О. М. Прохорова, Н. Л. Кальчук

МОДЕЛІ І МЕТОДИ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ

2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”

О. М. Прохорова, Н. Л. Кальчук

МОДЕЛІ І МЕТОДИ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ

Навчальний посібник

Харків “ХАІ” 2021

УДК 510.644.4(075.8)
П84

Рецензенти: канд. техн. наук, доц. О. Б. Ахієзер,
канд. фіз.-мат. наук, доц. В. О. Афанасьєв

Прохорова, О. М.
П84 Моделі і методи нечіткої логіки [Електронний ресурс] : навч. посіб. / О. М. Прохорова, Н. Л. Кальчук. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харків. авіац. ін-т", 2021. – 166 с.

Наведено поняття нечіткої множини, нечіткого відображення та нечіткої логічної змінної. Висвітлено задачі прийняття рішень у нечітких умовах, зокрема задачі нечіткого математичного програмування. Розглянуто задачі вибору на основі нечітких відношень переваги. Наведено основи теорії вибору варіантів із заданої множини альтернатив за наявності різних типів невизначеності.

Для студентів вищих навчальних закладів, що вивчають курси "Системний аналіз і керування", "Прикладна математика", "Економічна кібернетика".

Іл. 22. Табл. 3. Бібліогр.: 13 назв

УДК 510.644.4(075.8)

ВСТУП

Об’єкти сучасного виробництва, системи керування й інформаційні системи є складними комплексами. Керування такими об’єктами та планування їх роботи потребують від керівника будь-якого рангу вміння швидко й правильно приймати рішення. В умовах необхідності врахування багатьох зовнішніх факторів, внутрішніх потужностей і зв’язків між складовими досліджуваних об’єктів рішення, прийняті на основі особистого досвіду й інженерної інтуїції, можуть виявитися малоефективними, оскільки в них не враховано багато суперечливих умов. Крім того, сучасне виробництво характеризується високою витратністю, що різко підвищує збитки від помилок у прогнозуванні й керуванні. Така ситуація потребує застосування технології прийняття рішень, що базується на кількісному оцінюванні варіантів, виключає або зменшує значення суб'єктивних факторів і при цьому враховує вплив різних неточно або невизначено описаних параметрів. Саме застосування системного підходу дає змогу вивчати проблеми прийняття рішень в умовах, коли вибір альтернативи потребує аналізу складної інформації, що характеризує реальний стан речей.

Теорія прийняття рішень є одним з найважливіших розділів *системного аналізу*, який зосереджує в собі сукупність методів, що базуються на використанні комп’ютерних інформаційних технологій, та орієнтований на дослідження складних систем – технічних, економічних, соціальних, екологічних, програмних тощо. Результатом таких досліджень зазвичай є вибір певної альтернативи: плану розвитку фірми або корпорації, параметрів конструкції, стратегії керування проектом тощо.

Під *суттю прийняття рішень* як процесу розуміють внутрішню, відносно стійку логічну основу, що визначатиме сенс, роль і місце певного управлінського рішення у функціонуванні й розвитку організації. Суть прийняття рішень зазвичай виявляється через реалізацію різноманітних зовнішніх зв'язків і дій, що супроводжують процес. Виходячи з цього, можна визначити предмет дослідження теорії прийняття рішень.

Основна мета будь-якого управлінського рішення – забезпечити координувальний (регулювальний) вплив на всю систему керування під час виконання нею завдань і досягнення цілей організації. Основними завданнями, що становлять зміст і послідовність дій осіб, що приймають рішення при виконанні безпосередніх обов'язків, є створення відповідної інформаційної бази, визначення обмежень і критеріїв прийняття рішення, організація діяльності системи керування.

Прийняття рішень – творчий, відповідальний процес, метою якого є визначення відповідно до обставин тактики подальших дій у конкретній сфері виробництва товару або надання послуг, окреслення кола функцій структурних підрозділів у системі діяльності організації, визначення порядку їх взаємодії, забезпечення й керування ними.

Для своєчасного прийняття рішень необхідно мати систему керування, яка забезпечує реалізацію складної системної діяльності осіб, що приймають рішення, на науковій основі організувати роботу фірми (корпорації), використовуючи ефективні методи й автоматизовані системи керування. При цьому якість прийнятих рішень багато в чому залежить від злагодженості колективу, притаманної йому організаційної культури, відносин між керівниками та виконавцями, від вдалого використання систем підтримки прийняття рішень. Саме в цих питаннях можуть бути корисними науково обґрунтовані практичні рекомендації, зроблені на базі теорії прийняття рішень, де враховано об'єктивні закони й досягнення суміжних наук.

Предметом дослідження теорії прийняття рішень є закони (закономірності) діяльності осіб, що приймають рішення, організаційні форми, технології й методи цієї діяльності, принципи керування й організації праці, суть і зміст рішень.

Об'єкт теорії прийняття рішень – системна діяльність керівника та його команди в процесі вироблення, прийняття та реалізації рішень.

Отже, *теорія прийняття рішень* – це сума знань про підготовку, прийняття й реалізацію управлінського рішення, про закономірності й принципи, організаційні форми, методи й технології забезпечення цього процесу в межах суб’єкта господарювання.

Теорія прийняття рішень, як і будь-яка наукова теорія, виконує пізнавальну й прогнозну функції. Пізнавальна функція полягає в розкритті суті процесів прийняття рішень, закономірностей і принципів, яким вони підпорядковуються, у поясненні їх теоретичних засад на різних історичних етапах, у висвітленні основних властивостей і взаємозв'язків предмета дослідження, обґрунтуванні технології та системи прийняття рішення. Прогнозна функція полягає у визначенні тенденцій подальшого розвитку процесів і систем прийняття рішень, шляхів вибору організаційних форм і методів діяльності об’єкта керування.

Основні завдання теорії прийняття рішень:

– вивчення й узагальнення досвіду пошуку рішень у певних ситуаціях, зокрема в умовах невизначеності та ризику;

– виявлення й дослідження об'єктивних закономірностей у процесах прийняття рішень; формування на їх основі принципів організації діяльності осіб, що приймають рішення, задіяних при цьому організаційних форм, методів і технологій розробляння;

– вироблення практичних рекомендацій щодо прийняття рішень лінійними менеджерами та щодо роботи апарату, який ними керує в реальній обстановці, а також щодо використання технічних засобів і автоматизованих систем керування;

– розроблення методів дослідження проблем розвитку системи прийняття рішень, принципів і методів оцінювання їх ефективності, а також заходів щодо вдосконалення діяльності осіб, що приймають рішення.

Сьогодні на розвиток теорії прийняття рішень істотно впливають інші науки, серед яких методологія, зокрема методологія мислення, теорія керування, кібернетика, психологія, соціологія та політологія. У цьому аспекті істотного значення також набувають природничі науки – біологія, психофізіологія. Але, певна річ, вирішальну роль тут відіграє математика, зокрема методи кількісного оцінювання варіантів у прийнятті рішень та прогнозуванні розвитку ситуацій під час вироблення найбільш раціонального рішення.

Цей посібник містить характеристику математичних моделей і методів, які застосовуються для формалізації та змістовного обґрунтування рішення.

Існують різні підходи до прийняття рішень залежно від того, які поняття вважають основними при формалізації проблеми. Наприклад, якщо вважати, що прийняття рішень – це вибір найбільш вдалої альтернативи з множини наявних, то задача описується парою (Ω, C), у якій Ω – множина можливих альтернатив, C – принцип оптимальності. Такий підхід відповідає ситуації, коли зовнішнє середовище не впливає на результат прийняття рішень.

При статистичному підході ситуація прийняття рішень описується трійкою (Φ, Θ, F), де Φ – множина можливих рішень органу керування, Θ – множина станів середовища, F – оцінний функціонал.

У цьому виданні прийняття рішень розглядається переважно в межах першого підходу.

Особливу увагу приділено задачам прийняття рішень в умовах апріорної невизначеності, обумовленої неточністю або неповнотою вхідних даних, відсутністю чіткої математичної моделі, стохастичною природою зовнішніх впливів, нечіткістю мети, людським фактором та ін. Для ефективного прийняття рішень при невизначеності умов функціонування системи застосовують правила нечіткої логіки. Такі методи ґрунтуються на нечітких множинах і використовуються для опису стратегій прийняття рішень.

Автори мають на меті навчити студентів формалізувати задачі планування, організації та керування, будувати економіко-математичні моделі ситуацій і приймати рішення на основі розрахунку оптимальних величин змінних в умовах визначеності й невизначеності.

Для успішного засвоєння матеріалу посібника потрібні знання математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії матриць, методів математичного програмування й оптимізації. Студенти, які вже оволоділи стандартними методами скінченновимірної оптимізації, можуть застосувати деякі властиві їм оцінки та можливі альтернативні підходи до розв'язання практичних задач.

Матеріал посібника поділено на чотири розділи.

У першому розділі викладено основи теорії вибору варіантів із заданої множини альтернатив. Тут визначено основні поняття теорії бінарних відношень і розглянуто їх використання в задачах прийняття рішень. Крім того, описано функції вибору та деякі елементи теорії корисності.

У другому розділі охарактеризовано поняття нечіткої множини та нечіткого відображення, а також наведено їх властивості й класифікацію.

У третьому розділі з’ясовано зміст задач прийняття рішень у нечітких умовах, у тому числі задач нечіткого математичного програмування. Подано їх класифікацію й висвітлено методи розв’язування, а також розглянуто задачі вибору на основі нечітких відношень переваги.

Четвертий розділ містить виклад основ теорії вибору варіантів із заданої множини альтернатив за наявності різних типів невизначеності, зокрема розглянуто задачі вибору в умовах невизначеності "середовища" (прийняття рішень в умовах ризику, повної невизначеності, в ігрових ситуаціях вибору).

Теорія вибору та прийняття рішень, у тому числі й теорія багатокритеріальної оптимізації, можуть стати в пригоді в таких ситуаціях:

– вибір оптимальної номенклатури товару в торговельних та інших організаціях;
– підбір персоналу фірми (наприклад, під час прийому на роботу);
– раціональна організація розроблення програмного забезпечення для комп'ютерних систем;
– реалізація завдань у ріелтерських фірмах, що надають послуги населенню на ринку нерухомості (наприклад, підбір квартир);
– оптимальний вибір параметрів (числових характеристик) проектованої чи діючої системи (або організації);
– формування оптимальних стратегій діяльності на ринку цінних паперів;
– прийняття рішень на фінансовому ринку в умовах ризику й невизначеності;
– максимізація доходів від аукціонних торгів і т. д.

У додатку наведено приклад застосування і реалізації теорії нечітких множин для практичної задачі.

Наприкінці посібника наведено повний перелік використаної літератури і джерела, які можуть бути корисними під час розв’язання практичних задач прийняття рішень.

Розділ 1

ЗАДАЧІ ВИБОРУ

У цьому розділі студенти можуть ознайомитися з апаратом бінарних відношень та його використанням у системах прийняття рішень; методами прийняття рішень на основі заданих відношень переваги, функцій вибору та функцій корисності; набутти навичок застосування цих методів у практиці.

1.1. Поняття про бінарні відношення

Найпростіша ситуація, у якій можна зробити обґрунтований вибір з кількох об'єктів, виникає, коли подано один "критерій якості", що дає змогу порівнювати будь-які два об'єкти, точно вказати, який з них кращий, і вибрати той (або ті), для якого цей критерій набуває максимального значення. Однак у більшості реальних ситуацій визначити один такий критерій доволі складно, а інколи взагалі неможливо. Але, розглядаючи деякі пари об'єктів, можна назвати кращий із них. У таких випадках кажуть, що ці два об'єкти перебувають у *бінарному відношенні.* Це поняття дає змогу формалізувати операції попарного порівняння альтернатив, і тому воно широко використовується в теорії прийняття рішень.

О з н а ч е н н я 1.1. *Відношенням* R на множині Ω називають підмножину декартового добутку $\Omega\times\Omega$, тобто $R\subset\Omega^2$.

Задання підмножини R у множині $\Omega\times\Omega$ визначає, які саме пари елементів перебувають у відношенні R.

Відношення R, задане на множині Ω, позначимо як (R,Ω). Тут і далі записи $x\ R\ y$ і $(x,y)\in R$ означають, що елементи x і y множини Ω перебувають у відношенні R.

1.2. Способи задання відношень

Для того щоб задати відношення (R,Ω), необхідно задати всі пари елементів $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, які включено в множину R. Крім повного переліку всіх пар існують три способи задання відношень: з допомогою матриці, графа й розрізів. Перші два способи застосовують, щоб задати відношення на скінченних множинах, задання відношення розрізами може бути застосовано й до нескінченних множин.

Опишемо названі способи задання відношень.

1.2.1. Задання відношення за допомогою матриці

Нехай множина Ω складається з n елементів, R − подане на цій множині бінарне відношення. Пронумеруємо елементи множини Ω цілими числами від 1 до n. Для того щоб задати відношення, побудуємо квадратну таблицю розміром $n \times n$. Її *i*-й рядок відповідає елементу x_i множини Ω, *j*-й стовпець – елементу x_j з множини Ω. На перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпця ставимо 1, якщо елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, і нуль в інших випадках, а саме:

$$a_{ij}(R) = \begin{cases} 1, & x_i R\, x_j, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

П р и к л а д 1.1. Нехай $X = \{1, 2, \ldots, 5\}$, R – відношення «більше» на множині X. Тоді його можна описати у вигляді матриці таким чином:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.2. Задання відношення з допомогою графа

Для того щоб задати відношення з допомогою графа, поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам скінченної множини Ω, на якій визначено відношення, вершини графа $x_1, \ldots, x_n$ (при будь-якій нумерації).

Провести дугу від вершини x_i до x_j можна тоді і тільки тоді, коли елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, коли ж $i = j$, то дуга (x_i, x_j) перетворюється на петлю при вершині x_i.

П р и к л а д 1.2. Задамо відношення з прикладу 2.1 з допомогою графа (рис. 1.1).

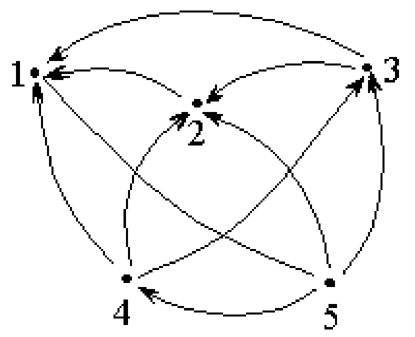


Рис. 1.1. Задання відношення «більше» на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ за допомогою графа

Отже, коли задано будь-який орієнтований граф G, що має n вершин, і вибрано нумерацію на множині Ω, яка складається з n елементів, то тим самим на цій множині задано деяке відношення $R = R(G)$, а саме: твердження $x_i R\, x_j$ буде справедливим тоді і тільки тоді, коли в графі G є дуга (x_i, x_j). Отже, граф є геометричним зображенням відношення.

1.2.3. Задання відношення з допомогою розрізів

Розглянемо відношення R на множині Ω.

О з н а ч е н н я 1.2. *Верхнім розрізом* відношення (R,Ω) в елементі x, що позначається через $R^+(x)$, називається множина елементів $y \in \Omega$, для яких виконується умова $(y,x) \in R$:

$$R^+(x) = \{ y \in \Omega | (y,x) \in R \}. \tag{1.1}$$

О з н а ч е н н я 1.3. *Нижнім розрізом* $R^-(x)$ відношення (R,Ω) в елементі x називається множина елементів $y \in \Omega$, для яких виконується умова $(x,y) \in R$:

$$R^-(x) = \{ y \in \Omega | (x,y) \in R \}. \tag{1.2}$$

Отже, верхній розріз (множина R^+) являє собою множину всіх таких елементів y, що перебувають у відношенні R з фіксованим елементом $x\big(y\ R\ x\big)$. Нижній розріз (множина R^-) – це множина всіх таких елементів y, з якими фіксований елемент x перебуває у відношенні R.

Таким чином, для того щоб задати відношення з допомогою розрізів, необхідно описати всі верхні або нижні його розрізи. Інакше кажучи, відношення R буде задано, якщо для кожного елемента $x \in \Omega$ задано множину $R^+(x)$ або для кожного елемента $x \in \Omega$ задано множину $R^-(x)$.

П р и к л а д 1.3. Нехай задано множину $\Omega = \{1,2,3,...,10\}$. Відношення R означає «бути дільником», тобто $x\ R\ y$, якщо x – дільник y. Задати це відношення можна таким чином: з допомогою верхніх розрізів:

$R^+(1) = \{1\}$, $\qquad R^+(6) = \{1;2;3;6\}$,

$R^+(2) = \{1;2\}$, $\qquad R^+(7) = \{1;7\}$,

$R^+(3) = \{1;3\}$, $\qquad R^+(8) = \{1;2;4;8\}$,

$R^{+}(4)=\{1;2;4\}$, $R^{+}(9)=\{1;3;9\}$,

$R^{+}(5)=\{1;5\}$, $R^{+}(10)=\{1;2;5;10\}$;

або з допомогою нижніх розрізів:

$R^{-}(1)=\{1;2,...,10\}$, $R^{-}(6)=\{6\}$,

$R^{-}(2)=\{2;4,...,10\}$, $R^{-}(7)=\{7\}$,

$R^{-}(3)=\{3;6;9\}$, $R^{-}(8)=\{8\}$,

$R^{-}(4)=\{4;8\}$, $R^{-}(9)=\{9\}$,

$R^{-}(5)=\{5;10\}$, $R^{-}(10)=\{10\}$.

Розглянемо відношення спеціального вигляду й описані вище способи їх задання.

Відношення називається *порожнім* (позначається $\varnothing$), якщо воно не виконується для жодної пари $(x,y)\subset\Omega\times\Omega$.

Для порожнього відношення правильними є такі твердження:

1. У матриці $A(U)$ величини $a_{ij}(U)=1$ для всіх значень i,j.
2. У графі $G(U)$ дуги з'єднують будь-яку пару вершин.
3. Розрізи $R^{+}(x)=R^{-}(x)=\Omega$ для всіх елементів $x\in\Omega$.

Відношення називається *діагональним* або відношенням рівності (позначається E), коли воно виконується для всіх пар $(x,y)\subset\Omega\times\Omega$, які складаються зі збіжних елементів. Тобто $x\ E\ y$, якщо x і y − це один і той самий елемент множини Ω. Для діагонального відношення E мають місце такі твердження:

1. У матриці $A(E)$

$$a_{i,j}(E)=\begin{cases} 1, \textit{ якщо } i=j, \\ 0 \textit{ в інших випадках.} \end{cases}$$

2. У графі $G(E)$ є тільки петлі при вершинах, інших дуг немає.
3. Розрізи $R^{+}(x)=R^{-}(x)=x$ для всіх елементів $x\in\Omega$.

Відношення називається *антидіагональним* (позначається $\overline{E}$), коли воно виконується для всіх пар $(x,y)\subset\Omega\times\Omega$, які складаються з незбіжних елементів. Відношення $\overline{E}$ має такі ознаки:

1. У матриці $A(E)$

$$a_{i,j}\left(\overline{E}\right)=\begin{cases}1, \textit{ якщо } i\neq j,\\ 0 \textit{ в інших випадках.}\end{cases}$$

2. У графі $G\left(\overline{E}\right)$ є всі дуги $\left(x_i, x_j\right)$, якщо $i\neq j$ (немає тільки петель при вершинах).

3. Розрізи $R^+\left(x\right)=R^-\left(x\right)=\Omega\setminus\left\{x\right\}$ для всіх елементів $x\in\Omega$.

1.3. Операції над відношеннями

О з н а ч е н н я 1.4. Відношення R_1 *включено* у відношення R_2 (записується як $R_1\leq R_2$), коли множину пар, для яких виконується відношення R_1, включено в множину пар, для яких виконується R_2.

Будемо казати, що відношення R_1 *строго включено* в R_2 ($R_1 < R_2$), якщо $R_1\leq R_2$ і $R_1\neq R_2$. Рівність відношень реалізується так само, як і рівність множин.

Для матричного задання відношень буде діяти таке правило: якщо $R_1\leq R_2$, то $a_{ij}\left(R_1\right)\leq a_{ij}\left(R_2\right),\ i,j=\overline{1,n}$.

Наприклад: R_1 – відношення «≤» на множині дійсних чисел, R_2 – відношення «<» на тій самій множині, тоді $R_2\leq R_1$.

О з н а ч е н н я 1.5. Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* до відношення R, тоді і тільки тоді, коли воно зв’язує тільки ті пари елементів, для яких не виконується відношення R.

Очевидно, що

$$\overline{R}=\Omega^2\setminus R. \tag{1.3}$$

З огляду на це в матричному записі $a_{ij}\left(\overline{R}\right)=1-a_{ij}\left(R\right), i,j=\overline{1,n}$.

У графі $G\left(\overline{R}\right)$ є ті і тільки ті дуги, яких немає у графі $G\left(R\right)$.

Для розрізів відношення $\overline{R}$ правильними є такі твердження:

$$\overline{R}^+\left(x\right)=\Omega\setminus R^+\left(x\right),$$

$$\overline{R}^-\left(x\right)=\Omega\setminus R^-\left(x\right).$$

П р и к л а д 1.4. Нехай R – відношення «≥», задане на множині дійсних чисел, тоді $\overline{R}$ – відношення «<», задане на тій самій множині.

О з н а ч е н н я 1.6. *Перетином* відношень R_1 і R_2 (записується $R_1\cap R_2$) називається відношення, визначене перетином відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}\left(R_1 \cap R_2\right) = \min\left\{a_{ij}\left(R_1\right), a_{ij}\left(R_2\right)\right\}, i, j = \overline{1, n}.$$

О з н а ч е н н я 1.7. *Об'єднанням* відношень R_1 і R_2 (позначається $R_1 \cup R_2$) називається відношення, отримане шляхом об'єднання відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це можна подати таким чином:

$$a_{ij}\left(R_1 \cup R_2\right) = \max\left\{a_{ij}\left(R_1\right), a_{ij}\left(R_2\right)\right\}, i, j = \overline{1, n}.$$

О з н а ч е н н я 1.8. *Оберненим* до відношення R називається відношення R^{-1}, яке задовольняє таку умову:

$$x\ R^{-1} y \Leftrightarrow y\ R\ x\,. \tag{1.4}$$

Для матриць відношень R і R^{-1} буде мати місце така формула:

$$a_{ij}\left(R^{-1}\right) = a_{ji}\left(R\right).$$

П р и к л а д 1.5. Нехай R − відношення «≥» на множині дійсних чисел. Тоді оберненим до нього відношенням R^{-1} буде відношення «≤» на множині дійсних чисел.

П р и к л а д 1.6. Нехай відношення R задано на множині $X = \left\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right\}$ такою матрицею:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідне обернене відношення та доповнення.

Розв'язання

Згідно з означенням 1.5 доповнення відношення R можна задати такою матрицею:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернене відношення будуємо за означенням 1.8:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

О з н а ч е н н я 1.9. *Добутком* (або *композицією*) відношень R_1 і R_2 (позначається як R_1R_2) називається відношення, яке будується за таким правилом:
$x\left(R_1R_2\right)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\ R_1z$ і $x\ R_2y$.

П р и к л а д 1.7. Розглянемо відношення R_1 і R_2, подані на множині дійсних чисел, причому R_1 – відношення «менше», R_2 – відношення «більше». Пара чисел $\left(x, y\right) \subset R_1R_2$, коли існує число z, для якого виконуються такі умови: $x < z$ і $z > y$. Вочевидь, ця умова виконується для всіх чисел x, y, а тому R_1R_2 – це повне відношення (тобто таке, яким зв'язані всі елементи цієї множини).

П р и к л а д 1.8. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ подано два відношення R_1 і R_2:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити їх композицію.

Розв'язання

Згідно з означенням 1.9 $x\left(R_1R_2\right)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\ R_1z$ і $x\ R_2y$. У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}\left(R_1R_2\right)=\max_{k=\overline{1,n}}\min\left\{a_{ik}\left(R_1\right),a_{kj}\left(R_2\right)\right\},$$

де n – порядок матриці.

Інакше кажучи, композиція відношень обчислюється як максимінний добуток матриць, що їм відповідають.

Тоді отримуємо такий результат:

$$R_1\cdot R_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

О з н а ч е н н я 1.10. Відношення $\left(R_1,\Omega_1\right)$ називають *звуженням* відношення $\left(R,\Omega\right)$ на множину Ω_1, якщо $\Omega_1\subset\Omega$ і $R_1=R\cap\Omega_1\times\Omega_1$. Звуження відношення $\left(R,\Omega\right)$ на множину Ω_1 називають також відношенням R на множині Ω_1.

П р и к л а д 1.9. Відношення «>» на множині натуральних чисел є звуженням відношення «>» на множині дійсних чисел.

1.4. Властивості відношень

О з н а ч е н н я 1.11. Відношення R називається *рефлексивним*, якщо $x\ R\ x$ для будь-якого елемента $x\in\Omega$.

Наприклад, відношення «бути схожими», «бути не старшим», «менше або дорівнює» – рефлексивні; «бути братом», «бути старшим», «більше» – нерефлексивні.

У матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі розміщуються одиниці, тобто елемент матриці $a_{ij}=1$, якщо $i=j$.

Граф рефлексивного відношення обов’язково має петлі при вершинах. Стосовно верхнього й нижнього розрізів правильними є твердження: $x\in R^+\left(x\right), x\in R^-\left(x\right)$ для всіх елементів $x\in\Omega$.

О з н а ч е н н я 1.12. Відношення R називається *антирефлексивним*, коли твердження $x\ R\ y$ означає, що $x\neq y$ для $\forall x\in\Omega$.

У матриці антирефлексивного відношення елементи головної діагоналі дорівнюють нулю, тобто $a_{ij}=0$, якщо $i=j$.

Граф антирефлексивного відношення не має петель при вершинах, а верхні та нижні розрізи задовольняють такі умови: $x\notin R^+\left(x\right),x\notin R^-\left(x\right)$ для всіх елементів $x\in\Omega$.

Антирефлексивними будуть відношення «більше», «менше», «бути старшим».

О з н а ч е н н я 1.13. Відношення R називається *симетричним*, якщо

$$R = R^{-1}\left(x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x\right).$$

Матриця симетричного відношення є симетричною, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх значень i, j. У графі такого відношення всі дуги парні, а верхні й нижні розрізи збігаються для всіх елементів $x \in \Omega$, тобто $R^{+}(x) = R^{-}(x)\ \ \forall x \in \Omega$.

Симетричними є відношення рівності, «бути схожим», «учитися в одній групі».

О з н а ч е н н я 1.14. Відношення R називається *асиметричним*, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$ (тобто з двох виразів $x\ R\ y$ і $y\ R\ x$ хоча б один не відповідає дійсності).

У матриці асиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх значень i, j, тобто з двох симетричних елементів a_{ij} і a_{ji} хоча б один обов'язково дорівнює 0.

Асиметричними, наприклад, є відношення «більше» і «менше».

Зауважимо, що антирефлексивність – це обов'язкова умова асиметричності.

О з н а ч е н н я 1.15. Відношення R називається *антисиметричним*, якщо твердження $x\ R\ y$ і $y\ R\ x$ можуть бути правильними одночасно тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

У матриці антисиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, коли $i \neq j$.

Приклади антисиметричних відношень: «більше або дорівнює», «не більше», «не гірше».

О з н а ч е н н я 1.16. Відношення R називається *транзитивним*, якщо $R^2 \leq R$ (тобто коли з тверджень $x\ R\ z$ і $z\ R\ y$ випливає, що $x\ R\ y$).

Транзитивними є відношення «більше або дорівнює», «менше», «бути старшим», «учитися в одній групі».

Умова $R^2 \leq R$ дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення в разі, коли відношення задано з допомогою матриці. Для цього необхідно обчислити матрицю відношення R^2 (тобто піднести в квадрат матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}\left(R^2\right) \leq a_{ij}\left(R\right)$ для всіх значень i, j, то відношення є транзитивним. Коли ж цю умову порушено хоча б для однієї пари індексів i, j, то відношення не буде транзитивним.

О з н а ч е н н я 1.17. Відношення R називається *ациклічним*, якщо $R^k \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто з умов $x\ R\ z_1, z_1 R\ z_2, ..., z_{k-1} R\ y$ випливає, що $x \neq y$.

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

О з н а ч е н н я 1.18. Відношення R називається *від'ємно транзитивним*, якщо його доповнення $\overline{R}$ є транзитивним.

О з н а ч е н н я 1.19. Відношення R називається *сильно транзитивним*, якщо воно одночасно є транзитивним і від'ємно транзитивним.

Властивості ациклічності й транзитивності відіграють особливу роль у теорії прийняття рішень, оскільки вони виражають природні взаємозв'язки між об'єктами. Дійсно, якщо об'єкт x у деякому сенсі не гірший за об'єкт y, а об'єкт y в тому самому сенсі не гірший за об'єкт z, то природно чекати, що об'єкт x буде не гіршим від об'єкта z (транзитивність), і в будь-якому разі об'єкт z не кращий за об'єкт x (ациклічність).

П р и к л а д 1.10. Визначити властивості такого відношення:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Це відношення є рефлексивним (оскільки його матриця містить на головній діагоналі тільки одиниці), воно не буде симетричним (оскільки серед симетричних елементів є такі, що не дорівнюють один одному, наприклад елементи a_{12} і a_{21}). Оскільки елемент $a_{13} = a_{31}$, то відношення не буде також асиметричним та антисиметричним.

Для перевірки його транзитивності помножимо це відношення на себе:

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $R^2 \not\subset R$, то вихідне відношення не є транзитивним.

1.5. Відношення еквівалентності, порядку, домінування й переваги

О з н а ч е н н я 1.20. Відношення R є відношенням *еквівалентності (еквівалентністю)*, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Позначимо його R_e або символом $\sim$.

Прикладами відношень еквівалентності будуть такі:

– «учитися на одному курсі», «учитися в одній групі», задані на множині студентів факультету;

– «мати однакову остачу при діленні на 3» на множині натуральних чисел;

– відношення подібності на множині трикутників та ін.

Характерним для еквівалентності є те, що вона розподіляє елементи на класи. У першому прикладі – це курси або групи студентів факультету, у другому – множини чисел, що мають однакову остачу при діленні на 3, у третьому – множини подібних трикутників. Отже, задання еквівалентності на множині тісно пов'язане з її розбиттям на неперетинні підмножини. Розглянемо цю властивість еквівалентності докладніше.

Нехай задано деяке розбиття множини Ω, тобто відомо її підмножини $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N$, які задовольняють умову $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$, причому $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, коли $i \neq j,\ i, j = 1, 2, ...N.$ Уведемо на множині Ω відношення R таким чином: $x\ R\ y$ тоді і тільки тоді, коли існує множина Ω_i, що відповідає таким умовам: $x \in \Omega_i$ і $y \in \Omega_i$.

Завдання. Доведіть, що уведене таким чином відношення являє собою еквівалентність.

Як бачимо, задання еквівалентності на деякій множині Ω рівносильне розбиттю цієї множини на класи еквівалентних між собою елементів. І навпаки, будь-яке розбиття множини Ω визначає на ній еквівалентність, що йому відповідає.

О з н а ч е н н я 1.21. Відношенням *нестрогого порядку* «$\leq$» (*нестрогим порядком*) називається відношення, що має властивості рефлексивності, антисиметричності й транзитивності.

О з н а ч е н н я 1.22. Відношенням *строгого порядку* «$<$» називається відношення, яке має властивості антирефлексивності, асиметричності й транзитивності.

Якщо на множині Ω задано відношення «$\leq$», тобто деякий нестрогий порядок, то йому можна поставити у відповідність строгий порядок «$<$», що визначається за таким правилом: $x < y$ тоді і тільки тоді, коли $x \leq y$ і $x \neq y$. І навпаки, якщо «$<$» – відношення строгого порядку, задане на множині Ω, то йому можна поставити у відповідність відношення «$\leq$» таким чином: $x \leq y$ тоді і тільки тоді, коли $x < y$ або $x = y$. Отже, за нестрогим порядком можна визначити строгий порядок, що йому відповідає, і навпаки.

Припустимо, що на деякій множині задано відношення порядку (для всіх або деяких пар її елементів), тоді кажуть, що на цій множині задано *частковий порядок*.

Частковий порядок на множині Ω називається *лінійним порядком*, якщо для будь-яких елементів $x, y \in \Omega$ правильним є одне з трьох тверджень: $x < y, x = y$ або $x > y$ (тобто можна порівняти будь-які два елементи множини Ω).

О з н а ч е н н я 1.23. Відношенням *домінування* називається відношення, що має властивості антирефлексивності й асиметричності.

Будемо казати, що елемент x домінує над елементом y, якщо x у якому-небудь сенсі є кращим за y.

Таким чином, відношення строгого порядку являє собою окремий випадок відношення домінування, для якого характерна ще й транзитивність. У загальному ж сенсі при домінуванні як транзитивність, так і ациклічність можуть не мати місця.

О з н а ч е н н я 1.24. Два елементи можна порівняти за відношенням R, коли $x\ R\ y$ або $y\ R\ x$. В інших випадках елементи *непорівнянні*.

Якщо R – повне відношення на множині Ω, то будь-які два елементи цієї множини можна порівняти.

Розглянемо, які порядки можна задати на m-вимірному просторі E_m:

1) $a \geq b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \geq b_i, i = 1, 2, ...m$;

2) $a \geq b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \geq b_i, i = 1, 2, ...m$, і $a \neq b$;

3) $a > b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i > b_i, i = 1, 2, ...m$;

4) $a \overline{>} b$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$ або $a_i > b_i$ хоча б для одного значення $i \in \{1, 2, ...m\}$;

5) $a = b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i = b_i, i = 1, 2, ...m$.

Відношення 1 являє собою частковий порядок, воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне.

Відношення 2 і 3 – це строгі часткові порядки, вони антирефлексивні, асиметричні й транзитивні.

Відношення 4 є рефлексивним, але воно не буде ні симетричним, ні транзитивним.

Зв'язок між цими відношеннями схематично зображено на рис. 1.2.

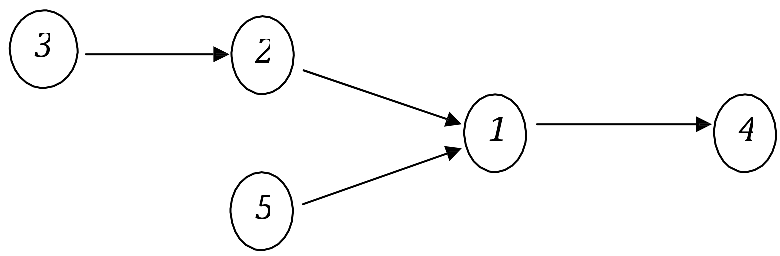


Рис. 1.2. Схема взаємозв'язку між відношеннями в просторі E_m

Для опису переваги зазвичай використовують такі бінарні відношення, задані на множині альтернатив Ω: строгої переваги, байдужості та нестрогої переваги.

Відношення строгої переваги R^s означає, що один об'єкт (строго) переважає над іншим (тобто один об'єкт кращий від іншого).

Відношення байдужості R^I означає, що об'єкти однакові за перевагами, і коли обмежити вибір цими двома об'єктами, неважливо, який з них буде вибрано.

Відношення нестрогої переваги означає, що один об'єкт є не менш переважним, ніж інший (тобто один об'єкт не гірший від іншого).

Припустимо, що за допомогою ОПР або експертів було визначено відношення нестрогої переваги R на множині допустимих альтернатив X.

Це означає, що відносно будь-якої пари альтернатив $(x, y) \subset X \times X$ можлива одна із таких ситуацій:

1) об'єкт x не гірший від об'єкта y, тобто $x > y$, інакше кажучи $(x, y) \in R$;

2) об'єкт y не гірший за об'єкт x, тобто $y \geq x$, або $(y, x) \in R$;

3) об'єкти x та y не порівнянні між собою, тобто $(x, y) \notin R$ та $(y, x) \notin R$.

Ця інформація дає змогу звузити клас варіантів раціонального вибору, включивши в нього лише ті альтернативи, над якими не домінує жодна інша альтернатива множини X.

Щоб пояснити це поняття, визначимо відношення строгої переваги R^s, що відповідає відношенню переваги R, і відношення однаковості (байдужості) I.

Будемо говорити, що альтернатива x строго краща від альтернативи y (має строгу перевагу над альтернативою y), якщо одночасно $x \geq y$ і $y \neq x$, тобто

$$(x, y) \in R \text{ і } (y, x) \notin R.$$

Сукупність усіх таких пар назвемо *відношенням строгої переваги* R^s на множині X.

Легко переконатися, що це відношення повинно мати такі властивості: антирефлексивність; асиметричність.

Для більш компактного запису відношення R^s використаємо визначення відношення R^{-1}, оберненого до R, а саме, урахуємо, що $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

Тоді відношення строгої переваги можна записати в такому вигляді:

$$R^s = R \setminus R^{-1}.$$

Відношення однаковості, що відповідає відношенню переваги R, можна визначити таким чином: $(x, y) \in R^I$, тоді і тільки тоді, коли або не виконується жодна з умов: $x \geq y$ і $y \geq x$, або одночасно мають місце обидві: $x \geq y$ та $y \geq x$. Інакше кажучи, $(x, y) \in R^I$, коли наявної інформації недостатньо для обґрунтованого вибору між альтернативами x і y.

Математично відношення R^I можна записати такою формулою:

$$R^I = \left[(X \times X) \setminus \left(R \bigcup R^{-1} \right) \right] \bigcup \left(R \bigcap R^{-1} \right).$$

Легко упевнитись, що чим більше інформації про реальну ситуацію або процес, тим вужчим є відношення однаковості.

Уведені відношення наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

№ п/п	Назва відношення	Властивість					
		Рефлексивність	Антирефлексивність	Симетричність	Асиметричність	Антисиметричність	Транзитивність
1	Перевага	+					
2	Строга перевага	+			+		
3	Подібність	+		+			
4	Еквівалентність	+		+			+
5	Строгий порядок		+		+		+
6	Нестрогий порядок	+				+	+
7	Домінування		+		+		

П р и к л а д 1.11. Нехай на множині $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ подано відношення нестрогої переваги

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні відношення еквівалентності, строгої переваги, однаковості.

Розв'язання

Згідно з означенням $R^e=R\bigcap R^{-1}$. Побудуємо спочатку обернене відношення R^{-1}:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо відношення еквівалентності, тобто

$$R^e = R \bigcap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як видно з цієї матриці, елементи x_1, x_4 є еквівалентними.

Тепер відповідно до означення знайдемо відношення R^s таким чином:

$$R^e = R \setminus R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що елемент x_1 строго переважає елемент x_2, елемент x_2, своєю чергою, переважає x_4, елемент x_3 переважає x_2, а x_4 кращий від x_3 відповідно.

Відношення байдужості знаходимо за такою формулою:

$$R^I = \left[\left(X \times X \right) \setminus \left(R \bigcup R^{-1} \right) \right] \bigcup \left(R \bigcap R^{-1} \right).$$

Матриця цього відношення набуває такого вигляду:

$$R^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це відношення означає, що серед елементів $\{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_3, x_4\}$ можна вибирати будь-який, тобто інформації для того, щоб здійснити обґрунтований вибір між елементами кожної пари, недостатньо.

Коли $(x, y) \in R^s$, то будемо казати, що альтернатива x *домінує* над альтернативою $y(x > y)$.

О з н а ч е н н я 1.25. Альтернативу $x \in X$ назвемо *недомінованою* на множині X за відношенням R, коли $(y,x) \notin R^s \ \forall y \in X$. Тобто якщо альтернатива x – недомінована, то в множині X не має жодної альтернативи, яка домінувала б над альтернативою x.

У наведеному вище прикладі недомінованою виявилась альтернатива x_1.

Якщо деякі альтернативи в певному сенсі є недомінованими, то їх вибір у задачах прийняття рішень доречно вважати раціональним у межах наявної інформації.

Таким чином, інформація у формі відношення переваги дає змогу звузити клас раціональних рішень на множині X до множини недомінованих альтернатив, яка має такий вигляд:

$$X^{н.д} = \left\{ x \middle| \ x \in X, (y,x) \in R \setminus R^{-1} \ \forall x \in X \right\}.$$

1.6. Поняття R-оптимальності, найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів

Наведений вище матеріал дає формальний опис попарного порівняння альтернатив, що є необхідною умовою для виділення найкращого елемента (або кількох кращих) з усієї множини альтернатив X. Тепер формалізуємо саме поняття «кращий», використавши для цього апарат бінарних відношень.

Елемент x^* множини X будемо називати *найкращим* за відношенням R, якщо $x^* R \ x$ є правильним для будь-якого елемента $x \in X$.

Елемент x_* будемо називати *найгіршим* за відношенням R, якщо $x \ R \ x_*$ для всіх $x \in X$.

Легко впевнитись, що найкращий і найгірший елементи існують не завжди. Зокрема, їх не буде, коли відношення не є повним, як у наведеному нижче прикладі.

П р и к л а д 1.12. Розглянемо множину $B = \{a,b,c\}$ і відношення R на ній, яке подано таким чином: $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$. Визначити найкращі і найгірші за цим відношенням елементи множини B, якщо такі існують.

Зобразимо описане відношення з допомогою графа (рис. 1.3).

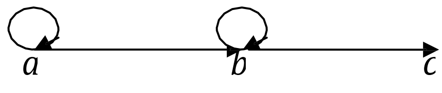


Рис. 1.3. Граф відношення R (до прикладу 1.12)

Як бачимо, це відношення не має найкращих і найгірших елементів, бо елементи a і c – непорівнянні.

Уведемо поняття максимального елемента.

Елемент $x_{\max}$ називається *максимальним* за відношенням R^s на множині X, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ має місце твердження: $x_{\max} R^s x$ або $x_{\max}$ є непорівнянним з x.

Іншими словами, не існує елемента (альтернативи) $x \in X$, який був би кращим за альтернативу $x_{\max}$.

Множина максимальних за відношенням R елементів множини X позначається як $\max_R X$.

Елемент $x_{\min}$ називається *мінімальним* відносно R^s на множині X, якщо для всіх $x \in X$ або $x R^s x_{\min}$, або x буде з ним непорівнянним. Отже, не існує елемента $x \in X$, який був би гіршим за $x_{\min}$; немає жодного елемента x, над яким би домінував елемент $x_{\min}$.

У наведеному вище прикладі максимальним буде елемент a, мінімальним – елемент c.

Множина мінімальних за відношенням R елементів множини X позначається як $\min_R X$.

Зауважимо, що коли найкращі елементи існують, то вони будуть і максимальними, а протилежна ситуація не буде справджуватися.

Отже, якщо треба вибрати найкращу в деякому сенсі альтернативу, то природним буде її вибір із множини максимальних (недомінованих) альтернатив.

П р и к л а д 1.13. Нехай відношення R подано у вигляді графа G (рис. 1.4). Знайти найкращі, найгірші, максимальні та мінімальні за відношенням R^s елементи.

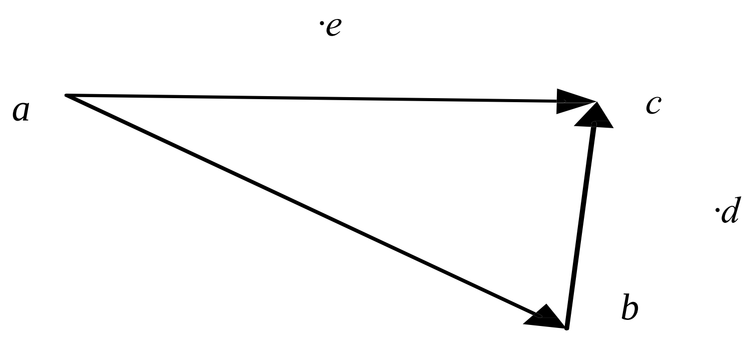


Рис. 1.4. Граф відношення R (до прикладу 1.13)

Розв'язання

Найкращих елементів не існує, оскільки елемент e є непорівнянним з іншими; найгірших елементів також немає. Максимальними за відношенням R^s є елементи a, d, e, мінімальними – c, d, e. Зверніть увагу на те, що елементи d, e – максимальні й мінімальні одночасно. Це пояснюється тим, що вони непорівнянні з іншими, тобто немає інформації про переваги цих елементів.

Множина $\max_R X$ максимальних за відношенням R об'єктів множини X є внутрішньо стійкою в тому сенсі, що коли $a,b \in \max_R X$, то не може виконуватися жодне з тверджень: $a\ R\ b$ і $b\ R\ a$.

Множина називається *зовнішньо стійкою*, якщо для кожного немаксимального елемента $a \in X$ знайдеться більш переважний від нього елемент серед максимальних, тобто буде правильним твердження: $a^0 R\ a$ для деякого елемента $a^0 \in \max_R X$.

Внутрішньо та зовнішньо стійка множина $\max_R X$ називається *ядром* відношення R у множині X.

Поняття стійкості має велике значення, бо якщо множина $\max_R X$ зовнішньо стійка, то оптимальний елемент має бути вибраний саме з цієї множини. Якщо ж вона не є зовнішньо стійкою, то для обмеження нею вибору немає підстав.

Коли виникає потреба вибрати не один, а кілька кращих елементів або впорядкувати всі об'єкти за перевагами, то поняття максимального елемента і ядра відношення втрачають своє значення.

П р и к л а д 1.14. Припустимо, що є множина $B = \{a,b,c\}$, і на ній задано відношення $R = \{(a,c)\}$. Тут множина максимальних елементів $\max_R B = \{a,b\}$. Однак при виборі двох кращих елементів не можна не брати до уваги наявність елемента c, оскільки якщо з'явиться інформація, що він є переважнішим, ніж b, то шуканими будуть елементи a і c.

Числова функція φ, визначена на множині X, називається *зростаючою (неспадною)* за відношенням R, коли з умови $a\ R\ b$ випливає, що $\varphi(a) > \varphi(b)$ [відповідно $\varphi(a) \geq \varphi(b)$] для всіх елементів, $a,b \in X$.

Має місце таке твердження:

Лема 1.1. Нехай множина $B \subseteq A$ та елемент $a^0 \in B$ надають неспадній за відношенням R на множині B функції ψ найбільшого на ній значення. Тоді для того щоб об'єкт a^0 був максимальним за відношенням R на множині B, достатньо виконання однієї з таких умов:

1. ψ зростає за відношенням R на множині B.
2. $a^0 \in B$ – єдина точка максимуму функції Ψ на множині B.

Доведення

Припустимо, що елемент a^0 не є максимальним за відношенням R, тоді в множині B знайдеться елемент a, який переважає a^0 за відношенням R, тобто $a^0 R\ a$. Але в цьому разі має виконуватися строга нерівність $\Psi(a) > \Psi(a^0)$, оскільки функція Ψ зростає за відношенням R на множині B. Але строга нерівність суперечить тому, що елемент a^0 – точка максимуму функції Ψ, а нестрога нерівність $\Psi(a) \geq \Psi(a^0)$ – тому, що a^0 являє собою єдину точку максимуму Ψ на множині B. Лему доведено.

При моделюванні реальних систем можуть мати місце такі ситуації, коли

ОПР або експерти не мають чіткого уявлення про переваги між альтернативами, але їм конче необхідно подати конкретні висновки про те, які з альтернатив є кращими. У цьому випадку експерти змушені певним чином “огрубляти” свої знання та уявлення, і відповідна математична модель буде менш адекватною реальній ситуації.

Більш гнучким способом формалізації таких уявлень є можливість для експертів визначити міру свого переконання в перевазі альтернативи, використовуючи числа з інтервалу $[0;1]$, тобто описати свої міркування за допомогою *нечіткого відношення переваги*, коли кожній парі альтернатив (x, y) відповідає число з інтервалу $[0;1]$, яке відображає міру правильності переваги: $x \geq y$. Методи прийняття рішень на основі нечітких відношень переваги буде розглянуто в розд. 3.

Зауважимо, що характерна особливість «мови» бінарних відношень – це припущення про те, що результат порівняння за перевагами двох елементів не залежить від складу всієї множини. Однак у деяких випадках така залежність має місце, і для її врахування необхідна більш багата «мова» опису переваг, що базується на використанні функцій вибору.

1.7. Функції вибору. Класи функцій вибору

У реальних ситуаціях вибору на множині альтернатив Ω особа, що приймає рішення, вибирає деяку альтернативу, керуючись своєю особистою думкою про кращі альтернативи. У різних людей уявлення про одну й ту саму ситуацію можуть істотно різнитися, але логічно припустити, що в схожих умовах одна й та сама людина буде діяти однаково, і тому є можливість сформулювати правило, за яким буде здійснено вибір.

Розглянемо таку ситуацію: нехай Ω – множина альтернатив, серед яких проводиться вибір, а множини альтернатив X являють собою її підмножини.

Позначимо через $C(X)$ множину альтернатив, яку виділяє ОПР з множини X.

Наприклад, Ω – множина всіх груп у вищому навчальному закладі, X – довільна підмножина Ω (це може бути множина груп 3-го курсу, множина груп факультету і т. ін.). Уважатимемо, що $C(X)$ – найкраща група з множини груп X. Незалежно від того, хто приймає рішення (вибирає найкращу групу), природно вважати, що найкраща група закладу буде найкращою групою свого курсу, свого факультету тощо.

Математично це можна записати так: якщо $X' \subset X$ і $x \in C(X) \cap X'$, то $x \in C(X')$.

Отже, будь-який вибір у конкретній ситуації можна вважати логічно обґрунтованим, якщо відомі рішення в інших ситуаціях, пов’язаних із цією. Це означає, що множини $C(X)$ є залежними при різних множинах X, якщо вибір здійснює одна й та сама ОПР. Для формалізації цієї залежності використовують поняття функції вибору.

Функцією вибору $C(X)$ називається відображення, яке ставить у відповідність кожній множині $X \subset \Omega$ її підмножину $C(X) \subset X$.

Множину $C(X)$ будемо інтерпретувати як найбільш переважні альтернативи з множини X.

Зазначимо, що в цьому визначенні немає ніяких апріорних обмежень на функції вибору, зокрема не виключена можливість порожнього вибору, тобто ситуації, коли $C(X) = \varnothing$. Ця ситуація називається *відмовою від вибору*. Її прикладом може бути випадок, коли покупець іде з магазину, нічого не купивши.

В окремому випадку, зокрема, коли відомим є відношення строгої переваги R на множині альтернатив, функцію вибору можна визначити такою рівністю:

$$C(X) = \max_R X .$$

Приклад 1.15. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ матрицею задано відношення переваги R:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати функцію вибору, що відповідає цьому відношенню.

Розв’язання

Побудуємо відношення строгої переваги $R^s = R \setminus R^{-1}$, яке відповідає заданому відношенню:

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер задамо функцію вибору за таким правилом: $C(X) = \max_R X$. Для цього розглянемо всі можливі підмножини множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і визначимо максимальні елементи за звуженням відношення R на відповідні підмножини.

Розглянемо спочатку одноелементні підмножини. Вибір із одного елемента буде тим самим елементом, тому

$$C(\{x_1\}) = \max_R \{x_1\} = x_1,$$
$$C(\{x_2\}) = \max_R \{x_2\} = x_2,$$
$$C(\{x_3\}) = \max_R \{x_3\} = x_3,$$
$$C(\{x_4\}) = \max_R \{x_4\} = x_4.$$

Далі розглянемо двохелементні підмножини. Звуження заданого відношення на множину $\{x_1, x_2\}$ дає можливість зробити висновок, що елемент x_1 більш переважний, ніж x_2, тому максимальним елементом для цієї множини буде x_1 , і тоді

$$C(\{x_1, x_2\}) = \max_R \{x_1, x_2\} = x_1.$$

Аналогічно для інших двохелементних множин

$$C(\{x_1, x_3\}) = \max_R \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3\}, \qquad C(\{x_1, x_4\}) = \max_R \{x_1, x_4\} = \{x_1, x_4\},$$
$$C(\{x_2, x_3\}) = \max_R \{x_2, x_3\} = \{x_3\}, \qquad C(\{x_2, x_4\}) = \max_R \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\},$$
$$C(\{x_3, x_4\}) = \max_R \{x_3, x_4\} = \{x_4\}$$

і так само

$$C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \max_R \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_3\},$$
$$C(\{x_1, x_2, x_4\}) = \max_R \{x_1, x_2, x_4\} = \{x_1, x_4\},$$
$$C(\{x_1, x_3, x_4\}) = \max_R \{x_1, x_3, x_4\} = \{x_1, x_4\},$$
$$C(\{x_2, x_3, x_4\}) = \max_R \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_4\},$$
$$C(X) = C(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = \max_R \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_4\}.$$

Отже, функцію вибору задано.

Зауважимо, що існують також інші способи задання функцій вибору.

Таким чином, за відношенням переваги можна побудувати функцію вибору, але не для всякої функції вибору існує відношення переваги, що їй відповідає.

П р и к л а д 1.16. Функцію вибору задано таким чином:

$$C(\{x_1\}) = x_1, \qquad C(\{x_2\}) = x_2, \qquad C(\{x_3\}) = x_3,$$
$$C(\{x_1, x_2\}) = x_1, \qquad C(\{x_1, x_3\}) = \{x_1, x_3\},$$

$$C(\{x_2, x_3\}) = \{x_2\}, \qquad C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_1, x_3\}.$$

Як бачимо, дві останні умови суперечать одна одній, тому відношення побудувати неможливо.

П р и к л а д 1.17. Функцію вибору задано таким чином:

$$C(\{x_1\}) = x_1, \qquad C(\{x_2\}) = x_2, \qquad C(\{x_3\}) = x_3,$$
$$C(\{x_1, x_2\}) = x_1, \qquad C(\{x_1, x_3\}) = \{x_1, x_3\}, \qquad C(\{x_2, x_3\}) = \{x_3\},$$
$$C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_1, x_3\}.$$

Заданій функції відповідатиме таке відношення строгої переваги:

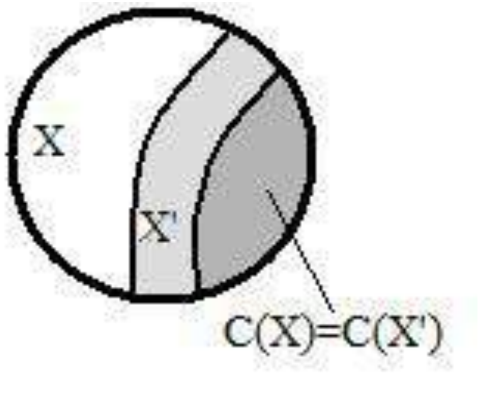
$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функції вибору зручно класифікувати відповідно до тих умов, які зазвичай використовують при їх вивченні.

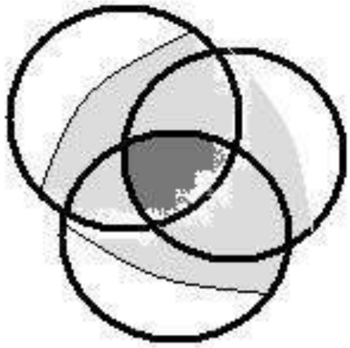
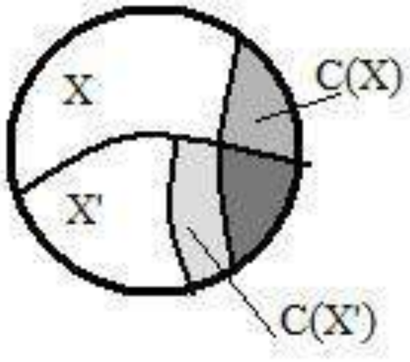
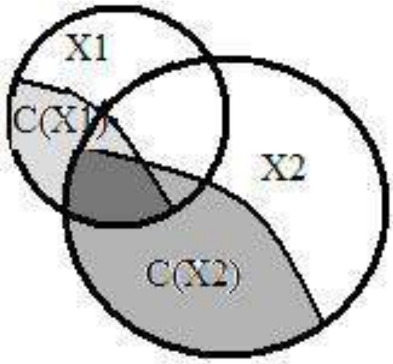
Приклади таких умов і класифікацію наведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

<table>
<tr><td colspan="2">1. Умова незалежності від нехтуваних альтернатив</td></tr>
<tr><td>Якщо $C(X) \subset X' \subset X$, то $C(X) = C(X')$

Зміст цієї умови такий: коли розглянути довільну множину X', яка містить усі альтернативи, вибрані з множини X, то вибір з X' буде такий самий, як і вибір з множини X. Наприклад, коли під час конкурсу проект x не був включений до кращих, то в іншому конкурсі, де беруть участь усі ті проекти, що й у попередньому, за винятком x, склад переможців не зміниться</td><td>
</td></tr>
</table>

Продовження табл. 1.2

2. Умова згоди	
$$\bigcap_i C(X_i) \subset C\left(\bigcup_i X_i\right)$$ Ця умова означає, що альтернативи, які були вибрані з кожної множини X_i, будуть вибрані також і з їх об'єднання	
3. Умова наслідування	
Якщо $X^{'} \subset X$, то $C\left(X^{'}\right) \supset C(X) \cap X^{'}$ Сенс цієї умови такий: якщо розглянути вибір з довільної множини і вибір з деякої її підмножини, то всі альтернативи, які були вибрані з вихідної множини і ввійшли до підмножини, що розглядається, будуть також вибрані з цієї підмножини. Наприклад, якщо проводився міжнародний конкурс і переможцем став проект з Болгарії, то він має бути і серед переможців болгарського конкурсу	
4. Умова мультиплікаторності	
$$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2)$$ При цій умові вибір із перетину двох множин буде дорівнювати перетину виборів	

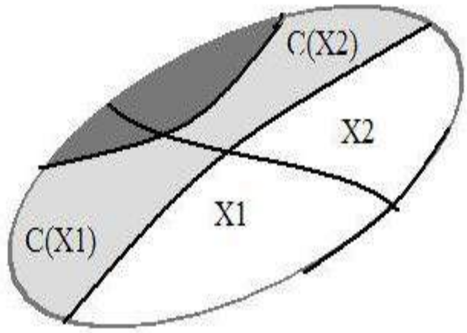
Продовження табл. 1.2

<table>
<tr><td colspan="2">5. Умова Плотта (незалежність від вибору шляху)</td></tr>
<tr><td>

$C(X_1 \cup X_2) = C\left(C(X_1) \cup C(X_2)\right)$

В умові Плотта передбачається, що вибір альтернатив із об’єднання виборів, які, своєю чергою, зроблені з кожної множини, точно відповідає вибору із об’єднання виборів, зроблених з кожної множини окремо. Наприклад, для проведення міжнародного конкурсу можна спочатку відібрати переможців національних конкурсів, а потім уже влаштовувати змагання серед них

</td><td>

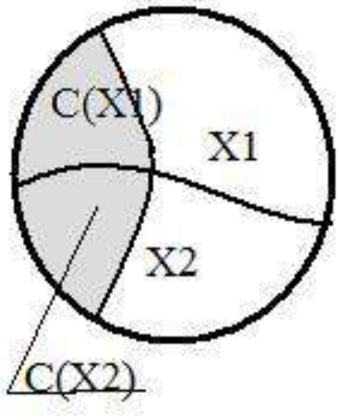


</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Умова суматорності</td></tr>
<tr><td>

$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \cup C(X_2)$

Ця умова означає, що вибір з об’єднання множин дорівнює об’єднанню виборів з кожної множини окремо. Наприклад, на районній дошці пошани відзначено людей, обраних у різних організаціях

</td><td>

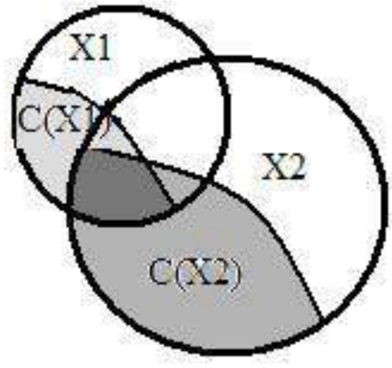


</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Умова мультиплікаторності</td></tr>
<tr><td>

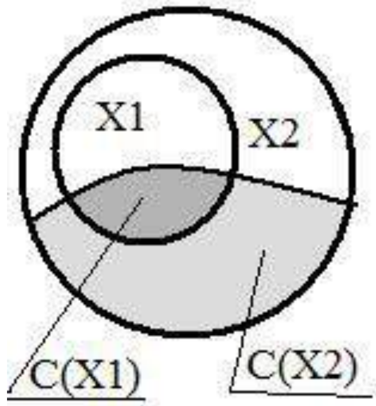
$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2)$

При цій умові вибір із перетину двох множин буде дорівнювати перетину виборів

</td><td>



</td></tr>
</table>

8. Умова монотонності	
Якщо $X_1 \subset X_2$, то $C(X_1) \subset C(X_2)$, тобто вибір з більш широкої множини буде ширшим	

1.8. Функції корисності

Для порівняння різних альтернатив і вибору найкращої з них також можна використовувати деяку кількісну міру їх властивостей, за значеннями якої можна порівняти альтернативи між собою й вибрати найкращу. У правилах (процедурах) прийняття рішень на основі цієї міри використовується теорія корисності, розроблена Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном. Математичною основою цієї теорії є система аксіом, у яких стверджується існування деякої міри цінності, що дає змогу впорядкувати альтернативи (результати рішень). Така міра називається *функцією корисності*, або *корисністю* результатів.

Практичне застосування теорії корисності ґрунтується на таких аксіомах:

1. Результат (альтернатива) x_i є кращою за альтернативу x_j (записується $x_i > x_j$) тоді і тільки тоді, коли $u(x_i) = f(x_i) > u(x_j)$, де $u(x_i)$ і $u(x_j)$ – значення корисності альтернатив x_i і x_j відповідно.

2.Якщо $x_i > x_j$, а $x_j > x_k$, то $x_i > x_k$, і $u(x_i) > u(x_k)$ (транзитивність).

3.Якщо x_1, x_2 – деякі альтернативи, то $u(x_1, x_2) = u(x_1) + u(x_2)$ (адитивність).

Аналогічно, коли є n результатів $x_1, x_2, \ldots x_n$, які досягаються одночасно, то

$$U(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_s(x).$$

Іншими словами, корисність кількох результатів, які досягаються одночасно, дорівнює сумі значень їх корисності.

Визначимо із застосуванням понять функції корисності (цільової функції) $f(x)$ такі відношення на множині альтернатив X :

– відношення слабкої (нестрогої) переваги «не гірше», яке позначається символом $\geq$;

– відношення рівноцінності, що позначається символом $\sim$;

– відношення строгої переваги, що позначається символом $>$.

О з н а ч е н н я 1.26. Для двох альтернатив x_1, x_2 можна стверджувати:

– $x_1 \geq x_2$ тоді і тільки тоді, якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$;

– $x_1 \sim x_2$ тоді і тільки тоді, коли $f(x_1) = f(x_2)$;

– $x_1 > x_2$ тоді і тільки тоді, якщо $f(x_1) > f(x_2)$.

Символи $\geq$ і $<$ при порівнянні значень цільових функцій для різних альтернатив беруться залежно від того, чи вважається кращою альтернатива при більшому або меншому значенні цільової функції.

Методику визначення корисності можливих результатів розроблено в посібнику [1].

Розглянемо кілька варіантів застосування цієї методики в різних ситуаціях.

І. Наявні тільки два результати.

У цьому разі методика обчислення корисності є такою:

1. Установлюють, який результат є кращим для особи, що приймає рішення. Припускають, що $x_1 > x_2$, тобто альтернатива x_1 є кращою, ніж альтернатива x_2.

2. Потім визначають таку ймовірність α, при якій досягнення результату x_1 буде еквівалентним результату x_2, отриманому з імовірністю 1.

3. Оцінюють співвідношення між значеннями корисності результатів x_1 і x_2.

Для цього вважають, що корисність $u(x_2)=1$, тоді $\alpha u(x_1)=u(x_2)$; $u(x_1)=\dfrac{1}{\alpha}$.

ІІ. Існує n можливих альтернатив $x_1, x_2, \ldots x_n$, між якими встановлено переваги: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$.

У цьому випадку методика визначення корисності така:

1. Визначають величину α_1 з умови, що $\alpha_1 u(x_1)=u(x_2)$.

2. Аналогічно обчислюють:

$$\alpha_2 u(x_2)=u(x_3);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-1} u(x_{n-1})=u(x_n).$$

3. Уважаючи, що корисність найменш переважного результату дорівнює 1, знаходять значення корисності для інших результатів:

$$u(x_n)=1;$$

$$u(x_{n-1})=\frac{1}{\alpha_{n-1}};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$u(x_1)=\frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1}.$$

III. Існують якісні критерії. При таких умовах маємо інформацію про переваги між окремими альтернативами та їх групами. Тоді може застосовуватися методика, побудована на алгоритмі, який запропонували Р. Акоф і Р. Черчмен [1].

Припустимо, що існує n альтернатив: $x_1, x_2, ... x_n$. Згідно з методикою визначення корисності передбачаються такі етапи:

1. Упорядковують усі альтернативи за зменшенням переваги. Нехай x_1 – альтернатива, що має найбільшу перевагу, а x_n – альтернатива, перевага якої найменша.

2. Складають таблицю можливих комбінацій результатів, що досягаються одночасно, і тоді встановлюють їх перевагу над окремими результатами $x_1, x_2, ... x_n$ (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

1	x_1 або $x_2 + x_3 + ... + x_n$	$n+1$	x_2 або $x_3 + x_4 + ... + x_{n-1}$
2	x_1 або $x_2 + x_3 + ... + x_{n-1}$	$n+2$	x_2 або $x_3 + x_4 + ... + x_{n-2}$
3	x_1 або $x_2 + x_3 + ... + x_{n-2}$	$n+3$	x_2 або $x_3 + x_4 + ... + x_{n-3}$
…	…	…	…
n	x_2 або $x_3 + x_4 + ... + x_n$	N	x_{n-2} або $x_{n-1} + x_n$

Інформацію про переваги результатів зазвичай отримують від експертів.

3. Приписують початкові оцінки корисності окремим результам $u_0(x_1), u_0(x_2), ... u_0(x_n)$. Потім початкові оцінки підставляють в останнє співвідношення табл. 1.2. Якщо воно задовольняється, то оцінки не змінюють.

У протилежному випадку проводять корекцію корисності так, щоб це співвідношення задовольнялося.

Після цього переходять до наступного співвідношення. Процес корекції триває доти, доки не утвориться система оцінок $u^*(x_1), u^*(x_2), ..., u^*(x_n)$, яка задовольнятиме всі перелічені в таблиці співвідношення. Корекцію належить проводити таким чином, щоб було необхідно змінювати мінімальну кількість оцінок результатів.

П р и к л а д 1.18. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, ... x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 7$; $u_0(x_2) = 4$; $u_0(x_3) = 2$; $u_0(x_4) = 1{,}5$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

1) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;

2) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4$;

3) $x_1 > x_2 + x_3 + x_5$;

4) $x_1 > x_2 + x_3$;

5) $x_2 < x_3 + x_4 + x_5$;

6) $x_2 > x_3 + x_4$;

7) $x_3 > x_4 + x_5$.

Потрібно оцінити корисність результатів так, щоб задовольнити всі нерівності.

Для розв'язування цієї задачі підставляємо початкові оцінки в нерівність 7, тобто

$$u_0\left(x_3\right) = 2 < u_0\left(x_4\right) + u_0\left(x_5\right) = 2{,}5.$$

Отже, нерівність 7 не задовольняється.

Змінимо корисність результату x_3 : $u_1\left(x_3\right) = 3$, і перевіримо нерівність 6.

Отже,

$$u_0\left(x_2\right) = 4 < u_1\left(x_3\right) + u_0\left(x_4\right) = 4{,}5.$$

Ця нерівність також не задовольняється.

Задамо, що $u_1\left(x_2\right) = 5$, тоді нерівність 5 задовольняється.

Звертаємося до нерівності 4:

$$u_0\left(x_1\right) = 7 < u_1\left(x_2\right) + u_1\left(x_3\right) = 8.$$

Вона не виконується, тому вважаємо, що $u_1\left(x_1\right) = 8{,}5$. Тепер нерівності 3, 2, 1 задовольняються. Перевіряємо ще раз нерівності 6 і 7 при змінених значеннях корисності альтернатив:

$$5 > 3 + 1{,}5,$$
$$3 > 1{,}5 + 1.$$

Таким чином, обидві нерівності виконуються.

Отже, випишемо остаточні оцінки корисності результатів:

$$u_1\left(x_1\right) = 8{,}5;\ u_1\left(x_2\right) = 5;\ u_1\left(x_3\right) = 3;\ u_1\left(x_4\right) = 1{,}5;\ u_1\left(x_5\right) = 1.$$

Зауважимо, що описану методику визначення корисності можна застосовувати, коли кількість результатів обмежена, а саме, $n < 6$ або 7.

У випадках, коли $n > 7$, запропоновано модифікований спосіб корекції оцінок [1].

Множину альтернатив розбивають на підмножини, що складаються з 5–7 альтернатив і мають один спільний результат, наприклад x_1. Потім приписують початкові значення корисності всім альтернативам, причому корисність спільного результату x_1 має бути однаковою у всіх підмножинах. Далі застосовують спосіб корекції оцінок корисності окремо до кожної з підмножин, ураховуючи обмеження $u(x_1)=\text{const}$. Унаслідок цього отримують систему корисності з єдиною мірою для всіх підмножин – $u(x_1)$.

Після того, як відповідно до описаної методики функцію корисності всіх альтернатив визначено, вирішальне правило вибору найкращої з них в умовах визначеності записується таким чином: знайти таку альтернативу x_0, щоб $f(x_0)=\max f(x)$.

Очевидно, що цільова функція, на основі якої проводиться вибір шуканої альтернативи, може бути побудована різними способами.

О з н а ч е н н я 1.27. Цільові функції $f(x_1)$ і $f(x_2)$, що характеризують одну й ту саму властивість рішення, яке вибирається, і є визначеними на одній множині допустимих альтернатив, називатимемо *еквівалентними*, якщо вони задають на ній одне й те саме відношення слабкої переваги, тобто коли для будь-яких двох альтернатив x_1 і x_2 з твердження $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$ випливає, що $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$, і навпаки, коли з твердження $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$ випливає, що $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$. Тут індекс f_i над знаком слабкої переваги вказує на функцію, за допомогою якої це відношення задано.

Із цього означення випливає, що еквівалентні цільові функції задають на множині X одні й ті самі відношення строгої переваги й еквівалентності. Доведена нижче проста теорема встановлює, які властивості повинні мати еквівалентні цільові функції [7].

Теорема 1.1. Для того щоб цільові функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ були еквівалентними, достатньо існування монотонного перетворення $w(z)$, здатного переводити область значень функції $f_2(x)$ в область значень функції $f_1(x)$, тобто $f_1(x)=w\left(f_2(x)\right)$ для всієї множини допустимих альтернатив. При цьому, якщо обидві цільові функції максимізувалися, то перетворення $w(z)$ має являти собою монотонно зростаючу функцію, а якщо ні, то $w(z)$ має бути монотонно спадною функцією.

Доведення

Розглянемо випадок, коли критерії максимізуються і перетворення $w(z)$ є монотонно зростаючим, оскільки інші випадки доводяться аналогічно. Тоді, якщо $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$, тобто $f_2(x_1) \geq f_2(x_2)$, то $w\left(f_2(x_1)\right) \geq w\left(f_2(x_2)\right)$. Отже, $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$.

Твердження $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$ випливає з того, що $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$ через монотонність оберненого перетворення.

Теорему доведено.

Наведемо приклади еквівалентних максимізованих цільових функцій:

$$f_1(x) = af_2(x) + b, \text{ де } a > 0,$$
$$f_1(x) = \ln f_2(x) + b, \text{ якщо } f_2(x) > 0.$$

Контрольні запитання

1. Дайте означення бінарного відношення.
2. Які існують способи задання відношень?
3. Яким чином можна задати відношення з допомогою матриці?
4. Як можна задати відношення у вигляді графа?
5. Яким чином задають відношення з допомогою розрізів?
6. Сформулюйте означення верхнього (нижнього) розрізу відношення.
7. Які із способів задання відношень можна використовувати на нескінченній множині елементів?
8. Які математичні операції виконують над відношеннями?
9. Яке відношення називається рефлексивним (антирефлексивним)?
10. Яке відношення називається симетричним, антисиметричним, асиметричним?
11. Які відношення називають транзитивними, сильно транзитивними, від'ємно транзитивними?
12. Як обчислюють транзитивне замикання відношення?
13. Які властивості характерні для відношення переваги?
14. Наведіть означення найкращого (найгіршого) елемента множини.
15. Який елемент множини називається мінімальним (максимальним) за певним відношенням переваги?
16. Яке значення в теорії прийняття рішень мають поняття найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів? Де вони використовуються?
17. Сформулюйте означення відношень еквівалентності, байдужості, переваги, домінування.
18. Як за певним відношенням нестрогої переваги побудувати відношення строгої переваги, байдужості, еквівалентності, що йому відповідають?
19. Що означає властивість зовнішньої та внутрішньої стійкості множини?
20. Дайте означення функції вибору.
21. Як можна побудувати функцію вибору за певним відношенням переваги?
22. Чи завжди за певною функцією вибору можна побудувати відношення переваги, що їй відповідає?
23. За якими властивостями класифікують функції вибору?
24. Наведіть приклади умов, за якими класифікують функції вибору.
25. Що означають умови наслідування, суматорності, Плотта?

Розділ 2

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ Й НЕЧІТКІ ВІДНОШЕННЯ

У цьому розділі можна ознайомитися з поняттями нечіткої множини й нечіткого відношення, їх властивостями та використанням у теорії прийняття рішень.

2.1. Поняття належності

Нехай E – деяка множина, A – її підмножина, тобто $A \subset E$, x – деякий елемент множини E, причому $x \in A$. Для опису цієї належності можна використовувати *характеристичну функцію* $\mu_A(x)$, значення якої свідчать про те, належить елемент x множині A чи ні, а саме:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

П р и к л а д 2.1. $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ і нехай $A = \{x_2, x_3, x_5\}$. Випишемо для кожного елемента множини E його ступінь належності множині A:

$$\mu_A(x_1) = 0,\ \mu_A(x_2) = 1,\ \mu_A(x_3) = 1,\ \mu_A(x_4) = 0,\ \mu_A(x_5) = 1.$$

Таким чином, усі елементи множини A можна подати через елементи множини E, супроводжуючи кожен з них значенням його ступеня належності:

$$A = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}.$$

П р и к л а д 2.2. Нехай множина $E = [0; 5]$, $A = [1; 2]$, тоді

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \in [0; 1) \cup (2; 5] \end{cases}$$

і множину A можна записати таким чином: $A = \{x \in E : \mu_A(x) = 1\}$.

Нехай $\overline{A}$ – доповнення множини A відносно E, тобто $\overline{A} \subset E$, $A \cup \overline{A} = E$ і $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Якщо $x \in A$, то $x \notin \overline{A}$, і ми можемо записати: якщо $\mu_A(x) = 1$, то $\mu_{\overline{A}}(x) = 0$.

При цих умовах для даних прикладу 2.1 одержимо такі значення ступеня належності елементів множини $\overline{A}$:

$$\mu_{\overline{A}}(x_1)=1,\ \mu_{\overline{A}}(x_2)=0,\ \mu_{\overline{A}}(x_3)=0,\ \mu_{\overline{A}}(x_4)=1,\ \mu_{\overline{A}}(x_5)=0,$$
$$\overline{A}=\{(x_1|1),(x_2|0),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0)\}.$$

Для умов прикладу 2.2
$$\mu_{\overline{A}}(x)=\begin{cases}1, x\in[0;1)\bigcup(2;5],\\ 0, x\in[1;2],\end{cases}$$

$$\overline{A}=\{x\in E, \mu_{\overline{A}}(x)=1\}.$$

Тепер розглянемо операції об'єднання й перетину множин, користуючись термінологією характеристичних функцій.

Візьмемо дві множини A і B, характеристичні функції яких мають вигляд

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}\qquad \mu_B(x)=\begin{cases}1, & x\in B,\\ 0, & x\notin B\end{cases}$$

відповідно.

Характеристичною функцією їх перетину буде функція $\mu_{A\cap B}(x)$, яку визначено за такими правилами:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1, & x\in A\bigcap B,\\ 0, & x\notin A\bigcap B.\end{cases}$$

Її можна записати у вигляді такої формули:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x),$$

або

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}.$$

Аналогічно для об’єднання множин $A\bigcup B$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, & x\in A\bigcap B,\\ 0, & x\notin A\bigcap B,\end{cases}$$

тобто $\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\oplus\mu_B(x)$, де $\oplus$ – булеве додавання, або $\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$.

П р и к л а д 2.3. Розглянемо множину $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ і дві її підмножини:

$$A=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\} \text{ і } B=\{(x_1|1),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}.$$

Знайдемо їх об'єднання й перетин:

$$A\cap B=\{(x_1|0),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\},$$
$$A\cup B=\{(x_1|1),(x_2|1),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\},$$

а також доповнення отриманих підмножин:

$$\overline{A\cap B}=\{(x_1|1),(x_2|1),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0)\},$$
$$\overline{A\cup B}=\{(x_1|0),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}.$$

2.2. Нечітка множина та пов'язана з нею термінологія

У всіх прикладах з попереднього підрозділу елементи множини E або належать, або не належать підмножині A і характеристична функція цієї підмножини набуває значення 0 або 1. Тепер припустимо, що вона може набувати будь-яких значень з інтервалу $[0;1]$. Згідно з цим припущенням елемент x множини E може не належати множині A, тоді: $\mu_A(x)=0$ може бути елементом A незначною мірою [коли величина $\mu_A(x)$ близька до 0]; може належати множині A більшою чи меншою мірою [коли величина $\mu_A(x)$ не дуже близька до 0 і до 1], являти собою елемент множини A значною мірою, при цьому $\mu_A(x)$ близьке до 1 або, нарешті, x може бути елементом множини A – і тоді $\mu_A(x)=1$. Таким чином, отримуємо узагальнення поняття належності, яке дає змогу ввести поняття нечіткої множини.

О з н а ч е н н я 2.1. Нехай E – деяка множина (у звичайному уявленні). *Нечіткою підмножиною* A в E назвемо сукупність пар такого вигляду: $(x,\mu_A(x))$, де $x\in E$, функція $\mu_A(x):E\to[0;1]$. При цьому $\mu_A(x)$ називається *функцією належності* нечіткої підмножини A.

Значення $\mu_A(x)$ цієї функції для конкретного елемента x називається *ступенем належності* цього елемента нечіткій підмножині A.

Позначаємо нечітку підмножину A, або $A\subset E$, коли ж ясно, що йдеться саме про нечіткі підмножини, то пишемо просто: $A\subset E$.

Належність елемента нечіткій підмножині позначається таким чином:

$$x \underset{0,2}{\in} A,\ \ y \underset{1}{\in} A,\ \ z \underset{0}{\in} A,$$

де $\underset{0}{\in}$ означає $\notin$, $\underset{1}{\in}$ еквівалентне $\in$.

П р и к л а д 2.4. Нехай $A = \{(x_1|0,2),(x_2|0),(x_3|0,3),(x_4|1),(x_5|0,5)\}$ – нечітка підмножина універсальної множини $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Це означає, що нечітка підмножина A містить елементи x_1, x_3 незначною мірою, x_2 не містить, повною мірою включає елемент x_4, а x_5 належить їй значною мірою.

Таким чином, є можливість створити математичну структуру, деякий об'єкт, що дає змогу оперувати відносно неповно визначеними елементами, належність яких певній підмножині тільки деякою мірою ієрархічно впорядкована.

Наведемо приклади подібних структур:

– множина *дуже високих* осіб у деякій множині людей;

– підмножина *темно-зелених* кольорів у множині всіх кольорів;

– підмножина чисел , які *приблизно дорівнюють* деякому дійсному числу;

– підмножина цілих чисел, *дуже близьких* до 0;

– якщо a – матеріальне число, а x – *невелике* додатне число, то числа $a + x$ утворюють нечітку підмножину в множині матеріальних чисел.

Зауважимо, що потрібно розрізняти ймовірність і нечіткість. Коли йдеться про ймовірність, то мають на увазі належність або неналежність елемента чіткій, цілком визначеній множині під впливом випадкових умов. Наприклад, з імовірністю p певний студент складе сесію на «відмінно», тобто буде належати до множини відмінників. Множина відмінників являє собою цілком визначену, чітку множину. Нечіткість же припускає, що саму множину не визначено повною мірою, тобто немає можливості встановити точно її межі. Прикладом такої множини є «множина людей, які гарно співають». Невизначеним тут є саме поняття «гарний спів». У наведених вище прикладах нечітких множин курсивом виділено елементи, що зумовлюють їх нечіткість. Насправді, одна й та сама людина може вважатися «дуже високою» і в той же час ні, оскільки немає можливості чітко визначити межу цієї множини, а формулювання «приблизно дорівнює» у кожній ситуації може розумітися по-різному.

Людина легко використовує поняття, які не можна чітко описати, і апарат нечітких множин призначено саме для того, щоб надати математичної форми якісним поняттям, формалізувати операції з такими поняттями.

Як випливає з означення 2.1, нечітка підмножина цілком описується своєю функцією належності, тому далі будемо інколи використовувати функцію належності для позначення нечіткої множини.

Звичайні множини утворюють підклас класу нечітких множин. Це ті множини, функції належності яких набувають значень тільки 0 або 1.

П р и к л а д 2.5. Розглянемо звичайну підмножину чисел $B=\left\{x \middle| \ 0 \le x \le 2\right\}$ і нечітку підмножину чисел $C=\left\{x \middle| \ \text{"}x \text{ близьке до 1"}\right\}$.

Графіки функцій належності цих множин зображено на рис. 2.1. Зауважимо, що вигляд функції належності μ_C нечіткої підмножини C залежить від сенсу, якого в конкретній ситуації набуває поняття «близький».

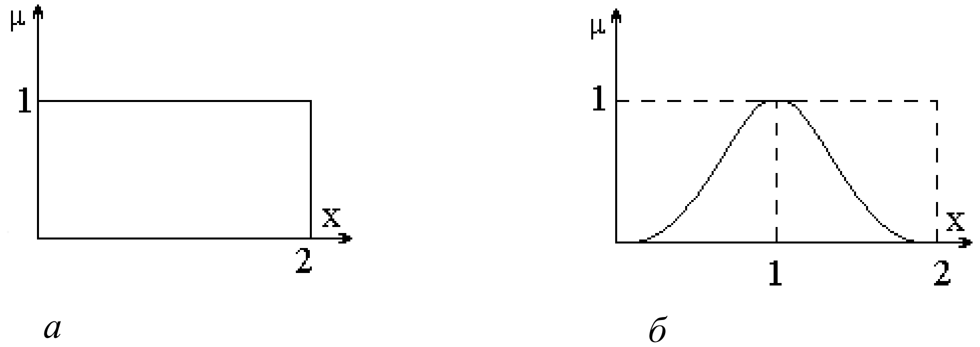


Рис. 2.1. Графіки функцій належності: a – звичайної множини B; $б$ –нечіткої підмножини C

Нечітка підмножина називається *порожньою*, якщо її функція належності дорівнює нулю на всій множині E, тобто

$$\mu_{\varnothing}(x)=0 \ \ \forall x \in E. \tag{2.1}$$

Універсальну множину E можна описати функцією належності такого вигляду:

$$\mu_E(x)=1 \ \forall x \in E. \tag{2.2}$$

О з н а ч е н н я 2.2. Носієм нечіткої підмножини A (позначається як supp$A$) з функцією належності $\mu_A(x)$ називається множина (у звичайному сенсі), що має такий вигляд:

$$\text{supp}A=\left\{x \middle| x \in E, \mu_A(x) \ge 0\right\}. \tag{2.3}$$

П р и к л а д 2.6. Нехай універсальна множина $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, її підмножина $A=\left\{(x_1|0,1),(x_2|0,3),(x_3|0,5),(x_4|0),(x_5|1)\right\}$.

Тоді $\text{supp}A=\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$.

О з н а ч е н н я 2.3. Нечітка підмножина A називається *нормальною*, якщо виконується така рівність: $\sup\limits_{x\in E}\mu_A(x)=1$. В іншому випадку нечітка підмножина називається *субнормальною*.

Наприклад, нечітка підмножина C з прикладу 2.2 – нормальна. Субнормальним часто буває перетин нечітких підмножин. Субнормальну нечітку множину A можна перетворити на нормальну (нормалізувати). Для цього потрібно поділити функцію належності цієї множини на величину $\sup\limits_{x\in A}\mu(x)$. Однак слід пам'ятати, що, застосовуючи таке перетворення в будь-якій задачі, необхідно чітко уявляти його «фізичний сенс».

О з н а ч е н н я 2.4. Нехай A і B нечіткі підмножини в множині E, а $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ – їх функції належності відповідно. Будемо казати, що A містить B (тобто $B\subset A$), якщо для будь-якого елемента $x\in E$ буде правильною така нерівність:

$$\mu_B(x)\le\mu_A(x). \tag{2.4}$$

Зауважимо, що якщо $B\subset A$, то $\mathrm{supp}B\subset\mathrm{supp}A$.

О з н а ч е н н я 2.5. Нехай задано універсальну множину $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$. Розглянемо дві її підмножини:

$$A=\{(x_1|0,2),(x_2|0,4),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0,5)\},$$
$$B=\{(x_1|0),(x_2|0,4),(x_3|0),(x_4|0,5),(x_5|0,2)\}.$$

Оскільки $\max\limits_{x\in A}\mu_A(x)=1$, нечітка підмножина A – нормальна; для множини B – $\max\limits_{x\in B}\mu_B(x)=0,5<1$, тому множина B – субнормальна. Крім того $B\subset A$, оскільки $\mu_B(x_i)\le\mu_A(x_i)\ \forall x_i\in E$.

П р и к л а д 2.7. Розглянемо нечіткі підмножини:
$A=\left\{x\middle|\ \text{"величина } x \text{ близька до 1"}\right\}$, $B=\left\{x\middle|\ \text{"величина } x \text{ дуже близька до 1"}\right\}$.

Ясно, що $B\subset A$, тоді функції належності цих підмножин мають задовольняти такій нерівності: $\mu_B(x)\le\mu_A(x)\ \forall x\in E$. Графічно ці функції можуть мати такий вигляд, як це зображено на рис. 2.2.

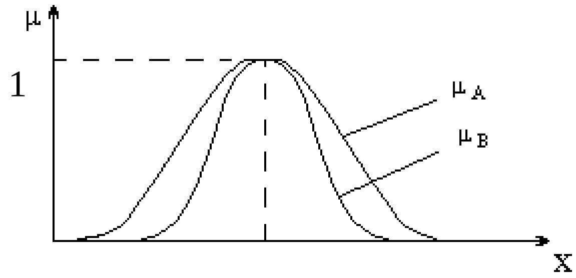


Рис. 2.2. Графіки функцій належності множин A і B $(B \subset A)$

2.3. Операції над нечіткими множинами

Оскільки нечіткі множини являють собою розширення класу звичайних, то до них можна застосовувати всі ті операції, що й до звичайних множин, у той же час існують і спеціальні, тільки їм властиві операції.

Розглянемо спочатку звичайні операції над нечіткими множинами та їх властивості.

У застосуванні до нечітких множин звичайні операції, наприклад об'єднання й перетин, можна визначити багатьма способами. Нижче розглянемо кілька з них. Вибір конкретного способу залежить від сенсу, якого операція набуває в межах поданої задачі. Але, оскільки звичайні множини являють собою підклас нечітких, природною вимогою до визначення цих операцій буде правильне їх виконання стосовно чітких множин.

О з н а ч е н н я 2.6. Об'єднанням нечітких підмножин A і B називається нечітка підмножина $A \bigcup B$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_{A\cup B}\left(x\right) = \max\left\{\mu_A\left(x\right), \mu_B\left(x\right)\right\},\ x \in E. \qquad (2.5)$$

Якщо $\left\{A_y\right\}$ являє собою скінченну або нескінченну сім'ю нечітких підмножин з функціями належності $\mu_{A_y}\left(x, y\right)$, де $y \in Y$ – параметр сім'ї, то об'єднання $C = \bigcap\limits_y A_y$ множин цієї сім'ї являє собою нечітку множину з такою функцією належності:

$$\mu_C\left(x\right) = \sup_{y\in Y} \mu_{A_y}\left(x, y\right),\ x \in X. \qquad (2.6)$$

Графічну інтерпретацію цього означення подано на рис. 2.3, де нечіткі підмножини A і B зображено графіками їх функцій належності, товста лінія відображає функцію належності об′єднання цих множин за означенням 2.6.

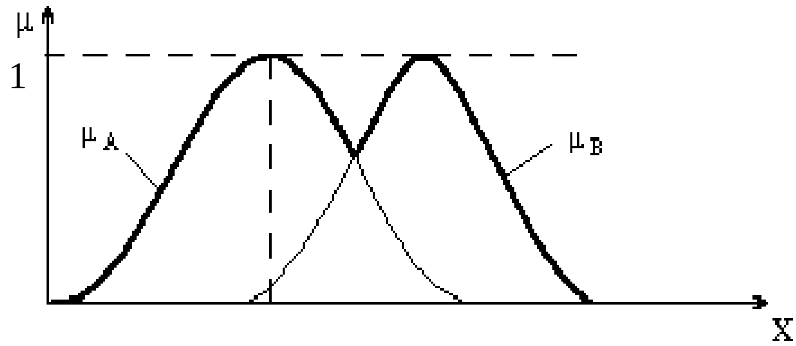


Рис. 2.3. Графік функції належності об'єднання нечітких множин A і B, коли $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $x \in E$

П р и к л а д 2.8. Нехай на універсальній множині $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ подано нечіткі множини $A = \{(x_1|1), (x_2|0,2), (x_3|0), (x_4|0,5), (x_5|0,8)\}$ і $B = \{(x_1|0), (x_2|0,5), (x_3|0,2), (x_4|0,2), (x_5|0)\}$. Знайти їх об'єднання.

Розв'язання

Згідно з означенням 2.6

$$A \cup B = \{(x_1|1), (x_2|0,5), (x_3|0,2), (x_4|0,5), (x_5|0,8)\}.$$

О з н а ч е н н я 2.6, *а*. Об'єднання нечітких підмножин A і B можна визначати також, використовуючи обмежену суму їх функцій належності:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1, \\ \mu_A(x) + \mu_B(x) \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Цю формулу інакше можна записати таким чином:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}. \quad (2.8)$$

Графічну інтерпретацію об'єднання за означенням 2.6, *а* нечітких підмножин A і B з функціями належності μ_A і μ_B відповідно зображено на рис. 2.4.

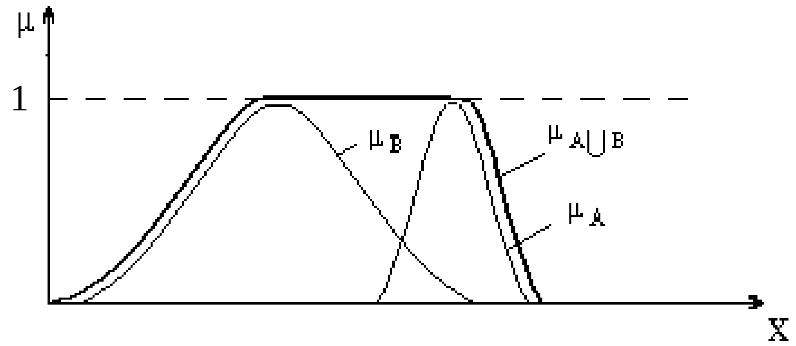


Рис. 2.4. Графік функції належності об’єднання нечітких множин A і B за означенням 2.6, *а*

П р и к л а д 2.9. Узявши підмножини з прикладу 2.8, знайдемо їх об’єднання за означенням 2.6, *а*. Отже,

$$A \cup B = \{(x_1|1),(x_2|0,7),(x_3|0,2),(x_4|0,7),(x_5|0,8)\}.$$

О з н а ч е н н я 2.6, *б*. Об'єднання нечітких множин можна знайти також через їх алгебричну суму, тобто об'єднання нечітких множин A і B являє собою нечітку множину з такою функцією належності:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x). \tag{2.9}$$

Графічне зображення функції належності об’єднання нечітких підмножин A і B за означенням 2.6, *б*, якщо їх функціями належності є $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ відповідно, подано на рис. 2.5.

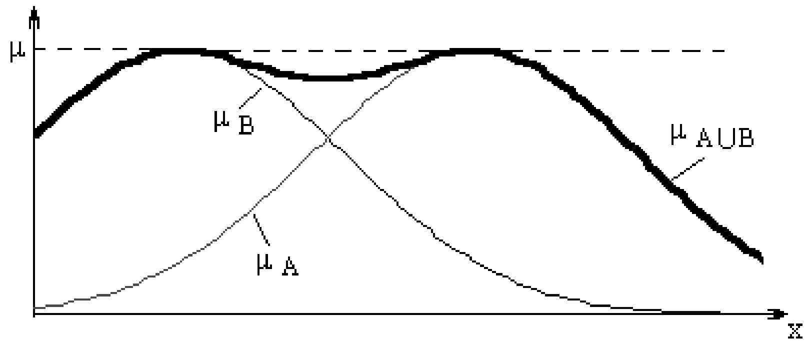


Рис. 2.5. Графік функції належності об’єднання нечітких множин A і B за означенням 2.6, *б*

П р и к л а д 2.10. Знайдемо об’єднання підмножин A і B з прикладу 2.8 за означенням 2.6, *б*. Отже,

$$A \cup B = \{(x_1|1), (x_2|0,6), (x_3|0,2), (x_4|0,6), (x_5|0,8)\}.$$

О з н а ч е н н я 2.7. Перетином нечітких підмножин A і B універсальної множини E називається нечітка підмножина з функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\,\mu_B(x)\},\ \ x\in E\,. \qquad (2.10)$$

Її графік зображено на рис. 2.6.

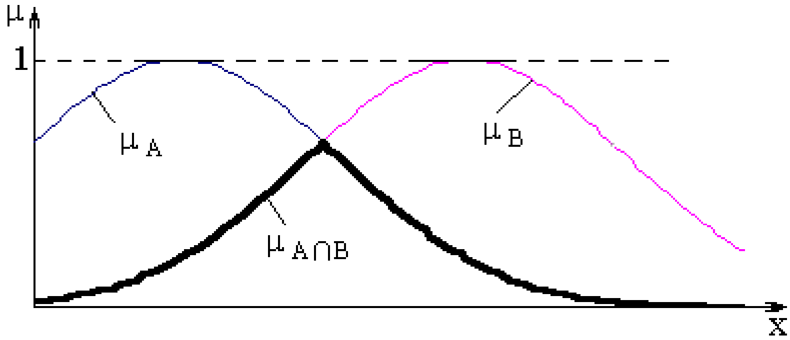


Рис. 2.6. Графік функції належності перетину нечітких множин A і B за означенням 2.7

П р и к л а д 2.11. Визначимо перетин $A\cap B$ нечітких підмножин A і B універсальної множини E, використовуючи означення 2.7, якщо

$E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,

$A=\{(x_1|1),(x_2|0,4),(x_3|0),(x_4|0,7),(x_5|0,8)\}$,

$B=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0,2),(x_4|0,4),(x_5|0)\}$.

Отже, $A\cap B=\{(x_1|0),(x_2|0,4),(x_3|0),(x_4|0,4),(x_5|0)\}$.

Якщо A_y – скінченна або нескінченна сім'я нечітких підмножин, що характеризується функціями належності $\mu_{A_y}(x,y)$, де $y\in Y$ – параметр сім'ї, то перетин $C=\bigcap\limits_y A_y$ її множин являє собою нечітку множину, функція належності якої має вигляд

$$\mu_C(x)=\inf_{y\in Y}\mu_{A_y}(x,y),\ \ x\in E\,. \qquad (2.11)$$

Перетин нечітких підмножин можна визначити також іншим способом.

О з н а ч е н н я 2.7, *а*. Перетин нечітких підмножин A та B – це обмежений добуток їх функцій належності, тобто

$$\mu_{A\cap B}(x)=\max\{0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1\}. \qquad (2.12)$$

Графічну інтерпретацію такого перетину бачимо на рис. 2.7. Тут $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ відображають функції належності нечітких підмножин A та B відповідно. Товстою лінією зображено функцію належності перетину A і B.

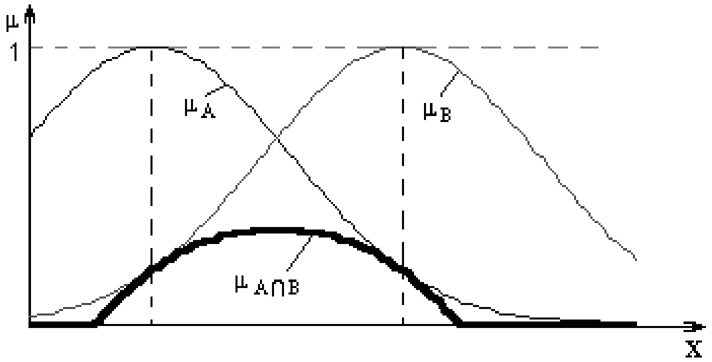


Рис. 2.7. Графік функції належності перетину нечітких множин за означенням 2.7, *а*

Ще одне означення перетину можна сформулювати, використовуючи алгебричний добуток їх функцій належності.

О з н а ч е н н я 2.7, *б*. Перетином нечітких множин A і B назвемо нечітку множину, функція належності якої дорівнює алгебричному добутку функцій належності цих множин, тобто

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x). \tag{2.13}$$

Графіки функцій належності $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ нечітких множин A і B та їх перетину за означенням 2.7, *б* зображено на рис. 2.8. Товста лінія графіка відповідає функції належності перетину.

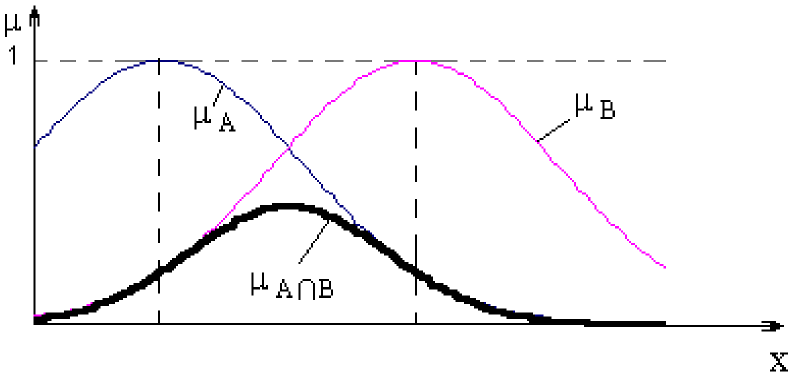


Рис. 2.8. Графік функції належності перетину нечітких множин A і B за означенням 2.7, *б*

П р и к л а д 2.12. Знайдемо перетин нечітких підмножин A і B, якщо $A\subset E$, $B\subset E$, $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,

$$A = \{(x_1|1),(x_2|0,4),(x_3|0),(x_4|0,7),(x_5|0,8)\},$$
$$B = \{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0,2),(x_4|0,4),(x_5|0)\}.$$

Тоді за означенням 2.7

$$A \cap B = \{(x_1|0),(x_2|0,4),(x_3|0),(x_4|0,1),(x_5|0)\},$$

а за означенням 2.7, *б*

$$A \cap B = \{(x_1|0),(x_2|0,4),(x_3|0),(x_4|0,28),(x_5|0)\}.$$

О з н а ч е н н я 2.8. Доповненням нечіткої множини A в E називається нечітка множина $\overline{A}$, що характеризується такою функцією:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),\ x \in E. \quad (2.14)$$

Зазначимо, що властивість $A \cap \overline{A} = \varnothing$, яка при всіх умовах виконується для звичайних множин, не завжди є правильною стосовно нечітких множин.

Наприклад, якщо доповнення нечіткої множини визначити, як описано вище, а перетин обчислити за правилом 2.7 або 2.7, *б*, то $A \cap \overline{A} = \varnothing$, але при обчисленні перетину за правилом 2.7, *а* рівність $A \cap \overline{A} = \varnothing$ буде правильною. Який саме варіант перетину та об'єднання використовувати, вирішує дослідник залежно від того, які властивості операцій є істотними для розв'язуваної задачі.

П р и к л а д 2.13. Розглянемо таку нечітку підмножину: $A = \{$числа, що значно більші за $0\}$, її функцію належності зображено на рис. 2.9 суцільною кривою. Доповненням множини A буде нечітка множина чисел, які не набагато перевищують нуль. Цій множині відповідає функція належності, графік якої зображено на рис. 2.9 пунктирною лінією.

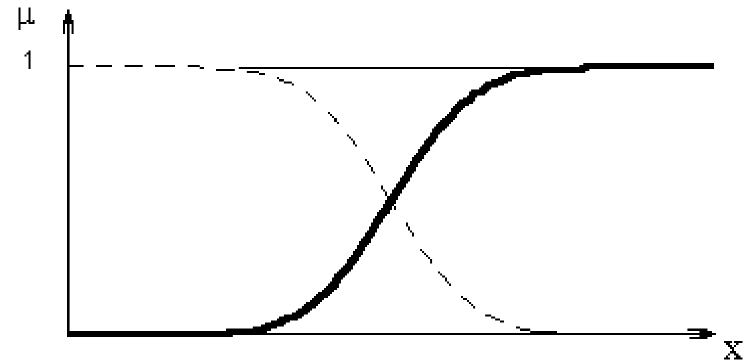


Рис. 2.9. Графіки функцій належності нечіткої множини A та її доповнення (до прикладу 2.13)

Непорожній перетин множин A і $\overline{A}$ у цьому прикладі являє собою нечітку множину чисел, які «значно більші від нуля і не набагато перевищують нуль» одночасно. Непорожність цієї нечіткої множини відображає той факт, що саме поняття «бути значно більшим» описано нечітко, тому деякі числа можуть певною мірою належати одночасно обом множинам. У деякому сенсі цей перетин можемо вважати «нечіткою межею» між множинами A і $\overline{A}$.

О з н а ч е н н я 2.9. Різницею підмножин A і B універсальної множини E назвемо нечітку множину $A \setminus B$, що характеризується такою функцією належності:

$$\mu_{A\setminus B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), \text{ якщо } \mu_A(x) \ge \mu_B(x), \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \tag{2.15}$$

тобто

$$\mu_{A\setminus B}(x) = \max\{\mu_A(x) - \mu_B(x), 0\}. \tag{2.16}$$

Знайдемо різницю нечітких підмножин A і B, якщо $A \subset E,\ B \subset E$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$$A = \{(x_1|1), (x_2|0,4), (x_3|0), (x_4|0,7), (x_5|0,8)\},$$
$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0,2), (x_4|0,4), (x_5|0)\},$$

Тоді за означенням 2.9

$$A \setminus B = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|0,3), (x_5|0,8)\}.$$

2.4. Відстань між нечіткими підмножинами

Відстань Хеммінга. Спочатку згадаємо поняття відстані Хеммінга у застосуванні до звичайних підмножин.

Нехай A і B – дві звичайні підмножини скінченної множини $E = \{x_1, ..., x_7\}$, причому

$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|1)\},$$
$$A = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|0)\}.$$

Під *відстанню Хеммінга* між A і B розуміють таку величину:

$$d\left(A,B\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A\left(x_i\right)-\mu_B\left(x_i\right)\right|. \qquad (2.17)$$

У цьому прикладі

$$d\left(A,B\right)=\left|1-0\right|+\left|0-1\right|+\left|0-0\right|+\left|1-0\right|+\left|0-0\right|+\left|1-1\right|+\left|0-1\right|=4.$$

Відстань Хеммінга задовольняє всі аксіоми метрики, а саме:

1) $d\left(X,Y\right)\geq 0$;

2) $d\left(X,Y\right)=d\left(Y,X\right)$;

3) $d\left(X,Z\right)\leq d\left(X,Y\right)+d\left(Y,Z\right)$;

4) $d\left(X,X\right)=0$.

З а в д а н н я. Перевірити виконання цих аксіом щодо відстані Хеммінга.

Для скінченної множини E, потужність якої $m\left(E\right)=n$ (тобто n – кількість елементів множини E), визначимо також відносну відстань Хеммінга таким чином:

$$\delta\left(A,B\right)=\left(\frac{1}{n}\right)d\left(A,B\right). \qquad (2.18)$$

Для підмножин A і B маємо $\delta\left(A,B\right)=\dfrac{1}{7}d\left(A,B\right)=\dfrac{4}{7}$.

Очевидно, що завжди $0\leq\delta\left(A,B\right)\leq 1$.

Узагальнення поняття відстані Хеммінга

Розглянемо тепер три нечіткі підмножини $A,B,C\subset E$, де E – скінченна множина потужністю n:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots x_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_n \end{pmatrix}, \qquad (2.19)$$

$$B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots x_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots b_n \end{pmatrix}, \qquad (2.20)$$

$$C=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots x_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots c_n \end{pmatrix}. \qquad (2.21)$$

Припустимо, що визначили відстань $D\left(a_i,b_i\right)$ між a_i і b_i, $i=\overline{1,n}$, а також між $\left(b_i,c_i\right)$ і $\left(a_i,c_i\right)$, $i=\overline{1,n}$. Ці відстані будуть відповідати таким нерівностям:

$$D(a_i, c_i) \le D(a_i, b_i) + D(b_i, c_i), \forall i = 1, 2, \dots, n. \qquad (2.22)$$

Крім того, можна записати

$$\sum_{i=1}^{n} D(a_i, c_i) \le \sum_{i=1}^{n} D(a_i, b_i) + \sum_{i=1}^{n} D(b_i, c_i), \qquad (2.23)$$

а

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(a_i, c_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(a_i, b_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(b_i, c_i)}. \qquad (2.24)$$

Ці дві формули дають дві оцінки відстані між підмножинами, зокрема вираз (2.23) дає лінійну оцінку, а (2.24) – квадратичну.

Розглянемо випадок, коли функції належності нечітких підмножин набувають своїх значень в інтервалі $[0;1]$, тобто, коли у виразах (2.19)–(2.21) величини $a_i, b_i, c_i \in [0;1]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Припустимо, що $D(a_i, b_i) = |a_i - b_i|$, $D(b_i, c_i) = |b_i - c_i|$, $D(a_i, c_i) = |a_i - c_i|$. Визначимо два типи відстаней.

О з н а ч е н н я 2.10. Узагальнена відстань Хеммінга, або *лінійна відстань*, обчислюється за такою формулою:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|. \qquad (2.25)$$

Очевидно, що

$$0 \le d(A, B) \le n. \qquad (2.26)$$

О з н а ч е н н я 2.11. *Евклідову*, або *квадратичну*, відстань розраховують у такий спосіб:

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}. \qquad (2.27)$$

Ця відстань задовольняє таку умову:

$$0 \le e(A, B) \le \sqrt{n}. \qquad (2.28)$$

Визначимо також відносні відстані.

Узагальнена відносна відстань Хеммінга

$$\delta(A, B) = \frac{d(A, B)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, \qquad (2.29)$$

для якої буде правильною нерівність $0 \le \delta(A, B) \le 1$.

Відносна евклідова відстань

$$\varepsilon(A,B)=\frac{e(A,B)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right)^2},\ 0\le\varepsilon(A,B)\le 1. \tag{2.30}$$

Вибір тієї чи іншої відстані залежить від природи проблеми, про яку йдеться. Кожна з цих відстаней має свої переваги й недоліки, які стають зрозумілими при їх застосуванні. Очевидно, що можна задати й інші відстані.

П р и к л а д 2.14. Визначити відстань між такими нечіткими множинами:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0,7 & 0,2 & 0 & 0,6 & 0,5 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$d(A,B)=|0,7-0,2|+|0,2-0|+|0-0|+|0,6-0,6|+|0,5-0,8|+|1-0,4|+|0-1|=$$
$$=0,5+0,2+0,3+0,6+1=2,6;$$
$$\delta(A,B)=\frac{1}{7}d(A,B)=\frac{2,6}{7}=0,37;$$
$$e(A,B)=\sqrt{(0,7-0,2)^2+(0,2-0)^2+(0-0)^2+(0,6-0,6)^2+(0,5-0,8)^2+(1-0,4)^2+(0-1)^2}=$$
$$=\sqrt{(0,5)^2+(0,2)^2+(-0,3)^2+(0,6)^2+(-1)^2}=\sqrt{0,25+0,04+0,09+0,36+1}=\sqrt{1,74}=1,32;$$
$$e(A,B)=1,32;$$
$$\varepsilon(A,B)=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot 1,32=0,49.$$

Відстані $d(A,B)$, $e(A,B)$ можуть бути визначені й тоді, коли універсальна множина є нескінченною (лічильна або ні), якщо відповідні суми й інтеграли збігаються. Якщо множина E – лічильна, то

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|, \tag{2.31}$$
$$e(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right)^2}, \tag{2.32}$$

коли ці ряди збігаються.

Якщо $E=R$, то

$$d(A,B)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mu_A(x)-\mu_B(x)\right|dx \qquad (2.33)$$

і

$$e(A,B)=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mu_A(x)-\mu_B(x)\right)^2 dx}\,, \qquad (2.34)$$

коли інтеграли збігаються.

Якщо ж $E\subset R$ обмежена зверху й знизу, то відповідні інтеграли завжди збігаються, а відстані $d(A,B)$ і $e(A,B)$ будуть скінченними. Тоді можна також визначити відносні відстані:

$$\delta(A,B)=\frac{d(A,B)}{\beta-\alpha}, \qquad (2.35)$$

$$\varepsilon(A,B)=\frac{e(A,B)}{\beta-\alpha}, \qquad (2.36)$$

де $d(A,B)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|\mu_A(x)-\mu_B(x)\right|dx$ і $e(A,B)=\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta}\left(\mu_A(x)-\mu_B(x)\right)^2 dx}$.

Розглянемо на прикладі геометричну інтерпретацію поняття відстані між нечіткими множинами. Нехай множини A і B являють собою підмножини універсальної множини $E\in R^1$, $E=[\alpha,\beta]$, а графіки їх функцій належності $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ зображено на рис. 2.10. Тоді лінійна відстань між цими множинами відповідає площі заштрихованої фігури, обмеженої кривими функцій $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$.

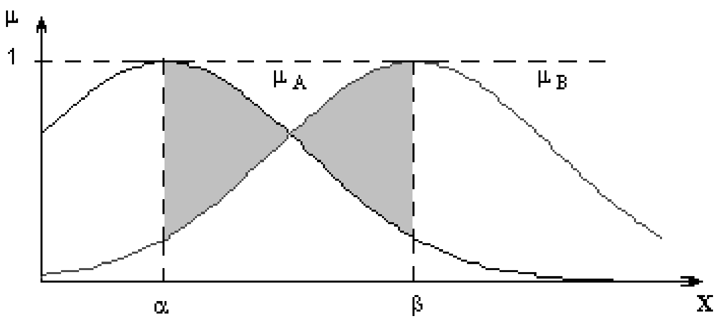


Рис. 2.10. Геометрична інтерпретація лінійної відстані між нечіткими множинами

2.5. Звичайна підмножина, найближча до нечіткої. Індекс нечіткості

Виникає запитання, яка звичайна підмножина (або підмножини) перебуває на найменшій евклідовій відстані від певної нечіткої множини A. Легко бачити, що це буде звичайна підмножина (вона позначається $\underline{A}$), для якої

$$\mu_{\underline{A}}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } \mu_A(x_i)<0{,}5,\\ 1, \text{ якщо } \mu_A(x_i)>0{,}5,\\ 0 \text{ або } 1, \text{ якщо } \mu_A(x_i)=0{,}5.\end{cases} \tag{2.37}$$

Для уникнення неточності задамо, що $\mu_{\underline{A}}(x_i)=0$, коли $\mu_A(x_i)=0{,}5$. Отже, можна сформулювати означення.

О з н а ч е н н я 2.12. *Найближчою* до нечіткої множини A звичайною множиною називається множина $\underline{A}$, що характеризується такою функцією належності:

$$\mu_{\underline{A}}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } \mu_A(x_i)\le 0{,}5,\\ 1, \text{ якщо } \mu_A(x_i)>0{,}5.\end{cases} \tag{2.38}$$

П р и к л а д 2.15. Нехай $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$, $A\subset E$ і $A=\{(x_1|0,2),(x_2|0,8),(x_3|0,5),(x_4|0,3),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|0,9),(x_8|0,4)\}$.

Найближчою до множини A звичайною множиною буде така:

$$\underline{A}=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|1),(x_8|0)\}.$$

Використовуючи введені раніше поняття відстаней для нечітких підмножин, визначимо два *індекси нечіткості*.

Лінійний індекс нечіткості визначається через узагальнену відносну відстань Хеммінга таким чином:

$$\nu(A)=\frac{2}{n}d(A,\underline{A}). \tag{2.39}$$

Квадратичний індекс нечіткості визначається через відносну евклідову відстань, а саме:

$$\eta(A) = \frac{2}{\sqrt{n}} e(A, \underline{A}). \tag{2.40}$$

Множник 2 у чисельнику введено для того, щоб забезпечити утримання індексу нечіткості в таких межах:

$$0 \le \nu(A, \underline{A}) \le 1, \tag{2.41}$$

$$0 \le \eta(A, \underline{A}) \le 1. \tag{2.42}$$

Якщо $E = [a, b] \subset R$, то лінійний індекс нечіткості обчислюють за такою формулою:

$$\nu(A, B) = \frac{2}{b-a} \int_a^b \left| \mu_A(x) - \mu_{\underline{A}}(x) \right| dx. \tag{2.43}$$

Геометричну інтерпретацію найближчої звичайної множини та індексу нечіткості бачимо на рис. 2.11. Тут товста лінія показує функцію належності найближчої звичайної множини $\underline{A}$ до нечіткої множини A, що описується функцією належності μ_A. Лінійний індекс нечіткості відповідає нормалізованій площі заштрихованої фігури.

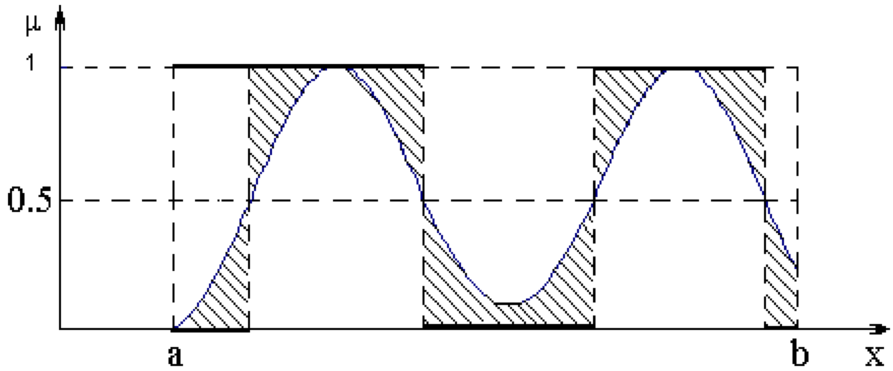


Рис. 2.11. Геометрична інтерпретація індексу нечіткості

Індекси нечіткості можна також визначити іншим способом:

$$\nu(A) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \min\left(\mu_A(x_i), \mu_{\bar{A}}(x_i) \right), \tag{2.44}$$

$$\eta(A) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \min\left\{ \mu_A^2(x_i), \mu_{\bar{A}}^2(x_i) \right\}}. \tag{2.45}$$

Дійсно, для будь-якого елемента $x_i \in E$

$$\left|\mu_A(x_i)-\mu_{\overline{A}}(x_i)\right|=\mu_{A\cap\overline{A}}(x_i). \quad (2.46)$$

Тоді формулу (2.39) для обчислення лінійного індексу нечіткості можна переписати в зручному вигляді, а саме:

$$\nu(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{A\cap\overline{A}}(x_i). \quad (2.47)$$

З цього виразу стає очевидним, що $\nu(A)=\nu(\overline{A})$.

П р и к л а д 2.16. Нехай $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$, $A\subset E$,

$$A=\{(x_1|0,2),(x_2|0,8),(x_3|0,5),(x_4|0,3),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|0,9),(x_8|0,4)\},$$

$$\overline{A}=\{(x_1|0,8),(x_2|0,2),(x_3|0,5),(x_4|0,7),(x_5|0),(x_6|1),(x_7|0,1),(x_8|0,6)\}.$$

Обчислимо індекс нечіткості множини A. Для цього спочатку визначимо перетин наведених вище множин:

$$A\cap\overline{A}=\{(x_1|0,2),(x_2|0,2),(x_3|0,5),(x_4|0,3),(x_5|0),(x_6|0),(x_7|0,1),(x_8|0,4)\}.$$

Тепер обчислимо лінійний індекс нечіткості:

$$\nu(A)=\frac{2}{8}(0,2+0,2+0,5+0,3+0+0+0,1+0,4)=0,425.$$

Нехай A і B – дві нечіткі підмножини E. З'ясуємо, як співвідносяться індекси нечіткості перетину $A\cap B$ та об'єднання $A\cup B$ цих нечітких підмножин з індексами нечіткості вихідних підмножин.

Розглянемо приклади.

П р и к л а д 2.17. Нехай $E=\{x_1,x_2,x_3\}$, $A=\{(x_1|0,2),(x_2|0,6),(x_3|0,1)\}$, $B=\{(x_1|0,6),(x_2|0,3),(x_3|0,8)\}$. Обчислимо індекси нечіткості вихідних множин та їх перетину:

$$\overline{A}=\{(x_1|0,8),(x_2|0,4),(x_3|0,9)\}, \qquad \nu(A)=\frac{2}{3}(0,2+0,4+0,1)\approx 0,46;$$

$$\overline{B}=\{(x_1|0,4),(x_2|0,7),(x_3|0,2)\}, \qquad \nu(B)=\frac{2}{3}(0,4+0,3+0,2)\approx 0,6;$$

$$A\cap B=\{(x_1|0,2),(x_2|0,3),(x_3|0,1)\}, \qquad \overline{A\cap B}=\{(x_1|0,8),(x_2|0,7),(x_3|0,9)\},$$

$$\nu\left(A\cap B\right)=\frac{2}{3}\left(0,2+0,3+0,1\right)\approx 0,4.$$

Очевидно, що в цьому випадку індекс нечіткості перетину менший за індекси нечіткості вихідних підмножин.

П р и к л а д 2.18. Нехай $E=\{x_1,x_2,x_3\}$, $A^{'}=\{(x_1|0,8),(x_2|0,6),(x_3|0,8)\}$, $B^{'}=\{(x_1|0,4),(x_2|0,7),(x_3|0,2)\}$. Обчислимо індекси нечіткості цих множин та їх перетину:

$$\overline{A}^{'}=\{(x_1|0,2),(x_2|0,4),(x_3|0,2)\},\qquad \nu\left(A^{'}\right)=\frac{2}{3}\left(0,2+0,4+0,2\right)\approx 0,53;$$

$$\overline{B}^{'}=\{(x_1|0,6),(x_2|0,3),(x_3|0,8)\},\qquad \nu\left(B^{'}\right)=\frac{2}{3}\left(0,4+0,3+0,2\right)\approx 0,60;$$

$$A^{'}\cap B^{'}=\{(x_1|0,4),(x_2|0,6),(x_3|0,2)\},\ \overline{A^{'}\cap B^{'}}=\{(x_1|0,6),(x_2|0,4),(x_3|0,8)\},$$

$$\nu\left(A^{'}\cap B^{'}\right)=\frac{2}{3}\left(0,4+0,4+0,2\right)\approx 0,66.$$

У цьому прикладі індекс нечіткості перетину більший за індекси нечіткості вихідних підмножин. Таким чином, бачимо, що індекс нечіткості перетину підмножин A і B може бути як меншим, так і більшим від індексів нечіткості вихідних підмножин. Те саме можна сказати і про об′єднання нечітких підмножин. Сформульоване твердження буде правильним також і для квадратичного індексу нечіткості.

2.6. Звичайна підмножина α-рівня нечіткої множини

О з н а ч е н н я 2.13. Нехай $\alpha\in[0;1]$. Підмножиною α-рівня нечіткої підмножини A (позначається A_α) будемо називати звичайну множину, яка містить тільки ті елементи множини A, функція належності яких є не меншою за α, тобто

$$A_\alpha=\{x|\mu_A(x)\ge\alpha\}. \tag{2.48}$$

П р и к л а д 2.19. Нехай нечітку множину A задано в такому вигляді:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0,8 & 0,1 & 1 & 0,3 & 0,6 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Визначимо множини рівня $0,3$ і $0,5$ цієї нечіткої підмножини:

$$A_{0,3} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{0,3} = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\},$$

$$A_{0,5} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{0,5} = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}.$$

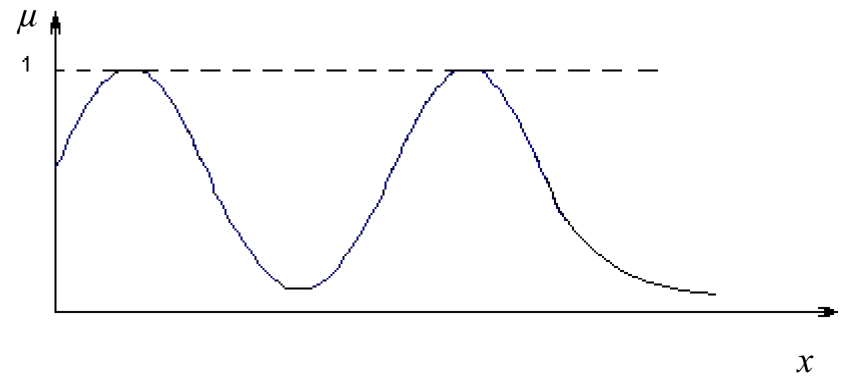
П р и к л а д 2.20. Нехай універсальна множина $X = \{1, 2, ..., 6\}$, а функцію належності нечіткої множини $A \subset X$ подано таблицею:

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1

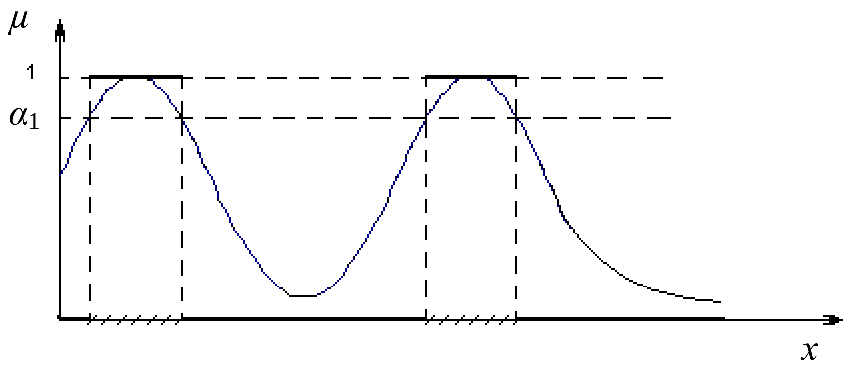
Тоді для множини A можна виписати такі множини рівня:

$$A_{0,1} = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad A_{0,3} = \{2,3,4,5,6\},$$
$$A_{0,5} = \{3,4,5,6\}, \qquad A_{0,7} = \{4,5,6\},$$
$$A_{0,9} = \{5,6\}, \qquad A_1 = \{6\}.$$

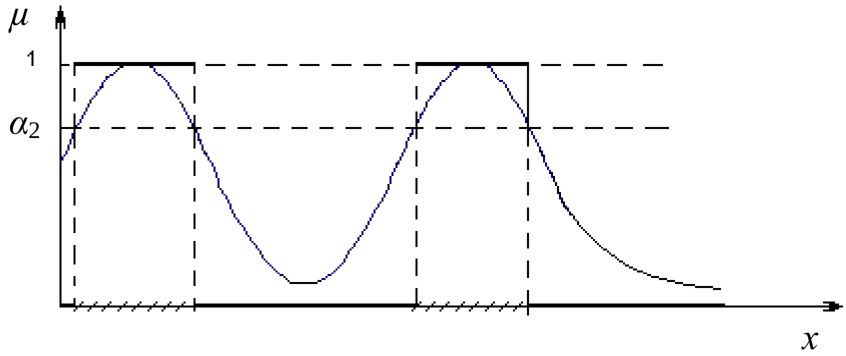
П р и к л а д 2.21. Нехай $X = R^+$, графік функції належності μ_A нечіткої множини A зображено на рис. 2.12, *а*. Множини рівня α_1 і α_2 та графіки їх функцій належності зображено на рис. 2.12, *б*, *в*.



а



б



в

Рис. 2.12. Графіки множин рівня та їх співвідношення

Як видно з цих прикладів, для будь-яких значень α_1 і α_2, що задовольняють такі умови: $0<\alpha_1\le 1$, $0<\alpha_2\le 1$ і $\alpha_2<\alpha_1$, відповідні множини рівня A_{α_1} і A_{α_2} будуть зв'язані таким співвідношенням: $A_{\alpha_1}\subset A_{\alpha_2}$.

Множинами рівня зручно користуватися для формулювання й аналізу деяких задач прийняття рішень, ми також будемо їх застосовувати при розв'язуванні задач нечіткого математичного програмування.

Нехай $(A\bigcup B)_\alpha$ і $(A\bigcap B)_\alpha$ являють собою множини α-рівня об'єднання й перетину нечітких множин A і B відповідно. Розглянемо їх зв'язок з множинами рівня A_α і B_α вихідних множин. Якщо для операцій перетину й об'єднання використати означення 2.6 і 2.7 відповідно, то цей зв'язок буде таким:

$$(A\bigcup B)_\alpha = A_\alpha\bigcup B_\alpha,\qquad (A\bigcap B)_\alpha = A_\alpha\bigcap B_\alpha.$$

При використанні означень 2.6, *б* і 2.7, *а* буде правильним лише включення, тобто

$$(A\bigcup B)_\alpha \supset A_\alpha\bigcup B_\alpha,\qquad (A\bigcap B)_\alpha \subset A_\alpha\bigcap B_\alpha.$$

Для нечітких підмножин буде мати місце сформульована нижче теорема про декомпозицію.

Теорема 2.1. Будь-яку нечітку підмножину А можна розкласти на множини рівня, тобто подати її в такому вигляді:

$$A=\bigcup_\alpha \alpha A_\alpha, \tag{2.49}$$

причому функція належності множини αA_α: $\mu_{\alpha A_\alpha}=\alpha\mu_{A_\alpha}(x)$, об'єднання нечітких множин виконується за всіма значеннями $\alpha\in[0;1]$, а функцію належності множини рівня α задано таким чином:

$$\mu_{A_\alpha}(x)=\begin{cases}1, \mu_A(x)\ge\alpha,\\0, \mu_A(x)<\alpha.\end{cases}$$

П р и к л а д 2.22. Для множини A та її множин рівня з прикладу 2.20 можна записати, що

$$A=0{,}1\{1,2,3,4,5,6\}\bigcup 0{,}3\{2,3,4,5,6\}\bigcup 0{,}5\{3,4,5,6\}\bigcup 0{,}7\{4,5,6\}\bigcup 0{,}8\{5,6\}\bigcup 1\{6\}.$$

Формула розкладання буде правильною й тоді, коли універсальна множина має потужність континуума.

П р и к л а д 2.23. Нехай нечітку множину $A\subset R^+$ задано її функцією належності: $\mu_A(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2}, x\in R^+$. Розглянувши відрізок $[\alpha;1]$, де $0<\alpha\le 1$, можемо зробити такий висновок:

$$\mu_{A_\alpha}(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } \mu_A(x)\in[\alpha;1],\\0, \text{ якщо } \mu_A(x)\bar{\in}[\alpha;1].\end{cases}$$

Отже, у цьому прикладі

$$\mu_{A_\alpha}(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\ge\sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}},\\0, \text{ якщо } x<\sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}.\end{cases}$$

Теорему про декомпозицію можна застосувати не тільки для аналізу, але й для синтезу нечітких множин.

Розглянемо послідовність звичайних підмножин $A_1\subset A_2\subset A_3...\subset A_n$ і задамо значення α_1 для множини A_1, α_2 для множини A_2 і т. д., α_n для A_n, причому $\alpha_1>\alpha_2>...>\alpha_n$, тоді, використовуючи формулу (2.49), одержимо нечітку підмножину A.

П р и к л а д 2.24. Нехай задано звичайну множину

$$X=\{x_1,x_3,...,x_{10}\}$$

та її підмножини

$$A_1=\{x_1,x_4,x_5,x_7,x_9\},$$

$$A_2 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\},$$
$$A_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\},$$
$$A_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\},$$
а також визначено числа $\alpha_1 = 0,9,\ \alpha_2 = 0,5,\ \alpha_3 = 0,4,\ \alpha_4 = 0,1$.

Використавши формулу (2.49), отримаємо нечітку множину A. Побудуємо спочатку множини $\alpha_i A_i$ за такою формулою:

$$\mu_{\alpha_i A_i}(x_j) = \alpha_i \mu_{A_i}(x_j) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{якщо } x_j \in A_i, \\ 0, & \text{якщо } x_j \overline{\in} A_i. \end{cases}$$

Тоді отримаємо такі підмножини:

$$\alpha_1 A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 0,9 & 0 & 0 & 0,9 & 0,9 & 0 & 0,9 & 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_2 A_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 A_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 0,4 & 0,4 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_4 A_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Об'єднавши ці нечіткі множини, отримаємо шукану нечітку множину, тобто

$$A = \bigcup_{\alpha_i} \alpha_i A_i,$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 0,9 & 0,4 & 0 & 0,9 & 0,9 & 0,5 & 0,9 & 0 & 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

2.7. Спеціальні операції над нечіткими множинами

Уже було розглянуто операції над нечіткими множинами, які є подібними до операцій зі звичайними множинами. Але, будучи новою структурою, нечіткі множини мають і нові властивості, а тому стосовно них можуть бути введені нові операції, які не мають сенсу для звичайних множин.

Визначимо спочатку декартів добуток нечітких множин.

О з н а ч е н н я 2.14. *Декартовим добутком* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ нечітких множин $A_i \subset X_i,\ i = 1, \ldots, n$ буде нечітка множина A у декартовому добутку $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \min\left\{\mu_{A_1}(x_1),...,\mu_{A_n}(x_n)\right\}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X. \tag{2.50}$$

П р и к л а д 2.25. Визначимо декартів добуток нечітких множин A і B, якщо $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Відповідно до означення 2.14

$$A \times B = \begin{pmatrix} \dfrac{x_i \in B}{x_i \in A} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ x_2 & 0,5 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 \\ x_3 & 0,3 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 \\ x_4 & 0,5 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 \\ x_5 & 0,2 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

О з н а ч е н н я 2.15. *Опуклою комбінацією* нечітких підмножин $A_1, \ldots, A_n$ універсальної множини X називається нечітка множина A з функцією належності, що має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x), \tag{2.51}$$

де $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1,...,n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

Щодо звичайних множин, на відміну від декартового добутку, операція опуклої комбінації не має сенсу.

О з н а ч е н н я 2.16. Операції концентрування (CON) і розтягування (DIL) задамо таким чином:

$$\text{CON } A = A^2, \tag{2.52}$$

$$\text{DIL } A = A^{0,5}, \tag{2.53}$$

при цьому

$$\mu_{A^\alpha}(x) = \mu_A^\alpha(x), x \in X, \alpha > 0. \tag{2.54}$$

П р и к л а д 2.26. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $A \subset E$,

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0,25 & 0,9 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо множини $B = \text{CON } A,\ C = \text{DIL } A$:

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0,0625 & 0,81 & 0,16 & 0,36 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0{,}5 & 0{,}95 & 0{,}63 & 0{,}77 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

П р и к л а д 2.27. Нехай нечітку множину $A \subset R^1$ подано її функцією належності $\mu_A(x) = \frac{1}{1+|x-a|}$, тоді $\mu_{A^2}(x) = \frac{1}{(1+|x-a|)^2}$.

Графічно ці множини можна зобразити, як показано на рис. 2.13.

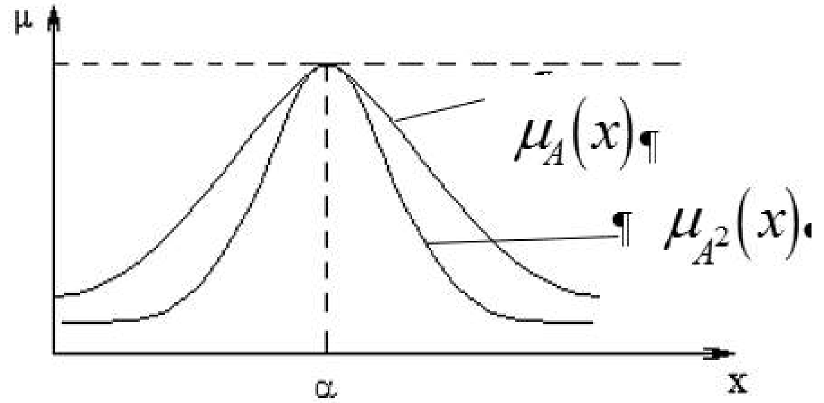


Рис. 2.13. Графіки функцій належності нечітких множин A і CON A

Застосування операції концентрування до нечіткої множини означає зменшення її “нечіткості”. У реальних задачах це може означати надходження нової інформації, що дає змогу більш точно (чітко) описати задану нечітку множину. Аналогічно операція розтягування може застосовуватися для моделювання ситуацій, пов’язаних із втратою інформації.

2.8. Нечіткі відношення

О з н а ч е н н я 2.17. Нечітким відношенням R на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, що характеризується такою функцією належності: $\mu_R : X \times X \to [0;1]$.

Значення $\mu_R(x,y)$ цієї функції показує міру або ступінь виконання відношення R між елементами x і y. Зрозуміло, що звичайні відношення можна вважати окремим випадком нечітких відношень, функції належності яких можуть мати тільки два значення: або 0, або 1.

П р и к л а д 2.28. Розглянемо два подібні відношення на інтервалі $[0;1]$. Це звичайне відношення «більше або дорівнює» R $(\geq)$ і нечітке відношення «значно більше» R $(>>)$. Пари, зв’язані відношенням R, зображено на рис. 2.14, а відношенням R – на рис. 2.15.

Якщо має місце нечітке відношення R, то існують пари елементів, для яких воно виконується чітко, є пари, для яких це відношення не виконується, а також деяка проміжна зона, де пари мають той чи інший ступінь належності, тобто для них відношення виконується лише певною мірою залежно від ситуації. Нечітку межу в цьому випадку зображено змінною щільністю штрихування.

Так само, як і при використанні звичайних відношень (див. розд. 1), нечіткі відношення можна задавати матрицею, графом або розрізами.

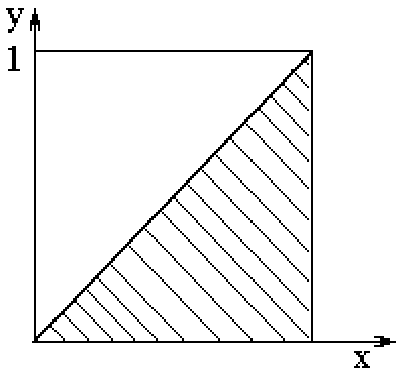


Рис. 2.14. Графічне зображення відношення «$\geq$»

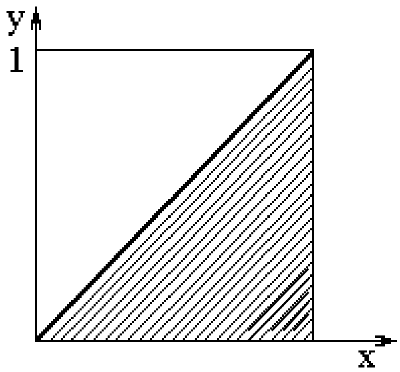


Рис. 2.15. Графічне зображення відношення «>>»

Матриця нечіткого відношення аналогічна матриці звичайного відношення, тільки її елементами можуть бути числа від 0 до 1.

Якщо нечітке відношення задають з допомогою графа, то кожній його дузі присвоюється число з інтервалу $[0;1]$, яке означає ступінь виконання нечіткого відношення для певної пари.

Верхні й нижні розрізи нечіткого відношення являють собою нечіткі множини, що визначаються таким чином:

$$R^{+}(x)=\{y|\mu_R(y,x): y\in X,\ \mu_R(y,x)>0\},$$
$$R^{-}(x)=\{y|\mu_R(x,y): y\in X,\ \mu_R(x,y)>0\}.$$

О з н а ч е н н я 2.18. Носієм нечіткого відношення R на множині X називається підмножина декартового добутку $X\times X$, що має такий вигляд:

$$\operatorname{supp} R=\{(x,y)|(x,y)\in X\times X,\ \mu_R(y,x)>0\}.$$

Носій нечіткого відношення можна розуміти як звичайне відношення на множині X, що зв'язує пари (x,y), для яких відношення R виконується з ненульовою мірою.

П р и к л а д 2.29. Нехай відношення R – «приблизно дорівнює». Задамо його на множині $X=\{1,2,3,4,5\}$ з допомогою матриці, яка може мати такий вигляд:

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді носієм описаного нечіткого відношення буде звичайне відношення

$$\operatorname{supp} R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що конкретний вигляд матриці відношення залежить від сенсу задачі й того, як розуміють вираз «приблизно дорівнює».

2.9. Операції над нечіткими відношеннями

У попередніх підрозділах було розглянуто операції над нечіткими множинами та звичайними відношеннями. Операції над нечіткими відношеннями певною мірою поєднують у собі властивості і тих, і інших. Іншими словами, деякі з них являють собою аналоги відповідних операцій зі звичайними відношеннями, але існують і такі, що притаманні лише нечітким відношенням. Наприклад, операції об’єднання й перетину нечітких відношень можна так само, як і для нечітких множин, визначити кількома способами.

О з н а ч е н н я 2.19. Нехай на множині X подано два нечітких відношення A і B, тобто в декартовому добутку X^2 подано дві нечіткі підмножини A і B. Тоді нечіткі множини $C=A\bigcap B$ і $D=A\bigcup B$ назвемо відповідно *перетином* та *об’єднанням* нечітких відношень A і B на множині X.

П р и к л а д 2.30. Відношення A і B подано в такому вигляді:

$$A=\begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \\ 1 & 1 & 0,4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0.3 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо перетин та об’єднання цих відношень, використовуючи означення 2.6 і 2.7:

$$A\bigcap B=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \\ 0,8 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}, \qquad A\bigcup B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

О з н а ч е н н я 2.20. Нечітке відношення B *містить* нечітке відношення A, якщо для нечітких множин B і A має місце включення $A\subset B$, тобто їх функції належності задовольняють такій нерівності:

$$\mu_A(x,y) \le \mu_B(x,y) \quad \forall x,y \in X .$$

Приміром, у розглянутому вище прикладі 2.28 відношення «≥» містить відношення «>>».

О з н а ч е н н я 2.21. Якщо R – нечітке відношення на множині X, то нечітке відношення $\overline{R}$, функція належності якого $\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$, назвемо *доповненням* відношення R у множині X.

Наприклад, доповненням нечіткого відношення «краще» буде відношення «не краще».

Обернене до R нечітке відношення R^{-1} на множині X визначається таким чином:

$$x\, R^{-1}\, y \quad \Leftrightarrow \quad y\, R\, x \quad \forall x,y \in X ,$$

або з використанням термінології функцій належності

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x) \quad \forall x,y \in X .$$

На відміну від звичайних відношень, добуток (або композицію) нечітких відношень можна визначити багатьма способами.

Розглянемо деякі з можливих способів означення цієї операції.

О з н а ч е н н я 2.22. *Максимінний* добуток нечітких відношень A і B на множині X описують такою функцією належності:

$$\mu_{A \cdot B}(x,y) = \sup_{z \in X} \min \left\{ \mu_A(x,z), \mu_B(z,y) \right\}.$$

Якщо вихідні відношення задано на скінченній множині X, то матриця їх максимінного добутку дорівнює максимінному добутку матриць відношень A і B.

О з н а ч е н н я 2.23. *Мінімаксний* добуток нечітких відношень A і B на множині X буде дорівнювати нечіткому відношенню, функція належності якого

$$\mu_{A \cdot B}(x,y) = \inf_{z \in X} \max \left\{ \mu_A(x,z), \mu_B(z,y) \right\}.$$

О з н а ч е н н я 2.24. *Максмультиплікативний* добуток нечітких відношень A і B характеризується функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{A\cdot B}(x,y)=\sup_{z\in X}\{\mu_A(x,z)\cdot\mu_B(z,y)\}.$$

П р и к л а д 2.31. Нехай з допомогою матриць задано нечіткі відношення A і B:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0,5 & 0,2\\ 0,7 & 1 & 0,8 & 0\\ 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0\\ 0 & 0,2 & 0,8 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0,5 & 0 & 1 & 0\\ 0,2 & 0,3 & 1 & 0\\ 1 & 0,3 & 0,5 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0,5\end{pmatrix}.$$

Знайдемо композиції відношень A і B, користуючись означеннями 2.22–2.24. Тоді отримуємо такі результати:

– максимінну композицію буде описано такою матрицею:

$$A\cdot B_{\max\min}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,3 & 1 & 0,2\\ 0,8 & 0,3 & 1 & 0\\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0\\ 1 & 1 & 0,5 & 0,5\end{pmatrix},$$

– мінімаксну композицію – матрицею такого вигляду:

$$A\cdot B_{\max\min}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,2 & 0\\ 0,7 & 0,7 & 0 & 0,5\\ 0,4 & 0,3 & 0 & 0,3\\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0\end{pmatrix},$$

– максмультиплікативну композицію – такою матрицею:

$$A\cdot B_{\max\min}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 1 & 0,1\\ 0,8 & 0,3 & 1 & 0\\ 0,3 & 0,12 & 0,4 & 0\\ 1 & 1 & 0,4 & 0,5\end{pmatrix}.$$

2.10. Властивості нечітких відношень

Розглянемо тепер, чим характеризуються нечіткі відношення.

О з н а ч е н н я 2.25. Нечітке відношення R на множині X називається *рефлексивним*, якщо для будь-якого елемента $x\in X$ виконується така умова:

$$\mu_R(x,x)=1.$$

Якщо рефлексивне відношення задано матрицею, то її головна діагональ містить тільки одиниці.

Прикладом рефлексивного відношення буде відношення «приблизно дорівнює», задане на множині чисел.

О з н а ч е н н я 2.26. Нечітке відношення R буде *антирефлексивним*, якщо $\mu_R(x,x)=0 \quad \forall x \in X$.

Доповнення рефлексивного відношення буде антирефлексивним. Прикладом антирефлексивного на множині чисел може бути відношення «значно більше».

О з н а ч е н н я 2.27. Нечітке відношення R на множині X називається симетричним, якщо для будь-яких елементів $x, y \in X$ виконується така умова:

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x).$$

Матриця симетричного нечіткого відношення, поданого в скінченній множині, буде симетричною. Його прикладом буде відношення «сильно відрізнятися за величиною».

О з н а ч е н н я 2.28. Відношення R на множині X буде асиметричним, якщо воно має таку властивість:

$$\mu_R(x,y)>0 \Rightarrow \mu_R(y,x)=0 \text{ або } \mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)=0 \quad \forall x,y \in X ,$$

іншими словами:

$$\min\left\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\right\}=0 \quad \forall x,y \in X .$$

Асиметричним є відношення «значно більше».

О з н а ч е н н я 2.29. Відношення R на множині X буде антисиметричним, якщо виконується така умова:

$$\min\left\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\right\}=0, \quad x \neq y .$$

О з н а ч е н н я 2.30. Нечітке відношення R на множині X називається транзитивним, якщо $R^2 \subset R$.

Очевидно, що властивість транзитивності залежить від способу визначення добутку відношень. Згідно з уведеними раніше означеннями можна назвати три її види: максимінна (max min), мінімаксна (min max) і максмультиплікативна (max) транзитивність.

Легко побачити, що ${R^2}_{\max-\cdot} \subseteq {R^2}_{\max\min}$. Отже, з максимінної транзитивності випливає максмультиплікативна.

Прикладом максимінного транзитивного відношення є «значно більше» на множині чисел.

П р и к л а д 2.32. Перевірити на транзитивність нечітке відношення, що має такий вигляд:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Для перевірки цієї властивості необхідно обчислити максимінну, мінімаксну й максмультиплікативну композиції заданого відношення:

$$R^2{}_{\max\min} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $R^2{}_{\max\min} \subset R$, нечітке відношення R є максимінним транзитивним, отже, воно буде й максмультиплікативним транзитивним. Перевіримо відношення на мінімаксну транзитивність. Йому відповідає композиція

$$R^2{}_{\min\max} = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $R^2{}_{\min\max} \not\subset R$.

Отже, відношення R не буде мінімаксним транзитивним.

О з н а ч е н н я 2.31. *Транзитивним замиканням* нечіткого відношення R буде нечітке відношення R, яке отримують за таким правилом:

$$R = R \cup R^2 \cup R \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$$

Вочевидь, при визначенні транзитивного замикання необхідно спочатку встановити тип операції добутку відношень.

Стосовно транзитивного замикання має місце таке твердження:

Теорема 2.2. Транзитивне замикання будь-якого бінарного відношення R являє собою найменше транзитивне бінарне відношення, що містить R.

Зауважимо, що α-рівень транзитивного замикання нечіткого відношення збігається з транзитивним замиканням відповідного α-рівня вихідного нечіткого відношення, тобто

$$\left(R\right)_{\alpha} = R_{\alpha} \quad \forall \alpha \neq 0.$$

Наведемо формулювання двох теорем, які дають змогу побудувати транзитивне замикання в деяких випадках.

Теорема 2.3. Якщо існує число k, для якого $R^k = R^{k+1}$, то

$$R = R \bigcup R^2 \bigcup R \bigcup ... \bigcup R^k.$$

Теорема 2.4. Якщо R являє собою нечітке відношення на скінченній множині E, причому $m\left(E\right) = n$, то $R = R \bigcup R^2 \bigcup R \bigcup ... \bigcup R^n$ або існує число $k \leq n$, для якого $R^k = R^{k+1}$.

П р и к л а д 2.33. Побудуємо транзитивне (max min) замикання нечіткого відношення R, заданого такою матрицею:

$$R = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Для цього обчислимо послідовно R^2, R^3:

$$R^2_{\max\min} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}, \qquad R^3_{\max\min} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що $R^2 = R^3$, отже, $R = R \bigcup R^2$ і набуває такого вигляду:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} \bigcup \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

2.11. Класифікація нечітких відношень

Усі типи нечітких відношень, беручи до уваги їх властивості, можна поділити на три класи.

До першого класу належать симетричні відношення, більшість яких характеризують схожість або відмінність між об’єктами множини X. Такі відношення можна задавати з допомогою зваженого графа з неорієнтованими дугами.

Другий клас утворюють антисиметричні відношення. Вони задають на множині відношення впорядкованості, домінування. Їм відповідають орієнтовні зважені графи з однобічною орієнтацією дуг.

До третього класу належить решта відношень.

Відношення кожного класу, своєю чергою, можна поділити на підкласи з огляду на виконання умов рефлексивності або антирефлексивності. Схематично класифікацію нечітких відношень подано на рис. 2.16, більш детальну класифікацію можна знайти в збірнику [8]. Розглянемо деякі з нечітких відношень.

Нечітким *відношенням передпорядку* називається бінарне нечітке відношення, що має властивості транзитивності й рефлексивності.

Якщо R являє собою передпорядок, то мають місце такі рівності:

$$R = R^2 = ... = R^k = R.$$

Передпорядком на множині $X = \{A, B, C, D, E\}$ буде, наприклад, відношення, що має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 1 & 0,9 & 1 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нечіткий півпорядок – це транзитивне відношення, що не має властивості рефлексивності.

Симетричні, рефлексивні відношення називаються *відношеннями схожості*. Вони показують міру подібності (“близькості”) двох елементів.

Симетричні, антирефлексивні відношення називають відношеннями відмінності.

Для відношень схожості й відмінності характерним є таке твердження: якщо R – нечітке відношення схожості, то $\overline{R}$ – відношення відмінності.

Серед відношень схожості особливо виокремлюють відношення подібності.

О з н а ч е н н я 2.32. *Відношенням подібності* або *еквівалентності* називається нечітке бінарне відношення, якому властиві транзитивність, рефлексивність і симетричність.

Очевидно, що це відношення являє собою передпорядок.

Відношення

$$R_1 = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ C & 0{,}7 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ D & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ E & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$$

являє собою нечітке відношення подібності.

Узагалі відношення вигляду

$$R_2 = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 1 & a & a & a & a \\ B & a & 1 & a & a & a \\ C & a & a & 1 & a & a \\ D & a & a & a & 1 & a \\ E & a & a & a & a & 1 \end{pmatrix}, \text{ якщо } a \in [0, 1],$$

будуть відношеннями подібності.

З а в д а н н я: перевірити транзитивність цих відношень.

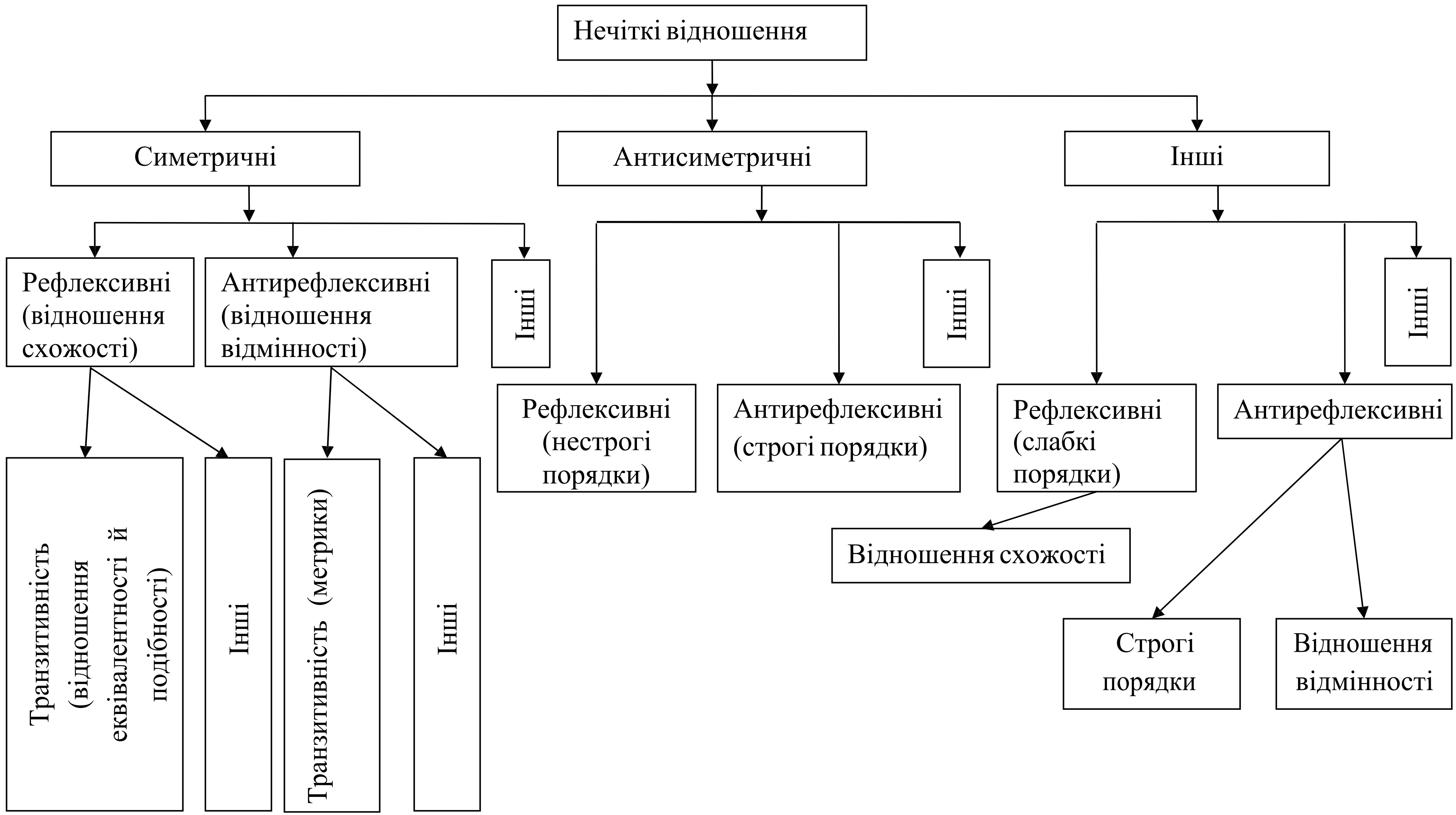


Рис. 2.16. Класифікація нечітких відношень

П р и к л а д 2.34. Нечітке відношення $x\,R\,y$, де $x,y\in[0,+\infty)$, визначено такою функцією належності:

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases} e^{-k(y+1)}, \; y<x,\, k>1, \\ 1,\; y=x, \\ e^{-k(x+1)}, \; y>x,\, k>1. \end{cases}$$

Перевірити самостійно, чи є воно відношенням подібності.

Кожен α-рівень нечіткого відношення подібності являє собою звичайне відношення еквівалентності. Нагадаємо, що будь-яке відношення еквівалентності задає на множині деяке розбиття. Отже, кожний α-рівень нечіткого відношення подібності також буде задавати на цій множині розбиття. Із властивості α- рівнів нечіткого відношення випливає також вкладеність відповідних розбиттів множини X. Причому зі зменшенням величини α відбувається укрупнення класів еквівалентності. Таким чином, нечітке відношення еквівалентності, на відміну від звичайного відношення схожості, задає на множині X ієрархічну сукупність її розбиттів на неперетинні класи еквівалентності. Це пояснюється тим, що умова транзитивності накладає досить сильні обмеження на значення ступенів належності $\mu(x,y)$, а саме: для нечіткого відношення подібності має місце наведена нижче теорема.

Теорема 2.5. Нехай $R\subset E\times E$ – відношення подібності, а x,y,z – три елементи множини E. Задамо, що

$$\begin{aligned} c&=\mu_R(x,z)=\mu_R(z,x), \\ a&=\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x), \\ c&=\mu_R(y,z)=\mu_R(z,y). \end{aligned}$$

Тоді $c\geq a=b$ або $a\geq b=c$, або $b\geq c=a$, тобто з величин a,b,c принаймні дві є однаковими, а третя не менша від них.

О з н а ч е н н я 2.33. Нечітке бінарне відношення, що має властивості антирефлексивності й симетричності, називається *відношенням відмінності*.

Приклади відношень відмінності:

1. Відношення на множині $\{A,B,C,D,E\}$, задане матрицею такого вигляду:

$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ B & 0,2 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ C & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,3 \\ D & 0 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ E & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Нечітке відношення, задане функцією належності

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-k(y+1)}, \; y < x, \, k > 1, \\ 0, \qquad\qquad y = x, \\ 1-e^{-k(x+1)}, \; y > x, \, k > 1, \end{cases}$$

являє собою відношення відмінності й утворюється внаслідок заміни $\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1-\mu_R(x,y)$ у прикладі 2.34.

Міру відмінності можна вважати відстанню між елементами множини (якщо додати транзитивність), причому різні види транзитивності задають відповідно різні види відстаней.

О з н а ч е н н я 2.34. Нечітким *відношенням порядку* називається бінарне відношення, яке має властивості рефлексивності, транзитивності й антисиметричності.

Розрізняють відношення строгого й нестрогого порядку.

Строгий порядок являє собою антирефлексивне, асиметричне й транзитивне відношення.

Відношення нестрогого порядку – рефлексивні, антисиметричні й транзитивні.

2.12. Відображення нечітких множин. Принцип узагальнення

У багатьох задачах прийняття рішень виникає необхідність розширити область визначення X поданого відображення або відношення шляхом включення до неї, поряд з окремими елементами множини X, її довільних нечітких підмножин.

Наприклад, на множині керувань (керувальних впливів) U зафіксовано відображення $f: U \to V$, яке описує функціонування керованої системи. Для кожного керування $u \in U$ його образ $v = f(u)$ відображає реакцію певної системи на вибір цього керування. Якщо вибране керування описано нечітко, наприклад у формі нечіткої підмножини $\mu(u)$ множини U, то для відшукання реакції системи на нього необхідно визначити образ $\mu(u)$ при відображенні f.

Спосіб розширення області визначення відображення на клас нечітких множин називається *принципом узагальнення*.

Л. А. Заде запропонував принцип узагальнення, який базується на визначенні образу нечіткої множини при звичайному (чітко описаному) відображенні.

Нехай подано відображення $\varphi: X \to Y$, а A – деяка підмножина множини X, що характеризується функцією належності $\mu_A(x)$.

О з н а ч е н н я 2.35. Образом нечіткої множини A при відображенні φ будемо називати нечітку підмножину множини Y, що являє собою сукупність таких пар:

$$(y, \mu_B(y)) = (\varphi(x), \mu_A(x)), \quad x \in X,$$

тут μ_B – функція належності образу, $\mu_B : Y \to [0;1]$.

Легко зрозуміти, що функцію належності μ_B можна записати таким чином:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in Y, \tag{2.55}$$

причому множина $\varphi^{-1}(y)$ для кожного фіксованого елемента $y \in Y$ визначається правилом

$$\varphi^{-1}(y) = \{x | x \in X, \varphi(x) = y\},$$

тобто являє собою множину всіх тих елементів $x \in X$, образом яких при відображенні φ буде y.

П р и к л а д 2.35. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, а множина $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Відображення $\varphi: X \to Y$ задано таблицею

$$\varphi = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На множині X задамо нечітку підмножину A:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0,3 & 0,5 & 1 & 0 & 0,5 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо образ B нечіткої підмножини A при відображенні φ. Відповідно до означення 2.35

$$\mu_B(y_1)=\sup_{x\in\varphi^{-1}(y_1)}\mu_A(x),$$

$$\varphi^{-1}(y_1)=\{x_1,x_4,x_6\},$$

тоді $\mu_B(y_1)=\sup\limits_{x\in\{x_1,x_4,x_6\}}\mu_A(x)=\sup\{0,3;0;0,8\}=0,8$.

Аналогічно

$$\mu_B(y_2)=\sup_{x\in\varphi^{-1}(y_2)}\mu_A(x)=\sup_{x\in\{x_2,x_3\}}\mu_A(x)=\sup\{0,5;1\}=1,$$

$$\mu_B(y_3)=\sup_{x\in\varphi^{-1}(y_3)}\mu_A(x)=\sup_{x\in\{x_5,x_7\}}\mu_A(x)=\sup\{0,5;\,0,4\}=0,5.$$

Таким чином, образом множини A при відображенні φ буде нечітка множина $B\subset Y$, яка має такий вигляд:

$$B=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0,8 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо тепер принцип узагальнення для розширення області визначення нечіткого відображення.

Відображення множини X у множину Y назвемо *нечітким*, якщо кожному елементу $x\in X$ ставиться у відповідність деяка нечітка підмножина множини Y. Описується нечітке відображення функцією належності $\mu_\varphi : X\times Y\to[0;1]$, причому функція $\mu_\varphi(x_0,y)$ для кожного фіксованого елемента $x=x_0$ являє собою функцію належності нечіткої підмножини в множині Y, яка є образом елемента x_0 при відображенні φ.

Отже, нехай задано нечітке відображення $\mu_\varphi : X\times Y\to[0;1]$ і $\mu_A(x)$ – нечітка підмножина множини X. Якщо для відшукання образу цієї нечіткої множини при відображенні μ_φ застосувати принцип узагальнення за правилом (2.55), то отримаємо таку сукупність пар:

$$\left(\mu_\varphi(x,y),\mu_A(x)\right),\quad x\in X,$$

де функція $\mu_\varphi(x,y)$ для кожного фіксованого елемента x задає нечітку підмножину множини Y.

Таким чином, можна зробити висновок, що образ нечіткої множини $\mu_A(x)$ у цьому випадку є достатньо складним об’єктом, а саме нечітким підкласом усіх нечітких підмножин множини Y, отже, виникає потреба ввести принцип узагальнення в іншій формі.

О з н а ч е н н я 2.36. Образом B нечіткої множини $A \subset X$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ називається нечітка підмножина множини Y, що характеризується такою функцією належності:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\left\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\right\}. \tag{2.56}$$

Основою цього визначення є максимінний добуток (композиція) нечітких відношень.

Коли φ – звичайне відображення, тобто $\mu_\varphi(x, y) = 1$, якщо $y = \varphi(x)$, то формула (2.56) перетворюється на (2.55).

У багатьох задачах вихідне нечітке відображення μ_φ залежить від n змінних, тобто має такий вигляд: $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$, де $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Нехай у множині X подано нечітку підмножину μ_A. У загальному випадку функція належності цієї підмножини має вигляд

$$\mu_A(x_1, ..., x_n) = \min\left(\mu_1(x_1), ..., \mu_n(x); \nu(x_1, ..., x_n)\right),$$

де $\mu_i, i = 1, ..., n$ і ν – відомі функції належності нечітких підмножин множини $X_i, i = 1, ..., n$ і X відповідно.

Застосовуючи в цьому випадку принцип узагальнення згідно з правилом (2.56), отримуємо таку формулу для функції належності образу нечіткої підмножини μ_A:

$$\mu_B(y) = \sup_{(x_1, ..., x_n) \in X} \min\left\{\mu_1(x_1), ..., \mu_n(x_n), \nu(x_1, ..., x_n), \mu_\varphi(x_1, ..., x_n, y)\right\}. \tag{2.57}$$

П р и к л а д 2.36. Маємо множини $X = \{x_1, ..., x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ і нечітку підмножину A множини X, яку задано таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крім того, відомо нечітке відображення $\varphi : X \to Y$, функцію належності якого $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ подано таблицею

$$\mu_\varphi = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,8 & 1 \\ 1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0 & 0,8 \\ 0,9 & 0,3 & 0,4 \end{array} .$$

Необхідно визначити образ $B \subset Y$ множини A при нечіткому відображенні φ.

Розв'язання

Будемо застосовувати означення 2.36. Тоді для обчислення функції належності множини B використаємо максимінний добуток функцій μ_A і μ_φ. Отримані результати подано нижче:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 & 1 & 0 & 0,1 & 0,4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,8 & 1 \\ 1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0 & 0,8 \\ 0,9 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$.

П р и к л а д 2.37. Поширимо область визначення арифметичної операції додавання на клас "нечітких чисел", тобто на клас нечітких підмножин числової осі.

Операція додавання в множині чисел R^1 являє собою відображення $\varphi : R^1 \times R^1 \to R^1$, тобто $\varphi(r_1, r_2) = r = r_1 + r_2$.

Припустимо, що μ_1, μ_2 – два нечітких числа $\mu_1, \mu_2 : R^1 \to [0, 1]$. Образ пари (μ_1, μ_2) при відображенні φ назвемо їх сумою: $\mu_\sum = \mu_1 + \mu_2$. Тоді, використовуючи формулу (2.57), одержуємо такий результат:

$$\mu_{\sum}(r) = \sup_{\substack{r_1, r_2 \in R^1 \\ r_1 + r_2 = r}} \min\left\{\mu_1(r_1), \mu_2(r_2)\right\}. \qquad (2.58)$$

Зокрема, якщо нечіткі числа μ_1 і μ_2 являють собою інтервали $[a_1, b_1]$ і $[a_2, b_2]$, то згідно з формулою (2.58)

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2].$$

О з н а ч е н н я 2.37. Прообразом A нечіткої множини $B \subset Y$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ називається об'єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать (є підмножинами) нечіткій множині B.

Позначимо образ нечіткої множини μ_φ через $A\mu_\varphi$. Тоді умову для визначення прообразу множини можна записати таким чином:

$$\sup_{x \in X} \min\left\{\mu_2(x), \mu_\varphi(x, y)\right\} \le \mu_B(y) \quad \forall y \in Y. \qquad (2.59)$$

Умова випливає з включення $A\mu_\varphi \subset Y$.

Явний вираз для функції належності прообразу дає наведена нижче теорема. Для її формулювання уведемо такі множини:

$$N = \left\{(x, y) \middle| (x, y) \in X \times Y, \mu_\varphi(x, y) > \mu_B(y)\right\},$$
$$N_x = \left\{y \middle| y \in Y, (x, y) \in N\right\},$$
$$N_y = \left\{x \middle| x \in X, (x, y) \in N\right\},$$
$$X^0 = \left\{x \middle| x \in X, N_x \ne \varnothing\right\}.$$

Теорема 2.6. У введених вище позначеннях нечітка множина A (прообраз множини B) описується такою функцією належності:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_B(y), x \in X^0, \\ 1, x \in X \setminus X^0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що коли відображення μ_φ – чітке, тобто φ являє собою звичайне відображення $\varphi : X \to Y$, і функція належності

$$\mu_{\varphi}(x,y)=\begin{cases}1, \text{ якщо } y=\varphi(x),\\ 0 \text{ для всіх інших пар } (x,y)\in X\times Y,\end{cases}$$

то $\mu_A(x)=\mu_B(\varphi(x)) \quad \forall x\in X$.

Контрольні запитання

1. Що означає характеристична функція множини?
2. Дайте означення нечіткої множини.
3. Що називають носієм нечіткої множини?
4. Які операції над нечіткими множинами ви знаєте?
5. Як можна визначити доповнення нечіткої множини, об’єднання й перетин нечітких множин?
6. Чим пояснюється існування кількох операцій об’єднання й перетину нечітких множин?
7. Які спеціальні операції над нечіткими множинами ви знаєте?
8. Який сенс мають операції концентрування й розтягування?
9. Як обчислюють відстань Хеммінга при розгляді скінченної множини, лічильної множини, множини потужності континуума?
10. Як обчислюють евклідову відстань між множинами?
11. Який геометричний сенс має лінійна відстань між множинами?
12. Яку властивість характеризує індекс нечіткості множини? Яким чином його обчислюють?
13. Чи залежить індекс нечіткості перетину (об’єднання) множин від індексів нечіткості вихідних множин?
14. Чи змінюється індекс нечіткості множини внаслідок операцій концентрування й розтягування?
15. Наведіть означення найближчої чіткої множини до заданої нечіткої.
16. Яку множину називають множиною рівня α нечіткої множини?
17. Сформулюйте теорему про розкладання нечіткої множини на множини рівня.
18. Сформулюйте теорему про декомпозицію нечітких множин.
19. Що називають нечітким відношенням?
20. Яким чином можна задавати нечіткі відношення?
21. Які математичні операції можна застосовувати до нечітких відношень?
22. Яке нечітке відношення називають рефлексивним (антирефлексивним)?
23. Які нечіткі відношення належать до симетричних, антисиметричних, асиметричних?
24. Яке нечітке відношення називають транзитивним? Яким чином пов’язані між собою різні види транзитивності нечітких відношень?
25. Що являє собою транзитивне замикання нечіткого відношення?
26. За якими ознаками прийнято класифікувати нечіткі відношення?

27. Сформулюйте означення відношень передпорядку, строгого й нестрогого порядку, еквівалентності, схожості, подібності, відмінності, переваги. На яких властивостях відношень базується ця класифікація?

28. Що являє собою відображення нечіткої множини?

29. Сформулюйте принцип узагальнення стосовно відображення нечітких множин.

30. Що являє собою образ нечіткої множини при звичайному відображенні?

31. Що являє собою нечітке відображення?

32. Як можна визначити образ нечіткої множини при нечіткому відображенні?

33. Що являє собою прообраз нечіткої множини при звичайному й нечіткому відображенні?

Розділ 3

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ НЕЧІТКИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

3.1. Задача досягнення нечітко визначеної мети (підхід Беллмана – Заде)

Нехай X – універсальна множина альтернатив, тобто сукупність варіантів, серед яких ОПР здійснює вибір. *Нечіткою метою* в множині X будемо називати деяку її нечітку підмножину. Позначимо цю підмножину G. Нечітка мета описується функцією належності $\mu_G : X \to [0, 1]$. Чим вищий ступінь належності альтернативи x до нечіткої множини мети μ_G, тобто чим більше значення $\mu_G(x)$, тим вищим буде ступінь досягнення цієї мети, якщо вибрати альтернативу x як розв'язок. Нечіткі обмеження, або множину допустимих альтернатив, також описують нечіткими підмножинами множини X. Позначимо їх як $C_1, C_2, ..., C_m$. Будемо вважати, що функції належності цих нечітких множин є відомими.

Розв'язати задачу означає досягти мети й задовольнити обмеження, причому в такій постановці слід казати не просто про досягнення мети, а про її реалізацію тією чи іншою мірою. Необхідно також ураховувати й ступінь виконання обмежень.

Основним у підході Беллмана – Заде до розв'язування цієї задачі є те, що мету прийняття рішень і множину альтернатив розглядають як рівноважні нечіткі підмножини деякої універсальної множини альтернатив. Це дає змогу подати розв'язок задачі у відносно простому вигляді. Зокрема, у підході Беллмана – Заде вимоги задачі враховуються описаним нижче способом.

Нехай, наприклад, деяка альтернатива x забезпечує досягнення мети (інакше – відповідає меті) зі ступенем $\mu_G(x)$ і задовольняє обмеження (або є допустимою) зі ступенем $\mu_C(x)$. При таких умовах *нечітким розв'язком* D задачі досягнення нечіткої мети називається перетин нечітких множин мети й обмежень, тобто $D = G \cap C$. Отже, розв'язок задачі нечітко визначеної мети також являє собою деяку нечітку підмножину універсальної множини альтернатив X. Якщо перетин множин визначати за правилом 2.7, то функція належності розв'язку μ_D буде мати такий вигляд:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

У разі, коли в задачі є кілька цілей та обмежень, нечіткий розв'язок можна описати такою функцією належності:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), ..., \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), ..., \mu_{C_m}(x)\}.$$

П р и к л а д 3.1. Нехай маємо таку універсальну множину альтернатив: $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. На цій множині задано множини мети й обмежень:

– G – “x має бути близькою до 5” (нечітка мета);

– C_1 – “x не повинна бути близькою до 4” (перше обмеження);

– C_2 – “x повинна бути близькою до 6” (друге обмеження).

Їх функції належності задано таблицею

	1	2	3	4	5	6	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0,1	0,4	0,8	1	0,7	0,2	0	0
$\mu_{C_1}(x)$	0,3	0,6	0,9	1	0,8	0,7	0,3	0,2	0
$\mu_{C_2}(x)$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2

Відповідно до підходу Беллмана – Заде функція належності нечіткого розв'язку задачі набуває на множині X таких значень:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_D(x)$	0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,7	0,4	0,2	0	0

.

Вочевидь, такому розв'язку властива невизначеність, бо отримуємо не одну альтернативу, а деяку нечітку множину альтернатив. Якщо ОПР не здатна опрацювати такий тип розв'язку, то можна рекомендувати їй альтернативу, яка має найвищий ступінь належності до нечіткого розв'язку, тобто

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Таку альтернативу називають *максимізувальним розв'язком.*

Це один із найбільш поширених у літературі способів вибору єдиної альтернативи.

П р и к л а д 3.2. Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети, коли мета й обмеження подано такими функціями належності:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1, & \textit{якщо} \quad x \in (0; 6), \\ 0, & \textit{якщо} \quad x \notin (0; 6). \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, & \textit{якщо} \quad x \in (0;\ 6), \\ 0 & \textit{в інших випадках}. \end{cases}$$

Розв'язання

Щоб розв'язати цю задачу, використаємо підхід Беллмана – Заде, тобто

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Для зручності зобразимо графіки функцій належності мети й обмежень (рис. 3.1).

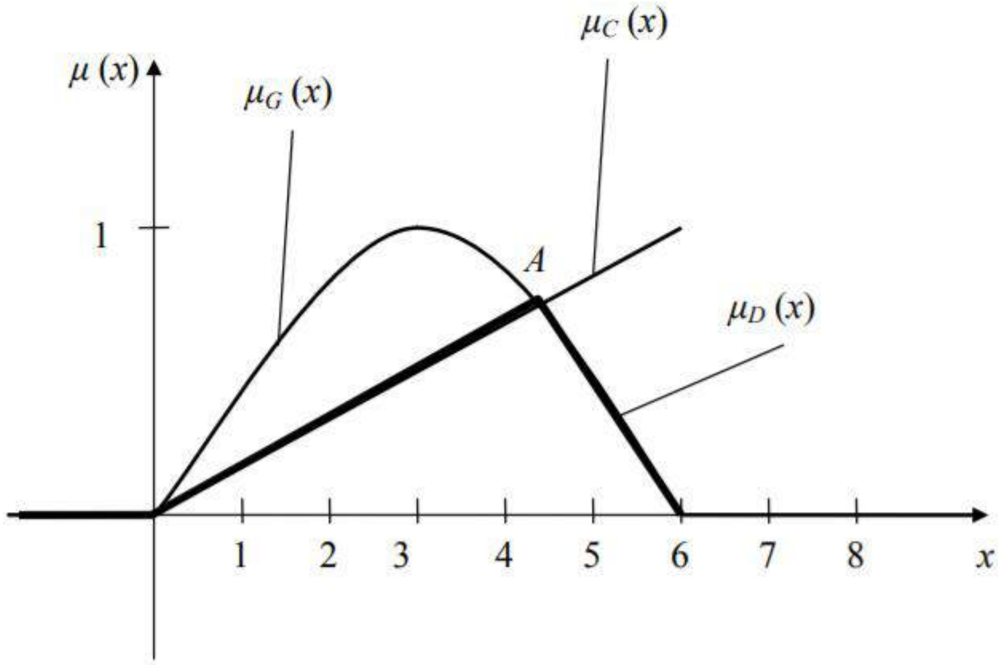


Рис. 3.1. Графічна інтерпретація розв’язання задачі досягнення нечітко визначеної мети

Тут товстою лінією показано функцію належності нечіткого розв'язку D. Опишемо її аналітично. Для цього знайдемо точки перетину графіків функцій належності мети й обмежень, склавши таке рівняння:

$$-\frac{1}{9}(x-3)^2+1=\frac{1}{6}x.$$

Розв'язавши його, отримаємо абсциси двох точок перетину: $x_1 = 0$ та $x_2 = 4{,}5$. Тепер можемо записати функцію належності розв'язку в аналітичному вигляді:

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x, \quad \textit{якщо} \quad x\in(0;\ 4{,}5),\\ -\frac{1}{9}(x-3)^2+1, \quad \textit{якщо} \quad x\in(4{,}5;6),\\ 0 \quad \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

Максимізувальним розв'язком буде альтернатива $x_2=4{,}5$, а ступінь її належності до нечіткого розв'язку $\mu_D(x)=0{,}75$.

Розглянута вище ситуація прийняття рішень характеризувалася тим, що і мета, і обмеження були підмножинами однієї і тієї самої універсальної множини. Більш універсальною може бути інша постановка задачі, коли нечітка мета й обмеження є підмножинами різних універсальних множин. Розглянемо її.

Нехай, як і раніше, X – універсальна множина альтернатив, і нехай подано відображення $\varphi: X\to Y$, значення якого (елементи множини Y) можна розуміти як реакції деякої системи на вихідні дії $x\in X$ або як деякі оцінки вибору відповідних альтернатив. Відображення φ уважаємо однозначним.

Нечітка мета при цьому описується у вигляді нечіткої підмножини універсальної множини реакцій (оцінок) Y, тобто функцією належності $\mu_G: Y\to[0,\,1]$, а обмеження являють собою нечіткі підмножини вихідної множини X, функції належності яких $\mu_{C_i}: X\to[0,\,1], i=\overline{1,\,m}$.

Задача при цьому зводиться до першої постановки (тобто до випадку, коли мета є нечіткою підмножиною множини X). Опишемо її.

Визначимо нечітку множину альтернатив станів $\overline{\mu}_G$, які забезпечують досягнення заданої мети μ_G. Ця множина є прообразом нечіткої множини μ_G при відображенні φ, тобто

$$\overline{\mu}_G(x)=\mu_G(\varphi(x)).$$

Після цього вихідна задача буде еквівалентною задачі досягнення нечіткої мети $\overline{\mu}_G$ з огляду на ті самі нечіткі обмеження.

О з н а ч е н н я 3. 1. Нехай G і C – нечіткі множини мети (у множині Y) та обмежень (у множині X). *Нечітким розв'язком* задачі досягнення мети G при обмеженнях C назвемо максимальну множину D, яка має такі властивості:

1) $D\subset C$ (розв'язок являє собою допустиму альтернативу);

2) $\varphi(D)\subset G$ (досягнення нечіткої мети), де $\varphi(D)$ – образ множини D при нечіткому відображенні φ.

При умові, коли задано нечітке відображення множини альтернатив у множину реакцій або оцінок, нечіткий розв'язок можна знайти, користуючись означенням прообразу, яке наведено в попередньому розділі.

Нехай X – універсальна множина альтернатив, Y – універсальна множина оцінок, а також задано нечітке відображення X в Y, функція належності якого $\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$. Кожній альтернативі це відображення ставить у відповідність її нечітку оцінку. Нечіткі обмеження описуються функцією належності $\mu_C(x)$.

За теоремою 2.6 прообраз множини D визначають таким чином:

$$N = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y, \mu_\varphi(x, y) > \mu_G(y)\},$$

$$N_x = \{y | y \in Y, \ (x, y) \in N\},$$

$$X^0 = \{x | x \in X, N_x \neq \varnothing\},$$

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_G(y), x \in X, \\ 1, \quad x \in X \setminus X^0. \end{cases}$$

Тепер нечіткий розв'язок описується такою функцією належності:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{\tilde{D}}(x), \mu_C(x)\},$$

або

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \min\left\{\mu_C(x), \inf\limits_{y \in N_x} \mu_G(x)\right\}, \quad x \in X^0, \\ \mu_C(x), \qquad x \in X \setminus X^0. \end{cases}$$

Якщо необхідно вибрати конкретну альтернативу, то як розв'язок задачі можна, наприклад, вибрати той ступінь належності, який до нечіткого розв'язку μ_D є максимальним, тобто альтернативу, що реалізує величину $\max\limits_{x \in X} \mu_D(x)$. Однак цей вибір не можна вважати достатньо обґрунтованим, існують також інші способи визначення єдиної альтернативи.

Отже, підхід Беллмана – Заде спирається на можливість симетричного опису множин мети й обмежень у вигляді нечітких підмножин однієї і тієї самої універсальної множини. Це дає змогу подати розв'язок задачі в досить простому вигляді. У той же час не всяка задача прийняття рішень може бути сформульована таким чином.

Зауваження. Іноді важливість мети й обмеженьураховують з допомогою вагових коефіцієнтів. Тоді розв'зок задачі описують у такий спосіб:

$$\mu_D(x) = \min\{\lambda_1\mu_{G_1}(x),...,\lambda_n\mu_{G_n}(x), \nu_1\mu_{C_1}(x),...,\nu_m\mu_{C_m}(x)\},$$

де $\lambda_1,...,\lambda_n, \nu_1,...,\nu_m$ – вагові коефіцієнти цільових функцій та обмежень відповідно.

Цей підхід також не можна вважати достатньо обґрунтованим.

3.2. Задачі нечіткого математичного програмування та їх класифікація

Стандартна задача математичного програмування звичайно являє собою пошук максимуму (або мінімуму) заданої функції на заданій множині допустимих альтернатив, яку описано системою нерівностей. Наприклад,

$$f(x) \to \max,$$

$$\varphi_i(x) \le 0, \quad i = 1,...,m,$$

$$x \in X,$$

де X – задана множина альтернатив; $f: X \to R$ і $\varphi_i: X \to R,\ i = \overline{1,m}$ – задані функції.

Водночас при моделюванні реальних задач дослідник часто може мати в своєму розпорядженні лише нечіткі описи функцій f і φ або їх параметрів, нечітко може бути описана й множина альтернатив X. Таке подання ситуації прийняття рішень може, наприклад, відображати неадекватність наявної інформації або бути формою наближеного опису, достатнього для розв'язання задачі.

Більше того, у деяких випадках точно визначена множина обмежень (допустимих альтернатив) може виявитися лише наближеною до реальної ситуації в тому сенсі, що у вихідній задачі альтернативи поза множиною обмежень можуть не бути недопустимими, а є тільки тією чи іншою мірою менш бажаними для ОПР. Наприклад, згадаємо ситуацію, де множиною допустимих альтернатив є сукупність усіляких способів розподілу ресурсів, які ОПР збирається вкласти в певну операцію. У цьому випадку, мабуть, недоцільно заздалегідь уводити чітку межу множини допустимих альтернатив (розподілів), оскільки може трапитися так, що розподіл ресурсів, який перебуває за цією межею, дасть ефект, який переважить "меншу" його бажаність для ОПР. Таким чином, нечіткий опис може виявитися більш адекватним реальності, ніж у деякому сенсі довільно взяті чіткі обмеження.

Форми нечіткого опису інформації можуть бути різними, звідси й походить відмінність у математичних постановках задач нечіткого математичного програмування (НМП). Наведемо деякі з цих постановок, згрупованих у п'ять описаних нижче типів задач [9].

З а д а ч а І. Максимізація заданої звичайної функції на нечіткій множині альтернатив. Тобто маємо таку задачу:

$$f(x) \to \max,$$

$$x \in X,$$

де $f : X \to R, \quad \mu_C : X \to [0, 1]$.

1. *Зведення до задачі нечітко визначеної мети.*

Для цього вихідна цільова функція нормується в такий спосіб:

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{\sup\limits_{x \in \operatorname{supp} \mu_C} f(x)} \to \max.$$

Отриману функцію $\overline{f}(x)$ уважають функцією належності до нечіткої мети. При цьому значення $\overline{f}(x)$ буде ступенем досягнення мети при виборі альтернативи $x \in X$. Це дає змогу безпосередньо застосовувати до розв'язання цієї задачі підхід Беллмана – Заде. Раціональним уважається вибір альтернативи, яка має максимальний ступінь належності до нечіткого розв'язку, тобто реалізує таку величину:

$$\mathop{max}\limits_{x \in X} \min\{\mu_C(x), \overline{f}(x)\}.$$

2. *Зведення до задачі багатокритеріальної оптимізації.*

У цьому підході враховується той факт, що потрібно досягти максимального значення функції й максимальної належності розв'язку задачі множині допустимих альтернатив, а отже, формулюємо таку багатокритеріальну задачу:

$$f(x) \to \max,$$
$$\mu_C(x) \to \max,$$
$$x \in X.$$

Цей підхід детальніше буде розглянуто далі.

З а д а ч а ІІ. Нечіткий варіант стандартної задачі математичного програмування.

Його можна отримати, якщо "пом'якшити" обмеження, тобто припустити можливість деякого їх порушення у стандартній задачі математичного програмування, а саме:

$$f(x) \to \max,$$
$$\varphi(x) \tilde{\leq} 0,$$
$$x \in X.$$

Тут символ "$\sim$" означає нечіткість відповідних нерівностей.

Крім того, замість максимізації функції $f(x)$ можна прагнути досягнення певного фіксованого значення цієї функції, причому різним відхиленням $f(x)$ від цієї величини належить приписувати різні ступені допустимості (наприклад, чим більше відхилення, тим менший ступінь його допустимості). Нечітку задачу при цьому можна записати таким чином:

$$f(x) \geq z_0,$$
$$\varphi(x) \tilde{\leq} 0,$$
$$x \in X.$$

Опишемо один із способів формалізації таких задач.

Припустимо, що z_0 – задана величина цільової функції $f(x)$, досягнення якої вважається достатнім для виконання мети прийняття рішень, та існують (подані ОПР) два граничних рівні a і b, причому нерівність $f(x) < z_0 - a$ означає сильне порушення умови $f(x) \geq z_0$, а $\varphi(x) > b$ – сильне порушення умови $\varphi(x) \leq 0$. Тоді можна записати множини мети й обмежень, використовуючи такі функції належності:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq z_0 - a, \\ \mu(x,a), & z_0 - a < f(x) < z_0, \\ 1, & f(x) \geq z_0, \end{cases}$$

$$\mu_C = \begin{cases} 0, & \varphi(x) \geq b, \\ \nu(x,b), & 0 < \varphi(x) < b, \\ 1, & \varphi(x) \leq 0. \end{cases}$$

де $\mu : X \to [0,1]$ і $\nu : X \to [0,1]$ – деякі функції, що описують міру виконання відповідних нерівностей на думку ОПР і зважаючи на конкретну задачу прийняття рішень.

Таким чином, вихідну задачу буде сформульовано у вигляді задачі досягнення нечітко визначеної мети, до якої можна застосовувати підхід

Беллмана – Заде, або можна звести її до задачі багатокритеріальної оптимізації такого вигляду:

$$\mu_G(x) \to \max,$$
$$\mu_C(x) \to \max,$$
$$x \in X.$$

Детальніше методи розв'язування цієї задачі буде розглянуто нижче (підрозд. 3.3).

З а д а ч а III. Задано нечітко описану функцію, яку необхідно "максимізувати", тобто відображення $\mu_\varphi : X \times R \to [0, 1]$, де X – універсальна множина альтернатив, R – числова вісь. У цьому випадку функція $\mu_\varphi(x_0, r)$ при кожному фіксованому $x_0 \in X$ являє собою нечітку оцінку результату вибору альтернативи x_0 (нечітку *оцінку* альтернативи x_0) або нечітку реакцію системи на керування x_0. Задано також нечітку множину допустимих альтернатив $\mu_C : X \to [0, 1]$.

До такої постановки зводиться багато класів задач нечіткого математичного програмування. Методи їх розв'язування розглянуто в монографії [8].

З а д а ч а IV. Задано звичайну цільову функцію $f : X \to R$ і систему обмежень $\varphi_i(x) \le b_i$, $i = \overline{1, m}$, причому параметри в описі функцій $\varphi_i(x)$ задано нечітко, зокрема у формі нечітких множин.

Наприклад, у лінійному випадку ($X = R^n$) функції $\varphi_i(x)$ мають такий вигляд:

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, m},$$

а кожен з параметрів a_{ij} і b описано відповідною нечіткою множиною $\mu_{ij}(a_{ij})$, $\nu_i(b_i)$.

Розроблено кілька способів розв'язання таких задач.

Одним з них є метод модальних значень, який полягає в тому, що нечіткий параметр замінюється його модальним значенням, а потім розв'язується отримана скалярна задача. Ступінь належності отриманого розв'язку обчислюється як мінімум серед ступенів належності модальних значень параметрів. Однак цей метод можна застосовувати тоді, коли функції належності параметрів є унімодальними, тобто кожна з них набуває свого максимального значення тільки в одній точці. Якщо ж ця вимога не виконується, то питання про те, яке саме зі значень параметрів, що мають найвищий ступінь належності, треба вибирати, залишається відкритим.

Інший спосіб розв'язування полягає у зведенні вихідної задачі до задачі багатокритеріальної оптимізації [2].

З а д а ч а V. В умові задачі нечітко описано як параметри функцій обмежень, так і параметри цільової функції.

Одним з підходів до розв'язування такої задачі є її зведення до задачі типу III.

3.3. Задачі математичного програмування з нечіткими обмеженнями

Нехай на універсальній множині альтерантив X задано функцію $\varphi : X \to R$, значеннями якої оцінюються результати вибору альтернатив, і нечітку підмножину допустимих альтернатив $\mu_C : X \to [0, 1]$. Належить "максимізувати" у деякому сенсі функцію φ на нечіткій множині μ_C, тобто

$$\varphi(x) \to \max,$$
$$x \in C.$$

Це означає, що під "максимізацією" можна розуміти вибір нечіткої підмножини μ_D (нечіткого рішення), якому відповідає найкраще в деякому сенсі нечітке значення функції φ. Зрозуміло, що подання розв'язку в такій формі доцільним є лише тоді, коли вона змістовно сприймається ОПР.

Якщо ж ОПР не сприймає нечіткого опису задачі, то під "максимізацією" функції φ слід розуміти раціональний вибір конкретної альтернативи або множини альтернатив.

Раціональність при цьому означає, що, вибираючи конкретну альтернативу, ОПР має виходити з необхідності компромісу між бажанням отримати якомога більше значення функції φ і прагненням віддати перевагу допустимій альтернативі, яка має найбільший ступінь належності множині допустимих альтернатив.

Розглянемо два підходи до розв'язування цієї задачі, їх обґрунтування наведено в монографії [9].

3.3.1. Розв'язання, що базується на множинах рівня нечіткої множини обмежень

Цей підхід полягає в тому, що вихідна задача нечіткого математичного програмування формулюється у вигляді сукупності звичайних задач максимізації функції φ на всіляких множинах рівня множини допустимих альтернатив. Якщо ж альтернатива $x_0 \in X$ є розв'язком задачі $\varphi(x) \to \max$ на множині рівня λ, то природно вважати, що її ступінь належності нечіткій множині розв'язків задачі є не меншим за λ.

Таким чином, перебравши всілякі значення λ, одержимо функцію належності нечіткого розв'язку.

Опишемо цей підхід більш детально.

Позначимо через C_λ множину рівня λ нечіткої множини допустимих альтернатив μ_C, тобто

$$C_\lambda = \left\{ x \middle| \, x \in X, \mu_C(x) \geq \lambda \right\}.$$

Для всіх чисел $\lambda \geq 0$ *при умові, що* $C_\lambda \neq \varnothing$, *уведемо таку множину:*

$$N(\lambda) = \left\{ x \middle| \, x \in X, \varphi(x) = \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') \right\}.$$

Це множина розв'язків звичайної задачі максимізації функції φ на множині альтернатив, ступінь належності яких множині допустимих альтернатив вихідної задачі НМП є не меншим за λ.

Для побудови функції належності нечіткого розв'язку необхідно кожній альтернативі $x \in X$ приписати ступінь належності цій множині. Зробимо це таким чином: ступенем належності альтернативи x_0 нечіткій множині розв'язків будемо вважати максимальне (точніше, верхню межу) з чисел λ, для яких відповідна множина $N(\lambda)$ містить альтернативу x_0.

О з н а ч е н н я 3.2. Розв'язком задачі НМП будемо називати нечітку підмножину μ_D, яка описується такою функцією належності:

$$\mu^1(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \lambda. \tag{3.1}$$

Назвемо його *розв'язком 1-го типу.*

Т в е р д ж е н н я 3.1. Якщо $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$, то $\mu^1(x) = \mu_C(x)$.

Доведення

Якщо $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$ і $\mu^1(x) > \mu_C(x)$, то $\sup\limits_{\lambda : x \in N(\lambda)} \mu^1(x) > \mu_C(x)$. Це означає, що існує число λ, яке задовольняє умови $\lambda > \mu_C(x)$ і $x \in N(\lambda)$. Тоді відповідно до означення нечіткого розв'язку $x \in C_\lambda$, а тому $\mu_C(x) \geq \lambda$, тобто нерівність $\lambda > \mu_C(x)$ є неможливою.

Якщо ж $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$ і $\mu^1(x) < \mu_C(x)$, тобто

$$\sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \mu^1(x) < \mu_C(x) = \nu, \tag{3.2}$$

то для будь-якого числа λ, що задовольняє умову $x \in N(\lambda)$, виконується включення $x \in C_\nu \subset C_\lambda$, крім того, $x \notin N(\lambda)$, оскільки в протилежному випадку із нерівності (3.2) випливає, що $\nu < \nu$, звідки

$$\varphi(x) < \sup_{x' \in C_\nu} \varphi(x') \le \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') = \varphi(x).$$

Тим самим твердження доведено.

З огляду на твердження 3.1 та означення 3.2 функцію належності розв'язку 1-го типу можна записати в такому вигляді:

$$\mu^1(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & x \in \bigcup\limits_{\lambda > 0} N(\lambda), \\ 0 & \textit{в інших випадках}, \end{cases} \tag{3.3}$$

таким чином,

$$\operatorname{supp} \mu^1(x) = \bigcup_{\lambda > 0} N(\lambda).$$

Будемо казати, що розв'язок 1-го типу існує, якщо $\mu^1(x) \neq 0$ на множині X, тобто тоді й тільки тоді, коли знайдеться таке число $\lambda > 0$, для якого $N(\lambda) \neq \varnothing$.

Нечіткому розв'язку відповідає *нечітке* “максимальне” *значення* $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$, яке є образом нечіткої множини $\mu^1(x)$ при відображенні φ і відповідно до означення 2.36 має такий вигляд:

$$\mu_\varphi(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^1(x) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \sup_{x \in N(\lambda)} \lambda, \tag{3.4}$$

де

$$\varphi^{-1}(r) = \left\{ x \,\middle|\, x \in X, \varphi(x) = r \right\}.$$

Якщо в задачі НМП розв'язку 1-го типу не існує, то можемо скористатися ε-*оптимальним нечітким розв'язком*, який для заданого числа $\varepsilon > 0$ можна визначити таким чином:

$$\mu^1_\varepsilon(x) = \sup_{\lambda:\, x \in N(\varepsilon, \lambda)} \lambda, \tag{3.5}$$

де

$$N(\varepsilon,\lambda)=\left\{x \,\middle|\, x\in X, \varphi(x)\geq \sup_{x'\in C_\lambda} \varphi(x')-\varepsilon\right\}, \tag{3.6}$$

а нечітке значення функції φ, що йому відповідає, описується функцією належності

$$\mu_\varphi^\varepsilon(x)=\sup_{x\in\varphi^{-1}(r)} \mu_\varepsilon^1(x). \tag{3.7}$$

Межу μ_φ^ε, коли $\varepsilon\to 0$, можна вважати верхньою нечіткою межею функції φ на нечіткій множині μ_C.

Поняття ε-оптимального розв'язку може бути корисним не тільки тоді, коли $\mu^1(x)=0$ для всіх альернатив $x\in X$, але й тоді, коли $N(\lambda)=\varnothing$ при деяких значеннях λ із інтервалу [0, 1].

Розглянемо властивості розв'язку 1-го типу.

1. Для будь-якого числа r_0 при умові, що $\mu_\varphi(r_0)>0$, знайдеться така альтернатива $x\in X$, для якої $\varphi(x)=r_0$ і $x\in N(\lambda)$ при деякому значенні $\lambda>0$, тобто

$$r_0\in \operatorname{supp}\mu_\varphi \Rightarrow \left[\bigcup_{\lambda>0} N(\lambda)\right]\bigcap \varphi^{-1}(r_0)\neq\varnothing. \tag{3.8}$$

Доведення

Відповідно до означення $\mu_\varphi(\bullet)$ і множини $\operatorname{supp}\mu_\varphi$ з лівої частини виразу (3.8) отримуємо такий результат:

$$\sup_{x\in\varphi^{-1}(r_0)} \ \sup_{\lambda:\, x\in N(\lambda)} \lambda>0,$$

тобто знайдеться альтернатива $x'\in\varphi^{-1}(r_0)$, для якої буде виконуватися нерівність $\sup\limits_{\lambda:\, x'\in N(\lambda)} \lambda>0$, а це, своєю чергою, означає, що знайдеться таке число $\lambda>0$, для якого альтернатива $x'\in N(\lambda)$. Звідси одержуємо включення $x'\in\varphi^{-1}(r_0)\bigcap N(\lambda)$, що й доводить істинність виразу (3.8).

2. Якщо $r_0\in\operatorname{supp}\mu_\varphi$, то $\sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(r_0)} \mu^1(x)=\sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(r_0)} \mu_C(x)$.

Доведення

З огляду на означення нечіткого розв'язку, функції належності $\mu^1(x)$ і $\mu_C(x)$ зв'язані нерівністю: $\mu^1(x) \le \mu_C(x)$ для кожної альтернативи $x \in X$, тому буде виконуватися і така нерівність:

$$\sup_{x\in\varphi^{-1}(r_0)} \mu^1(x) \le \sup_{x\in\varphi^{-1}(r_0)} \mu_C(x).$$

Припустимо, що для деякого числа $r_0 \in \operatorname{supp}\mu_\varphi$ вона виконується як строга. Тоді стосовно деякої альтернативи $x_0 \in \varphi^{-1}(r_0)$ нерівність

$$\mu^1(x) < \mu_C(x_0) \qquad (*)$$

виконується для всіх альтернатив $x \in \varphi^{-1}(r_0)$.

Далі, оскільки $r_0 \in \operatorname{supp}\mu_\varphi$, то відповідно до властивості 1 знайдуться альтернатива $x' \in X$ і число $\lambda > 0$, для яких істинним є твердження: $x' \in \varphi^{-1}(r_0) \bigcap N(\lambda)$. Оскільки $x' \in N(\lambda)$ і $\lambda > 0$, то, ураховуючи означення розв'язку, $\mu^1(x') = \mu_C(x') \ge \lambda$, тому згідно з нерівністю (*) $\mu_C(x_0) > \lambda$, тобто $x_0 \in C_\lambda$. А з огляду на те, що $x' \in N(\lambda)$ і $x \in \varphi^{-1}(r_0)$, тобто $\varphi(x') = r_0$, маємо

$$\varphi(x') = \sup_{x\in C_\lambda} \varphi(x) = r_0 = \varphi(x_0),$$

тобто $x_0 \in \varphi^{-1}(r_0)$. Звідси $x_0 \in N(\lambda)$, і згідно з твердженням 3.1 $\mu^1(x_0) = \mu_C(x_0)$, що суперечить нерівності (*).

Властивість 2 доведено.

3. Функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\operatorname{supp}\mu_\varphi$.

Доведення

Достатньо показати, що $\mu_\varphi(r_1) \le \mu_\varphi(r_2)$ для будь-яких значень $r_1, r_2 \in \operatorname{supp}\mu_\varphi$, що задовольняють нерівності $r_1 > r_2$.

Припустимо протилежне, тобто для деяких чисел $r_1 > r_2$ з множини $\operatorname{supp}\mu_\varphi$ виконується нерівність $\mu_\varphi(r_1) > \mu_\varphi(r_2)$. Тоді відповідно до властивості 2

$$\sup_{x\in\varphi^{-1}(r_1)} \mu_C(x) > \sup_{x\in\varphi^{-1}(r_2)} \mu_C(x),$$

тобто знайдеться альтернатива $x_1 \in \varphi^{-1}(r_1)$, яка задовольняє нерівності

$$\mu_C(x_1) > \mu_C(x) \qquad (**)$$

для всіх альтернатив $x \in X$.

Далі, оскільки $r_2 \in \operatorname{supp} \mu_\varphi$, то з огляду на властивість 1 знайдеться альтернатива $x_2 \in \varphi^{-1}(r_2)$ і число $\lambda > 0$, які відповідають такій умові: $x_2 \in N(\lambda)$, тобто $r_2 = \varphi(x_2) = \sup\limits_{x \in C_\lambda} \varphi(x)$.

Крім того, звідси і з нерівності (**) випливає, що $x_1 \in C_\lambda$, і тому

$$r_2 = \varphi(x_2) = \sup_{x \in C_\lambda} \varphi(x) \geq \varphi(x_1) = r_1 ,$$

тобто $r_2 \geq r_1$, а це суперечить припущенню про те, що $r_1 > r_2$.

Властивість 3 доведено.

Отже, функцію $\mu_\varphi(r)$ описано таким чином, що її значення для конкретного числа $r \in R$ є максимальним ступенем належності альтенативи x множині $\mu_C(x)$, у межах якої функція $\varphi(x)$ набуває значення r.

Як було наведено у властивості 3, функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\operatorname{supp} \mu_\varphi$. Це означає, зокрема, що в межах множини X немає жодної альтернативи, для якої виконувалися б одночасно нерівності $\mu_C(x) > \mu_\varphi(x) > 0$ і $\varphi(x) > r$, тобто не існує такого елемента $x \in X$, що мав би більший, ніж $\mu_\varphi(r)$, ступінь належності $\mu_C(x)$ і забезпечив би більше від r значення максимізованої функції.

Якщо нечіткий розв'язок для ОПР є неприйнятним і необхідно вибрати конкретну альтернативу $x \in X$, то цей вибір має спиратися не тільки на ступінь належності цієї альтернативи нечіткій множині $\mu_C(x)$, але й на відповідне значення функції $\varphi(x)$. Як випливає з властивості 3, чим більше значення r_0, тим менше значення $\mu_C(x)$ ступеня належності тієї альтернативи x, яка забезпечує досягнення цього значення. За таких умов ОПР має спочатку звернутися до нечіткого максимального значення $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$ і вибрати пару $\left(r_0, \mu_\varphi(r_0)\right)$, що відповідає її прагненню отримати якомога більше значення r_0, та одночасно найвищий ступінь його належності множині $\mu_\varphi(r)$. Після вибору такої пари доречно зупинитись на такій альтернативі $x_0 \in \varphi^{-1}(r_0)$, що має найбільший ступінь належності множині $\mu_C(x)$ (або на альтернативі, що в дякому сенсі близька до x).

Цей підхід має два основні недоліки.

По-перше, у цьому розв’язку недостатньо явно враховується необхідність компромісу між значеннями максимізованої функції та значеннями ступеня належності альтернативи множині допустимих розв'язків.

По-друге, цей підхід є складним для обчислення.

Якщо функція належності є неперервною, то застосування цього підходу потребує розгляду нескінченної кількості задач, оскільки нескінченною буде кількість множин рівня. Однак у разі практичного використання буде достатньо розглянути скінченну множину задач для множин рівня, визначених експертами або ОПР.

3.3.2. Розв'язання, що базується на знаходженні множини ефективних альтернатив. Еквівалентність розв’язків обох типів

Для цього підходу є характерним те, що від самого початку явно враховується прагнення ОПР при виборі альтернативи отримати якомога більші значення як максимізованої функції, так і функції належності нечіткої множини допустимих альтернатив.

Із цією метою до визначення розв'язку включають лише ті альтернативи, які в задачах багатокритеріальної оптимізації називаються ефективними за Парето.

Нагадаємо, що альтернатива $x_0 \in X$ називається ефективною за двома функціями: $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$, коли для будь-якої іншої альтернативи $x' \in X$ з нерівностей $\varphi(x') \geq \varphi(x_0)$ і $\mu_C(x') \geq \mu_C(x_0)$ випливає істинність таких рівностей: $\varphi(x') = \varphi(x_0)$ і $\mu_C(x') = \mu_C(x_0)$.

Інакше кажучи, якщо x_0 – ефективна альтернатива для функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$ на множині X, то, вибравши будь-яку іншу альтернативу, не можна збільшити, порівняно з $\varphi(x_0)$ і $\mu_C(x_0)$, значення однієї функції, не зменшивши при цьому значення іншої.

У задачі прийняття рішень за наявності кількох критеріїв множина ефективних альтернатив є сукупністю запропонованих варіантів раціонального вибору, що здійснюється ОПР.

Отже, нехай P – множина всіх ефективних альтернатив для функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$, які розглядаються в задачі нечіткого математичного програмування.

О з н а ч е н н я 3.3. Розв'язком задачі НМП називають нечітку множину, функція належності якої має вигляд

$$\mu^2(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & \text{\textit{коли} } x \in P, \\ 0 & \text{\textit{в інших випадках.}} \end{cases} \tag{3.9}$$

Його будемо називати розв'язком 2-го типу.

У цьому означенні існує явне припущення про те, що ОПР під час прийняття рішення має використовувати лише ті альтерантиви універсальної множини X, які дають одночасно неполіпшувані значення функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$.

Нечітке значення функції $\varphi(x)$, що відповідає розв'язку 2-го типу, записується в такому вигляді:

$$\mu^2(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^2(x), \quad r \in R^1. \tag{3.10}$$

Встановимо співвідношення між розв'язками обох типів.

Теорема 3.1 [9]. Якщо множина X є компактною, функція $\varphi(x)$ – неперервною, а функція $\mu_C(x)$ – напівнеперервною зверху на множині X, то для кожного значення $r \in R^1$ виконується рівність

$$\mu_\varphi^1(r) = \mu_\varphi^2(r). \tag{3.11}$$

Доведення

Зауважимо спочатку, що в умовах теореми множина $\varphi^{-1}(r)$ є замкненою в X відносно кожного числа $r \in R^1$, і отже, для $\forall\, r \in R^1$ можна відшукати альтернативу $x_0 \in \varphi^{-1}(r)$, яка задовольняє рівності

$$\sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^1(x) = \mu^1(x_0). \tag{3.12}$$

Припустимо, що знайдеться число $r_0 \in R^1$, для якого $\mu_\varphi^1(r_0) > \mu_\varphi^2(r_0)$ або

$$\sup_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu^1(x) > \sup_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu^2(x). \tag{3.13}$$

Як наслідок рівності (3.12) і в умовах теореми вираз (3.13) набуває такого вигляду:

$$\mu_C(x_0) = \max_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu_C(x) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu^1(x) > \sup \mu^2(x). \tag{3.14}$$

Звідси

$$\mu_C(x_0) > \mu^2(x) \quad \forall x \in \varphi^1(r_0). \qquad (3.15)$$

При цьому можливі такі ситуації:

1. Якщо $\mu^2(x) > 0$ для деякого елемента $x \in \varphi^{-1}(r_0)$, то $\mu^2(x_0) = \mu_C(x)$, а отже, $\varphi(x_0) = \varphi(x) = r_0$, $\mu_C(x_0) > \mu_C(x)$. Але це суперечить ефективності альтернативи x для функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$.

2. Якщо $\mu^2(x) = 0 \ \ \forall x \in \varphi^{-1}(r_0)$, то жодна альтернатива не є ефективною, тобто для будь-якої альтернативи $x \in \varphi^{-1}(r_0)$ знайдеться інша альтернатива $x' \in X$, що відповідає таким умовам:

$$\varphi(x) \geq \varphi(x') = r_0, \quad \mu_C(x) > \mu_C(x') \qquad (3.16)$$

або

$$\varphi(x) > \varphi(x') = r_0, \quad \mu_C(x) \geq \mu_C(x'). \qquad (3.17)$$

Але якщо $x' \in \varphi^{-1}(r_0) \cap N(\lambda)$ для деякого числа $\lambda > 0$, то на основі умов (3.17) робимо висновок, що $x \in C_\lambda$. Таким чином,

$$\varphi(x) \leq r_0 = \varphi(x'),$$

а це суперечить рівностям (3.17).

Що стосується умов (3.16), то вони не мають місця для альтернативи $x' = x_0$, оскільки $x \in \varphi^{-1}(r_0)$ і $\mu_C(x_0) = \max\limits_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu_C(x)$.

Звідси $\mu_\varphi^1(r) = \mu_\varphi^2(r) \ \ \forall r \in R^1$. Отже, теорему доведено.

З огляду на означення 3.3, реалізацію розв'язку 2-го типу зведено до пошуку множини ефективних альтернатив функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$. Однак ця множина у загальному випадку містить нескінченну кількість елементів, а її побудова являє собою досить складне завдання.

Разом з тим, для отримання такого розв'язку в конкретній задачі достатньо, щоб було визначено скінченну кількість ефективних альтернатив, рівномірно вибраних із множини P.

Для її відшукання можна скористатися такою властивістю.

Якщо існують такі числа $\nu_1, \nu_2 \ \ (\nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0,\ \nu_1 + \nu_2 = 1)$, при яких альтернатива x_0 забезпечує досягнення на множині X максимуму функції $F(x) = \nu_1 \varphi(x) + \nu_2 \mu_C(x)$, то ця альтернатива є ефективною для цільових функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$.

Таким чином, надаючи різних додатних значень ваговим коефіцієнтам функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$ і максимізуючи відповідні функції $F(x)$, можна визначити будь-яку необхідну кількість ефективних альтернатив.

Отримані при цьому альтернативи разом з відповідними значеннями функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$ передаються в розпорядження ОПР, яка й робить остаточний вибір, виходячи зі своїх суб’єктивних уявлень або використовуючи не враховану в поданій математичній моделі інформацію про відповідну важливість значень функцій $\varphi(x)$ і $\mu_C(x)$.

3.4. Прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги на множині альтернатив

Досліджуючи реальну ситуацію або процес з метою прийняття раціонального рішення, природно спочатку виявити множину всіх допустимих розв’язків або альтернатив.

Залежно від якості наявної інформації цю множину вдається описати з тією чи іншою мірою чіткості. Нехай, наприклад, маємо деяку універсальну множину альтернатив X і нечіткий опис її підмножини допустимих альтернатив $\mu_C(x)$. Значення функції μ_C описують міру допустимості відповідних альтернатив у поданій задачі.

Якщо крім цієї функції не існує іншої інформації про досліджувану альтернативу, то раціональним залишається прийняти вибір деякої альтернативи з такої множини:

$$X^D = \left\{ x \middle| x \in X, \mu_C(x) = \sup_{y \in X} \mu_C(y) \right\}.$$

Іншими словами, доцільно вибирати довільну альтернативу з тих, що мають максимальний ступінь прийнятності, оскільки не існує підстав віддавати перевагу іншим. При введенні в модель додаткової інформації раціональним може виявитися вибір альтернатив з будь-якої підмножини множини X^D або будь-яких альтернатив, що не належать цій множині. Не виключено, що ця інформація може бути підставою для виявлення єдиної, найкращої з усіх, альтернативи.

Інформація про реальну ситуацію або процес, керуючись якою, надають перевагу одній альтернативі над іншою, може бути виражена різними способами. У попередніх розділах було розглянуто випадки, коли її наводили у формі функцій корисності або описували числовими нерівностями, але такий спосіб опису не завжди можливий. Більш універсальним можна вважати подання інформації у формі відношень переваги на множині альтернатив, зокрема, у вигляді бінарних відношень (цей випадок було розглянуто в розд. 1), але не завжди вони можуть бути визначені чітко. Іншими словами, іноді більш точною моделлю ситуації буде опис переваг у вигляді нечітких відношень, тобто коли вони виявляються тільки певною мірою. Шляхи прийняття рішень за таких умов і буде розглянуто нижче.

3.4.1. Нечіткі відношення переваги та їх властивості

О з н а ч е н н я 3.4. Нехай X – задана множина альтернатив. *Нечітким відношенням нестрогої переваги (НВП)* на множині X будемо називати будь-яке задане на ній рефлексивне відношення.

Це відношення описується функцією належності $\mu_R : X \times X \to [0;\, 1]$, яка є рефлексивною, тобто $\mu_R(x,x)=1 \quad \forall x \in X$.

Якщо μ_R – нечітке відношення переваги на множині X, то для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ значення $\mu_R(x,y)$ відображає міру виконання переваги "x не гірше y", або $x \geq y$. З того, що $\mu_R(x,y)=0$, випливає одне з двох тверджень: або $y = x$, або x і y є непорівнянними з додатною мірою. Рефлексивність цього відношення відображає той факт, що будь-яка альтернатива не гірша від себе самої.

Подане на множині X нечітке відношення переваги однозначно задає три нечітких відношення, що йому відповідають:

- однаковості $R^I\left(\mu_R^I\right)$;
- квазіеквівалентності $R^e\left(\mu_R^e\right)$;
- строгої переваги $R^S\left(\mu_R^S\right)$.

Ці відношення будуть використовуватися для визначення й аналізу властивостей недомінованих альтернатив у задачах прийняття рішень.

За аналогією до звичайних відношень їх можна визначити таким чином:

$$R^I = \left(X \times X \setminus R \bigcup R^{-1}\right) \bigcup \left(R \bigcap R^{-1}\right),$$
$$R^S = R \setminus R^{-1},$$
$$R^e = R \bigcap R^{-1},$$

де R^{-1} – обернене до R відношення, що описується такою функцією належності:

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(x,y) \quad \forall (x,y) \in X \times X .$$

Використавши визначення операцій об'єднання, перетину та різниці нечітких множин, отримаємо вирази для опису функцій належності цих відношень:

1. Нечітке відношення байдужості

$$\mu_R^I(x,y) = \max\{1-\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\},\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}\} =$$
$$= \max\{min\{1-\mu_R(x,y),1-\mu_R(y,x)\},\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}\}.$$

2. Нечітке відношення квазіеквівалентності

$$\mu_R^e(x,y) = \min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}.$$

3. Нечітке відношення строгої переваги

$$\mu_R^S(x,y) = \begin{cases} \mu_R(x,y)-\mu_R(y,x), & коли \quad \mu_R(x,y) \ge \mu_R(y,x), \\ 0, & коли \quad \mu_R(x,y) < \mu_R(y,x). \end{cases}$$

Сенс цих відношень можна пояснити на прикладі.

П р и к л а д 3.3 (чітке відношення переваги). На множині X подано n функцій $f_i : X \to R^1, i=1,...,n$. Задамо на множині X відношення переваги R таким чином: $x\,R\,y \Leftrightarrow f_i(x) \ge f_i(y), \quad \forall\, i=1,...,n$.

Легко помітити, що функція належності відношення R має такий вигляд:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, & якщо \quad f_i(x) \ge f_i(y) \;\; \forall i=\overline{1,n}, \\ 0 & в \quad інших \quad випадках. \end{cases}$$

Зазначимо, що при такому відношенні переваги в множині X можуть бути альтернативи, які не можна порівняти, тобто $R \cup R^{-1} \ne X \times X$, та існують такі альтернативи x, y, для яких виконується умова $(x,y) \notin R \cup R^{-1}$. Наприклад, альтернативи x, y, для яких $f_i(x) \ge f_i(y) \quad \forall i \ne i_0$, але $f_{i_0}(x) < f_{i_0}(y)$.

З огляду на подані вище означення

$$\mu_R^e(x,y) = \begin{cases} 1, & якщо \quad f_i(x) = f_i(y) \quad \forall i=\overline{1,n}, \\ 0 & в \quad інших \quad випадках. \end{cases}$$

Підкреслимо, що альтернативи, недоміновані щодо заданого відношення переваги, називаються ефективними або оптимальними за Парето для функцій $f_i(x), \quad i=1,...,n$.

Розглянемо тепер деякі властивості визначених нечітких відношень μ_R^e і μ_R^S.

1. Нечіткі відношення μ_R^e і μ_R^I є рефлексивними й симетричними.

Дійсно, $\mu_R^e(x,x)=\mu_R^I(x,x)=\mu_R(x,x)=1$, оскільки вихідне відношення μ_R є рефлексивним. Симетричність цих відношень випливає з їх означень.

2. Відношення μ_R^S – антирефлексивне й антисиметричне.

Справді, $\mu_R^S(x,x)=0$, оскільки вихідне НВП належить до рефлексивних, тобто $\mu_R(x,x)=1 \ \forall x \in X$.

Нехай $\mu_R^S(x,y)>0$, тобто $\mu_R(x,y)-\mu_R(y,x)>0$, тоді $\mu_R^S(y,x)=0$, а це й свідчить про антисиметричніть цього відношення.

Покажемо тепер, що коли вихідне НВП μ_R на множині X належить до транзитивних, то нечіткі відношення μ_R^e і μ_R^S теж є транзитивними.

Теорема 3.2. Якщо НВП μ_R на множині X є транзитивним, то й відповідне нечітке відношення μ_R^e також буде транзитивним.

Зауважимо, що з цієї теореми та з розглянутих вище властивостей відношення μ_R^e випливає, що в умовах теореми воно являє собою нечітке відношення еквівалентності (рефлексивне, симетричне, транзитивне).

Доведення

Припустимо, що в умовах теореми відношення μ_R^e не є транзитивним. Інакше кажучи, можна виявити такі альтернативи $x,y,z \in X$, для яких буде виконуватися нерівність

$$\mu_R^e(x,y) < \min\left\{\mu_R^e(x,z), \mu_R^e(z,y)\right\}. \tag{3.18}$$

Припустимо тепер, що $\mu_R(x,y) \geq \mu_R(y,x)$, тоді з означення відношення μ_R^e робимо висновок: $\mu_R^e(x,y)=\mu_R(y,x)$. Користуючись цією рівністю, запишемо нерівність (3.18) у такому вигляді:

$$\mu_R(y,x) < \min\left\{\mu_R^e(y,z), \mu_R^e(z,x)\right\}. \tag{3.19}$$

Оскільки відношення μ_R^e – симетричне, то з нерівності (3.19) випливає, що

$$\mu_R^e(y,z) \leq \mu_R(y,z),$$

$$\mu_R^e(z,x) \leq \mu_R(z,x),$$

тобто

$$\min\left\{\mu_R^e(y,z), \mu_R^e(z,x)\right\} \leq \min\left\{\mu_R(y,z), \mu_R(z,x)\right\},$$

а

$$\mu_R(y,x) \le \min\{\mu_R(y,z), \mu_R(z,x)\},$$

що суперечить умові транзитивності вихідного відношення, за якою

$$\mu_R(x,y) \ge \max_{z\in X} \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\}.$$

Випадок, коли $\mu_R(y,x) \ge \mu_R(x,y)$, доводиться аналогічно.

Можна довести аналогічне твердження і стосовно відношення строгої переваги μ_R^S.

Теорема 3.3. Якщо нечітке відношення переваги μ_R на множині X є транзитивним, то транзитивним буде також відповідне нечітке відношення строгої переваги μ_R^S.

Доведення

Припустимо, що в умовах теореми відношення μ_R^S не є транзитивним. Це означає, що знайдуться альтернативи $x, y, z \in X$, для яких буде виконуватися така нерівність:

$$\mu_R^S(x,y) < \min\left\{\mu_R^S(x,z), \mu_R^S(z,y)\right\}. \tag{3.20}$$

Оскільки $\mu_R^S(x,y) > 0 \quad \forall x, y \in X$, то

$$\mu_R^S(x,z) = \mu_R(x,z) - \mu_R(z,x) > 0, \tag{3.21}$$

$$\mu_R^S(z,y) = \mu_R(z,y) - \mu_R(y,z) > 0. \tag{3.22}$$

Розглянемо два випадки.

1. Нехай $\mu_R(x,y) \le \mu_R(y,x)$, тоді, ураховуючи транзитивність відношення μ_R, можемо записати таку нерівність:

$$\mu_R(y,x) \ge \mu_R(x,y) \ge \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\}. \tag{3.23}$$

Крім того, із транзитивності відношення μ_R і нерівності (3.21) випливає, що

$$\mu_R(x,z) \ge \mu_R(z,x) \ge \min\{\mu_R(z,y), \mu_R(y,x)\}. \tag{3.24}$$

Беручи до уваги співвідношення (3.23) і (3.24), робимо такий висновок:

$$\mu_R(x,z) \ge \min\{\mu_R(z,y), \mu_R(x,z)\}, \tag{3.25}$$

тобто

$$\mu_R(x,z) > \mu_R(z,y), \tag{3.26}$$

а з (3.23) випливає, що

$$\mu_R(x,y) \geq \mu_R(z,y). \tag{3.27}$$

Далі, оскільки відношення μ_R – транзитивне, то

$$\mu_R(y,z) \geq \min\{\mu_R(y,z), \mu_R(z,y)\} \geq \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(z,y)\}.$$

Беручи до уваги цю нерівність і співвідношення (3.27), робимо висновок, що $\mu_R(y,z) \geq \mu_R(z,y)$, а це суперечить твердженню (3.22).

Таким чином, бачимо, що з умови (3.20) випливає неможливість виконання такої нерівності:

$$\mu_R(x,y) \geq \mu_R(y,x).$$

2. Припустимо тепер, що $\mu_R(x,y) > \mu_R(y,x)$, тоді

$$\mu_R^S(x,y) = \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) > 0,$$

а нерівність (3.20) можемо записати у такому вигляді:

$$\mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) < \min\Big\{[\mu_R(x,z) - \mu_R(z,x)], [\mu_R(z,y) - \mu_R(y,z)]\Big\}. \tag{3.28}$$

Далі припустимо, що $\mu_R(y,z) \geq \mu_R(y,x)$, тоді функцію $\mu_R(y,z)$ у виразі (3.28) можна замінити на $\mu_R(y,x)$, тобто

$$\mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) < \min\Big\{[\mu_R(x,z) - \mu_R(z,x)], [\mu_R(z,y) - \mu_R(y,x)]\Big\}. \tag{3.29}$$

Коли додати до обох частин цієї нерівності $\mu_R(y,x)$, то вираз набуває такого вигляду:

$$\mu_R(x,y) < \min\Big\{[\mu_R(x,z) + (\mu_R(y,x) - \mu_R(z,x))], \mu_R(z,y)\Big\}. \tag{3.30}$$

Тут слід розглянути дві можливості:

1) якщо $\mu_R(y,x) - \mu_R(z,x) \leq 0$, то з (3.30) одержуємо нерівність

$$\mu_R(x,y) < \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\},$$

а вона суперечить транзитивності відношення μ_R;

2) якщо ж $\mu_R(y,x)-\mu_R(z,x)>0$, то, ураховуючи транзитивність μ_R, можемо зробити висновок, що

$$\mu_R(x,y)>\mu_R(z,x)\geq\min\{\mu_R(z,y),\mu_R(y,x)\},$$

звідки випливає нерівність

$$\mu_R(y,x)>\mu_R(z,y),$$

а вона суперечить тому, що $\mu_R(y,z)\geq\mu_R(y,x)$.

Отже, було показано, якщо виконується умова $\mu_R(x,y)>\mu_R(y,x)$, то з урахуванням нерівностей (3.21), (3.22) маємо

$$\mu_R(y,z)<\mu_R(y,x). \qquad (3.31)$$

Аналогічно можна показати, що коли $\mu_R(x,y)>\mu_R(y,x)$, то з виразів (3.21) і (3.22) випливає нерівність

$$\mu_R(z,x)<\mu_R(y,x). \qquad (3.32)$$

Далі, беручи до уваги, що

$$\mu_R(y,z)\geq\min\{\mu_R(y,x),\mu_R(x,z)\},$$

$$\mu_R(z,x)\geq\min\{\mu_R(z,y),\mu_R(y,x)\},$$

із виразів (3.31) і (3.32) отримуємо такі нерівності:

$$\mu_R(y,z)\geq\mu_R(x,z),$$

$$\mu_R(z,x)\geq\mu_R(z,y),$$

а вони суперечать припущенням (3.21) і (3.22).

Теорему доведено.

3.4.2. Нечітка підмножина недомінованих альтернатив

Розглянемо тепер задачу раціонального вибору альтернатив із множини X, на якій задано нечітке відношення переваги R з функцією належності $\mu_R: X\times X\to[0,1]$.

Як було зазначено вище, у тих випадках, коли дані про ситуацію прийняття рішень описано у формі звичайного відношення переваги, то раціональним можна вважати вибір максимальних (недомінованих) альтернатив. Математично така задача зводиться до визначення на поданій множині X підмножини недомінованих альтернатив.

Далі спробуємо застосувати цей підхід до задач прийняття рішень, коли відношення переваги на множині альтернатив описано нечітко.

Отже, нехай маємо звичайну (чітко описану) множину альтернатив X і подане на ній нечітке відношення нестрогої переваги μ_R, а також нечітке відношення строгої переваги μ_R^S, що йому відповідає. Визначимо підмножину недомінованих альтернатив множини (X, μ_R). Зазначимо, що оскільки вихідне відношення переваги є нечітким, то природно очікувати, що й відповідна підмножина недомінованих альтернатив буде нечіткою.

Згідно з означенням відношення строгої переваги для будь-яких альтернатив $x, y \in X$ величина $\mu_R^S(y, x)$ являє собою міру, з якою альтернатива x буде домінована альтернативою y. Отже, стосовно фіксованої альтернативи $y \in X$ визначену на множині X функцію $\mu_R^S(y, x)$ можна вважати функцією належності нечіткої множини всіх альтернатив x, які строго доміновані альтернативою y.

Нехай, наприклад, ступінь належності альтернативи x_0 цій множині (відповідно деякій фіксованій альтернативі y) дорівнює 0,3. Це означає, що x_0 домінована альтернативою y зі ступенем 0,3. Легко зрозуміти, що множина "всіх" альтернатив x, які не домінуються альтернативою y, являє собою доповнення множини $\mu_R^S(y, x)$ у множині X, а її функцію належності можна записати таким чином:

$$1 - \mu_R^S(y, x), \; x \in X . \qquad (3.33)$$

Якщо, наприклад, $\mu_R^S(y, x) = 0{,}3$, то альтернатива x не домінується альтернативою y зі ступенем 0,7. Очевидно, що для визначення в множині X підмножини "всіх" альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою цієї множини, необхідно взяти перетин нечітких множин, описаних виразом (3.33), за всіма альтернативами $y \in X$.

О з н а ч е н н я 3.5. Нехай X – множина альтернатив, μ_R – подане на ній нечітке відношення переваги. Нечіткою підмножиною недомінованих альтернатив $\mu_R^{н.д}(x)$ назвемо перетин нечітких множин, які мають вигляд, що відповідає виразу (3.33) за всіма альтернативами $y \in X$:

$$\mu_R^{н.д}(x) = \inf_{y \in X} [1 - \mu_R^S(y, x)],\ x \in X\ , \tag{3.34}$$

або

$$\mu_R^{н.д}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x),\ x \in X\ . \tag{3.35}$$

Значення функції $\mu_R^{н.д}(x)$ відображає міру, з якою альтернатива x не буде домінуватися жодною альтернативою множини X.

Нехай $\mu_R^{н.д}(x_0) = a$ для деякої альтернативи x_0. У цьому випадку x_0 може домінуватися іншими альтернативами, але зі ступенем, не більшим від $(1 - a)$.

Справді, при цьому

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x_0) = 1 - a\ ,$$

і тоді

$$\mu_R^s(y, x_0) \le 1 - a \quad \forall y \in X\ .$$

Визначимо тепер нечітку підмножину альтернатив через функцію належності вихідного нечіткого відношення переваги μ_R. Для цього покажемо, що

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S = \sup_{y \in X} [\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y)] \quad \forall x \in X\ . \tag{3.36}$$

Дійсно, нехай довільно вибрано альтернативу $x \in X$. Уведемо такі множини:

$$Y^1(x) = \{y \mid y \in X,\ \mu_R(y, x) > \mu_R(x, y)\}\ , \tag{3.37}$$

$$Y^2(x) = \{y \mid y \in X,\ \mu_R(y, x) \le \mu_R(x, y)\}\ . \tag{3.38}$$

Ураховуючи те, що $Y^1(x) \cup Y^2(x) = X$, для кожної альтернативи $x \in X$ запишемо рівність (3.36) у такій формі:

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = max \left\{ \sup_{y \in Y^1(x)} \mu_R^S(y, x),\ \sup_{y \in Y^2} \mu_R^S(y, x) \right\}. \tag{3.39}$$

Далі, спираючись на означення μ_R^S, виконуємо перетворення виразу (3.39):

$$\sup_{y\in X}\mu_R^S(y,x)=max\left\{\sup_{y\in Y\ (x)}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)],0\right\}=$$

$$=max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}[\mu_R(y,y)-\mu_R(x,y)],\ \sup_{y\in Y^2}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)]\right\}=$$

$$=\sup_{y\in X}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)].$$

Беручи до уваги рівність (3.36), можна описати множину недомінованих альтернатив з допомогою такої функції належності:

$$\mu_R^{н.д}(x)=1-\sup_{y\in X}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)]. \qquad (3.40)$$

Формула (3.40) може бути корисною під час оброблення інформації, поданої у вигляді нечіткого відношення переваги, для визначення в множині X підмножини недомінованих альтернатив.

Оскільки величина $\mu_R^{н.д}(x)$ є мірою “недомінованості” альтернативи x, то з огляду на подану нечітку інформацію раціональним природно вважати вибір альтернатив, що мають якомога більший ступінь належності нечіткій множині $\mu_R^{н.д}(x)$, тобто тих альтернатив, які мають значення функції $\mu_R^{н.д}(x)$, найближче до такої величини:

$$\sup_{x\in X}\mu_R^{н.д}(x)=1-\inf_{x\in X}\sup_{y\in X}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)].$$

Альтернативи для яких функція $\mu_R^{н.д}(x)$ досягає своєї верхньої грані, тобто елементи множини

$$X_{н.д}=\left\{x \,\middle|\, x\in X,\ \mu_R^{н.д}(x)=\sup_{z\in X}\mu_R^{н.д}(z)\right\},$$

будемо називати максимальними недомінованими альтернативами множини (X,μ_R).

П р и к л а д 3.4. Задано скінченну множину $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ і нечітке відношення переваги на ній, функція належності якого $\mu_R(x_i,x_j)$ має такий вигляд:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,2	0,3	0,8
x_2	0,5	1	0,2	0,1
x_3	0,6	0,4	1	0,5
x_4	0,1	0,2	0,3	1

Знайдемо множину недомінованих альтернатив множини (X, μ_R).

Згідно з поданим вище означенням функція $\mu_R^S(x_i, x_j)$ є такою:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0,7
x_2	0,3	0	0	0
x_3	0,3	0,2	0	0,2
x_4	0,1	0	0	0

Тоді для значень $\mu_R^{н.д}(x_i)$ маємо таке:

x_1	x_2	x_3	x_4
0,7	0,8	1	0,3

Звідси бачимо, що найбільший ступінь недомінованості має альтернатива x_3, а тому її вибір слід уважати раціональним.

О з н а ч е н н я 3.6. Відношення R на множині X назвемо *лінійним*, якщо ним або оберненим до нього відношенням зв'язані кожні дві альтернативні множини X.

Тобто, коли відношення лінійне, то на множині X не існує непорівнянних альтернатив. Для звичайних відношень лінійність означає, що буде правильним таке твердження:

$$R \cup R^{-1} = X \times X,$$

де R^{-1} – обернене до R відношення, або з використанням термінів характеристичних функцій

$$\mu_R(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_R(y, x) = 1.$$

Якщо має місце нечітке відношення, то однозначно можна виявити лише повну відсутність лінійності, тобто нечітке відношення μ_R не буде лінійним тоді і тільки тоді, коли знайдуться альтернативи $x, y \in X$, для яких виконується рівність

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)=0,$$

де $\mu_R(x,y)$ – функція належності цього нечіткого відношення.

Отже, властивість лінійності нечіткого відношення можна розуміти більш широко.

О з н а ч е н н я 3.7. Нехай λ – деяке число з інтервалу [0, 1]. Нечітке відношення μ_R будемо називати λ-*лінійним*, якщо його функція належності має таку властивість:

$$\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}>\lambda \quad \forall x,y\in X. \tag{3.41}$$

Таким чином, якщо, наприклад, нечіткий порядок являє собою 0,7-лінійне відношення, то з кожних двох альтернатив одна буде не гіршою від іншої зі ступенем, не меншим за 0,7.

О з н а ч е н н я 3.8. Нечітке відношення називається *сильнолінійним*, якщо його функція належності задовольняє умову

$$\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}=1 \quad \forall x,y\in X. \tag{3.42}$$

Інакше цю властивість можна визначити таким чином:

$$\mu_R(x,y)\geq\mu_R(y,x)\Rightarrow\mu_R(x,y)=1. \tag{3.43}$$

Покажемо тепер, що сильна лінійність відповідає умові

$$\mu_R(x,y)=1-\mu_R^S(y,x) \quad \forall x,y\in X, \tag{3.44}$$

де μ_R^S – відповідне нечітке відношення строгої переваги.

Дійсно, коли виконується умова (3.42), то відповідно до означення відношення строгої переваги μ_R^S робимо висновок, що $\mu_R^S(y,x)=0$ і $\mu_R^S(x,y)=1$, тобто умова (3.43) також виконується. З іншого боку, якщо виконується (3.43) і, крім того, має місце нерівність $\mu_R(x,y)\geq\mu_R(y,x)$, то $\mu_R^S(y,x)=0$ і $\mu_R(x,y)=1$, тобто виконується також умова (3.42).

Пояснимо сенс сильної лінійності. Наприклад, альтернатива x є кращою від альтернативи y зі ступенем 1 $(x\succ y)$, тоді $(x,y)\notin R^{-1}$, тобто y не може бути кращою від x з жодним додатним ступенем. Коли ж має місце відношення $y\succ x$, то $(x,y)\in R^{-1}$, тобто $y\succ x$ зі ступенем 1. Якщо ж альтернатива x краща від альтернативи y зі ступенем α $(x\underset{\alpha}{\succ}y)$, то зі ступенем $(1-\alpha)$ виконується перевага $y \succ x$. Таким чином, за своїм змістом сильна лінійність значною мірою аналогічна лінійності звичайного відношення.

Сильнолінійні відношення мають такі властивості:

1. $\mu_R(x_1, x_2) = 1, \quad \mu_R(x_2, x_1) = 0.$

2. Відношення R^e і R^I, що відповідають сильнолінійному відношенню, збігаються.

Дійсно, коли для деяких пар альтернатив $(x, y) \in X$ виконується умова $\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x)$, то з означення сильної лінійності випливає рівність $\mu_R(x, y) = 1$, а відповідно до означення відношення μ_R^I робимо висновок, що $\mu_R^I(x, y) = \mu_R(x, y)$. Унаслідок симетричності відношення μ_R^I, коли $\mu_R(x, y) \leq \mu_R(y, x)$, маємо

$$\mu_R^I(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = \mu_R^e(x, y).$$

О з н а ч е н н я 3.9. Нечітке відношення переваги назвемо *слабколінійним,* якщо воно має таку властивість:

$$\mu_R(x, y) = 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) > 0 \quad \forall x, y \in X.$$

Неведемо приклади лінійних нечітких відношень.

Нехай X – множина, що складається з чотирьох елементів, тоді нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,55 & 0,6 & 0 \\ 0 & 1 & 0,3 & 1 \\ 0,2 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,8 & 1 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$$

буде 0,5-лінійним.

Відношення, що описується функцією належності вигляду

$$\mu_R(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0,8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$

буде сильнолінійним.

3.4.3. Чітко недоміновані альтернативи та їх властивості

У цьому підрозділі розглянемо задачі, у яких множина недомінованих альтернатив являє собою нормальну нечітку підмножину універсальної множини X, тобто функція належності цієї підмножини має таку властивість:

$$\sup_{x \in X} \mu_R^{н.д}(x) = 1. \tag{3.45}$$

У цьому випадку для альтернативи з множини $X^{н.д}$ максимальних недомінованих альтернатив виконується умова $\mu_R^{н.д}(x) = 1$, тобто міра недомінованості кожної з них дорівнює 1.

Іншими словами, для кожної альтернативи $x \in X^{н.д}$ і будь-якої альтернативи $y \in X$ при цьому виконується нерівність $\mu_R^S(y, x) = 0$, тобто жодна альтернатива не домінує з додатним ступенем над альтернативою x.

Тому ці альтернативи будемо називати *чітко недомінованими*, множину таких альтернатив позначимо як $X^{ЧНД}$. Таким чином,

$$X^{ЧНД} = \left\{ x \middle| x \in X, \mu_R^{н.д}(x) = 1 \right\}. \tag{3.46}$$

Як випливає з означення множини $X^{ЧНД}$ і $\mu_R^{н.д}$, для кожної чітко недомінованої альтернативи виконується умова

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = 0 \quad \forall x \in X^{ЧНД}, \tag{3.47}$$

де μ_R^S – нечітке відношення строгої переваги, яке відповідає відношенню μ_R.

Звідси можна зробити висновок, що для будь-яких альтернатив буде виконуватися така рівність:

$$\mu_R^S(x_1, x_2) = \mu_R^S(x_2, x_1) = 0. \tag{3.48}$$

Із означення випливає, що рівність (3.48) є еквівалентною рівності

$$\mu_R(x_1, x_2) = \mu_R(x_2, x_1),$$

але тоді

$$\mu_R^I(x_1, x_2) = max\{1 - \mu_R(x_1, x_2), \mu_R(x_1, x_2)\} \geq 0,5.$$

Інакше кажучи, будь-які дві чітко недоміновані альтернативи зв'язані відношеннями байдужості зі ступенем, не меншим 0,5.

А відповідне нечітке відношення еквівалентності μ_R^e буде визначатися таким чином:

$$\mu_R^e(x_1, x_2) = \mu_R(x_1, x_2) = \mu_R(x_2, x_1) \ \forall x_1, x_2 \in X^{ЧНД}. \tag{3.49}$$

Коли мають місце довільні нечіткі відношення переваги, то може виявитися, що $\mu_R^e(x_1, x_2) = 0$ для деяких альтернатив $x_1, x_2 \in X^{ЧНД}$, тобто з жодною додатною мірою ці альтернативи не будуть еквівалентними. Зауважимо, що тоді $\mu_R(x_1, x_2) = 0$, тобто x_1 і x_2 – непорівнянні величини. Однак це не стосується лінійних відношень.

3.5. Прийняття рішень за наявності кількох відношень переваги на множині альтернатив

Розглянемо задачу, у якій задано множину альтернатив X і кожна альтернатива цієї множини характеризується кількома ознаками, номери яких $j = 1,...,m$. Інформацію про попарне порівняння альтернатив подано у вигляді відношень переваги R_j, $j = 1, 2,...,m$. Таким чином, маємо m відношень переваги на множині X. Завдання полягає в тому, щоб на основі наявної інформації зробити раціональний вибір альтернатив з множини $(X, R_1, R_2,..., R_m)$.

Розглянемо спочатку ситуацію, коли відношення описуються числовими функціями корисності $f_j : X \to R,\ j = 1,...,m$. Значення функції $f_j(x)$ можна вважати числовою оцінкою альтернативи за ознакою j $(j = 1,...,m)$. Перевага за ознакою j віддається альтернативі, що характеризується більш високою оцінкою $f_j(x)$. Завдання полягає в тому, щоб вибрати альтернативу, яка має якомога більші оцінки за всіми ознаками. Раціональним у цьому випадку вважається вибір альтернативи x_0, що має таку властивість:

$$\text{якщо } f_j(y) \ge f_j(x_0),\ j = 1,...,m, \text{ то } f_j(y) = f_j(x_0),\ j = 1,...,m. \tag{3.50}$$

Такі альтернативи в багатокритеріальній оптимізації називаються *ефективними.*

Легко помітити, що кожна функція $f_j(x),\ j = 1,...,m$ описує звичайне відношення переваги на множині альтернатив таким чином:

$$R_j = \{(x, y) \mid x, y \in X,\ f_j(x) \ge f_j(y)\}. \tag{3.51}$$

Нехай $Q_1 = \bigcap_{j=1}^{m} R_j$. Необхідно впевнитися, що множина всіх ефективних (недомінованих) альтернатив у множині (X, Q_1) збігається з множиною ефективних альтернатив для набору функцій f_j, $j = 1, ..., m$.

Припустимо, що x_0 – альтернатива, яка не домінується в множині (X, Q_1). Це означає, що для будь-якої альтернативи $y \in X$ виконується умова

$$(y, x_0) \notin Q_1^S, \tag{3.52}$$

де Q_1^S – відношення строгої переваги, що відповідає відношенню Q_1,

$$Q_1^S = \{(x, y) \mid x, y \in X,\ f_j(x) \ge f_j(y),\ j = 1, ..., m,\ \exists j_0 : f_{j_0}(x) > f_{j_0}(y)\}. \tag{3.53}$$

Звідси з урахуванням умови (3.52) робимо висновок, що має місце властивість (3.50), тобто x_0 – ефективна альтернатива для функції $f_j(x)$, $j = 1, ..., m$.

Можна показати й протилежне, тобто будь-яка ефективна для множини функцій $f_j(x)$, $j = 1, 2, ..., m$ альтенатива не домінується в множині (X, Q_1). Таким чином, для того щоб знайти множину ефективних альтернатив, можна замість набору відношень R_j, $j = 1, 2, ..., m$ узяти їх перетин Q_1 і знайти множину недомінованих альтернатив у множині (X, Q_1). Запишемо тепер перетин відношень R_j в іншому вигляді.

Нехай

$$\mu_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x, y) \in R_j, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin R_j, \end{cases} \tag{3.54}$$

де $\mu_j(x, y)$ – функція належності відношення R_j, $j = 1, 2, ..., m$, тоді перетину цих відношень відповідає така функція належності:

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\mu_1(x, y), ..., \mu_m(x, y)\}. \tag{3.55}$$

Ця функція є аналогом згортки критеріїв $f_j : F(x) = \min_{j=1,...,m} \lambda_j f_j$ у багатокритеріальних задачах прийняття рішень. Тут числа λ_j являють собою коефіцієнти відносної важливості критеріїв. У згортці (3.55) $\lambda_j = 1,\ j = 1,...,m$, що відповідає ситуації, коли всі подані відношення необхідно однаковою мірою важливості враховувати при виборі альтернатив. Якщо такі відношення відрізняються за важливістю відповідних ознак, на основі яких порівнюють альтернативи, то в згортці (3.55) можна використовувати різні за величиною коефіцієнти λ_j. При цьому вихідні відношення слід розглядати як нечіткі, тобто в означенні функції належності (3.54) числа 0 і 1 необхідно вважати крайніми точками одиничного інтервалу можливих значень ступеня належності.

Унаслідок згортки вихідних відношень R_j з коефіцієнтами λ_j, що відповідають умові $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, отримуємо функцію належності

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\lambda_1\mu_1(x, y),...,\lambda_m\mu_m(x, y)\}, \tag{3.56}$$

тобто функцію належності нечіткого відношення переваги. Але таке відношення не буде рефлексивним, отже, воно не належить до відношень переваги в сенсі означення з п. 3.4.1, і тому описана згортка є незручною для застосування, коли необхідно враховувати важливість поданих відношень.

Ось чому розглянемо згортку вихідних відношень іншого вигляду, а саме:

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j(x, y). \tag{3.57}$$

Зазначимо, що нечітке відношення μ_{Q_2}, отримане після згортки (3.57) звичайних відношень R_j, буде рефлексивним, оскільки такими є вихідні відношення.

Нехай усі вихідні відношення переваги є однаковими за важливістю. У згортці (3.57) цьому випадку відповідають такі значення вагових коефіцієнтів: $\lambda_j = \frac{1}{m},\ \ j = 1,2,...,m$. Знайдемо підмножину альтернатив, не домінованих на множині (X, Q_2), використовуючи означення з п. 3.4.2:

$$\mu_{Q_2}^{н.д}(x) = 1 - \frac{1}{m} \sup_{y \in X} \sum_{j=1}^{m} [\mu_j(y, x) - \mu_j(x, y)], \quad x \in X. \tag{3.58}$$

Позначимо через $X_1^{ЧНД}$ підмножину чітко недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}), а через $X_2^{ЧНД}$ – відповідну підмножину в (X, μ_{Q_2}). Установимо, що $X_2^{ЧНД} \subset X_1^{ЧНД}$. Дійсно, нехай $x_0 \in X_2^{ЧНД}$, тоді згідно з означенням чітко недомінованої альтернативи та з урахуванням формули (3.58) можемо зробити висновок, що

$$\sup_{y \in X} \sum_{j=1}^{m} [\mu_j(y, x_0) - \mu_j(x_0, y)] = 0$$

або

$$\sum_{j=1}^{m} [\mu_j(y, x_0) - \mu_j(x_0, y)] \le 0 \tag{3.59}$$

для всіх альтернатив $y \in X$.

Припустимо, що $x_0 \notin X_1^{ЧНД}$. Тоді, відповідно до властивості (3.50) та означення (3.54) бачимо, що знайдеться така альтернатива $y \in X$, для якої $\mu_j(y, x_0) = 1$, $j = 1, 2, ..., m$, причому відносно деякого індексу j_0 виконується рівність $\mu_{j_0}(x_0, y) = 0$. Але тоді відносно альтернативи y не буде виконуватися нерівність (3.59), звідки випливає, що $x_0 \in X_1^{ЧНД}$ і відповідно $X_2^{ЧНД} \subset X_1^{ЧНД}$.

Зауваження. Множина $X_2^{ЧНД}$ не містить усі ефективні альтернативи для фунцій f_j, $j = 1, 2, ..., m$, тобто не збігається з множиною $X_1^{ЧНД}$, але можна показати, що кожна ефективна альтернатива, тобто кожний елемент $x \in X_1^{ЧНД}$ має додатний ступінь нележності множині $\mu_{Q_2}^{н.д}$, тобто

$$X_1^{ЧНД} \subseteq \operatorname{supp} \mu_{Q_2}^{н.д}.$$

Дійсно, якщо відносно будь-якої альтернативи $x \in X$ виконується рівність $\mu_{Q_2}^{н.д}(x) = 0$, то на основі (3.58) виявляємо, що в множині X можна відшукати таку альтернативу y, для якої

$$\mu_j(y, x) - \mu_j(x, y) = 1, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

тобто $\mu_j(y,x)=1$ і $\mu_j(x,y)=0$, $j=1,2,...,m$. Це означає, що альтернатива y домінує над альтернативою x, тобто $f_j(y)>f_j(x)$, $j=1,2,...,m$, і тому альтернатива x не може бути ефективною для вибору функції f_j.

Функція $\mu_{Q_2}^{н.д}$ упорядковує альтернативи за ступенем їх недомінованості. Наприклад, якщо $\mu_{Q_2}^{н.д}(x)=3/4$ і яка-небудь альтернатива $y\in X$ буде строго кращою від альтернативи x за якими-небудь двома ознаками, то не менш ніж за однією з решти ознак вона строго переважає над альтернативою y.

Якщо взяти перетин множин $X_1^{ЧНД}$ і значень функції $\mu_{Q_2}^{н.д}$, то отримаємо відповідне впорядкування на множині ефективних альтернатив, на базі якого серед них можна здійснити вибір.

Отже, застосування згортки (3.57) вихідних звачайних відношень до розв'язування задачі прийняття рішень на множині функцій дає змогу одержати додаткову інформацію про відносний ступінь недомінованості ефективних альтернатив, звузивши таким чином клас раціональних виборів до такої множини:

$$X^{ЧНД}=\left\{x \,\middle|\, x\in X,\ \mu_{Q_2}^{н.д}(x)=\sup_{x'\in X_2^{н.д}}\mu_{Q_2}^{н.д}(x')\right\}.$$

У загальній задачі, коли на множині альтернатив задано m нечітких відношень переваги R_j, $j=1,2,...,m$, а також задано коефіцієнти λ_j, $j=1,2,...,m$ відносної ваги цих відношень, можна діяти так само, як і в попередньому випадку.

Сформулюємо тепер алгоритм прийняття рішень при кількох заданих відношеннях переваги на множині альтернатив.

1. Будуємо нечітке відношення Q_1 (перетин вихідних відношень):

$$\mu_{Q_1}(x,y)=\min\{\mu_1(x,y),...,\mu_m(x,y)\}.$$

Далі визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X,μ_{Q_1}) за такою формулою:

$$\mu_{Q_1}^{н.д}(x)=1-\sup_{y\in X}[\mu_{Q_1}(x,y)-\mu_{Q_2}(x,y)].$$

2. Створюємо нечітке відношення Q_2 (згортку відношень типу (3.57)):

$$\mu_{Q_2}(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j(x,y),$$

визначаємо нечітку підмножину альтернатив, не домінованих у множині (X, μ_{Q_1}):

$$\mu_{Q_2}^{н.д}(x) = 1 - \sup_{y \in X}[\mu_{Q_2}(y,x) - \mu_{Q_2}(x,y)].$$

3. Знаходимо перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д}$ і $\mu_{Q_2}^{н.д}$ за таким правилом:

$$\mu^{н.д}(x) = \min\{\mu_{Q_1}^{н.д}(x), \mu_{Q_2}^{н.д}(x)\}.$$

4. Раціональним уважаємо вибір альтернатив з такої множини:

$$X^{н.д} = \left\{ x \in X \,\middle|\, \mu^{н.д}(x) = \sup_{x' \in X} \mu^{н.д}(x') \right\}.$$

Тут слід зауважити, що залежно від типу задачі раціональними можна вважати не тільки альтернативи з множини $X^{н.д}$, але в тому чи іншому сенсі й слабодоміновані (або не дуже сильнодоміновані) альтернативи, тобто ті, ступінь належності яких множині $\mu^{н.д}$ є нижчим від певного заданого.

П р и к л а д 3.5. Нехай є множина $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. На ній подано два нечітких відношення переваги R_1 і R_2, причому перше з них має значущість, удвічі меншу, ніж друге, зокрема

$$R_1: \begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ x_2 & 0 & 1 & 0{,}8 \\ x_3 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2: \begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ x_2 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}$$

Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги.

Розв'язання

1. Будуємо відношення $Q_1 = \lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2$, ураховуючи, що $\lambda_1 = 0{,}33$ і $\lambda_2 = 0{,}67$. Відношення набуває такого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 0,33 & 0,067 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0,264 \\ 0,33 & 0,165 & 0,33 \end{pmatrix},$$

а відношення строгої переваги $\mu^S_{Q_1}(x_i, x_j)$, що йому відповідає, – такого:

$$\mu^S_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0,067 & 0 \\ 0 & 0 & 0,099 \\ 0,33 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}). Її функція належності $\mu^{н.д}_{Q_1}(x_i)$ має вигляд

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0,67 & 0,933 & 0,901 \end{matrix}.$$

2. Будуємо відношення $Q_2 = \lambda_1\mu_1(x_i, x_j) + \lambda_2\mu_2(x_i, x_j)$. Його функція належності визначається таким чином:

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,232 & 0,099 \\ 0,201 & 1 & 0,934 \\ 1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix},$$

а відповідне відношення строгої переваги має вигляд

$$\mu^S_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0,031 & 0 \\ 0 & 0 & 0,434 \\ 0,901 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}). Її функція належності має вигляд:

$$\mu^{н.д}_{Q_2}(x_i) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0,099 & 0,969 & 0,566 \end{pmatrix}.$$

Вихідна множина недомінованих альтернатив має таку функцію належності:

$$\mu^{н.д}(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0,099 & 0,933 & 0,566 \end{pmatrix}.$$

Максимальним ступенем недомінованості характеризується альтенатива x_2, тому її вибір можна вважати раціональним.

3.6. Відношення переваги на нечіткій множині альтернатив

Розглянемо тепер випадок, коли множина допустимих альтернатив також є нечіткою.

Нехай X – універсальна множина альтернатив, і на ній подано нечітку підмножину допустимих альтернатив, функція належності якої $\nu : X \to [0, 1]$, а також нечітке відношення переваги з функцією належності $\mu_R(x, y)$.

У разі, коли множина допустимих альтернатив являє собою звичайну множину, вибір раціональної альтернативи відбувається тільки залежно від поданих на ній нечітких відношень переваги. Але тепер необхідно враховувати ще й ступінь належності альтернативи множині допустимих альтернатив, тобто перевагу слід віддавати тим з них, яким властиве більше значення функції $\nu(x)$.

Цю вимогу можна врахувати таким чином.

Визначимо відношення переваги, породжене функцією ν:

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} 1, & якщо\ \nu(x) \ge \nu(y), \\ 0, & якщо\ \nu(x) < \nu(y). \end{cases}$$

Тепер вихідну задачу зведено до постановки, наведеної в попередньому пункті, і для її розв'язування можна використати описану там процедуру.

3.7. Прийняття рішень, коли задано перевагу на множині ознак

Нехай задано множину альтернатив X і множину *ознак (або експертів)* P. Кожній альтернативі $x \in X$ тією чи іншою мірою притаманна кожна ознака з множини P. Для кожної фіксованої ознаки $p \in P$ відомим є нечітке відношення переваги φ на множині альтернатив X, тобто функція належності $\varphi : X \times X \times P \to [0, 1]$. Її значення $\varphi(x_1, x_2, p)$ являє собою ступінь переваги альтернативи x_1 над альтернативою x_2 з ознакою p. Якщо P – множина експертів, то $\varphi(x_1, x_2, p)$ – відношення переваги на множині альтернатив, яке пропонується експертом p. Таким чином, функція φ описує сім'ю нечітких відношень переваги на множині X відносно параметра p.

Елементи множини P різняться за важливістю, а нечітке відношення $\mu: P \times P \to [0, 1]$ описує важливість ознак, зокрема величина $\mu(p_1, p_2)$ показує ступінь, з яким ознака p_1 уважається не менш важливою, ніж ознака p_2.

Задача полягає в раціональному виборі альтернативи з множини X на основі описаної вище інформації.

Розглянемо один із можливих підходів до розв'язування цієї задачі.

Позначимо через $\varphi(x, p)$ нечітку підмножину недомінованих альтернатив, яка відповідає нечіткому відношенню переваги $\varphi(x_1, x_2, p)$ для фіксованої ознаки $p \in P$, тобто

$$\varphi^{н.д}(x, p) = 1 - \sup_{y \in X}[\varphi(y, x, p) - \varphi(x, y, p)]. \qquad (3.60)$$

Якби альтернативи порівнювалися за єдиною ознакою p, то раціональним уважався б вибір тих із них, що забезпечують найбільше значення функції належності $\varphi(x, p)$ (ступеня недомінованості) на множині X. Але в цьому випадку необхідно вибирати альтернативу з урахуванням сукупності ознак, які різняться своєю важливістю.

При фіксованій альтернативі $x_0 \in X$ функція $\varphi^{н.д}(x_0, p)$ описує нечітку підмножину ознак, за якими вона недомінована. Зрозуміло, що коли для двох альтернатив x_1 і x_2 нечітка множина $\varphi^{н.д}(x_1, p)$ – "не менш важлива", ніж нечітка множина ознак $\varphi^{н.д}(x_2, p)$, то й альтернативу x_1 слід уважати не менш прийнятною, ніж альтернатива x_2. Таким чином, ситуація в цьому випадку аналогічна тій, що розглядалася при аналізі задачі нечіткого математичного програмування.

Отже, тепер необхідно узагальнити подану підмножину множини P і вважати отримане нечітке відношення вислідним відношенням переваги на множині альтернатив X.

Задане відношення, породжене функцією $\varphi^{н.д}(x, p)$ і нечітким відношенням μ, визначимо за такою формулою:

$$\eta(x_1, x_2) = \sup_{(p_1, p_2) \in P^2} \min\{\varphi^{н.д}(x_1, p_1), \varphi^{н.д}(x_2, p_2), \mu^{н.д}(p_1, p_2)\}. \qquad (3.61)$$

Це нечітке відношення переваги можна вважати результатом "згортки" сім'ї нечітких відношень $\varphi(x_1, x_2, p)$ в єдине вислідне нечітке відношення переваги, яке враховує інформацію про відносну важливість критеріїв, задану у формі нечіткого відношення переваги.

Таким чином, побудовою нечіткого відношення переваги η вихідну задачу вибору зведено до задачі вибору за єдиним відношенням переваги. Для її розв'язування достатньо визначити скореговану нечітку множину недомінованих альтернатив, що відповідає відношенню η, і вибрати ті з них, які надають максимуму функції $\eta^{н.д}(x)$.

П р и к л а д 3.6 (вибір на основі чітких відношень). Нехай задано множину альтернатив $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, які порівнюються за трьома ознаками A, B, D. Результати порівняння описуються такими матрицями відношень нестрогої переваги:

– за ознакою A

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array};$$

– за ознакою B

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

– за ознакою C

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Відношення відносної важливості ознак описується матрицею

$$\begin{pmatrix} & A & B & C \\ A & 1 & 1 & 1 \\ B & 1 & 1 & 1 \\ C & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Із цієї матриці видно, що ознаки A і B є еквівалентними одна одній і кожна з них важливіша за ознаку C.

Керуючись описаним підходом, визначимо множину альтернатив, які не домінуються за кожною з ознак, унаслідок чого отримаємо такі функції належності:

$$\varphi^{н.д}(x_i, A) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0};$$

$$\varphi^{н.д}(x_i, B) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0};$$

$$\varphi^{н.д}(x_i, C) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0}.$$

Отже, недомінованими виявилися:
- за ознакою A альтернатива x_2;
- за ознакою B альтернатива x_1;
- за ознакою C альтернативи x_1, x_2, x_3.

Далі за формулою (3.61) отримуємо таку матрицю вислідного відношення переваги на множині альтернатив X:

$$\eta(x_i, x_j) = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

А за формулою (3.60) одержуємо відповідну множину недомінованих альтернатив (нескореговану), тобто

$$\varphi^{н.д}(x, p) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1}.$$

Нарешті, використовуючи формулу $\eta^{н.д}(x_i) = \min\{\varphi^{н.д}(x_i), \eta^{н.д}(x_i, x_j)\}$, знаходимо скореговану множину недомінованих альтернатив

$$\eta^{н.д}(x_i) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0}.$$

Таким чином, робимо висновок, що раціональним у цій задачі слід уважати вибір альтернативи x_1 або x_2. Зауважимо, що названі альтернативи є недомінованими за ознаками A і B, які є найбільш (однаково) важливими.

П р и к л а д 3.7 (вибір на основі нечітких відношень.) Розглянемо одну з типових задач прийняття рішень. Припустимо, що керівник фірми розглядає чотири проекти подальшого розвитку підприємства А, Б, В, Г і має вибрати для реалізації один з них. З цією метою він запросив чотирьох експертів: Е1, Е2, Е3, Е4, до позицій кожного з них він ставиться по-різному. Зокрема, до висновків одного з них він прислухається більш уважно, ніж до поглядів іншого. Відносні переваги позицій експертів описано такою матрицею нечіткого відношення “не менш важливо”:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & E1 & E2 & E3 & E4 \\
E1 & 1 & 0,4 & 0,6 & 0 \\
E2 & 1 & 1 & 0,8 & 1 \\
E3 & 0,2 & 1 & 1 & 1 \\
E4 & 0,8 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

На думку експертів, відношення переваги між проектами описуються функціями належності, які мають такий вигляд:

$$
\begin{array}{ccccc}
E1 & A & Б & В & Г \\
A & 1 & 0,8 & 1 & 0 \\
Б & 0 & 1 & 0,2 & 1 \\
В & 0 & 0,8 & 1 & 0 \\
Г & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
E2 & A & Б & В & Г \\
A & 1 & 0,4 & 0,5 & 0,3 \\
Б & 0,8 & 1 & 0,8 & 0,8 \\
В & 0,5 & 1 & 1 & 0 \\
Г & 0,8 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
E3 & A & Б & В & Г \\
A & 1 & 0 & 0,8 & 0 \\
Б & 0 & 1 & 0 & 0 \\
В & 0,1 & 0 & 1 & 0,4 \\
Г & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
E4 & A & Б & В & Г \\
A & 1 & 1 & 0,9 & 0 \\
Б & 0 & 1 & 1 & 1 \\
В & 0,4 & 0 & 1 & 0 \\
Г & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Розв'язання

Знайдемо нечіткі множини альтернатив, не домінованих за кожною ознакою:

	А	Б	В	Г

$\varphi^{н.д}(\cdot, E1)$	1	0,2	0	0
$\varphi^{н.д}(\cdot, E2)$	0,3	1	0,5	0,2
$\varphi^{н.д}(\cdot, E3)$	0	0	0,3	1
$\varphi^{н.д}(\cdot, E4)$	1	0	0	0

Далі шукаємо нечітке відношення переваги η, визначене на множині альтернатив функціями $\varphi^{н.д}$ і нечітким відношенням μ:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & А & Б & В & Г \\
А & 1 & 0,4 & 0,4 & 1 \\
Б & 1 & 1 & 0,5 & 0,8 \\
В & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\
Г & 1 & 1 & 0,5 & 1
\end{array}.
$$

Насамкінець, визначаємо нечітку множину недомінованих альтернатив, що відповідає відношенню η. Її функція належності має такий вигляд:

$$\eta^{н.д} = \frac{А \quad Б \quad В \quad Г}{1 \quad 0,4 \quad 0,9 \quad 0,8},$$

а скорегована множина недомінованих альтернатив буде такою:

$$\eta^{н.д} = \frac{А \quad Б \quad В \quad Г}{1 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,8}.$$

Як бачимо, найбільший ступінь недомінованості має альтернатива А, тому вибір саме цього проекту можна вважати раціональним.

Якщо найбільший ступінь недомінованості має не одна, а кілька альтернатив, то ОПР може або самостійно вибрати одну з них, виходячи з якихось додаткових міркувань, або розширити коло експертів і знову розв'язати задачу, як описано вище.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу нечітко визначеної мети.
2. Які особливості має підхід Беллмана – Заде до розв'язування задачі досягнення нечітко визначеної мети?
3. Яким чином ураховують мету й обмеження при формулюванні та розв'язуванні задачі досягнення нечітко визначеної мети?

4. Чи можна сформулювати задачу досягнення нечітко визначеної мети в разі, коли мета й обмеження являють собою підмножини різних універсальних множин?

5. Сформулюйте загальну постановку задачі нечіткого математичного програмування.

6. Яким чином класифікують задачі нечіткого математичного програмування?

7. Які підходи застосовують до розв'язування задач НМП?

8. Які властивості має розв'язок задач НМП?

9. У чому полягає суть методу зведення до задачі досягнення нечітко визначеної мети при розв'язуванні задач НМП?

10. У чому полягає метод розкладання на множини рівня при розв'язуванні задач НМП?

11. Розкрийте суть методу модальних значень у застосуванні до задач НМП.

12. Опишить застосуваня методу зведення до багатокритеріальної задачі при розв'язуванні задач НМП.

13. Які властивості мають розв'язки задачі НМП, що базуються на різних підходах, який між ними існує зв'язок?

14. Що являє собою нечітке відношення переваги?

15. Які властивості має нечітке відношення переваги, що воно характеризує?

16. Як за заданим відношенням переваги можна побудувати відношення строгої переваги, які його властивості?

17. Які відношення називають λ-лінійними, сильнолінійними? Опишіть їх властивості.

18. Яким чином здійснюють раціональний вибір альтернатив, коли є відомим відношення переваги на заданій множині альтернатив?

19. Наведіть означення недомінованої альтернативи.

20. Визначте поняття чітко недомінованої альтернативи.

21. Як відбувається раціональний вибір альтернатив, коли задано кілька відношень переваги на множині альтернатив?

22. Які види згорток застосовують для вибору альтернативи на основі кількох відношень переваги? Окресліть межі їх застосування.

23. Яким чином виконують раціональний вибір альтернатив, коли задано відношення переваги на множині альтернатив й нечітку перевагу на множині ознак?

Розділ 4

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ Й НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

4.1. Поняття про ситуацію прийняття рішень

Розглянемо тепер ситуацію, коли якість рішень залежить від зовнішніх факторів, на які ОПР (або орган керування) не впливає. Будемо також уважати, що ці параметри й збурення незмінні в часі, тобто модель є статичною.

Статична модель прийняття рішень, яка базується на теоретико-ігровій концепції, є добре відомою й поширеною в багатьох реальних обставинах разового вибору варіантів (планів дій, альтернатив, стратегій і т. д.), пов'язаних з невизначеним впливом середовища на ситуацію вибору, який проводить орган прийняття рішень.

Досліджуючи статичні моделі прийняття рішень, будемо виходити зі схеми, у якій передбачено такі припущення:

1) орган керування має в наявності множину взаємовиключних рішень $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m\}$, одне з яких необхідно вибрати;

2) середовище C описується множиною взаємовиключних станів $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\}$ і може перебувати в одному з них, однак на момент прийняття рішення органу керування невідомо, у якому саме стані воно перебуває (або буде перебувати);

3) визначено оцінний функціонал $F=\{f_{j,k}\}$, який характеризує "виграш" або "програш" органу керування при виборі ним рішення $\varphi_k\in\Phi$, якщо середовище буде перебувати (або перебуває) у стані $\theta_j\in\Theta$.

Виходячи з цих припущень, процес прийняття рішень в умовах невизначеності може бути описаний такою схемою:

1. Формування множини можливих рішень органу керування $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m\}$ і множини станів середовища $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\}$.

2. Визначення та задання основних показників ефективності й корисності, що використовуються в розрахунку оцінного функціонала $F=\{f_{j,k}\}$.

3. Визначення органом керування інформаційної ситуації, яка описує стратегію поведінки середовища C.

4. Вибір критерію прийняття рішень із множини критеріїв, які характеризують визначену органом керування інформаційну ситуацію.

5. Прийняття оптимального за вибраним критерієм рішення або його корекція.

Сформулюємо необхідні означення.

Під *ситуацією прийняття рішень* будемо розуміти трійку $\{\Phi,\Theta,F\}$, у якій $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m\}$ – множина можливих рішень органу керування; $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\}$ – множина можливих станів середовища; $F=\{f_{j,k}\}$ – оцінний функціонал, де $f_{j,k}=f(\theta_j,\varphi_k)$.

У розгорнутій формі ситуація прийняття рішень характеризується такою матрицею:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_k & \cdots & \varphi_m & \\
\theta_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} & \cdots & f_{1m} & \\
\theta_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} & \cdots & f_{2m} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\
\theta_j & f_{j1} & f_{j2} & \cdots & f_{jk} & \cdots & f_{jm} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\theta_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nk} & \cdots & f_{nm} &
\end{array}
$$

З категорією оцінного функціонала тісно пов'язані такі поняття як ефективність, корисність, втрати, ризик тощо. При цьому вибір тієї чи іншої форми функціонала залежить від конкретних задач керування. Зазвичай використовують дві його форми: ті, що визначають корисність, і ті, що визначають втрати.

Якщо оцінний функціонал визначає ефективність, корисність, прибуток і т. ін., тобто орган керування, приймаючи рішення, виходить із необхідності досягнення його максимуму, то кажуть, що він має *додатний інгредієнт*. У цьому випадку оцінний функціонал позначають: $F = F^{+} = \{ f_{j,k}^{+} \}$.

Якщо орган керування виходить із потреби досягнення мінімуму оцінного функціонала (тобто він відображає втрати, ризик), то це означає, що він має *від'ємний інгредієнт*. Цей факт описують таким чином: $F = F^{-} = \{ f_{j,k}^{-} \}$.

Інформаційною ситуацією прийняття рішень будемо називати ступінь градації невизначеності у виборі середовищем своїх станів із заданої множини Θ у момент прийняття рішеня органом керування.

Виділяють такі інформаційні ситуації [12]:

– I_1 – коли задано розподіл апріорних імовірностей на елементах множини станів середовища Θ, цю ситуацію називають також ситуацією прийняття рішень *в умовах ризику*;

– I_2 – має місце заданий розподіл імовірностей з невідомими параметрами;

– I_3 – задано системи лінійних відношень порядків на компонентах апріорного розподілу станів середовища C;

– I_4 – коли розподіл імовірностей на множині станів середовища Θ є невідомим;

– I_5 – наявність антагоністичних інтересів середовища в процесі прийняття рішення;

– I_6 – “проміжний” між I_1 і I_5 вибір середовищем своїх станів;

– I_7 – існування нечіткої множини станів середовища.

Критерієм прийняття рішень будемо називати алгоритм, визначений для кожної ситуації прийняття рішень та інформаційної ситуації I, який дає змогу вибрати єдине оптимальне рішення φ_0 із множини Φ або встановити множину таких рішень, які називають *еквівалентними* за певним критерієм.

У кожній інформаційній ситуації I можливе застосування кількох критеріїв. Вибір конкретного з них виконує орган прийняття рішень.

4.2. Критерії прийняття рішень в умовах ризику

Перша інформаційна ситуація I_1 характеризується заданим розподілом апріорних імовірностей на елементах множини Θ, а саме: $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, де $p_j = p(\theta_j)$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Вона є дуже поширеною при моделюванні практичних задач прийняття рішень в умовах ризику, оскільки дає змогу ефективно використовувати конструктивні методи теорії ймовірностей у процесі розроблення цілого наукового напряму – теорії статистичних рішень.

Зауважимо, що в реальних задачах розрахунок апріорного розподілу $p = p(p_1, p_2, ..., p_n)$ здійснюється або шляхом оброблення великого обсягу статистичного матеріалу, або на основі аналітичних методів, які базуються на гіпотезах про поведінку середовища та на застосуванні методів і теорем теорії ймовірностей. Обидва ці методи дають деякою мірою наближені результати, оскільки певні труднощі й обмеження (вони стосуються вартості, часу і т. ін.) виникають при обробленні статистистичих даних. Коли ж ідеться про використання аналітичних методів, доводиться робити певні припущення, іноді на шкоду точності опису процесу. Отриманий у такий спосіб апріорний розподіл імовірностей називають *об'єктивним*. Разом з тим, застосування таких методів є неможливим, оскільки немає достатньої кількості статистичного матеріалу, середовище характеризується складною “поведінкою”, і внаслідок цього застосування аналітичних методів потребує додаткових досліджень, що зумовлює значні витрати коштів і часу. У цих умовах орган прийняття рішень може використати для формулювання значень апріорного розподілу ймовірностей думки та уявлення досвідчених експертів, які добре орієнтуються в ситуації. Таке визначення ймовірності називається *суб'єктивним*.

Опишемо деякі критерії прийняття рішень у ситуації I_1.

1. *Критерій Байєса* (середнього значення). Сенс цього критерію полягає в максимізації матиматичного сподівання оцінного функціонала.

Згідно з критерієм Байєса оптимальними рішеннями $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множиною таких рішень) уважають такі, для яких математичне сподівання оцінного функціонала набуває найбільшого (або найменшого) можливого значення:

$$\varphi_{k_0} : B^+(\varphi_{k_0}, p) = \max_{\varphi_k \in \Phi} B^+(\varphi_k, p), k = \overline{1, m}, \quad B^+(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^+ \qquad (4.1)$$

для функціонала з додатним інгредієнтом;

$$\varphi_{k_0} : B^-(\varphi_{k_0}, p) = \min_{\varphi_k \in \Phi} B^-(\varphi_k, p), k = \overline{1, m}, \quad B^-(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^- \qquad (4.2)$$

для функціонала з від'ємним інгредієнтом.

Критерій Байєса є найбільш використовуваним в інформаційній ситуації I_1. Його доцільно застосовувати тоді, коли ситуація повторюється багато разів, оскільки за таких умов максимізується середнє значення корисності (або мінімізується середній ризик).

Критерій Байєса дає можливість в інформаційній ситуації дослідити проблему синтезу під час вибору оптимального рішення відповідно до розподілу ймовірностей $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ на множині станів середовища C. Позначимо через Δ множину можливих значень вектора апріорного розподілу ймовірностей:

$$\Delta = \left\{ (p_1, p_2, ..., p_n) : 0 \le p_j \le 1,\ j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\},$$

і розглянемо множину

$$P_{n-1} = \left\{ (p_1, p_2, ..., p_{n-1}) : 0 \le p_j \le 1,\ j = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{j=1}^{n-1} p_j \le 1 \right\}.$$

Суть задачі синтезу полягає в розбитті множини P_{n-1} на підмножини $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k = \overline{1, m}$, що задовольняють такі умови:

1. $S_{\varphi_i} \cap S_{\varphi_k} = \varnothing$, якщо $i \ne k$.
2. $\bigcup_{k=1}^{m} S_{\varphi_k} = P_{n-1}$.
3. Рішення $\varphi_k \in \Phi$ буде оптимальним за критерієм Байєса, якщо $p \in S_{\varphi_k}$.

Множину S_{φ_k} називають *байєсовою множиною* значень апріорних імовірностей $p=(p_1, p_2, ..., p_n)$ стосовно рішення φ_k. Саме рішення $\varphi_k \in \Phi$ для ймовірності $p \subset S_{\varphi_k}$ назвемо *байєсовим рішенням*, а величину $B^+(p, \varphi_k)$ на байєсовому рішенні φ_k – *оптимальним байєсовим значенням оцінного функціонала.*

Визначимо *байєсову поверхню* оптимальних байєсових значень оцінного функціонала F^+ для всіх імовірностей $p \in \Delta$ таким чином:

$$B^+(p) = \max_{\varphi_k \in \Phi} B^+(p, \varphi_k).$$

Якщо орган керування рішень має інформацію про байєсові множини, то він може порівняно просто приймати оптимальні (за критерієм Байєса) рішення, навіть коли апріорний розподіл імовірностей станів середовища визначено неточно. Але проблема побудови самих байєсових множин являє собою досить складну математичну задачу розбиття $(n-1)$-вимірного симплекса на підмножини (особливо, якщо $n \geq 4$). Нагадаємо, що під двовимірним симплексом розуміють трикутник, під одновимірним – відрізок.

Задачу побудови множин рішень за критерієм Байєса з допомогою методу оптимального розбиття множин розглянуто в [4].

2. *Критерій мінімуму дисперсії оцінного функціонала*. Для кожного рішення $\varphi_k \in \Phi$ визначимо середнє значення $B^+(\varphi_k, p)$ оцінного функціонала й дисперсію σ_k^2 у такому вигляді:

$$B^+(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^+, \tag{4.3}$$

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^+ - B^+(\varphi_k, p))^2 p_i. \tag{4.4}$$

Дисперсія описує розсіювання випадкових значень оцінного функціонала для рішення φ_k відносно його середнього значення $B^+(\varphi_k, p)$.

Суть критерію мінімізації дисперсії оцінного функціонала полягає в тому, щоб знайти рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множини рішень), для якого буде виконуватися така рівність:

$$\sigma^2(p, \varphi_{k_0}) = \min_{\varphi_k \in \Phi} \sigma_k^2(p, \varphi_k). \tag{4.5}$$

Основним недоліком цього критерію є те, що дисперсія на рішенні $\varphi_{k_1} \in \Phi$ може виявитися меншою, ніж на рішенні $\varphi_{k_2} \in \Phi$, у той час, коли $B^+(\varphi_{k_1}, p) < B^+(\varphi_{k_2}, p)$. Інакше кажучи, критерій мінімуму дисперсії, з одного боку, є допоміжним, а з іншого – його прийняття потребує довизначення й невеликого змінення вигляду дисперсії σ_k^2, наприклад, одним із поданих нижче способів:

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^+ - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} B^+(\varphi_k, p))^2 p_i \tag{4.6}$$

або

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^+ - \max_{\varphi_s \in \Phi} B^+(\varphi_s, p))^2 p_i \, . \tag{4.7}$$

Якщо оцінний функціонал задано у формі від'ємного інгредієнта, а саме: $F = F^- = \{ f_{j_k}^- \}$, то рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ також можна знайти, використовуючи умову (4.5), але тут величину σ_k^2 визначають одним із таких способів:

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^- - B^-(\varphi_k, p))^2 p_i \, , \tag{4.8}$$

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^- - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} B^-(\varphi_k, p))^2 p_i \tag{4.9}$$

або

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^- - \max_{\varphi_s \in \Phi} B^-(\varphi_s, p))^2 p_i \, , \tag{4.10}$$

причому $B^-(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^-$.

3. Критерій максимізації ймовірності розподілу оцінного функціонала.
Фіксуємо величину α, яка задовольняє умову $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, причому

$\alpha_1 = \min_j \min_k f_{jk}^+$ і $\alpha_2 = \max_j \max_k f_{jk}^+$.

Для кожного рішення $\varphi_k \in \Phi$ визначають імовірність $p(f_{jk}^+ \geq \alpha)$ того, що значення оцінного функціонала буде не меншим за величину α, якщо середовище перебуває у стані θ_j і вибрано рішення φ_k.

Сенс критерію максимізації ймовірності розподілу оцінного функціонала полягає у визначенні рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множини рішень), для якого ця ймовірність буде максимальною, тобто

$$\varphi_{k_0} : p(f_{jk_0}^+ \geq \alpha) = \max_{\varphi_k \in \Phi} p(f_{jk}^+ \geq \alpha). \tag{4.11}$$

При використанні цього критерію орган керування виходить із необхідності прийняття конкретного рівня величини α та оптимальними вважаються ті рішення, для яких виконується умова (4.11).

Якщо значення ймовірності α і рішення φ_k є фіксованими, то нерівність $f_{ik}^+ \geq \alpha$ показує множину станів середовища $\theta_{\alpha k}$, а ймовірність $p(f_{jk}^+ \geq \alpha)$ обчислюється так:

$$p(f_{jk}^+ \geq \alpha) = \sum_{\theta_j \in \theta_{\alpha k}} p(f_{jk}^+ \geq \alpha), \quad \theta_{\alpha k} = \{\theta_j : f_{jk}^+ \geq \alpha\}. \tag{4.12}$$

Якщо оцінний фунціонал має від'ємний інгредієнт, то відповідно необхідно визначити ймовірність $p(f_{jk}^- \leq \alpha)$, і крітерій набуває такого вигляду:

$$p(f_{jk_0}^- \leq \alpha) = \max_{\varphi_k \in \Phi} p(f_{jk}^- \leq \alpha), \tag{4.13}$$

де $p(f_{jk}^- \leq \alpha) = \sum_{\theta_j \in \theta_{\alpha k}} p(f_{jk}^- \leq \alpha), \quad \theta_{\alpha k} = \{\theta_j : f_{jk}^- \leq \alpha\}$.

4. *Модальний критерій*. Ідея цього критерію полягає в тому, що орган прийняття рішення виходить із найбільш імовірного стану середовища. Припустимо, що існує єдине значення j^*, яке забезпечує виконання такої умови:

$$p(\theta_{j^*}) = \max_{\theta_j \in \Theta} p(\theta_j). \tag{4.14}$$

Тоді орган керування вважає, що середовище перебуває саме у стані θ_{j^*} і вибирає рішення φ_0, для якого $f_{j0}^+ = \max_k f_{j^*k}^+$, коли функціонал має додатний інгредієнт, або $f_{j0}^{-} = \min_{k} f_{j^*k}^{-}$, коли функціонал характеризується від'ємним інгредієнтом.

Зазначимо, що тут можлива ситуація, коли максимальне значення ймовірності досягається одночасно на кількох елементах множини Θ, тобто

$$p(\theta_{j_1}) = p(\theta_{j_2}) = ... = p(\theta_{j_s}) = \max_{\theta_j \in \Theta} p(\theta_j),$$

тоді оптимальне рішення необхідно вибирати, виходячи з такої умови:

$$\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} f_{j_r 0}^{+} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} f_{j_r k}^{+}. \quad (4.15)$$

Перевагою модального критерію є його простота. По-перше, достатньо лише виявити найбільш імовірні стани середовища, і до того ж немає необхідності навіть знати числові значення цих імовірностей; по-друге, розрахунок значень оцінного функціонала можна виконувати лише для найбільш імовірних станів, що значно підвищує швидкість прийняття рішень.

Серед недоліків критерію слід назвати можливість того, що рішення, оптимальне за модальним критерієм, не завжди буде мати найбільше байєсове значення.

5. *Комбінований критерій* являє собою комбінацію критеріїв Байєса та мінімуму дисперсії, де враховано природне бажання органу керування забезпечити найкраще середнє значення (критерій Байєса) і мінімальну дисперсію.

Виберемо величину λ, $0 \le \lambda \le 1$, і для кожного з рішень φ_k, $k = 1, 2, ..., m$ обчислимо значення критерію за такою формулою:

$$K(\varphi_k, p) = (1-\lambda)(B^{+}(\varphi_k, p))^2 - \lambda\sigma^2(\varphi_k, p), \quad (4.16)$$

Найкращим уважають рішення φ_0*, для якого виконується така умова:*

$$K(\varphi_0, p) = \max_{\varphi_k \in \Phi} K(\varphi_k, p).$$

Зауважимо, що при цьому значення коефіцієнта λ встановлюють з огляду на те, якому саме критерію (Байєса чи мінімуму дисперсії) потрібно надати більшої переваги. Якщо $\lambda = 0$, то критерій $K(\varphi_k, p)$ збігається з критерієм Байєса, а якщо $\lambda = 1$ – із критерієм мінімуму дисперсії.

Візьмемо для розгляду дві величини:

$$\lambda^* = \min_{\varphi_k \in \Phi} \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+\right]^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{jk}^+)^2}; \qquad \lambda^{**} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+\right]^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{jk}^+)^2}. \qquad (4.17)$$

Вочевидь, вони задовольняють таку нерівність: $0 \le \lambda^* \le \lambda^{**} \le 1$. Тут мають місце наведені нижче твердження.

Л е м а 4.1. Якщо параметр λ задовольняє умову $0 \le \lambda \le \lambda^*$, то $K(\varphi_k, p) \ge 0$ для будь-якого рішення $\varphi_k \in \Phi$.

Л е м а 4.2. Якщо параметр λ задовольняє умову $\lambda^{**} \le \lambda \le 1$, то $K(\varphi_k, p) \le 0$ для всякого рішення $\varphi_k \in \Phi$.

Доведення цих тверджень подається в монографії [12].

Таким чином, можемо зробити висновок, що коли $0 \le \lambda \le \lambda^*$, то в комбінованому критерії надано перевагу критерію Байєса порівняно з критерієм мінімуму дисперсії, а коли $\lambda^{**} \le \lambda \le 1$, то більше враховується критерій мінімуму дисперсії.

Розглянемо ситуацію прийняття рішень $\{\Phi, \Theta, F\}$, описану матрицею

$$\begin{array}{cccc} & \varphi_1 & \cdots & \varphi_m \\ \theta_1 & f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_n & f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{array}$$

причому на множині станів середовища $\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_n\}$ є відомим можливий розподіл імовірностей $p = \{p_1, ..., p_n\}$ і вибрано критерій K прийняття рішень.

Множину

$$P_{n-1} = \left\{ (p_1, p_2, ..., p_{n-1}) : 0 \le p_j \le 1,\ j = \overline{1, n-1},\quad \sum_{j=1}^{n-1} p_j \le 1 \right\} \qquad (4.18)$$

необхідно розбити на підмножини $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k = \overline{1, m}$, що задовольняють такі умови:

$$S_{\varphi_i} \cap S_{\varphi_k} = \varnothing, \quad i \ne k, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m}, \qquad (4.19)$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_{\varphi_i} = P_{n-1}, \tag{4.20}$$

причому для $p \subset S_{\varphi_k}$, $k = \overline{1,m}$ оптимальним за критерієм K є рішення φ_k.

Розглянемо задачу побудови множини рішень $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$ $\left(k = \overline{1,m}\right)$ відносно комбінованого критерію такого вигляду:

$$K(p,\varphi_k) = (1-\alpha)B^{+}(p,\varphi_k) - \alpha\sigma^2(p,\varphi_k), \quad 0 \le \alpha \le 1, \tag{4.21}$$

де $B^{+}(p,\varphi_k)$ – байєсове значення для рішення φ_k, яке відповідає апріорному розподілу ймовірності $p = (p_1,...,p_n)$; $\sigma^2(p,\varphi_k)$ – дисперсія значень оцінного функціонала, які відповідають рішенню φ_k; α – параметр.

Побудову множин рішень можна розглядати як задачу оптимального розбиття множини P_{n-1} на підмножини, що відповідають можливим рішенням. Щоб її розв'язати, сформулюємо вихідну задачу у вигляді задачі оптимального розбиття множин.

Задача 4. 1. Розбити множину (4.18) на підмножини S_{φ_1}, S_{φ_2}, …, S_{φ_m} таким чином, щоб виконувалися умови (4.19) і (4.20) і функціонал

$$F(S_{\varphi_1},...,S_{\varphi_m}) = \sum_{k=1}^{m} \int_{S_{\varphi_k}} c_k(p)\rho(p)dp \tag{4.22}$$

набирав максимального значення.

Тут $\rho(p)$ – дійсна невід'ємна інтегрована функція;

$$c_k(p) = (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(f_{ik} - f_{nk}\right)p_i + f_{nk}\right) -$$

$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}^2 - f_{nk}^2\right)p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik} - f_{nk}\right)p_i\right)^2 - 2f_{nk}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik} - f_{nk}\right)p_i\right), \quad k = \overline{1,m}.$$

Розбиття S_{φ_1}, S_{φ_2}, …, S_{φ_m}, яке є розв'язком задачі 1, назвемо оптимальним.

Сформульована задача являє собою задачу оптимального розбиття із фіксованими центрами підмножин без обмежень [4].

Для її розв'язування введемо характеристичні функції підмножин S_{φ_k}

$\left(k=\overline{1,m}\right)$:

$$\lambda_k^*(p)=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad p\in S_{\varphi_k},\\ 0, & \text{якщо} \quad p\in S\setminus S_{\varphi_k},\end{cases} \qquad k=\overline{1,m}.$$

Скориставшись термінами характеристичних функцій, можемо записати цю задачу в такому вигляді.

Задача 4.2. Знайти вектор-функцію $\lambda^*(\bullet)=\left(\lambda_1^*(\bullet),...,\lambda_m^*(\bullet)\right)$, що відповідає умові

$$I(\lambda^*(\bullet))=\max_{\lambda^*\in\Gamma_1} I(\lambda^*(\bullet)),$$

де

$$I(\lambda(\bullet))=\int\limits_{P_{n-1}}\sum_{k=1}^{m}[(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(f_{ik}-f_{nk}\right)p_i+f_{nk}\right)-$$

$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}^2-f_{nk}^2\right)p_i-\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}-f_{nk}\right)p_i\right)^2-2f_{nk}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}-f_{nk}\right)p_i\right)\;]\lambda_k(p)dp,$$

$$\Gamma_1=\Big\{\lambda(p)=(\lambda_1(p),...,\lambda_m(p)):\ \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(p)=1 \text{ майже всюди для } p\in P_{n-1},$$
$$\lambda_k(p)=0\vee 1,\ k=\overline{1,m}\Big\}.$$

Зауважимо, що $F(S_{\varphi_1},...,S_{\varphi_m})=I(\lambda(\bullet))$.

Використовуючи метод оптимального розбиття множин [4], отримуємо розв'язок поставленої задачі в такому вигляді:

$$\lambda_k^*=\begin{cases}1, & (1-\alpha)B_k-\alpha\sigma_k^2\ge(1-\alpha)B_j-\alpha\sigma_j^2\ \ \forall j=\overline{1,m},\\ 0 & \textit{в інших випадках},\end{cases} \tag{4.23}$$

де $\lambda^*{}_1(p),...,\lambda^*{}_m(p)$ – характеристичні функції підмножин $S_{\varphi_1}^*,...,S_{\varphi_m}^*$, що утворюють оптимальне розбиття множини P_{n-1};

$$\sigma_k^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(f_{ik}^2 - f_{nk}^2 \right) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - 2 f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right),$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{n-1} \left((f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk} \right), \quad k = \overline{1,m}.$$

Той факт, що оптимальний розв'язок задачі 1 буде утворювати розбиття на множини рішень, тобто буде істинним, міститься у поданому нижче твердженні.

Т в е р д ж е н н я 4.1. Підмножини $S_{\varphi_1}^*, ..., S_{\varphi_m}^*$, що є оптимальним розв'язком задачі 4.1, утворюють множини розв'язків за комбінованим критерієм (4.21).

6. *Критерій мінімальної ентропії математичного сподівання оцінного функціонала*. Припустимо, що $f_{jk}^+ > 0$ для всіх значень $j = \overline{1,n}$ і $k = \overline{1,m}$. Для кожного з можливих рішень $\varphi_k \in \Phi$ обчислюємо ентропію математичного сподівання оцінного функціонала за такою формулою:

$$H(p, \varphi_k) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i f_{ik}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+} \right) \ln \frac{p_i f_{ik}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+}. \tag{4.24}$$

Оптимальним уважається рішення φ_0, яке має мінімальну ентропію, тобто

$$\varphi_0 : H(p, \varphi_0) = \min_k H(p, \varphi_k).$$

Якщо умова $f_{jk}^+ > 0$ ($j = \overline{1,n}$ і $k = \overline{1,m}$) не виконується, то можна перейти до категорії втрат, скориставшись перетворенням $\tilde{f}_{jk}^- = \max_{\substack{\varphi_k \in \Phi \\ \theta_j \in \Theta}} f_{jk}^+ - f_{jk}^+$, і відшукати рішення φ_0 за критерієм мінімуму ентропії математичного сподівання оцінного функціонала $H(p, \varphi_k)$, якщо $\varphi_k \in \Phi$, де

$$H(p,\varphi_k) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i f_{ik}^{-}}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^{-}} \right) \ln \frac{p_i f_{ik}^{-}}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^{-}}, \quad f_{jk}^{-} > 0. \qquad (4.25)$$

4.3. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності

Розглянемо критерії прийняття рішень, що застосовуються в інших інформаційних ситуаціях. Почнемо із ситуації I_4, що характеризується невідомим розподілом імовірностей $p = (p_1,..., p_n)$, $p_j = p(\theta = \theta_j)$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ на множині станів середовища $\theta_1,...,\theta_n$, а також відсутністю активної протидії середовища цілям прийняття рішень. У певному сенсі така ситуація відповідає моделі пасивної "поведінки" середовища в теорії статистичних рішень. Іншими словами, вона відображає те, що орган керування зовсім не має даних про поведінку середовища. У реальних умовах такі ситуації пов'язані з упровадженням у виробництво нового обладнання або з реалізацією нових зразків товарів, коли попит на продукцію є повністю невідомим і т. д.

Розглянемо критерії прийняття рішень, які можуть бути застосовані в цій ситуації. Умовно їх можна поділити на дві групи: критерії інтегральних значень та оцінні критерії.

Охарактеризуємо різновиди інтегральних критеріїв.

Критерій максимальної міри байєсових множин. Маємо ситуацію прийняття рішень $\{\Phi,\Theta,F\}$. Позначимо через $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2},..., S_{\varphi_m}$ байєсові множини рішень $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m$ відповідно, а через $\mu(S_{\varphi_1}),\mu(S_{\varphi_2}),...,\mu(S_{\varphi_m})$ – міри цих множин. Оскільки в ситуації I_4 розподіл імовірності невідомий, то доцільним у виборі рішення можна вважати принцип максимальної міри байєсових множин. Він відповідає припущенню, що істинним для середовища C із більшою ймовірністю буде апріорний розподіл з байєсової множини, яка має більшу міру.

Таким чином, оптимальним уважається рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$, яке задовольняє умову

$$\mu(\varphi_{k_0}) = \max_{\varphi_k \in \Phi} \mu(\varphi_k).$$

Недоліком цього критерію є те, що оптимальне рішення φ_{k_0} не завжди може задовольняти бажану для органу прийняття рішень умову, тобто

$$\int\limits_{S_{\varphi_0}} B^{+}(\varphi_0, p)dp \geq \int\limits_{S_{\varphi_k}} B^{+}(\varphi_k, p)dp ,$$

де величина $\int\limits_{S_{\varphi_k}} B^{+}(\varphi_k, p)dp$ характеризує інтегральне байєсове значення оцінного функціонала.

Критерій максимального інтегрального байєсового значення оцінного функціонала.

Інтегральним байєсовим значенням оцінного функціонала на рішенні φ_k називається величина $\int\limits_{S_{\varphi_k}} B^{+}(\varphi_k, p)dp$.

Відповідно до названого критерію оптимальним будемо вважати рішення φ_{k_0}, що задовольняє умову

$$\int\limits_{S_{\varphi_0}} B^{+}(\varphi_0, p)dp = \max_{\varphi_k \in \Phi} \int\limits_{S_{\varphi_k}} B^{+}(\varphi_k, p)dp .$$

Недолік цього критерію полягає в тому, що оптимальне рішення φ_{k_0} не завжди може відповідати бажаній для органу прийняття рішень умові, а саме:

$$\mu(\varphi_{k_0}) \geq \mu(\varphi_k) .$$

Критерій максимального інтегрального потенціалу. Недоліки описаних вище критеріїв можуть бути певною мірою нейтралізовані, якщо застосувати принцип вибору, в основі якого лежить поняття потенціалу рішення.

Інтегральним потенціалом рішення $\varphi_k \in \Phi$ будемо називати таку величину:

$$\pi_{\varphi_k} = \frac{\int\limits_{S_{\varphi_k}} B^{+}(\varphi_k, p)dp}{1 - \mu(\varphi_k)/\mu(P_{n-1})} .$$

Оптимальним відносно критерію максимального потенціалу вважається рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$, яке задовольняє умову

$$\pi_{\varphi_0} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \pi_{\varphi_k} .$$

Описаний критерій можна вважати згорткою попередніх двох.

Критерій Бернуллі – Лапласа. Застосуваня цього критерію в умовах повної невизначеності базується на принципі недостатньої підстави. Його суть полягає в тому, що коли немає причини вважати який-небудь стан середовища ймовірнішим за інші, то апріорні ймовірності необхідно вважати однаковими, тобто $p = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_n)$, $\hat{p}_j = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1,m}$, а після того, як їх буде визначено, рішення можна приймати за критерієм інформаційної ситуації I_1.

Критерій Бернуллі – Лапласа передбачає використання принципу недостатньої підстави та критерію Байєса, зокрема оптимальним за цим критерієм буде рішення φ_{k_0}, яке задовольняє умову

$$B^+(p, \varphi_{k_0}) = \max_{\varphi_k \in \Phi} B^+(\hat{p}, \varphi_k) = \max_{\varphi_k \in \Phi} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{jk} .$$

Проаналізуємо отримане рішення на основі матриці оцінного функціонала. Очевидно, що рішення φ_k є кращим за рішення φ_i, коли буде невід'ємною така різниця: $B^+(\hat{p}, \varphi_k) - B^+(\hat{p}, \varphi_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f_{jk}^+ - f_{ji}^+)$. Тоді можна визначити необхідну й достатню умову того, що рішення φ_k буде оптимальним [12], а саме:

$$\min_{\varphi \in \Phi} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f_{jk}^+ - f_{ji}^+) \right\} \geq 0 .$$

Застосуємо на прикладі цей критерій.

П р и к л а д 4.1. Нехай ситуація прийняття рішень описується матрицею

	φ_1	φ_2	φ_3
θ_1	1	4	2
θ_2	5	3	1
θ_3	2	3	5

Необхідно знайти оптимальне за критерієм Бернуллі – Лапласа рішення.

Розв'язання

Визначимо спочатку апріорний розподіл імовірності. Оскільки в умовах задачі предбачаються три стани середовища, то $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Обчислимо тепер байєсові значення для кожного з рішень:

$$B^+(\varphi_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} f_{ik}^+ ,$$

$$B^+(\varphi_1) = \frac{8}{3},\ B^+(\varphi_2) = \frac{10}{3},\ B^+(\varphi_3) = \frac{8}{3}.$$

Як бачимо, оптимальним є рішення φ_2.

4.4. Критерії прийняття рішень в умовах антагоністичної поведінки середовища

Тепер розглянемо критерії прийняття рішень в умовах антагоністичної поведінки середовища (інформаційна ситуація I_5). Іншими словами, середовище активно протидіє цілям прийняття рішень, тобто з усіх своїх станів воно вибирає саме ті, у яких оцінний функціонал набуває своїх найгірших значень. Ось чому в цій ситуації раціональним буде вибір рішення, яке дає змогу отримати гарантовані значення оцінного функціоналу. Цього можна досягти, використовуючи критерії Вальда й Севіджа.

Критерій Вальда (принцип максиміну) застосовується, коли оцінний функціонал описує ефективність вигоди, тобто він має додатний інгредієнт $F = F^+$. При цьому раціональним уважається вибір рішення φ_{k_0}, що задовольняє умову

$$f_{k_0} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \min_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}^+ .$$

Інакше кажучи, вибране рішення забезпечує максимальний виграш у найгіршій ситуації.

П р и к л а д 4.2. Ситуацію прийняття рішень задано матрицею

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	2	1	7	8
θ_2	8	6	3	3
θ_3	2	10	4	0
θ_4	2	3	11	4
θ_5	16	4	7	10

Необхідно знайти раціональне рішення, ураховуючи антагоністичну поведінку середовища й неохідність набуття оцінним функціоналом максимального значення.

Розв'язання

Застосуємо критерій Вальда. Для цього визначимо найменший елемент у кожному стовпці, а потім серед них виберемо найбільший:

$$f_1 = \min_{\theta_j \in \Theta} f_{j1}^{+} = \min\{2, 8, 2, 2, 16\} = 2,$$

$$f_2 = \min_{\theta_j \in \Theta} f_{j2}^{+} = \min\{1, 6, 10, 3, 4\} = 1,$$

$$f_3 = \min_{\theta_j \in \Theta} f_{j3}^{+} = \min\{7, 3, 4, 11, 7\} = 3,$$

$$f_4 = \min_{\theta_j \in \Theta} f_{j4}^{+} = \min\{8, 3, 0, 4, 10\} = 0,$$

$$\max_{\varphi_k \in \Phi} \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ji}^{+} = \max\{2, 1, 3, 0\} = 3.$$

Максимальне значення функціонала відповідає рішенню φ_3, тому його вибір можна вважати оптимальним.

До переваг критерію Вальда можна віднести той факт, що він “надзвичайно консервативний у ситуаціях, де консерватизм може мати місце” [12], а недоліком є те, що він виходить із такого припущення: супротивник – досконалий майстер, який завжди знайде найкраще (для себе) рішення, а це не завжди відповідає дійсності.

Разом з цим, проти цього критерію можна висунути заперечення. Проілюструємо його на прикладі.

П р и к л а д 4.3. Візьмемо ситуацію прийняття рішень, яка описується матрицею

$$F^{+} = \begin{pmatrix} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta_1 & 0 & 1 \\ \theta_2 & 100 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися, що за критерієм Вальда оптимальним буде рішення φ_2, однак середнє значення функціонала для рішення φ_1: $B^+(\varphi_1) = 100(1-p)$ буде більшим за середнє значення для рішення φ_2: $B^+(\varphi_2) = 1-p$ для всіх апріорних розподілів імовірності: $p_1 = p$, $p_2 = 1-p$. Але незважаючи на це, вибір рішення φ_2 буде виправданим, якщо середовище є свідомим супротивником органу керування.

Усе сказане свідчить про те, що при певних умовах для розв'язування задачі може бути доцільним уведення додаткових обмежень, які, наприклад, базуються на критерії Бернуллі – Лапласа, тобто

$$f_{k_0} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \min_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}^+,$$

$$B^+\left(\frac{1}{n}, \varphi_k\right) \le B_0.$$

Критерій Савіджа (мінімаксного ризику), запропонований 1951 року, є одним із основних за частотою використання в теорії статистичних рішень. Він застосовується тоді, коли оцінний функціонал показує втрати або ризик, тобто $F = F^-$. При цьому оптимальним буде рішення φ_{k_0}, яке забезпечує виконання умови

$$f_{k_0} = \min_{\varphi_k \in \Phi} \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}^+.$$

При використанні цього критерію, як і в критерії Вальда, доцільним буде обмеження стосовно байєсового значення оцінного функціонала, а саме:

$$B^-(\frac{1}{n}, \varphi_k) \le B_0.$$

Зауважимо, що критерій Савіджа дає змогу "пом'якшити" консерватизм мінімаксного критерію шляхом заміни матриці виграшів на матрицю втрат, яку визначають таким чином:

$$a^-(\theta_j, \varphi_k) = \max_{\varphi_k}\{a^+(\theta_j, \varphi_k) - a^+(\theta_j, \varphi_k), \quad \theta_j \in \Theta, \varphi_k \in \Phi.$$

Візьмемо, приміром, матрицю виграшів з прикладу 4.3. Оптимальним за мінімаксним критерієм буде рішення φ_2 із гарантованим виграшем в одиницю. Подивимось, яким буде результат, якщо замінити цю матрицю матрицею втрат. Згідно з поданим вище перетворенням, матриця набуває такого вигляду:

$$F^{-}=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta_1 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 99 \end{pmatrix},$$

і відповідно до критерію Савіджа раціональним буде вибір рішення φ_1.

Головне заперечення проти цього критерію: якщо рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ є оптимальним за критерієм Савіджа і з множини рішень Φ видалити неоптимальне рішення $\varphi_k \neq \varphi_{k_0}$, то на новій множині $\Phi \setminus \varphi_k$ рішення φ_{k_0} може вже й не бути оптимальним.

4.5. Критерії прийняття рішень в умовах часткової невизначеності

Інформаційна ситуація I_6 характеризується наявністю факторів, що зумовлюють два типи поведінки середовища.

Перший тип характеризується тим, що орган керування має деяку інформацію про справжній розподіл ймовірностей на множині станів середовища, і хоча її недостатньо для точного визначення інформаційної ситуації, існує можливість встановити певний ступінь оптимізму-песимізму щодо поведінки середовища.

Що стосується другого типу поведінки середовища, то тут припускається, що орган керування володіє інформацією про стани середовища, яка є проміжною між інформаційними ситуаціями I_1 і I_5, іншими словами, має місце повне або часткове знання про розподіл імовірностей на множині станів середовища і про його антагоністичну поведінку.

Розглянемо критерії, які можуть бути корисними в таких ситуаціях.

Критерій Гурвіца базується на бажанні органу керування врахувати не тільки найгіршу щодо нього ситуацію (як критерії Вальда та Савіджа), а й найкращу також, тому він являє собою зважену комбінацію максимаксного і максимінного критеріїв.

Суть критерію Гурвіца полягає у відшукуванні оптимального рішення φ_{k_0}, яке задовольняє умову

$$\lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f^{+}_{jk_0} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f^{+}_{jk_0} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \{\lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ik} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}\},\ 0 \le \lambda \le 1.$$

Коли $\lambda = 1$, критерій Гурвіца збігається з критерієм Вальда, а коли $\lambda = 0$ – із максимаксним критерієм, який відповідає умовам найбільш сприятливого стану середовища. Реальний стан середовища перебуває десь між цими крайніми випадками й характеризується величиною $\lambda \in (0,\ 1)$.

Разом з описаним критерієм можна також застосовувати модифікований критерій Гурвіца, коли кожному рішенню $\varphi_k \in \Phi$ відповідає своє значення коефіцієнта $\lambda_k \in [0,\ 1]$, зокрема, оптимальним уважається рішення φ_{k_0}, яке задовольняє умову

$$\lambda_{k_0} \min_{\theta_j \in \Theta} f^+_{jk_0} + (1-\lambda_{k_0}) \max_{\theta_j \in \Theta} f^+_{jk_0} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \{\lambda_k \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ik} + (1-\lambda_k) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}\},$$

$$0 \le \lambda_k \le 1, \quad k = \overline{1, m}.$$

Розглянемо практичне застосування цього критерію.

П р и к л а д 4.4. Нехай ситуацію прийняття рішень описано такою марицею:

F^+	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
θ_1	1	3	0	2	7
θ_2	3	1	10	8	1
θ_3	5	5	4	5	6
θ_4	3	7	3	6	2
θ_5	8	2	5	4	8

При цьому рівень оптимізму-песимізму ОПР $\lambda = 0,7$.

Виберемо оптимальне за критерієм Гурвіца рішення. Для цього спочатку обчислимо значення показника Гурвіца відносно кожного з рішень за такою формулою:

$$f_{\lambda k} = \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ik} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}.$$

Для зручності запишемо результати обчислення у вигляді такої таблиці:

F^+	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
θ_1	1	3	0	2	7
θ_2	3	1	10	8	1
θ_3	5	5	4	5	6
θ_4	3	7	3	6	2
θ_5	8	2	5	4	8

$\min\limits_{\theta_j \in \Theta}$	1	1	0	2	1
$\max\limits_{\theta_j \in \Theta}$	8	7	10	8	8
$f_{\lambda k}$	3,1	2,8	3	3,8	3,1

Як бачимо, максимальне значення показника Гурвіца відповідає рішенню φ_4, тому його вибір за даних умов можна вважати оптимальним.

Розглянемо на прикладі можливе заперечення щодо критерію Гурвіца. Припустимо, шо ситуація прийняття рішень описується такою матрицею:

$$F^+ = \begin{pmatrix} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta_1 & 0 & 1 \\ \theta_2 & 1 & 0 \\ \theta_3 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{100} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

За критерієм Гурвіца обидва рішення мають однакові оцінки, а отже, вони є оптимальними, але з огляду на матрицю оцінного функціонала рішення φ_1 є значно кращим за φ_2. Урахувати цей факт можна, увівши для кожного рішення $\varphi_k \in \Phi$, яке досліджується на оптимальність за критерієм Гурвіца, обмеження такого вигляду:

$$B^+\left(\frac{1}{n}, \varphi_k\right) \geq B_0^+,$$

де B_0^+ – задане значення.

Розглянемо тепер питання про вибір значення коефіцієнта $\lambda \in [0, 1]$. Очевидно, що воно відповідає певному ступеню оптимізму-песимізму ОПР. Чим більшу впевненість відчуває ОПР стосовно одного з граничних випадків поведінки середовища, тим ближче до 0 або 1 буде значення λ. Значення $\lambda = \dfrac{1}{2}$, будучи рівноважною точкою проміжку [0, 1], свідчить про те, що ОПР уважає середовище однаковою мірою і антагоністичним, і таким, що буде максимально сприяти цілям прийняття рішень. У загальному випадку оптимальне рішення за критерієм Гурвіца являє собою функцію від λ.

О з н а ч е н н я 4.1. *Множиною Гурвіца* назвемо множину Δ_{φ_k}, яка задовольняє умову

$$\Delta_{\varphi_k} = \left\{ \lambda \in [0,1] \middle| f_{\lambda k} = \max_{\varphi_i \in \Phi} f_{\lambda i} \right\}, \varphi_k \in \Phi,$$

причому

$$\bigcup_{\varphi_k \in \Phi} \Delta_{\varphi_k} = [0,1], \quad \Delta_{\varphi_k} \cap \Delta_{\varphi_i} = \varnothing, \text{ коли } \varphi_i \neq \varphi_k.$$

Кривою Гурвіца будемо називати ламану $\Gamma^+(\lambda)$, визначену таким чином:

$$\Gamma^+(\lambda) = \{ f_{\lambda k}, \quad \textit{коли } \lambda \in \Delta_{\varphi_k}, k = \overline{1,m} \}.$$

Очевидно, що крива й множини Гурвіца є аналогічними кривій і множинам Байєса. Базуючись на них, можна сформулювати критерії максимальної міри множин Гурвіца, максимального інтегрального значення показника Гурвіца, а також максимуму інтегрального потенціалу.

Критерій Ходжеса – Лемана. У цьому критерії враховано припущення, за яким у реальних задачах прийняття рішень дійсні відомості про ситуацію часто перебувають між повним незнанням і наявністю точних даних стосовно апріорного розподілу ймовірностей. Наприклад, апріорний розподіл може здаватися досить достовірним, але все ж таки недостатньо надійним для того, щоб базувати на ньому свої рішення.

Застосування критерію Ходжеса – Лемана дає змогу врахувати інформацію, яку має ОПР, і при цьому забезпечити деякий рівень гарантії на випадок, коли вона є неточною. У певному сенсі цей критерій являє собою "суміш" критеріїв Байєса і Вальда.

Розглянемо ситуацію прийняття рішень $\{\Phi, \Theta, F\}$, коли оцінний функціонал задано у вигляді ризиків. Рішення φ_{k_0} назвемо *обмеженим байєсовим рішенням* відносно заданого апріорного розподілу $p \in \Delta_n$, якщо $B^+(\varphi_{k_0}, p) = \min_{\varphi_k \in \Phi} B^-(\varphi_k, p)$ і, крім того, має місце така нерівність: $f^-_{jk_0} \le f_0$, де f_0 – задане порогове значення функціонала.

Обмежене байєсове рішення також визначається такою умовою:

$$\min_{\varphi_k \in \Phi} \left\{ \lambda B^-(\varphi_k, p) + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f^-_{jk} \right\},$$

де $\lambda \in [0,1]$ – стала, що відображає ступінь довіри до інформації, яку має ОПР.

Вибрати оптимальне рішення за критерієм Ходжеса – Лемана зручно, скориставшись таким алгоритмом:

1. Визначаємо мінімальний ризик, тобто $f = \min_{\varphi_k \in \Phi} \max_{\theta_j \in \Theta} f_{\overline{jk}}$.

2. Ураховуючи обчислене значення ризику f та умови прийняття рішення, вибираємо величину максимально допустимого ризику f_0, причому $f_0 \geq f$.

3. Вибираємо рішення φ_{k_0}, яке є найкращим за критерієм Байєса для допустимого значення апріорного розподілу $p_0 \in \Delta_n$, коли виконується умова $f_0 \geq \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}$.

Контрольні запитання

1. Що являє собою інформаційна ситуація як основа прийняття рішень?
2. Дайте означення критерію прийняття рішень.
3. Які елементи описують ситуацію прийняття рішень?
4. У чому полягає відмінність оцінних функціоналів з додатним і від'ємним інгредієнтами?
5. Назвіть етапи процесу прийняття рішень.
6. Які характерні риси має ситуація прийняття рішень в умовах ризику?
7. Охарактеризуйте критерії, які застосовують в умовах ризику.
8. Коли доцільно застосовувати критерій Байеса?
9. За яких умов належить приймати рішення на основі критерію мінімуму дисперсії? Якими є особливості застосування цього критерію?
10. Сформулюйте означення байєсової множини.
11. У яких ситуаціях застосовують модальний критерій?
12. Які властивості мають байєсові множини?
13. Із якою метою використовують байєсові множини?
14. Які методи побудови байєсових множин ви знаєте?
15. Які критерії можна застосовувати в умовах повного незнання про ситуацію прийняття рішень?
16. У чому полягає суть критерію Бернуллі – Лапласа?
17. Опишіть інтегральні критерії прийняття рішень (максимальної міри байєсових множин, інтегрального байєсового значення оцінного функціонала, інтегрального потенціалу).
18. Які критерії доцільно використовувати в умовах антагоністичної поведінки середовища?
19. Які недоліки й переваги мають критерії Савіджа і Вальда?
20. У якій ситуації доцільно застосовувати критерії Гурвіца і Ходжеса – Лемана? Розкрийте зміст кожного з них.

Додаток

Поняття про нечітку логічну змінну

Методи нечітких множин особливо корисні за відсутності точної математичної моделі функціонування системи. Теорія нечітких множин дає можливість застосовувати для прийняття рішень неточні та суб'єктивні експертні знання про предметну область без формалізації їх у вигляді традиційних математичних моделей.

З використанням теорії нечітких множин вирішуються питання узгодження суперечливих критеріїв прийняття рішень, створення логічних регуляторів систем. Нечіткі множини дають змогу застосовувати лінгвістичний опис складних процесів, установлювати нечіткі відношення між поняттями, прогнозувати поведінку системи, формувати множину альтернативних дій, виконувати формальний опис нечітких правил прийняття рішень.

Методи теорії нечітких множин є зручним засобом проектування інтерфейсів у людино-машинних системах. На основі нечіткого логічного виведення будуються системи керування, подання знань, підтримки прийняття рішень, апроксимації, структурної та параметричної ідентифікації, розпізнавання образів, оптимізації. Нечітка логіка застосовується в побутовій електроніці, діагностиці, різноманітних експертних системах. Нечіткі експертні системи для підтримки прийняття рішень набули поширення у військовій справі, медицині й економіці. З їх допомогою здійснюють бізнес-прогнозування, оцінювання ризиків і прибутковості інвестиційних проектів. На основі нечіткої логіки досліджують глобальні політичні рішення й моделюють кризові ситуації.

Важливим застосуванням теорії нечітких множин є контролери нечіткої логіки, які використовуються у різноманітних системах керування, зокрема в побутових приладах. Замість математичної моделі для опису системи такі контролери використовують інтегровані знання експертів, які за структурою подання наближаються до розмовної мови й описуються з допомогою лінгвістичних змінних і нечітких множин.

До загальної структури fuzzi-контролера входять такі складові: блок фазифікації; база знань; блок рішень; блок дефазифікації.

Блок фазифікації перетворює чіткі величини, виміряні на виході об'єкта керування, на нечіткі величини, описані лінгвістичними змінними в базі знань.

Блок рішень використовує нечіткі умовні (if – then) правила, закладені в базі знань для перетворення нечітких вхідних даних на необхідні керувальні впливи, що мають також нечіткий характер.

Блок дефазифікації перетворює нечіткі дані з виходу блока рішень на чітку величину, яка подається на виконавчий пристрій для керування об'єктом.

З огляду на значне поширення систем штучного інтелекту з інтегрованою нечіткою логікою розроблення ефективних систем прийняття рішень на їх основі є актуальною науково-практичною проблемою.

Перспектива застосування нечіткої логіки полягає в розробленні гібридних методів штучного інтелекту, до яких можна віднести нечіткі штучні нейронні мережі, адаптивне доповнення баз нечітких правил, підтримку нечітких запитів до баз даних, побудову нечітких когнітивних карт, нечіткі графи, нечіткі мережі Петрі, нечіткі дерева прийняття рішень, нечітку кластеризацію та ін.

Методологічне узагальнення нечіткого логічного виведення як базового етапу побудови самонавчальних систем з адаптивними правилами прийняття рішень є метою роботи [6]. Тут розглядається проблема прийняття рішень в умовах невизначенності на основі застосування правил нечіткої логіки. Описано структуру та функції системи нечіткого прийняття рішень. Специфіковано стани перетворення нечітких даних у процесі логічного виведення рішень. Наведено приклад нечіткого логічного виведення.

Нехай $X \subseteq R^1$ – простір значень вхідних параметрів системи. Тоді нечітка або розмита множина (fuzzy set) A визначається на носії X у вигляді сукупності впорядкованих пар $\left(x, \mu_A(x)\right)$:

$$A = \left\{x, \mu_A(x) \middle| x \in X, 0 \le \mu_A(x) \le 1\right\},$$

де $\mu_A(x)$ – функція належності кожного x множині A.

Для дискретного носія нечітка множина має вигляд

$$A = \left\{x_1 / \mu_A(x_1), x_2 / \mu_A(x_2), \dots, x_m / \mu_A(x_m)\right\}.$$

Функція належності $\mu_A(x)$ ставить у відповідність кожному $x \in X$ дійсне число з відрізка $[0,1]$. Найбільшого поширення набули гауссова, сигмоїдальна, поліноміальна, тріангулярна та трапецієподібна функції належності. Конкретний вигляд функції визначається потребами досліджуваної предметної області.

Загальна форма функції належності задається у вигляді трапеції:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \max\left(0, (x_4 - x)/(x_4 - x_3)\right), x > x_3 \\ \max\left(0, (x - x_1)/(x_2 - x_1)\right), x < x_2 \\ 1, x \ge x_2 \ and \ x \le x_3, \end{cases},$$

де $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Окремим варіантом є тріангулярна функція належності, яка набуває значення 1 тільки в одній точці й визначає нечітке число.

У прикладних дослідженнях з проблем керування, у технічних науках, медицині, соціології, економіці, психології тощо широко використовуються експертні оцінки, які формулюються у термінах природної мови. З цією метою використовуються нечіткі лінгвістичні змінні.

Нечітка лінгвістична змінна $\tilde{X}$ (наприклад, тиск) задається набором термів, які позначають якісні ознаки станів системи (наприклад, „низький”, „середній”, „високий”). Нехай $\tilde{X}$ визначається m лінгвістичними термами:

$$\tilde{X} = \left\{ A_j \middle| j = 1...m \right\}.$$

Тоді лінгвістична змінна $\tilde{X}$ є нечітким образом носія X . Кожен із термів є нечіткою множиною

$$A_j = \left\{ x, \mu_{A_j}\left(x\right) \middle| x \in X, 0 \le \mu_{A_j}\left(x\right) \le 1 \right\}.$$

Функції належності $\mu_{A_j}(x)$, $j = 1...m$ однієї лінгвістичної змінної $\tilde{X}$ визначаються в одному вимірювальному просторі X.

Над нечіткими множинами можна визначити логічні операції, аналогічні операціям звичайної (однозначної) логіки, наприклад NOT, AND, OR. Множиною значень функції істинності звичайної логіки є $\{0, 1\}$. Функції істинності нечіткої логіки набувають значення на відрізку $[0, 1]$. У нечіткій логіці формула (висловлювання) може бути істинною зі значенням $\mu \in [0, 1]$. Нехай A, B – дві нечіткі множини.

Операція NOT – нечітке доповнення множини:

$$NOT\ A = A^{'} = \left\{ x, \mu_{A^{'}}\left(x\right) \middle| x \in X, \mu_{A^{'}}\left(x\right) = 1 - \mu_A\left(x\right) \right\}.$$

Для нечітких величин операція $NOT\ (\neg)$ є інволюцією на $[0, 1]$:

$$\neg a : [0, 1] \to [1, 0].$$

Операція $AND\,(\cap)$ – нечітка кон’юнкція множин:

$$A\ AND\ B = A \cap B = T_{\cap}\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right).$$

Оператор $T_{\cap}$ є будь-яким бінарним відношенням, яке задовольняє умови:

1) обмеження

$$T_{\cap}(0,0) = 0, T_{\cap}(\mu,1) = T_{\cap}(1,\mu) = \mu;$$

2) монотонність

$$if\ \mu_A \le \mu_C\ and\ \mu_B \le \mu_D\ then\ T_{\cap}(\mu_A, \mu_B) \le T_{\cap}(\mu_C, \mu_D);$$

3) комутативність

$$T_{\cap}(\mu_A, \mu_B) = T_{\cap}(\mu_B, \mu_A);$$

4) асоціативність

$$T_{\cap}\left(T_{\cap}(\mu_A, \mu_B), \mu_C\right) = T_{\cap}\left(\mu_A, T_{\cap}(\mu_B, \mu_C)\right).$$

Операція $AND\,(\wedge)$ над нечіткими величинами є тріангулярною нормою і набуває значення на відрізку $[0, 1]$:

$$a \wedge b : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1].$$

Одним із прикладів t-норми є знаходження мінімуму двох функцій належності:

$$A\ AND\ B = A \cap B = \min_x\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right).$$

Операція $OR(\cup)$ – нечітка диз'юнкція множин:

$$A\ OR\ B = A \cup B = T_\cup\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right).$$

Аналогічно оператор $T_\cup$ є будь-яким бінарним відношенням, яке задовольняє умови:

1) обмеження

$$T_\cup(1,1) = 1, T_\cup(\mu, 0) = T_\cup(0, \mu) = \mu;$$

2) монотонність

$$if\ \mu_A \le \mu_C\ and\ \mu_B \le \mu_D\ then\ T_\cup(\mu_A, \mu_B) \le T_\cup(\mu_C, \mu_D);$$

3) комутативність

$$T_\cup(\mu_A, \mu_B) = T_\cup(\mu_B, \mu_A);$$

4) асоціативність

$$T_\cup\left(T_\cup(\mu_A, \mu_B), \mu_C\right) = T_\cup\left(\mu_A, T_\cup(\mu_B, \mu_C)\right).$$

Операція $OR(\vee)$ над нечіткими величинами є тріангулярною конормою, яка набуває значення на відрізку $[0,1]$:

$$a \vee b : [0,1] \times [0,1] \to [0,1].$$

Одним із прикладів t-норми є знаходження максимуму двох функцій належності:

$$A\ OR\ B = A \cup B = \max_x\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right).$$

Операція імплікації $T_\to$ є будь-яким бінарним відношенням, яке задовольняє умови:

1) обмеження

$$T_\to(\mu, 1) = 1, T_\to(1, \mu) = \mu, T_\to(0, \mu) = 1;$$

2) зміна порядку за першим аргументом

$$if\ \mu_A \le \mu_B\ then\ T_\to(\mu_A, \mu_C) \ge T_\cup(\mu_B, \mu_C);$$

3) збереження порядку за другим аргументом

$$if\ \mu_C \le \mu_D\ then\ T_\to(\mu_A, \mu_C) \le T_\cup(\mu_A, \mu_D).$$

Одним із прикладів такої операції є імплікація Кліна – Дайнеса:

$$A \to B = \max_x\left(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)\right).$$

Імплікація $(\to)$ над нечіткими величинами є тріангулярною операцією зі значенням на відрізку $[0,1]$:

$$a \to b : [0,1] \times [0,1] \to [0,1].$$

Імплікація над нечіткими величинами a, b, може бути отримана з допомогою операцій нечіткого доповнення, норми та конорми, наприклад: $a \to b = \bar{a} \wedge \bar{b}, a \to b = \bar{a} \vee b$.

Нехай нечітка система здійснює вибір варіантів рішень на основі залежності вихідної величини від декількох вхідних величин. Припустимо, що математична модель залежності виходу від входів відсутня і замість неї використовується база експертних правил у вигляді нечітких висловлювань "$if - then$" у термінах лінгвістичних змінних і нечітких множин.

Тоді функціональність нечіткої системи прийняття рішень визначається такими кроками:

1) перетворення чітких вхідних змінних на нечіткі, тобто визначення ступеня відповідності входів кожній із нечітких множин;

2) обчислення правил на основі використання нечітких операторів і застосування імплікації для отримання вихідних значень правил;

3) агрегування нечітких виходів правил у загальне вихідне значення;

4) перетворення нечіткого виходу правил на чітке значення.

Структуру системи з нечіткою логікою зображено на рис. Д.1. Систему побудовано за схемою багатошарової штучної нейромережі, що складається з вхідного, двох прихованих і вихідного шарів.

Перший шар зображує входи системи, другий – нечіткі лінгвістичні змінні, третій – правила над нечіткими змінними, четвертий – виходи правил. Ваги всіх шарів, крім останнього, дорівнюють 1. Ваги зв'язків між шаром правил і вихідним шаром визначаються алгоритмом навчання.

Входи $\bar{x} = \left(x_i \middle| i = 1..n\right)$ (наприклад, тиск, об'єм) і вихід y (наприклад, температура) є чіткими контрольованими величинами. Кожен параметр x_i, $i = 1..n$, має нечіткий відповідник у вигляді лінгвістичної змінної $\tilde{X}_i = \left\{A_{i,j} \middle| j = 1..m_i\right\}$. Лінгвістична змінна $\tilde{X}_i$ складається з m_i термів $A_{i,j}$, кожен з яких є нечіткою множиною.

Правила R_k, $k = 1..N$ перевіряють значення кожної лінгвістичної змінної, тому максимально можлива кількість правил $N_{\max} = \prod_{i=1}^{n} m_i$. Реальну кількість правил позначимо через $N \le N_{\max}$.

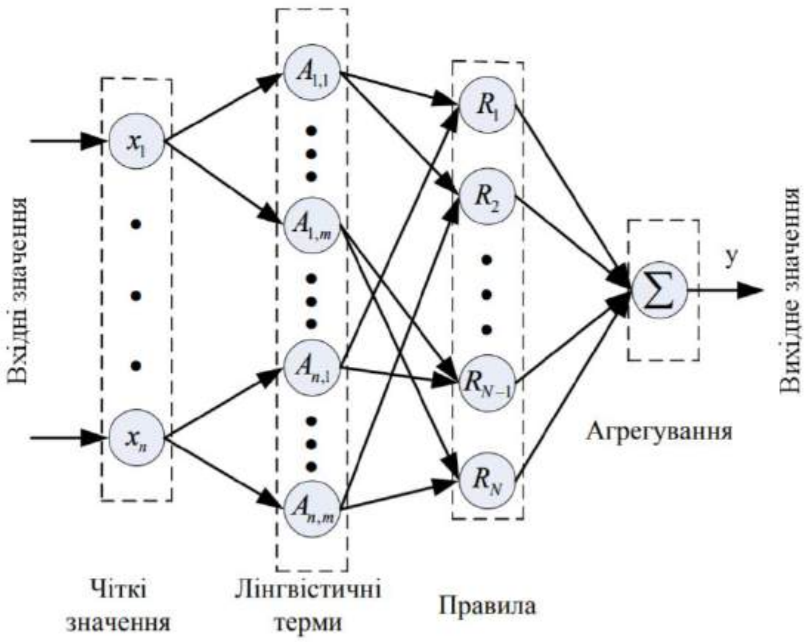


Рис. Д.1. Структура системи нечіткого логічного виведення

Вихід правила – це лінгвістична змінна $\tilde{Y} = \left\{ B_j \middle| j = 1..m \right\}$, яка набуває значення одного із термів B_j .

Для узагальнення правил відбувається агрегування їх нечітких виходів в одну нечітку множину з її подальшим перетворенням на чітке вихідне значення y.

Фазифікація полягає в перетворенні чітких вхідних величин $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на нечіткі множини $A' = (A'_1, A'_2, ..., A'_n)$. У більшості випадків для цього використовуються синглетонні моделі. Синглетон чіткого значення x_i є нечіткою множиною $A'_i\left(x, \mu_{A'_i}(x)\right)$ з функцією належності

$$\mu_{A'_i}(x) = \begin{cases} 1, x = x_i; \\ 0, x \neq x_i. \end{cases}$$

При фазифікації чіткого входу x_i визначають ступені його відповідності кожному лінгвістичному терму $A_{i,j}$ з функціями належності $\mu_{A_{i,j}}(x), \quad j = 1..m_i$. Ці ступені є значеннями функцій належності $\mu_{A_{i,j}}(x)$ у точці $x = x_i$, або інакше – значенням $A_{i,j}(x_i), i = 1..n$.

Нечітке логічне виведення

Нечіткі вхідні значення системи перетворюються на вихідні на основі правил нечіткої логіки, що є характерним для експертних систем прийняття рішень. Нехай система прийняття рішень здійснює перетворення значень n вхідних лінгвістичних змінних $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_i \middle| i = 1..n \right\}$ на вихідну лінгвістичну змінну $\tilde{Y} = R(\tilde{X})$

згідно з базою правил $R=\{R_k|k=1..N\}$. Правила R акумулюють знання експертів у вигляді нечіткої імплікації $R=A\to B$, яку можна розглядати як нечітку множину на декартовому добутку носіїв вхідних і вихідних розмитих множин. Процес отримання нечіткого результату B' з нечітких вхідних множин A' на основі знань $A\to B$ можна зобразити в такому вигляді:

$$B' = A' \bullet R = A' \bullet (A \to B),$$

де $\bullet$ – композиційне правило нечіткого виведення.

На практиці для нечіткого виведення використовується максимінна композиція, а нечітка імплікація реалізується знаходженням мінімуму функцій належності.

Для імітації роботи експертної системи за схемою імплікації використовується множина нечітких продукційних правил, кожне з яких будується у вигляді умовного оператора:

if *логічний вираз* ***then*** *оператор,*

де *логічний вираз* – висловлювання, побудоване на основі базових логічних операцій над нечіткими величинами; *оператор* – результівне рішення. Правила можуть визначати відношення відповідності (is) між вхідними лінгвістичними змінними $\tilde{X}$ та їх нечіткими термами $\{A_{i,j}|i=1,...,n;\ j=1..m_i\}$. Використання нечітких умовних правил є природним для подання знань експертами і спрощує їх машинне опрацювання.

Загалом до правила можуть входити всі можливі комбінації лінгвістичних термів для всіх вхідних змінних, об’єднаних логічними операціями.

Слід зазначити, що за допомогою перетворень нечітких множин будь-яке правило, що містить у лівій частині як кон’юнкції, так і диз’юнкції, можна перетворити на систему правил, у лівій частині яких будуть або тільки кон’юнкції, або тільки диз’юнкції. Для визначення нечіткої кон’юнкції можна використати знаходження мінімуму, а для нечіткої диз’юнкції – знаходження максимуму двох функцій належності. Не зменшуючи загальності, будемо розглядати правила, побудовані на основі кон’юнкції.

Розрізняють дві моделі логічного виведення: Мамдані (Mamdani) і Такагі – Суджено (Takagi – Sugeno).

Модель Мамдані оперує лише з лінгвістичними змінними та нечіткими множинами й перетворює нечіткі входи на нечіткі виходи. Наприклад, для моделі Мамдані правила мають вигляд

$$R_k : if\ \tilde{X}_1\ is\ A_{1,k}\ and ... and\ \tilde{X}_n\ is\ A_{n,k}\ then\ \tilde{Y}\ is\ B_k,$$

де $A_{i,k}\in\tilde{X}_i$ – нечіткі множини для вхідних та $B_k\in B$ – нечіткі множини для вихідної лінгвістичної змінної, що використовуються в k-му правилі ($k=1..N$). Операція *and* інтерпретується як t-норма нечітких множин.

Модель Такагі – Суджено оперує з чіткими величинами, лінгвістичними змінними та нечіткими множинами й перетворює чіткі входи на чіткі виходи. Правила моделі Такагі – Суджено можуть мати вигляд

$$R_k : if\ x_1\ is\ A_{1,k}\ and ... and\ x_n\ is\ A_{1,n}\ then\ y = o_k\ ,$$

де o_k – завершальне значення k-го правила, вихідний сигнал або керувальна дія.

Для повноти бази нечітких правил мають виконуватися такі умови:

1) для будь-якого терму вхідної змінної існує хоча б одне правило, у якому цей терм використовується в лівій його частині;

2) існує хоча б одне правило для кожного лінгвістичного терму вихідної змінної.

Для багатовходових систем застосовується механізм логічного виведення, характерною рисою якого є використання рівнів істинності передумов правил.

Для кожного правила $R_k,\ \ k = 1..N$ визначається рівень його істинності α_k відносно входів. Рівень істинності є дійсним числом, яке характеризує ступінь відповідності нечітких входів системи $A_i^{'}, i = 1..n$ заданим у правилах нечітким множинам $A_{i,j}\left(j = 1..m_i\right)$:

$$\alpha_k = \min_{i=1}^{n}\left[\max_{X_i}\left(A_i^{'} \wedge A_{i,j}\right)\right],$$

де X_i – простір визначення входів $A_i^{'}, i = 1..n$; операція $\wedge$ – нечітка кон'юнкція.

При використанні вхідних синглетонів механізм логічних виведень спрощується, оскільки ступінь істинності правил може бути визначений на основі фазифікованих входів:

$$\max_{X_i}\left(A_i^{'}\left(x_i\right) \wedge A_{i,j}\right) = A_{i,j}\left(x_i\right).$$

У цьому випадку обчислення рівня істинності k-го правила буде формуватися за формулою

$$\alpha_k = \min_i\left(A_{i,j}\left(x_i\right)\right).$$

Кожне із правил є нечіткою імплікацією, яка визначає вихідне значення залежно від рівня істинності лівої частини правила. Ступінь упевненості виведення задається функцією належності відповідного вихідного терму B_k. Використовуючи один зі способів побудови нечіткої імплікації, одержимо нові нечіткі змінні, або відповідні ступені впевненості в значенні виходів при застосуванні відповідного правила до заданих входів. Так, на основі визначення нечіткої імплікації за Мамдані як мінімуму лівої й правої частин правила маємо

$$B_k^{'} = \min\left(\alpha_k, B_k\right), \quad k = 1..N,$$

де $B_k^{'}$ – зрізи вихідних нечітких множин на рівні α_k .

Завершальним кроком нечіткого логічного виведення є агрегування виходів правил. Один з основних способів акумуляції – нечітка диз'юнкція вихідних множин, іншими словами, знаходження максимуму отриманих функцій належності. Як результат отримаємо значення агрегованого виходу:

$$B^{'} = \max_k\left(B_k^{'}\right), \quad k = 1..N.$$

При нечіткому логічному виведенні паралельно опрацьовують велику кількість правил з подальшим їх агрегуванням у завершальне рішення. Правила можуть будуватися на основі досвіду та знань експертів, створенням моделі дій оператора, методом навчання. При проектуванні пристроїв з нечіткою логікою важливо забезпечити можливості їх пристосування до змін навколишнього середовища методом навчання бази правил за експериментальними даними. Навчання полягає в адаптивному підборі параметрів нечітких множин та автоматичному генеруванні правил нечіткого логічного виведення. Для цього використовуються алгоритми оптимізації та інтелектуального опрацювання даних – градієнтний, генетичний, штучних нейронних мереж, байєсових мереж та ін.

Дефазифікація виходів

Після визначення індивідуальних виходів правил здійнюється дефазифікація агрегованого виходу. Загалом етап дефазифікації є необов’язковим і використовується, якщо необхідним є перетворення виведених нечітких лінгвістичних змінних до точного значення.

Існує декілька методів дефазифікації – метод середнього центра, перший максимум, середній максимум, висотна дефазифікація. Наприклад, метод середнього центра, або центроїдний метод, визначається центром ваги вихідної нечіткої множини:

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j B'\left(y_j\right)}{\sum_{j=1}^{m} B'\left(y_j\right)}.$$

Для моделі Такагі – Суджено вихідні множини правил задаються у вигляді синглетонів з функціями належності

$$\mu_{o_k}\left(y_k\right) = \begin{cases} 1, & y_k = o_k, \\ 0, & y_k <> o_k, \end{cases}$$

де o_k – вихідне значення k-го правила.

Тоді результівне чітке вихідне значення системи прийняття рішень обчислюється зважуванням значень активованих правил:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k}.$$

У системах керування отримане чітке вихідне значення використовується в контурі зворотного зв’язку для вироблення керувальних дій.

Приклад нечіткого виведення

Нехай база нечітких правил прийняття рішень містить визначені експертами залежності шансу працевлаштування молодого спеціаліста від його рівня підготовки (рейтингу) і попиту на спеціалістів такого профілю на ринку праці. Уведемо лінгвістичні змінні: *рейтинг = (високий, низький); попит = (високий, низький); шанс = (високий, середній, низький)*.

Наведемо декілька із можливих правил:

R_1 : якщо *попит* є *високим* і *рейтинг* є *високим*, то *шанс* є *високим*;

R_2 : якщо *попит* є *низьким* і *рейтинг* є *високим*, то *шанс* є *середнім*;

R_3 : якщо *попит* є *високим* і *рейтинг* є *низьким*, то *шанс* є *середнім*.

Припустимо, що лінгвістичні терми входів описуються такими нечіткими множинами:

$$\textit{високий попит} = \{100/0.2;\ 200/0.4;\ 300/0.8;\ 400/1\};$$

$$\textit{низький попит} = \{100/1;\ 200/0.8;\ 300/0.6;\ 400/0.4\};$$

$$\textit{високий рейтинг} = \{50/0.1;\ 71/0.8;\ 88/0.9;\ 100/1\};$$

$$\textit{низький рейтинг} = \{50/1;\ 71/0.3;\ 88/0.2;\ 100/0.1\}.$$

Терми виходу описуються такими множинами:

$$\textit{високий шанс} = \{0/0.1;\ 0.5/0.5;\ 1/1\};$$

$$\textit{середній шанс} = \{0/0.5;\ 0.5/1;\ 1/0.5\}.$$

Необхідно визначити шанс працевлаштування при *незначному попиті* та *середньому рейтингу*.

Звернемо увагу на те, що вхідні дані не визначають термів “*незначний попит”* та “*середній рейтинг”*. Вихідну реакцію на ці нечіткі значення необхідно отримати в процесі логічного виведення на основі бази правил.

Нехай на вхід системи надходять нечіткі множини попиту $A_1^{'} = \{100/0.4;\ 200/0.3;\ 300/0.2;\ 400/0.1\}$ і рейтингу $A_2^{'} = \{50/0.1;\ 71/0.8;\ 88/0.8;\ 100/0.1\}$.

Операції визначення мінімуму та максимуму позначимо у вигляді $\wedge$ та $\vee$ відповідно.

Для обчислення виходу виконаємо етапи нечіткого логічного виведення:

1. Обчислення рівнів істинності правил:

$$\alpha_1 = \min\left[\max\left(0.4\wedge 0.2, 0.3\wedge 0.4, 0.2\wedge 0.8, 0.1\wedge 1\right), \max\left(0.1\wedge 0.1, 0.8\wedge 0.8, 0.8\wedge 0.9, 0.1\wedge 1\right)\right] =$$

$$= \min\left[\max\left(0.2, 0.3, 0.2, 0.1\right), \max\left(0.1, 0.8, 0.8, 0.1\right)\right] = \min\left[0.3, 0.8\right] = 0.3;$$

$$\alpha_2 = \min\left[\max\left(0.4\wedge 1, 0.3\wedge 0.8, 0.2\wedge 0.6, 0.1\wedge 0.4\right), \max\left(0.1\wedge 0.1, 0.8\wedge 0.8, 0.8\wedge 0.9, 0.1\wedge 1\right)\right] =$$

$$= \min\left[\max\left(0.4, 0.3, 0.2, 0.1\right), \max\left(0.1, 0.8, 0.8, 0.1\right)\right] = \min\left[0.4, 0.8\right] = 0.4;$$

$$\alpha_3 = \min\left[\max\left(0.4\wedge 0.2, 0.3\wedge 0.4, 0.2\wedge 0.8, 0.1\wedge 1\right), \max\left(0.1\wedge 1, 0.8\wedge 0.3, 0.8\wedge 0.2, 0.1\wedge 0.1\right)\right] =$$

$$= \min\left[\max\left(0.2, 0.3, 0.2, 0.1\right), \max\left(0.1, 0.3, 0.2, 0.1\right)\right] = \min\left[0.3, 0.3\right] = 0.3.$$

2. Обчислення виходів правил:

$$B_1^{'} = \{0/\min(0.3, 0.1), 0.5/\min(0.3, 0.5), 1/\min(0.3, 1)\} = \{0/0.1, 0.5/0.3, 1/0.3\};$$

$$B_2^{'} = \{0/\min(0.4, 0.5), 0.5/\min(0.4, 1), 1/\min(0.4, 0.5)\} = \{0/0.4, 0.5/0.4, 1/0.4\};$$

$$B_3^{'} = \{0/\min(0.3, 0.5), 0.5/\min(0.3, 1), 1/\min(0.3, 0.5)\} = \{0/0.3, 0.5/0.3, 1/0.3\}.$$

3. Агрегування виходів:

$$B^{'} = B_1^{'} \vee B_2^{'} \vee B_3^{'} = \{0/\max(0.1, 0.4, 0.3), 0.5/\max(0.3, 0.4, 0.3), 1/\max(0.3, 0.4, 0.3)\} =$$

$$= \{0/0.4, 0.5/0.4, 1/0.4\}.$$

4. Дефазифікація виходу:

$$y = \frac{0*0.4 + 0.5*0.4 + 1*0.4}{0.4 + 0.4 + 0.4} = \frac{0.6}{1.2} = 0.50.$$

Отже, для заданих нечітких множин при незначному попиті на спеціалістів і середньому кваліфікаційному рейтингу шанс працевлаштуватися становить 50 %.

Висновки

1. Для керування системами з убудованими елементами штучного інтелекту в умовах невизначеності необхідно побудувати людино-машинний інтерфейс на основі якісних, вербальних категорій. Такі категорії визначаються в термінах нечітких множин. Тому розроблення методів керування вбудованими системами на основі правил нечіткої логіки є актуальною науково-практичною проблемою.

2. Для ефективного використання нечітких систем необхідно адекватно визначити нечіткі множини величин, побудувати правила виведення, правила агрегування виходів, здійснити перетворення чітких входів на нечіткі й нечітких виходів на чіткі.

3. Забезпечити адекватність функцій належності нечітких величин можна їх динамічним підстроюванням з допомогою адаптивних методів.

4. Якість прийняття рішень в основному визначається базою нечітких правил. Такі правила визначаються експертним методом і тому можуть бути суб'єктивними, неповними або суперечливими. Подолання суперечливості правил і, отже, підвищення інтелектуального рівня системи нечіткого логічного виведення досягаються доповненням і вдосконаленням бази правил у процесі навчання.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Акоф, Р. Основы исследования операций / Р. Акоф, М. Сасиени. – М. : Мир, 1971. – 534 с.

2. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища шк., 1988. – 552 с.

3. Кини, Р. Принятие решений при многих критериях, предпочтениях и замещениях : пер. с англ. / Р. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.

4. Киселева, Е. М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : монография / Е. М. Киселева, Н.З. Шор. – Киев : Наук. думка, 2005. – 564 с.

5. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

6. Кравець, П. Системи прийняття рішень з нечіткою логікою / П. Кравець, Р. Киркало // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. – Львів, 2009. – № 650. – С. 115 – 123.

7. Михалевич, В. С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем / В. С. Михалевич, В. Л. Волкович. – М. : Наука, 1982. – 286 с.

8. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.

9. Орловский, С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 206 с.

10. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 254 с.

11. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.

12. Трухаев, Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 168 с.

13. Ус, С. А. Моделі й методи прийняття рішень : навч. посіб. / С. А. Ус, Л. С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т “Дніпровська політехніка”. – Дніпро : НТУ “ДП”, 2018. – 300 с.

Зміст

Навчальне видання

Прохорова Ольга Михайлівна
Кальчук Наталія Леонідівна

МОДЕЛІ І МЕТОДИ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. План, 2021
Підписано до видання 08.10.2021
Ум. друк. арк. 9,2. Обл.-вид. арк. 10,38. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб´єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001