен низької густини	9,0...14,5	8,3...31,4	100...650

Таблиця Д.2.3

*Коефіцієнт лінійного теплового розширення
основних конструкційних матеріалів (при кімнатній температурі)*

Матеріал	Коефіцієнт лінійного теплового розширення, $\times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Матеріал	Коефіцієнт лінійного теплового розширення, $\times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
Метали і сплави		Керамічні матеріали, графіт, напівпровідникові матеріали	
Вуглецеві та низьколеговані сталі	11,7...12,3	Оксид алюмінію	7,0...7,4
Нержавіючі сталі	10,2...17,2	Боросилікатне скло	3,3
Чавуни	9,9...12,0	Графіт	2,0...6,0
Алюмінієві сплави	21,5...23,6	Арсенід галію	5,9
Сплави на основі міді	16,2...21,0	Склокераміка	6,5
Магнієві сплави	26,0	Карбід кремнію	4,1...4,6
Титан	8,6	Нітрид кремнію	2,7...3,1
Титанові сплави	8,6...9,4	Оксид цирконію	9,6
Золото	14,2	Силікатне скло	9,0
Платина	9,1	Полімери	
Срібло	19,7	Найлон	144
Молибден	4,9	Полібутилентерафталат	108...171
Тантал	6,5	Полікарбонат	122
Вольфрам	4,5	Поліестер	100...180
Цирконій	5,9	Поліетилен низької густини	180...400
Цинк	23,0...32,5	Поліетилен високої густини	106...198
Нікель	13,3	Поліметилметалкрилат	90...162
Свинець	23,8	Поліпропілен	146...180
		Полістирен	90...150
		Політетрафторетилен	126...216
		Полівінілхлорид	90...180

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

- Белл, Ф. Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел : в 2 ч. / Ф. Дж. Белл; под ред. А. П. Филина : пер. с англ. – М. : Наука, 1984. – Ч. 1. – 596 с.
- Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие : в 4 т. / под ред. В. В. Панасюка. – Київ : Наук. думка, 1988. – 486 с.
- Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; за ред. Г. С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – Київ : Вища шк., 2004. – 655 с.
- Сопротивление материалов : справ. пособие : в 2 т. / В. Т. Трощенко, А. Я. Красовский, В. В. Покровский и др. – Київ : Наук. думка, 1993. – Т. 1. – 243 с; 1994. – Т. 2. – 704 с.
- Asaro, R. J. Mechanics of Solids and Materials / R. J. Asaro, V. A. Lubarda. – Cambridge University Press, 2006. – 860 p.
- ASM Handbook. Vol. 1: Properties and Selection: Irons, Steels, and High-Performance Alloys. – ASM International, Materials Park, OH, 1990. – 1063 p.
- ASM Handbook. Vol. 2: Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Special-Purpose Materials. – ASM International, Materials Park, OH, 1990. – 1328 p.
- Beer, F. P. Mechanics of Materials / F. P. Beer, E. Russell Johnston Jr., J. T. DeWolf, D. F. Mazurek. – 7th ed. – Mc. Graw Hill, 2014. – 831 p.
- Beer, F. P. Statics and Mechanics of Materials / F. P. Beer, E. R. Johnston Jr., J. T. DeWolf, D. F. Mazurek. – Mc. Graw Hill, 2009. – 736 p.
- Boresi, A. P. Advanced Mechanics of Materials / A. P. Boresi, R. J. Schmidt, O. M. Sidebottom. – John Wiley & Sons, Inc., 1993. – 414 p.
- Case, J. Strength of Materials and Structures / J. Case, Lord Chilver, C. T. F. Ross. – 4th ed. – John Wiley & Sons Inc., 1999. – 719 p.
- Craig, R. R. Mechanics of materials / R. R. Craig, Jr. – John Wiley & Sons, 2011. – 859 p.
- Gere, J. M. Mechanics of Materials / J. M. Gere. – 6th ed. – Thomson Learning, Inc., 2004. – 964 p.
- Gere, J. M. Mechanics of Materials / J. M. Gere, S. P. Timoshenko. – PWS Publishing Company, 1996. – 832 p.
- Hearn, E. J. Mechanics of Materials : Vol. 1, 2 / E. J. Hearn. – Butterworth Heinemann, 1997. – 1038 p.
- Hibbeler, R. C. Mechanics of materials / R. C. Hibbeler. – 8th ed. – Pearson, 2011. – 883 p.
- Juvinall, R. C. Fundamentals of Machine Component Design / R. C. Juvinall, K. M. Marshek. – 3rd ed. – John Wiley & Sons, 2000. – 137 p.
- Leckie, F. A. Strength and Stiffness of Engineering Systems / F. A. Leckie, D. J. Dal Bello. – Springer, 2009. – 696 p.
- Metals Handbook. Properties and Selection : Irons, Steels : Vol. 1 / B. Bardes (Editor). – 9th ed. – American Society for Metals, 1978. – 816 p.
- Metals Handbook. Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Pure Metals : Vol. 2 / B. Bardes (Editor). – 9th ed. – American Society for Metals, 1978. – 870 p.
- Parnes, R. Solid Mechanics in Engineering / R. Parnes. – John Wiley & Sons, LTD, 2001. – 751 p.
- Pytel, A. Mechanics of Materials / A. Pytel, J. Kiusalaas. – 2nd ed. – Cengage Learning, 2012. – 576 p.
- Steif, P. S. Mechanics of Materials / P. S. Steif. – Pearson, 2012. – 591 p.
- Truesdell, C. Essays in the History of Mechanics / C. Truesdell. – Springer-Verlag, 1968. – 400 p.

ЗМІСТ

Передмова	3
Вступ. Основні поняття механіки деформованого твердого тіла	4
Розділ 1. Однорідні осьова деформація й деформація чистого зсуву	16
1.1. Однорідна осьова деформація й нормальні напруження.....	16
1.1.1. Нормальні напруження при осьовому навантаженні призматичного бруса.....	17
1.1.2. Деформації при осьовому навантаженні призматичного бруса. Поздовжні й поперечні деформації	19
1.2. Однорідна деформація зсуву й дотичні напруження	21
1.3. Лінійна пружність при розтяганні-стисканні та зсуві. Закон Гука й коефіцієнт Пуассона. Деформованість і зміна об'єму	23
1.3.1. Закон Гука.....	25
1.3.2. Коефіцієнт Пуассона.	26
1.3.3. Деформованість твердого тіла. Зміна об'єму й форми при однорідних одновісному розтяганні-стисканні та зсуві.....	28
1.4. Робота зовнішньої сили й потенціальна енергія деформації призматичного бруса	30
1.4.1. Робота зовнішньої сили й потенціальна енергія деформації при осьовому навантаженні	30
1.4.2. Робота зовнішньої сили та потенціальна енергія деформації при зсуві	34
Приклади розв'язування задач	35
Задачі для самостійного розв'язання	48
Розділ 2. Вступ до теорії напружено-деформованого стану	55
2.1. Основи теорії напружень	55
2.1.1. Закон парності (рівності) дотичних напружень	58
2.1.2. Визначення напружень у площадці довільної орієнтації	58
2.1.3. Головні площадки, головні напруження й види напруженого стану в точці.....	60
2.2. Основи теорії деформацій.....	63
2.3. Зв'язок між деформаціями й переміщеннями.....	64
2.3.1. Зв'язок між деформаціями й переміщеннями при лінійному напруженому стані	64
2.3.2. Зв'язок між деформаціями й переміщеннями при складному напруженому стані	65
Розділ 3. Лінійний напружений стан	68
3.1. Порівняння однорідного й неоднорідного напружених станів.....	68
3.2. Напруження на похилих площинах при лінійному напруженому стані.....	72
3.3. Зміна об'єму при лінійному напруженому стані.....	79
3.4. Потенціальна й питома потенціальна енергія деформації при лінійному напруженому стані	80
Приклади розв'язування задач	86

Задачі для самостійного розв'язання	92
Розділ 4. Плоский напружений стан.....	97
4.1. Напруження на похилих площадках (площадках довільної орієнтації)	98
4.2. Лінійний напружений стан як окремий випадок плоского напруженого стану	103
4.3. Чистий зсув як окремий випадок плоского напруженого стану	104
4.4. Головні напруження й головні напрямки плоского напруженого стану. Найбільші дотичні напруження.....	104
4.4.1. Визначення головних напружень у точці.....	105
4.4.2. Визначення головних напрямків і кутів нахилу головних площадок	106
4.4.3. Максимальні дотичні напруження	108
Приклади розв'язування задач	110
Задачі для самостійного розв'язання	126
4.5. Графічне розв'язування задач плоского напруженого стану. Круги Мора	140
Приклади розв'язування задач	145
Задачі для самостійного розв'язання	153
4.6. Закон Гука для плоского напруженого стану та його особливі випадки. Зміна об'єму, співвідношення між E , G і ν	155
4.6.1. Особливі випадки запису закону Гука для плоского напруженого стану	158
4.6.2. Зміна об'єму при плоскому напруженому стані	159
4.6.3. Зв'язок між модулем пружності, модулем зсуву і коефіцієнтом Пуассона.....	160
Приклади розв'язування задач	161
Задачі для самостійного розв'язання.....	165
4.7. Енергія деформації та питома енергія деформації при плоскому напруженому стані	168
Задачі для самостійного розв'язання	171
Розділ 5. Об'ємний напружений стан.....	172
5.1. Максимальні дотичні напруження.....	173
5.2. Закон Гука для об'ємного напруженого стану (узагальнений закон Гука).....	174
5.3. Відносна зміна об'єму	177
5.4. Питома енергія деформації та енергія деформації при об'ємному напруженому стані	177
5.5. Сферичний (шаровий) напружений стан та об'ємна деформація.	178
Приклади розв'язування задач	180
Задачі для самостійного розв'язання	182
Розділ 6. Плоский деформований стан	185
6.1. Вимірювання деформацій	185
6.2. Порівняння понять «плоский напружений стан» і «плоский деформований стан».....	186

6.3. Рівняння зв'язку складових плоского деформованого стану при повороті осей координат.....	189
6.3.1. Визначення лінійної деформації ε_{x_1}	189
6.3.2. Визначення кутової деформації $\gamma_{x_1y_1}$	191
6.3.3. Універсальна форма запису рівнянь зв'язку складових плоского деформованого стану при повороті осей координат	193
6.4. Головні деформації.....	193
6.5. Найбільші деформації зсуву	194
6.6. Круг Мора для плоского деформованого стану	195
6.7. Обчислення напружень за результатами вимірювань деформацій	196
Приклади розв'язування задач	197
Задачі для самостійного розв'язання	207
Розділ 7. Граничний напружений стан, теорії граничного стану і теорії міцності.....	213
7.1. Теорія найбільших нормальних напружень	214
7.2. Теорія найбільших лінійних деформацій	215
7.3. Теорія найбільших дотичних напружень	216
7.4. Теорія найбільшої потенціальної енергії деформації формозміни.....	218
7.5. Критерії (умови) міцності, що відповідають різним теоріям граничного напруженого стану.....	218
Приклади розв'язування задач	220
Задачі для самостійного розв'язання	240
Додаток 1. Сортаменти прокатної сталі.....	245
Додаток 2. Механічні властивості основних конструкційних матеріалів.....	250
Бібліографічний список	252

Навчальне видання

Деменко Владислав Федорович
Курєннов Сергій Сергійович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Редактор Т. О. Іващенко
Комп'ютерне верстання І. В. Семенова

Зв. план, 2018
Підписано до друку 27.12.2018
Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 14,2. Обл.-вид. арк. 16,0. Наклад 100 пр.
Замовлення 385. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001