

**В. О. Серета, Г. М. Колоскова**

**РОЗРАХУНОК НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ РОБОТИ РАКЕТНИХ  
ДВИГУНІВ НА ТВЕРДОМУ ПАЛИВІ**

2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

**В. О. Серета, Г. М. Колоскова**

**РОЗРАХУНОК НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ РОБОТИ РАКЕТНИХ  
ДВИГУНІВ НА ТВЕРДОМУ ПАЛИВІ**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2023

Рецензенти: д-р техн. наук, доц. О. М. Кондратенко,  
канд. військ. наук, доц. О. Є. Чернавіна

**Середа, В. О.**

С-32 Розрахунок нестационарних процесів роботи ракетних двигунів на твердому паливі [Електронний ресурс]: навч. посіб. / В. О. Середа, Г. М. Колоскова. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2023. – 32 с.

Розглянуто методики уточненого і спрощеного розрахунків кривої тиску в камері ракетного двигуна на твердому паливі в процесі його запуску, виходу на стаціонарний режим роботи і в період післядії тяги. Наведено приклад розрахунку кривої тиску в камері за уточненою методикою.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю 134 «Авіаційна та ракетно-космічна техніка» освітньо-професійної програми «Ракетні двигуни та енергетичні установки», а також наукових співробітників, фахівців та аспірантів.

Іл. 1. Табл. 2. Бібліогр.: 7 назв

**УДК 621.454.3.02.3(075.8)**

© Середа В. О., Колоскова Г. М., 2023  
© Національний аерокосмічний  
університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут», 2023

## ЗМІСТ

Умовні позначення й скорочення.....	4
Вступ.....	5
1 Загальні теоретичні відомості про нестационарні процеси.....	6
2 Модель внутрішньої балістики твердопаливних двигунів.....	6
2.1 Автономне горіння запалювальної суміші.....	7
2.2 Спільне горіння суміші запальника і паливного заряду.....	12
2.3 Період сталого горіння палива.....	16
2.4 Період післядії тяги.....	17
3 Спрощена модель внутрішньої балістики ракетного двигуна.....	18
3.1 Автономне горіння запалювальної суміші.....	18
3.2 Спільне горіння суміші запальника і паливного заряду.....	19
3.3 Період сталого горіння палива.....	20
3.4 Період післядії тяги.....	20
4 Приклад розрахунку кривої тиску ракетного двигуна.....	21
4.1 Розрахунок кривої I періоду.....	22
4.2 Розрахунок кривої II періоду.....	25
4.3 Розрахунок кривої III періоду.....	27
4.4 Розрахунок кривої IV періоду.....	29
Бібліографічний список.....	31

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ Й СКОРОЧЕННЯ

ЗП – запалювальний пристрій (запальник)

КЗДП – крупнозернистий димний порох

ДРП – димний рушничний порох

РДТП – ракетний двигун на твердому паливі

ТРП – тверде ракетне паливо

ПЗ – продукти згоряння

КЗ – камера згоряння

$u$  – швидкість горіння ТРП

$b$  – стала швидкості горіння

$v$  – показник залежності швидкості горіння від тиску

$m$  – маса газу

$U$  – внутрішня енергія

$L$  – робота

$R$  – газова стала ПЗ

$T$  – температура

$p$  – тиск

$k$  – показник адіабати

$W$  – об'єм КЗ

$t$  – час

## ВСТУП

Ракетні двигуни на твердому паливі (РДТП) завдяки винятковим енергетичним можливостям (високим показникам тиску в камері, температури продуктів згоряння, швидкості їх витікання, питомої витрати палива тощо) є безальтернативною силовою установкою для транспортних систем різного типу. А зменшення вартості виведеного вантажу майже вдвічі порівняно з двигунами на рідкому паливі дає змогу з упевненістю стверджувати, що РДТП залишаться затребуваними в п'ятому й навіть шостому технологічних поколіннях.

На відміну від рідинних ракетних двигунів, період стаціонарної роботи РДТП важко виокремити. Миттєве значення тиску в камері згоряння визначається попередніми періодами роботи РДТП. Тому коректний опис робочого процесу РДТП не може зводитися тільки до алгебраїчної залежності, що описує період усталеного горіння, а має містити диференціальні рівняння, що зв'язують усі перехідні процеси.

У цьому посібнику описано методики і приклади розрахунку повного циклу роботи РДТП від моменту займання піропатрона до моменту повного витікання продуктів згоряння з камери. Ці методики є придатними для уточненого апріорного оцінювання геометрії паливного заряду й елементів конструкції РДТП перед побудовою уточненої (неоднорідної нестаціонарної просторової) моделі (наприклад, за допомогою програми ANSYS Flow Fluent Fluid).

## 1 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕСТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ

При виході РДТП на заданий режим спостерігаються чотири явно виражених періоди функціонування двигуна [1, 2]:

- 1) автономне горіння заряду запальника –  $t_B$ ;
- 2) спільне горіння заряду запальника й палива –  $t_1$ ;
- 3) стабілізація тиску в камері РДТП –  $t_2$ ;
- 4) період післядії тяги –  $t_3$ .

Тривалість першого періоду автономного горіння заряду запальника визначається моментом займання палива  $T^*$ . Для цього запальник має нагріти поверхню заряду РДТП до температури  $T^*$  і забезпечити необхідну інтенсивність теплопідведення.

Коли паливо спалахує, теплопідведення від запальника вже не потребується. Уважається, що після цього порушується стійке горіння заряду твердого палива. Горіння заряду ЗП має тривати трохи довше, ніж настає прогрів поверхні ТРП до температури займання. Інтенсивність теплопідведення визначається площею поверхні горіння ЗП  $S_B$ , а час горіння  $t_B$  – розміром зерна.

Протягом другого періоду заряд запальника і ТРП горять спільно, що є причиною «сплеску» тиску в КЗ.

Протягом третього періоду відбувається стабілізація тиску в КЗ, який асимптотично наближається до граничного значення  $p_\infty$ .

Тривалість періоду післядії тяги дорівнює часу витікання газів із КЗ в атмосферу.

Під час розв'язування задач внутрішньої балістики користуються припущенням про осереднення параметрів стану ПЗ. Параметри ПЗ у КЗ беруть такими, що дорівнюють повним параметрам потоку газу на вході в сопло. Таке припущення є правомірним за умов відсутності ерозійного горіння, тобто при малих значеннях критерію Победоносцева ( $\chi < 100$ ).

## 2 МОДЕЛЬ ВНУТРІШНЬОЇ БАЛІСТИКИ ТВЕРДОПАЛИВНИХ ДВИГУНІВ

Під час розв'язання системи рівнянь внутрішньої балістики припускають таке [3, 4]:

- 1 – тиск у КЗ усереднюється;
- 2 – швидкість горіння для всього заряду є однаковою;
- 3 – вигоряння заряду відбувається пошарово;
- 4 – склад порохових газів у КЗ не змінюється;
- 5 – переміщення РДТП під час горіння ТРП не враховується;
- 6 – ПЗ через зазори в днищах не витікають.

Як вихідну систему рівнянь для процесу змінення тиску в камері РДТП використовують [5]:

1) закон збереження енергії

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dL}{dt}; \quad (1)$$

2) закон збереження речовини

$$G_{\Pi} - G_P = \frac{dm}{dt} = m_t^l; \quad (2)$$

3) закон горіння палива

$$u = bp^v; \quad (3)$$

4) поточний об'єм КЗ

$$W = W_0 + \int_0^t S u dt; \quad (4)$$

5) рівняння стану газів

$$pW = mRT, \quad (5)$$

де  $\frac{dQ}{dt}$  – швидкість змінення тепла в КЗ унаслідок горіння суміші в ЗП, заряду ТРП і тепловіддачі від ПЗ до стінок КЗ;  $\frac{dm}{dt}$  – масова швидкість витрати газів від горіння заряду;  $G_{\Pi}$  і  $G_P$  – вагова витрата ( $G_B$  або  $G_T$ ) і витрата газу;  $W_0$  – початковий об'єм КЗ.

## 2.1 Автономне горіння запалювальної суміші

Рівняння збереження енергії (1) запишемо з урахуванням нестационарності як швидкість підведення тепла внаслідок горіння суміші в ЗП:

$$\frac{dQ_1}{dt} = G_B Q_B. \quad (6)$$

Унаслідок витікання газів із сопла тепло з КЗ відводиться зі швидкістю [5]

$$\frac{dQ_2}{dt} = -G_P c_P T_B, \quad (7)$$

де  $c_P$  – теплоємність ПЗ при постійному тиску;  $T_B$  – температура горіння суміші в ЗП.

Відведення тепла із КЗ унаслідок тепловіддачі від ПЗ до стінок камери РДТП і заряду ТРП визначається рівнянням

$$\frac{dQ_3}{dt} = -\alpha_T F_C (T_B - T_C), \quad (8)$$

де  $\alpha_T$  – коефіцієнт тепловіддачі від ПЗ до стінки;  $T_C$  – температура стінки;  $F_C$  – площа поверхні стінок КЗ, до яких відводиться тепло.



Для швидкості можна використати формулу секундної витрати запалювальної суміші запальника внаслідок її згорання:

$$G_B = S_B u_B \rho_B, \quad (9)$$

де  $S_B$  – площа поверхні горіння суміші в ЗП;  $u_B$  – швидкість горіння запалювальної суміші;  $\rho_B$  – густина ПЗ запальника.

Для швидкості виходу ПЗ також використовується формула секундної витрати, у якій ураховується витікання газу із сопла:

$$G_P = \frac{A_1 F_K \rho_B}{\sqrt{R_B T_B}}, \quad (10)$$

де  $F_K$  – площа критичного перерізу сопла;  $A_1 = \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$  – стала витрати ПЗ;  $\rho_B$  – тиск у КЗ, що створюється запальником.

Дегресивність форми зерна запальника враховується коефіцієнтом  $z$  ( $0 < z < 3$ ):

$$S_B = S_{0B} e^{-z \frac{t}{t_B}}, \quad (11)$$

де  $S_{0B}$  – площа початкової поверхні горіння суміші в ЗП;  $t_B$  – повний час горіння запалювальної суміші.

Повний час горіння заряду ЗП визначаємо за відомими величинами склепіння зерна і швидкості горіння заряду:

$$t_B = \frac{e_B}{u_B}, \quad (12)$$

де  $e_B$  – розміри склепіння порохового зерна (наприклад, 2 мм для КЗДП).

За (11) при  $z = 0$  отримуємо сталий закон горіння, а при  $z = 3$  – близький до закону горіння зерна у формі кулі.

Для спрощення вважатимемо, що швидкість горіння основного заряду ЗП першого періоду не залежить від тиску:  $u_B = const$ .

Вплив маси повітря, що заповнює вільний об'єм КЗ, на характер кривої  $f = p(t)$  урахуємо наближено за допомогою залежності

$$\frac{m_t^l}{G_B} = n \frac{m_A}{m_B}, \quad (13)$$

де  $m_A = \rho_A W_0$  – маса повітря, що заповнює вільний об'єм КЗ;  $\rho_A$  – густина повітря;  $W_0$  – вільний об'єм КЗ;  $m_B$  – маса ПЗ запальника;  $n$  – коефіцієнт впливу повітря.

Коефіцієнт  $n$  установлюється дослідним шляхом, за фізичним змістом  $0 < n < 1$  (найчастіше беруть 0,8).

Після спільного розв'язання рівняння (13) і рівняння закону збереження речовини (2) отримуємо залежність

$$\left[1 - n \frac{m_A}{m_B}\right] G_B = G_P. \quad (14)$$

Унаслідок незначного змінення вільного об'єму камери за час горіння заряду запальника маємо

$$W = W_0 + \frac{m_B}{2\rho_B}. \quad (15)$$

Для коефіцієнта тепловіддачі  $\alpha_T$  (8) відповідно до критеріальної залежності Нуссельта візьмемо

$$\alpha_T = \sigma_T \rho_B, \quad (16)$$

де  $\sigma_T = 1973,84 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$  – коефіцієнт, що враховує властивості теплозахисного покриття для стінки з термопокриттям;  
 $\sigma_T = 418,46 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$  – коефіцієнт, що враховує властивості теплозахисного покриття для сталеві стінки.

З урахуванням останньої залежності рівняння (8) набуде вигляду

$$\frac{dQ_3}{dt} = -\alpha_T F_C (T_B - T_C) = -\sigma_T F_C \left(1 - \frac{T_C}{T_B}\right) T_B \rho_B = -\frac{\nu_1}{R_B} \sigma_T F_C \rho_B, \quad (17)$$

де  $\nu_1 = 1 - \frac{T_C}{T_B} = 0,5 \dots 0,7$ .

Перепишемо рівняння (7) з урахуванням формули (9) і повного тепловмісту газової суміші, що реагує:

$$i = c_p T_B = \frac{k}{k-1} R_B T_B;$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = -\frac{k}{k-1} A_1 F_K \rho_B \sqrt{R_B T_B}. \quad (18)$$

Перепишемо рівняння (1) з урахуванням роботи розширення ПЗ заряду ЗП  $\frac{dL}{dt} = p_B \frac{dW}{dt}$  і внутрішньої енергії  $\frac{dU}{dt} = \frac{1}{k-1} \frac{d}{dt} (p_B W)$ :

$$\frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_2}{dt} + \frac{dQ_3}{dt} = \frac{dL}{dt} + \frac{dU}{dt};$$

$$S_B u_B \rho_B Q_B - \frac{k}{k-1} A_1 F_K \rho_B \sqrt{R_B T_B} - \frac{\nu_1}{R} \sigma_T F_C \rho_B = p_B \frac{dW}{dt} + \frac{1}{k-1} \frac{d}{dt} (p_B W), \quad (19)$$

де  $\frac{dW}{dt} = S_B u_B$  – секундна зміна об'єму суміші ЗП.

Будемо вважати, що закон горіння суміші ЗП типу ДРП (або КЗДП) є інваріантним до змінення тиску, тобто  $u(p) = const$ :

$$(k-1)S_B u_B \rho_B Q_B = k A_1 F_K \rho_B \sqrt{R_B T_B} + (k-1) \frac{V_1}{R} \sigma_T F_C \rho_B + k S_B u_B \rho_B + W \frac{d\rho_B}{dt}. \quad (20)$$

Прирівняємо рівняння (10) і (14) і отримаємо наближену формулу для визначення сили порошу в ЗП:

$$\sqrt{R_B T_B} \approx \frac{A_1 F_K \rho_B}{S_B u_B \rho_B} \left(1 - n \frac{m_A}{m_B}\right)^{-1}. \quad (21)$$

Тоді диференціальне рівняння кривої  $p(t)$  (основної залежності внутрішньобалістичного розрахунку) буде мати вигляд

$$(k-1)Q_B = k \frac{A_1^2 F_K^2}{u_B^2 \rho_B^2} \left(1 - n \frac{m_A}{m_B}\right)^{-1} \frac{\rho_B^2}{S_B^2} + (k-1) \frac{V_1 \sigma_T}{R_B} \frac{F_C}{\rho_B u_B} \frac{\rho_B}{S_B} + k \frac{\rho_B}{\rho_B} + \frac{W}{\rho_B u_B} \frac{1}{S_B} \frac{d\rho_B}{dt}; \quad (22)$$

Доданок  $k \frac{\rho_B}{\rho_B}$  є меншим за 1% порівняно з  $(k-1)Q_B$ , тому його можна врахувати наближено, змінивши калорійність заряду ЗП:

$$Q_{B1} = Q_B - \frac{k \rho_{B \max}}{2 \rho_B}. \quad (23)$$

Уведемо нові позначення змінних й отримаємо квадратне рівняння кривої  $p(t)$ :

$$c = c_1 y^2 + c_2 y + c_3 \left( \frac{dy}{dt} + y \frac{1}{S_B} \frac{dS_B}{dt} \right), \quad (24)$$

де  $c = (k-1)Q_B$ ,  $c_1 = k \frac{A_1^2 F_K^2}{u_B^2 \rho_B^2} \left(1 - n \frac{m_A}{m_B}\right)^{-1}$ ,  $c_2 = (k-1) \frac{V_1 \sigma_T}{R_B} \frac{F_C}{u_B \rho_B}$ ,  $c_3 = \frac{W}{\rho_B u_B}$  –

деякі константи;  $y = \frac{\rho_B}{S_B}$  – шуканий параметр.

Через те, що  $\frac{1}{S_B} \frac{dS_B}{dt} = -\frac{z}{t_B}$ , рівняння (24) зводиться до вигляду

$$c = c_1 y^2 + c_2^1 y + c_3 \frac{dy}{dt}, \text{ де } c_2^1 = c_2 - \frac{z}{t_B} \frac{W}{\rho_B u_B}.$$

Після розділення змінних отримаємо вираз, у якому  $y_1$  і  $y_2$  – корені квадратного рівняння, причому  $y_1 > 0$  і  $y_2 < 0$ :

$$\frac{dy}{y - y_1} - \frac{dy}{y - y_2} = \frac{c_1}{c_3} (y_1 - y_2) dt. \quad (25)$$

Остаточно квадратне рівняння для взятого раніше позначення  $y = \frac{p_B}{S_B}$  набуде вигляду

$$y^2 + \frac{c_2^l}{c_1} y - \frac{c}{c_1} = 0, \quad (26)$$

де  $y_{1,2} = -\frac{c_2^l}{2c_1} \pm \sqrt{\left(\frac{c_2^l}{2c_1}\right)^2 + \frac{c}{c_1}}$  – корінь квадратного рівняння.

Після інтегрування квадратного рівняння (25) знаходимо шукане невідоме для отримання кривої тиску:

$$y = \frac{y_1 - y_2 \Pi e^{-\beta t}}{1 - \Pi e^{-\beta t}}, \quad (27)$$

де  $\Pi = \frac{y_{01} - y_1}{y_{01} - y_2}$ ;  $y_{01} = \frac{p_0}{S_{0B}}$ ;  $\beta = \frac{c_1}{c_3}(y_1 - y_2)$ ;  $p_0$  – початковий тиск у КЗ;  $S_{0B}$  – площа початкової поверхні горіння суміші в ЗП.

Відповідно до позначення  $y = \frac{p_B}{S_B}$  для кривої  $p_B(t)$  отримаємо тиск у КЗ під час автономної роботи ЗП:

$$p_B = y S_{0B} e^{-\frac{z}{t_B} t}. \quad (28)$$

Знайдемо час, що визначає максимальний тиск у КЗ під час автономного горіння суміші запальника.

Ураховуючи умову екстремуму  $\frac{dp_B}{dt} = 0$ , запишемо рівняння  $\frac{dy}{dt} = \frac{m}{t_B} y$ , звідки на основі співвідношення (24) маємо

$$y_{max} = -\frac{c_2}{2c_1} + \sqrt{\left(\frac{c_2}{2c_1}\right)^2 + \frac{c}{c_1}}. \quad (29)$$

Величину  $y_{max}$  можна визначати одночасно з розрахунком першого кореня  $y_1$ , для чого достатньо взяти  $c_2^l = c_2$ , звідки

$$y_{max} = y_1 \frac{c_2^l}{c_2} \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{cc_1}{c_2^{l/2}}}}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{cc_1}{c_2^2}}}. \quad (30)$$

Тоді шуканий час

$$t_{max} = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{y_{max} - y_2}{y_{max} - y_1} \Pi_y \right). \quad (31)$$

На основі формул (28) і (29) визначимо максимальний тиск у момент згоряння запалювальної суміші:

$$p_{Bmax} = y_{max} S_{0B} \left( \frac{1}{\Pi_y} \frac{y_{max} - y_1}{y_{max} - y_2} \right)^{\frac{z}{\beta t_B}}. \quad (32)$$

Якщо величина  $p_{Bmax}$  є заданою, то для визначення маси запалювальної речовини отримаємо формулу, у якій  $2e_B$  – розмір зерна:

$$\omega_B = S_{0B} u_B \rho_B \int_0^{t_B} e^{-\frac{z}{t_B} t} dt = S_{0B} 2e_B \rho_B \frac{1 - e^{-z}}{z}. \quad (33)$$

Площа початкової поверхні горіння  $S_{0B}$  визначається відповідно до рівняння (31):

$$S_{0B} = \frac{p_{Bmax}}{y_{max}} \left[ \Pi_y \frac{y_{max} - y_2}{y_{max} - y_1} \right]^{\frac{z}{\beta t_B}}. \quad (34)$$

## 2.2 Спільне горіння суміші запальника і паливного заряду

Період спільного горіння суміші запальника і паливного заряду починається в момент займання палива [5]. Тому для розрахунку кривої тиску важливо визначити максимальний тиск займання  $p_*$ . Розв'язання цієї дуже складної задачі з прийнятною точністю забезпечується за допомогою температури займання палива  $T_*$  – постійної величини певного виду палива.

Розв'язання, яке розглянемо далі, базується на грубій фізичній моделі теплопередавання від ПЗ до палива.

Щоб процес горіння був сталим, потрібно забезпечити необхідну інтенсивність теплового потоку.

Динамічна рівновага теплообміну між ПЗ запальника і спаленим шаром палива виражається формулою

$$\alpha_T (T_B - T_*) = c_T \rho_T u_T (T_* - T_0), \quad (35)$$

де  $c_T$  – питома теплоємність палива.

Тоді умова достатньої інтенсивності теплового потоку, що впливає на поверхню палива, що займається, має вигляд

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{c_T \rho_T u_T}{\sigma_T \rho_B} (T_* - T_0) + T_*; \\ 1 &\leq \frac{R_B c_T \rho_T u_T}{\sigma_T \rho_B} (T_* - T_0) + \frac{T_*}{T_B}, \end{aligned} \quad (36)$$

де  $u_T = bp^v$  – швидкість горіння палива в момент спалаху;  $T_0$  – початкова температура палива;  $T_*$  – температура займання палива.

Температура ПЗ заряду запальника в момент спалаху палива визначається наближено з (21):

$$\begin{aligned}\sqrt{R_B T_B} &\approx \frac{A_1 F_K \rho_B}{S_B u_B \rho_B}; \\ T_B &\approx \frac{1}{R_B} \frac{A_1^2 F_K^2}{u_B^2 \rho_B^2} y^2.\end{aligned}\quad (37)$$

Вираз (35) можна подати у вигляді критерію подібності динамічної рівноваги теплообміну між ПЗ і поверхнею:

$$\begin{aligned}D_T &= \frac{\sigma_T \rho_B}{c_T \rho_T u_T} = \text{const} = \frac{T_* - T_0}{T_B - T_*}; \\ \frac{\sigma_T \rho_B}{c_T \rho_T u_T} &= \frac{R_B (T_* - T_0) u_B^2 \rho_B^2}{y^2 A_1^2 F_K^2 - T_* R_B u_B^2 \rho_B^2}.\end{aligned}\quad (38)$$

Тиск (момент) займання палива, що належить кривій  $\rho_B(t)$ , знаходимо після перетворення рівняння (36):

$$\begin{aligned}\frac{R_B c_T \rho_T u_T}{\sigma_T \rho_B} (T_* - T_0) &= 1 - \frac{T_*}{T_B}; \\ \rho_* &= \left[ \frac{c_T \rho_T u_T}{\sigma_T} \left( 1 - \frac{T_0}{T_*} \right) \frac{R_B T_*}{1 - \frac{R_B T_* u_B^2 \rho_B^2}{y_{\max}^2 A_1^2 F_K^2}} \right]^{\frac{1}{1-\nu}} < \rho_{B\max}.\end{aligned}\quad (39)$$

Якщо нерівність (39) при вибраному  $\rho_{B\max}$  виконується, то процес горіння ТРП після його займання буде стійким.

Як і для попереднього періоду, спільне горіння палива і заряду запальника описується системою рівнянь (1)–(5).

Закон збереження речовини (2) буде враховувати надходження ПЗ як запальника, так і палива у КЗ:

$$G_B + G_T - G_P = \frac{dm}{dt} = m_t^l. \quad (40)$$

Секундна масова витрата ПЗ палива виражається залежністю, аналогічною для ЗП (9):

$$G_T = S_T u_T \rho_T, \quad (41)$$

де  $S_T$  – площа поверхні горіння ТРП;  $u_T$  – швидкість горіння ТРП;  $\rho_T$  – густина ТРП.

Надходження тепла від горіння суміші ЗП і основного заряду ТРП виражається залежністю, аналогічною для ЗП (6):

$$\frac{dQ_1}{dt} = G_B Q_B + G_T Q_T. \quad (42)$$

Відведення тепла з КЗ РДТП унаслідок витрати ПЗ суміші ЗП і заряду твердого палива через сопло:

$$\frac{dQ_2}{dt} = -\frac{k}{k-1} A_1 F_K \rho_B \sqrt{R_B T_B}. \quad (43)$$

Відведення тепла ПЗ паливного заряду внаслідок тепловіддачі в стінки корпусу визначається аналогічно (16):

$$\frac{dQ_3}{dt} = -\alpha_T F_C (T_T - T_C). \quad (44)$$

Відповідно до закону збереження речовини (40) при припущенні однакової густини ПЗ зарядів ЗП і ТРП:

$$\begin{aligned} \sqrt{R_B T_B} &= \frac{A_1 F_K \rho_B}{G_P} \text{ і } G_B + G_T - m_t^l = G_P; \\ \sqrt{R_B T_B} &= \frac{A_1 F_K \rho_B}{G_B + G_T - m_t^l}. \end{aligned} \quad (45)$$

Актуальним є визначення об'єму КЗ РДТП з урахуванням згорілої частини зарядів ЗП і ТРП:

$$W = W_0 + \int_0^t S_T u_T dt + \int_0^t S_B u_B dt. \quad (46)$$

Закон горіння КЗДП можна вважати сталим  $u_B(p) = const$ , а палива – степеневим  $u_T(p) = bp^v$ .

Диференціальне рівняння кривої  $p_B(t)$  при припущенні  $m_t^l = S_T \rho_T u_T + S_B \rho_B u_B$  набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_2}{dt} + \frac{dQ_3}{dt} &= \frac{dL}{dt} + \frac{dU}{dt}; \\ S_B u_B \rho_B Q_B + S_T \rho_T u_T Q_T - \frac{k}{k-1} A_1 F_K \rho_B \sqrt{R_B T_B} - \frac{v_1}{R_B} \sigma_T F_C \rho_B &= \\ &= \rho_B \frac{dW}{dt} + \frac{1}{k-1} \frac{d}{dt} (\rho_B W). \end{aligned} \quad (47)$$

Підставимо у формулу (47) раніше отримані залежності для доданків рівняння збереження енергії:

$$(k-1)Q_T = k \frac{A_1^2 F_K^2}{u_T^2 S_T^2 \left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_T}\right)} \frac{1}{\chi_1 \chi_2} \frac{p^2}{u_T^2} + (k-1) \frac{v_1 \sigma_T}{R_B} \frac{F_C \rho}{S_T \rho_T \chi_1 u_T} + \frac{W p_t^l}{S_T \rho_T \chi_1 u_T}, \quad (48)$$

$$\text{де } \chi_1 = 1 + (\chi_2 - 1) \frac{Q_B}{Q_T}, \quad \chi_2 = 1 + \frac{S_B u_B \rho_B}{S_T u_T \rho_T}, \quad \chi_3 = 1 + \frac{S_B u_B}{S_T u_T}, \quad \chi_2 \approx \chi_3.$$

Явно розв'язати диференціальне рівняння (48) відносно тиску можна тільки при постійних значеннях  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ .

Для цього припустимо, що на досить малому відрізку  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  параметри  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  є сталими й дорівнюють середнім значенням:

$$\chi_{1i} = 1 + (\chi_{2i} - 1) \frac{Q_B}{Q_T}; \quad \chi_{2i} = 1 + \frac{\bar{S}_{Bi} u_B \rho_B}{S_T \bar{u}_{Ti} \rho_T}, \quad \chi_2 \approx \chi_3,$$

$$\text{де } \bar{u}_{Ti} = b \bar{p}_i^v, \quad \bar{S}_{Bi} = S_{B0} e^{-\bar{z}_i} \cong \frac{S_{Bi-1} + S_{Bi}}{2}, \quad \bar{t}_i = \frac{2t_{i-1} + \Delta t_i}{2t_B},$$

$$\bar{p}_i = p_{i-1} + \frac{p_{i-1} - p_{i-2}}{2} = \frac{3p_{i-1} - p_{i-2}}{2}.$$

Тоді тиск на ділянці спільного горіння суміші запальника й паливного заряду визначається залежністю

$$p_i = \left( \frac{z_{1i} - z_{2i} e^{-\beta_i \Delta t_i} \Pi_{zi}}{1 - e^{-\beta_i \Delta t_i} \Pi_{zi}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad (49)$$

$$\text{де } z_{(1,2)i} = -\chi_{2i} \frac{c_2}{2c_1} \pm \sqrt{\left( \chi_{2i} \frac{c_2}{2c_1} \right)^2 + \frac{c_1^l}{c_1} \chi_{1i} \chi_{2i}}, \quad \beta_i = (1-\nu)(z_{1i} - z_{2i}) \frac{c_1}{\chi_{2i} c_3},$$

$$c_1^l = c - k \frac{\bar{p}_i}{\rho_T}, \quad \Pi_{zi} = \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right)_i.$$

Формула (49) є результатом розв'язання диференціального рівняння з деякими спрощеннями:

$$\chi_1 \chi_2 c = c_1 z^2 + \chi_2 c_2 z + \frac{\chi_2 c_3 z_1^l}{1-\nu}, \quad (50)$$

$$\text{де } z = p^{1-\nu}, \quad c = (k-1)Q_T, \quad c_1 = k \frac{A_1^2 F_K^2}{b^2 S_T^2 \rho_T^2}, \quad c_2 = (k-1) \frac{v_T \sigma_T F_C}{S_T R_B \rho_T b}, \quad c_3 = \frac{W_0}{S_T b \rho_T}.$$

Співвідношення (50) отримано з рівняння (48), у якому величина  $k \frac{\rho \chi_3}{\rho_T \chi_1}$  є дуже малою порівняно з  $(k-1)Q_T$ .

Припустивши, що  $\frac{k}{\rho_T} p = \frac{k}{\rho_T} z^{1-\nu} \approx \frac{k}{\rho_T} z^2$ , можна взяти

$c_1^l = c_1 + \frac{k}{\rho_T} \chi_2 \chi_3$ , тоді коефіцієнти рівняння (49) зводяться до вигляду

$$z_{(1,2)i} = -\chi_{2i} \frac{c_2}{2c_1^l} \pm \sqrt{\left( \chi_{2i} \frac{c_2}{2c_1^l} \right)^2 + \frac{c_1^l}{c_1} \chi_{1i} \chi_{2i}};$$



$$\beta_i = (1-\nu)(z_{1i} - z_{2i}) \frac{c_1^l}{\chi_{2i} c_3}$$

Зазвичай  $c_2 \ll c^l$ , а  $c_1 \cong c_1^l$ , тому на практиці можна користуватися формулою

$$z_{(1,2)i} = \pm \sqrt{\chi_{1i} \chi_{2i} \frac{c}{c_1}}$$

де  $\chi_{1i} \chi_{2i} \approx \chi_{2i}^2$ .

Розв'язання задачі щодо визначення  $p(t)$  зводиться до формули (49), де величини  $z_{(1,2)i}$ ,  $\beta_i$ ,  $\Pi_{zi}$  замінено локальними значеннями на відрізку  $\Delta t_i$ .

### 2.3 Період сталого горіння палива

Період сталого горіння характеризується тим, що протягом усього часу стабілізації тиску відбувається горіння тільки основного ТРП.

Закон змінення тиску в КЗ точно визначається з диференціального рівняння (50) для випадку, коли  $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 1$ :

$$z = \frac{z_1 - z_2 \Pi_z e^{-\beta t}}{1 - \Pi_z e^{-\beta t}} \cong z_1 - z_2 \Pi_z e^{-\beta t}. \quad (51)$$

При цьому змінюється тільки параметр  $\Pi_{zi}$ , а величина  $\Pi_z$  буде сталою:

$$\Pi_z = \frac{z_B - z_1}{z_B - z_2}, \quad (52)$$

де  $z_B = p_B^{1-\nu}$ ,  $p_B$  – тиск у КЗ наприкінці горіння суміші запальника, тобто наприкінці спільного горіння зарядів ЗП і ТРП.

Час  $t$  слід відраховувати від кінця періоду спільного горіння палива і заряду запальника.

Таким чином, змінення тиску в КЗ РДТП при одночленному статичному законі горіння ТРП описується формулою

$$p = \left( \frac{z_1 - z_2 \Pi_z e^{-\beta t}}{1 - \Pi_z e^{-\beta t}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}}. \quad (53)$$

Формула (51) дає змогу визначити час стабілізації тиску в КЗ, що становить соті частки секунди:

$$\tau_C = \frac{1}{\beta} \ln \frac{z - z_2}{z - z_1} \frac{z_B - z_1}{z_B - z_2}. \quad (54)$$

Повний час виходу ракетного двигуна на сталий режим визначається як сума часу горіння суміші запальника і часу стабілізації тиску в КЗ:

$$\tau_P = \tau_B + \tau_C. \quad (55)$$

## 2.4 Період післядії тяги

Зміна тиску в КЗ після згоряння основного заряду визначається з (48), якщо взяти  $\chi_1 = \chi_2 = 1$ . Також необхідним є виконання додаткової умови  $S = 0$ , яка означає, що заряд повністю згорів. Наслідком з попереднього припущення є збереження незмінного об'єму КЗ після згоряння заряду:  $W = W_K$ .

Унаслідок цих припущень рівняння закону збереження енергії (1) набуде вигляду

$$kR_T T_T G_T + (k-1) \frac{\sigma_T v_1}{R_T} F_C p + W_K p_t^l = 0. \quad (56)$$

Перепишемо рівняння збереження речовини та її стану в диференціальній формі:

$$G_T = -\omega_t^l; \quad W_K p_t^l = \omega_t^l R_T T_T + \omega RT_t^l. \quad (57)$$

Для усереднених параметрів стану газів у КЗ РДТП правильним є співвідношення

$$pW_K = \omega R_T T_T. \quad (58)$$

Після перетворення і спільного розв'язання з (57) вихідне рівняння (56) набирає вигляду

$$\begin{aligned} -kR_T T_T \omega_t^l + (k-1) \frac{\sigma_T v_1}{R_T} F_C p + \omega_t^l R_T T_T + \omega RT_t^l &= 0; \\ -(k-1) \frac{d}{dt} \ln \omega + \frac{d}{dt} \ln T_T + \frac{k-1}{W_K} \frac{\sigma_T v_1}{R_T} F_C &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Інтегрування й подальше потенціювання цього рівняння при  $v_1 = \text{const}$  дає таку формулу:

$$\left( \frac{\omega_\infty}{\omega} \right)^{k-1} \frac{T_T}{T_\infty} = e^{-\psi t}, \quad (60)$$

де  $\psi = \frac{k-1}{R_T} \frac{v_1 \sigma_T}{W_K} F_C$  – коефіцієнт теплових втрат.

Використовуючи рівняння стану (58), знайдемо закон змінення тиску в КЗ у період післядії тяги:

$$p = p_0 \left( \frac{\omega}{\omega_\infty} \right)^k e^{-\psi t}. \quad (61)$$

За відсутності теплообміну з навколишнім середовищем ( $\psi = 0$ ) процес падіння тиску в напівзамкненій системі описується так:

$$p = p_0 \left( \frac{\omega}{\omega_\infty} \right)^k. \quad (62)$$

У замкненій системі ( $\omega_\infty = \omega$ ) процес падіння тиску (унаслідок тільки теплопередавання) відбувається за експонентою:

$$p = p_0 e^{-\omega t}. \quad (63)$$

Таким чином, процеси змінення стану газу, спричинені витіканням та охолодженням, є незалежними. Тому падіння тиску в напівзамкненій системі постійного об'єму залежить від однієї змінної:

$$p = p_0 e^{-\beta t}, \quad (64)$$

де 
$$\beta = \frac{2\sqrt{k}}{k-1} B + b, \quad B = \frac{k-1}{2} \frac{G_\infty}{\omega_\infty}, \quad G_\infty = A_1 F_* \frac{p_\infty}{\sqrt{R_\infty T_\infty}}, \quad \omega_\infty = \frac{p_\infty W_K}{R_\infty T_\infty},$$

$$RT = \frac{k-1}{k} Q_T \chi, \quad \chi = 1 - \frac{v_1 \sigma_T}{R_T Q_T} \frac{F_C p_\infty}{S_T \rho_T u_\infty}$$
 – коефіцієнт теплових втрат.

### 3 СПРОЩЕНА МОДЕЛЬ ВНУТРІШНЬОЇ БАЛІСТИКИ РАКЕТНОГО ДВИГУНА

Спрощену внутрішньобалістичну модель РДТП можна отримати на основі єдиного рівняння витрати.

При цьому крім наведених припущень (див. розд. 2) додаються такі:

- не враховується відведення тепла в стінки камери і ТРП;
- під час горіння заряду запальника об'єм КЗ не змінюється.

#### 3.1 Автономне горіння запальнової суміші

Об'єм КЗ під час автономного горіння заряду запальника не змінюється, тому скористаємося рівнянням стану

$$dm_B = \frac{W_0}{R_B T_B} dp. \quad (65)$$

Секундна зміна маси (витрата) ПЗ унаслідок згорання суміші ЗП визначається рівнянням

$$dm_B = G_B dt = S_B \rho_B u_B dt. \quad (66)$$

Приріст склепіння горіння зерна ЗП у проміжку часу  $dt$  визначається як добуток:

$$de_B = u_B dt. \quad (67)$$

Прирівнявши рівняння (65) і (66), визначимо приріст тиску за елементарний проміжок часу  $dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{W_0}{R_B T_B} dp &= S_B \rho_B de_B; \\ dp &= \frac{R_B T_B S_B \rho_B}{W_0} de_B. \end{aligned} \quad (68)$$

Скінченно-різницевий вигляд рівняння змінення тиску в умовах постійного збільшення склепіння горіння  $\Delta e_B$ :

$$p_{i+1} = p_i + \frac{R_B T_B S_B \rho_B \Delta e_B}{W_0}. \quad (69)$$

### 3.2 Спільне горіння суміші запальника і ТРП

До прориву мембрани приріст маси ПЗ при спільному горінні ТРП і суміші ЗП можна визначити з рівняння стану

$$dm_B + dm_T = \frac{W_0}{R_C T_C} dp. \quad (70)$$

Секундна зміна маси (витрата) ПЗ унаслідок згоряння ТРП визначається формулою

$$dm_T = G_T dt = S_T \rho_T u_T dt. \quad (71)$$

Приріст склепіння горіння ТРП в інтервалі  $dt$  знаходимо як добуток:

$$de_T = u_T dt. \quad (72)$$

Підставимо в рівняння (70) залежності (66) і (67) для зерна ЗП та (71) і (72) для ТРП:

$$\begin{aligned} \frac{W_0}{R_C T_C} dp &= S_B \rho_B u_B dt + S_T \rho_T u_T dt; \\ dp &= \frac{R_C T_C}{W_0} (S_B \rho_B de_B + S_T \rho_T de_T). \end{aligned} \quad (73)$$

Скінченно-різницевий вигляд рівняння змінення тиску в КЗ при спільному горінні ТРП і заряду ЗП:

$$p_{i+1} = p_i + \frac{R_C T_C}{W_0} (S_B \rho_B \Delta e_B + S_T \rho_T \Delta e_T). \quad (74)$$

Будемо вважати, що температура горіння ТРП і заряду ЗП є ідентичними:  $T_C = T_B = T_T$ , тоді теплофізичні характеристики суміші [3] запишемо так:

$$R_C = n_T R_T + (1 - n_T) R_B, \quad (75)$$

де  $n_T = \frac{m_T}{m_T + m_B}$  – масова частка сумішей.

Якщо для займання сумішевого ТРП застосовується піротехнічна суміш, подібна до окиснювача, тоді наближено  $R_C = R_B = R_T$ . Так само можна вважати, якщо для займання баліститного ТРП використовується піроксиліновий порох (або КЗДП).

### 3.3 Період сталого горіння палива

Стационарний тиск визначається з умови рівності секундної витрати палива  $G_T$  і витрати газу  $G_C$  (з рівняння Борі):

$$G_T = G_C. \quad (76)$$

При  $S(t) = const$  тиск у КЗ наближається до певного стационарного значення, що відповідає  $\frac{dp}{dt} = 0$ , звідки

$$S_T u_T \rho_T = \frac{\rho F_K}{\beta}. \quad (77)$$

У разі, якщо швидкість горіння ТРП не залежить від тиску  $u_T = const$  у КЗ (для ЗП, наприклад), рівняння Борі набуває вигляду

$$\rho = \frac{S_T u_T \rho_T \beta}{F_K}, \quad (78)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт витрати для критичного перерізу сопла.

Якщо закон горіння описується статичною залежністю  $u_T = b\rho^v$ , то маємо такий закон змінення тиску в КЗ [6]:

$$\frac{\rho}{\rho^v} = \frac{\beta b S_T \rho_T}{F_K}, \text{ звідки } \rho = \left( \frac{\beta b S_T \rho_T}{F_K} \right)^{\frac{1}{1-v}}. \quad (79)$$

При лінійному законі горіння ТРП  $u_T = a + b\rho$  рівняння внутрішньої балістики запишемо інакше:

$$a S_T \rho_T = \frac{\rho F_K}{\beta} - b S_T \rho_T \rho, \text{ звідки } \rho = \frac{a}{\frac{F_K}{\beta S_T \rho_T} - b}. \quad (80)$$

Таким чином, тиск у КЗ визначається відношенням площі поверхні горіння ТРП до площі критичного перерізу сопла.

### 3.4 Період післядії тяги

Зміна (власне, зменшення) маси газу в КЗ після повного згорання ТРП визначається формулою

$$dm = W_0 d\rho. \quad (81)$$

Зміну (витрату) маси ПЗ унаслідок витікання ПЗ із сопла знаходимо за залежністю

$$dm = -G_C dt = -\rho w_* F_* dt. \quad (82)$$

Прирівнявши формули (81) і (82), отримаємо залежність для визначення приросту густини газу:

$$W_0 d\rho = -\rho w_* F_* dt. \quad (83)$$

Процес витікання ПЗ з камери двигуна будемо вважати ізотермічним, тоді можна скористатися виразом

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{w_* F_*}{W_0} dt. \quad (84)$$

Зінтегруємо обидві частини рівняння (83) та отримаємо рівняння для визначення зміни тиску в КЗ у часі:

$$\ln \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = \frac{w_* F_* \Delta t}{W_0}. \quad (85)$$

З урахуванням відомої залежності для визначення швидкості в критичному перерізі сопла розрахункова формула набуде вигляду

$$\rho_{i+1} = \frac{\rho_i}{e^{\frac{F_* \Delta t}{W_0} \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT}}}. \quad (86)$$

#### 4 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ КРИВОЇ ТИСКУ РАКЕТНОГО ДВИГУНА

Під час розрахунків будемо використовувати таку індексацію: (...) <sub>B</sub> – I період автономного горіння заряду ЗП; (...) <sub>C</sub> – II період спільного горіння заряду ЗП і ТРП; (...) <sub>A</sub> – III період автономного горіння ТРП; (...) <sub>П</sub> – IV період післядії тяги.

У таблицях 1 і 2 наведено вихідні дані для внутрішньобалістичного розрахунку РДТП [7].

Таблиця 1 – Вихідні дані для розрахунку РДТП

№ п/п	Параметр	Позначення	Числове значення	Одиниця виміру
1	Довжина заряду	$L_{\text{ш}}$	2,21	м
2	Діаметр каналу шашки	$r_{\text{ш}}$	0,055	м
3	Зовнішній діаметр шашки	$R_{\text{ш}}$	0,224	м
4	Співвідношення осей еліпса	$\xi$	1/2	–

Площа поверхні горіння:

$$S_T = 2\pi(R_{\text{ш}} + r_{\text{ш}})L_{\text{ш}} = 2 \cdot 3,14 \cdot (0,224 + 0,055) \cdot 2,21 = 3,88 \text{ м}^2.$$

Початковий об'єм КЗ, якщо днища є еліптичними:

$$W_0 = \frac{4}{3} \frac{1}{\xi} R_{\text{ш}}^3 + \pi r_{\text{ш}}^2 L_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \frac{1}{2} \cdot 0,224^3 + 3,14 \cdot 0,055^2 \cdot 2,21 = 0,045 \text{ м}^3.$$

Остаточний об'єм КЗ після згоряння заряду:

$$W_K = \frac{4}{3} \frac{1}{\xi} R_{\text{ш}}^3 + \pi R_{\text{ш}}^2 L_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \frac{1}{2} \cdot 0,224^3 + 3,14 \cdot 0,224^2 \cdot 2,21 = 0,372 \text{ м}^3.$$

Таблиця 2 – Вихідні дані для розрахунку кривої тиску

№ п/п	Параметр	Позначення	Числове значення	Одиниця виміру
Для розрахунку кривої I періоду				
1	Показник адіабати ПЗ	$k$	1,25	–
2	Газова стала ПЗ	$R_B$	302,1	Дж/(кг·К)
3	Тиск у КЗ РДТП	$p_K$	6,98E6	Па
4	Площа стінок КЗ	$F_C$	0,045	м <sup>2</sup>
5	Площа критичного перерізу РДТП	$F_K$	1,43E5	м <sup>2</sup>
6	Температура стінки КЗ	$T_C$	290	К
7	Температура ПЗ заряду ЗП	$T_B$	2637	К
8	Товщина склепіння ЗП	$e_B$	0,002	м
9	Швидкість горіння заряду ЗП	$u_B$	0,05	м/с
10	Теплота згоряння заряду ЗП	$Q_B$	3,06E6	Дж/кг
11	Густина заряду ЗП	$\rho_B$	1600	кг/м <sup>3</sup>
12	Коефіцієнт регресивності	$z$	2	–
13	Коефіцієнт, що враховує властивості ТЗП	$\sigma_T$	197,1	Дж·м/(кг·с·К)
Для розрахунку кривої II періоду				
14	Густина заряду ТРП	$\rho_T$	1650	кг/м <sup>3</sup>
15	Температура займання ТРП	$T_*$	560	К
16	Теплота згоряння ТРП	$Q_T$	3,60E6	Дж/кг
17	Температура ПЗ палива	$T_K$	2516	К
18	Теплоємність ПЗ ТРП	$c_T$	754,2	Дж/(кг·К)
Для розрахунку кривої III періоду				
19	Газова стала ПЗ ТРП	$R_T$	313,6	Дж/(кг·К)
Для розрахунку кривої IV періоду				
20	Показник закону горіння	$v$	0,7	–
21	Коефіцієнт горіння ТРП	$b$	1,05E-7	м/(с·Па)

#### 4.1 Розрахунок кривої I періоду

Коефіцієнт витрати:

$$A_1 = \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} = \sqrt{1,25 \left( \frac{2}{1,25+1} \right)^{\frac{1,25+1}{1,25-1}}} = 0,658.$$

Повний час горіння зерна запальника:

$$t_B = \frac{e_B}{u_B} = \frac{0,002}{0,05} = 0,04 \text{ с.}$$

Температурний симплекс:

$$\nu_1 = 1 - \frac{T_C}{T_B} = 1 - \frac{290}{2637} = 0,89.$$

Коефіцієнти вихідного диференціального рівняння:

$$c = (k - 1)Q_B = (1,25 - 1)3,06 \cdot 10^6 = 7,65 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг};$$

$$c_1 = k \frac{A_1^2 F_K^2}{u_B^2 \rho_B^2} = 1,25 \frac{0,658^2 \cdot (7,3 \cdot 10^3)^2}{0,05^2 \cdot 1600^2} = 4,51 \cdot 10^{-9} \text{ м};$$

$$c_2 = (k - 1) \frac{\nu_1 \sigma_T}{R_B} \frac{F_C}{u_B \rho_B} = (1,25 - 1) \frac{0,89 \cdot 197,1}{302,1} \frac{0,045}{0,05 \cdot 1600} = 8,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг};$$

$$c_3 = \frac{W_0}{\rho_B u_B} = \frac{0,134}{0,05 \cdot 1600} = 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ м}^5 \cdot \text{с}/\text{кг};$$

$$c_2^I = c_2 - \frac{z}{t_B} \frac{W_0}{\rho_B u_B} = 8,17 \cdot 10^{-5} - \frac{2}{0,04} \frac{0,134}{0,05 \cdot 1600} = -8,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}^5/\text{кг}.$$

Корені характеристичного рівняння:

$$y_1 = -\frac{c_2^I}{2c_1} - \sqrt{\left(\frac{c_2^I}{2c_1}\right)^2 + \frac{c}{c_1}} =$$

$$= -\frac{-8,36 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4,51 \cdot 10^{-9}} - \sqrt{\left(\frac{-8,36 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4,51 \cdot 10^{-9}}\right)^2 + \frac{7,65 \cdot 10^5}{4,51 \cdot 10^{-9}}} = 2,53 \cdot 10^7;$$

$$y_2 = -\frac{c_2^I}{2c_1} + \sqrt{\left(\frac{c_2^I}{2c_1}\right)^2 + \frac{c}{c_1}} =$$

$$= -\frac{-8,36 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4,51 \cdot 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{-8,36 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4,51 \cdot 10^{-9}}\right)^2 + \frac{7,65 \cdot 10^5}{4,51 \cdot 10^{-9}}} = -6,72 \cdot 10^6.$$

Найбільше значення параметра  $u$  при автономному горінні заряду

ЗП:



$$y_{\max} = -\frac{c_2}{2c_1} + \sqrt{\left(\frac{c_2}{2c_1}\right)^2 + \frac{c}{c_1}} =$$

$$= -\frac{8,17 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 4,51 \cdot 10^{-9}} + \sqrt{\left(\frac{8,17 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 4,51 \cdot 10^{-9}}\right)^2 + \frac{7,65 \cdot 10^5}{4,51 \cdot 10^{-9}}} = 1,30 \cdot 10^7.$$

Безрозмірний параметр:

$$\beta = \frac{c_1}{c_3} (y_1 - y_2) = \frac{4,51 \cdot 10^{-9}}{1,68 \cdot 10^{-3}} (2,53 \cdot 10^7 + 6,72 \cdot 10^6) = 86,06 \text{ с}^{-1}.$$

Симплекс-корінь:

$$\Pi_y = \frac{y_{01} - y_1}{y_{01} - y_2} = \frac{2,53 \cdot 10^7}{-6,72 \cdot 10^6} = -3,76.$$

Найбільший час займання:

$$t_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{y_{\max} - y_2}{y_{\max} - y_1} \Pi_y \right) = \frac{1}{86,06} \ln \left( -\frac{1,30 \cdot 10^7 - 2,53 \cdot 10^7}{1,30 \cdot 10^7 + 6,72 \cdot 10^6} \cdot 3,76 \right) = 0,021 \text{ с}.$$

Найбільший тиск займання:

$$\rho_{B \max} = \frac{\rho_K}{3} = \frac{6,98 \cdot 10^6}{3} = 2,32 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Площа початкової поверхні горіння заряду ЗП за формулою (28):

$$S_{0B} = \frac{\rho_{B \max}}{y_{B \max}} e^{\frac{z t_{\max}}{t_B}} = \frac{2,32 \cdot 10^6}{1,30 \cdot 10^7} e^{\frac{2 \cdot 0,021}{0,04}} = 0,51 \text{ м}^2.$$

Маса основного заряду ЗП:

$$\omega_B = 2S_{0B} e_{B\rho_B} \frac{1 - e^{-z}}{z} = 2 \cdot 0,51 \cdot 0,002 \cdot 1600 \cdot \frac{1 - e^{-2}}{2} = 0,70 \text{ кг}.$$

Крива тиску автономного горіння заряду ЗП описується рівнянням

$$\rho_B = \frac{y_1 - y_2 \Pi e^{-\beta t}}{1 - \Pi e^{-\beta t}} S_{0B} e^{-\frac{z t}{t_B}}.$$

## 4.2 Розрахунок кривої II періоду

Тиск займання основного заряду палива:

$$\begin{aligned}
 p_* &= \left[ \frac{c_T \rho_T b}{\sigma_T} \left( 1 - \frac{T_0}{T_*} \right) \frac{R_B T_*}{1 - \frac{R_B T_* u_B^2 \rho_B^2}{y_{\max}^2 A_1^2 F_K^2}} \right]^{\frac{1}{1-\nu}} = \\
 &= \left[ \frac{754,2 \cdot 1650 \cdot 1,05 \cdot 10^{-7}}{197,1} \left( 1 - \frac{290}{560} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{302,1 \cdot 560}{1 - \frac{302,1 \cdot 560 \cdot 0,05^2 \cdot 1600^2}{(1,30 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 0,658^2 (7,3 \cdot 10^3)^2}} \right]^{\frac{1}{1-0,7}} = 2,07 \cdot 10^6 \text{ Па.}
 \end{aligned}$$

Криву розрахуємо від моменту займання в інтервалі

$$t_C = 0,014 \dots 0,04 \text{ с.}$$

Розіб'ємо час спільного горіння на 12 інтервалів:

$$\Delta t_C = 0,002 \text{ с.}$$

Проведемо розрахунок параметрів першого інтервалу  $\Delta t_1$ :

$$t_1 = 0,014 \text{ с; } t_2 = 0,016 \text{ с.}$$

Площа поверхні горіння на першому інтервалі часу:

$$\begin{aligned}
 S_{B1} &= S_{0B} e^{-z \frac{t_1}{t_B}} = 0,51 e^{-2 \frac{0,014}{0,04}} = 0,507 \text{ м}^2; \\
 S_{B2} &= S_{0B} e^{-z \frac{t_2}{t_B}} = 0,51 e^{-2 \frac{0,016}{0,04}} = 0,459 \text{ м}^2.
 \end{aligned}$$

Середня площа поверхні горіння:

$$\bar{S}_{B1} = \frac{S_{B1} + S_{B2}}{2} = \frac{0,507 + 0,459}{2} = 0,482 \text{ м}^2.$$

Середній тиск на першому інтервалі дорівнює тиску в момент займання:

$$\bar{p}_{C1} = p_* = 2,07 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Середня швидкість горіння ТРП на першому інтервалі часу:

$$\bar{u}_{T1} = b\bar{p}_{C1}^v = 1,05 \cdot 10^{-7} (2,07 \cdot 10^6)^{0,7} = 2,79 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Коефіцієнти диференціального рівняння:

$$\chi_{21} = 1 + \frac{\bar{S}_{B1} u_B \rho_B}{S_T \bar{u}_{T1} \rho_T} = 1 + \frac{0,482 \cdot 0,05 \cdot 1600}{3,88 \cdot 2,79 \cdot 10^{-3} \cdot 1650} = 2,073;$$

$$\chi_{11} = 1 + (\chi_{21} - 1) \frac{Q_B}{Q_T} = 1 + (2,073 - 1) \frac{3,06 \cdot 10^6}{3,60 \cdot 10^6} = 1,912.$$

Коефіцієнти характеристичного рівняння:

$$c = (k - 1) Q_T = (1,25 - 1) 3,60 \cdot 10^6 = 9,00 \cdot 10^5 \text{ м;}$$

$$c_1 = k \frac{A_1^2 F_K^2}{b^2 S_T^2 \rho_T^2} = 1,25 \frac{0,658^2 (7,30 \cdot 10^3)^2}{(1,05 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 3,88^2 \cdot 1650^2} = 63,84 \text{ м;}$$

$$c_2 = (k - 1) \frac{v_T \sigma_T F_C}{S_T R_B \rho_T b} = (1,25 - 1) \frac{0,89 \cdot 197,1 \cdot 0,045}{302,1 \cdot 1,05 \cdot 10^{-7} \cdot 3,88 \cdot 1650} = 9,36 \text{ м;}$$

$$c_3 = \frac{W_0}{S_T b \rho_T} = \frac{0,143}{3,88 \cdot 1650 \cdot 1,05 \cdot 10^{-7}} = 199,34 \text{ м} \cdot \text{с.}$$

Корені характеристичного рівняння:

$$z_{(1,2)1} = \pm \sqrt{\chi_{11} \chi_{21} \frac{c}{c_1}} = \pm \sqrt{1,912 \cdot 2,073 \frac{9,00 \cdot 10^5}{63,84}} = \pm 236,38.$$

Корені рівняння в момент займання ТРП:

$$z_{C1} = \bar{p}_{C1}^{1-v} = (2,07 \cdot 10^6)^{1-0,7} = 78,75.$$

Визначимо допоміжні параметри:

$$\beta_1 = (1-\nu)(z_{11} - z_{21}) \frac{c_1}{\chi_{21} c_3} = (1-0,7)(236,38 + 236,38) \frac{63,84}{2,073 \cdot 199,34} = 21,91 \text{ с}^{-1};$$

$$\Pi_{z1} = \frac{z_{c1} - z_{11}}{z_{c1} - z_{21}} = \frac{78,75 - 236,38}{78,75 + 236,38} = -0,50.$$

Тиск у кінці першого інтервалу часу  $\Delta t_1$  періоду II:

$$p_{c2} = \left( \frac{z_{11} - z_{21} \Pi_{z1} e^{-\beta_1 \Delta t}}{1 - \Pi_{z1} e^{-\beta_1 \Delta t}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}} =$$

$$= \left( \frac{236,38 - 236,38 \cdot 0,50 e^{-21,91 \cdot 0,002}}{1 + 0,50 e^{-21,91 \cdot 0,002}} \right)^{\frac{1}{1-0,7}} = 2,494 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Середній тиск на другому інтервалі часу  $\Delta t_2$ :

$$\bar{p}_{c2} = \frac{3p_{c2} - p_{c1}}{2} = \frac{3 \cdot 2,494 \cdot 10^6 - 2,066 \cdot 10^6}{2} = 2,708 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Розрахунок на інших інтервалах часу легко реалізується в додатку Microsoft Excel.

### 4.3 Розрахунок кривої III періоду

Беремо коефіцієнти диференціального рівняння:

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 1.$$

Закон горіння ТРТ – нейтральний:

$$S_T = 2\pi[(R_{ш} - \Delta e) + (r_{ш} + \Delta e)]L_{ш} = const = 3,88 \text{ м}^2.$$

Швидкість горіння наприкінці II періоду:

$$u_{T1} = b\rho_{A1}^\nu = 1,05 \cdot 10^{-7} (5,93 \cdot 10^6)^{0,7} = 5,84 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Приріст склепіння горіння:

$$\Delta e_1 = u_{T1} \Delta t = 5,84 \cdot 10^{-3} \cdot 0,002 = 1,169 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Об'єм згорілого палива:

$$W_{T_1} = S_T \Delta e_1 = 3,88 \cdot 1,169 \cdot 10^{-5} = 4,535 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Поточний об'єм КЗ:

$$W_1 = W_0 - W_{T_1} = 0,143 - 4,535 \cdot 10^{-5} = 0,13395 \text{ м}^3.$$

Змінюється тільки третій коефіцієнт рівняння:

$$c_3 = \frac{W_1}{S_T b_{pT}} = \frac{0,13395}{3,88 \cdot 1650 \cdot 1,05 \cdot 10^{-7}} = 199,27 \text{ м} \cdot \text{с}.$$

Корені характеристичного рівняння:

$$z_{(1,2)1} = \pm \sqrt{\frac{c}{c_1}} = \pm \sqrt{\frac{9,00 \cdot 10^5}{63,84}} = \pm 118,74.$$

Корені рівняння наприкінці II періоду:

$$z_{A1} = p_{A1}^{1-\nu} = (5,93 \cdot 10^6)^{1-0,7} = 108,10.$$

Визначимо допоміжні параметри:

$$\beta_1 = (1 - \nu) \frac{c_1}{c_3} (z_{11} - z_{21}) = (1 - 0,7) (118,74 + 118,74) \frac{63,84}{199,27} = 22,81 \text{ с}^{-1};$$

$$\pi_{z1} = \frac{z_{A1} - z_{11}}{z_{A1} - z_{21}} = \frac{108,10 - 118,74}{108,10 + 118,74} = -0,47.$$

Тиск у кінці інтервалу  $\Delta t_1$  періоду III:

$$p_{A1} = \left( \frac{z_{11} - z_{21} \pi_{z1} e^{-\beta_1 \Delta t}}{1 - \pi_{z1} e^{-\beta_1 \Delta t}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}} =$$

$$= \left( \frac{118,74 - 118,74 \cdot 0,47 e^{-22,81 \cdot 0,002}}{1 + 0,47 e^{-22,81 \cdot 0,002}} \right)^{\frac{1}{1-0,7}} = 6,022 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

На інтервалі  $\Delta t_2$  обчислюється швидкість горіння ТРП тощо.

#### 4.4 Розрахунок кривої IV періоду

Швидкість горіння ТРП наприкінці III періоду:

$$u_{\infty} = bp_{\infty}^{\nu} = 1,05 \cdot 10^{-7} (8,20 \cdot 10^6)^{0,7} = 7,28 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Коефіцієнт теплових втрат беремо таким:

$$\chi = 1 - \frac{\nu_1 \sigma_T}{R_T Q_T} \frac{F_C p_{\infty}}{S_T \rho_T u_{\infty}} = 1 - \frac{0,89 \cdot 197,1}{313,6 \cdot 3,6 \cdot 10^6} \frac{4,50 \cdot 10^{-2} \cdot 8,20 \cdot 10^6}{3,88 \cdot 1650 \cdot 7,28 \cdot 10^{-3}} = 0,99 \text{ Дж/кг.}$$

Температурний комплекс газу в КЗ:

$$R_{\infty} T_{\infty} = \frac{k-1}{k} Q_T \chi = \frac{1,25-1}{1,25} \cdot 3,6 \cdot 10^6 \cdot 0,99 = 7,19 \cdot 10^5.$$

Маса ПЗ у КЗ після повного згоряння ТРП:

$$\omega_{\infty} = \frac{p_{\infty} W_K}{R_{\infty} T_{\infty}} = \frac{8,20 \cdot 10^6 \cdot 0,372}{7,19 \cdot 10^5} = 4,255 \text{ кг.}$$

Витрата ПЗ через сопло при закінченні горіння:

$$G_{\infty} = A_1 F_K \frac{p_{\infty}}{\sqrt{R_{\infty} T_{\infty}}} = 0,658 \cdot 7,30 \cdot 10^{-3} \frac{8,20 \cdot 10^6}{\sqrt{7,19 \cdot 10^5}} = 46,608 \text{ кг/с.}$$

Складові для показника степеня в законі  $p(t)$ :

$$B = \frac{k-1}{2} \frac{G_{\infty}}{\omega_{\infty}} = \frac{1,25-1}{2} \cdot \frac{46,608}{4,255} = 1,369 \text{ с;}$$
$$b = \frac{k-1}{R_T} \frac{\nu_1 \sigma_T}{W_K} F_C = \frac{1,25-1}{313,6} \cdot \frac{0,89 \cdot 197,1}{0,372} \cdot 4,50 \cdot 10^{-2} = 0,017.$$

Показник степеня в експоненційному законі тиску:

$$\beta = \frac{2\sqrt{k}}{k-1} B + b = \frac{2\sqrt{1,25}}{1,25-1} \cdot 1,369 + 0,017 = 12,263.$$

Зміна тиску на інтервалі  $\Delta t_1$ :

$$p_{\Gamma 1} = p_{\infty} e^{-\beta \Delta t}.$$

Остаточний тиск у КЗ задаємо:

$$p_{\Gamma K} = 0,15 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Час післядії тяги:

$$t_{\Gamma} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{p_{\infty}}{p_{\Gamma K}} = \frac{1}{12,263} \ln \frac{8,20 \cdot 10^6}{0,15 \cdot 10^6} = 0,326 \text{ с.}$$

Повну криву змінення тиску зображено на рисунку 1.

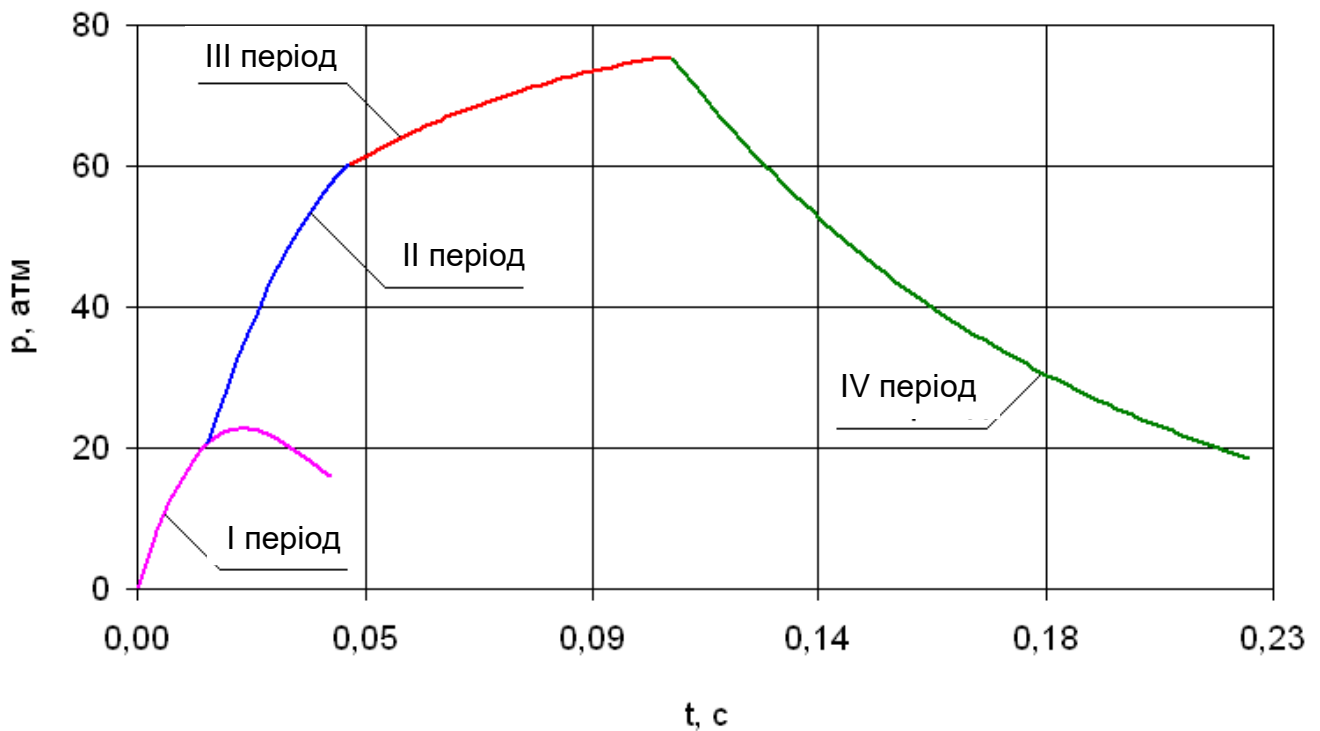


Рисунок 1 – Повна крива змінення тиску в КЗ РДТП

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Mishra, D. P. Fundamentals of Rocket Propulsion [Text] / D. P. Mishra. – Boca Raton : CRC Press, 2017. – 483 p.
2. Turner Martin, J. L. Rocket and Spacecraft Propulsion Principles. Practice and New Developments. Third Edition [Text] / J. L. Turner Martin. – Chichester : Praxis Publishing, 2009. – 404 p.
3. Новожилов, Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив [Текст] / Б. В. Новожилов. – М. : Наука, 1973. – 290 с.
4. Приходько, И. М. Нестационарные процессы работы двигателей летательных аппаратов на твердом топливе [Текст] : учеб. пособие / И. М. Приходько, В. В. Спесивцев. – Харьков : ХАИ, 1989. – 39 с.
5. Орлов, Б. В. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе [Текст] / Б. В. Орлов, Г. Ю. Мазинг. – М. : Машиностроение, 1964. – 406 с.
6. Яльницкий, Л. Ф. Конструкция и проектирование ракетных двигателей твердого топлива [Текст] : учеб. пособие / Л. Ф. Яльницкий, Р. В. Атаманчук, С. А. Пунтус. – Харьков : ХАИ, 2017. – 39 с.
7. Кубота, Н. Твердые ракетные топлива и взрывчатые вещества [Текст] / Н. Кубота. – Пермь : НИИ полимерных материалов, 2009. – 546 с.



Навчальне видання

**Середа Владислав Олександрович  
Колоскова Ганна Миколаївна**

**РОЗРАХУНОК НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ  
РОБОТИ РАКЕТНИХ ДВИГУНІВ НА ТВЕРДОМУ ПАЛИВІ**

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2023

Підписано до видання 19.09.2023

Ум. друк. арк. 1,8. Обл.-вид. арк. 2. Електронний ресурс

---

Видавець і виготовлювач  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
<http://www.khai.edu>  
Видавничий центр «ХАІ»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001