О. А. Мураховська, Н. А. Українець

ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О. А. Мураховська, Н. А. Українець

ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК 519.316(075.8)
М91

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. О. В. Макарічев,
канд. фіз.-мат. наук В. О. Афанасьєв

Мураховська, О. А.
М91 Теорія управління та прогнозування в умовах невизначеності [Електронний ресурс] : навч. посіб. / О. А. Мураховська, Н. А. Українець. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. – 142 с.

Розглянуто й проаналізовано природу нечіткості й невизначеності в задачах прийняття рішень. Показано основні підходи до розв’язання найхарактерніших задач чіткого й нечіткого моделювання в умовах невизначеності, які базуються на теорії нечітких множин, багатокритеріальному аналізі альтернатив, експертних системах підтримки прийняття рішень і біонічних підходах до аналізу складних систем.

Для студентів спеціальності «Системний аналіз і управління», які виконують випускні роботи бакалаврів і магістрів, пов'язані з розв’язанням задач, що містять невизначеність.

Іл. 33. Табл. 22. Бібліогр.: 25 назв

УДК 519.316(075.8)

ВСТУП

Проблема прийняття рішень, або проблема вибору альтернатив, – це один з найпоширеніших класів задач, які доводиться розв'язувати не тільки досліднику, але й інженеру-конструктору, господарському керівнику і т. д. Будь-які ситуації, що потребують прийняття рішень, містять зазвичай велику кількість невизначеностей. Можна сказати, що задачі, які не містять невизначеностей, є скоріше виключенням, ніж правилом, оскільки опис проблеми, адекватний реальності, практично завжди містить різного типу невизначеності.

Необхідно зазначити, що звести подібні задачі з невизначеностями до строго поставлених математичних задач надзвичайно складно. Класична математика, численні мови програмування – абстрактні, але вражають своєю чіткістю й логічністю при описі методів та алгоритмів розрахунків, а також при виконанні розрахунків, складність яких постійно підвищується. Вони дуже добре описують, приміром, рух небесних тіл і космічних кораблів, але спроби описати взаємини між людьми за допомогою формальної математичної логіки або мови С++ заздалегідь приречені на невдачу, оскільки вони не призначені для цього, не мають відповідного апарату.

У середині XX століття математика досягла такого рівня розвитку, що змогла приступитися до опису, аналізу, прогнозування все більш *складних і реальних* ситуацій, у тому числі в соціальній та економічній сферах, у системах штучного інтелекту й робототехніки, при створенні систем підвищення якості нечітких зображень та ідентифікації відображених на них об'єктів, розуміння текстів природною мовою тощо. При цьому математики мимоволі були змушені «спуститися» з крижаних вершин класичної, строгої постановки завдань і з подивом виявили, що *більшість реальних завдань і ситуацій за самою суттю постановки є нечіткими*. Їм не вистачає початкових даних, розглядувані множини об'єктів мають розпливчасті межі, реакції на збурні й керівні впливи неоднозначні й не завжди адекватні й т.д. Класична наука ігнорувала цю широку область людської діяльності, але загальні тенденції до першочергового розвитку *практичних, прикладних* напрямів математики (які, природно, базуються на фундаментальних дослідженнях) потребували розв'язання задач саме цього класу (насамперед у військовій діяльності, а також економіці, фінансах, соціології – тих галузях, які й досі є головними джерелами фінансування науково-технічного прогресу). Відповіддю на цю *об'єктивно існуючу потребу* став розвиток нечіткої логіки, теорій нечітких множин, нечітких відношень, лінгвістичних змінних і нечітких відображень, мета яких – сприяти, допомагати людському інтелекту й інтуїції приймати раціональні рішення в умовах не-повної та нечіткої інформації. Удосконалюючи цей напрямок, учені з подивом виявляли все нові й нові сфери застосування її інструментарію, зрештою переконавшись, що більшість прикладних проблем характеризуються нечіткою постановкою. Тому розроблення моделей напівінтуїтивних міркувань людини й використання їх у складних технічних системах майбутніх поколінь являє собою сьогодні одну з найважливіших проблем науки.

Дослідження цієї галузі науки було розпочато близько 50 років тому Лотфі А. Заде [3], професором Каліфорнійського університету ім. Берклі. Головна ідея його оригінальних досліджень полягала в тому, що людський спосіб міркування, що базується на природній мові та, що найголовніше, максимально відповідає об'єктивній реальності, не може бути описаний у межах традиційного математичного апарату. Цьому апарату властива строга однозначність інтерпретації, а все, що пов'язане з використанням природної мови й реальних умов діяльності людини, має багатозначну інтерпретацію. Ці фундаментальні ідеї стали благодатним ґрунтом для розвитку дивовижного букету новітніх наук і розрахункових методів.

Можна виділити три періоди становлення й розвитку теорії нечітких множин, або Fuzzy Sets (англійською мовою «fuzzy» означає «нечіткий, розмитий, пухнастий»). Перший період датується кінцем 60-х – початком 70-х років XX століття й характеризується становленням основ теорії нечітких множин. Другий припадає на 70–80-ті роки, коли з'явилися перші практичні результати застосування створеної теорії. Третій період, що триває з кінця 80-х років до цього часу, характеризується буквально бумом практичного застосування цієї теорії в різних сферах науки й техніки. Новітні підходи цієї науки дали можливість розширити сферу використання систем автоматизації далеко за межі області застосовності класичної теорії і створити принципово нові, більш досконалі системи різноманітних призначень, які до цього здавалися зовсім нездійсненними.

Апарат теорії нечітких множин дає можливість широко використовувати надійні та перевірені математичні підходи до розв'язання задач, які раніше важко піддавалися математичному опису або взагалі не піддавалися формалізації. Тим самим стало можливим по'єднання строгості й точності класичної математики з істотною невизначеністю й неоднозначністю багатьох практичних ситуацій, у тому числі різних явищ реального світу, що суб'єктивно сприймаються і є емоційно забарвленими у свідомості людини.

Методи теорії нечітких множин набули відповідного відображення в програмі математичної підготовки майбутніх системних аналітиків. Однак їх засвоєння й успішне застосування для розв'язування важливих для практики задач потребує від студентів певного рівня глибини розуміння, своєрідного «відчуття» природи невизначеностей, їх джерел і проявів.

Адже навіть від правильного розуміння суті конкретної невизначеності й визначення характеру її природи значною мірою залежить можливість вдалого вибору найбільш адекватних математичних моделей і методів для розв'язання задачі, яка містить цю невизначеність. З іншого боку, фахівець-аналітик може при цьому забезпечити кваліфіковану інтелектуальну підтримку процесів підготовки й прийняття відповідальних управлінських рішень.

Цей навчальний посібник ставить за мету набуття студентами навичок практичного розв’язання задач, що містять невизначеності. У посібнику описано головні підходи до розв’язання найхарактерніших задач чіткого та нечіткого моделювання в умовах невизначеності, які базуються на теорії нечітких множин, багатокритеріальному аналізі альтернатив, експертних системах підтримки прийняття рішень і біонічних підходах до аналізу складних систем.

1. НЕЧІТКІСТЬ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПІД ЧАС ОПИСУ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

1.1. Класифікація невизначеностей

Нехай існує деяка множина $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ можливих рішень, які мають назву «альтернативи». Реалізація кожної з альтернатив приводить до певних наслідків, сукупність яких являє собою множину $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_m\}$.

Аналіз цих наслідків за деяким заздалегідь вибраним набором показників може однозначно характеризувати міру прийнятності кожної з можливих альтернатив. Особа, що приймає рішення (ОПР), виходячи з цієї оцінки та деяких інших її міркувань щодо переваг, вибирає як остаточне рішення одну з альтернатив.

Таким чином, необхідно вивчити систему переваг ОПР $\boldsymbol{S}$ і побудувати таку модель вибору альтернативи, яка б забезпечувала кращий у деякому розумінні результат цього вибору. Цей результат має відповідати як меті рішення, що приймається, так і системі переваг ОПР. Отже, для характеристики задачі прийняття рішення може бути використаний такий кортеж:

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \rangle,$$

де $\boldsymbol{A}$ – множина альтернатив, що розглядаються; $\boldsymbol{Q}$ – середовище, у якому розглядається задача прийняття рішень; $\boldsymbol{S}$ – система переваг ОПР; $\boldsymbol{T}$ – деяка сукупність дій над множиною альтернатив $\boldsymbol{A}$.

Розглянемо докладніше кожний з компонентів кортежу.

Множина альтернатив $\boldsymbol{A}$ являє собою певну сукупність однорідних об'єктів, з яких необхідно вибрати один (або у певних випадках деяку підмножину) відповідно до заздалегідь визначених цільових критеріїв і системи переваг ОПР $\boldsymbol{S}$ на основі процедур, об'єднаних сукупністю дій $\boldsymbol{T}$ над цією множиною.

Під *середовищем* $\boldsymbol{Q}$ *задачі прийняття рішень* розуміють ті умови, у яких здійснюється процес підготовки й прийняття рішень і які необхідно обов'язково враховувати при формалізації задачі. Наприклад, у випадку управлінської діяльності в процесі прийняття рішень необхідно враховувати ресурсні можливості, правові й морально-етичні обмеження, психологічні характеристики й особливості особистісних якостей виконавців та інші фактори.

При цьому задачі прийняття рішень можуть здійснюватися:

– в умовах інформаційної визначеності, коли вибору кожної конкретної альтернативи відповідає один цілком певний результат;

– в умовах ризику, коли можливий результат вибору альтернативи не може бути однозначно визначений і являє собою дискретну або неперервну випадкову величину з відомим законом розподілу;

– в умовах невизначеності, коли можливий результат вибору тієї або іншої альтернативи не тільки заздалегідь невідомий, але і являє собою випадкову величину з невідомим законом розподілу.

Система переваг $\boldsymbol{S}$ особи, що приймає рішення, зазвичай являє собою деяку сукупність її міркувань стосовно шляхів і критеріїв раціонального досягнення поставленої мети, переваг і недоліків тієї або іншої альтернативи та їх співвідношення.

Сукупність дій $\boldsymbol{T}$ над множиною альтернатив – це деякий набір узагальнених операцій, що застосовуються не до окремих елементів множини $\boldsymbol{A}$, а до всієї множини в цілому або до деяких її підмножин.

Об'єктивна наявність невизначеності, що приводить до необхідності подібного підходу до розв'язання задач прийняття рішень, може бути обумовлена різними джерелами її походження й мати різні зовнішні прояви. Тому вважається цілком природним припущення про те, що залежно від вигляду й характеру невизначеності істотно може змінюватися вибір методів для розв'язання відповідних задач.

У досить загальному випадку класифікацію основних видів невизначеності, що мають місце під час розв'язання задач прийняття рішень, наочно можна зобразити у вигляді схеми, показаної на рис. 1.1.

Перший рівень дерева невизначеності характеризує кількісну сторону інформації, якої бракує для розв'язання задачі прийняття рішенння на етапі постановки задачі й вибору підходів до її розв'язання. Цілком природно, що в процесі самого її розв'язання розміщена інформація може змінюватися як кількісно, так і якісно. Розглянемо докладніше змістовну сторону основних видів невизначеності.

1. *Невідомість* являє собою початкову стадію вивчення задачі, коли необхідної інформації про досліджувану систему немає і прийняти яке-небудь раціональне рішення практично неможливо. Для розв'язання задачі треба одержати необхідну інформацію.

2. *Невірогідність*. У міру накопичення інформації настає стадія, коли про невідомість уже говорити не можна, однак наявна інформація ще не забезпечує бажаної вірогідності й повноти характеристики ситуації.

При цьому можливими є три випадки. Перший випадок відповідає ситуації, коли зібрано не всю необхідну інформацію (неповнота). Другий випадок характерний для ситуації, коли зібрано не всю достатню для розв'язання задачі інформацію (недостатність або недовизначеність). Нарешті, третій випадок відповідає ситуації, коли всю можливу інформацію зібрано, однак вона не забезпечує адекватного уявлення про досліджувану систему. Наявність невизначеності такого роду може бути пов'язана, наприклад, з тим, що процес збору інформації припинено через недостачу ресурсів, а це приводить до невірогідності.

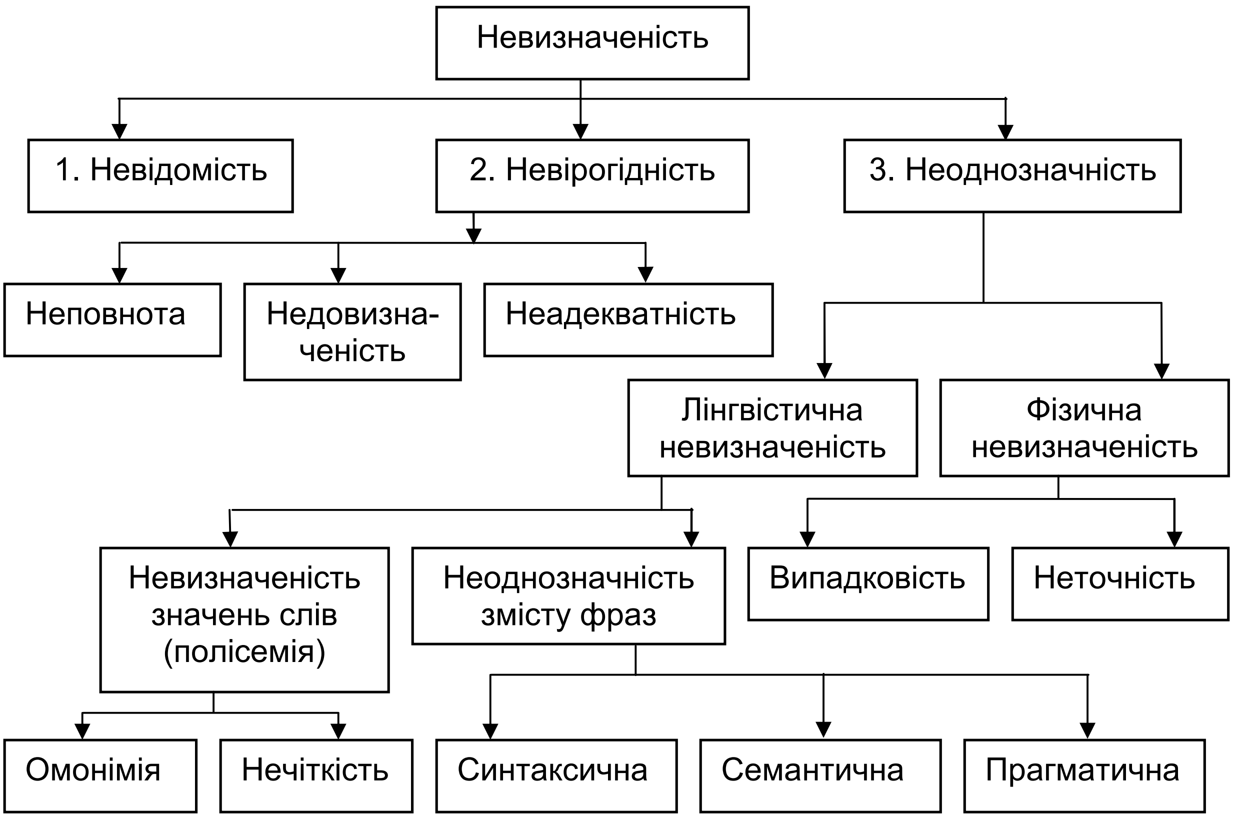

Рис. 1.1. Дерево класифікації невизначеностей

Подальше вивчення проблеми може привести або до ситуації визначеності, коли всі елементи в задачі описано однозначно, або до ситуації неоднозначності.

3. *Неоднозначність* задачі являє собою ситуацію, коли всю можливу інформацію зібрано, однак повністю визначеного опису проблеми не отримано й не може бути отримано в принципі. Причинами подібної ситуації можуть бути як об'єктивні фактори (наприклад, неможливість точного вимірювання розмірів атомного ядра), так і фактори суб'єктивної природи, у тому числі пов'язані з нечіткістю опису речей і явищ зовнішнього світу засобами звичайної мови.

Другий рівень дерева описує джерела або причини виникнення неоднозначності, якими можуть бути як зовнішнє середовище (*фізична невизначеність*), так і професійна мова, яка використовується ОПР або експертами (*лінгвістична невизначеність).*

Фізична невизначеність може бути пов'язана як з наявністю в зовнішньому середовищі декількох можливостей, кожна з яких деяким випадковим чином стає дійсністю (випадковість), так і з недостатньою точністю вимірів (неточність). При цьому в обох випадках передбачається, що відповідні закони розподілу щільності ймовірностей є відомими.

Лінгвістична невизначеність зазвичай обумовлена багатьма особливостями професійної мови ОПР або особливостями її використання для опису задачі прийняття рішення. Невизначеність такого роду може породжуватися, з одного боку, наявністю деякої множинності значень слів мови *(полісемія),* з іншого – можливою неоднозначністю змісту фраз.

Можна виділити два види полісемії. Першим її видом є *омонімія* – ситуація, коли елементи задачі прийняття рішення, що відображаються тим самим словом, істотно різняться. З повсякденного життя добре відомий приклад множинності значень слова "ключ".

Другим видом полісемії, характерним для таких ситуацій, коли різні об'єкти, що описуються в задачі, подібні один до одного, є *нечіткість.* Як приклад нечіткості можна навести фразу "На складі заготовлено невеликий запас палива". Тут саме слово "невеликий" надає всій фразі нечіткості, оскільки воно недостатньо повно характеризує наявний запас як з кількісної, так і з цільової точок зору. Дійсно, по-перше, невідомо, "невеликий" з розрахунку на весь опалювальний сезон чи всього лише на кілька днів. По-друге, не зазначено, чи передбачається можливість поповнення цього запасу в міру його витрачання.

Розглядаючи різні джерела появи неоднозначності, можна виділити три її види.

1. *Синтаксична неоднозначність* обумовлена нечіткістю або помилковістю використання розділових знаків. Прикладом може бути широко відома фраза "стратити не можна помилувати", зміст якої може змінюватися на прямо протилежний залежно від того, у якому місці буде поставлено пропущену кому.

2. *Семантична невизначеність* обумовлена трудністю розуміння змісту фрази. Зазвичай виділяють два її види:

– поверхнева невизначеність, яка полягає в тому, що окремі слова у фразі зрозумілі, а зміст фрази в цілому не сприймається (така ситуація виникає при перекладі деякого тексту з іноземної мови з використанням словника при недостатньому знанні цієї мови, специфічних особливостей і смислового різноманіття слів, що вживаються);

– глибинна невизначеність, яка полягає в тому, що в аналізованій фразі немає жодного відомого слова (подібна ситуація нерідко виникає, наприклад, при спробі зрозуміти текст, написаний фахівцем з області, досить далекій від сфери професійних інтересів людини, що читає цей текст).

3. *Прагматична невизначеність* обумовлена неоднозначністю використання синтаксично та семантично зрозумілої інформації для досягнення певної мети в задачі прийняття рішення. Характерним прикладом може бути ситуація, коли йдеться про вартість і стверджується, що одна річ має перевагу над іншою, тільки тому, що вона дешевша. Суть невизначеності тут полягає в повному ігноруванні якісних характеристик цієї речі. Таким чином, для прийняття рішення інформації про співвідношення вартісних показників зовсім недостатньо, оскільки невідомими є якісні характеристики розглянутих альтернативних варіантів потенційної покупки.

1.2. Приклади задач, що містять невизначеності різних типів

Щоб наочно окреслити коло задач, що містять невизначеності різних типів, розглянемо кілька максимально спрощених прикладів, які можна трактувати як задачі прийняття рішень в умовах невизначеності.

Приклад 1. Студент, увійшовши в трамвай, вирішує, брати квиток чи ні. Тут результат визначається двома обставинами: рішенням студента (тобто ОПР) і фактором появи контролера (середовище). Тут є всього два рішення ОПР і два стани середовища. Щоб оцінити корисності результатів, найпростіше взяти виражені в умовних одиницях (ум. од.) грошові втрати, як зазначено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Альтернатива	Стан середовища	
	Контролер з'явиться	Контролер не з'явиться
Брати білет	2 ум. од.	2 ум. од.
Не брати білет	8 ум. од.	0 ум. од.

Яке рішення слід прийняти, якщо за мету вважати мінімізацію втрат? Це приклад задачі прийняття рішень в умовах «природної» невизначеності або невизначеності середовища. Методи розв’язання подібних задач істотно залежать від наявності додаткової інформації, наприклад, чи можна кожному стану середовища приписати ймовірність його настання чи ні. Принциповим також є питання про те, багаторазовим чи одноразовим є вибір.

Приклад 2 (дилема в'язня). Заарештовано двох підозрюваних у скоєнні серйозного злочину. У прокурора немає повного доказу їх вини, а результати судового розгляду справи повністю залежать від стратегії поведінки підозрюваних. У кожного з них є дві альтернативи: зізнатися в скоєнні злочину або ні. Можливі наслідки наведено в табл. 1.2 (Н — незізнання; З — зізнання; I, II — номера затриманих).

Таблиця 1.2

I	II	
	Н	З
Н	(1;1)	(10;0)
З	(0;10)	(7;7)

Якщо обидва заарештованих не зізнаються, то їм буде пред'явлено звинувачення в скоєнні незначного злочину і вони обидва отримають по одному року позбавлення волі. Якщо один зізнається, а інший — ні, то перший буде повністю звільнений, а інший отримає максимальний термін — 10 років позбавлення волі. Якщо ж зізнаються обидва, то вони отримають термін сім років позбавлення волі. Яке рішення слід прийняти кожному з ув'язнених, щоб мінімізувати покарання?

Тут також є невизначеність, але на відміну від попереднього прикладу це невизначеність типу «активний партнер». Ефективність рішення в такій задачі значно мірою залежить від стратегії поведінки іншої особи, а також від інформованості обох суб'єктів про наміри іншої сторони.

У багатьох випадках особа, яка приймає рішення, може вказати лише множину всіх пар результатів, для яких перший результат у парі краще другого. При цьому числових оцінок результатів у принципі немає.

Приклад 3. Молодий учений вибирає місце роботи, виходячи з такої кількості альтернатив:

1) $\boldsymbol{x_1}$ — асистент у дуже відомому університеті з окладом 250 ум. од.;

2) $\boldsymbol{x_2}$ — доцент у менш відомому інституті з окладом 350 ум. од.;

3) $\boldsymbol{x_3}$ — професор в маловідомому периферійному інституті з окладом 450 ум. од.

Легко уявити ситуацію, коли вчений віддасть перевагу $\boldsymbol{x_1}$ порівняно з $\boldsymbol{x_2}$. Цю перевагу можна позначити $(\mathbf{x_1};\mathbf{x_2})$. Аналогічно можна отримати й інші переваги $(\mathbf{x_2};\mathbf{x_3})$ і $(\mathbf{x_3};\mathbf{x_1})$. Отже, тут немає найкращої альтернативи.

Якими принципами слід керуватися для прийняття рішень у подібних ситуаціях?

Існують проблеми так званого групового вибору рішень, коли основна задача полягає в тому, щоб вказати «справедливі» принципи врахування індивідуальних виборів, що приводять до розумного групового рішення.

Проста модель задачі групового вибору формулюється в такий спосіб. Нехай множина варіантів рішень X є скінченною: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Є група з n членів, які приймають рішення. Кожен член групи з номером $i = 1, \ldots, n$ має свою систему переваг на множині X, що задається за допомогою бінарного відношення $R_i \subset X^* X$,

$$R_i = \{(x_j, x_k), \ldots, (x_p, x_m)\}.$$

Тут R_i — множина впорядкованих пар елементів з X. Потрібно за заданою системою $R_1, \ldots, R_n$ індивідуальних переваг побудувати групову (колективну) систему переваг $R = f(R_1, \ldots, R_n)$, де f — деяка функція, що реалізує прийнятий принцип узгодження індивідуальних переваг.

Здавалося б, досить використовувати логічно очевидне правило більшості. Однак є певні труднощі, пов'язані з природними принципами узгодження типу правила більшості або оцінювання за середнім балом. Парадокс голосування продемонструємо на такому прикладі.

Приклад 4 («порочне коло»). Нехай три парламентські групи, що мають приблизно однакову кількість голосів, обговорюють три варіанти деякого законопроекту a, b, c з метою затвердження «найкращого» варіанту. Нехай системи переваг груп мають відповідно такий вигляд:

1. $a \succ b \succ c,\ R_1 = \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$.
2. $b \succ c \succ a,\ R_2 = \{(b,c), (c,a), (b,a)\}$.
3. $c \succ a \succ b,\ R_3 = \{(c,a), (a,b), (c,b)\}$.

Вирішили діяти за правилом простої більшості. Тоді внаслідок голосування отримаємо $a \succ b$, тому що пара (a,b) присутня в R_1 і R_3, а пара (b,a) — тільки в R_2. Аналогічно встановлюємо, що $b \succ c$ і $c \succ a$, тобто $a \succ b \succ c \succ a$.

Отримуємо "зачароване коло" і втрату властивості транзитивності в груповій перевазі. За результатами цього голосування, як і раніше, не можна вибрати найкращий законопроект. Більш того, очевидно, що при вмілому веденні засідання парламенту голова може забезпечити затвердження більшістю голосів кожного з трьох варіантів. Дійсно, голова може запропонувати обговорити спочатку якісь два варіанти, проголосувати й найгірший відкинути.

Далі для обговорення знову залишаться два варіанти — залишений при першому розгляді і той, що не розглядався. Тоді, очевидно, якщо на перше обговорення виносяться варіанти a,b, то виявляється $a \succ b$ і варіант b відкидається. Далі конкурують a і c. Унаслідок цього за принципом більшості маємо $c \succ a$, і як остаточний варіант парламент вибирає варіант c. Якщо ж, навпаки, на перше обговорення виносяться варіанти b,c, то найкращим виявиться варіант a. Точно так само можна забезпечити вибір варіанта b як найкращого. Безневинна на перший погляд пропозиція про порядок розгляду вирішально впливає на результат!

Приклад 5 (парадокс багатоступінчастого голосування). Припустимо, що на виборах президента деякої держави борються дві партії, які прагнуть зробити переможцем свого представника. Далі показано, що при вмілому веденні справи меншість може нав'язати свою думку більшості, хоча голосування завжди буде проводитися за правилом більшості. Щоб зрозуміти ідею, достатньо дослідити рис. 1.2.

З рис. 1.2 видно, що група, що має вісім голосів, урешті решт нав'язала свою думку групі з дев'ятнадцяти виборців. Уся справа, звичайно, полягає в умілому групуванні сил. При цьому чим більше ступенів, тим яскравіше виявляється зазначений ефект.

Приклад 6 (задача про розподіл ресурсів). Нехай деякий ресурс (наприклад, грошовий) розподілено між n членами деякого співтовариства. При цьому станом системи будемо називати вектор $(a_1, a_2, ..., a_n)$, де a_i — обсяг ресурсу, яким володіє i-й член спільноти. Загальний обсяг ресурсу є постійним і визначається формулою

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Розглянемо інший стан тієї ж системи $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n)$. Очевидно, стан b не гірше стану **a** для i-го суб'єкта, якщо $b_i \ge a_i$. Будемо тепер робити перерозподіл ресурсів на основі дуже сильної більшості: перехід системи з деякого стану a у стан b дозволено, якщо новий стан буде не гіршим за попередній для всіх членів спільноти, крім, може бути, одного (тотально-мажоритарне правило).

Послідовність станів $a_1, a_2, ..., a_m$ будемо називати тотально-мажоритарними шляхом із a_1 в a_m, якщо кожний проміжний перехід із a_i в a_{i+1} було здійснено на основі тотально-мажоритарного правила. Досить несподіваним є твердження, що тотально-мажоритарний шлях може пов'язувати будь-які два стани системи! Таким чином, спираючись на думку "всього суспільства" можна проводити будь-які перерозподіли ресурсу, у тому числі й показані на рис. 1.3.

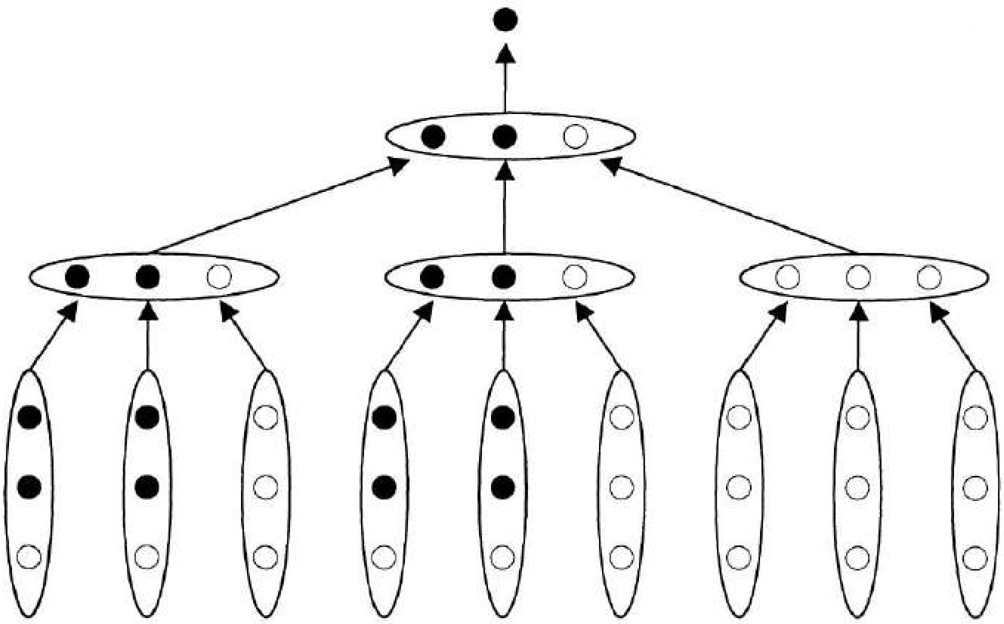

Рис. 1.2. Система багатоступінчастого голосування

Наведені приклади не вичерпують усіх типів задач прийняття рішень в умовах невизначеності, хоча й охоплюють значну кількість реальних ситуацій.

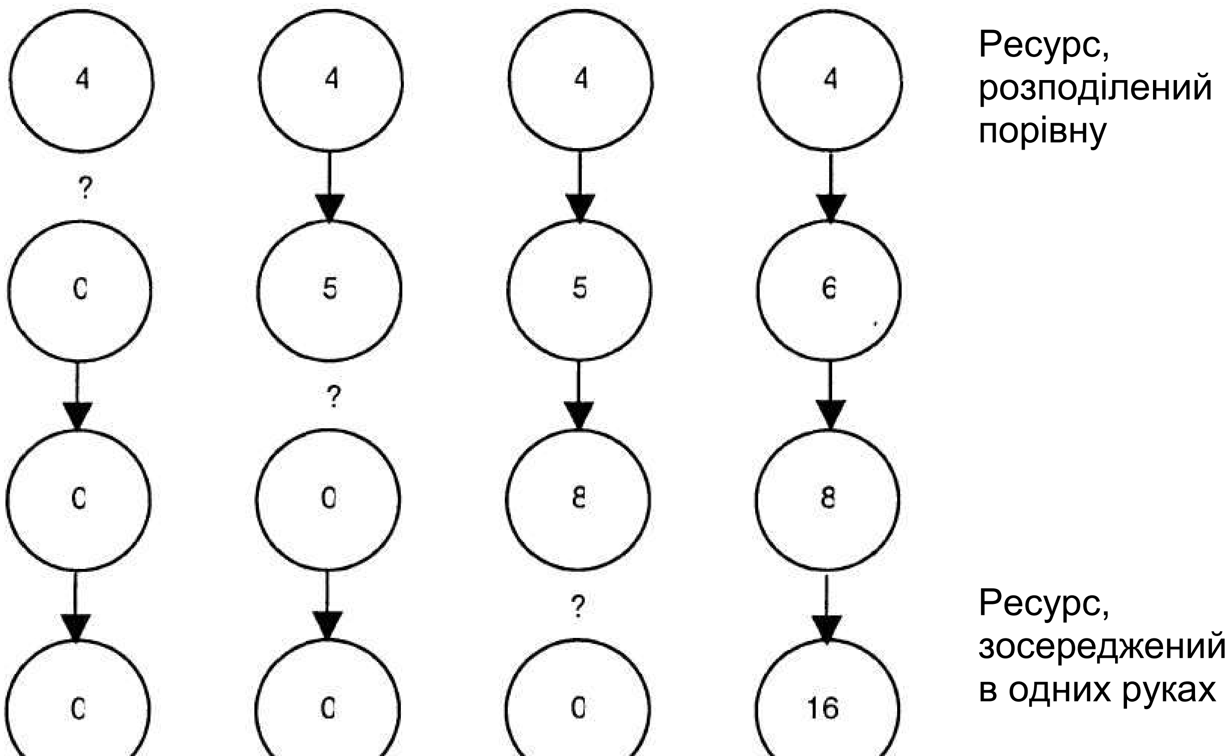

Рис. 1.3. Розподіл ресурсу за принципом більшості

1.3. Класичні й сучасні методи формалізації невизначеностей

На практиці досить часто виникає деяка помилкова аналогія між імовірністю й нечіткістю. Між цими поняттями та областями застосування відповідних методів існує принципова відмінність.

Проведемо порівняльний аналіз основних характерних рис методів теорії нечітких множин і методів теорії ймовірностей та їх можливостей у різних прикладних задачах.

У теорії ймовірностей зазвичай розглядаються події, невизначеність характеристик яких пов'язана з їх випадковим зміненням, тоді як у теорії нечітких множин розглядаються цілком детерміновані об'єкти або події, окремі істотні характеристики яких, разом з тим, мають деяку невизначену частину.

Дійсно, імовірність деякої події може дорівнювати одиниці, тоді як ступінь її належності до певного класу більш загальних подій може бути меншим від одиниці. Наприклад, імовірність настання дня після ночі дорівнює одиниці, а ступінь належності конкретного моменту часу (наприклад, шостої ранку) до поняття «день» може бути різним залежно від пори року або погоди (сонячно або хмарно). Природно, при цьому слід ураховувати й індивідуальні особливості конкретної людини.

Для ймовірнісного підходу характерним є подання невизначеності в описі параметрів об'єктів або процесів у вигляді деякого закону розподілу випадкової величини. При цьому кожному значенню змінної x відповідає певне значення ймовірності $P(x)$.

Для нечіткомножинного підходу характерними є невизначеності в описі об'єкта словами природної мови або невизначеності, обумовлені властивою людині суб'єктивністю суджень у процедурах оцінювання. Вони можуть бути подані у вигляді значень функцій належності $\mu_A(x)$ або у вигляді якогось елемента кількісної шкали з нечіткими (розмитими) межами.

Для ймовірнісного підходу характерним є оперування великою кількістю однорідних об'єктів, за випадковими відхиленнями значень одного або декількох параметрів яких і визначаються ймовірнісні характеристики розподілу для цих параметрів. При ймовірнісному підході досить поширеним є також випадок оперування великою кількістю даних, одержаних за результатами численних спостережень за одним конкретним об'єктом. При цьому кількість отриманих даних (результатів спостережень або вимірів) для строгого дослідження й визначення ймовірнісних характеристик досліджуваного процесу має бути досить великою.

Нечіткомножинний же підхід зазвичай пов'язаний з дослідженням невеликої кількості об'єктів або навіть одного об'єкта. Дослідника цих об'єктів цікавлять їх характеристики, які не цілком чітко визначено, і його завдання полягає у визначенні міри цієї нечіткості.

При розв'язанні задач прийняття рішень сама нечіткість може стосуватися як ступеня належності до тієї або іншої альтернативи, так і можливого результату вибору цієї альтернативи. Добре відомо, що в житті людини нерідко виникає необхідність зробити рішучий вибір усього лише із двох можливих альтернатив, однак зменшення їх кількості істотно не полегшує задачу вибору. Успішно розв'язати задачу можна, лише знаючи характеристики нечіткості.

При виборі підходу, який би найбільшою мірою відповідав характеру задачі та цілям її розв'язання, можлива перевага визначається характерними рисами як можливих методів, так і самих цих задач. Природно, що всі задачі, так або інакше пов'язані з випадковим характером змінення параметрів та з існуванням відповідного розподілу ймовірності, повинні розв'язуватися із застосуванням адекватних імовірнісних методів.

До категорії ж нечітких задач належать такі, що пов'язані з визначенням ступеня наявності конкретної якості об'єкта. Прикладом може бути задача визначення, наскільки даного студента можна вважати високим, гарним, розумним тощо. Крім того, до класу нечітких задач належать і такі, у яких необхідними є оцінювання деяких якісних категорій і вибір на цій основі однією ОПР певних варіантів з урахуванням сформульованих природною мовою деяких критеріїв раціонального вибору. Прикладом такої задачі може бути необхідність вибору варіанта нової технології виробництва продукції, де критерієм є можливість зниження собівартості продукції або ціни її продажу.

Таким чином, у процесі розв'язання реальних задач управління й прийняття рішень наявну невизначеність не можна ігнорувати і навіть спрощувати. Необхідно ефективно використовувати існуючі методи й активно розробляти нові, які б дали можливість формалізувати невизначеність різного роду. Для цього необхідно не тільки знати природу невизначеності, розуміти принципи її класифікації, але й уміти в кожному конкретному випадку вибирати найбільш прийнятні методи для адекватного опису складних задач, що розв'язуються в умовах цієї невизначеності. Останніми роками все більш широкого застосування набувають методи розв'язання задач прийняття рішень, що базуються на теорії нечітких множин.

1.4. Постановка задачі прийняття рішень в умовах невизначеності

Нехай $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ – множина альтернатив, $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ — множина наслідків. Передбачається існування причинового зв'язку між вибором деякої альтернативи $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}$ і наступанням відповідного результату. Крім того, передбачається наявність механізму оцінювання якості результату $\boldsymbol{y}_i \in \boldsymbol{Y}$. У деяких випадках доцільно вважати, що ми маємо можливість безпосередньо оцінювати якість альтернативи $\mathbf{x_i}$, і множина випадків по суті випадає з розгляду. Потрібно вибрати найкращу альтернативу, для якої відповідний результат має найкращу оцінку якості.

Задачу прийняття рішень можна проілюструвати за допомогою рис. 1.4.

Рис. 1.4. Задача прийняття рішень

Як видно з прикладів, зв'язок альтернатив з наслідками може бути детермінованим, мати ймовірнісний характер (задача прийняття рішень в умовах ризику) або його може не бути (задача прийняття рішень в умовах невизначеності).

На рис. 1.5 показано детермінований зв'язок між альтернативами й наслідками.

Рис. 1.6 ілюструє ймовірнісний зв'язок, коли вибір $\boldsymbol{x}$ визначає деяку щільність розподілу ймовірностей на множині $\boldsymbol{Y}$. У цьому випадку вибір $\boldsymbol{x}_i$ уже не гарантує настання певного результату $\boldsymbol{y}_i$. Графи, зображені на рис. 1.5 і 1.6, називають графами зв'язків альтернатив з наслідками.

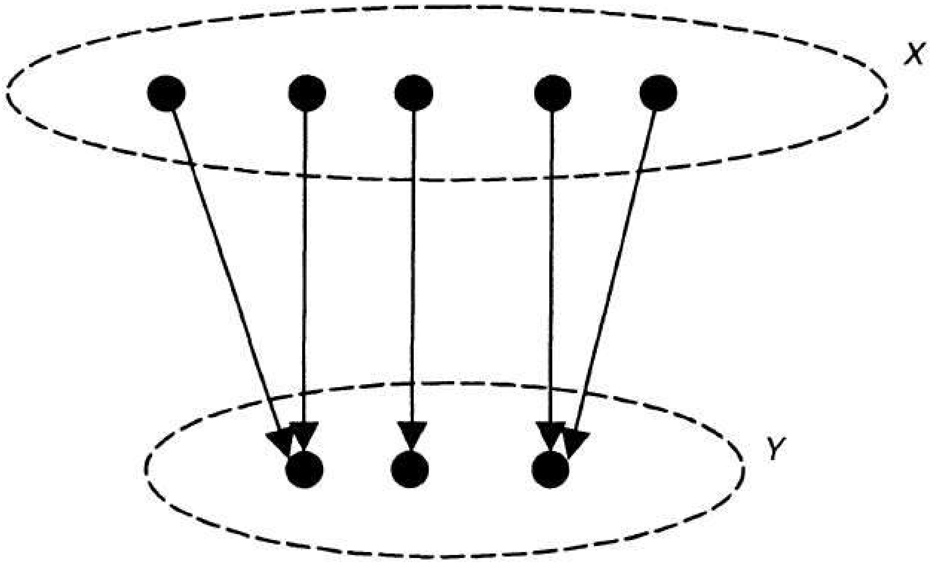

Рис. 1.5. Детермінований зв'язок

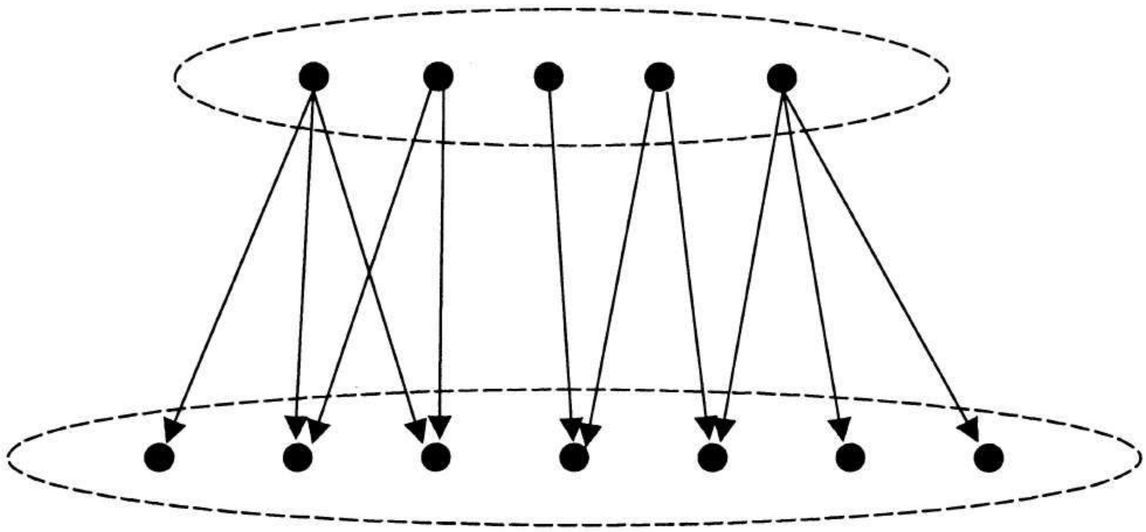

Рис. 1.6. Імовірнісний зв'язок

Граф, показаний на рис. 1.6, є "зваженим": кожна стрілка характеризується вагою, тобто числом P_{ij} — імовірністю настання результату y_j при виборі альтернативи x_i. Очевидно, що

$$\forall i : \sum_j P_{ij} = 1.$$

Той же рис. 1.6 ілюструє третій вид зв'язку альтернатив з наслідками, що реалізується в задачах ПР в умовах повної невизначеності. При цьому передбачається, що інформації ймовірнісного характеру немає (стрілки на графі не мають ваг). Невизначеність при виборі й реалізації зв’язку альтернатив з наслідками може мати більш складний характер (див. "дилему в’язня"), але поки обмежимося трьома випадками, які зображено на рис. 1.7.

Другий важливий момент у загальній задачі ПР полягає у вивченні системи переваг особи, що приймає рішення (ОПР). Важливо, що способи задання системи переваг можуть бути реалізовані для кожного виду зв'язку альтернатив з наслідками.

Найпростіша ситуація виникає, коли кожен результат можна оцінити конкретним дійсним числом згідно з заданим відображенням

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{R}.$$

У цьому випадку порівняння результатів зводиться до порівняння чисел, що їм відповідають. Функцію $\boldsymbol{f}$ називають цільовою функцією, критеріальною функцією, функцією критерію оптимальності або навіть просто критерієм оптимальності. Остання назва є не цілком коректною, оскільки критерій оптимальності — це, взагалі кажучи, деяке правило, що дає змогу відрізняти «оптимальне» рішення (результат) від «неоптимального» і порівнювати результати між собою. У детермінованому випадку задача вибору оптимального результату зводиться до задачі вибору оптимальної альтернативи на множині $\boldsymbol{X}$ і розв’язується безпосередньо методами теорії оптимізації.

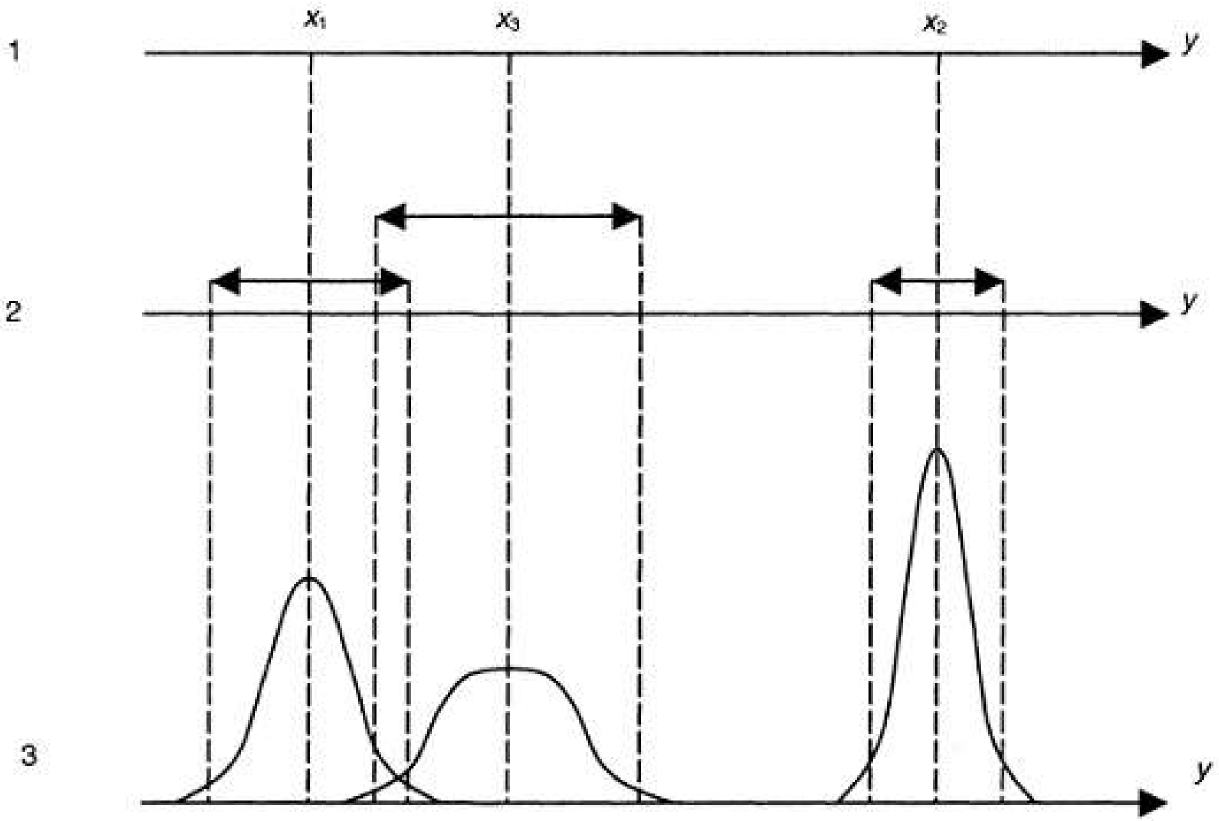

Рис. 1.7. Зв'язок альтернатив з наслідками:
1 — детермінований випадок;
2 — прийняття рішень у разі невизначеності;
3 — прийняття рішень у разі ризику

Більш реалістичною є ситуація, коли "якість" або "корисність" результату y оцінюється декількома числами (показниками якості рішення) або критеріями, які описуються функціями

$$f_k : Y \to R,\ k = 1, 2, ..., m.$$

Кожну з частин цільових функцій f_i потрібно максимізувати. Зрозуміло, що в разі багатокритеріального оцінювання результатів виникають суттєво більш складні математичні моделі, ніж в однокритеріальних випадках.

1.5. Огляд методів аналізу й формалізації задач, що містять невизначеності

Адекватний реальності опис проблеми практично завжди містить різного типу невизначеності, тому що будь-яке знання є відносним і неточним. Розрізняють три типи невизначеностей:

- невизначеність мети;
- невизначеність наших знань про навколишнє середовище (невизначеність природи);
- невизначеність дій реального супротивника або партнера.

1.5.1. Методи подолання невизначеностей мети

Розглянемо способи подолання **невизначеностей мети**, що найбільш часто реалізуються.

1. ***Лінійна згортка***. Замість n частинних критеріїв f_i пропонується розглядати один критерій вигляду

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x), \tag{1.1}$$

де c_i — нормовані додатні числа $\left(\sum_{i=1}^{n} c_i = 1\right)$. Коефіцієнти c_i — результат експертизи. ОПР має ранжувати цілі й визначати вагові коефіцієнти. Такий підхід дає змогу звести задачу з багатьма критеріями до задачі з єдиним критерієм, що визначається формулою (1.1).

2. **Використання контрольних показників.** Цільову функцію подають у вигляді

$$F(x) = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \tag{1.2}$$

і шукають вектор x, який забезпечує максимальне значення. Зміст тут досить простий. При цьому значенні вектора x величина $F(x)$ дає значення найгіршого з показників $f_i(x)$. Після цього знаходимо $F(x) \to \max$.

3. ***Введення метрики в просторі цільових функцій.*** *Припустимо, що ми розв'язали систему однокритеріальних задач*

$$f_i(x) \to max, \quad i = 1, 2, ..., n$$

і знайшли в i-й задачі вектор $x = x_i$, який надає максимального значення критерію $f_i(x)$:

$$f_i(x_i) = f_i, \; i = 1, ..., n.$$

Сукупність скалярних величин f_i визначає в просторі критеріїв деяку точку, яку назвемо точкою «абсолютного максимуму». Якщо вектори x_i різні, то не існує такого вибору, який дав би змогу досягти цієї точки: точка $(f_1, f_2, ..., f_n)$ є недосяжною в просторі критеріїв. Уведемо тепер додатно визначену матрицю $R = (r_{ij})$. Тоді скалярна величина

$$h = \sqrt{\sum_{i,j} (f_i(x) - f_i) r_{ij} (f_j(x) - f_j)} \tag{1.3}$$

визначає в просторі критеріїв деяку відстань від точки, яка відповідає цьому вектору x, до точки «абсолютного максимуму». В окремому випадку, коли R — одинична матриця,

$$h = \sqrt{\sum_i (f_i(x) - f_i)^2} \tag{1.4}$$

є евклідовою відстанню від точки $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ до точки $(f_1, f_2, ..., f_n)$ у просторі критеріїв.

4. ***Компроміси Парето.*** При розв'язанні багатокритеріальних задач є сенс спробувати знайти способи зведення їх до звичайних задач з одним критерієм. До аналізу багатокритеріальних задач можна підійти і з інших позицій: спробувати скоротити множину вхідних варіантів.

Припустимо, що ми зробили певний вибір. Позначимо його через x^* і припустимо, що існує деякий інший вибір $\hat{x}$, такий, що для всіх критеріїв $f_i(x)$ мають місце нерівності

$$f_i(\hat{x}) \geq f_i(x^*), \; i = 1, ..., n, \tag{1.5}$$

причому хоча б одна з нерівностей — строга.

Зрозуміло, що вибір $\hat{x}$ є переважнішим за x^*, тому всі вектори x^*, що задовольняють (1.5), слід одразу виключити з розгляду. Іншими словами, піддавати неформальному аналізу необхідно тільки ті вектори x^*, для яких не існує $\hat{x}$, такого, що для всіх критеріїв задовольняються нерівності (1.5). Множину всіх значень x^* називають множиною Парето, а вектор x^* – неполіпшуваним вектором результатів (вектором Парето), якщо з $f_i(\hat{x}) \geq f_i(x^*)$ для будь-якого i виконується $f_i(\hat{x}) = f_i(x^*)$.

Припустимо, що цілі суб'єкта визначаються двома однозначними функціями:

$$f_1(x) \to \max, \quad f_2(x) \to \max.$$

Тоді кожному допустимому значенню змінної відповідає одна точка на площині (рис. 1.8) і рівності

$$f_1 = f_1(x), \quad f_2 = f_2(x)$$

визначають параметричне задання деякої кривої ***abcd*** у цій площині. Але до множини Парето можна віднести далеко не всю криву, зображену на рис. 1.8.

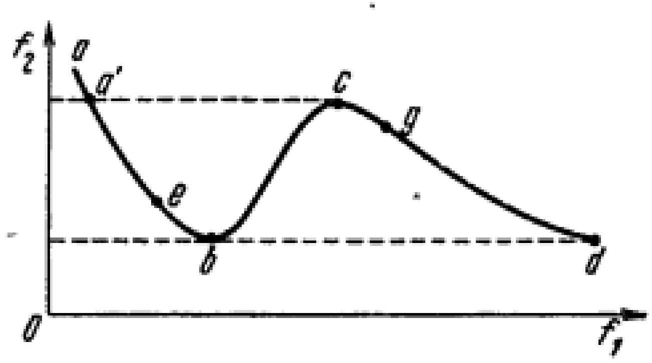

Рис. 1.8. Вибір множини Парето

Так, участок **bc**, очевидно, не належить множині Парето, оскільки разом зі зростанням f_1 відбувається і зростання f_2. З тих же міркувань має бути виключений участок $a'b$, оскільки для кожної його точки e знайдеться точка, що належить cd, у якій значення обох функцій f_1 і f_2 є більшими, ніж у точці e. Отже, претендувати на належність до множини Парето можуть тільки участки aa' і cd, причому точка a' також має бути виключена.

Принцип Парето не виділяє єдиного рішення, він лише звужує множину альтернатив. Остаточний вибір залишається за ОПР. Детальніше про побудову множини Парето йдеться в розд. 2.

1.5.2. Методи подолання невизначеності наших знань про навколишню обстановку

Другий тип невизначеності будемо називати невизначеністю природи. Ідеться про вибір дій в умовах, коли цільову функцію задано, але задано не зовсім точно — вона містить невизначений параметр. Розв'язуючи задачу

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) \to \max_{\mathbf{x}},$$

можемо визначити вектор $\mathbf{x}$ лише як функцію параметра α:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha). \qquad (1.6)$$

Якщо жодної інформації про фактор невизначеності α не маємо в своєму розпорядженні, то й результат оптимізації $\boldsymbol{f(x,\alpha)}$ – довільний. У реальних ситуаціях інформація про параметр α зазвичай має вигляд

$$\alpha \in \mathbf{G}_\alpha,$$

де $\boldsymbol{G}_\alpha$ — деяка множина.

Але подібної інформації також недостатньо для однозначного розв’язання задачі. Формула (1.6) визначає лише деяке відображення множини невизначеності природних факторів $\boldsymbol{G}_\alpha$ на множину невизначеності результату $\boldsymbol{G_x}$.

Принцип найкращого гарантованого результату

Оскільки для будь-якого $\boldsymbol{x}$

$$\min_{\alpha\in\mathbf{G}_\alpha} \mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha) \le \mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha), \tag{1.7}$$

то і для будь-якого $\alpha \in \mathbf{G}_\alpha$

$$\mathbf{f}^* = \max_{\mathbf{x}} \min_{\alpha\in\mathbf{G}_\alpha} \mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha) \le \max_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha). \tag{1.8}$$

Число $\boldsymbol{f}^*$ називають гарантованою оцінкою, а відповідно $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ — гарантованою стратегією в тому розумінні, що, яким би не було значення параметра невизначеності α, вибір $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ відповідно до формули (1.8) гарантує, що при будь-якому α значення цільової функції буде не менше, ніж $\boldsymbol{f}^*$. Для отримання гарантованої стратегії необхідно розв'язати такі задачі оптимізації:

а) обчислити $\min\limits_{\alpha\in\boldsymbol{G}_\alpha} \boldsymbol{f(x,\alpha)}$ для будь якого $\boldsymbol{x}$, унаслідок чого будуть знайдені $\alpha = \alpha^*(\mathbf{x})$ і $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha^*(\mathbf{x}))$;

б) обчислити $\max\limits_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\alpha^*(\boldsymbol{x}))$, унаслідок чого будуть визначені $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ і $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{f}^*$.

Гарантовану оцінку можна значно поліпшити, якщо знати заздалегідь, що в момент «дії» стане відома величина параметра α. Це дає змогу отримати нову гарантовану оцінку, більш «досконалу». Але в цьому випадку гарантованою стратегією буде не вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$, а функція $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}(\alpha)$.

Вибір гаранованої стратегії поведінки — це раціональний спосіб прийняття рішення. Завдяки використанню цієї стратегії ми гарантуємо собі відсутність будь-яких випадковостей: які б не були контрольовані нами фактори, ми забезпечимо собі значення цільової функції не менше, ніж $\boldsymbol{f}^*$. Але завжди залишається можливість якось поліпшити цей результат. Для цього треба прийняти рішення, пов'язане з певним ризиком.

Прийняття рішень в умовах ризику

Розглянемо докладніше ситуацію з ризиком. Формально прийнято розрізняти два крайніх випадки: вибір проводиться багаторазово; вибір є одноразовою операцією. В обох випадках передбачається, що α — випадкова величина, закон розподілу якої є відомим. У роботі [24] показано, що можна застосовувати одні й ті ж підходи при формалізації задач з одноразово й багаторазово повторюваним вибором.

Оскільки α — випадкова величина, то значення функції $f(x,\alpha)$ буде також випадковою величиною. Тому вихідну задачу в тих випадках, коли йдеться про операції, що багаторазово повторюються, природно замінити її деякою ймовірнісною. Як оцінку вибраної стратегії можемо взяти величину максимуму математичного сподівання:

$$f_1 = \max_x \overline{f(x,\alpha)}.$$

Але заміна задачі $\mathbf{f(x,\alpha) \to max}$ задачею $\overline{\mathbf{f(x,\alpha)}} \to \mathbf{max}$ — не єдиний спосіб переходу до стохастичної постановки. Можуть бути й інші критерії. Позначимо, наприклад, через $\overline{\alpha}$ середнє значення випадкової величини α; йому буде відповідати деяка функція $\mathbf{f_2 = f(x,\overline{\alpha})}$, максимум якої ми також зможемо використовувати для оцінювання.

Припустимо, що параметр α набуває лише дискретних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, тоді умова $\mathbf{f(x,\alpha) \to max}$ є еквівалентною максимізації множини критеріїв:

$$\begin{gathered} f(x,\alpha_1) \to \max, \\ f(x,\alpha_2) \to \max, \\ \ldots\ldots. \\ f(x,\alpha_n) \to \max. \end{gathered}$$

Таким чином, задача прийняття рішення в умовах ризику має багато спільного із задачею прийняття рішення в умовах невизначеності мети (див. підрозд. 1.5.1).

1.5.3. Методи подолання невизначеності дій реального супротивника або партнера (теорія ігор)

Активний партнер

Розглянемо задачу, пов'язану з існуванням активних партнерів або супротивників, дії яких ми не можемо повністю контролювати. Тобто існує багато суб'єктів, кожен з яких прагне досягти своєї мети

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max_{x_i}$$

і має для цього певні можливості, що описуються вектором $\mathbf{x_i}, \mathbf{x_i} \in \mathbf{G_i}$. Така ситуація містить проблему багатокритеріальності, що потребує знаходження вектора $\mathbf{x}$, при якому досягається максимум критеріїв $\mathbf{f_i(x)}$.

Нехай два суб'єкти А і Б, які мають можливість вибору векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$, прагнуть до досягнення своїх цілей, які ми будемо записувати у вигляді

$$f(x,y) \to \max,\ \varphi(x,y) \to \max,\ x \in X,\ y \in Y.$$

Якщо $\mathbf{f} = -\varphi$, то таку ситуацію називають антагоністичною. Загальний випадок нетотожності інтересів (цілей) партнерів (суб'єктів) називають конфліктом. Будемо ототожнювати себе з діями суб'єкта А. Тоді результат нашого вибору залежить від вибору суб'єкта Б. Тут можливими є кілька гіпотез:

1. Кожен із суб'єктів не має ніякої інформації про вибір, який зробив інший суб'єкт. У цьому випадку ми можемо знайти гарантовану оцінку суб'єктів А і Б, відповідно

$$\mathbf{f}^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \varphi^* = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Розв'язуючи поставлені задачі, знайдемо вектори $\mathbf{x}^*$ і $\mathbf{y}^*$, які реалізують значення $\mathbf{f}^*$ і φ^*, тобто зробивши вибір $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, ми при будь-якому виборі $y \in Y$ гарантуємо, що значення нашої цільової функції $\mathbf{f(x,y)}$ буде не менше, ніж $\mathbf{f}^*$.

2. Нехай у момент дії суб'єкт А знатиме значення $\mathbf{y}$, вибране суб'єктом Б. Тоді нашу стратегію слід шукати у вигляді функції $\mathbf{x} = \mathbf{x(y)}$. Ми можемо її визначити ефективно; для цього нам треба розв'язати задачу оптимізації

$$f(x,y) \to \max_{x \in X}.$$

Отримана умова визначить потрібну стратегію $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$. Тоді гарантований результат $\mathbf{f}$ буде відмінним від f^*:

$$\mathbf{f} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \mathbf{f}^* \le \mathbf{f}.$$

Зазначимо, що, вибираючи свою стратегію, тобто вектор x, ми ніяк не можемо вплинути на вибір іншого суб'єкта.

3. Припустимо тепер, що суб'єкт Б у момент прийняття рішення буде знати вибір суб'єкта А (наприклад, він зобов'язаний повідомити його суб'єкту Б). У цьому випадку ми не можемо вплинути на вибір, який зробить суб'єкт Б. Тоді можна зробити припущення про те, що суб'єкт Б буде діяти з умови

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \max_{y \in Y}.$$

Розв'язуючи отриману задачу, ми можемо визначити відгук суб'єкта Б на вибір А, який згідно з нашою гіпотезою буде оптимальною стратегією суб'єкта Б:

$$y = \hat{y}(x).$$

Тепер ми можемо розпоряджатися вибором $\mathbf{x}$. Маємо

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))=\mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{F}(\mathbf{x})\to\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$$

Отже, наявна інформація дає нам змогу так впливати на вибір суб'єкта Б, щоб він максимально відповідав цілям суб'єкта А.

Якщо максимум $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\to\max\limits_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}$ досягається не в одній точці, а на множині $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, то гарантований результат суб'єкта А обчислюється взяттям мінімуму по цій множині, а найкращий гарантований результат суб'єкта А знаходиться потім взяттям максимуму за $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$, тобто

$$\mathbf{f}^{**}=\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{M}(\mathbf{x})}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Проблема штрафу та заохочення

У пункті 2 розглянуто ситуацію, у якій $\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$. Тепер припустимо, що ми не тільки маємо можливість вибору такої стратегії, а й можемо заздалегідь повідомити її суб'єкту Б. Виявляється, що ця інформація дасть змогу знайти наш відгук на дії суб'єкта Б, найкращим чином відповідає нашим цілям і дає змогу вплинути в потрібному напрямку на дії суб'єкта Б.

Найбільш природним є припущення, що знання стратегії $\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ суб'єкт Б використовує для оптимізації цільової функції $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$, яка набуває вигляду

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}),\mathbf{y}).$$

Задача, що стоїть перед суб'єктом Б, — знайти такий вибір $\mathbf{y}$, який забезпечує максимум функції $\varphi^{*}(\mathbf{y})=\varphi(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}),\mathbf{y})$. Розв'язуючи цю задачу, знайдемо $\mathbf{y}$ як деякий оператор від нашої стратегії $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$:

$$\boldsymbol{y}=\hat{\boldsymbol{y}}[\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})].$$

Одержаний вираз означає, що кожній стратегії $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ поставлено у відповідність своє значення вектора $\mathbf{y}$: вираз $\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}[\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})]$ дає відображення множини наших стратегій на множину виборів суб'єкта Б. Знаючи цей відгук суб'єкта Б на нашу стратегію $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, ми можемо вибирати нашу оптимальну стратегію. Для цього достатньо розв'язати задачу

$$\boldsymbol{f}\left(\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}),\hat{\boldsymbol{y}}[\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})]\right)\to\max_{\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})}.$$

Якщо, максимізуючи функцію $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}),\mathbf{y})$, ми знайдемо множину векторів $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, то найкращим гарантованим результатом суб'єкта А буде

$$\boldsymbol{f}^{***}=\max_{\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{X}_1}\min_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{x}})}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}),$$

де $\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, причому $\hat{\mathbf{x}}\in\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1$ — множина всіх функцій зі значеннями в $\boldsymbol{X}$.

Ситуації рівноваги

Аналіз невизначеності спирався на кілька гіпотез, за допомогою яких з множини альтернатив виділяли деяку підмножину «претендентів». Унаслідок такого аналізу відбувається відкидання або виключення явно «поганих» варіантів рішень, які не можуть претендувати на право бути оптимальними. У розд. 1.5.1 викладено принцип Парето — найважливіший принцип відбору раціональних рішень. Паретовській аналіз визначає умови, які має задовольняти розумний компроміс. Принцип Парето зберігає свою силу і при аналізі конфліктних ситуацій з багатьма суб'єктами. Одна з важливих проблем в цьому випадку — проблема колективних рішень або колективного формування компромісу. Очевидно, що в цій ситуації всі ті рішення, які можуть бути замінені іншими, що забезпечують більші значення цільових функцій усіх суб'єктів одночасно або частини суб'єктів, але без зменшення значень цільових функцій інших суб'єктів, необхідно відкинути. Одним словом, обговорюючи правильність колективних рішень, слід мати на увазі тільки варіанти, що належать множині Парето. Ці варіанти (будемо їх називати ефективними) мають таку властивість, що покращити значення цільової функції будь-якого суб'єкта можна тільки за рахунок інших суб'єктів.

При аналізі ситуації з багатьма суб'єктами крім принципу Парето існують ще й інші принципи. Розглянемо один із них, так званий ***принцип стійкості***, або ***принцип рівноваги***. Цей принцип виник у класичній теорії ігор, предмет якої — аналіз антагоністичних конфліктів двох осіб.

Розглянемо ситуацію з двома суб'єктами й припустимо, що метою суб'єкта А є максимізувати значення функції $\mathbf{f(x, y)}$, і для цього він має можливість вибирати вектор $\mathbf{x}$ з деякої множини $\mathbf{X}$. Мету суб'єкта А можемо записати так:

$$\mathbf{f(x, y)} \to \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$$

Оскільки ситуація — антагоністична, мета суб'єкта Б буде строго протилежною, тобто

$$\mathbf{f(x, y)} \to \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}.$$

Тут ідеться про глобальні екстремуми на відповідних множинах, і головне завдання полягає в тому, щоб сформулювати рекомендації щодо способів вибору одночасно для обох суб'єктів. У класичних постановках завжди йдеться про деякий «абсолютний» або «об'єктивний» аналіз з позицій деякого третього суб'єкта, який не має власних цілей і якому доступна будь-яка інформація.

Припустимо, що функція $\mathbf{f(x, y)}$ має сідлову точку (рис. 1.9). У цій точці має місце очевидна рівність, яка і є визначенням сідлової точки:

$$f^* = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Позначимо через $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ координати сідлової точки. Очевидно, що нікому із суб'єктів не вигідно вибирати як свою стратегію будь-яку іншу точку, крім x^* або $\mathbf{y}^*$. Припустимо, що суб'єкт Б вибрав замість стратегії $\mathbf{y}^*$ стратегію y'. Як видно з рисунку, мінімальне значення цільової функції, яке він може собі забезпечити при розумній поведінці партнера А (тобто при виборі $x = x^*$), буде $\mathbf{a}' > \mathbf{a}$. У цьому розумінні сідло є точкою стійкого вибору. Оскільки йдеться про екстремальні значення глобального, а не локального характеру, то ситуація зберігається і в загальному випадку багатьох сідлових точок.

Припустимо, що функція $\mathbf{f(x, y)}$ має дві сідлові точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ і $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$, у яких

$$\mathbf{f(x^*, y^*) = f(\hat{x}, \hat{y}) = f^*}.$$

Зазначимо, що сідловими точками функції $\mathbf{f(x, y)}$ є не тільки точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ і $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$, але й дві інші точки $(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{y}})$ і $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}^*)$, і в цих точках значення функції задовольняють рівності

$$\mathbf{f(x^*, \hat{y}) = f(\hat{x}, y^*) = f^*}.$$

Якщо сідлових точок декілька, то кожен із суб'єктів може використовувати будь-яку зі стратегій $\mathbf{y}^*$ і $\hat{\mathbf{y}}$, що визначають сідлову точку. Будь-яка з цих стратегій забезпечить суб'єкту Б одне й те ж значення цільової функції, не менше f^*. Якщо інший суб'єкт вибере також одну зі стратегій x^* і $\hat{\mathbf{x}}$, то значення цільової функції буде також f^*.

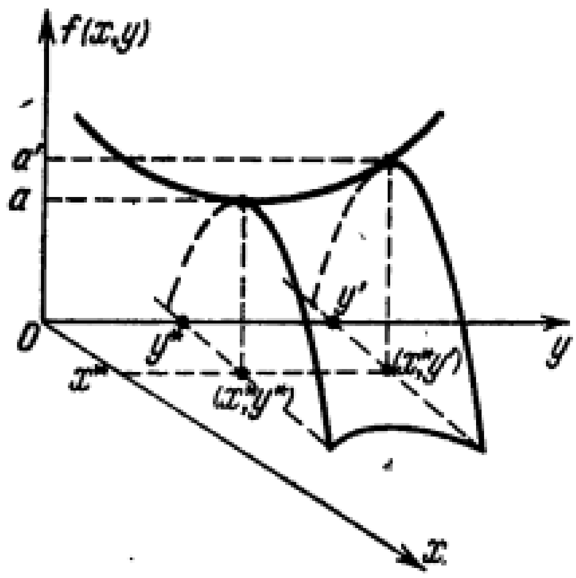

Рис. 1.9. Визначення сідлової точки

Таким чином, у тому випадку, коли сідлова точка існує, ми дійсно можемо казати про оптимальне рішення з точки зору обох суб'єктів, і проблема прийняття рішення зводиться тільки до визначення максиміну. Ось чому основні зусилля в класичній теорії ігор, що вивчає антагоністичні конфлікти, протягом багатьох років були спрямовані на вивчення таких задач, які зводилися до дослідження сідлових точок (або до такої постановки задачі, яка приводила б врешті до аналізу ситуацій рівноваги, тобто сідлових точок).

Виняткове значення ситуацій рівноваги в антагоністичних конфліктах змусило, звісно, зробити спробу поширити поняття рівноваги на загальний випадок багатьох суб'єктів.

Припустимо, що є N суб'єктів, кожен з яких може робити вибір своєї стратегії $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}_i$ і прагне зробити цей вибір так, щоб максимізувати свою цільову функцію $\mathbf{f}_i$. Але значення цільової функції в загальному випадку будуть залежати не тільки від його вибору, але й від вибору, який зроблять інші суб'єкти, тобто

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_N).$$

Будемо називати точку (вибір) $\hat{\boldsymbol{x}} = \{\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_N\}$ ситуацією рівноваги, якщо для будь-якого $\boldsymbol{i}$ має місце умова

$$\max_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, ..., \hat{\mathbf{x}}_{i-1}, \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_{i+1}, ..., \hat{\mathbf{x}}_N) = \mathbf{f}_i(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, ..., \hat{\mathbf{x}}_i, ..., \hat{\mathbf{x}}_N). \qquad (1.9)$$

Точки рівноваги природно називати стійкими точками, оскільки якщо суб'єкт під номером $\boldsymbol{i}$ відступить від свого рівноважного значення, тобто вибере свою стратегію відмінною від $\hat{\boldsymbol{x}}_i$, то за умови, що інші суб'єкти збережуть свій вибір, програє насамперед він сам, оскільки

$$\boldsymbol{f}_i(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}, \hat{\boldsymbol{x}}_i, \hat{\boldsymbol{x}}_{i+1}, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_N) \le \boldsymbol{f}_i(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_i, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_N). \qquad (1.10)$$

На цій підставі виник так званий ***принцип стійкості (або принцип Неша***), який зводиться до твердження, що вибір раціональної стратегії має проводитися серед множини точок рівноваги, тобто серед точок, що задовольняють умову (1.9) (або (1.10)).

Зауважимо, що при існуванні кількох суб'єктів, кожен з яких прагне до досягнення власних цілей, що не збігаються з цілями інших суб'єктів, завжди йдеться про певний компроміс: коли приймаються колективні рішення, кожен із суб'єктів має тією чи іншою мірою поступитися частиною своїх інтересів. Тому умова стійкості — дуже важлива властивість компромісу.

У разі антагоністичного конфлікту двох осіб ніякої домовленості для вибору оптимальної стратегії не потрібно, оскільки іншого раціонального способу поведінки, крім того, щоб прийняти рівноважну стратегію (якщо вона існує), немає.

Стійкий вибір може не належати до числа ефективних, тобто до множини Парето. Тому, якщо рішення приймається незалежно всіма партнерами, то важко сподіватися на те, що вони зроблять стійкий вибір.

Таким чином, принцип стійкості (принцип Неша) навряд чи може вважатися принципом вибору альтернативи. Єдиний випадок, при якому умова стійкості може розглядатися як принцип відбракування неконкурентоспроможних варіантів, — це випадок, коли стійкі точки є одночасно точками множини Парето. Такі системи мають місце дуже рідко, але, незважаючи на це, мають досить велике практичне значення. Набагато частіше трапляються ситуації, коли ефективні альтернативи є нестійкими, а стійкі — неефективними. Випадки, коли стійкі точки є одночасно паретовськими, завжди відповідають будь-яким важливим практичним задачам.

2. ПРИНЦИПИ АНАЛІЗУ Й РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

2.1. Модель задачі багатокритеріального вибору

Нехай X — множина можливих (або допустимих) рішень. Вибір рішення полягає у виборі серед допустимих такого рішення, яке є найкращим.

Позначимо множину рішень, що вибираються, **C(X)**. Вона являє собою розв'язок задачі вибору, і ним може виявитися будь-яка підмножина множини можливих рішень X. Таким чином, розв'язати задачу вибору — означає знайти множину **C(X)**, $\mathbf{C(X)} \subset \mathbf{X}$.

Числові функції $f_1, f_2, ..., f_m,\ m \geq 2$, що є визначеними на множині можливих рішень **X**, називають критеріями оптимальності, критеріями ефективності або цільовими функціями, а $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ утворюють векторний критерій. Усі можливі векторні оцінки утворюють множину можливих оцінок (можливих або допустимих векторів)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f(X)} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m \mid \mathbf{y} = \mathbf{f(x)}\ \textbf{при деякому}\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}.$$

Зазвичай між множинами можливих рішень **X** і відповідною множиною векторів **Y** можна встановити взаємно однозначну відповідність, тобто кожному можливому рішенню поставити у відповідність певний можливий вектор, і навпаки — кожному можливому вектору поставити у відповідність певне можливе рішення. У таких випадках вибір у множині рішень з математичної точки зору є рівносильним вибору в множині векторів. І всі визначення й результати можна формулювати як у термінах рішень, так і в термінах векторів, причому при бажанні завжди можна здійснити перехід від однієї форми викладання до іншої.

Розглянемо два допустимих рішення x' і x''. Припустимо, що після подання ОПР цієї пари рішень вона вибирає (віддає перевагу) перше з них. У цьому випадку пишуть $x' \succ_X x''$. Знаком $\succ_X$ позначають переваги певного ОПР, що виражаються **відношенням строгої переваги**, або коротше — **відношенням переваги**.

Слід зазначити, що не всякі два можливих рішення x' і x'' обов'язково зв'язані співвідношенням $x' \succ_X x''$ або $x'' \succ_X x'$. Інакше кажучи, не для будь-якої пари рішень ОПР може зробити остаточний вибір. Відношення переваги $\succ_X$, задане на множині можливих рішень, очевидним чином, а саме $f(x') \succ_Y f(x'')$ для $x', x'' \in X$, породжує відношення переваги $\succ_Y$ на множині можливих векторів Y. Таким чином, вектор $y' = f(x')$ є переважнішим за вектор $y'' = f(x'')$ (тобто $y' \succ_Y y''$) тоді і тільки тоді, коли рішення x' є переважнішим за рішення x'' (тобто $x' \succ_x x''$).

У загальному випадку кожна пара наслідків x' *і* x'' може перебувати в одному з таких співвідношень:

– x' є переважнішим (строго домінує) за x'';
– x'' є переважнішим за x';
– x' не менш як переважніший, ніж (не строго домінує) x'';
– x'' не менш як переважніший, ніж x';
– x' еквівалетний x'';
– x' *і* x'' непорівнянні між собою.

Сама ОПР у постановку задачі багатокритеріального вибору не включається. Мається на увазі, що всі його переваги, що впливають на процес вибору, «матеріалізовані» в термінах векторного критерію й відношення переваги.

Задача багатокритеріального вибору полягає в знаходженні множини рішень, що вибираються, **C(X)**, $C(X) \subset X$ з урахуванням його відношення переваги $\succ_x$ на основі заданого векторного критерію $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, що відображає набір цілей ОПР.

Постановка задачі багатокритеріального вибору (***у термінах рішень***) містить:

1) множину можливих рішень X;
2) векторний критерій $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$;
3) відношення переваги $\succ_x$.

Постановка задачі багатокритеріального вибору (***у термінах векторів***) містить:

1) множину можливих векторів $Y, Y \subset R^m$;
2) відношення переваги $\succ_Y$,

і полягає в знаходженні множини векторів, що вибираються, $C(Y)$, $C(Y) \subset Y$ з урахуванням відношення переваги ОПР.

Дві наведені задачі (у термінах рішень і в термінах векторів) є еквівалентними.

2.2. Принцип Еджворта – Парето

Принцип Еджворта – Парето — система аксіом, що описує «розумну» поведінку ОПР у процесі вибору.

Розглянемо два довільних можливих рішення x' і x''. Для них має місце один і тільки один із трьох випадків:

1) правильним є співвідношення $x' \succ_x x''$ (ОПР перше рішення вважає переважнішим за друге);

2) правильним є співвідношення $\boldsymbol{x}'' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}'$ (ОПР друге рішення вважає переважнішим за перше);

3) не виконується ні співвідношення $\boldsymbol{x}' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}''$, ні співвідношення $\boldsymbol{x}'' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}'$ (ОПР не може віддати перевагу жодному із зазначених двох рішень).

У першому із зазначених вище випадків, тобто при виконанні співвідношення $\boldsymbol{x}' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}''$, кажуть, що рішення $\boldsymbol{x}'$ домінує над рішенням $\boldsymbol{x}''$ (за відношенням $\succ_{\boldsymbol{X}}$). У другому випадку $\boldsymbol{x}''$ домінує над $\boldsymbol{x}'$. Якщо ж реалізується третій випадок, то кажуть, що рішення $\boldsymbol{x}'$ і $\boldsymbol{x}''$ є непорівнянними за відношенням переваги.

Звернемося до задачі багатокритеріального вибору, у якій задано множину допустимих рішень $\boldsymbol{X}$, векторний критерій $\mathbf{f}$ і відношення переваги $\succ_{\boldsymbol{X}}$. Нехай для деякого можливого рішення $\boldsymbol{x}''$ можна знайти таке можливе рішення $\boldsymbol{x}'$, що виконується співвідношення $\boldsymbol{x}' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}''$. За означенням відношення переваги це означає, що з цієї пари рішень ОПР вибере перше рішення і не вибере друге. У термінах множини рішень, що вибираються, цей факт можна виразити такою еквівалентністю: $\boldsymbol{x}' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}'' \Leftrightarrow \boldsymbol{C}\{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''\} = \{\boldsymbol{x}'\}$ для $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{X}$. Якщо рішення $\boldsymbol{x}''$ ОПР не вибирає з пари $\{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''\}$ через те, що для нього в цій парі є краще рішення $\mathbf{x}'$ (тобто $\boldsymbol{x}' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}''$), то, розглядаючи $\boldsymbol{x}''$ у межах усієї множини можливих рішень $\boldsymbol{X}$, розумно припустити, що рішення $\boldsymbol{x}''$ у такому випадку не має бути вибраним і з усієї множини можливих рішень, оскільки для неї в $\boldsymbol{X}$ існує, принаймні, одне явно більш переважне рішення (тобто $\boldsymbol{x}'$).

Наведені міркування показують, що при виборі першого рішення з пари звичайно вважати, що друге рішення не може бути вибраним і з усієї множини можливих рішень. Таким чином, у вигляді аксіоми сформулюємо вимогу, якій має відповідати поведінка ОПР у процесі вибору.

Аксіома 1 (аксіома виключення домінуючих рішень). Для будь-якої пари допустимих рішень $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{X}$, для яких має місце співвідношення $\boldsymbol{x}' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}''$, виконується $\boldsymbol{x}'' \notin \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$.

Будь-яка множина рішень, що вибираються, яким би способом вона не була виділена зі всієї множини можливих рішень, не повинна містити жодного такого рішення, для якого може знайтися більш детально визначене можливе рішення.

Якщо задано не один, а відразу кілька критеріїв оптимальності, то для визначеності для кожного з них необхідно вказати «напрямок зацікавленості» ОПР. З цієї причини далі розгляд обмежується випадком, коли ОПР прагне до отримання якомога більших значень усіх компонент векторного критерію $\mathbf{f}$. Цей факт можна виразити в термінах так званої аксіоми Парето.

Аксіома Парето. Для всіх пар допустимих рішень $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{X}$, для яких має місце нерівність $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')$, виконується співвідношення $\boldsymbol{x}' \succ_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}''$.

В окремому випадку, коли векторний критерій є скалярним, тобто має лише одну компоненту, аксіома Парето відображає прагнення ОПР максимізувати цю компоненту.

Рішення $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{X}$ називають **оптимальним за Парето (парето-оптимальним)**, якщо не існує такого можливого рішення $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, для якого має місце нерівність $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$. Усі парето-оптимальні рішення утворюють множину Парето, що позначається $\boldsymbol{P_f}(\boldsymbol{X})$.

Парето-оптимальне рішення — це таке допустиме рішення, яке не може бути покращене (збільшене) ні за одним з наявних критеріїв без погіршення (зменшення) за іншим критерієм. З цієї причини множину Парето нерідко називають множиною компромісів.

Залежно від структури множини й виду векторного критерію множина парето-оптимальних рішень може:

- бути порожньою (не містити жодного елемента);
- бути одноелементною множиною;
- складатися з деякої скінченної кількості рішень;
- містити нескінченну кількість можливих рішень;
- збігатися з множиною можливих рішень.

Теорема (принцип Еджворта – Парето). Нехай виконується аксіома Парето. Тоді для будь-якої множини рішень $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$, що вибираються і задовольняють аксіомі 1, правильним є включення $\mathbf{C}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{P_f}(\mathbf{X})$.

Геометричну ілюстрацію принципу Еджворта – Парето показано на рис. 2.1.

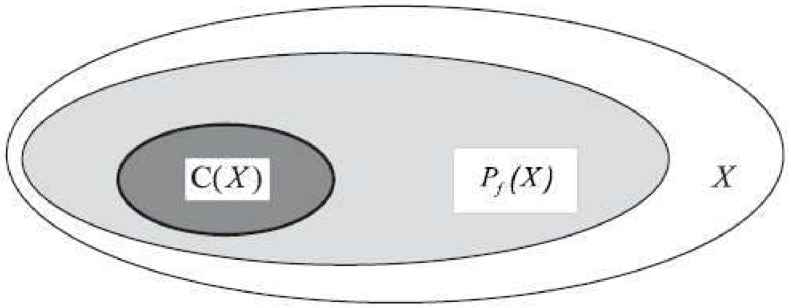

Рис. 2.1. Загальний випадок співвідношення між множинами допустимих рішень, що вибираються, і парето-оптимальних рішень

Принцип Еджворта – Парето не є універсальним. Якщо спробувати відмовитися від хоча б однієї з аксіом 1 або Парето, то принцип Еджворта – Парето може виявитися невиконаним. Такий стан означає мінімальність зазначеного набору двох аксіом для справедливості цього принципу.

Застосування принципу є ризикованим або ж взагалі неприпустимим, якщо реалізується хоча б один з двох випадків:

1) рішення, не вибране з деякої пари, виявляється вибраним зі всієї множини можливих рішень;

2) порушується аксіома Парето, тобто для деякої пари допустимих рішень $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{X}$, для яких має місце нерівність $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')$, не виконується співвідношення $\boldsymbol{x}' \succ_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}''$.

2.3. Розширення системи «розумних» аксіом

Відношення переваги є відношенням строгої переваги в тому сенсі, що жоден вектор (жодне рішення) не може бути краще самого себе. У термінах бінарних відношень це означає, що відношення переваги обов'язково має бути **іррефлексивним**.

Розглянемо ситуацію, коли перший вектор краще другого, а він, своєю чергою, краще деякого третього вектора. У такому випадку людина зазвичай, порівнюючи перший і третій вектори, вибирає перший. Тобто для будь-якої трійки векторів $\boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'', \boldsymbol{y}'''$ з виконання співвідношень $\boldsymbol{y}' \succ_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{y}'',\ \boldsymbol{y}'' \succ_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{y}'''$ обов'язково випливає правильніть співвідношення $\boldsymbol{y}' \succ_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{y}'''$. На «мові» бінарних відношень це означає, що відношення переваги $\succ_{\boldsymbol{Y}}$, яке використовується в задачах багатокритеріального вибору, підпорядковується вимозі транзитивності.

Будемо вважати, що ОПР в принципі може порівнювати не тільки пари числових векторів з множини $\boldsymbol{Y}$, але й будь-які два вектори критеріального простору $\boldsymbol{R}^m$, тобто в просторі $\boldsymbol{R}^m$ визначено деяке бінарне відношення, що позначається далі символом $\succ$, яке на множині $\boldsymbol{Y}$ $\succ_{\boldsymbol{Y}}$ збігається з відношенням $\succ_{\boldsymbol{Y}}$, тобто $\boldsymbol{y}' \succ \boldsymbol{y}'' \Leftrightarrow \boldsymbol{y}' \succ_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{y}''$ для всіх $\boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'' \in \boldsymbol{Y}$.

Аксіома 2 (іррефлексивність і транзитивність відношення переваги). Іррефлексивне відношення переваги, яким ОПР керується в процесі вибору, є транзитивним бінарним відношенням.

Зауваження. При виконанні аксіоми 2 усі три відношення $\succ_{\boldsymbol{X}}, \succ_{\boldsymbol{Y}}, \succ$ є транзитивними й асиметричними.

Оскільки відношення переваги, з одного боку, і критерії, які беруть участь у моделі багатокритеріального вибору, з іншого боку, відображають «уподобання» і цілі однієї і тієї ж ОПР, то вони мають бути певним чином узгоджені між собою.

Кажуть, що критерій f_i є узгодженим з відношенням переваги $\succ$, якщо для будь-яких двох векторів $y', y'' \in R^m$, таких, що

$y' = (y'_1,...,y'_{i-1},y'_{i+1},...,y'_m),\ y'' = (y''_1,...,y''_{i-1},y''_{i+1},...,y''_m),\quad y'_i > y''_i,$
завжди виконується співвідношення $y' \succ y''$. Іншими словами, ОПР зацікавлена в максимізації узгодженого критерію.

Аксіома 3 (узгодженість критеріїв з відношенням переваги). Кожен з критеріїв $f_1, f_2, \dots, f_m$ є узгодженим з відношенням переваги $\succ$.

Узгодженість усіх критеріїв з відношенням переваги означає, що ОПР зацікавлена в максимізації одночасно всіх наявних критеріїв. З цієї точки зору найкращим для ОПР було б рішення, при якому відразу всі критерії набувають свого найбільшого можливого значення. На жаль, у реальних задачах вибору критерії зазвичай суперечать один одному в тому сенсі, що їх множини точок максимуму не мають спільних елементів. У зв'язку з цим і виникає основна проблема багатокритеріального вибору: **як здійснити найкращий вибір в умовах взаємосуперечливих критеріїв?**

Принцип Еджворта – Парето з використанням аксіом 2 і 3. Нехай виконуються аксіоми 2 і 3. У цьому випадку для будь-якої множини векторів $C(Y)$, що вибираються, яка задовольняє аксіомі 1, має місце включення $C(Y) \subset P(Y)$.

Згідно з принципом Еджворта – Парето найкращі рішення завжди слід вибирати в межах множини Парето. Якщо ж ця множина є порожньою, то з неї неможливо що-небудь вибрати. Тому з огляду на практику застосування принципу Еджворта – Парето важливо знати, у яких класах задач парето-оптимальні вектори (рішення) напевно існують. Маючи справу з такими задачами, можна бути впевненим в тому, що принципова можливість вибору в межах множини Парето завжди буде забезпечена.

Теорема. У разі непорожньої скінченної множини можливих векторів (що буде виконуватися, якщо непорожньою і скінченною є множина можливих рішень) існує хоча б одне парето-оптимальне рішення і хоча б один парето-оптимальний вектор, тобто $P_f(X) \neq \varnothing$ і $P(Y) \neq \varnothing$.

На рис. 2.2 показано геометричну ілюстрацію знаходження парето-оптимальних векторів на площині.

Для того щоб знайти множину Парето, для кожного допустимого двовимірного вектора потрібно побудувати кут з вершиною в певній точці й подивитися, чи знаходиться в ньому хоча б одна з можливих точок множини чи ні. Якщо така точка знайдеться, то вершина кута не є парето-оптимальною, в іншому випадку вершина є парето-оптимальною.

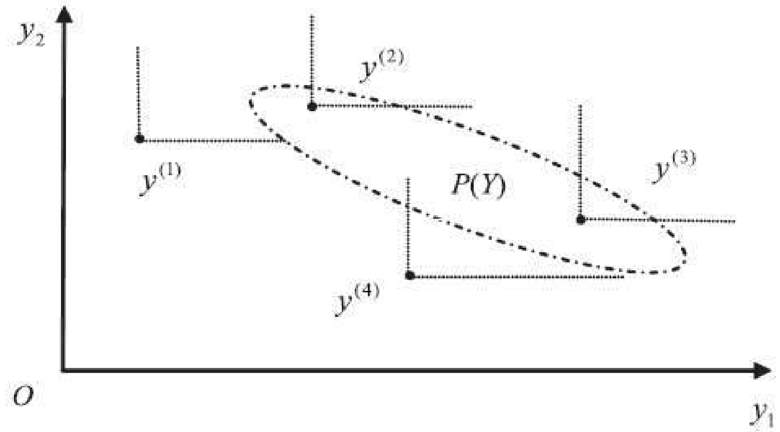

Рис. 2.2. Геометрична ілюстрація розташування парето-оптимальних векторів на площині

2.4. Алгоритм знаходження множини Парето

Розглянемо алгоритмічний метод побудови множини Парето для загального випадку $\boldsymbol{N}$ критеріїв.

Нехай множина можливих векторів $\boldsymbol{Y}$ складається зі скінченної кількості $\boldsymbol{N}$ елементів і має вигляд $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(2)}, ..., \boldsymbol{y}^{(N)}\}$. Для того щоб на основі визначення побудувати множину Парето, кожен з векторів $\boldsymbol{y}^{(i)} \in \boldsymbol{Y}$ слід порівняти з будь-яким іншим вектором $\boldsymbol{y}^{(j)} \in \boldsymbol{Y}$ за допомогою відношення ≥. У разі, якщо для якоїсь пари векторів нерівність $\boldsymbol{y}^{(i)} \geq \boldsymbol{y}^{(j)}$ виконується, вектор $\boldsymbol{y}^{(j)}$ за означенням не може бути парето-оптимальним. Переглянувши таким чином усі можливі пари й видаливши з множини $\boldsymbol{Y}$ усі вектори, які не можуть бути парето-оптимальними, врешті-решт отримаємо множину Парето.

Крок 1. Нехай $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{j} = \mathbf{2}$.

Крок 2. Перевірити виконання нерівності $\boldsymbol{y}^{(i)} \geq \boldsymbol{y}^{(j)}$. Якщо вона виявилася істинною, то перейти до кроку 3, в іншому випадку – перейти до кроку 5.

Крок 3. Видалити з поточної множини векторів $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})$ вектор $\boldsymbol{y}^{(j)}$, оскільки він не є парето-оптимальним. Потім перейти до кроку 4.

Крок 4. Перевірити виконання нерівності $\boldsymbol{j} < \boldsymbol{N}$. Якщо воно має місце, то покласти $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} + \mathbf{1}$ і повернутися до кроку 2, в іншому випадку – перейти до кроку 7.

Крок 5. Перевірити правильність нерівності $y^{(j)} \geq y^{(i)}$. У тому випадку, коли вона є істинною, перейти до кроку 6, в іншому випадку – повернутися до кроку 4.

Крок 6. Видалити з поточної множини векторів $P(Y)$ вектор $y^{(i)}$ і перейти до кроку 7.

Крок 7. Перевірити виконання нерівності $i < N - 1$. У разі істинності цієї нерівності слід послідовно покласти $i = i + 1$, а потім $j = i + 1$. Після цього необхідно повернутися до кроку 2. В іншому випадку (тобто коли $i \geq N - 1$) обчислення закінчити. Множину парето-оптимальних векторів побудовано повністю.

Приклад 2.1 (задача про вибір найкращого проектного рішення). Припустимо, що для участі в конкурсі подано п'ять варіантів будівництва підприємств різного типу (це можуть бути машинобудівний завод, текстильна фабрика, молочний завод і т. ін.) на території, що безпосередньо прилягає до житлового району. Оцінювання якості проекту проводиться за чотирма критеріями: f_1 — вартість реалізації проекту, f_2 — величина прибутку підприємства, що проектується, f_3 — величина екологічного збитку від будівництва, f_4 — зацікавленість жителів району в будівництві підприємства. Для простоти будемо вважати, що для оцінювання всіх критеріїв було використано п'ятибальну шкалу (1, 2, 3, 4 і 5 балів). Оскільки перший і третій критерії бажано мінімізувати, а не максимізувати, як інші, то замість них уведемо й будемо використовувати критерії $f_1 = 5 - f_1$ і $f_3 = 5 - f_3$, що підлягають максимізації.

Кількість критеріїв $m = 4$. Позначимо множину з п'яти можливих векторів (оцінок) відповідних проектів через $Y = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(5)}\}$ і припустимо, що внаслідок експертизи проектів було отримано результати, наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Результати експертизи проектів

Оцінка	Критерій			
	f_1	f_2	f_3	f_4
$y^{(1)}$	4	3	4	3
$y^{(2)}$	5	3	3	3
$y^{(3)}$	2	4	2	4
$y^{(4)}$	5	3	2	3
$y^{(5)}$	3	4	3	4

Відповідно до описаного вище алгоритмом вважаємо $P(Y) = Y$ і починаємо порівнювати перший вектор з іншими. Неважко помітити, що всі пари $\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(2)}$; $\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(3)}$; $\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(4)}$; $\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(5)}$ виявляються непорівнянними за відношенням ≥.

Далі порівнюємо вектор $\boldsymbol{y}^{(2)}$ з векторами $\boldsymbol{y}^{(3)}, \boldsymbol{y}^{(4)}, \boldsymbol{y}^{(5)}$. Пару $\boldsymbol{y}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(3)}$ не можна порівняти за відношенням ≥. Оскільки $\boldsymbol{y}^{(2)} \geq \boldsymbol{y}^{(4)}$, то вектор $\boldsymbol{y}^{(4)}$ видаляємо з множини $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})$. Пару векторів, що залишилася, $\boldsymbol{y}^{(2)}$, $\boldsymbol{y}^{(5)}$ не можна порівняти за відношеням ≥.

Тепер порівняємо вектор $\boldsymbol{y}^{(3)}$. Оскільки $\boldsymbol{y}^{(5)} \geq \boldsymbol{y}^{(3)}$, вектор $\boldsymbol{y}^{(3)}$ видаляється із $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})$. Отже, вектор $\boldsymbol{y}^{(4)}$ було видалено, і для порівняння залишається один вектор $\boldsymbol{y}^{(5)}$. Оскільки він залишився один, то його вже немає з чим порівнювати. Отже, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y}) = \left\{\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(2)}, \boldsymbol{y}^{(5)}\right\}$. Саме із цих трьох проектів (першого, другого й п'ятого) і слід здійснювати остаточний вибір. Але для цього необхідно мати в своєму розпорядженні додаткову інформацію про переваги.

2.5. Задачі з нескінченною множиною можливих векторів

Побудова множини Парето в задачах з нескінченною множиною можливих векторів є значно складнішою, ніж аналогічна задача в разі скінченої множини. Якогось універсального методу (алгоритму) для розв'язання цієї задачі не існує. Щоб отримати умови існування парето-оптимальних рішень (і векторів) доводиться накладати додаткові обмеження як на множину можливих рішень, так і на векторний критерій.

Перш за все, ототожнимо можливі рішення з векторами арифметичного векторного простору $\boldsymbol{R}^n$, тобто вважатимемо, що будь-яке можливе рішення являє собою певний упорядкований набір дійсних чисел.

Теорема. Припустимо, що непорожня множина можливих рішень $\boldsymbol{X}$ являє собою деяку компактну підмножину простору $\boldsymbol{R}^n$, тобто $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{R}^n$. Якщо компоненти векторного критерію $\boldsymbol{f}$ є неперервними функціями на множині $\boldsymbol{X}$, то множина Парето (як рішень, так і векторів) не є порожньою.

У випадку нескінченної кількості можливих векторів (рішень) знаходження множини Парето шляхом прямого перебору є неможливим в принципі. Тому потребуються спеціальні інструменти, що полегшують процес побудови цієї множини. Такими «інструментами» можуть бути необхідні і/або достатні умови парето-оптимальності. Тут ситуація цілком аналогічна тій, яка існує в звичайній теорії екстремальних задач: за допомогою необхідних умов виділяється множина рішень (векторів), які є «підозрілими» на парето-оптимальність, тоді як за допомогою достатніх умов з отриманої множини можна відібрати ті рішення (вектори), які є дійсно парето-оптимальними. Сьогодні розроблено досить широкий арсенал подібного інструментарію, пристосованого для використання в різних класах багатокритеріальних задач.

Теорема 1 (достатня умова парето-оптимальності). Нехай $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ — довільний вектор з додатними компонентами, що в сумі становлять одиницю, тобто $\mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$. Тоді будь-яка точка максимуму на множині X адитивної згортки F_μ критеріїв, що визначається рівністю $F_\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$, є парето-оптимальною.

Нагадаємо, що множину X, $X \subset R^n$ називають опуклою, якщо вона разом з кожною парою своїх точок містить і весь відрізок, що з'єднує ці точки.

Числову функцію $g(x)$, задану на опуклій множині X, $X \subset R^n$, називають увігнутою, якщо для будь-яких точок $x', x'' \in X$ і для будь-якого числа $\lambda \in [0,1]$ виконується нерівність

$$g(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \geq \lambda g(x') + (1-\lambda) g(x'').$$

Теорема 2 (необхідна умова парето-оптимальності у формі адитивної згортки критеріїв). Нехай множина X є опуклою і всі компоненти вектор-функції f є увігнутими на ній. Для будь-якої парето-оптимальної точки $x^* \in P_f(X)$ існує такий вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ з компонентами, які мають властивість $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, що адитивна згортка $F_\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$ у точці x^* набуває свого максимуму на множині X.

Згідно з теоремою знаходження множини парето-оптимальних точок при певних умовах зводиться до задачі максимізації адитивної згортки $F_\mu(x)$ на множині X. Інакше кажучи, варіюючи вектор μ у зазначених межах і розв'язуючи відповідні задачі максимізації адитивної згортки, в принципі можна побудувати всі множини точок Парето. Такий прийом має назву скаляризації багатокритеріальної задачі й полягає у зведенні багатокритеріальної задачі до сім’ї звичайних (скалярних) екстремальних задач. Складність реалізації цього прийому полягає в тому, що можливих значень для вектора μ існує нескінченна кількість, і перебрати їх усі неможливо. Тому тут можна казати лише про принципове зведення, яке реалізувати на практиці не просто.

І ще одна обставина, на яку слід звернути увагу. У теоремі 1 вектор $\mu_i > 0$, а в теоремі 2 $\mu_i \geq 0$, тобто деякі з них можуть набувати нульових значень. Ця своєрідна «нестиковка» призводить до того, що скаляризація з вектором μ, який має строго додатні компоненти, у загальному випадку не дасть можливості отримати всю множину Парето, тоді як скаляризація з невід'ємними компонентами може привести до знаходження точок, які не є парето-оптимальними.

Приклад 2.2. Нехай $\boldsymbol{X} = \{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \in \boldsymbol{R^2} \mid (\boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{x_2})^2 \le 1\}$ і $\boldsymbol{f_1(x) = x_1}$, $\boldsymbol{f_2(x) = x_2}$. Множину можливих рішень **X** проілюстровано на рис. 2.3, і вона являє собою коло одиничним радіусом з центром у початку координат.

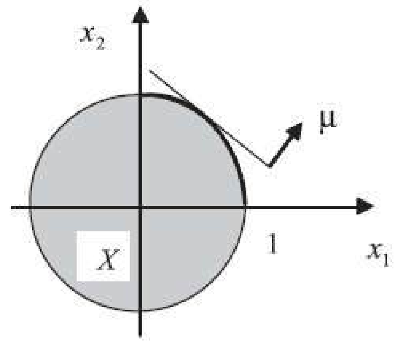

Рис. 2.3. Множина можливих векторів **X**

Тут множина $\boldsymbol{X}$ – опукла, а критерії – лінійні. Парето-оптимальними є всі точки кола, розташовані в першій чверті. Кожну з цих точок (крім (0,1) і (1,0)) можна отримати внаслідок максимізації адитивної згортки $\boldsymbol{F_\mu(x) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}$ на множині $\boldsymbol{X}$ з додатними коефіцієнтами, що в сумі становлять одиницю. У той же час точки (0,1) і (1,0) неможливо отримати внаслідок максимізації адитивної згортки зі строго додатними коефіцієнтами. Ці точки є результатом максимізації лінійної згортки $\boldsymbol{F_\mu}$ лише з парами коефіцієнтів $\mu_1 = \mathbf{0}$, $\mu_2 = \mathbf{1}$ і $\mu_1 = \mathbf{1}, \mu_2 = \mathbf{0}$ відповідно.

2.6. Відносна важливість критеріїв

Коли є всього два можливих варіанти (рішення), стратегії поведінки людини в умовах багатокритеріального середовища в цьому найпростішому випадку стратегії можна поділити на два класи:

- стратегія компенсації;
- стратегія виключення.

Стратегія компенсації відповідає такій лінії поведінки людини, при якій низькі показники за одним критерієм (або відразу за кількома критеріями) компенсуються високим показником за іншим критерієм (або одночасно за деякими іншими критеріями).

Типовий приклад — придбання будинку з не зовсім вдалим плануванням кімнат і дещо завищеною ціною, але в тихому районі паркової зони, розташованому не надто далеко від місця роботи.

Стратегія виключення (або некомпенсувальна стратегія) полягає у видаленні (виключенні) зі списку наявних можливих варіантів тих, які напевно не задовольняють за якимось одним або ж одразу за кількома критеріями одночасно. Наприклад, під час купівлі будинку покупець, користуючись некомпенсувальною стратегією, одразу виключає такі варіанти, які виходять за межі його фінансових можливостей.

Нехай i та j — два різних номери критеріїв. Кажуть, що i-й критерій f_i є важливішим за j-й критерій f_j із заданими додатними параметрами ω_i, ω_j, якщо для будь-якого вектора $y=(y_1, y_2, ..., y_n) \in R^m$ має місце співвідношення $y' \succ y$, де $y' = (y'_1, y'_2, ..., y'_n)$, причому

$$y'_i = y_i + \omega_i;\ y'_j = y_j - \omega_j;\ y'_s = y_s \text{ для всіх } s = 1,2,...,m,\ s \neq i,\ s \neq j.$$

ОПР завжди готова пожертвувати певною кількістю ω_j за менш важливим j-м критерієм задля отримання додаткової кількості (компенсації) ω_i за більш важливим i-м критерієм при умові збереження значень усіх інших критеріїв.

Зауваження. В означенні відносної важливості критеріїв є відношення переваги $\succ$, яким ОПР керується в процесі прийняття рішення. У різних ОПР відношення переваги в загальному випадку є різними. Отже, це означення безпосередньо пов'язане з суб'єктом (тобто з ОПР) і відображає його переваги. У цьому виявляється «суб'єктивний» характер означення.

За допомогою чисел ω_i і ω_j можна кількісно оцінити ступінь відносної важливості. Для цієї мети можна використовувати, наприклад, відношення ω_i / ω_j, яке може змінюватися в межах від нуля до нескінченності. Однак більш зручним виявляється «нормоване» відношення, що складається із цих двох чисел.

Нехай i-й критерій f_i є важливішим за j-й критерій f_j із заданими додатними параметрами ω_i, ω_j. Додатне число $\theta_{ij} = \dfrac{\omega_j}{\omega_i + \omega_j}$ називають коефіцієнтом відносної важливості для зазначеної пари критеріїв.

Оскільки $\theta_{ij} = \dfrac{1}{\dfrac{\omega_i}{\omega_j} + 1}$ і відношення ω_i / ω_j знаходиться в межах від нуля до нескінченності, коефіцієнт відносної важливості завжди задовольняє нерівності (умові нормування): $0 < \theta_{ij} < 1$. Цей коефіцієнт показує частку втрати за менш важливим критерієм, на яку згодна піти ОПР, порівняно з сумою зазначеної втрати і збільшення за більш важливим критерієм. Якщо коефіцієнт θ_{ij} наближається до одиниці, то це означає, що ОПР за відносно невелику надбавку за більш важливим i-м критерієм готова платити досить великою втратою за менш важливим j-м критерієм. У разі, коли цей коефіцієнт наближається до нуля, ОПР згодна піти на втрати за менш важливим критерієм лише за умови отримання суттєвої надбавки за більш важливим критерієм. Це означає, що ступінь важливості i-го критерію є порівняно невисоким; це положення й набуває свого вираження в малому значенні коефіцієнта відносної важливості. Якщо $\theta_{ij} = 1/2$, то ОПР готова погодитися на якусь надбавку за більш важливим критерієм за рахунок втрати за менш важливим критерієм за умови, що величина втрати в точності збігається з величиною збільшення.

Бінарне відношення $\mathfrak{R}$ є інваріантним відносно додатного лінійного перетворення, якщо воно має такі дві властивості:

1) адитивність: $\boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{y}',\ \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^m \Rightarrow (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{c})\mathfrak{R}(\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{c})$;

2) однорідність: $\boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{y}',\ \alpha > 0 \Rightarrow (\alpha\boldsymbol{y})\mathfrak{R}(\alpha\boldsymbol{y}')$.

Аксіома 4 (інваріантність відношення переваги). Відношення переваги $\succ$ є інваріантним відносно лінійного додатного перетворення.

Ознакою інваріантності відношення $\succ$ є наявність у нього властивостей адитивності й однорідності.

Лема. Завдяки властивості адитивності відношення переваги $\succ$ вектор $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$ при визначенні відносної важливості критеріїв можна вважати будь-яким фіксованим, у тому числі таким, що дорівнює нульовому вектору.

Еквівалентне і спрощене визначення відносної важливості критеріїв. Критерій f_i є важливішим за j-й критерій f_j із заданими додатними параметрами ω_i, ω_j, якщо співвідношення $\tilde{\boldsymbol{y}} \succ \boldsymbol{0}_m$ виконується для вектора $\tilde{\boldsymbol{y}}$, усі компоненти якого, крім i-ї і j-ї, дорівнюють нулю, причому $\tilde{y}_i = \omega_i,\ \tilde{y}_j = -\omega_j$.

Для того щоб перевірити, чи дійсно i-й критерій є важливішим від j-го критерію з додатними параметрами ω_i, ω_j, достатньо переконатися лише в тому, що вектор $\tilde{\boldsymbol{y}}$ є кращим за нульовий вектор.

2.7. Звуження множини Парето на основі інформації про відносну важливість критеріїв

Відповідно до принципу Еджворта – Парето найкращі рішення слід вибирати серед парето-оптимальних. Якщо ж у задачі прийняття рішень є додаткова інформація про те, що один із критеріїв є важливішим від іншого, то такого роду інформація дає змогу полегшити подальший вибір у межах множини Парето.

Інакше кажучи, додаткова інформація про відносну важливість критеріїв може бути використана для того, щоб «забракувати» деякі парето-оптимальні рішення і тим самим звузити множину Парето і спростити подальший вибір.

Теорема. Припустимо, що виконуються аксіоми 1—4 і i-й критерій f_i є важливішим за j-й критерій f_j із заданими додатними параметрами ω_i, ω_j. Тоді для будь-якої непорожньої множини рішень $C(X)$, що вибираються, і векторів $C(Y)$, що вибираються, мають місце включення

$$C(X) \subset \hat{P}_f(X) \subset P_f(X), \;\; C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y),$$

де $\hat{P}_f(X)$ – множина парето-оптимальних рішень з множиною можливих рішень X і «новим» векторним критерієм $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_m)$, компоненти якого обчислюються за формулами

$$\hat{f}_j = \omega_j f_i + \omega_i f_j; \; \hat{f}_s = f_s, \, s = 1, 2, \dots, m, \, s \neq j, \text{ а } \hat{P}(Y) = f(\hat{P}_f(X)). \quad (2.1)$$

На рис. 2.4 наведено геометричну ілюстрацію теореми.

Зауваження 1. Множина Парето є інваріантною відносно строго зростаючого перетворення критеріїв. Зокрема, множина Парето не зміниться, якщо довільний критерій помножити (або поділити) на яке завгодно додатне число. Відповідно до цього поділимо критерій $\hat{f}_j$ на додатне число $\omega_i + \omega_j$ і залишимо для нього старе позначення. Тоді першу з рівностей можна переписати у вигляді $\hat{f}_j = \theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j$, где θ_{ij} — коефіцієнт відносної важливості.

Зауваження 2. Теорема є універсальною в тому розумінні, що в ній немає яких би то не було вимог до множини можливих рішень **X** і векторного критерію f, тобто її можна застосовувати до будь-якої задачі багатокритеріального вибору, у якій виконуються аксіоми 1–4. При цьому множина можливих рішень (і векторів) може складатися як зі скінченної, так і нескінченної кількості елементів, а функції $f_1, f_2, \dots, f_m$ можуть бути якими завгодно — нелінійними, неопуклими, неувігнутими, а також можуть не мати властивостей диференційовності або неперервності. Обмеження накладаються лише на поведінку ОПР — вона має вести себе «розумно» у процесі вибору, тобто задовольняти аксіомам 1—4.

Формула для обчислення «нового» критерію $\hat{\mathbf{f}}$ на основі «старого» **f** є надзвичайно простою. За цією формулою «новий» векторний критерій одержують зі «старого» заміною менш важливого критерію f_j на лінійну комбінацію критеріїв $\mathbf{f}_i$ з додатними коефіцієнтами ω_j, ω_i. Усі інші «старі» критерії зберігаються. Неважко помітити, що при подібному «перерахунку» $\mathbf{j}$-го критерію багато корисних з огляду на теорію екстремальних задач властивостей критеріїв $\boldsymbol{f_i}$ і $\boldsymbol{f_j}$ зберігаються. Наприклад, якщо зазначені критерії є неперервними, диференційовними, увігнутими або лінійними, то новий критерій $\boldsymbol{\hat{f}_j}$ так само буде мати ці властивості.

Необхідно зазначити, що в певних випадках (особливо, коли коефіцієнт відносної важливості θ_{ij} наближається до нуля, а отже, критерії $\boldsymbol{f_j}$ і $\boldsymbol{\hat{f}_j}$ майже дорівнюють один одному) зазначеного вище звуження множини Парето може й не відбутися через збіг множин Парето відносно «старого» і «нового» векторних критеріїв, тобто $\boldsymbol{P(\hat{Y}) = P(Y)}$. Можна сказати, що в таких випадках наявна інформація про відносну важливість критеріїв не є змістовною.

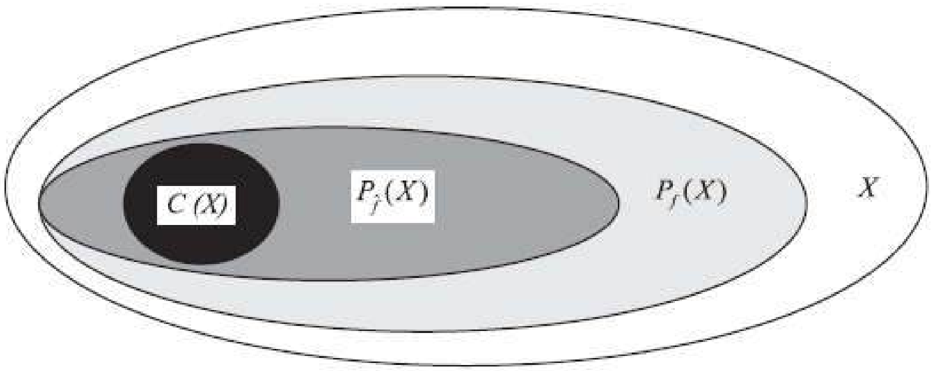

Рис. 2.4. Геометрична ілюстрація включень

Приклад 2.3 (задача вибору об'єкта для інвестування). Нехай є три об'єкти для інвестування. Для оцінювання ефективності інвестування використовуються два критерії: величина приросту прибутку від вкладення, яка вимірюється у відсотках щодо початкової суми інвестування, і надійність вкладених коштів, що вимірюється за п'ятибальною шкалою від 1 до 5. Будемо вважати, що приріст надійності при переході від позначки в 1 бал до позначки в 2 бали такий самий, як і при переході від позначки $\boldsymbol{k\,(k \in \{2,3,4\})}$ до позначки $\boldsymbol{k+1}$. Це припущення дає можливість уважати, що величина надійності вимірюється за кількісною шкалою (шкалою різниць).

Нехай множина можливих векторів $\boldsymbol{Y}$ складається з трьох векторів

$$\boldsymbol{y^{(1)} = (40,1),\ y^{(2)} = (30,2),\ y^{(3)} = (10,3)}.$$

Неважко бачити, що всі три вектори є парето-оптимальними, тобто принцип Еджворта – Парето не дає змоги звузити область пошуку векторів, що вибираються.

Припустимо, що від ОПР надійшла додаткова інформація про те, що перший критерій є важливішим від другого. Припустимо, що $\omega_2 = 1$. Тоді вектори, визначені за формулою (2.1), матимуть вигляд

$$\hat{y}^{(1)} = (40, 40 + \omega_1),\ \hat{y}^{(2)} = (30, 30 + 2\omega_1),\ \hat{y}^{(3)} = (10, 10 + 3\omega_1).$$

Система нерівностей $40 + \omega_1 \geq 30 + 2\omega_1$, $40 + \omega_1 \geq 10 + 3\omega_1$ має розв'язок $\omega_1 \leq 10$. Отже, якщо ОПР за приріст прибутку в розмірі до 10 % готова пожертвувати зменшенням величини надійності на одну одиницю, то їй слід вибирати перший вектор $y^{(1)}$, оскільки в цьому випадку $\hat{y}^{(1)} \geq \hat{y}^{(2)}$ і $\hat{y}^{(1)} \geq \hat{y}^{(3)}$. Іншими словами, якщо коефіцієнт відносної важливості θ_{12} є більшим або дорівнює $1/(10+1) \approx 0.09$, то вибраним має бути єдиний перший вектор.

Якщо $10 \leq \omega_1 \leq 20$, то виконується нерівність $\hat{y}^{(2)} \geq \hat{y}^{(3)}$. При цьому вектори $\hat{y}^{(1)}$, $\hat{y}^{(2)}$ виявляються непорівнянними за відношенням ≥. Отже, у цьому випадку слід виключити $y^{(3)}$ з числа векторів, що вибираються.

Нарешті, при $\omega_1 > 20$ вибраним може бути будь-який із трьох наявних векторів, оскільки в цьому випадку $\hat{y}_2^{(1)} < \hat{y}_2^{(2)} < \hat{y}_2^{(3)}$ і три вектори $\hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(2)}, \hat{y}^{(3)}$ являють собою множину Парето $\hat{P}(Y)$. Це означає, що інформація про те, що ОПР за втрату в одну одиницю надійності погоджується на приріст прибутку лише на величину, більшу за 20 %, є в цьому випадку несуттєвою. Ця інформація не дає змоги провести звуження початкової множини Парето, що збігається з Y. Інакше кажучи, коефіцієнт відносної важливості першого критерію порівняно з другим дорівнює або є меншим за $\theta_{12} = 1/(20+1) \approx 0.048$, а це свідчить про міру відносної важливості, що не дає можливості в цьому випадку видалити з числа векторів, що вибираються, жоден з можливих векторів.

Наслідок (випадок лінійних критеріїв). Якщо додатково до припущень теореми 1 додати умову $X \subset R^n$ і вимогу лінійності критеріїв f_i і f_j, тобто

$$f_k(x) = \left\langle c^{(k)}, x \right\rangle = \sum_{l=1}^{n} c_l^{(k)} x_l, \quad k = i, j,$$

де $c^{(k)} = (c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \ldots, c_n^{(k)}) \in R^n$, то «новий» j-й критерій матиме вигляд $\hat{f}_j(x) = \left\langle \hat{c}, x \right\rangle$, де $\hat{c} = \omega_j c^{(i)} + \omega_i c^{(j)}$ або $\hat{c} = \theta_{ij} c^{(i)} + (1 - \theta_{ij}) c^{(j)}$. Геометричну ілюстрацію цього випадку наведено на рис. 2.5.

Чим менше додатний коефіцієнт відносної важливості θ_{ij} відрізняється від нуля, тим ближче кінець вектора $\hat{c}$ до кінця вектора $c^{(j)}$. При збільшенні θ_{ij} у межах інтервалу (0,1) вектор $\boldsymbol{c}^{(i)}$, що відповідає більш важливому критерію, як би притягує до себе вектор $\hat{\boldsymbol{c}}$, що відповідає новому $\boldsymbol{j}$-му критерію. У разі $\theta_{ij} = \mathbf{0{,}5}$ кінець вектора $\hat{\mathbf{c}}$ буде розташовуватися в центрі відрізка, що з'єднує кінці двох векторів $\boldsymbol{c}^{(i)}$ і $\boldsymbol{c}^{(j)}$. Якщо ж коефіцієнт відносної важливості наближається до одиниці, то вектор $\hat{\boldsymbol{c}}$ буде мало відрізнятися від $\boldsymbol{c}^{(i)}$, а отже, векторний критерій $\hat{\boldsymbol{f}}$ буде містити два майже однакових критерії $\boldsymbol{f}_i$. У цьому випадку вплив менш важливого критерію $\boldsymbol{f}_j$, якому відповідав би вектор $\boldsymbol{c}^{(j)}$, на роз'вязок задачі багатокритеріального вибору практично зникне.

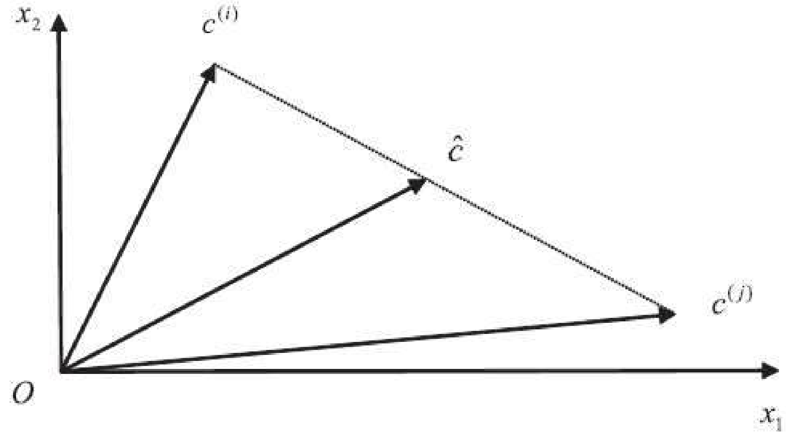

Рис. 2.5. Геометрична ілюстрація
для випадку двох критеріїв

2.8. Використання набору інформації про відносну важливість критеріїв

На практиці критерії, що є в розпорядженні, не є рівноцінними для ОПР, а отже, існують пари критеріїв, у яких один критерій є важливішим за інший. Подібного роду інформацію необхідно виявити для того, щоб можна було здійснити обґрунтоване звуження множини Парето.

1. Насамперед необхідно встановити пари «нерівноцінних» критеріїв. Нехай є $\boldsymbol{i}$-й і $\boldsymbol{j}$-й критерії, причому відомо, що $\boldsymbol{i}$-й критерій є важливішим, ніж $\boldsymbol{j}$-й.

2. Щоб визначити величину коефіцієнта відносної важливості $\boldsymbol{i}$-го критерію порівняно з $\boldsymbol{j}$-м, ОПР можна поставити запитання, якою максимально можливою кількістю ω_j вона готова жертвувати за $\boldsymbol{j}$-ю (менш важливою) умовою заради збільшення значення $\boldsymbol{i}$-го (більш важливого) критерію на одну одиницю. Після того, як ОПР укаже конкретне число ω_j, неважко обчислити коефіцієнт відносної важливості $\theta_{ij} = \omega_j / (\mathbf{1} + \omega_j)$.

Чим ближче цей коефіцієнт наближається до одиниці, тим на більшу ступінь звуження множини Парето можна розраховувати.

3. Припустимо, що зазначеним вище способом виявлено цілий набір інформації про відносну важливість критеріїв, що полягає в тому, що i_k-й критерій є важливішим від j_k-го критерію із заданим коефіцієнтом відносної важливості $\theta_{i_k j_k} \in (0,1)$, $k = 1,2,\ldots,M$, де $M \leq m/2$. При цьому вважається, що жоден з критеріїв не може бути важливішим від самого себе, тобто ні для якого номера $k = 1,2,\ldots,M$ не виконується рівність $i_k = j_k$.

Зазначений набір є набором взаємно незалежної інформації, якщо серед номерів набору $i_1, i_2, \ldots, i_M$, а також серед номерів набору $j_1, j_2, \ldots, j_M$ немає жодної пари однакових критеріїв, причому $\{i_1, i_2, \ldots, i_M\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_M\} = \varnothing$.

Урахування набору взаємно незалежної інформації з метою звуження множини Парето можна здійснювати безпосередньо на основі теореми, наведеної в підрозд. 2.7. Для цього слід розрахувати всі менш важливі критерії (номери яких належать до набору $j_1, j_2, \ldots, j_M$) за формулою $\hat{f}_{jk} = \theta_{i_k j_k} f_{ik} + (1 - \theta_{i_k j_k}) f_{jk}$, $k = 1,2,\ldots,M$ і підставити їх у початковий векторний критерій замість попередніх f_{j_k}. Унаслідок виконаної підстановки утвориться новий векторний критерій $\hat{f}$. Далі потрібно знайти множину Парето відносно цього нового векторного критерію. У загальному випадку вона має бути меншою від початкової множини Парето. Отже, відбудеться звуження множини Парето внаслідок використання набору взаємно незалежної інформації про відносну важливість критеріїв.

Якщо отриманий після опитування ОПР набір інформації не є набором взаємно незалежної інформації, то в загальному випадку застосовувати результат теореми, наведеної в підрозд. 2.7, не можна.

Зазначимо деякі окремі випадки, коли отриманий набір не є набором взаємно незалежної інформації, проте його облік за допомогою теореми, наведеної в підрозд. 2.7, є можливим:

1. i_1-й критерій важливіше i_2-го критерію, який, своєю чергою, важливіше i_3-го критерію і т. д. до i_M-го критерію. Для врахування такого набору взаємозалежної інформації спочатку за відповідною формулою потрібно розрахувати найменш важливий критерій, розташований у кінці зазначеного ланцюжка, потім — той, який важливіше найменш важливого і т. д. у порядку збільшення важливості. Останнім розрахунку підлягає критерій i_2.

2. Є кілька ланцюжків, що не перетинаються, описаних в попередньому пункті. Визначати такого роду інформацію з кожним ланцюжком критеріїв слід зазначеним вище способом.

3. Є кілька пар критеріїв, що утворюють набір взаємонезалежної інформації, а також кілька ланцюжків, що не перетинаються, складених із критеріїв, що не входять у пари.

2.9. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності

Розглянемо задачу оптимізації $J(x,z) \to \max_x$. Розв'язавши цю задачу, можемо визначити вектор $x = x(z)$, тобто відобразити множину невизначеності природних факторів Z на множину $G_x \subset X$, яку називають множиною невизначеності рішень x. Вибір конкретного елемента з множини G_x може ґрунтуватися на введенні різних розумних гіпотез про поведінку середовища. Одну з них називають гіпотезою антагонізму. Ця гіпотеза полягає в припущенні, що середовище поводиться "найгіршим" для ОПР чином. Як оптимальна вибирається альтернатива

$$J_1(x) = \min_{z \in Z} J(x,z) \to \max_{x \in X},$$

тобто підбирається "найгірший" можливий варіант z. Такий принцип вибору оптимальної альтернативи x^* називають або *принципом гарантованого результату, або принципом максиміну, або* ***критерієм Вальда****.* Число $J_1(x^*) = J^*$ називають *гарантованою оцінкою*, а сам елемент x^* — *рішенням, що гарантується.*

Якщо значення функціонала $J(x,z)$ відображає не "корисність" альтернативи, а, навпаки, "втрати", то початкова задача полягає в мінімізації функції $J(x,z)$, а максимінний критерій перетворюється на мінімаксний. Максимінні та мінімаксні критерії є надзвичайно «обережними», "песимістичними", що може призвести до нелогічних висновків, що суперечать здоровому глузду.

Приклад 2.4. Нехай функцію $J(x,z)$ задано за допомогою табл. 2.2, де елементи матриці рішень мають значення "втрат" (заданих у деяких умовних одиницях, ум. од.), які слід мінімізувати.

Таблиця 2.2

Матриця втрат

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	10 100 ум. од.	100 ум. од.
x_2	10 000 ум. од.	10 000 ум. од.

При виборі рішення x_1 або x_2 ми, як і раніше, не знаємо, якого значення z_1 чи z_2 набуде фактор невизначеності z. Застосування мінімаксного критерію призводить до вибору x_2. Але інтуїтивно ми схильні вибрати x_1, оскільки зовсім не виключено, що реалізується "стан природи" z_2 і наш програш буде значно зменшений (дорівнює 100 ум. од.). У той же час при виборі x_2 ми гарантовано матимемо втрати в 10 000 ум. од. при будь-якому значенні z.

Припустимо тепер, що задано матрицю рішень (табл. 2.3), що являє собою функціонал $J(x,z)$.

Таблиця 2.3

Вихідна матриця рішень

X	Z				
	z_1	…	z_j	…	z_s
x_1	y_{11}	…	y_{1j}	…	y_{1s}
…	…	…	…	…	…
x_i	y_{i1}	…	y_{ij}	…	y_{is}
…	…	…	…	…	…
x_n	y_{n1}	…	y_{nj}	…	y_{ns}

Тут уведено позначення $y_{ij} = J(x_i, z_j)$ і передбачається скінченність множин X, Z. Уведемо нову матрицю:

$$r_{ij} = \max_{k=1,\dots,n} y_{kj} - y_{ij}, \text{ якщо } y \text{ — «дохід»;}$$

$$r_{ij} = y_{ij} - \min_{k=1,\dots,n} y_{ki}, \text{ якщо } y \text{ — «втрати».}$$

Таким чином, r_{ij} — різниця між найкращим значенням у стовпці j і значенням y_{ij} у тому ж стовпці.

Побудовану таким чином матрицю $\{r_{ij}\}$ називають *матрицею жалю*, оскільки по суті кожне число r_{ij} виражає "жаль" особи, що приймає рішення, з приводу того, що вона не вибрала найкращого рішення щодо стану z_j.

Критерій мінімального жалю, запропонований Л. Севіджем, полягає в застосуванні мінімаксного критерію до матриці жалю, тобто числа r_{ij} завжди мають характер "втрат", і їх необхідно мінімізувати:

$$y_i = \max_j(\max_i y_{ij} - y_{ij}) \to \min_i.$$

Матриця жалю для попереднього прикладу матиме вигляд табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Матрица жалю

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	100 ум. од.	0 ум. од.
x_2	0 ум. од.	9 900 ум. од.

У цьому випадку маємо:

$$i = 1: \max_{j=1,2} y_{ij} = \max\{100, 0\} = 100;$$

$$i = 2: \max_{j=1,2} y_{ij} = \max\{0, 9900\} = 9900.$$

Урешті-решт, згідно з критерієм Севіджа вибираємо першу альтернативу x_1, до чого ми й прагнули інтуїтивно.

Наступний критерій оптимальності прийнятого рішення називають ***критерієм Гурвіца***. Цей критерій охоплює кілька різних підходів до прийняття рішень — від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного.

Критерій Гурвіца називають також критерієм песимізму-оптимізму, який зводиться до зваженої комбінації обох способів зі встановлення балансу між випадками граничного оптимізму і крайнього песимізму. Якщо y_{ij} означає «прибуток», то вибирається рішення з умови

$$\max_i \{\alpha \max_j y_{ij} + (1-\alpha)\min_j y_{ij}\}, 0 \le \alpha \le 1.$$

Оцінна функція для випадку «прибутків» має вигляд

$$\mathrm{y_i} = \{\alpha \max_j \mathrm{y_{ij}} + (1-\alpha)\min_j \mathrm{y_{ij}}\} \to \max_i .$$

У тому випадку, коли y_{ij} являє собою «витрати», оптимальне рішення задовольняє аналогічному співвідношенню

$$\min_i \{\alpha \min_j y_{ij} + (1-\alpha)\max_j y_{ij}\}.$$

Якщо $\alpha = 1$, то маємо випадок граничного оптимізму, якщо $\alpha = 0$, — випадок крайнього песимізму. Проміжні значення показника песимізму-оптимізму α характеризують ту чи іншу схильність ОПР до песимізму або оптимізму. При відсутності явно вираженої схильності доцільно вважати $\alpha = 1/2$.

У неперервному випадку, коли аргументи функціонала $J(x,z)$ не мають належати скінченним множинам, маємо

$$\max_{x \in X}\{\alpha \max_{z \in Z} J(x,z) + (1-\alpha)\min_{z \in Z} J(x,z)\} \Rightarrow x^*$$

або

$$J_2(x) = \alpha \max_{z \in Z} J(x,z) + (1-\alpha)\min_{z \in Z} J(x,z) \to \max_{x \in X}.$$

Аналогічно для критерію Севіджа

$$J_3(x) = \max_{z \in Z} r(x,z) \to \min_{x \in X},$$

де (у припущенні, що функціонал J потрібно максимізувати)

$$r(x,z) = \max_{x \in X} J(x,z) - J(x,z).$$

Приклад 2.5. Одне з підприємств, сферою діяльності яких є обслуговування населення, має визначити рівень пропозиції послуг так, щоб задовольнити потреби клієнтів протягом майбутніх свят. Точна кількість клієнтів є невідомою, але очікується, що вона може дорівнювати одному з чотирьох значень: $z_1 = 200$, $z_2 = 250$, $z_3 = 300$, $z_4 = 350$. Для кожного з цих можливих значень існує найкращий рівень пропозиції (з огляду на можливі витрати). Відхилення від цих рівнів спричиняє додаткові витрати або через перевищення пропозиції над попитом, або через неповне задоволення попиту.

Витрати J (в ум. од.) наведено в табл. 2.5, де x_i — варіанти рівнів пропозиції, серед яких слід знайти оптимальний.

Таблиця 2.5

Матриця затрат

X	Z			
	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	5	10	18	25
x_2	8	7	8	23
x_3	21	18	12	21
x_4	30	22	19	15

Зазначимо, що всі рівні пропозиції, відображені в табл. 2.4, є найкращими для відповідних значень z_i. Так, x_1 є найкращим, якщо $z = z_1$, x_2 — якщо $z = z_2$, x_3 — якщо $z = z_3$, x_4 — якщо $z = z_4$. Таким чином, «зайвих» x_i у табл. 2.5 немає. Застосування мінімаксного критерію до вибору рішення дає змогу отримати гарантоване значення $J^* = 21$, $x^* = x_3$.

Критерій Севіджа приводить до матриці жалю

$$\{r_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 16 & 11 & 4 & 6 \\ 25 & 15 & 11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Унаслідок мінімаксного оброблення матриці $\{r_{ij}\}$ маємо $x^* = x_2$, що відповідає «жалю», який дорівнює 8.

Критерій Гурвіца при $\alpha = 1/2$ приводить до вибору рішення $x^* = x_1$ або $x^* = x_2$. Необхідні проміжні результати наведено в табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Критерій Гурвіца

X	$\min_j y_{ij}$	$\max_j y_{ij}$	$\alpha \min_j y_{ij} + (1-\alpha)\max_j y_{ij}$
x_1	5	25	15
x_2	7	23	15
x_3	12	21	16,5
x_4	15	30	22,5

2.10. Метод аналізу ієрархій

Метод аналізу ієрархій (МАІ) призначено для розв'язання багатокритеріальних задач зі скінченною множиною можливих векторів. Його застосування базується на експертній інформації про відносну важливість критеріїв у вигляді матриці порівнянь парами.

Цей метод запропонував американський математик Т. Сааті 1972 року. Згодом метод сформувався в цілий розділ прийняття рішень при наявності кількох критеріїв.

2.10.1. Матриця відносних ваг

Нехай є набір з n елементів, які позначимо $A_1, A_2, \dots, A_n$. Припустимо, що кожному елементу A_k поставлено у відповідність невід'ємне число ω_k. Це число будемо називати вагою елемента A_k, $k = 1,2,\dots,n$. Будемо вважати, що ваги всіх об'єктів підпорядковуються умові нормування $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1$.

Кожен елемент матриці a_{ij} є відношенням ваги i-го елемента A_i до ваги j-го елемента A_j, тобто $a_{ij} = \dfrac{\omega_i}{\omega_j}$ для всіх номерів $i, j = 1,2,\dots,n$:

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} \omega_1/\omega_2 & \omega_1/\omega_2 & \dots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & \omega_2/\omega_2 & \dots & \omega_2/\omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \dots & \omega_n/\omega_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \omega_1/\omega_2 & \dots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & 1 & \dots & \omega_2/\omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Опишемо властивості матриці A відносних ваг:

1. Усі елементи матриці A є додатними, причому елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

2. Матриця A є обернено симетричною.

3. Матриця має властивість узгодженості в тому значенні, що для всіх номерів $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ мають місце рівності $\mathbf{a}_{ij}\,\mathbf{a}_{jk} = \frac{\omega_i}{\omega_j}\,\frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{\omega_i}{\omega_k} = \mathbf{a}_{ik}$.

4. Число n є власним значенням матриці A, а вектор-стовпець ваг $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ — відповідним власним вектором. Інакше кажучи, виконується рівність $A\omega = n\omega$.

Для того щоб переконатися в правильності четвертої властивості, розглянемо k-ту компоненту вектора. Вона є результатом множення k-го рядка матриці A на вектор ω:

$$(a_{k1}\ \ a_{k2}\ \ \ldots\ \ a_{kn})\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \ldots\\ \omega_n\end{pmatrix} = a_{k1}\omega_1 + a_{k2}\omega_2 + \ldots + a_{kn}\omega_n =$$

$$= \frac{\omega_k}{\omega_1}\omega_1 + \frac{\omega_k}{\omega_2}\omega_2 + \ldots + \frac{\omega_k}{\omega_n}\omega_n = n\omega_k.$$

Завдяки довільності вибору номера k рівність можна вважати доведеною.

Лема. Матриця відносних ваг A має тільки два різних власних значення 0 і n.

Після введення позначення $\lambda_{\max} = \max\{0, n\} = n$ рівність можна переписати у вигляді $A\omega = \lambda_{\max}\omega$. Саме ця рівність є основою МАІ.

2.10.2. Матриця порівнянь парами

Нехай є набор елементів $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Потрібно визначити ваги кожного з них, тобто числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Матриця порівнянь парами має вигляд

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Довільний елемент a_{ij} цієї матриці являє собою число, що показує, у скільки разів вага елемента A_i більше ваги елемента A_j. Ці числа визначаються експертами шляхом попарного порівняння об'єктів. Звідси й походить найменування цієї матриці.

В ідеальному випадку матриця порівнянь парами повинна в точності збігатися з матрицею відносних ваг. Насправді це відбувається далеко не завжди, проте необхідно прагнути до того, щоб розбіжність між ними була якомога меншою. Матриця порівнянь парами повинна мати всі перелічені чотири властивості матриці відносних ваг.

2.10.3. Алгоритм МАІ

Метод аналізу ієрархій складається з таких трьох етапів.

I. Із залученням експерта формується матриця порівнянь парами $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Для заповнення матриці розміру від експерта необхідно отримати $\frac{n(n-1)}{2}$ суджень. Властивості 1 і 2 матриці порівнянь парами завжди легко можна виконати, а ось третя властивість виконується не завжди. Крім того, у матриці парних порівнянь максимальне власне значення найчастіше не збігається з n. Можна довести, що $\lambda_{\max}\geq n$, причому рівність тут має місце тоді і тільки тоді, коли матриця A є узгодженою.

Автор МАІ Т. Сааті увів спеціальний числовий показник $CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$, який називають індексом сумісності, для оцінювання «ступеня невиконання» властивості узгодженості. Так, якщо індекс сумісності не перевищує 0,1, то матриця порівнянь парами є узгодженою, і можна переходити до наступного етапу. В іншому випадку рекомендується провести процедуру корекції.

Використовуючи реальну матрицю $\mathbf{A}$, уведемо матрицю

$$\mathbf{A}_1=\left(a_{ij,1}\right)=\frac{1}{n}AA=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}\ .$$

Елементи матриці $A^{(1)}$ розрахуємо за формулами

$$a_{ij}^{(1)}=\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}\,a_{kj}}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}\,a_{kj}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}\,a_{ki}\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}\,a_{kj}}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}\,a_{ki}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$= \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{ik}\, a_{kj}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \; i = 1,\dots,n, \; j = 1,\dots,n.$$

Отримана при цьому матриця $A^{(1)}$ буде більш узгодженою, ніж початкова. Нехай зроблено m ітерацій корекції, унаслідок чого отримано матрицю $A^{(m)} = \left(a_{ij}^{(m)}\right)$. Тоді на черговій $(m+1)$-й ітерації виконуються такі обчислення:

$$a_{ij}^{(m+1)} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m)}\, a_{kj}^{(m)}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{ik}^{(m)}\, a_{kj}^{(m)}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \; i = 1,\dots,n, \; j = 1,\dots,n.$$

Отримане співвідношення дає змогу розрахувати елементи матриці $A^{(m+1)}$ безпосередньо через елементи матриці $A^{(m)}$. Збіжність запропонованої процедури перевірено експериментально.

II. На другому етапі використовується четверта властивість матриці порівнянь парами, а саме: застосовуючи відповідні числові методи, знаходять максимальне власне значення λ_{max} матриці A.

III. Далі, підставивши λ_{max} в $A\omega = \lambda_{max}\omega$, отримують однорідну систему лінійних рівнянь. Знайдене рішення $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ є шуканим ваговим вектором.

Приклад 2.6. Сім'я середнього достатку вирішила купити будинок. Унаслідок обговорення вдалося визначити вісім критеріїв, яким має задовольняти будинок.

У членів сім'ї були такі критерії:

1) розміри будинку: розміри кімнат; кількість кімнат; загальна площа будинку;

2) зручне автобусне сполучення: близькість автобусної зупинки;

3) місцевість: інтенсивність руху транспорту; безпека, гарний вид; доглянуті околиці;

4) рік збудування будинку: не потребує пояснення;

5) подвір'я: простір перед будинком, позаду, збоку, а також відстань до сусідів;

6) сучасне обладнання: посудомийна машина; сміттєпровід, кондиціювання повітря; система сигналізації та інші подібні пристрої в будинку;

7) загальний стан: потреба в ремонті, електропроводка, дах,

водопровідна система;

8) фінансові умови: допускається закладна; умови продажу та банківський кредит; низькі податки.

У родині є варіанти будинків А, Б, В.

Завдання полягає у виборі одного з трьох будинків-кандидатів.

Порядок вирішення проблеми є таким.

Крок 1 полягає в декомпозиції й поданні задачі в ієрархічній формі (рис. 2.6).

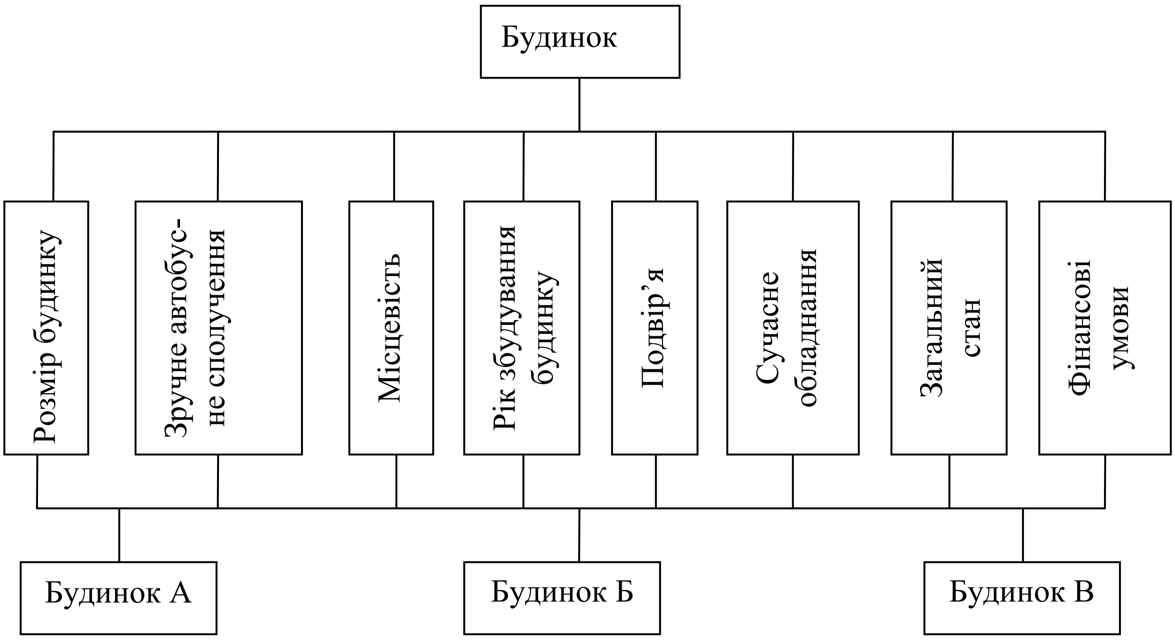

Рис. 2.6. Декомпозиція задачі в ієрархію

На першому (вищому) рівні знаходиться загальна мета — «Будинок». На другому рівні знаходяться вісім факторів, або критеріїв, що уточнюють мету, і на третьому (нижньому) — три будинки-кандидати, які необхідно оцінити згідно з факторами (критеріями) другого рівня.

Крок 2 полягає в заповненні матриць порівнянь парами для другого рівня.

Матриця заповнюється відповідно до суб'єктивних суджень членів сім'ї на основі їх переваг, сприйняття обмежень, можливостей з використанням шкали відносної важливості від 1 до 9 (табл. 2.7).

Наприклад, є запитання: «Яке значення мають розміри будинку і зручність автобусного сполучення згідно з загальною метою?» Члени сім'ї дійшли згоди, що розміри є істотно важливішими і тому внесли 5 у відповідну комірку матриці; 1/5 автоматично заноситься в симетричну відносно діагоналі комірку, що відповідає протилежному порівнянню (див. табл. 2.7).

Крок 3 полягає в заповненні матриць порівнянь парами для третього рівня.

Порівнювані попарно елементи — це можливі варіанти вибору будинку. Порівнюється, наскільки більш бажаним або хорошим є той чи інший будинок для задоволення кожного критерію другого рівня. Отримуємо вісім матриць суджень розмірністю 3 × 3, оскільки є вісім факторів (критеріїв) на другому рівні й три будинки, які попарно порівнюються за кожним із факторів (критеріїв). Матриці знову містять судження членів сім'ї. Для того щоб зрозуміти судження, дамо короткий опис будинків.

Будинок А. Це найбільший будинок порівняно з Б і В, з хорошою місцевістю, неінтенсивним рухом транспорту; податки на будинок — невеликі. Подвір'я є більшим, ніж будинків Б і В. Однак загальний стан його не дуже хороший. Через те, що будинок фінансується банком з високою відсотковою ставкою, фінансові умови можна вважати незадовільними.

Будинок Б. Цей будинок трошки менше будинку А, розташований далеко від автобусних зупинок, навколо — інтенсивний рух транспорту. У будинку немає основних сучасних зручностей. Однак загальний стан дуже хороший. Крім того, на будинок можна отримати заставну з досить низькою відсотковою ставкою. Це означає, що фінансові умови є цілком задовільними.

Будинок В. Цей будинок дуже маленький, і в ньому немає сучасних зручностей. Високі податки. Але будинок у хорошому стані і здається безпечним. Подвір'я є більшим, ніж будинку Б, однак незрівнянно меншим є простір навколо будинку А. Загальний стан будинку хороший. Фінансові умови набагато кращі, ніж для будинку А, але не такі хороші, як для будинку Б.

Результати суджень сім'ї наведено в матриці порівнянь парами для третього рівня (табл. 2.8).

Крок 4 полягає в обчисленні для другого рівня пріоритетів, найбільшого власного значення матриці суджень $(\lambda_{\max})$, індексу узгодженості й відношення узгодженості.

Початковою інформацією для вирішення цього завдання є матриця порівнянь парами для другого рівня (табл. 2.9).

У табл. 2.9 розрахунки проводилися таким чином:

Таблиця 2.7

Матриця порівнянь парами для другого рівня

Загальне задоволення будинком	Розміри будинку	Автобусне сполучення	Місцевість	Рік збудування будинку	Подвір'я	Сучасне обладнання	Загальний стан	Фінансовий стан
Розміри будинку	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
Автобусне сполучення	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
Місцевість	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5
Рік збудування будинку	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
Подвір'я	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
Сучасне обладнання	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
Загальний стан	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
Фінансовий стан	4	7	5	8	6	6	2	1

1. Знаходимо значення $\sqrt[8]{\ }$ першого рядка:

$$\sqrt[8]{1\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 6\cdot 6\cdot 1/3\cdot 1/4} = 2{,}052;$$

аналогічно обчислюємо власні вектори інших рядків.

Проводимо нормалізацію отриманих чисел (складаємо значення рядків):

r = 2,052 + 0,74 + 1,75 + 0,23 + 0,42 + 0,5 + 1,57 + 4,11 = 11,372.

Визначаємо вектор пріоритетів для першого рядка:

2,052 / 11,372 = 0,18.

Аналогічно обчислюємо значення інших рядків.

2. Визначаємо найбільше значення матриці суджень для другого рівня:

$$\lambda_{max} = (9{,}01\cdot 0{,}18)+(21{,}86\cdot 0{,}065)+(10{,}25\cdot 0{,}153)+(41\cdot 0{,}02)+(23{,}3\cdot 0{,}037)+$$
$$+(25{,}75\cdot 0{,}044)+(10{,}08\cdot 0{,}138)+(2{,}25\cdot 0{,}362) = 9{,}73.$$

3. Індекс узгодженості (ІУ) знаходимо так:

$$\text{ІУ} = (\lambda_{max} - n)/(n-1) = (9{,}73-8)/7 = 0{,}247.$$

Таблиця 2.8

Матриця порівнянь парами для третього рівня

Розміри будинку	А Б В	Автобусне сполучення	А Б В
А Б В	1 6 8 1/6 1 4 1/8 1/4 1	А Б В	1 7 1/5 1/7 1 1/8 5 8 1
Місцевість	А Б В	Рік збудування будинку	А Б В
А Б В	1 8 6 1/8 1 1/4 1/6 4 1	А Б В	1 1 1 1 1 1 1 1 1
Подвір’я	А Б В	Сучасне обладнання	А Б В
А Б В	1 5 4 1/5 1 1/3 1/4 3 1	А Б В	1 8 6 1/8 1 1/5 1/6 5 1
Загальний стан	А Б В	Фінансовий стан	А Б В
А Б В	1 1/2 1/2 2 1 1 2 1 1	А Б В	1 1/7 1/5 7 1 3 5 1/3 1

4. Відношення узгодженості (ВУ) отримаємо шляхом ділення ІУ на число, що відповідає випадковій узгодженості матриці того ж порядку.

Для матриці розмірністю 8 × 8 випадкова узгодженість дорівнює 1,41 (табл. 2.10):

$$\textbf{ВУ} = \textbf{ІУ} / \textbf{1,41} = \textbf{0,247} / \textbf{1,41} = \textbf{0,175.}$$

Зазначимо, що відношення узгодженості (ВУ) є декілька більшим, ніж нам хотілося б, однак для нашого випадку немає сенсу переглядати судження.

У порівняно великих матрицях (наприклад, від 7 до 9 елементів) часто важко досягти високого рівня узгодженості. Рівень узгодженості має відповідати тому ризику, який супроводжує роботу з неузгодженими результатами. Наприклад, при порівнянні впливу ліків на організм необхідно мати дуже високий рівень узгодженості.

Розглянемо вектори пріоритетів (див. табл. 2.9). Найбільше значення має вектор «Фінансові умови». Ясно, що наявність адекватного фінансування сприймається сім'єю як найбільш важливий фактор (критерій) при виборі будинку. Фактично він майже в 2 рази є важливішим за розміри (0,362 проти 0,18) і набагато важливішим, ніж рік збудування будинку, який має низький пріоритет, що дорівнює 0,018. Дійсно, при проведенні подальших обчислень можна було б вибрати для розгляду тільки три або чотири найбільш важливі фактори (критерії) — скажімо, фінансування, місцевість, розміри й загальний стан, оскільки вони вплинуть на остаточний вибір будинку.

Для того щоб подолати це, слід просто скласти пріоритети найбільш важливих факторів (критеріїв) і поділити кожен на суму, отримавши таким чином новий нормалізований вектор пріоритетів.

Крок 5 полягає в обчисленні для третього рівня пріоритетів, найбільшого власного значення суджень (λ_{max}), індексу узгодженості та відношення узгодженості — для всіх восьми матриць суджень розмірністю 3 х 3.

У табл. 2.8 уводяться парні порівняння для третього рівня ієрархії, що ілюструють порівняльну бажаність будинків А, Б і В щодо критеріїв другого рівня. Видно, що будинок Б — кращий за критерієм фінансування, а будинок А сприймається як кращий за розмірами й зручністю автобусного сполучення.

Крок 6 полягає в обчисленні глобальних пріоритетів. Для визначення глобальних пріоритетів складають матрицю, у верхній рядок якої вписують вектори пріоритетів кожного фактора (критерію). Значення векторних пріоритетів беруть з табл. 2.9 матриці порівнянь парами для другого рівня (останній стовпець матриці — вектор пріоритетів).

Стовпці матриці заповнюють значеннями векторів пріоритетів, які беруть з матриці парних порівнянь для третього рівня (див. табл. 2.10).

Таблиця 2.9

Матриця порівнянь парами для другого рівня, рішення й узгодженість

Загальне задоволення будинком	Розміри будинку	Автобусне сполучення	Місцевість	Рік збудування будинку	Подвір’я	Сучасне обладнання	Загальний стан	Фінансовий стан	$\sqrt[8]{\ }$	Вектор пріоритетів
Розміри будинку	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	2,052	0,18
Автобусне сполучення	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0,74	0,065
Місцевість	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5	1,75	0,153
Рік збудування будинку	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0,23	0,02
Подвір’я	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0,42	0,037
Сучасне обладнання	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0,5	0,044
Загальний стан	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2	1,57	0,138
Фінансовий стан	4	7	5	8	6	6	2	1	4,11	0,362
	9,01	21,86	10,31	41	23,3	25,75	10,08	2,25	11,364	

$\lambda_{max} = $ **9,73;**

ІУ $=$ **0,247;**

ВУ $=$ **0,75**

Таблиця 2.10

Матриця порівнянь парами для третього рівня, рішення й узгодженість

Розміри будинку	*А Б В*	Вектор пріоритетів	Подвір’я	*А Б В*	Вектор пріоритетів
А *Б* *В*	1 6 8 1/6 1 4 1/8 1/4 1	0,754 0,181 0,065 λ_{max} = **3,136** **ІУ = 0,068** **ВУ = 0,117**	*А* *Б* *В*	1 5 4 1/5 1 1/3 1/4 3 1	0,674 0,101 0,226 λ_{max} = **3,06** **ІУ = 0,043** **ВУ = 0,074**
Автобусне сполучен-ня	*А Б В*	Вектор пріоритетів	Сучасне обладнання	*А Б В*	Вектор пріоритетів
А *Б* *В*	1 7 1/5 1/7 1 1/8 5 8 1	0,233 0,005 0,713 λ_{max} = **3,247** **ІУ = 0,124** **ВУ = 0,213**	*А* *Б* *В*	1 8 6 1/8 1 1/5 1/6 5 1	0,747 0,06 0,193 λ_{max} = **3,197** **ІУ = 0,099** **ВУ = 0,17**
Місце-вість	*А Б В*	Вектор пріоритетів	Загальний стан	*А Б В*	Вектор пріоритетів
А *Б* *В*	1 8 6 1/8 1 1/4 1/6 4 1	0,745 0,065 0,181 λ_{max} = **3,13** **ІУ = 0,068** **ВУ = 0,117**	*А* *Б* *В*	1 1/2 1/2 2 1 1 2 1 1	0,2 0,4 0,4 λ_{max} = **3** **ІУ = 0** **ВУ = 0**
Рік збу-дування будинку	*А Б В*	Вектор пріоритетів	Фінансовий стан	*А Б В*	Вектор пріоритетів
А *Б* *В*	1 1 1 1 1 1 1 1 1	0,333 0,333 0,333 λ_{max} = **3** **ІУ = 0** **ВУ = 0**	*А* *Б* *В*	1 1/7 1/5 7 1 3 5 1/3 1	0,072 0,65 0,278 λ_{max} = **3,065** **ІУ = 0,032** **ВУ = 0,056**

Подамо матрицю глобальних пріоритетів у вигляді табл. 2.11.

Глобальний пріоритет обчислюється шляхом множення векторів пріоритетів другого рівня на вектори пріоритетів третього рівня, потім результати складаються вздовж кожного рядка. Наприклад, для будинку А маємо:

$$\mathbf{(0{,}754 \cdot 0{,}18) + (0{,}233 \cdot 0{,}065) + (0{,}745 \cdot 0{,}153) + (0{,}333 \cdot 0{,}02) +}$$
$$\mathbf{+ (0{,}647 \cdot 0{,}037) + (0{,}747 \cdot 0{,}044) + (0{,}2 \cdot 0{,}138) + (0{,}072 \cdot 0{,}362) = 0{,}37.}$$

Будинок А був найменш бажаним з огляду на фінансові умови (критерій з найвищим пріоритетом).

Таблиця 2.11

Матриця глобальних пріоритетів

Будинок	Вектори пріоритетів								Глобальні пріоритети
	1 (0,18)	2 (0,065)	3 (0,153)	4 (0,02)	5 (0,037)	6 (0,044)	7 (0,138)	8 (0,362)	
А	0,754	0,233	0,745	0,333	0,674	0,747	0,2	0,072	0,37
Б	0,181	0,055	0,065	0,333	0,101	0,06	0,4	0,065	0,341
В	0,065	0,713	0,181	0,333	0,226	0,193	0,4	0,278	0,263

2.10.4. Спрощений метод МАІ

Побудуємо матрицю порівнянь парами, що задовольняє властивостям 1–3. Діагональні елементи матриці парних порівнянь відомо — це одиниці. Далі виділяється об'єкт («зразок»), з яким експерту найзручніше порівнювати всі інші об'єкти. Цьому об'єкту присвоюється перший номер. Решта об'єктів можуть бути пронумеровані у будь-який спосіб. Далі експерту пропонують порівняти вагу першого об'єкта з вагою другого об'єкта і вказати додатне число, що показує, у скільки разів вага першого об'єкта більше ваги другого об'єкта, тобто отримуємо елемент матриці a_{12}, і т. д, доки не одержимо перший рядок матриці A. Інші елементи матриці A можна знайти за формулами $a_{ij} = a_{i1}\, a_{1j} = a_{1j}/a_{1i}$ для всіх $i, j = 2, \dots, n$. Після того як матрицю A зазначеним способом побудовано, можна знайти ваговий вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$. Його компоненти визначаються формулою

$$\omega_i = \frac{a_{1n}}{a_{1i}}, \quad i = 1,2,\dots,n-1; \;\; \omega_n = 1.$$

Отриманий вектор ваг ω не задовольняє вимогу нормування, оскільки його остання компонента дорівнює одиниці. Для того щоб він був нормованим, кожну його компоненту слід поділити на суму всіх компонент, тобто на величину $\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{n-1} + 1$. Неважко помітити, що компоненти вагового вектора ω складають останній стовпець матриці $\mathbf{A}$.

Приклад 2.7. Нехай є чотири об'єкти для інвестування A_1, A_2, A_3, A_4. Потрібно розподілити одиничну суму по цих об'єктах, виходячи з критерію надійності вкладення коштів у ці об'єкти.

Припустимо, що після порівняння за критерієм надійності першого об'єкта з усіма іншими від експерта було отримано такі дані: $a_{12} = 3,\ a_{13} = 0{,}5,\ a_{14} = 2$. Матриця порівнянь парами матиме такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2/3 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1/2 & 3/2 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо елементи останнього стовпця матриці: $\omega_1 = 2,\ \omega_2 = 2/3,\ \omega_3 = 4,\ \omega_4 = 1$. Після нормування, тобто ділення всіх отриманих компонент на $23/3$, маємо остаточний результат: $\hat{\omega}_1 = 6/23,\ \hat{\omega}_2 = 2/23,\ \hat{\omega}_3 = 12/23,\ \hat{\omega}_4 = 3/23$. Знайдені ваги вказують частки, відповідно до яких слід здійснити розподіл одиничної суми по наявних чотирьох об'єктах для інвестування.

2.10.5. Спрощений варіант МАІ на основі схеми послідовного порівняння об'єктів

Виявляється, спрощений варіант МАІ можна також реалізувати, узявши за основу не елемент першого рядка матриці порівнянь парами, а інші визначені набори із $n-1$ елементів матриці порівнянь парами.

Розглянемо, наприклад, набір елементів $a_{12}, a_{23}, ..., a_{n-1,n}$. Цьому набору відповідає така схема послідовного порівняння. З наявного набору об'єктів довільно вибирається якийсь один. Йому присвоюється перший номер. Для нього з метою подальшого порівняння підбирається інший об'єкт (якому присвоюється другий номер), найбільш «зручний» для порівняння з першим. Унаслідок порівняння стає відомим елемент a_{12}. Подальші дії є аналогічними: для другого об'єкта підбирається третій об'єкт, найбільш «зручний» для порівняння; унаслідок порівняння стає відомим елемент a_{23} і т. д. Останній стовпець побудованої матриці буде шуканим (ненормованим) ваговим вектором.

Формула на основі набору $a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{n-1,n}$ для послідовного обчислення всіх інших елементів матриці A, розташованих вище головної діагоналі, має вигляд

$$a_{ij} = a_{i,j-1}\, a_{j-1,j}, \quad i = 1,\ldots n-2; \quad i < j-1.$$

Відповідно до цієї формули спочатку можна знайти всі елементи першого рядка в порядку збільшення номера стовпця, потім аналогічно — всі елементи другого рядка, починаючи з a_{24}, і т. д. до останнього елемента. Останній стовпець побудованої матриці буде потрібним ваговим (ненормованим) вектором.

Можна перевірити, що компоненти вагового (ненормованого) вектора на основі набору елементів $a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{n-1,n}$ можна безпосередньо обчислити за формулою

$$\omega_k = a_{k,k+1}\, a_{k+1,k+2}\ \, a_{n-1,n},\ k = 1,2,\ldots,n-1;\ \omega_n = 1.$$

2.10.6. Застосування МАІ до розв'язання багатокритеріальних задач

Звернемося до багатокритеріальної задачі з векторним критерієм $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m)$, заданим на скінченній множині можливих рішень. Припустимо, що для ОПР кожен із критеріїв бажано максимізувати.

Відповідно до МАІ найкращим рішенням $x^* \in X$ буде рішення, яке надає найбільш можливого значення адитивній згортці критеріїв $\sum_{i=1}^{m} \omega_i f_i(x)$, тобто $\sum_{i=1}^{m} \omega_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \omega_i f_i(x)$. При цьому додатні коефіцієнти $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, $\sum_{i=1}^{m} \omega_i f_i(x)$ визначаються на основі МАІ (або його спрощеного варіанта). З цією метою експерту для порівняння за важливістю пропонується набір критеріїв $f_1, f_2, \ldots, f_m$, що є порівнюваними об'єктами.

Далі здійснюється максимізація адитивної згортки на множині можливих рішень X, унаслідок чого буде отримано рішення x^*, яке згідно з МАІ слід вибирати.

Зауваження. Розв'язання багатокритеріальної задачі на основі МАІ не має строгого обґрунтування. Насамперед це стосується призначення експертом елементів матриці парних порівнянь, що мають суб'єктивний характер. Друге «слабке місце» МАІ пов'язане зі способом скаляризації багатокритеріальної задачі, тому вибір того чи іншого способу скаляризації (згортки) значною мірою впливає на точку максимуму згортки.

2.11. Багатокритеріальний вибір в умовах невизначеності

У разі наявності невизначеності середовища вибір варіантів, які оцінюються за кількома критеріями, узагалі кажучи, ускладнюється. Для моделювання цієї нової ситуації існують різні підходи. Найпростіший підхід полягає у використанні певної згортки векторного критерію оптимальності з подальшим зверненням до стандартних методів однокритеріального вибору.

При відносно невеликій кількості критеріїв можна звернутися до методу ранжування критеріїв "за важливістю" на основі процедури побудови матриці порівнянь парами (див. підрозд. 2.10.2). Використовуються також методи теорії «багатокритеріальної корисності».

Нехай задано матрицю рішень:

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	$f_1^{11}, f_2^{11}, f_3^{11}, f_4^{11}, f_5^{11}, f_6^{11}$	$f_1^{12}, f_2^{12}, f_3^{12}, f_4^{12}, f_5^{12}, f_6^{12}$
x_2	$f_1^{21}, f_2^{21}, f_3^{21}, f_4^{21}, f_5^{21}, f_6^{21}$	$f_1^{22}, f_2^{22}, f_3^{22}, f_4^{22}, f_5^{22}, f_6^{22}$

Тут f_i^{jk} — дійсні числа. Маємо тривимірну матрицю $2 \times 2 \times 6$, оскільки кожна реалізація (x_i, z_j) оцінюється за шістьома числовими критеріями $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$.

На першому етапі розв'язання задачі зранжуємо критерії f_i за важливістю. Для побудови коефіцієнтів переваги

$$\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}, \alpha_{56}$$

задамо ОПР п'ять запитань. Нехай користувач дав такі відповіді:

1. Критерій f_1 слабо перевищує за важливістю критерій f_2: $\alpha_{12} = 2$.
2. Критерій f_2 сильно перевищує f_3: $\alpha_{23} = 4$.
3. Критерій f_4 сильно перевищує f_3: $\alpha_{34} = 1/4$.
4. Критерії f_4, f_5 — однакові за важливістю: $\alpha_{45} = 1$.
5. Критерій f_5 сильно перевищує f_6: $\alpha_{56} = 4$.

Використовуючи співвідношення $\alpha_{ij} = \alpha_i / \alpha_j$ та умову нормованості вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ знаходимо вектор ваги відносної важливості критеріїв:

$$\alpha_1 = 0,364; \ \alpha_2 = 0,182; \ \alpha_3 = 0,045; \ \alpha_4 = 0,182; \alpha_5 = 0,182; \alpha_6 = 0,045.$$

Припускаємо, що числа f_i^{jk} є заданими (табл. 2.12).

Таблиця 2.12

Числові оцінки альтернатив за шістьома критеріями

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	0,25; 0,5; 0,3; 0,1; 0,7;0,25	0,5; 0,14; 0,3; 0,7; 0,1;0,25
x_2	0,25; 0,3; 0,3; 0,18; 0,18;0,5	0,5; 0,14; 0,3; 0,5; 0,18;0,25

На основі вагових коефіцієнтів α_i, побудованих унаслідок діалогу з ОПР, отримуємо вже звичайну матрицю рішень (табл. 2.13), що містить значення узагальненого критерію оптимальності J:

$$J^{jk} = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i f_i^{jk},\ j,k = 1,2.$$

Таблиця 2.13

Матриця рішень для узагальненого критерію оптимальності

X	Z	
	z_1	z_2
x_1	J^{11}	J^{12}
x_2	J^{21}	J^{22}

Тут

$$J^{11} = 0{,}364 \cdot 0{,}25 + 0{,}182 \cdot 0{,}5 + 0{,}045 \cdot 0{,}3 + 0{,}182 \cdot 0{,}1 + 0{,}182 \cdot 0{,}7 + \\ + 0{,}045 \cdot 0{,}25 = 0{,}35235;$$

$$J^{12} = 0{,}364 \cdot 0{,}5 + 0{,}182 \cdot 0{,}14 + 0{,}045 \cdot 0{,}3 + 0{,}182 \cdot 0{,}7 + 0{,}182 \cdot 0{,}1 + \\ + 0{,}045 \cdot 0{,}25 = 0{,}37783;$$

$$J^{21} = 0{,}364 \cdot 0{,}25 + 0{,}182 \cdot 0{,}3 + 0{,}045 \cdot 0{,}3 + 0{,}182 \cdot 0{,}18 + 0{,}182 \cdot 0{,}18 + \\ + 0{,}045 \cdot 0{,}5 = 0{,}24712;$$

$$J^{22} = 0{,}364 \cdot 0{,}5 + 0{,}182 \cdot 0{,}14 + 0{,}045 \cdot 0{,}3 + 0{,}182 \cdot 0{,}5 + 0{,}182 \cdot 0{,}18 + \\ + 0{,}045 \cdot 0{,}25 = 0{,}35599.$$

Припустимо, що маємо задачу прийняття рішень в умовах ризику з заданими ймовірностями станів середовища: $p(z_1) = 0{,}4; p(z_2) = 0{,}6$. Застосуємо критерій Байєса – Лапласа, максимізуючи очікуване значення узагальненого критерію:

$$\overline{J(x_1)} = 0{,}4 \cdot 0{,}35235 + 0{,}6 \cdot 0{,}37783 = 0{,}367638;$$

$$\overline{J(x_2)} = 0{,}4 \cdot 0{,}24712 + 0{,}6 \cdot 0{,}35599 = 0{,}312442.$$

Відповідно до критерію Байєса – Лапласа вибирається альтернатива x_1.

У цьому прикладі передбачалося, що всі окремі критерії зведено до якоїсь однієї шкали вимірювань (є однорідними), і всі вони максимізуються.

2.12. Оцінювання об'єктів з використанням нечіткого методу Дельфі

При реалізації класичного методу Дельфі експерти виставляють оцінки, потім доводять свої рішення і під час декількох етапів обговорення сходяться в своїх оцінках до деякого досить вузького діапазону значень. Одна й та ж вербальна оцінка може мати у різних експертів різне пояснення, що може спричинити істотні ускладнення через їх неузгодженість.

Щоб урахувати суб'єктивні думки експертів і невпевненість, спричинену складністю проблеми, пропонується використовувати нечіткий метод Дельфі. При цьому замість звичайних чисел уводяться нечіткі числа. Найбільш придатними є трикутні числа, тому що експерти мають визначити тільки три величини: мінімальне, максимальне і найбільш імовірне. Унаслідок застосування нечіткого методу Дельфі будуть отримані найбільш імовірні (з точки зору експертної групи) оцінки ключових параметрів для аналізованого завдання. Експертам надається вся необхідна інформація, у тому числі й керівні рекомендації щодо надійності й об'єктивності відповідей. Зазвичай процедура узгодження закінчується в 2–3-му турі. При цьому експерти спочатку дають оцінки, базуючись на реальних даних, а потім оцінюють гіпотетичну ситуацію, прогнозуючи, наприклад, економічний ефект від змінення навколишнього середовища.

Експерти $\mathbf{E_i}$ $(\boldsymbol{i = 1,\dots,n})$ визначають свою оцінку у вигляді нечіткої змінної з нечіткою множиною $\mathbf{E_i}$ $(\boldsymbol{i = 1,\dots,n})$ і функцією належності $\mu_{A_i} : \boldsymbol{U} \to [0,1]$ ($\boldsymbol{U}$ — універсум, на якому задано нечітку множину).

Трикутне нечітке число можна подати з допомогою нечіткої множини першого типу з функцією належності:

$$f(x;a,b,c) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ (x-a)/(b-a),\ a \le x \le b; \\ (c-x)/(c-b),\ b \le x \le c; \\ 0,\ c \le x, \end{cases}$$

де $\boldsymbol{a,b,c}$ — деякі числові параметри, які набувають довільних дійсних значень і впорядковуються відношенням $\mathbf{a \le b \le c}$.

Алгоритм застосування нечіткого методу Дельфі:

Крок 1. Експертам $\mathbf{E_r}$ $(\boldsymbol{r = 1,\dots,n})$ пропонується оцінити деякий параметр, визначивши мінімальне $\boldsymbol{a_1^r}$, найбільш правдоподібне $\boldsymbol{a_M^r}$ і максимальне $\boldsymbol{a_2^r}$ значення. Оцінки експертів подаються у вигляді трикутних нечітких чисел: $\mathbf{A_r} = (\boldsymbol{a_1^r, a_M^r, a_2^r}),\ \boldsymbol{r = \overline{1,n}}$.

Крок 2. Обчислюється середнє трикутне нечітке число $\mathbf{A}_{\mathbf{average}} = (\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_M}, \boldsymbol{m_2})$ на основі трикутних нечітких чисел усіх експертів:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{average}} = (\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_M}, \boldsymbol{m_2}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} a_1^r, \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} a_M^r, \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} a_2^r \right).$$

Потім для кожного експерта $\mathbf{E_r}$ обчислюється величина відхилення між $\mathbf{A}_{\mathbf{average}}$ і A_r, що визначається таким трикутним нечітким числом:

$$A_{average} - A_r = (m_1 - a_1^r, m_M - a_M^r, m_2 - a_2^r) =$$

$$= \left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} a_1^r - a_1^r, \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} a_M^r - a_M^r, \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} a_2^r - a_2^r \right).$$

Величина $\mathbf{A}_{\mathbf{average}} - \mathbf{A_r}$ передається експертам для аналізу.

Крок 3. Кожен експерт E_r пропонує нове трикутне число: $\mathbf{A_r} = (a_1^r, a_M^r, a_2^r),\ r = \overline{1, n}$

Починаючи з кроку 2, процес повторюється доти, доки не буде отримано таке середнє трикутне нечітке число $\mathbf{A}_{\mathbf{average}} = (\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_M}, \boldsymbol{m_2})$, параметри якого будуть досить близькими до параметрів трикутних нечітких чисел $\mathbf{A_r} = (a_1^r, a_M^r, a_2^r),\ r = \overline{1, n}$ (які визначаються, наприклад, керівником опитування).

Дефазифікація результівного трикутного нечіткого числа $\mathbf{A}_{\mathbf{average}} = (\mathbf{m_1}, \mathbf{m_M}, \mathbf{m_2})$ може бути виконана методами: центра ваги; центра площі; лівого або правого модального значення.

1. Метод центра ваги:

$$\mathbf{y} = \int_{\mathbf{Min}}^{\mathbf{Max}} \mathbf{x} \cdot \mu(\mathbf{x}) \mathbf{dx} \Bigg/ \int_{Min}^{Max} \mu(x) dx,$$

де y — результат дефазифікації; x — змінна, що відповідає вихідній лінгвістичній змінній (ЛЗ) ω; $\mu(\mathbf{x})$ — функція належності, що відповідає вихідній змінній після етапу акумуляції; $\mathbf{Min}, \mathbf{Max}$ — ліва й права точки інтервалу носія нечіткої множини розглянутої вихідної змінної ω.

2. Метод центра площі. Результат дефазифікації $\mathbf{y} = \mathbf{u}$ визначається з рівняння

$$\int_{Min}^{u} \mu(x) dx = \int_{u}^{Max} \mu(x) dx .$$

3. Метод лівого або правого модального значення. Ліве модальне значення визначається як $y = \mathbf{min}\{x_m\}$, де x_m — модальне значення (мода) НМ для вихідної змінної ω після акумуляції, що розраховується за формулою $x_m = \mathbf{arg}\max_{\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \{\mu(x)\}$. Праве модальне число визначається

як $y = max\{x_m\}$, де x_m — модальне значення (мода) для вихідної змінної нечіткої множини ω після акумуляції, яка розраховується за формулою $x_m = \arg\max_{x\in[a,b]}\{\mu(x)\}$. Для строго унімодальної нечіткої множини ліве й праве модальні значення збігаються.

Якщо трикутне нечітке число $A_{average} = (m_1, m_M, m_2)$ має симетричну відносно вертикальної осі функцію належності, то всі методи дадуть одне й те саме чітке значення, яке збігається з m_M. В іншому випадку буде отримано три різних чітких числа, з яких можна вибрати максимальне й мінімальне, унаслідок чого як найбільш правдоподібний діапазон слід вибрати інтервал $[c_{min}, c_{max}]$.

3. МЕТОДИ НЕЧІТКОГО БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ВАРІАНТІВ

Задача багатокритеріального аналізу полягає в упорядкуванні елементів множини P за критеріями із множини G. Нехай $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ – множина варіантів, які підлягають багатокритеріальному аналізу; $G = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ – множина критеріїв, за якими оцінюють варіанти.

3.1. Нечіткий багатокритеріальний аналіз варіантів за схемою Беллмана – Заде

Нехай $\mu_{G_i}(P_j)$ – число в інтервалі $[0, 1]$, відповідно до якого оцінюється варіант $P_j \in P$ за критерієм $G_i \in G$: чим більше число $\mu_{G_i}(P_j)$, тим кращий варіант P_j за критерієм G_i, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$. Тоді критерій G_i можна зобразити у вигляді нечіткої множини $\tilde{G}_i$ на універсальній множині варіантів P:

$$G_i = \left\{ \frac{\mu_{G_i}(P_1)}{P_1}, \frac{\mu_{G_i}(P_2)}{P_2}, \ldots, \frac{\mu_{G_i}(P_k)}{P_k} \right\}, \qquad (3.1)$$

де $\mu_{G_i}(P_j)$ – ступінь належності елемента P_j нечіткій множині $\tilde{G}_i$.

Ступені належності елемента нечіткій множині (3.1) зручно знаходити методом побудови функції належності на основі порівнянь парами.

Для кожної пари елементів універсальної множини експерт оцінює переважання одного елемента над іншим стосовно властивості нечіткої множини. Такі порівняння парами зручно подавати у вигляді матриці

$$A = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline x_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array},$$

де a_{ij} – рівень переважання елемента x_i над x_j $(i,\ j = \overline{1,n})$, який визначається за дев'ятибальною шкалою Сааті:

– 1, якщо переваги елемента x_i над елементом x_j немає;

– 2, якщо перевага елемента x_i над елементом x_j є майже слабкою;

– 3, якщо перевага x_i над x_j є слабкою;

– 4, якщо перевага x_i над x_j є майже суттєвою;

– 5, якщо перевага x_i над x_j є суттєвою;

– 6, якщо перевага x_i над x_j є майже явною;

– 7, якщо перевага x_i над x_j є явною;

– 8, якщо перевага x_i над x_j є майже абсолютною;

– 9, якщо перевага x_i над x_j є абсолютною.

Матриця порівнянь парами є діагональною й обернено симетричною $(a_{ji} = 1/a_{ij},\ i, j = \overline{1,n})$.

Ступені належності беруть такими, що дорівнюють відповідним координатам власного вектора $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ матриці порівнянь парами A:

$$\mu(x_1) = w_i,\ i = \overline{1,n}. \qquad (3.2)$$

Власний вектор знаходять із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} AW = \lambda_{max} W, \\ w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1, \end{cases} \qquad (3.3)$$

де λ_{max} – максимальне власне значення матриці $\mathbf{A}$.

Зауваження. Матриця порівнянь парами повинна мати властивість транзитивності, тобто $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$, однак на практиці це відбувається далеко не завжди. Щоб уникнути одержання оцінки компонентів функції належності з похибкою, застосовують процедуру корекції.

Згідно з цим методом необхідно сформувати матриці порівнянь парами варіантів за кожним критерієм. Загальна кількість таких матриць дорівнює кількості критеріїв. Найкращим варіантом буде той, який є одночасно кращим за всіма критеріями. Нечітке рішення $\tilde{D}$ визначається як перетин частинних критеріїв:

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \ldots \cap \tilde{G}_n =$$
$$= \left\{ \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(P_1)}{P_1}, \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(P_2)}{P_2}, \ldots, \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(P_k)}{P_k} \right\}. \qquad (3.4)$$

Відповідно до отриманої нечіткої множини $\tilde{D}$ найкращим слід уважати той варіант, який має найбільший ступінь належності:

$$D = \arg\max\left(\mu_D(P_1), \mu_D(P_2), \ldots, \mu_D(P_k)\right).$$

При нерівноважних критеріях ступені належності нечіткій множині $\tilde{D}$ знаходять так:

$$\mu_D(P_j) = \min_{i=\overline{1,n}} \left(\mu_{G_i}(P_j)\right)^{\alpha_i}, \quad j = \overline{1, k}, \qquad (3.5)$$

де α_i – коефіцієнт відносної важливості критерію G_i, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$.

Показник степеня α_i у формулі (3.5) концентрує нечітку множину $\tilde{G}_i$ відповідно до ступеня важливості критерію G_i. Коефіцієнти відносної важливості критеріїв можна визначити різними методами, наприклад шляхом порівняння парами за шкалою Сааті.

Приклад 3.1. Уважаючи вимоги до кандидатів на деяку вакантну посаду рівноважними критеріями, розглянемо типову для кадрової політики задачу підбору найбільш підхожої кандидатури. Припустимо, що необхідно підібрати керівника для перспективної філії фірми. Із множини претендентів після попереднього знайомства з ними відібрано п'ять кандидатів, які утворюють множину

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

де x_1 – головний інженер фірми; x_2 – головний менеджер більш дрібної філії фірми; x_3 – керівник дослідного відділу фірми; x_4 – третій заступник генерального директора фірми; x_5 – молодий, талановитий і перспективний працівник, недавній випускник вузу.

Оцінювати претендентів будемо за такою множиною із шести рівноважних критеріїв:

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\},$$

де C_1 – професійна компетентність претендента; C_2 – організаторські й комунікативні здібності; C_3 – професійний досвід подібної роботи; C_4 –

діловий авторитет серед колег і партнерів; C_5 – уміння працювати з людьми й розуміння їхньої психології; C_6 – вік претендента.

Визначивши ступінь відповідності кожного з відібраних претендентів цим критеріям, сформуємо сукупність нечітких множин, що описують їх відповідність за кожним критерієм:

$$A_{C_1} = \{(x_1;0{,}9),\ (x_2;0{,}9),\ (x_3;0{,}6),\ (x_4;0{,}8),\ (x_5;0{,}5)\};$$
$$A_{C_2} = \{(x_1;0{,}8),\ (x_2;0{,}9),\ (x_3;0{,}5),\ (x_4;0{,}7),\ (x_5;0{,}6)\};$$
$$A_{C_3} = \{(x_1;0{,}7),\ (x_2;0{,}9),\ (x_3;0{,}8),\ (x_4;0{,}5),\ (x_5;0{,}3)\};$$
$$A_{C_4} = \{(x_1;0{,}9),\ (x_2;0{,}8),\ (x_3;0{,}5),\ (x_4;0{,}6),\ (x_5;0{,}5)\};$$
$$A_{C_5} = \{(x_1;0{,}9),\ (x_2;0{,}9),\ (x_3;0{,}4),\ (x_4;0{,}7),\ (x_5;0{,}6)\};$$
$$A_{C_6} = \{(x_1;0{,}9),\ (x_2;0{,}4),\ (x_3;0{,}8),\ (x_4;0{,}7),\ (x_5;0{,}5)\}.$$

Застосовуючи правило вибору шуканої альтернативи, знайдемо перетин множин

$$\begin{aligned} D = \{&(x_1, \min(0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}9;\ 0{,}9;\ 0{,}9)),\\ &(x_2, \min(0{,}9;\ 0{,}9;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}4)),\\ &(x_3, \min(0{,}6;\ 0{,}5;\ 0{,}8;\ 0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}8)),\\ &(x_4, \min(0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}7)),\\ &(x_5, \min(0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}5))\} =\\ = \{&(x_1;0{,}7),\ (x_2;0{,}4),\ (x_3;0{,}4),\ (x_4;0{,}5),\ (x_5;0{,}3)\}. \end{aligned}$$

Таким чином, найкращою кандидатурою для вакантної посади директора філії є головний інженер фірми (тобто альтернатива x_1, оскільки значення її функції належності є найбільшим).

Приклад 3.2. Нехай завдання полягає у виборі альтернативного місця для будівництва деякого підприємства. Множину альтернатив утворюють чотири міста: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Оцінювання кожної альтернативи здійснюється за такими критеріями:

– C_1 – близькість майбутнього підприємства до споживача його продукції;

– C_2 – близькість майбутнього підприємства до джерел сировини;

– C_3 – наявність і рівень вільної робочої сили в місті.

Визначивши ступінь відповідності кожного з міст-претендентів на будівництво в них підприємства цим критеріям, сформуємо сукупність нечітких множин, що описують їх відповідність кожному з критеріїв:

$$A_{C_1} = \{(x_1;0{,}5),\ (x_2;0{,}7),\ (x_3;0{,}3),\ (x_4;0{,}6)\};$$

$$A_{C_2} = \{(x_1;0{,}5),\ (x_2;0{,}4),\ (x_3;0{,}8),\ (x_4;0{,}4)\};$$

$$A_{C_3} = \{(x_1;0{,}2),\ (x_2;0{,}1),\ (x_3;0{,}6),\ (x_4;0{,}9)\}.$$

Оскільки вибрані критерії мають різний ступінь важливості, проведемо їх порівняння парами. Результати цього порівняння подамо у вигляді матриці

$$B = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1/9 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Обчисливши власний вектор матриці B, маємо значення його компонентів: $w_1 = 0{,}06;\ w_2 = 0{,}27;\ w_3 = 0{,}67.$ Помноживши їх на кількість критеріїв, яка дорівнює трьом, одержимо величини вагових коефіцієнтів, що характеризують важливість кожного критерію:

$$\lambda_1 = 3 \cdot 0{,}06 = 0{,}18;\ \lambda_2 = 3 \cdot 0{,}27 = 0{,}81;\ \lambda_2 = 3 \cdot 0{,}67 = 2{,}01.$$

З урахуванням цих коефіцієнтів побудуємо множини $A_{C_i}^{\lambda_i}$:

$$A_{C_1}^{0,18} = \{(a_1;0{,}5^{0,18}),\ (a_2;0{,}7^{0,18}),\ (a_3;0{,}3^{0,18}),\ (a_4;0{,}6^{0,18})\} =$$

$$= \{(a_1;0{,}88),\ (a_2;0{,}94),\ (a_3;0{,}81),\ (a_4;0{,}91)\};$$

$$A_{C_2}^{0,81} = \{(a_1;0{,}57),\ (a_2;0{,}48),\ (a_3;0{,}83),\ (a_4;0{,}48)\};$$

$$A_{C_3}^{2,01} = \{(a_1;0{,}04),\ (a_2;0{,}01),\ (a_3;0{,}36),\ (a_4;0{,}81)\}.$$

Застосовуючи правило вибору шуканої альтернативи, знайдемо перетин цих множин:

$$\tilde{D} = \{(x_1;0{,}04),\ (x_2;0{,}01),\ (x_3;0{,}36),\ (x_4;0{,}48)\}.$$

Оскільки найбільшим є значення функції належності альтернативи x_4, її й доцільно вибрати як розв'язок задачі. Іншими словами, місто x_4 відповідно до заданих критеріїв і з урахуванням ступеня їх важливості є найкращим місцем для будівництва нового підприємства.

3.2. Аналіз чутливості прийнятого рішення до експертних порівнянь парами

При багатокритеріальному аналізі часто постає запитання: «Що необхідно змінити в деякій альтернативі, щоб вона стала найкращою?» Для відповіді на нього треба знати, наскільки прийняте рішення є чутливим до експертних порівнянь парами.

При зміні одного з парних порівнянь варіантів необхідно забезпечити несуперечність інших. Наприклад, змінюється a_{ij} — рівень переваги варіанта P_i над варіантом P_j. Тоді в матриці порівнянь парами необхідно змінити й елемент a_{ij}, оскільки вони зв'язані залежністю $a_{ji} = 1/a_{ij}$. Крім того, можливими є змінення значень у рівнях переваги варіанта P_i над іншими, яким відповідають елементи a_{ir} і $a_{ri} = 1/a_{ir}$ $(r = \overline{1,k};\ r \neq i, r \neq j)$ матриці порівнянь парами. Нижче розглядаються чотири ситуації, коли нове значення елемента потребує коригування елемента a_{ij} матриці порівнянь парами.

Нехай перевага варіанта P_i над P_j є сильнішою, ніж над P_r, тобто $a_{ji} > a_{jr}$. Тоді в безпосередньому порівнянні парами варіант P_i не повинен перевищувати варіант P_r, отже, $a_{ir} \leq 1$. Математично запишемо це правилом:

$$\text{якщо } a_{ji} > a_{jr}, \text{ тоді } \mathbf{a_{ir} := \min(1, a_{ir})}. \qquad (3.6)$$

Нехай перевага варіанта P_i над P_j є сильнішою, ніж перевага варіанта P_r над P_j, тобто $a_{ij} > a_{rj}$. Тоді в безпосередньому порівнянні парами варіант P_r не повинен перевищувати P_i, отже, $a_{ir} \geq 1$. Запишемо це таким правилом:

$$\text{якщо } a_{ij} > a_{rj}, \text{ тоді } a_{ir} := \max(1, a_{ir}). \qquad (3.7)$$

Нехай варіант P_i краще P_j ($a_{ij} > 1$), а варіант P_j краще P_r ($a_{jr} > 1$). Тоді варіант P_i не буде кращим за P_r, отже, $a_{ir} > 1$. При цьому a_{ir} — рівень переваги P_i над P_r, який має бути не меншим, ніж a_{ij} і a_{jr}. Запишемо це таким правилом:

$$\text{якщо } a_{ij} > 1 \text{ і } a_{jr} > 1, \text{ тоді } \mathbf{a_{ir} := \max(a_{ij}, a_{jr}, a_{ir})}. \qquad (3.8)$$

Нехай варіант P_i гірше P_j ($a_{ij} < 1$), а варіант P_j гірше P_r ($a_{jr} < 1$). Тоді варіант P_i має бути гіршим, ніж P_r, отже, $a_{ir} < 1$. При цьому a_{ri} — рівень переваги P_r над P_i, який має бути не меншим, ніж $a_{ij} = 1/a_{ji}$ і $a_{jr} = 1/a_{rj}$. Запишемо це таким правилом:

$$\text{якщо } a_{ij} < 1 \text{ і } a_{jr} < 1, \text{ тоді } a_{ir} := \min(a_{ij}, a_{jr}, a_{ir}). \qquad (3.9)$$

Нижче наводиться покрокова методика «Що – Якщо" аналізу варіантів, де використовуються правила (3.6) – (3.9).

Крок 1. Позначити варіант, що аналізується через P_i.

Крок 2. Виявити критерій, за яким можна покращити варіант P_i, і позначити цей критерій через G_U.

Крок 3. Визначити варіант, з яким зручно порівнювати варіант P_i за критерієм G_U. Позначити цей варіант-аналог через P_j.

Крок 4. Змінити за шкалою Сааті значення елемента a_{ij} у матриці порівнянь парами $A(G_U)$.

Крок 5. Розрахувати значення елемента a_{ji} у матриці порівнянь парами $A(G_U)$ за формулою $a_{ji} = 1/a_{ij}$.

Крок 6. Розрахувати значення елементів a_{ir} і a_{rj} ($r = \overline{1,k}$; $r \neq i, r \neq j$) за правилами (3.6)–(3.9).

Крок 7. Забезпечити обернену симетричність матриці $A(G_U)$.

Крок 8. Розрахувати нові ступені належності нечіткій множині G_U.

Крок 9. Провести багатокритеріальний аналіз варіантів і зафіксувати прийняте рішення.

Крок 10. Повторити кроки 4–9 для всіх можливих порівнянь парами варіантів P_i і P_j за критерієм G_U.

3.3. Багатокритеріальний вибір альтернатив при нечіткому відношенні переваги

Нехай на множині альтернатив X задано деяку сукупність із m ознак, що характеризують кожну альтернативу. Нехай інформацію про результати порівняння пар альтернатив за кожною j-ю ознакою подано у вигляді відповідного відношення переваги R_j. Спочатку будемо вважати, що всі ці відношення мають однакову важливість, тобто на множині X є m відношень переваги. На основі цієї інформації необхідно вибрати найкращу альтернативу x із множини $\{X, R_1, R_2, \ldots, R_m\}$.

Нехай відношення переваги R_j характеризуються заданими функціями корисності $f_j : X \to R$. При цьому значення кожної такої функції слід розуміти як числову оцінку альтернативи x за j-ю ознакою. Чим більшою є величина оцінки $f_j(x)$, тим більший ступінь переваги за цією ознакою має альтернатива x. Задача ж полягає в тому, щоб відшукати альтернативу, що має найбільші оцінки за всіма ознаками заданої їх сукупності.

Кожна з функцій $f_j(x)$ описує звичайне відношення переваги R_j на множині X. Кожне з цих відношень можна подати у вигляді

$$R_j = \{(x, y) | \, x, y \in X, \, f_j(x) \geq f_j(y)\}.$$

Побудуємо перетин цих відношень: $Q_1(x, y) = \bigcap_{j=1}^{m} R_j(x, y)$. Оскільки всі R_j являють собою звичайні (чіткі) відношення переваги, то функція належності має вигляд

$$\mu_j(x, y) = \begin{cases} 1, \; \textit{якщо} \; (x, y) \in R_j, \\ 0, \; \textit{якщо} \; (x, y) \notin R_j. \end{cases}$$

Тоді функція належності μ_{Q_1} перетину Q_1 цих відношень визначається формулою

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min(\mu_1(x, y), \mu_2(x, y), \ldots, \mu_m(x, y)). \tag{3.10}$$

Розглянемо більш загальний випадок, коли відношення переваги R_j мають різний ступінь важливості та їх описано нечітко.

У такому випадку згортка Q_1 початкових відношень переваги R_j з урахуванням значень вагових коефіцієнтів w_j, $j = \overline{1, m}$, причому $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$, має значення функції належності

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min(w_1 \mu_1(x, y), w_2 \mu_2(x, y), \ldots, w_m \mu_m(x, y)),$$

яке фактично являє собою функцію належності нечіткого відношення переваги.

Оскільки згортка Q_1 як деяке узагальнене відношення переваги не є, узагалі кажучи, рефлексивним і не дає змоги врахувати можливі розбіжності між значеннями відносної важливості відношень R_j, що входять у нього, то часто для розв'язання подібних задач використовується згортка Q_2 іншого вигляду:

$$\mu_{Q_2}(x,y)=\sum_{j=1}^{m} w_j\,\mu_j(x,y). \qquad (3.11)$$

Отримане відповідно до згортки Q_2 узагальнене відношення переваги $\mu_{Q_2}(x,y)$ є рефлексивним через адитивність і рефлексивність початкових відношень R_j, що входять у неї, і дає змогу одержати додаткову інформацію й тим самим звузити клас реальних виборів альтернатив.

Для розв'язання багатокритеріальної задачі раціонального вибору недомінуючих альтернатив рекомендується така процедура.

1. Побудувати нечітке відношення переваги Q_1 як перетин початкових відношень переваги R_j, $j=\overline{1,m}$. Функцію належності цього відношення визначити за формулою (3.10). Тоді множина недомінуючих альтернатив на множині (X,Q_1) матиме вигляд

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x)=1-\sup_{y\in X}\left(\mu_{Q_1}(y,x)-\mu_{Q_1}(x,y)\right). \qquad (3.12)$$

Побудувати узагальнене нечітке відношення переваги Q_2 як згортку (3.11) початкових відношень переваги R_j, $j=\overline{1,m}$ і на його основі визначити нечітку підмножину недомінуючих альтернатив на множині (X,Q_2):

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x)=1-\sup_{y\in X}\left(\mu_{Q_2}(y,x)-\mu_{Q_2}(x,y)\right). \qquad (3.13)$$

Ця функція впорядковує альтернативи за ступенем недомінування.

3. Знайти перетин отриманих нечітких множин $\mu_{Q_1}^{НД}(x)$ і $\mu_{Q_2}^{НД}(x)$:

$$\mu^{НД}(x)=\min\left(\mu_{Q_1}^{НД}(x),\ \mu_{Q_2}^{НД}(x)\right).$$

Раціональним при цьому слід уважати вибір альтернатив із множини

$$X^{НД}=\left\{x \,\middle|\, x\in X,\ \mu^{НД}(x)=\sup_{x\in X}\mu^{НД}(x')\right\}.$$

Найбільш раціональним слід уважати вибір такої альтернативи із множини $X^{НД}$, що має найбільший ступінь недомінування.

Приклад 3.3. У процесі функціонування деякої фірми надійшло досить вигідне замовлення на роботу, що трохи відрізняється від тієї, за якою фірма спеціалізується. Для прийняття рішення про можливий спосіб виконання цього замовлення керівник фірми має три альтернативні можливості:

– x_1 – навчити цій роботі одного зі своїх співробітників;

– x_2 – прийняти на роботу співробітника, що вже вміє виконувати таку роботу;

– x_3 – укласти договір з іншою організацією про виконання цієї роботи на умовах субпідряду.

У процесі підготовки й прийняття рішення стосовно вибору конкретної альтернативи керівник виходить із таких критеріїв:

1) строки виконання замовлення;

2) матеріальні витрати на його виконання;

3) якість виконання робіт.

Для простоти будемо вважати, що ці критерії – рівноважні. Кожний з цих критеріїв генерує певне відношення переваги на множині альтернативних можливостей виконання замовлення. Ці відношення будемо вважати такими:

– R_1 – альтернатива x_1 і альтернатива x_2 однакові за перевагою, а альтернатива x_3 є кращою, ніж x_2, за першим критерієм;

– R_2 – альтернатива x_1 є кращою, ніж x_2 і x_3, а альтернатива x_2 – кращою, ніж x_3, за другим критерієм;

– R_3 – альтернативи x_1 і x_2 є однаковими за перевагою, а альтернатива x_3 є кращою, ніж x_1, за третім критерієм.

На основі цих характеристик складемо матриці відношень R_1, R_2 і R_3, причому елементи матриць r_{ij}^k будемо визначати згідно з таким правилом:

$r_{ij}^k = 1$, якщо i-та альтернатива краща від j-ї за k-м критерієм;

$r_{ij}^k = 0$, якщо альтернативи однакові за перевагою або i-та альтернатива гірша від j-ї за k-м критерієм.

Отже, одержали такі матриці відношень переваги R_1, R_2 і R_3:

$$\mu_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \mu_2 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \mu_3 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Вибираючи мінімальні значення відповідного елемента кожної з матриць μ_1, μ_2 і μ_3, одержимо

$$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Знаходимо множину недомінуючих альтернатив на множині (X, Q_1) за всіма i та j $(i \neq j)$:

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_1) = 1 - \sup(\mu_{Q_1}(x_2, x_1) - \mu_{Q_1}(x_1, x_2);$$
$$\mu_{Q_1}(x_3, x_1) - \mu_{Q_1}(x_1, x_3)) = 1 - \sup(0 - 1;\ 0 - 0) = 1;$$
$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_2) = 1 - \sup(\mu_{Q_1}(x_1, x_2) - \mu_{Q_1}(x_2, x_1);$$
$$\mu_{Q_1}(x_3, x_2) - \mu_{Q_1}(x_2, x_3)) = 1 - \sup(1 - 0;\ 0 - 0) = 0;$$
$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_3) = 1 - \sup(\mu_{Q_1}(x_1, x_3) - \mu_{Q_1}(x_3, x_1);$$
$$\mu_{Q_1}(x_2, x_3) - \mu_{Q_1}(x_3, x_2)) = 1 - \sup(0 - 0;\ 0 - 0) = 1.$$

Таким чином, множина недомінуючих альтернатив за узагальненим відношенням переваги Q_1 має вигляд

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \{1 \quad 0 \quad 1\} \end{array}.$$

Тепер побудуємо відношення переваги Q_2 за формулою (3.11). Оскільки $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$, то

$$\mu_{Q_2}(x_1, x_1) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1;\ \mu_{Q_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1;$$

$$\mu_{Q_2}(x_1, x_3) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{3};\ \mu_{Q_2}(x_2, x_1) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 1) = \frac{2}{3};$$

$$\mu_{Q_2}(x_2, x_2) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1;\ \mu_{Q_2}(x_2, x_3) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{3};$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_1) = \frac{1}{3}(0 + 0 + 1) = \frac{1}{3};\ \mu_{Q_2}(x_3, x_2) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{3};$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_3) = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1.$$

Таким чином, матриця функції належності узагальненого нечіткого відношення Q_2 набуває вигляду

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Тепер знайдемо підмножину недомінуючих альтернатив множини (X, Q_2) за всіма i та j $(i \neq j)$ за формулою (3.13):

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x_1) = 1 - \sup(\mu_{Q_2}(x_2, x_1) - \mu_{Q_2}(x_1, x_2);$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_1) - \mu_{Q_2}(x_1, x_3)) = 1 - \sup\left(\frac{2}{3} - 1; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1;$$

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x_2) = 1 - \sup(\mu_{Q_2}(x_1, x_2) - \mu_{Q_2}(x_2, x_1);$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_2) - \mu_{Q_2}(x_2, x_3)) = 1 - \sup\left(1 - \frac{2}{3}; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3};$$

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x_3) = 1 - \sup(\mu_{Q_2}(x_1, x_3) - \mu_{Q_2}(x_3, x_1);$$

$$\mu_{Q_2}(x_2, x_3) - \mu_{Q_2}(x_3, x_2)) = 1 - \sup\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1.$$

Отже, множина недомінуючих альтернатив за узагальненим відношенням переваги Q_2 набуває вигляду

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \{1 \quad 0 \quad 1\} \end{array}.$$

Побудуємо результівну множину недомінуючих альтернатив як перетин множин $\mu_{Q_1}^{НД}(x)$ і $\mu_{Q_2}^{НД}(x)$:

$$\mu^{НД}(x) = \mu_{Q_1}^{НД}(x) \cap \mu_{Q_2}^{НД}(x) = \{(1\ 0\ 1)\} \cap \{(1\ 0\ 1)\} = \{(1\ 0\ 1)\}.$$

Таким чином, для керівника фірми в цій задачі однаково раціональним буде вибрати альтернативу x_1, тобто навчити відповідній роботі одного зі своїх співробітників, і альтернативу x_3, тобто укласти договір з якоюсь спеціалізованою організацією про виконання цієї роботи на умовах субпідряду.

3.4. Прийняття рішень при якісній невизначеності на основі нечіткого опису стану системи та наслідків

Нехай є множина альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, вибір однієї з них залежить від станів середовища $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Відомо, якщо система перебувала в стані x_j і вибрано альтернативу a_i, то її корисністю буде u_{ij}. Для різних альтернатив і можливих станів маємо матрицю $m \times n$:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & ... & u_{1n} \\ & ... & \\ u_{m1} & ... & u_{mn} \end{bmatrix}.$$

При відомому стані системи $x_j \in X$ кращою є альтернатива, що має найбільшу корисність: $u_0 = \max\limits_{i=\overline{1,m}} u_{ij}$. Однак, якщо стан системи або корисність альтернатив відомі нечітко, то оптимальну альтернативу можна подати тільки у вигляді нечіткої множини $\tilde{A}_0$ з функцією належності $\mu_{\tilde{A}_0}(a_i)$. Тут можливими є три випадки.

1. Нечіткий стан системи. Нехай стан системи описується нечіткою множиною

$$\tilde{X} = \bigcup_k \mu_{\tilde{X}}(x_k) / x_k, \;\; x_k \in X.$$

У цьому випадку корисність альтернативи не можна визначити точно. Однак, скориставшись інформацією про стан системи, корисність можна подати у вигляді

$$\tilde{U}_i = \bigcup_k \mu_{\tilde{U}_i}(u_k) / u_k, \qquad (3.14)$$

де $u_k = u_{ik}$; $\mu_{\tilde{U}_i}(u_k) = \mu_{\tilde{X}}(x_k)$.

Тут і далі передбачається, якщо деякий елемент області визначення під час обчислень з'являється k разів з різними значеннями функції належності $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$, то ступінь його належності $\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_k$, де $\mu_1 + \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2$.

Вибір оптимальної альтернативи ґрунтується на розгляді максимальної корисності альтернативи і ступеня належності їй різних значень корисності.

Максимізувальною множиною функції f на множині Y називають нечітку множину $M(f)$, таку, що ступінь належності якій деякого y характеризує близькість $f(y)$ до $\sup f$. Аналогічно максимізувальною множиною $M(Y)$ множини Y називають нечітку підмножину, ступінь належності якій для $y \in Y$ відображає в деякому розумінні близькість y до $\sup Y$.

Розглянемо множину Y, що містить усі можливі значення корисності для заданого нечіткого стану: $Y = \bigcup_{i=1}^{m} S(U_i)$. Визначимо максимізувальну множину для альтернативи $a_i \in A$:

$$\tilde{U}_{im} = \bigcup_{k} \mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k) / u_k ,$$

де $\mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k) = (u_k : u_{\max})^n;\ u_{\max} = \sup Y$; n – ціле число, вибране залежно від задачі.

Далі визначимо множину $\tilde{U}_{i0}$ як перетин нечітких множин $\tilde{U}_{im}$ і $\tilde{U}_i$:

$$\mu_{\tilde{U}_{i0}}(u_k) = \min\left(\mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k), \mu_{\tilde{U}_i}(u_k)\right) .$$

Множину, що являє собою оптимальну альтернативу, знаходимо таким чином: $\mu_{\tilde{A}_0}(a_i) = \max\limits_{k} \mu_{\tilde{U}_{i0}}(u_k)$. Очевидно, що кращою буде альтернатива a_0, яка має найбільше значення функції належності множини $\tilde{A}_0$: $\mu_{\tilde{A}_0}(a_0) = \max\limits_{i} \mu_{\tilde{A}_0}(a_i)$.

2. Нечіткі корисності. Нехай тепер корисність U_{ij}, що пов'язана з альтернативою a_i при стані x_j, є нечіткою:

$$\tilde{U}_{ij} = \bigcup_{k} \mu_{U_{ij}}(u_k) / u_k . \qquad (3.15)$$

Тоді матриця корисностей матиме вигляд

$$U = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & \dots & \tilde{U}_{1n} \\ & \dots & \\ \tilde{U}_{m1} & \dots & \tilde{U}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Якщо відомо стан системи $\boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{X}$, то визначення оптимальної альтернативи є аналогічним попередньому випадку: якщо $\boldsymbol{x}_j$ чітке, то множина $\tilde{\boldsymbol{U}}_i$ визначається рівністю $\tilde{\boldsymbol{U}}_i = \tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}$.

3. Нечіткі корисності та стан системи. Нечітка корисність альтернативи $\boldsymbol{a}_i$ при деякому нечіткому стані системи, яку позначено через $\tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_i$, має вигляд

$$\tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_i = \bigcup_k \mu_{\tilde{U}_i^*}(\tilde{\boldsymbol{U}}_k) / \tilde{\boldsymbol{U}}_k, \tag{3.16}$$

де $\tilde{\boldsymbol{U}}_k = \tilde{\boldsymbol{U}}_{ik}$; $\mu_{\tilde{U}_i^*}(\tilde{\boldsymbol{U}}_k) = \mu_{\tilde{X}}(\boldsymbol{x}_k)$.

Нечітка множина $\tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_i$ складається, своєю чергою, з нечітких множин. Вона може бути зведена до нечіткої множини на чітких значеннях корисностей. Якщо елементом множини $\tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_i$ є

$$\mu_{\tilde{U}_i^*}(\tilde{\boldsymbol{U}}_k) / \tilde{\boldsymbol{U}}_k = \mu_{\tilde{U}_i^*}\left(\mu_{\tilde{U}_{ik}}(\boldsymbol{u}_1) / \boldsymbol{u}_1\right) \Big/ \left(\mu_{U_k}(\boldsymbol{u}_1) / \boldsymbol{u}_1\right),$$

то значення ступеня належності чіткого значення $\boldsymbol{u}_1$ множині $\tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_i$ визначається формулою

$$\mu_{\tilde{U}_i^*}(\boldsymbol{u}_1) = \mathbf{min}\left(\mu_{\tilde{X}}(\boldsymbol{x}_k), \mu_{\tilde{U}_{ik}}(\boldsymbol{u}_1)\right). \tag{3.17}$$

Ця процедура повторюється для всіх $\boldsymbol{k}$, після чого множина $\tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_i$ буде містити корисності $\boldsymbol{u}_1$ та їх ступені належності, тобто буде зведена до множини $\tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_{ir}$:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_{ir} = \mu_{\tilde{U}_{ir}^*}(\boldsymbol{u}_1) / \boldsymbol{u}_1. \tag{3.18}$$

Потім для $\tilde{\boldsymbol{U}}_i = \tilde{\boldsymbol{U}}^*{}_{ir}$ повторюється вже описана процедура знаходження нечіткої множини $\tilde{\boldsymbol{A}}_0$ кращої альтернативи.

Приклад 3.4. Нехай є множина альтернатив $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, а система може перебувати в одному зі станів $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{10}\}$. Стан системи задано так:

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \{\mathbf{0{,}4}/\boldsymbol{x}_3;\ \mathbf{1{,}0}/\boldsymbol{x}_5;\ \mathbf{0{,}7}/\boldsymbol{x}_6;\ \mathbf{0{,}3}/\boldsymbol{x}_7\}.$$

Матриця корисностей має вигляд

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{x}_5 & \boldsymbol{x}_6 & \boldsymbol{x}_7 & \boldsymbol{x}_8 & \boldsymbol{x}_9 & \boldsymbol{x}_{10} \end{array} \\ \boldsymbol{U} = \begin{array}{c} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 7 & 2 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 8 & 1 & 7 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{array}$$

За формулою (3.16) визначимо нечіткі корисності альтернатив при заданому стані системи:

$$\tilde{U}_1 = \{0,4/2;\ 0,8/2;\ 1,0/3;\ 0,7/1;\ 0,3/7\} =$$
$$= \{(0,4 + 0,8 - 0,4 \cdot 0,8)/2;\ 1,0/3;\ 0,7/1;\ 0,3/7\} =$$
$$= \{0,88/2;\ 1,0/3;\ 0,7/1;\ 0,3/7\};$$
$$\tilde{U}_2 = \{0,4/7;\ 0,8/8;\ 1,0/1;\ 0,7/7;\ 0,3/6\} =$$
$$= \{0,82/7;\ 0,8/8;\ 1,0/1;\ 0,3/6\};$$
$$\tilde{U}_3 = \{0,4/3;\ 0,8/4;\ 1,0/5;\ 0,7/6;\ 0,3/8\}.$$

Знайдемо множину Y:

$$Y = S(U_1) \cup S(U_2) \cup S(U_3) =$$
$$= \{2,\ 3,\ 1,\ 7\} \cup \{7,\ 8,\ 1,\ 6\} \cup \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}.$$

Визначимо максимізувальні множини. Нехай $n = 1$, $u_{max} = 8$, тоді

$$\tilde{U}_{1m} = \left\{ \frac{2/8}{2};\ \frac{3/8}{3};\ \frac{1/8}{1};\ \frac{7/8}{7} \right\} = \{0,25/2;\ 0,375/3;\ 0,125/1;\ 0,875/7\};$$
$$\tilde{U}_{2m} = \{0,875/7;\ 1/8;\ 0,125/1;\ 0,75/6\};$$
$$\tilde{U}_{3m} = \{0,375/3;\ 0,5/4;\ 0,625/5;\ 0,75/6;\ 1,8/8\}.$$

Знайдемо оптимізувальні множини $\tilde{U}_{i0}$:

$$\tilde{U}_{10} = \{\min(0,25;0,88)/2;\ \min(0,375;1,0)/3;$$
$$\min(0,125;0,7)/1;\ \min(0,875;0,3)/7\} =$$
$$= \{0,25/2;\ 0,375/3;\ 0,125/1;\ 0,3/7\};$$
$$\tilde{U}_{20} = \{0,82/7;\ 0,8/8;\ 0,125/1;\ 0,3/6\};$$
$$\tilde{U}_{30} = \{0,375/3;\ 0,5/4;\ 0,625/5;\ 0,7/6;\ 0,3/8\}.$$

Визначимо нечітку множину, що характеризує оптимальну альтернативу $\tilde{A}_0$:

$$\mu_{\tilde{A}_0}(a_1) = \max(0,25;\ 0,375;\ 0,125;\ 0,3) = 0,375;$$
$$\mu_{\tilde{A}_0}(a_2) = 0,82;\ \mu_{\tilde{A}_0}(a_3) = 0,7,$$
$$\tilde{A}_0 = \{0,375/a_1;\ 0,82/a_2;\ 0,7/a_3\}.$$

Таким чином, кращою є альтернатива a_2.

Приклад 3.5. Нехай множина альтернатив A і множина станів X – такі самі, що й у прикладі 3.3, а матриця корисностей має вигляд

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array} \\
U = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{bmatrix} OB & B & H & H & C & OH & B & OB & OB & C \\ H & OH & B & OB & OH & B & B & C & C & OB \\ B & C & H & C & C & B & OB & C & H & H \end{bmatrix},
\end{array}
$$

де корисності задано лінгвістичними нечіткими множинами:

– низька: $H = \{0,4/1;\ 1,0/2;\ 0,5/3\}$;

– дуже низька: $ДН = \{1,0/1;\ 0,4/2\}$;

– середня: $C = \{0,4/3;\ 0,7/4;\ 1,0/5;\ 0,7/6;\ 0,4/7\}$;

– висока: $B = \{0,5/7;\ 1,0/8;\ 0,5/9\}$;

– дуже висока: $ДВ = \{0,5/9;\ 1,0/10\}$.

Відомо стан системи x_9. Знайдемо нечіткі корисності для різних альтернатив при цьому стані системи:

$$\tilde{U}_1 = OB = \{0,5/9;\ 1,0/10\};$$

$$\tilde{U}_2 = C = \{0,4/3;\ 0,7/4;\ 1,0/5;\ 0,7/6;\ 0,4/7\};$$

$$\tilde{U}_3 = H = \{0,4/1;\ 1,0/2;\ 0,5/3\}.$$

Визначимо множину Y:

$$Y = \{9;\ 10\} \cup \{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\} \cup \{1;\ 2;\ 3\} = \{1;2;3;4;5;6;7;9;10\}.$$

Отже, $u_{\max} = 10$. Поклавши $n = 1$, знайдемо максимізувальні множини:

$$\tilde{U}_{1m} = \left\{\frac{9/10}{9};\ \frac{10/10}{10}\right\} = \{0,9/9;\ 1/10\};$$

$$\tilde{U}_{2m} = \{0,3/3;\ 0,4/4;\ 0,5/5;\ 0,6/6;\ 0,7/7\};$$

$$\tilde{U}_{3m} = \{0,1/1;\ 0,2/2;\ 0,3/3\},$$

а також відповідні оптимізувальні множини:

$$\tilde{U}_{10} = \{\min(0,5;0,9)/9;\ \min(1,0;1,0)/10\} = \{0,5/9;\ 1,0/1,0\};$$

$$\tilde{U}_{20} = \{0,3/3;\ 0,4/4;\ 0,5/5;\ 0,6/6;\ 0,4/7\};$$

$$\tilde{U}_{30} = \{0,1/1;\ 0,2/2;\ 0,3/3\}.$$

У цьому випадку нечітка множина, що характеризує кращу альтернативу, визначається таким чином:

$$\mu_{\tilde{A}_0}(a_1) = \max(0{,}5;\ 1{,}0) = 1{,}0;$$

$$\mu_{\tilde{A}_0}(a_2) = 0{,}6;\ \mu_{\tilde{A}_0}(a_3) = 0{,}3,\ \tilde{A}_0 = \{1{,}0/a_1;\ 0{,}6/a_2;\ 0{,}3/a_3\}.$$

Звідси випливає, що кращою є альтернатива a_1, яка має найбільше значення функції належності.

3.5. Багатокритеріальний вибір альтернатив на основі адитивної згортки

Нехай необхідно упорядкувати m альтернатив, які оцінюються за n критеріям: $a_1, a_2, ..., a_m$. Відповідну оцінку позначимо $R_{ij}, i = 1,...,m$. Відносна важливість кожного критерію задається коефіцієнтом $W_j, j = 1,...,n$. У цьому випадку зважена оцінка j-ї альтернативи обчислюється за формулою

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j R_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$$

або, якщо оцінки є нормованими,

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} w_j R_{ij}.$$

Розглянемо розрахунок R_i, коли оцінки альтернатив за критеріями й коефіцієнти відносної важливості задаються функціями належності відповідно $\mu_{R_{ij}}(r_{ij})$ і $\mu_{W_j}(w_j)$, де $r_{ij}, w_i \in R$.

Оскільки в цьому випадку R_{ij} і W_j є нечіткими числами, R_i визначається на основі принципу узагальнення. Бінарну операцію * (у цьому випадку це операція додавання або множення) можна узагальнити на випадок нечітких чисел (наприклад, X і Y задаються функціями належності $\mu_X(x)$ і $\mu_Y(y)$ відповідно).

Результат узагальненої операції * — нечітке число Z, визначається функцією належності

$$\mu_Z(z) = \sup_{z = x * y} \min(\mu_x(x),\ \mu_y(y)). \tag{3.19}$$

Інший спосіб обчислення R_i може бути використаний у разі, коли R_{ij} і W_j задано функціями належності трикутного вигляду (рис. 3.1).

Визначимо ліву $\boldsymbol{X'}$ і праву $\boldsymbol{X''}$ межі нечіткого числа $\boldsymbol{X}$, а також його вершину $\boldsymbol{X^*}$:

$$\forall\delta: \mu(\boldsymbol{X'}) = \mathbf{0};\ \mu(\boldsymbol{X'} - \delta) = \mathbf{0};\ \mu(\boldsymbol{X'} + \delta) \neq \mathbf{0}; \tag{3.20}$$

$$\forall\delta: \mu(\boldsymbol{X''}) = \mathbf{0};\ \mu(\boldsymbol{X''} - \delta) = \mathbf{0};\ \mu(\boldsymbol{X''} + \delta) \neq \mathbf{0};\ \mu(\boldsymbol{X^*}) = \mathbf{1}. \tag{3.21}$$

Графіки функцій належності критеріальних і зважених оцінок, коефіцієнтів ваги для випадку двох альтернатив наведено на рис. 3.2–3.5.

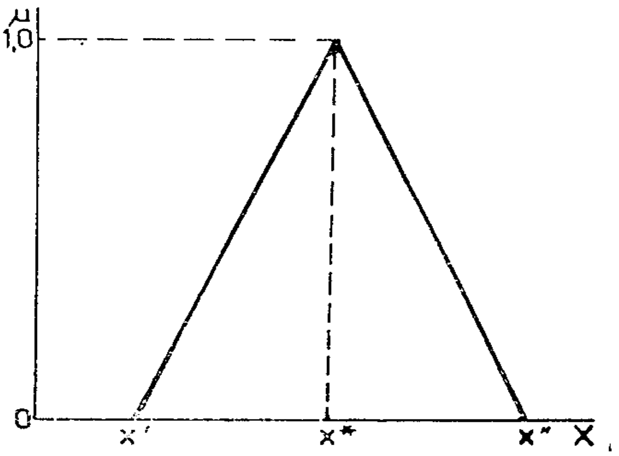

Рис. 3.1. Межі й вершина нечіткого числа

Рис. 3.2. Функції належності критеріальних оцінок для випадку двох альтернатив

Рис. 3.3. Функції належності коефіцієнтів ваги $\boldsymbol{W_1}, \boldsymbol{W_2}$

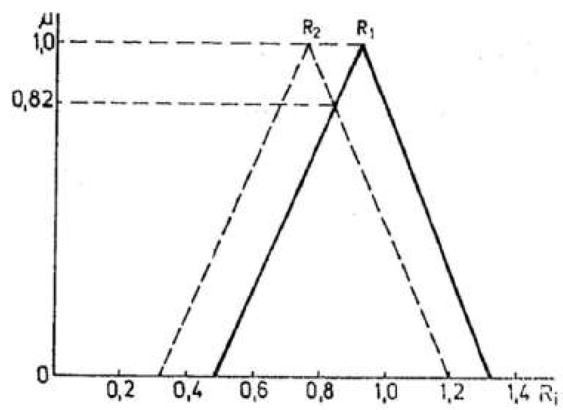

Рис. 3.4. Функції належності зважених оцінок

Можна довести, що нечітке число $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X^*Y}$ також визначається функцією належності трикутного вигляду, а межі й вершину можна знайти таким чином:

$$\boldsymbol{Z'} = \boldsymbol{X'} * \boldsymbol{Y'},\ \boldsymbol{Z''} = \boldsymbol{X''} * \boldsymbol{Y''},\ \boldsymbol{Z^*} = \boldsymbol{X^*} * \boldsymbol{Y^*}. \tag{3.22}$$

Після того як зважені оцінки R_i отримано, необхідно порівняти альтернативи на їх основі. Для цього вводиться нечітка множина I, задана на множині індексів альтернативв $\{1,2,...t\}$, і значення відповідної функції належності інтерпретується як характеристика ступеня того, наскільки альтернатива a_i є кращою. Значення $\mu_i(i)$ розраховується за формулою

$$\mu_i(i) = \sup_{r_1, r_2, ..., r_m; r_i \geq r_j; V_j} \min_{j=\overline{1,n}} \mu_{R_j}(r_j), \qquad (3.23)$$

і, як неважко бачити, дорівнює ординаті точки перетину зваженої оцінки альтернативи й оцінки найкращої альтернативи. Результати ранжування альтернатив наведено в табл. 3.1.

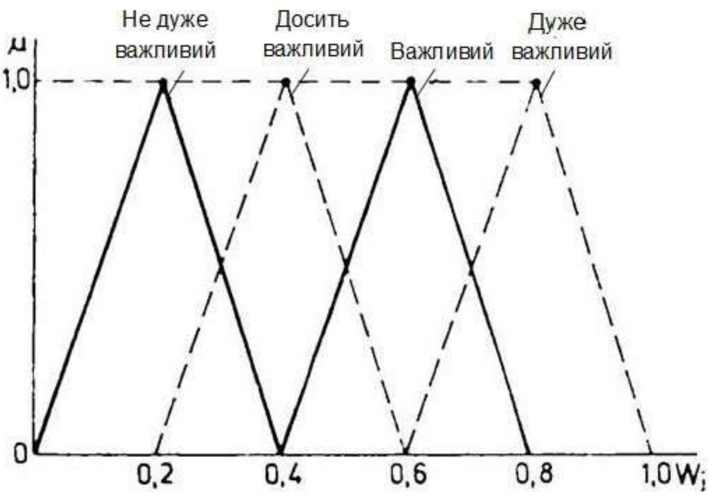

Рис. 3.5 Функції належності коефіцієнтів важливості W_1, W_2, W_3, W_4

Таблиця 3.1

Ранжування альтернатив з урахуванням критеріїв

Критерій	Альтернатива	
	1	2
1	Добре	Задовільно
2	Задовільно	Добре

Приклад 3.6. Розглянемо приклад застосування методу адитивної згортки для розв'язання задачі щодо вибору деякою фірмою, що виробляє побутову техніку, стратегії розширення своєї частки на ринку.

Спочатку визначаються альтернативи – можливі стратегії поведінки фірми.

Стратегія a_1 — зниження ціни. Це можливо в тому випадку, коли фірма має деяку перевагу перед конкурентами або може забезпечити зниження собівартості продукції. Однак реалізація цієї стратегії може спричинити цінову конкуренцію, що само по собі є досить небезпечним.

Стратегія a_2 — модифікація наявного продукту. Ця стратегія потребує додаткових витрат на переналагодження виробництва, але при цьому забезпечує деяке підвищення якості продукції. Реалізація такої стратегії може привернути нових покупців, сприяючи новому перерозподілу часток ринку між фірмами. Конкуренція в цьому випадку не є ціновою і настільки сильною.

Стратегія a_3 — розроблення нового продукту. Ця стратегія потребує додаткових і значних витрат, але в разі успіху дає змогу випередити конкурентів у технологічному розвитку і деякий час бути монополістом на ринку.

Стратегія a_4 — пошук нових ринків збуту. У цьому випадку фірма шляхом пошуку нових ринків і входження на них може збільшити обсяг продажів, але це не приведе до перерозподілу старого ринку. При такій стратегії також є досить велика ймовірність виникнення сильної конкурентної боротьби і збільшення витрат на маркетингові дослідження й нові виробничі потужності.

Щоб оцінити альтернативи, визначимо такі критерії: c_1 — витрати на розширення виробництва; c_2 — час реалізації проекту; c_3 — витрати на маркетингові дослідження; c_4 — управлінські витрати; c_5 — ризик від втрат; c_6 — термін окупності; c_7 — якість продукції; c_8 — вартість продукції.

Для оцінювання відносної важливості критеріїв використовується лінгвістична змінна W = {майже не важливий; не дуже важливий; досить важливий; важливий; дуже важливий}. Значення термів множини задано нечіткими числами, які мають трикутний вигляд функцій належності (рис. 3.6).

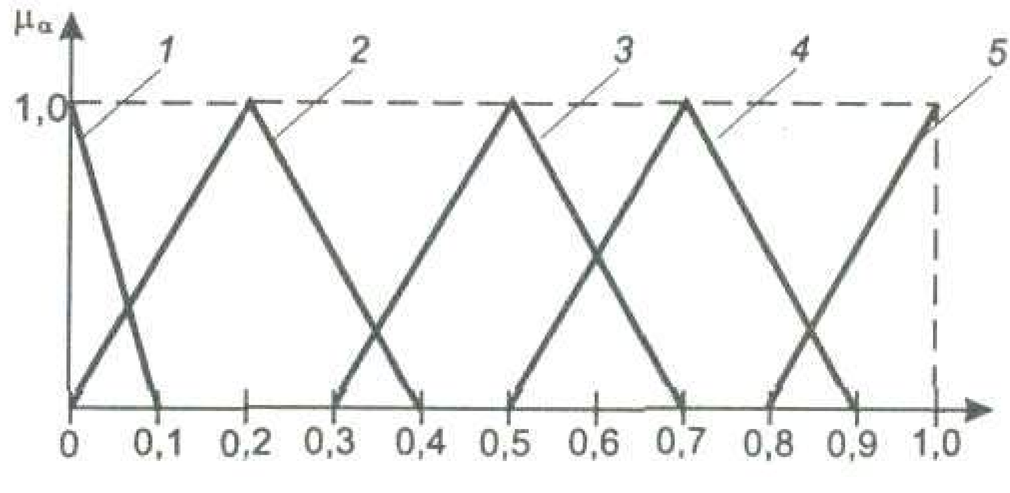

Рис. 3.6. Функції належності термів важливості критеріїв:
1 – практично неважливі; 2 – не дуже важливий; 3 – досить важливий;
4 – важливий; 5 – дуже важливий

Критерії отримали такі лінгвістичні оцінки відносної важливості: $a = \{a_{c_1}$ = важливий; a_{c_2} = досить важливий; a_{c_3} = не дуже важливий; a_{c_4} = важливий; a_{c_5} = не дуже важливий; a_{c_6} = досить важливий; a_{c_7} = важливий; a_{c_8} = не дуже важливий $\}$.

Альтернативи за критеріями оцінюються з використанням лінгвістичної змінної S ="задовільність" = { украй низька; низька; середня; висока; дуже висока}. Функції належності термів мають такий вигляд:

украй низька = {1,0/0,0; 0,0/0,0};
низька = {0,0/0,0; 1,0/0,2; 0,0/0,4};
середня = {0,0/0,3; 1,0/0,5; 0,0/0,7};
висока = {0,0/0,6; 1,0/0,8; 0,0/1,0};
дуже висока = {0,0/0,8; 1,0/1,0}.

У табл. 3.2 наведено оцінки розглянутих альтернатив.

Таблиця 3.2

Оцінки задовільності альтернатив відносно критеріїв

Критерій	Оцінка альтернативи			
	a_1	a_2	a_3	a_4
c_1	Середня	Середня	Низька	Украй низька
c_2	Висока	Висока	Середня	Низька
c_3	Висока	Висока	Низька	Украй низька
c_4	Висока	Низька	Низька	Середня
c_5	Низька	Дуже висока	Висока	Середня
c_6	Середня	Середня	Висока	Висока
c_7	Висока	Низька	Низька	Середня
c_8	Висока	Середня	Середня	Середня

Адитивна згортка поданої інформації дала такий результат:

$$\mu_J(j) = \left\{ \frac{1}{a_1}, \frac{0,75}{a_2}, \frac{0,68}{a_3}, \frac{0,58}{a_4} \right\},$$

що дає змогу вважати кращою альтернативою стратегію щодо зниження ціни a_1.

3.6. Багатокритеріальний вибір альтернатив з використанням правила нечіткого висновку

Нехай U — множина елементів, A — її нечітка підмножина, ступенем належності елементів якої є число з одиничного інтервалу $[0,1]$. Підмножини L є значеннями лінгвістичної змінної A'.

Нехай множина рішень характеризується набором критеріїв $X_1, X_2, ..., X_p$, тобто лінгвістичних змінних на базових множинах $U_1, U_2, ..., U_p$ відповідно. Наприклад, змінна X_1 «Квартирна плата» може мати значення «низька», а змінна X_2 «Розташування квартири» — значення «хороше» і т. ін. Набір з декількох критеріїв з відповідними значеннями характеризує ставлення ОПР щодо задовільності (прийнятності) рішення. Змінна S «Задовільність» також є лінгвістичною. Приклад висловлювання: d_1: «Якщо X_1 = низька і X_2 = хороше, то S = висока».

У загальному випадку висловлювання d_i має вигляд

$$d_i : \text{«Якщо } X_1 = A_{1i} \text{ і } X_2 = A_{2i} \text{ і } \ldots\ X_p = A_{pi}\text{, то } S = B_i\text{».} \tag{3.24}$$

Позначимо перетин $(X = A_{1i} \bigcap X_2 = A_{2i} \bigcap X_p = A_{pi})$ через $X = A_i$. Операції перетину нечітких множин відповідає знаходження мінімуму їх функцій належності:

$$\mu_{A_i}(V) = \min_{v \in V} \left(\mu_{A_{i1}}(u_1), \mu_{A_{i2}}(u_2), ..., \mu_{A_{ip}}(u_p)\right), \tag{3.25}$$

де $V = U_1 \times U_2 \times ... \times U_p$; $v = (u_1, u_2, ..., u_p)$; $\mu_{A_i}(u_j)$ — значення належності елемента u_j нечіткій множині A_{ij}. Тоді (3.23) можна записати у вигляді

$$d_i : \text{«Якщо } X = A_i\text{, то } S = B_i\text{».} \tag{3.26}$$

Для надання спільності міркуванням позначимо базову множину U або V через W. Тоді A_i — нечітка підмножина W, у той час як B_i — нечітка підмножина одиничного інтервалу I.

Імплікація нечітких множин (3.26) виражається таким чином:

$$\mu_H(w, i) = \min_{w \in W} \left(1, (1 - \mu_A(w), + \mu_B(i))\right), \tag{3.27}$$

де H — нечітка підмножина на $W \times I, w \in W, i \in I$. Аналогічним чином висловлення $d_1, d_2, ..., d_q$ перетворюються на множини $H_1, H_2, ..., H_q$. Їх об'єднанням є множина D

$$D = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_q, \tag{3.28}$$

і для кожного $(w, i) \in W \times I$

$$\mu_D(w, i) = \min_{w \in W} \left(\mu_{H_j}(w, i)\right), \ j = \overline{1, q}. \tag{3.29}$$

Далі опишемо метод вибору альтернатив, кожна з яких описується нечіткою підмножиною C із W. Задовільна альтернатива знаходиться на основі композиційного правила висновку:

$$G = C \circ D, \tag{3.30}$$

де G — нечітка підмножина інтервалу I. Тоді

$$\mu_G(i) = \max_{w \in W} \left(\min(\mu_C(w), \mu_D(w, i)\right). \tag{3.31}$$

Порівняння альтернатив відбувається на основі точкових оцінок. Для нечіткої множини A з I визначимо α — рівневу множину $(\alpha \in [0,1])$:

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha,\ x \in I\}. \qquad (3.32)$$

Для кожного A_α можна обчислити середню кількість елементів $M(A_\alpha)$:

– для множини з n елементів

$$M(A_\alpha) = \sum_{x_i \in A_\alpha} \frac{x_i}{n};$$

– для $A_\alpha = \{a \leq x \leq b\}$

$$M(A) = \frac{a+b}{2};$$

– для $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq 1$; $A_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i \leq x \leq b_i\}$

$$M(A_\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + b_i}{2}(b_i - a_i)}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}.$$

Тоді точкове значення для множини A

$$F(A) = \frac{1}{\alpha_{max}} \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha) d\alpha, \qquad (3.33)$$

де α_{max} — значення, при якому A має максимум.

При виборі альтернатив для кожної з них обчислюється відповідна точкова оцінка. Кращою вважається альтернатива з найбільшим її значенням.

3.7. Вибір рішень при ймовірнісній невизначеності в умовах неточності й невизначеності опису наслідків

Розглянемо метод аналізу рішень у випадку, коли наслідки альтернатив є відомими неточно та ймовірності їх настання оцінюються з допомогою функції належності. На рис. 3.7 зображено просте дерево рішень. Необхідно вибрати одне із двох рішень, які описуються стратегіями A і B і залежать від різних випадкових подій. При виборі стратегії A рішення, що має корисність u_1, досягається з імовірністю p, а рішення з корисністю u_2 – з імовірністю $1-p$. Використовуючи правила теорії сподіваної корисності, цю стратегію вибирають тоді й тільки тоді, коли $pu_1 + (1-p)u_2 > qv_1 + (1-q)v_2$. Тут величина й ступінь переваги однієї альтернативи над іншою є точно невідомими.

Нехай $\mu_A(a)$, $\mu_B(b)$ – ступені належності a і b множинам сподіваних корисностей стратегій A і B, тоді відповідно до принципу узагальнення

$$\mu_A(a) = \max_{pu_1+(1-p)u_2} (\min(\mu_P(p), \mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2))); \qquad (3.34)$$

$$\mu_B(b) = \max_{qv_1+(1-q)v_2} (\min(\mu_Q(q), \mu_{B_1}(V_1), \mu_{B_2}(V_2))), \qquad (3.35)$$

де $\mu_P(p)$ – ступінь належності p множині можливих значень для цієї ймовірності. Розподіли сподіваної корисності для кожної стратегії, обчислені за формулами (3.34) і (3.35), зображено на рис. 3.8. Спостерігається значне перекриття між двома розподілами, і хоча максимуму функція $\mu_A(x)$ набуває при більшому значенні x, ніж функція $\mu_B(x)$, цього недостатньо для твердження, що A краще, ніж B.

Щоб оцінити ступінь, з яким A має перевагу над **B**, скористаємося таким методом:

$$\mu(X \to Y) = \mu(-X \cup Y) = \max(1-\mu(X), \mu(Y)). \qquad (3.36)$$

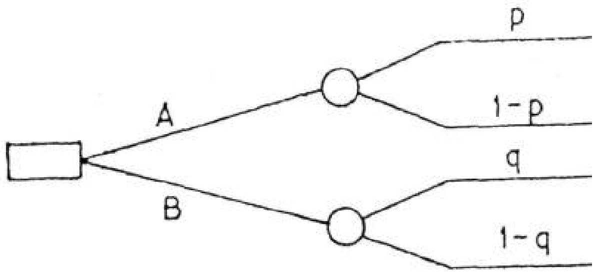

Рис. 3.7. Просте дерево рішень

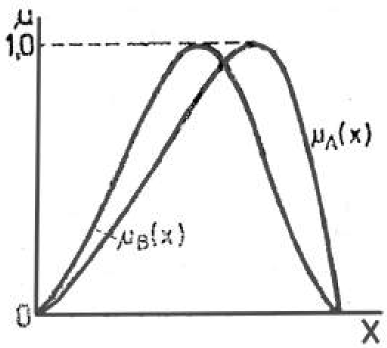

Рис. 3.8. Нечіткий розподіл функції корисності

Як бачимо, ступінь, з яким з деякого нечіткого вислову X випливає інший нечіткий вислів Y, є ступенем істинності вислову «або не X, або Y», що, своєю чергою, дорівнює більшому зі значень ступеня істинності «не X» і ступеня істинності «Y». У більш загальній постановці X і Y є нечіткими відношеннями між двома змінними a і b, які подано функціями належності $\mu_X(a,b)$ і $\mu_Y(a,b)$:

$$\mu(X \to Y) = \min_{a,b}(\max(1-\mu_X(a,b), \mu_Y(a,b))). \qquad (3.37)$$

Це означення змісту нечіткого вислову не є єдино можливим, але є достатньо ефективним для розглядуваних цілей.

Приклад 3.6. За даними геологорозвідки знайдено родовище, яке можливо буде мати промислове значення (тобто точних даних немає). Необхідно вирішити, розробляти його чи ні. Якщо виявиться, що родовище не матиме промислового значення, то будуть витрачені кошти, втрачено час і завдано екологічної шкоди і т. ін.

Корисності в цій задачі є відомими і чітко структурованими. Сподівані корисності для двох альтернатив (розробляти чи ні):

$$u_S(p_1, p_2) = p_1(10p_2 - 25(1 - p_2)); \tag{3.38}$$

$$u_N(p_1, p_2) = p_1(-30) + 2(1 - p_1), \tag{3.39}$$

де p_1 — імовірність того, що родовище промислове; p_2 — імовірність того, що його розроблятимуть.

Основною є ймовірність p_1, але вона інтуїтивно вважається менш надійною, оскільки ймовірність успішного розроблення родовища p_2 можна уточнити шляхом конкретних досліджень, а p_1 ґрунтується на невизначеній інформації, яку неможливо уточнити.

Оскільки ймовірність p_1 у цій задачі є наявною у двох різних наслідках дерева рішень, то зручніше розглядати різницю сподіваних корисностей двох альтернатив. Нехай змінна, що визначає вибір,

$$Z(p_1, p_2) = u_S(p_1, p_2) - u_N(p_1, p_2) =$$

$$= 10p_1 p_2 - 25p_1 + 25p_1 p_2 + 30p_1 - 2 + 2p_1 = 35p_1 p_2 + 7p_1 - 2.$$

Тоді її функція належності

$$\mu_Z(z) = \max_z(\min(\mu_1(p_1), \mu_2(p_2))). \tag{3.40}$$

Подамо функції належності $\mu_1(p_1)$ і $\mu_2(p_2)$ у вигляді

$$p_1 = \{0/0{,}5;\ 0{,}4/0{,}6;\ 0{,}8/0{,}7;\ 0{,}9/0{,}8;\ 0{,}95/0{,}9;\ 1{,}0/1{,}0\},$$

$$p_2 = \{0/0{,}6;\ 0{,}1/0{,}7;\ 0{,}6/0{,}75;\ 1{,}0/0{,}8;\ 0{,}7/0{,}85;\ 0/0{,}9\}.$$

Графіки функцій $\mu_1(p_1)$ і $\mu_2(p_2)$ зображено на рис. 3.9. Ступені належності для змінної $Z = 35p_1 p_2 + 7p_1 - 2$ наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Визначення значень змінної Z

p_2	p_1					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,6	12	14,8	17,6	22,6	23,2	**26**
0,7	13,75	16,9	20,05	23,2	26,35	29,5
0,75	14,625	17,95	21,275	24,6	27,925	31,25
0,8	15,5	19	22,5	**26**	29,5	33
0,85	16,375	10,05	23,725	27,4	31,075	34,75
0,9	17,25	21,1	24,95	28,8	32,65	36,5

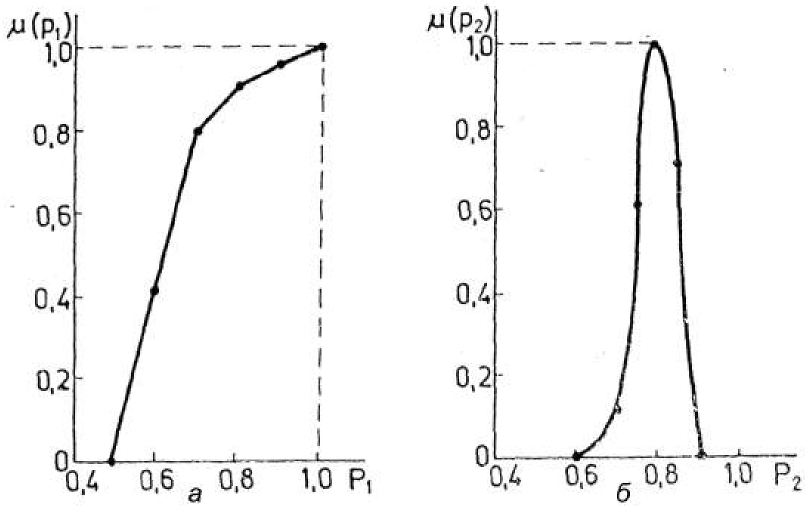

Рис. 3.9. Функції належності для початкових імовірностей: *а* – p_1; *б* – p_2

Для визначення μ_2 при $Z = 26$ будемо діяти таким чином:

1. У табл. 3.3 значенню 26 (виділено жирним шрифтом) відповідають імовірності $p_1 = 0,8;\ p_2 = 0,8$ і $p_1 = 1,0;\ p_2 = 0,6$.

2. За означенням для ймовірностей p_1 і p_2 знаходимо

$$\mu_1(p_1 = 0,8) = 0,9;\ \mu_1(p_1 = 1,0) = 1,0;$$

$$\mu_2(p_2 = 0,8) = 1,0;\ \mu_2(p_2 = 0,6) = 0.$$

3. За формулою (3.40) визначимо

$$\mu_Z(26) = \max_{z=26}(\min(\mu_1(p_1), \mu_2(p_2))) =$$

$$= \max_{z=26}(\min(0,9;\ 1,0),\ \min(1,0,\ 0)) = \max(0,9,\ 0) = 0,9.$$

Аналогічно знаходимо інші значення функції належності нечіткої множини, що задає змінну:

$$Z = \{0/12;0/13,75;0/14,625;0/14,8;0/15,5;0/16,375;0,1/16,9;$$
$$0/17,25;0/17,6;0,4/17,95;0,4/19;0,4/20,05;0,4/21,1;0,6/21,275;$$
$$0,8/22,5;0/22,6;0,1/23,2;0,7/23,725;0,6/24,6;0/24,85;0,9/26;$$
$$0,1/26,35;0,7/27,4;0,6/27,925;0/28,8;0,95/29,5;0,7/31,075;$$
$$0,6/31,25;0/32,65;1,0/33;0,7/34,75;0/36,5\}.$$

Значення функції належності можна обчислити шляхом визначення ступеня підтвердження для різних нечітких значень. Розглянемо такі модифікації тверджень:

R_1: «Ясно, що розробляти родовище краще, ніж не розробляти».

Цей вислів є чітким, і, зважаючи на те, що **Z** — різниця між рішеннями «розробляти» чи «не розробляти», функція належності має вигляд

$$\mu_{R_1}(z) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z > 0; \\ 0, \text{ якщо } z < 0. \end{cases}$$

R_2: «Зрозуміло, що не розробляти краще, ніж розробляти»:

$$\mu_{R_2}(z) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z < 0; \\ 0, \text{ якщо } z > 0. \end{cases}$$

R_3: «Розробляти, здається, дещо краще, ніж не розробляти»:

$$\mu_{R_3}(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \le -20; \\ 0,5 + 0,025, \text{ якщо } -20 < z < 20; \\ 1, \text{ якщо } z > 20. \end{cases}$$

Останній вислів є нечітким. Визначимо ступінь істинності висловів R_1, R_2, R_3, використовуючи формулу (3.40). Якщо X – твердження про різницю сподіваних корисностей, то ступінь, із яким X має на увазі кожне з наведених вище тверджень, задамо формулою

$$\mu(X \to R_i) = \min_z(\max(1 - \mu_z(z), \mu_{R_i}(z))), \ i = \overline{1,3}. \qquad (3.41)$$

Значення $1 - \mu_z(z)$, $\mu_{R_1}(z)$, $\mu_{R_2}(z)$, $\mu_{R_3}(z)$, розраховані за формулою (3.41), зведемо в табл. 3.4.

Остаточно маємо

$$\mu(X \to R_1) = 1; \ \mu(X \to R_2) = 0; \ \mu(X \to R_3) = 0,92.$$

Оскільки максимального значення набуває функція належності для R_1, то остаточним рішенням є «Розробляти родовище краще, ніж не розробляти».

Таблиця 3.4

Результати розрахунків

μ	z							
	12	13,75	14,625	14,8	15,5	16,375	16,9	17,25
$1-\mu_z(z)$	1	1	1	1	1	1	0,9	1
$\mu_{R_1}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_{R_2}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{R_3}(z)$	0,8	0,84	0,865	0,87	0,89	0,9	0,92	0,93
μ	z							
	17,6	17,95	19	20,05	21,1	21,275	22,5	22,6
$1-\mu_z(z)$	1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4	0,2	1
$\mu_{R_1}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_{R_2}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{R_3}(z)$	0,94	0,95	0,98	1	1	1	1	1
μ	z							
	23,2	23,725	24,6	24,95	26	26,35	27,4	27,925
$1-\mu_z(z)$	0,9	0,3	0,4	1	0,1	0,9	0,3	0,4
$\mu_{R_1}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_{R_2}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{R_3}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
μ	z							
	28,8	29,5	31,075	31,25	32,65	33	34,75	36,5
$1-\mu_z(z)$	1	0,05	0,3	0,4	1	0	0,3	1
$\mu_{R_1}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_{R_2}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{R_3}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1

4. МЕТОДИ ОБРОБЛЕННЯ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК

Залежно від цілей експертного оцінювання й методу визначення експертних оцінок виникають такі основні завдання:

1) побудова узагальненої оцінки понять та об'єктів на основі індивідуальних оцінок експертів;

2) побудова узагальненої оцінки на основі парного порівняння об'єктів кожним з експертів;

3) визначення відносних ваг взаємозв'язку об'єктів;

4) визначення залежностей між ранжуванням;

5) визначення узгодженості оцінок експертів;

6) оцінювання надійності оброблення результатів.

При розв'язанні багатьох задач недостатньо впорядкування об'єктів за одним або групою показників, необхідно мати числові значення для кожного об'єкта, що визначають його перевагу над іншими об'єктами. Наявність таких оцінок дасть змогу визначити узагальнену оцінку для всієї групи експертів.

Визначення узгодженості думок експертів проводиться шляхом розрахунку числової міри, що характеризує ступінь відповідності індивідуальних оцінок. Аналіз значення міри узгодження сприяє виробленню правильного судження про загальний рівень знань щодо проблеми і виявлення груп думок експертів.

Оброблення експертних оцінок дає змогу розкрити зв'язані показники порівняння і здійснити групування за ступенем зв'язку. Так, наприклад, якщо показники порівняння — різні цілі, а об'єкти порівняння — засоби досягнення цих цілей, то встановлення взаємозв'язку між ранжуваннями, що впорядковують кошти з огляду на досягнення цілей, дає змогу обґрунтовано відповісти на запитання: "Якою мірою досягнення однієї мети при певних засобах сприяє досягненню інших цілей?" (тобто встановити причиново-наслідковий зв'язок).

Оцінки, що одержують на основі оброблення, є випадковими об'єктами, тому однією з найважливіших задач процедури оброблення є визначення їх надійності.

4.1. Прямий метод отримання й узгодження експертних оцінок

Нехай мається на увазі неперервне змінення оцінюваного параметра. Тоді змінна рівня $\mu(y)$ у проміжках між оцінками y зазвичай апроксимується прямою. Існує три основних типи відповідей експертів (рис. 4.1).

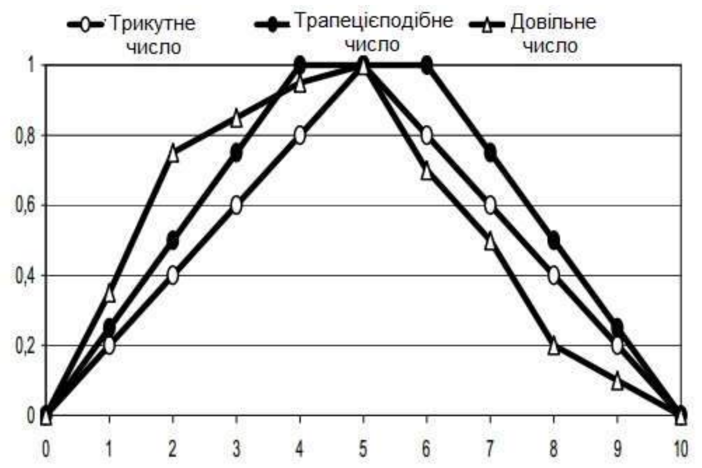

Рис. 4.1. Основні типи лінеаризованого подання нечітких чисел

Процедура отримання узгодженої думки експертів може бути задана одним із двох способів:

• способом логічної згортки;

• способом арифметико-логічної згортки.

Перший спосіб полягає в спільному виконанні логічних дій з множинами чітких оцінок $(\mathbf{y}_i)_j$ або з інтервалами $[\mathbf{y}_{min}, \mathbf{y}_{max}]_j$ і логіко-арифметичними діями з множинами чітких оцінок. При цьому два типи логічних дій визначають весь спектр можливих логічних згорток. Приклади операцій логічної згортки думок двох експертів показано на рис. 4.2.

У разі великої кількості експертів при виборі песимістичних моделей результатом згортки може стати близький до нуля рівень на близькому до нуля інтервалі (рис. 4.2, *б, г*), а при виборі оптимістичної моделі — одиничний рівень на максимальному інтервалі (рис. 4.2, *а, в, д*). І в одному, і в іншому випадку узгоджена думка експертів може виявитися не корисною для подальшого практичного застосування.

Другий спосіб отримання узгодженої думки базується на застосуванні до нечітких чисел традиційного в чіткій статистиці підходу до розрахунку математичного сподівання. Причому, оскільки дії з оцінками або з інтервалами виконуються тільки за правилами алгебри, то, на відміну від попереднього способу, тут узгодженість у діях з оцінками рівнів уже не потребується.

При цьому, однак, виникає додаткова трудність, пов'язана з тим, що операції підсумовування множин чисел (зокрема, інтервалів) у загальному випадку є багатозначними, тому для отримання однозначної згортки значень рівня нечіткого результату знову доводиться застосовувати будь-який варіант логічної згортки.

На рис. 4.3 показано результат операції обчислення середнього арифметичного думок двох експертів.

Наведені вище приклади дають змогу виявити ще один істотний недолік прямого методу узгодження — залежність результату не тільки від експертних оцінок, а й від суб'єктивної думки особи, що приймає рішення (ОПР).

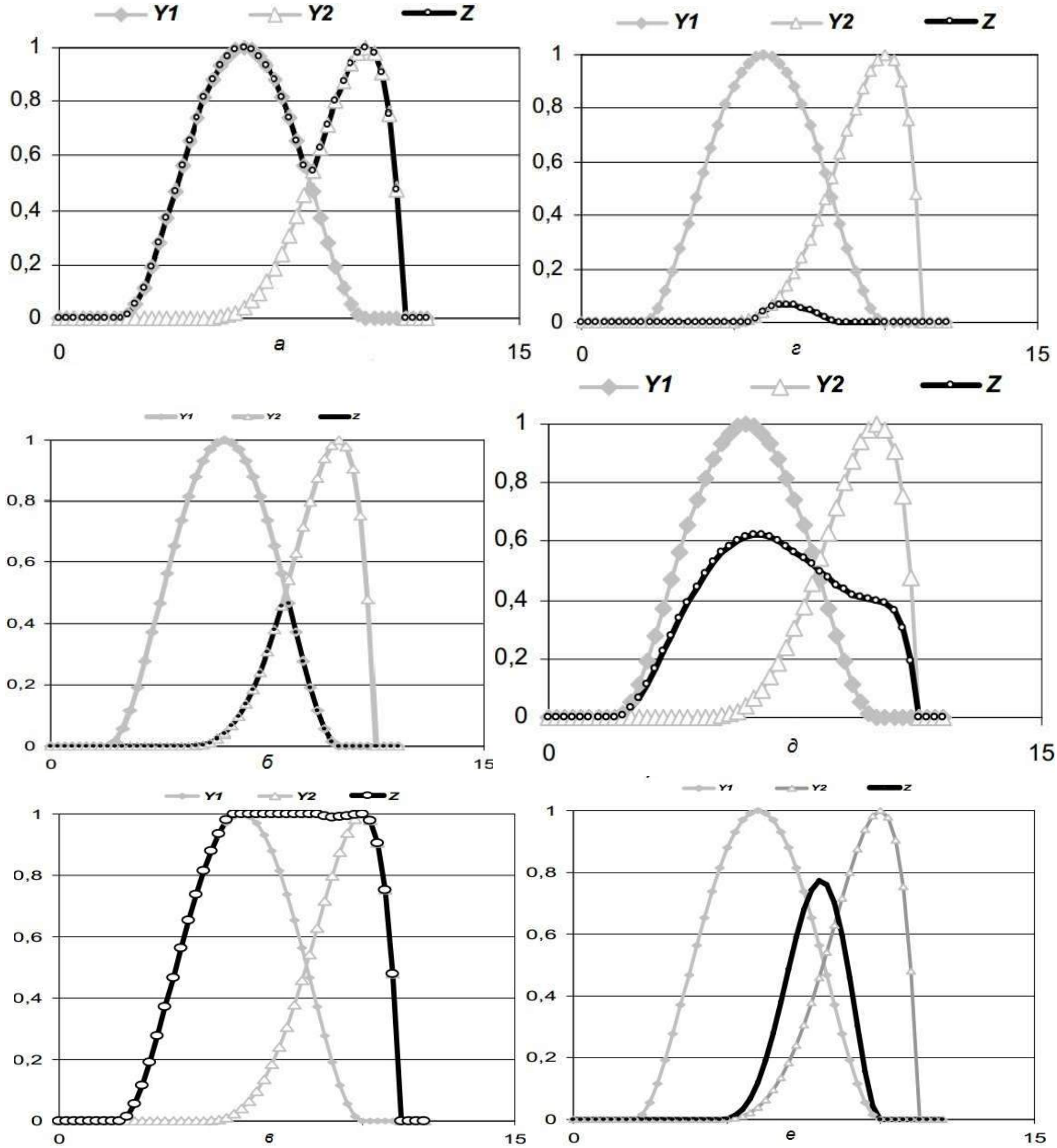

Рис. 4.2. Приклади операцій логічної згортки думок двох експертів: *а* – раціональний оптиміст; *б* – раціональний песиміст; *в* – супероптиміст; *г* – антипод супероптиміста; *д* – зважений оптиміст; *е* – зважений песиміст

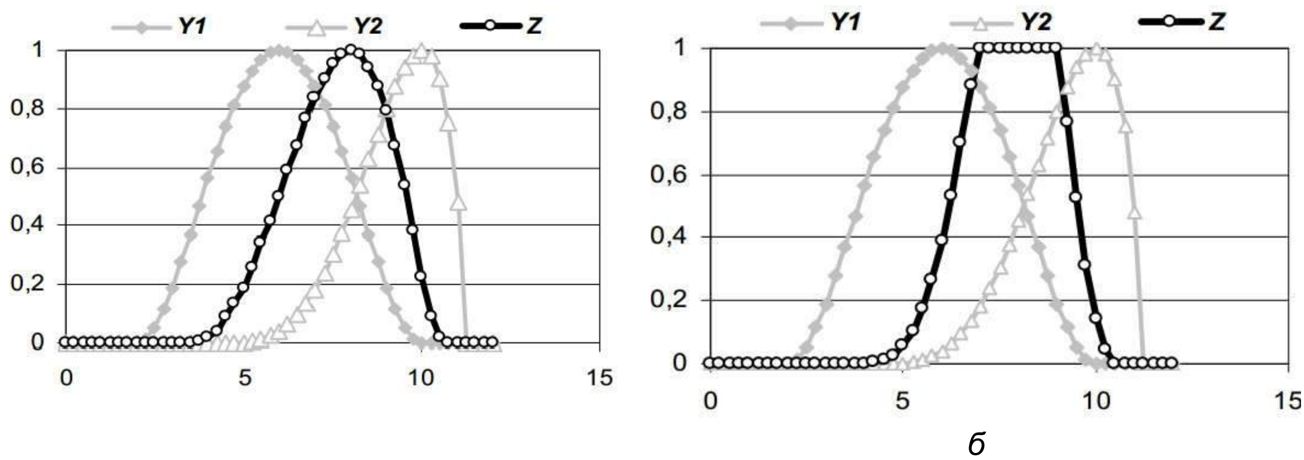

Рис. 4.3. Приклади операцій середнього арифметичного згортки думок двох експертів: *а* – середнє арифметичне «раціональний песимістичний оптиміст»; *б* – середнє арифметичне «зважений песимістичний оптиміст»

4.2. Застосування методу аналізу ієрархій для оцінювання рівня компетенції експертів

Експерти першої групи виконують попарне порівняння рівнів компетенції експертів другої групи. Оцінки мають бути виражені додатною величиною $p_{ij} \in R^{+}$, $i, j = 1, ..., Q_2$. Ця оцінка є відповіддю на запитання про те, наскільки (у скільки разів) компетентність i-го експерта вище компетентності j-го експерта. Очевидно, що при більш високій компетентності i-го експерта $p_{ij} > 1$. При менш високій компетентності i-го експерта $p_{ij} < 1$. Якщо ж віддати пріоритет нікому не вдається, то $p_{ij} = 1$. Остання умова виконується звичайно при $i = j$.

Ідеальний теоретичний результат такої процедури порівняння (одним експертом першої групи) можна подати у вигляді узгодженої матриці:

$$\mathbf{p}_{q_1(Q_2,Q_2)} = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_1} & \frac{p_1}{p_2} & \frac{p_1}{p_3} & \dots & \frac{p_1}{p_{Q_2}} \\ \frac{p_2}{p_1} & \frac{p_2}{p_2} & \frac{p_2}{p_3} & \dots & \frac{p_2}{p_{Q_2}} \\ \frac{p_3}{p_1} & \frac{p_3}{p_2} & \frac{p_3}{p_3} & \dots & \frac{p_3}{p_{Q_2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{p_{Q_2}}{p_1} & \frac{p_{Q_2}}{p_2} & \frac{p_{Q_2}}{p_3} & \dots & \frac{p_{Q_2}}{p_{Q_2}} \end{bmatrix},$$

де p_i, $i = 1,...,Q_2$ — шукані рівні компетентності експертів другої групи.

Ця матриця має три очевидні властивості узгодженості:

$$p_{ij} = p_i / p_j = 1 \text{ при } i = j;$$

$$p_{ij} = 1 / p_{ji} \text{ при } i, j \text{ (оборотність); } p_{ij} = p_{ik}\, p_{kj}.$$

Нескладно показати, що остання з трьох умов дає змогу отримати узгоджену матрицю всього за $Q_2 - 1$ результатами. Якщо експерт ідеально задав тільки перший рядок матриці:

$$p_{Q_1}(1) = \left[1, \frac{p_1}{p_2}, \frac{p_1}{p_3}, ..., \frac{p_1}{p_{Q_2}} \right],$$

то з урахуванням властивості $p_{ij} = 1$ при $i = j$ усі інші рядки узгодженої матриці можна просто обчислити:

$$p_{ij} = (p_i / p_j)\,(p_1 / p_j) \text{ при } i < j, \quad p_{ij} = \frac{1}{(p_j / p_i)} \text{ при } i > j.$$

Отже, вектор $\overline{p}_{(Q_2)} = [p_1, p_2, p_3, ..., p_{Q_2}]^T$. Неважко отримати основне співвідношення методики аналізу ієрархій: $p_{q_1(Q_2,Q_2)}\, \overline{p}_{(Q_2)} = Q_2\, \overline{p}_{(Q_2)}$.

Вектор $\overline{p}_{(Q_2)}$ є власним вектором матриці, що відповідає власному числу Q_2. При цьому на правильність основного співвідношення ніяк не впливає умова нормування рівнів

$$p_{q_1(Q_2,Q_2)} \frac{\overline{p}_{(Q_2)}}{\left|\overline{p}_{(Q_2)}\right|} = Q_2 \frac{\overline{p}_{(Q_2)}}{\left|\overline{p}_{(Q_2)}\right|}.$$

Якщо тепер відомості, отримані від усіх експертів першої групи, усереднити, то як розв'язок задачі оцінювання рівнів компетентності експертів другої групи можна вибрати нормований власний вектор з системи рівнянь

$$\left[\frac{1}{Q_1} \sum_{q_1=1}^{Q_1} p_{q_1(Q_2,Q_2)} \right] \frac{\overline{p}_{(Q_2)}}{\left|\overline{p}_{(Q_2)}\right|} = \lambda_{max} \frac{\overline{p}_{(Q_2)}}{\left|\overline{p}_{(Q_2)}\right|},$$

де λ_{max} — максимальне власне число.

У практичних розрахунках отриманої системи можна скористатися наближеними значеннями:

$$\tilde{p}_{q_2} = \sqrt[Q_2]{\prod_{j=1}^{Q_2} \left[\frac{1}{Q_1} \sum_{q_1=1}^{Q_1} p_{q_1(Q_2,Q_2)} \right]_{q_2,j}}, \; i = 1,...,Q_2;$$

$$\lambda_{max} = \frac{1}{Q_2} \overline{E}^T_{(Q_2)} \left[\frac{1}{Q_1} \sum_{q_1=1}^{Q_1} p_{q_1(Q_2,Q_2)} \right] \frac{\overline{p}_{(Q_2)}}{\left|\overline{p}_{(Q_2)}\right|},$$

де $\overline{E}^T_{(Q_2)}$ — одиничний вектор, $\tilde{\mathbf{p}}_{q_2}$ — вектор наближених значень.

Величиною $\delta = \left|\tilde{\lambda}_{\max} - Q_2\right| / (Q_2 - 1)$ можна наближено характеризувати ступінь відхилення матриці опитування експертів від ідеального узгодженого вигляду.

4.3. Групова експертна оцінка об'єктів при безпосередньому оцінюванні

Нехай m експертів провели оцінку n об'єктів за l показниками. Результати оцінювання подано величинами x_{ij}^h, де i — номер об'єкта, j — номер експерта, h — номер показника. Як групову оцінку візьмемо

$$x_i = \sum_{h=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} q_h x_{ij}^h k_j \quad (i=1,2...n), \tag{4.1}$$

де q_h — коефіцієнти ваг показників порівняння об'єктів, k_j — коефіцієнти компетентності експертів: $\sum_{h=1}^{l} q_h = 1$, $\sum_{j=1}^{m} k_j = 1$, $q_h = \sum_{j=1}^{m} q_{hj} k_j$.

Коефіцієнти компетентності експертів можна визначити за апостеріорними даними, тобто за результатами оцінювання об'єктів. Основною ідеєю цього обчислення є припущення про те, що компетентність експерта слід оцінювати за рівнем узгодженості його оцінок з груповою оцінкою об'єктів.

Алгоритм обчислення групових оцінок при $h = 1$:

1) початкові умови при $t = 0$ $k_j^0 = \dfrac{1}{m} (j = \overline{1,m})$;

2) рекурентні співвідношення для $\mathrm{t} = 1,2,3,...$:

а) $x_i^t = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} k_j^{t-1}, (i = \overline{1,n})$ — групова оцінка для i-го об'єкта на t-му кроці на основі індивідуальних оцінок x_{ij};

б) $\lambda^t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^t x_{ij}$ — нормувальний коефіцієнт;

в) $\mathrm{k}_j^t = \dfrac{1}{\lambda^t}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_{ij}\mathrm{x}_i^t \quad (\mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}-1})$ — коефіцієнти компетентності j-го експерта на t-му кроці;

г) $k_m^t = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} k_j^t$ — коефіцієнти компетентності m-го експерта з умови нормування;

3) ознака закінчення ітераційного процесу $\mathbf{max}(|x_i^t - x_i^{t-1}|) < E$.

Збіжність цієї ітераційної процедури доведено в літературі для випадку, коли індивідуальні оцінки є невід'ємними, а кожна група експертів не оцінює об'єкти своєї групи. У більшості практичних завдань ці умови виконуються, що доводить збіжність алгоритму.

Приклад 4.1. Три експерти ($m = 3$) оцінили значення двох заходів ($\mathbf{n = 2}$) за ступенем їх впливу на вирішення однієї з проблем ($l = 1$). Результатами експертизи стали нормовані оцінки заходів $x_{1j} + x_{2j} = 1,\ j = 1, 2, 3:$

x_{ij}	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3
Захід 1	0,3	0,5	0,2
Захід 2	0,7	0,5	0,8

Обчислимо групові оцінки заходів, що приводять до розв'язання проблеми, і коефіцієнти компетентності кожного з експертів. Для цього скористаємося наведеним вище алгоритмом, задавши точність обчислення $E = 0{,}001$.

Середні оцінки об'єктів першого наближення (при t = 1):

$$x_1^1 = \frac{1}{3}(0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2) = 0{,}333; \qquad x_2^1 = \frac{1}{3}(0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}8) = 0{,}667;$$

$$x_1 = (0{,}333; 0{,}667).$$

Визначимо нормувальний коефіцієнт λ^1:

$$\lambda^1 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} x_i^1 = x_1^1(0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2) + x_2^1(0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}8) =$$

$$= 0{,}333 \cdot 1 + 0{,}667 \cdot 2 = 1{,}665$$

Коефіцієнти компетентності першого наближення набудуть значень:

$$k_2^1 = \frac{1}{1{,}665}(0{,}5 \cdot 0{,}333 + 0{,}5 \cdot 0{,}667) = 0{,}30;$$

$k_3^1 = 1 - (0{,}34 + 0{,}30) = 0{,}36$, тоді $k_1 = (0{,}34; 0{,}3; 0{,}36)$.

Обчисливши групові оцінки другого та інших наближень, маємо:

$x^2 = (0{,}324; 0{,}676)$; $\qquad x^2 = (0{,}324; 0{,}676)$;

$\lambda^2 = 1{,}676$; $\qquad \lambda^2 = 1{,}676$;

$k^2 = (0{,}341; 0{,}298; 0{,}361)$; $\qquad k^2 = (0{,}341; 0{,}298; 0{,}361)$.

Результат третього кроку задовольняє умову закінчення ітераційного процесу, і як групову оцінку беруть $\boldsymbol{x}_3 = (\mathbf{0{,}3235; 0{,}6765})$.

4.4. Оброблення порівнянь парами

При встановленні причиново-наслідкових залежностей між об'єктами предметної області експертам у деяких випадках складно виразити їх чисельно, тобто важко встановити кількісно ступінь впливу тієї чи іншої причини (об'єкта) на конкретний результат. Особливо психологічно це складно, якщо таких об'єктів багато.

Разом з тим, експерти порівняно легко вирішують завдання порівняння парами. Це завдання полягає в тому, що експерт встановлює переваги об'єктів, порівнюючи всі можливі пари. Іншими словами, експерт, розглядаючи всі можливі пари об'єктів, у кожній з них встановлює ту причину, яка, на його думку, найбільше впливає на результат. Виникає запитання, як отримати оцінку всієї сукупності об'єктів на основі результатів порівняння парами, виконаного групою експертів.

Нехай кожен з $\boldsymbol{m}$ експертів оцінює вплив на результат всіх пар об'єктів, даючи числову оцінку $\mathbf{r}_{ij}^{h} = \begin{cases} \mathbf{1;} \\ \mathbf{0{,}5;} \\ \mathbf{0,} \end{cases}$

де $\boldsymbol{h} = \mathbf{1, 2, \ldots,} \boldsymbol{m}$ — номер експерта, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1, 2, \ldots,} \boldsymbol{n}$ — номера об'єктів, що досліджуються при експертизі. За результатами експертизи отримують $\boldsymbol{m}$ таблиць (матриць) (рис. 4.4).

Як випливає з рис. 4.4, послідовність оброблення порівнянь парами полягає в тому, що на основі таблиць порівнянь парами $\boldsymbol{m}$ експертів будується матриця математичних сподівань оцінок усіх пар об'єктів. Потім за цією матрицею обчислюється вектор коефіцієнтів відносної важливості об'єктів.

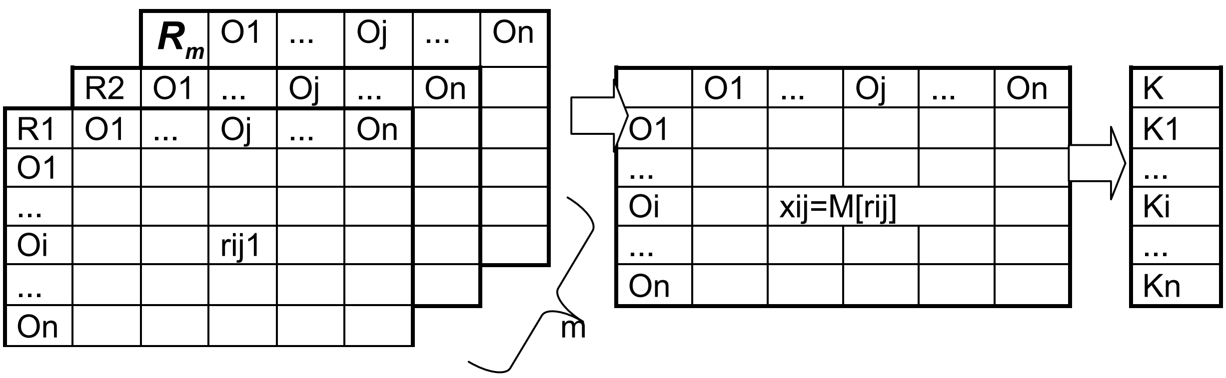

Рис. 4.4. Послідовність оброблення порівнянь парами

Якщо при оцінюванні пари O_{ij} із загальної кількості експертів m_i висловилися за перевагу O_i, m_j експертів — за O_j, а m_p експертів уважають ці об'єкти рівноправними, то оцінка математичного сподівання дискретної випадкової величини визначається формулою

$$x_{ij} = M[r_{ij}^h] = 1 \cdot \left(\frac{m_i}{m}\right) + 0{,}5 \cdot \left(\frac{m_p}{m}\right) + 0 \cdot \left(\frac{m_j}{m}\right), h = \overline{1,m}.$$

Оскільки загальна кількість експертів $m = m_i + m_p + m_j$, то визначаючи звідси m_p і підставляючи його в наведений вище вираз, отримуємо

$$x_{ij} = \frac{m_i}{m} + 0{,}5\left(\frac{m - m_i - m_j}{m}\right) = \frac{1}{2} + \frac{m_i - m_j}{2m}.$$

Очевидно, що $x_{ij} + x_{ji} = 1$. Сукупність величин x_{ij} утворюють матрицю $X = \|x_{ij}\|$ розмірністю $n \times n$, на основі якої можна побудувати ранжування всіх об'єктів і визначити коефіцієнти відносної важливості об'єктів, тобто вектор

$$k = [k_1, k_2, ..., k_n]^T.$$

Одним із способів визначення елементів вектора **К** є ітераційний алгоритм вигляду:

а) початкова умова $t = 0$, $k^0 = \underbrace{[\ 1\ 1\ 1 \ldots 1\ ]}_{n}{}^T$;

б) рекурентні співвідношення

$$k^t = \frac{1}{\lambda^t} \cdot X \cdot k^{t-1},$$

$$\lambda^t = [1 1 1 \ldots 1] \cdot X \cdot k^{t-1}, t = 1, 2, \ldots n,$$

де X — матриця математичних сподівань оцінок пар об'єктів, k_t — вектор коефіцієнтів відносної важливості об'єктів порядку t:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^t = 1 \text{ — умова нормування;}$$

в) ознака закінчення $\|k_t - k_{t-1}\| < E$.

Якщо матриця X є невід'ємною і нерозкладною (тобто шляхом перестановки рядків і стовпців її не можна звести до трикутного вигляду), то

$$k = \lim_{t \to \infty} k^t, \sum_{i=1}^{n} k_i = 1.$$

Приклад 4.2. Припустимо, що після опитування трьох ($m = 3$) експертів про ступінь впливу на результат трьох ($n = 3$) різних факторів (об'єктів) отримано такі таблиці порівнянь парами:

Експерт 1(R1)

	O1	O2	O3
O1	0,5	1	1
O2	0	0,5	0
O3	0	1	0,5

Експерт 2(R2)

	O1	O2	O3
O1	0,5	0,5	0,5
O2	0,5	0,5	0,5
O3	0,5	0,5	0,5

Експерт 3(R3)

	O1	O2	O3
O1	0,5	1	0,5
O2	0	0,5	0
O3	0,5	1	0,5

Для отримання групової оцінки ступеня впливу кожного з об'єктів на результат побудуємо матрицю математичних сподівань оцінок кожної з пар об'єктів, яка для цього прикладу має вигляд:

	O1	O2	O3
O1	3/6	5/6	4/6
O2	1/6	3/6	1/6
O3	2/6	5/6	3/6

Значення елементів цієї матриці отримано з таких виразів:

$$x_{11} = \frac{1}{2} + \frac{0-0}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \quad x_{11} = x_{22} = x_{33} = \frac{3}{6}, \quad x_{12} = \frac{1}{2} + \frac{2-0}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} \quad x_{21} = 1 - x_{12} = \frac{1}{6}$$

$$x_{13} = \frac{1}{2} + \frac{1-0}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} \quad x_{31} = 1 - x_{13} = \frac{2}{6}, \quad x_{23} = \frac{1}{2} + \frac{0-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \quad x_{32} = 1 - x_{23} = \frac{5}{6}$$

Скористаємося описаним вище алгоритмом для отримання вектора відносної важливості об'єктів:

крок 0:

$$\mathbf{K^0} = [1 \quad 1 \quad 1]^T;$$

крок 1:

$$Y^1 = X \cdot K^0 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3+5+4 \\ 1+3+1 \\ 2+5+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^1 = [1 \quad 1 \quad 1] \cdot Y^1 = [\,1 \quad 1 \quad 1\,] \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 27 = \frac{27}{6},$$

$$K^1 = \frac{1}{\lambda^1} \cdot Y^1 = \frac{6}{27} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}444 \\ 0{,}185 \\ 0{,}370 \end{bmatrix};$$

крок 2:

$$У^2 = X \cdot K^1 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{27} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{6 \cdot 27} \cdot \begin{bmatrix} 36+25+40 \\ 12+15+10 \\ 24+25+30 \end{bmatrix} = \frac{1}{6 \cdot 27} \cdot \begin{bmatrix} 101 \\ 37 \\ 79 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^2 = [1 \quad 1 \quad 1] \cdot У^2 = [1 \quad 1 \quad 1] \cdot \frac{1}{6 \cdot 27} \cdot \begin{bmatrix} 101 \\ 37 \\ 79 \end{bmatrix} = \frac{217}{6 \cdot 27},$$

$$K^2 = \frac{1}{\lambda^2} \cdot У^2 = \frac{6 \cdot 27}{217} \cdot \frac{1}{6 \cdot 27} \cdot \begin{bmatrix} 101 \\ 37 \\ 79 \end{bmatrix} = \frac{1}{217} \cdot \begin{bmatrix} 101 \\ 37 \\ 79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}465 \\ 0{,}171 \\ 0{,}364 \end{bmatrix},$$

$$\max\left(|0{,}465 - 0{,}444|,\ |0{,}171 - 0{,}185|,\ |0{,}364 - 0{,}3701| \right) = 0{,}021 > 0{,}001.$$

Продовжуючи ітераційний процес доти, доки норма оцінки не буде менше заданої $\left(\max\limits_i\left(\|k_{it} - k_{it-1}\|\right)\right) < 0{,}001$, одержимо

$$K^3 = [0{,}468 \quad 0{,}169 \quad 0{,}363]^T,$$

$$K^4 = [0{,}468 \quad 0{,}169 \quad 0{,}363]^T.$$

На четвертому кроці виконується умова виходу, що дає змогу за групову оцінку ступеня впливу на результат взяти вектор коефіцієнтів відносної важливості об'єктів вигляду

$$K = [0{,}468 \quad 0{,}169 \quad 0{,}363]^T.$$

4.5. Визначення узагальнених ранжувань

При груповому експертному оцінюванні кожному i-му об'єкту кожен з j-х експертів присвоює r_{ij}. Унаслідок проведення експертного оцінювання отримуємо матрицю рангів $\|r_{ij}\|$ розмірністю $n \times m$, де n — кількість об'єктів ($i = \overline{1,n}$), а m — кількість експертів ($j = \overline{1,m}$).

Найпростіший спосіб отримання узагальненого ранжування полягає в ранжуванні об'єктів за величиною сум рангів, отриманих кожним об'єктом від усіх експертів. У цьому випадку для матриці ранжувань $\|r_{ij}\|$ обчислюються суми

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \quad (i = 1,2,...n).$$

Далі об'єкти упорядковуються за ланцюгом нерівностей $r_k < r_l < ... < r_q$, де $r_k = \min_i(r_i)$, $r_l = \min_{i, i \neq k}(r_i)$, ... , $r_q = \max_i(r_i)$. Звідси знаходимо узагальнене ранжування об'єктів $O_k \succ O_l \succ ... \succ O_q$.

Для врахування компетентності експертів достатньо помножити i-те ранжування на коефіцієнти компетентності j-го експерта $0 \le k_j \le 1$. У цьому випадку сума рангів для i-го об'єкта обчислюється за формулою

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} k_j r_{ij},$$

що дає змогу впорядкувати об'єкти за ланцюгом нерівностей. Слід зазначити, що побудова таких узагальнених ранжувань є коректною процедурою тільки в тому випадку, якщо ранги визначаються як місця об'єктів у вигляді натуральних чисел $1, 2, ..., n$.

Однак ранги об'єктів визначають тільки порядок розташування об'єктів за показниками порівняння. Ранги як числа не дають можливості зробити висновок про те, наскільки (або в скільки разів) один об'єкт є кращим порівняно з іншим. Якщо ранг дорівнює трьом, то звідси не слід робити висновок про те, що об'єкт з рангом один у три рази краще, ніж об'єкт, який має ранг, що дорівнює трьом.

Разом з тим, для використання в експертних системах знань, отриманих від експертів, необхідно не тільки впорядковувати або ранжувати об'єкти за ступенем їх впливу або впливу на якийсь результат, але й визначати кількісну оцінку ступеня впливу кожного з об'єктів на результат.

Найпростішим методом для реалізації цього завдання є підхід, що ґрунтується на побудові узагальненого ранжування шляхом переходу від матриці ранжувань до матриці порівнянь парами. Для цього на основі матриці $\|r_{ij}\|$ будується m матриць порівнянь парами R_j $(j = 1, ..., m)$, де m — кількість експертів. Елементи цих матриць визначаються таким чином:

$$R_j = \|r_{ik}^j\| = \begin{cases} 1; \\ 0,5; \\ 0, \end{cases}$$

де j — номер експерта, i та k — номера порівнюваних об'єктів.

Потім до отриманих матриць порівнянь парами всіх експертів застосовується розглянутий раніше метод оброблення порівнянь парами. Його ітераційна процедура дає змогу отримати коефіцієнти відносної важливості об'єктів за ступенем їх впливу на результат. Проілюструємо застосування цього підходу на прикладі.

Приклад 4.3. Нехай три експерти ($m = 3$) провели ранжування трьох об'єктів ($n = 3$) за ступенем їх впливу на результат, а таблиця ранжувань має вигляд:

Об'єкт O_i	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3
O_1	1	1	2
O_2	2	3	1
O_3	3	2	3

На основі цієї таблиці матриця порівнянь парами для першого експерта матиме вигляд

$$R_1 = \left\| R_{kj}^1 \right\| = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O_1 & O_2 & O_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{array}$$

Аналогічні матриці порівнянь парами для другого й третього експерта матимуть вигляд

$$R_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{array} \right\|; \quad R_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 0{,}5 & 0 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{array} \right\|$$

Використовуючи метод оброблення порівнянь парами, отримаємо послідовність векторів коефіцієнтів відносної важливості об'єктів:

Крок	К1	К2	К3
0	1,0	1,0	1,0
1	0,481	0,330	0,185
2	0,489	0,346	0,156
3	0,5	0,348	0,152
4	0,5	0,349	0,151

Ітераційна процедура із заданою точністю ($E = 0{,}001$) на четвертому кроці збігається до значень

$$K = [0{,}500 \quad 0{,}349 \quad 0{,}151]^{\mathrm{T}},$$

що дає змогу оцінити кількісно ступінь впливу кожного об'єкта на результат, отриманий на основі початкового ранжування експертів.

4.6. Зауваження до визначення групових оцінок

Усі розглянуті методи отримання групових оцінок дають достовірні результати в разі добре підібраної групи експертів і узгодженості їх оцінок. Якщо це не так, то постає завдання визначення кількісної оцінки ступеня узгодженості експертів. Отримання кількісної міри дає змогу більш обґрунтовано інтерпретувати причини розбіжності думок.

Для оцінювання міри узгодженості думок групи експертів використовують, зокрема, дисперсійний та ентропійний коефіцієнти конкордації [5]. Крім цього, при обробленні результатів ранжування можуть виникати завдання:

- визначення залежності між ранжуваннями двох експертів;
- зв'язку між досягненням двох різних цілей при вирішенні однієї й тієї ж сукупності проблем;
- взаємозв'язку між ознаками (об'єктами).

У цих випадках мірою взаємозв'язку може бути коефіцієнт рангової кореляції. Характеристикою взаємозв'язку множини ранжувань буде матриця коефіцієнтів рангової кореляції. Відомі коефіцієнти рангової кореляції Спірмена [5] і Кендалла [5].

4.7. Методи формування групової оцінки

На етапі аналізу й оброблення експертних оцінок основною проблемою є не отримання індивідуальних оцінок кожного експерта, а формування групової оцінки.

Під час оцінювання й ранжування альтернатив точки зору експертів зазвичай розбігаються й виникає необхідність кількісного оцінювання ступеня згоди експертів. Така кількісна міра має назву ***коефіцієнта конкордації (дисперсійного та ентропійного).***

Розглянемо матрицю результатів ранжування $\boldsymbol{n}$ об'єктів групою з $\boldsymbol{m}$ експертів $\|r_{ij}\|$ $(i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m)$, де r_{ij} — ранг, який присвоюється j-м експертом i-му об'єкту.

Складемо суми рангів за кожним стовпцем:

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij},\ \ i = 1,\ldots,n. \tag{4.2}$$

Розглянемо величини r_i як реалізації випадкової величини і знайдемо оцінку дисперсії:

$$D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \bar{r}\right)^2, \tag{4.3}$$

де $\bar{r}$ — оцінка математичного сподівання,

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i\,. \tag{4.4}$$

Дисперсійний коефіцієнт конкордації визначається як відношення оцінки дисперсії до максимального значення цієї оцінки:

$$W = \frac{D}{D_{\max}}. \qquad (4.5)$$

Перший випадок — відсутність зв'язаних рангів у матриці ранжувань. Ця умова характеризується відсутністю збіжних рангів об'єктів, що встановлюються експертами. Повна згода експертів визначається такою структурою матриці $\|r_{ij}\|$ при відповідній перенумерації рядків:

$$\|r_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{Vmatrix}.$$

Цій матриці відповідає максимальна дисперсія, значення якої обчислюється з урахуванням того, що $r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} = im,$ за такою формулою:

$$D_{max} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^2 - 2r_i\bar{r} + \bar{r}^2\right)\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^2 - n\bar{r}^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left((im)^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{im}{n}\right)^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{m^2 n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{nm^2(n+1)^2}{4}\right] = \frac{m^2 n(n+1)}{12}. \qquad (4.6)$$

Позначимо $S = \sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \bar{r}\right)^2,$ тоді $D = \frac{1}{n-1}S$. Підставляючи отримані результати, запишемо остаточний вираз для коефіцієнта конкордації:

$$W = \frac{12}{m^2(n^3 - n)}S. \qquad (4.7)$$

Коефіцієнт конкордації змінюється від нуля до одиниці. У разі повної збіжності ранжувань $W = 1$, а в разі повної розбіжності думок $W = 0$.

Другий випадок — наявність зв'язаних рангів у матриці ранжувань. Якщо в ранжуваннях є зв'язані ранги, то максимальне значення дисперсії в знаменнику формули (4.7) стає меншим, ніж при відсутності зв'язаних рангів. У цьому випадку коефіцієнт конкордації визначається формулою

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{12S}}{\mathbf{m^2(n^3 - n) - m\sum_{j=1}^{m} T_j}}, \tag{4.8}$$

де

$$\mathbf{T_j = \sum_{k=1}^{H_j}(h_k^3 - h_k)}, \tag{4.9}$$

T_j — показник зв'язаних рангів у j-му ранжуванні; H_j — кількість груп однакових рангів у j-му ранжуванні; h_k — кількість однакових рангів у k-й групі зв'язаних рангів при ранжуванні j-м експертом.

Якщо збіжних рангів немає, то формула (4.8) збігається з формулою (4.7).

Коефіцієнт конкордації дорівнює 1, якщо всі ранжування експертів є однаковими. Коефіцієнт конкордації дорівнює нулю, якщо всі ранжування є різними, тобто абсолютно немає збігу. Коефіцієнт конкордації, який розраховується за формулами (4.9) і (4.10), є оцінкою істинного значення коефіцієнта і, отже, являє собою випадкову величину. Тому поряд з коефіцієнтом конкордації вводиться ентропійний коефіцієнт конкордації, або коефіцієнт згоди

$$W = 1 - \frac{H}{H_{max}}, \tag{4.10}$$

де H — ентропія, що визначається формулою

$$H = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p_{ij}, \tag{4.11}$$

а $H_{\max}$ — максимальне значення ентропії, p_{ij} — оцінки ймовірностей j-го рангу, що присвоюється i-му об'єкту. Ці оцінки ймовірностей визначаються як відношення кількості експертів m_j, що приписали об'єкту O_i ранг j, до загальної кількості експертів:

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m}. \tag{4.12}$$

Максимального значення ентропія набуває при рівноймовірному розподілі рангів, тобто коли $m_j = \frac{m}{n}$. Отже,

$$p_{ij} = \frac{m}{mn} = \frac{1}{n}. \tag{4.13}$$

Тоді

$$H_{\max} = -\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\log n.$$

Коефіцієнт згоди змінюється від нуля до одиниці. При $W_E = 0$ розташування об'єктів за рангами є рівноймовірним, оскільки в цьому випадку $H = H_{\max}$. Цей випадок може бути обумовлений або неможливістю ранжування об'єктів за сформульованою сукупністю показників, або повною неузгодженістю думок експертів. При $W_E = 1$, що досягається при нульовій ентропії ($H = 0$), усі експерти дають однакове ранжування. Дійсно, у цьому випадку для кожного фіксованого об'єкта O_i всі експерти присвоюють йому один і той же ранг j, отже, $p_i = 1,\ p_{kj} = 0, k \neq j,\ k = 1,\ldots,n$. Тому $H = 0$.

Порівняльне оцінювання дисперсійного й ентропійного коефіцієнтів конкордації показує, що ці коефіцієнти дають приблизно однакову оцінку узгодженості експертів при близьких ранжуваннях. Однак, якщо, наприклад, уся група експертів поділилася в думках на дві підгрупи, причому ранжування в цих підгрупах є протилежними (пряме й обернене), то дисперсійний коефіцієнт конкордації буде дорівнювати нулю, а ентропійний коефіцієнт конкордації — 0,7. Таким чином, ентропійний коефіцієнт конкордації дає змогу зафіксувати факт поділу думок на дві протилежні групи. Обсяг обчислень для ентропійного коефіцієнта конкордації дещо більший, ніж для дисперсійного коефіцієнта конкордації.

4.8. Визначення залежностей між ранжуваннями

Під час оброблення результатів ранжування нерідко виникає необхідність визначення залежності між результатами ранжування, отриманими від двох експертів. Прийнято міру взаємозв'язку оцінювати коефіцієнтом рангової кореляції. Узагальнений коефіцієнт рангової кореляції визначається формулою

$$\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\nu)} p_{ij}^{(\mu)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}^{(\nu)})^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}^{(\mu)})^2}}, \tag{4.14}$$

де $p_{ij}^{(\nu)} = r_j^{(\nu)} - r_i^{(\nu)},\ p_{ij}^{(\mu)} = r_j^{(\mu)} - r_i^{(\mu)}$ — різниці оцінок j та i об'єктів у ранжуваннях ν, μ експертів. Наведемо деякі властивості коефіцієнта рангової кореляції Γ. З нерівності Коші – Шварца

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}^{(\nu)}p_{ij}^{(\mu)})^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}^{(\nu)})^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}^{(\mu)})^2$$

випливає, що $-1 \le \Gamma \le 1$. Якщо ранжування $r^{(\nu)}$ і $r^{(\mu)}$ збігаються, тобто $r_i^{(\nu)} = r_i^{(\mu)}$, то $\Gamma = 1$; якщо є протилежними, тобто $r_i^{(\nu)} = n - r_i^{(\mu)} + 1$, то $\Gamma = -1$. При $\Gamma = 0$ ранжування – незалежні.

Окремим випадком узагальненого коефіцієнта рангової кореляції, коли ранжуваннями є ранги об'єктів, є ***ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена***

$$\rho = \frac{K_{\nu\mu}}{\sqrt{D_\nu D_\mu}},$$

де $K_{\nu\mu}$ — взаємний кореляційний момент першого й другого ранжувань; D_ν, D_μ — дисперсії цих ранжувань.

Формула Спірмена є правильною лише тоді, коли в ранжуваннях немає зв'язаних (повторюваних) рангів об'єктів.

Нехай $\overline{r^{(\nu)}} = (r_1^{(\nu)}, r_2^{(\nu)}, ..., r_n^{(\nu)}), \overline{r^{(\mu)}} = (r_1^{(\mu)}, r_2^{(\mu)}, ..., r_n^{(\mu)})$ — ранжування двох експертів, тоді оцінки взаємного кореляційного моменту й дисперсії цих ранжувань визначаються формулами

$$K_{\nu\mu} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - \overline{r^{(\nu)}})(r_j^{(\mu)} - \overline{r^{(\mu)}}),$$

$$D_\nu = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - \overline{r^{(\nu)}})^2,\ D_\mu = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\mu)} - \overline{r^{(\mu)}})^2.$$

Перший випадок — у двох ранжуваннях немає зв'язаних рангів. Оцінки середніх рангів і дисперсій для цього випадку є однаковими для обох ранжувань:

$$\bar{r} = \overline{r^{(\nu)}} = \overline{r^{(\mu)}} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2};$$

$$D_\nu = D_\mu = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)})^2 - n(\bar{r})^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - n\bar{r}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4}\right) = \frac{n(n+1)}{12};$$

$$K_{\nu\mu} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - \bar{r})(r_j^{(\mu)} - \bar{r}) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)}r_j^{(\mu)} - n\bar{r}^2) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4} - \frac{\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(n-1)}{12} - \frac{\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2}{2}\right)$$

з урахуванням того, що

$$\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2 = \sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)})^2 - 2\sum_{j=1}^{n} r_j^{(\nu)} r_j^{(\mu)} + \sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\mu)})^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2\sum_{j=1}^{n} r_j^{(\nu)} r_j^{(\mu)}.$$

Тоді коефіцієнт рангової кореляції має вигляд

$$\rho = \frac{K_{\nu\mu}}{\sqrt{D_\nu D_\mu}} = 1 - \frac{6\sum_{j=1}^{n}\left(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)}\right)^2}{n^3 - n}.$$

Другий випадок — у ранжуваннях є зв'язані ранги. Тоді коефіцієнт рангової кореляції визначається формулою

$$\rho' = \frac{\rho - T_\nu - T_\mu}{\sqrt{(1-2T_\nu)(1-2T_\mu)}},$$

де ρ — оцінка коефіцієнта рангової кореляції, а величини T_ν і T_μ є однаковими:

$$T_\nu = \frac{1}{2(n^3-n)}\sum_{k=1}^{H}(h_k^3 - h_k),$$

$$T_\mu = \frac{1}{2(n^3-n)}\sum_{k=1}^{H}(h_k^3 - h_k),$$

де (T_ν, T_μ) — показник зв'язаних рангів у ν-му і μ-му ранжуваннях; (H_ν, H_μ) — кількість груп однакових рангів у ν-му і μ-му ранжуваннях; h_k — кількість однакових рангів у k-й групі зв'язаних рангів при ранжуваннях експертів.

4.9. Оцінювання ступеня компетентності експерта

При оцінюванні узгодженості думок (оцінок) експертів використовують різні способи їх обчислення. Іноді для оцінювання узгодженості використовують показники, що дають змогу оцінити рівень компетентності експерта, який, своєю чергою, визначається як характером розв'язуваної задачі, так і можливостями проведення конкретного експертного опитування.

Оцінювання слід здійснювати на основі певної шкали, кожен бал якої визначається шляхом вибору відповідних характеристик щодо кваліфікації експерта. При цьому необхідно врахувати рівень кваліфікації експерта у вузькій галузі спеціалізації, рівень теоретичної підготовки, його практичний досвід і широту ерудиції. Перелічені характеристики найкраще оцінювати за десятибальною шкалою, розробленою спеціально до конкретного експертного опитування. Отримані характеристики слід звести до одного показника, що є об'єктивною оцінкою компетентності експерта h_j.

Крім того, доцільно визначити показник відносної самооцінки експерта (суб'єктивний показник h_{cj}). Експертові пропонується самому проставити собі бал за десятибальною шкалою, орієнтуючись, наприклад, на значення балів, які наведено в табл. 4.1.

Добуток об'єктивного й суб'єктивного показників, поділений на 100, буде характеризувати компетентність експерта щодо певного питання:

$$h_j = \frac{h_j^0 h_{cj}^0}{100}.$$

Компетентність експертів може бути визначена самими експертами. Для цього кожен експерт, що входить до групи, задає вагові коефіцієнти всім іншим експертам, крім себе. Далі визначається середньоарифметична оцінка компетентності кожного експерта.

У табл. 4.2 наводиться умовний приклад визначення рангів важливості подій виходячи з їх коефіцієнтів відносної важливості. (Більш важлива подія має менший ранг важливості.)

Середнє значення для сумарних рангів розглянутого ряду визначається так:

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_{1j}, \sum_{j=1}^{d} \alpha_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{d} \alpha_{dm}, \quad \alpha = \frac{1}{2} d(m+1).$$

Сумарне квадратичне відхилення сумарних оцінок важливості від середнього значення α визначається формулою

$$S = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij} - \frac{1}{2} d(m+1) \right\}^2.$$

Величина S набуває максимального значення у випадку, якщо всі d експертів дадуть однакові оцінки кожній альтернативі Y_i.

Тоді ряд сумарних рангів матиме вигляд $d, 2d, \ldots, md$.

Віднімемо від цього ряду середнє значення:

$$\alpha = \frac{1}{2} d(m+1); \frac{1}{2} d(1-m); \frac{1}{2} d(3-m); \ldots; \frac{1}{2} d(m-1).$$

Сума квадратів цього ряду

$$S_{\max} = \frac{1}{12} d^2 (m^3 - m).$$

Таблиця 4.1

Десятибальна шкала
оцінювання рівня компетентності експерта

Кількість балів	Характеристика експерта
3	Питання не належить до сфери, тісно пов'язаної з його вузькою спеціалізацією (наприклад, ознайомлення з проблемою з літературних джерел, унаслідок роботи на іншому підприємстві і т. ін.)
5	Питання належить до сфери, тісно пов'язаної з його вузькою спеціалізацією (суміжна прикладна дисципліна, суміжна область практичної діяльності)
8	У практичному вирішенні певного питання експерт бере участь, але це питання не належить до сфери його вузької спеціалізації
10	Експерт спеціалізується з певного питання, має з цього питання завершені теоретичні або практичні розробки (наукові дослідження, запущені у виробництво технічні розробки, дане питання безпосередньо належить до сфери його вузької службової діяльності)

Таблиця 4.2

Визначення рангів важливості

		Альтернативи			
		Y_1	Y_2	…	Y_m
Оцінки експертів	Експерт 1	f_{11}	f_{12}	…	f_{1m}
	Експерт 2	f_{21}	f_{22}	…	f_{2m}
	…	…	…	…	…
	Експерт d	f_{d1}	f_{d2}	…	f_{dm}
Ранги важливості експертів	Експерт 1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1m}
	Експерт 2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2m}
	…	…	…	…	…
	Експерт d	α_{d1}	α_{d2}	…	α_{dm}
Сумарний ранг важливості		r_1	r_2	…	r_m

Знаходимо відношення сумарного квадратичного відхилення до суми квадратів цього ряду, яке може визначати рівень узгодженості експертів при оцінюванні:

$$E = \frac{S}{S_{\max}} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{d}\alpha_{ij} - \frac{1}{2}d(m+1)\right\}}{\frac{1}{12}md(m^2-1)}.$$

Очевидно, що як міру узгодженості експертів можна брати коефіцієнт конкордації. Величина Е змінюється в межах від 0 до 1. При $E = 0$ узгодженості абсолютно немає, тобто зв'язку між оцінками різних експертів немає. Навпаки, при $E = 1$ узгодженість думок експертів є повною.

У разі, коли можливими є збіги оцінок експертів, тобто існує збіг рангів, формула для обчислення коефіцієнта конкордації набуває вигляду

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}_{\max}} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{d}\alpha_{ij} - \frac{1}{2}d(m+1)\right\}^2}{\frac{1}{12}md(m^2-1) - d\sum_{j=1}^{d}T_j}, \quad T_j = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{d}(t_j^3 - t_j),$$

де t_j — кількість повторень кожного рангу; k_j — кількість рангів, що повторюються в j-му ряді.

Якщо ранги повторюються, то для отримання нормального ранжування, що має середнє значення рангу

$$\alpha = \frac{1}{2}d(m+1),$$

альтернативам, які мають однакові ранги, необхідно приписати ранг, що дорівнює середньому значенню місць, які вони поділили між собою.

Наприклад, отримано таке ранжування оцінок альтернатив експертами:

Альтернативи Y_i	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
Ранги α_i	1	2	3	3	2	3

$$\alpha_2 = \alpha_5 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5; \ \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = \frac{4+5+6}{3} = 5.$$

Тоді скориговане ранжування альтернатив буде таким:

Альтернативи Y_i	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
Ранги α_i	1	2,5	5	5	2,5	5

Приклад 4.4. Розглянемо оцінку у вигляді ранжування альтернатив ($m = 10$), які проводить експертна група з трьох експертів ($d = 3$). Результати розрахунків наведено в таблиці:

Група експертів		Альтернативи										Сума
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	
Оцінки експертів	Експ.1	1	4,5	2	4,5	3	7,5	6	9	7,5	10	
	Експ.2	2,5	1	2,5	4,5	4,5	8	9	6,5	10	6,5	
	Експ.3	2	1	4,5	4,5	4,5	4,5	8	8	8	10	$\alpha_{сер}$
Проміжні показники	α	5,5	6,5	9	13,5	12	20	23	23,5	25,5	26,5	16,5
	$\alpha - \alpha_{сер}$	-11	-10	-7,5	-3	-4,5	3,5	6,5	7	9	10	
	S	121	100	56,25	9	20,25	12,25	42,25	49	81	100	591

Середній ранг $\alpha = 16{,}5$; загальна сума рангів $S = 591$;

$$T_{j_1} = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot (2^3 - 2) = 1; \; T_{j_2} = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot (2^3 - 2) = 1{,}5;$$

$$T_{j_3} = \frac{1}{12} \cdot \{(4^3 - 4) + (3^3 - 3)\} = 7;$$

$$E = \frac{591}{\frac{1}{2}\left[3^2 \cdot (10^3 - 10) - 3 \cdot (1 + 1{,}5 + 7)\right]} = 0{,}8277.$$

Якщо $E = 0$, то узгодженості в оцінках немає, тому для отримання достовірних оцінок слід уточнити вихідні дані про події і (або) змінити склад групи експертів. При $E = 1$ далеко не завжди можна вважати отримані оцінки об'єктивними, оскільки іноді виявляється, що всі члени експертної групи заздалегідь змовилися, захищаючи свої спільні інтереси. Необхідно, щоб знайдене значення E було більшим від заданого порогового значення $E_{пр}$ $(E > E_{пр})$. Можна взяти $E_{пр} = 0{,}5$, тобто при $E > 0{,}5$ дії експертів є скоріше узгодженими, ніж неузгодженими. При $E < 0{,}5$ отримані оцінки не можна вважати достовірними, тому слід повторити опитування. Отримане значення $E = 0{,}828$ свідчить про високий рівень узгодженості думок експертів у групі.

Приклад 4.5. Обробити експертні дані й визначити:

- компетентність експертів та узагальнену оцінку об'єктів;
- узагальнене ранжування об'єктів;
- узгодженість думок експертів;
- залежність між ранжуваннями експертів при таких початкових даних:

1) $O = \{O_1, O_2, ..., O_4\}$ – множина оцінюваних об'єктів;

2) $E = \{E_1, E_2, ..., E_5\}$ – множина експертів;

3) $A = \|a_{ij}\|_{4\times5} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3{,}5 & 3 & 4 \\ 2{,}5 & 2 & 1{,}5 & 2 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3{,}5 & 3{,}5 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$ — матриця оцінок об'єктів, наданих експертами.

Для розрахунку коефіцієнтів компетентності експертів та узагальненої оцінки об'єктів скористаємося формулами

$$B\vec{x} = \lambda_B \vec{x},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ C\vec{k} = \lambda_C \vec{k},\ \ \sum_{j=1}^{m} k_j = 1,$$

де матриці $B = AA^T$, $C = A^T A$, $\vec{x}$, $\vec{k}$ — власні вектори матриць B і C, що відповідають максимальним власним числам цих матриць λ_B і λ_C.

Зробимо розрахунок матриць B і C:

$$B = AA^T = \begin{Vmatrix} 42{,}25 & 21{,}75 & 28 & 39{,}25 \\ 21{,}75 & 17{,}5 & 18{,}75 & 31{,}25 \\ 28 & 18{,}75 & 24{,}25 & 33{,}5 \\ 39{,}25 & 31{,}25 & 33{,}5 & 57{,}5 \end{Vmatrix},$$

$$C = A^T A = \begin{Vmatrix} 29{,}5 & 26 & 28{,}75 & 26{,}5 & 15{,}5 \\ 26 & 24{,}25 & 28{,}25 & 26 & 17{,}5 \\ 28{,}75 & 28{,}25 & 35{,}75 & 30{,}5 & 25 \\ 26{,}5 & 26 & 30{,}5 & 30 & 20 \\ 15{,}5 & 17{,}5 & 25 & 20 & 22 \end{Vmatrix}.$$

Для знаходження власних векторів матриць B і C, що відповідають максимальним власним векторам і задовольняють властивостям нормування, скористаємося наближеним методом, який полягає в такому:

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{Vmatrix} \sqrt[n]{b_{11}\ \ b_{12} \dots b_{1n}} \\ \sqrt[n]{b_{21}\ \ b_{22} \dots b_{2n}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sqrt[n]{b_{n1}\ \ b_{n2} \dots b_{nn}} \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{Vmatrix} \dfrac{y_1}{\sum\limits_{i=1,n} y_i} \\ \dfrac{y_2}{\sum\limits_{i=1,n} y_i} \\ \dots \\ \dfrac{y_n}{\sum\limits_{i=1,n} y_i} \end{Vmatrix}.$$

Зробивши зазначені обчислення, одержимо коефіцієнти узагальненої оцінки об'єктів (матриця $\boldsymbol{B}$) і коефіцієнти компетентності експертів (матриця $\boldsymbol{C}$):

$$\vec{y} = \begin{Vmatrix} 31,7 \\ 21,73 \\ 25,56 \\ 39,21 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{Vmatrix} 0,268 \\ 0,184 \\ 0,216 \\ 0,332 \end{Vmatrix} \Rightarrow O_2 > O_3 > O_1 > O_4;\ \vec{y} = \begin{Vmatrix} 24,63 \\ 24,08 \\ 29,45 \\ 26,31 \\ 19,72 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{k} = \begin{Vmatrix} 0,198 \\ 0.194 \\ 0,237 \\ 0,212 \\ 0,159 \end{Vmatrix}.$$

Виконаємо розрахунок узагальненого ранжування об'єктів. Побудуємо матриці ранжувань експертів $(\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{y}^3, \boldsymbol{y}^4)$:

$\boldsymbol{y}^1 =$

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	1	1	1	1
O_2	0	1	1	1
O_3	0	1	1	1
O_4	0	0	0	1

$\boldsymbol{y}^2 =$

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	1	1	1	1
O_2	1	1	1	1
O_3	1	1	1	1
O_4	0	0	0	1

$\boldsymbol{y}^3 =$

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	1	0	0	1
O_2	1	1	1	1
O_3	1	0	1	1
O_4	1	0	0	1

$\boldsymbol{y}^4 =$

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	1	0	0	1
O_2	1	1	0	1
O_3	1	1	1	1
O_4	0	0	0	1

$\boldsymbol{y}^5 =$

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	1	0	0	1
O_2	1	1	1	1
O_3	1	1	1	1
O_4	0	0	0	1

Тоді узагальнене ранжування об'єктів без урахування компетентності експертів матиме такий вигляд:

$\boldsymbol{y}^* =$

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	1	0	0	1
O_2	1	1	1	1
O_3	1	1	1	1
O_4	0	0	0	1

Отже, $O_2 = O_3 > O_1 > O_4$.

Матриця ранжувань А має зв'язані ранги, тому для визначення коефіцієнта конкордації експертів скористаємося відповідними формулами:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	r_i	$\bar{r}$	$(r_i - \bar{r})^2$	S
O_1	1	2	3,5	3	4	13,5	12,25	1,5625	29,25
O_2	2,5	2	1,5	2	1	9		10,5625	
O_3	2,5	2	3	1	2	10,5		3,0625	
O_4	4	3,5	3,5	4	1	16		14,0625	
H_j	1	1	1	0	1				
h_k	2	3	2	0	2				
T_j	6	24	6	0	6				

$$W = \frac{12 \cdot 29{,}25}{25 \cdot 60 - 5 \cdot 42} = \frac{351}{1290} = 0{,}2729 .$$

Підготуємо початкові дані для розрахунку рангової кореляції пар експертів. За оцінками об'єктів зробимо їх ранжування:

Експерти	Об'єкти				Показники		
	O_1	O_2	O_3	O_4	H_ν	h_k	T_ν / T_μ
E_1	1	2,5	2,5	4	1	2	0,05
E_2	2	2	2	4	1	3	0,2
E_3	3,5	1	2	3,5	1	2	0,05
E_4	3	2	1	4	0	0	0
E_5	4	1,5	2	1,5	1	2	0,05

Виконаємо розрахунок рангової кореляції пар експертів:

Пари	Об'єкти				Коефіцієнт рангової кореляції	
	O_1	O_2	O_3	O_4	ρ	ρ'
E_1, E_2	1	2,5	2,5	4	0,85	0,816
	2	2	2	4		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	1	0,25	0,25	0		
E_1, E_3	1	2,5	2,5	4	0,1	0
	3,5	1	2	3,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	6,25	2,25	0,25	0,25		
E_1, E_4	1	2,5	2,5	4	0,35	0,316
	3	2	1	4		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	4	0,25	2,25	0		

Пари	Об'єкти				Коефіцієнт рангової кореляції	
	O_1	O_2	O_3	O_4	ρ	ρ'
E_1, E_5	1	2,5	2,5	4	-0,65	-0,833
	4	1,5	2	1,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	9	1	0,25	6,25		
E_2, E_3	2	2	2	4	0,85	0,816
	3,5	1	2	3,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	0,25	1	2	3,5		
E_2, E_4	2	2	2	4	0,8	0,775
	3	2	1	4		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	1	0	1	0		
E_2, E_5	2	2	2	4	-0,15	-0,544
	4	1,5	2	1,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	4	0,25	1	6,25		
E_3, E_4	3,5	1	2	3,5	0,45	0,422
	3	2	1	4		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	0,25	1	4	0,25		
E_3, E_5	3,5	1	2	3,5	0,45	0,389
	4	1,5	2	1,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	0,25	0,25	1	4		
E_4, E_5	3	2	1	4	-0,15	-0,211
	4	1,5	2	1,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	1	0,25	4	6,25		

5. ВИКОРИСТАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ МЕТОДІВ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Генетичні алгоритми належать до області м'яких обчислень. Термін «м'які обчислення» увів Лофті Заде. Це поняття об'єднує такі області, як нечітка логіка, нейронні мережі, імовірнісні міркування, еволюційні алгоритми, які доповнюють один одного й використовуються для створення гібридних інтелектуальних систем. Першу схему генетичного алгоритму (ГА) запропонував 1975 року Джон Холланд (Мічиганський університет). Ця схема базується на принципах природного відбору Ч. Дарвіна. ГА належать до стохастичних методів.

5.1. Основні поняття

Вектор — упорядкований набор чисел, які називають компонентами вектора. Оскільки вектор можна подати у вигляді рядка його координат, то в подальшому поняття вектора й рядка вважаються ідентичними.

Логічний вектор — вектор, компоненти якого набувають значень з двохелементної (булевої) множини, наприклад, $\{0,1\}$ або $\{-1,1\}$.

Хемінгова відстань — використовується для булевих векторів і дорівнює кількості компонент, що є різними в обох векторах.

Хемінгів простір — простір булевих векторів з уведеною на ньому відстанню (метрикою) Хеммінга. У разі булевих векторів розмірністю n розглядається простір, що являє собою множину вершин n-вимірного гіперкуба з хемінговою метрикою. Відстань між двома вершинами визначається довжиною найкоротшого шляху, що з'єднує їх, виміряного вздовж ребер.

Хромосома — вектор (або рядок) з будь-яких чисел. Якщо цей вектор подано бінарним рядком з нулів та одиниць, наприклад **010011**, то його отримано або з використанням двійкового кодування, або з допомогою коду Грея. Кожну позицію (біт) хромосоми називають ***геном***.

Індивідуум (генетичний код, особина) — набір хромосом (варіант вирішення завдання). Зазвичай особина складається з однієї хромосоми, тому в подальшому особина і хромосома — ідентичні поняття.

Відстань — хемінгова відстань між бінарними хромосомами.

Кросинговер (кросовер) — операція, при якій дві хромосоми обмінюються своїми частинами наприклад, $\mathbf{1100\,\&\,1010 \Rightarrow 1110\,\&\,1000}$.

Мутація — випадкове змінення однієї або декількох позицій у хромосомі, наприклад $\mathbf{1010011 \Rightarrow 1010001}$.

Інверсія — змінення порядку проходження бітів у хромосомі або в її фрагменті, наприклад $\mathbf{1100 \Rightarrow 0011}$.

Популяція — сукупність індивідуумів.

Придатність (пристосованість) — критерій або функція, екстремум якої слід знайти.

Локус — позиція гена в хромосомі.

Алель — сукупність генів, розташованих поряд.

Епістаз — вплив гена на придатність індивідуума залежно від значення гена, присутнього в іншому місці. Ген уважають епістатичним, коли його присутність пригнічує вплив гена в іншому локусі.

З наведених вище означень випливає, що термінологія ГА являє собою синтез власно генетичних і штучних понять. Так, для поняття, запозиченого з генетики, можна знайти його штучний (символічний) аналог.

5.2. Основні принципи роботи ГА

1. Генеруємо початкову популяцію з n хромосомами.
2. Обчислюємо для кожної хромосоми її придатність.
3. Вибираємо пару хромосом-батьків з допомогою одного зі способів відбору.
4. З ймовірністю p_c проводимо кросинговер двох батьків, виробляючи двох потомків.
5. Проводимо мутацію потомків з імовірністю p_m.
6. Повторюємо кроки 3–5 доти, доки не буде згенеровано нове покоління популяції, що містить n хромосом.
7. Повторюємо кроки 2–6 доти, доки не буде досягнуто критерію завершення процесу.

5.3. Оператори вибору батьків

Існує кілька підходів до вибору батьківської пари.

Панміксія — найпростіший оператор відбору. Відповідно до нього кожному члену популяції ставиться у відповідність випадкове ціле число на відрізку $[1;n]$, де n — кількість особин в популяції. Будемо розглядати ці числа як номери особин, які візьмуть участь у схрещуванні. При такому виборі якісь із членів популяції не будуть брати участі в процесі розмноження, оскільки утворюють пару самі з собою. Якісь члени популяції візьмуть участь у процесі відтворення неодноразово з різними особинами популяції.

Інбридинг являє собою такий метод, коли один із батьків вибирається випадковим чином, а інший — це член популяції, найближчий до першого. Тут «найближчим» вважається мінімальна відстань Хеммінга (для бінарних рядків) або евклідова відстань між двома дійсними векторами. Відстань Хемінга дорівнює кількості локусів (розрядів), що є різними в бінарному рядку.

Приклад визначення спорідненості бінарних хромосом при виборі батьківської пари для хромосоми **1010001** наведено в табл. 5.1.

Під час ***аутбридингу*** також використовують поняття схожості особин. Однак тепер пари батьків формують з максимально далеких особин.

Останні два способи по-різному впливають на поведінку генетичного алгоритму. Так, інбридинг можна охарактеризувати властивістю концентрації пошуку в локальних вузлах, що фактично приводить до розбиття популяції на окремі локальні групи навколо підозрілих на екстремум ділянок ландшафту. Аутбридинг же спрямований на запобігання збіжності алгоритму до вже знайдених рішень, коли за алгоритмом переглядаються нові, недосліджені області. Інбридинг і аутбридинг бувають генотипічними (коли як відстань береться різниця значень цільової функції для відповідних особин) і фенотипічними (коли як відстань береться відстань Хеммінга).

Таблиця 5.1

Хемінгова відстань
між хромосомами популяції і хромосомою **1010001**

Хромосоми популяції	Кількість локусів, що є різними
1000000	2
1010101	1
1111111	4
1100001	2
0110011	3
0100011	4
0011100	4
0000000	3

Селекція полягає в тому, що батьками можуть стати тільки ті особини, значення пристосованості яких не менше порогової величини, наприклад, середнього значення пристосованості по популяції. Такий підхід забезпечує більш швидку збіжність алгоритму.

Однак через швидку збіжність селективний вибір батьківської пари не підходить тоді, коли ставиться завдання визначення декількох екстремумів, оскільки для таких завдань алгоритм зазвичай швидко збігається до одного з рішень. Крім того, для деяких багатовимірних задач зі складним ландшафтом цільової функції швидка збіжність може перетворитися на передчасну збіжність до квазіоптимального рішення. Цей недолік може бути частково компенсований використанням такого механізму відбору, який би «гальмував» занадто швидку збіжність алгоритму.

Порогова величина в селекції може бути обчислена різними способами, тому в літературі з ГА описано різні варіації селекції. Найбільш відомі з них — турнірний і рулетковий (пропорційний) відбори.

При турнірному відборі *(tournament selection)* з популяції, що складається з ***N*** особин, вибирають випадковим чином ***t*** особин, і найкраща з них особина записується в проміжний масив (рис. 5.1). Ця операція повторюється ***N*** разів. Особини в отриманому проміжному масиві потім використовуються для схрещування (також випадковим чином). Розмір групи рядків, що відбираються для турніру, часто дорівнює 2. У цьому випадку кажуть про двійковий (парний) турнір. Взагалі ж ***t*** називають чисельністю турніру. Перевагою цього способу є те, що він не потребує додаткових обчислень.

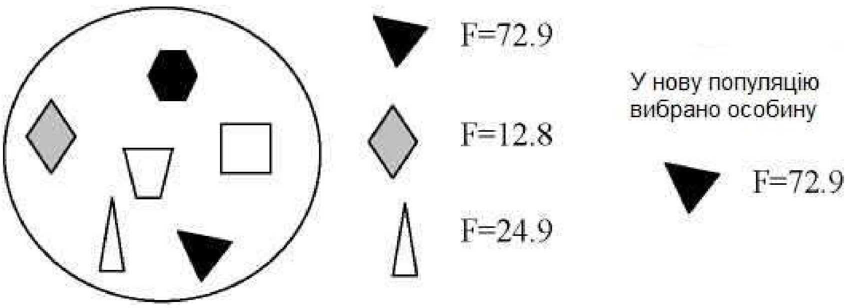

Рис. 5.1. Турнірний відбір

У рулетковому методі *(roulette-wheel selection)* особини відбираються за допомогою N «запусків» рулетки, де N — розмір популяції. Колесо рулетки містить по одному сектору для кожного члена популяції. Розмір i-го сектора є пропорційним імовірності потрапляння в нову популяцію

$$P(i)=\frac{f(i)}{\sum_{i=1}^{n} f(i)},$$

де $f(i)$ — придатність i-ї особини. Очікувана кількість копій i-ї хромосоми після оператора рулетки визначається формулою $N_i = P(i)N$.

При такому відборі члени популяції з більш високою пристосованістю з більшою ймовірністю будуть частіше вибиратися, ніж особини з низькою пристосованістю (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Метод рулетки

Популяція із 5 особин	Придатність	Імовірність вибору
C_1	52	52/200 = 0,26
C_2	85	85/200 = 0,425
C_3	37	37/200 = 0,185
C_4	3	3/200 = 0,015
C_5	23	23/200 = 0,115

Інші способи відбору можна отримати на основі модифікації способів, наведених вище. Так, наприклад, у рулетковому відборі можна змінити формулу для ймовірності потрапняння особини в нову популяцію.

Рекомбінація

Оператор рекомбінації застосовують відразу ж після оператора відбору батьків для отримання нових особин-потомків. Значення рекомбінації полягає в тому, що створені потомки мають наслідувати генну інформацію від обох батьків. Розрізняють дискретну рекомбінацію і кросинговер.

Дискретна рекомбінація (Discrete recombination) в основному застосовується до хромосом з дійсними генами. Основними способами дискретної рекомбінації є власне дискретна рекомбінація, проміжна, лінійна й розширена лінійна рекомбінації.

Дискретна рекомбінація відповідає обміну генами між особинами. Для ілюстрації цього оператора порівняємо дві особини з трьома генами:

Особина 1	12	25	7
Особина 2	116	4	34

Для створення двох потомків з однаковою ймовірністю випадково виберемо номер особини для кожного гена:

Схема 1	2	2	1
Схема 2	1	2	1

Згідно зі схемою створимо потомків:

Потомок 1	116	4	7
Потомок 2	12	4	7

Дискретна рекомбінація може бути застосована для будь-якого типу генів (двійкові, дійсні й символьні).

Проміжна рекомбінація (Intermediate recombination) може бути застосована лише до дійсних змінних (до бінарних неможливо). У цьому методі попередньо визначається числовий інтервал значень генів потомків, який має містити значення генів батьків. Потомки створюються за таким правилом:

$$\text{Потомок} = \text{Батько 1} + \alpha(\text{Батько 2} - \text{Батько 1}),$$

де множник α — випадкове число на відрізку $[-\boldsymbol{d}, \mathbf{1}+\boldsymbol{d}]$, $\boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$. Як зазначають прихильники цього методу, найбільш оптимальне відтворення досягається при $\boldsymbol{d} = \mathbf{0{,}25}$. Для кожного гена створюваного потомка вибирається окремий множник α.

Розглянемо застосування оператора на прикладі. Нехай два батьки мають такі значення генів:

Особина 1	12	25	7
Особина 2	116	4	34

Випадково виберемо значення $\alpha \in [-\mathbf{0{,}25}; \mathbf{1{,}25}]$ для кожного гена обох потомків:

Схема 1	0,5	1,1	-0,1
Схема 2	0,1	0,8	0,5

Обчислимо значення генів потомків за запропонованою вище формулою:

Потомок 1	12+0,5(116-12)=64	25+1,1(4-25)=1,9	4,3
Потомок 2	12+0,1(116-12)=22,4	25+0,8(4-25)=8,2	20,5

При проміжній рекомбінації виникають значення генів, відмінні від значення генів особин-батьків. Це приводить до виникнення нових особин, придатність яких може бути кращою, ніж придатність батьків. У літературі такий оператор рекомбінації іноді називають *диференціальним схрещуванням.*

Лінійна рекомбінація (Line recombination) відрізняється від проміжної тим, що множник α вибирається для кожного потомка один раз.

Розглянемо гени наведених вище батьків. Нехай α визначається таким чином:

Схема 1	0,5
Схема 2	0,1

Тоді гени створених потомків набудуть таких значень:

Потомок 1	12+0,5(116-12)=64	25+0,5(4-25)=14,5	20,5
Потомок 2	12+0,1(116-12)=22,4	25+0,1(4-25)=22,9	9,7

Якщо розглядати особини популяції як точки в $\boldsymbol{k}$-вимірному просторі, де $\boldsymbol{k}$ — кількість генів однієї особини, то можна сказати, що при лінійній рекомбінації генеруються точки потомків, і вони належать прямій, заданій двома точками-батьками.

Кросинговер (бінарна рекомбінація)

Рекомбінацію бінарних рядків прийнято називати кросинговером (кросовером) або схрещуванням.

Одноточковий кросинговер (Single-point crossover) моделюється таким чином. Нехай є дві батьківські особини з хромосомами $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{i} \in [\mathbf{0}; \boldsymbol{L}]\}$ і $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{i} \in [\mathbf{0}; \boldsymbol{L}]\}$. Випадковим чином визначається точка всередині хромосоми (точка розриву), у якій обидві хромосоми діляться на дві частини й обмінюються ними. Такий тип кросинговеру називають одноточковим, оскільки при ньому батьківські хромосоми поділяються тільки в одній випадковій точці.

У ***двоточковому кросинговері (і багатоточковому кросинговері*** взагалі) хромосоми розглядаються як цикли, що формуються внаслідок з'єднання кінців лінійної хромосоми (рис. 5.2).

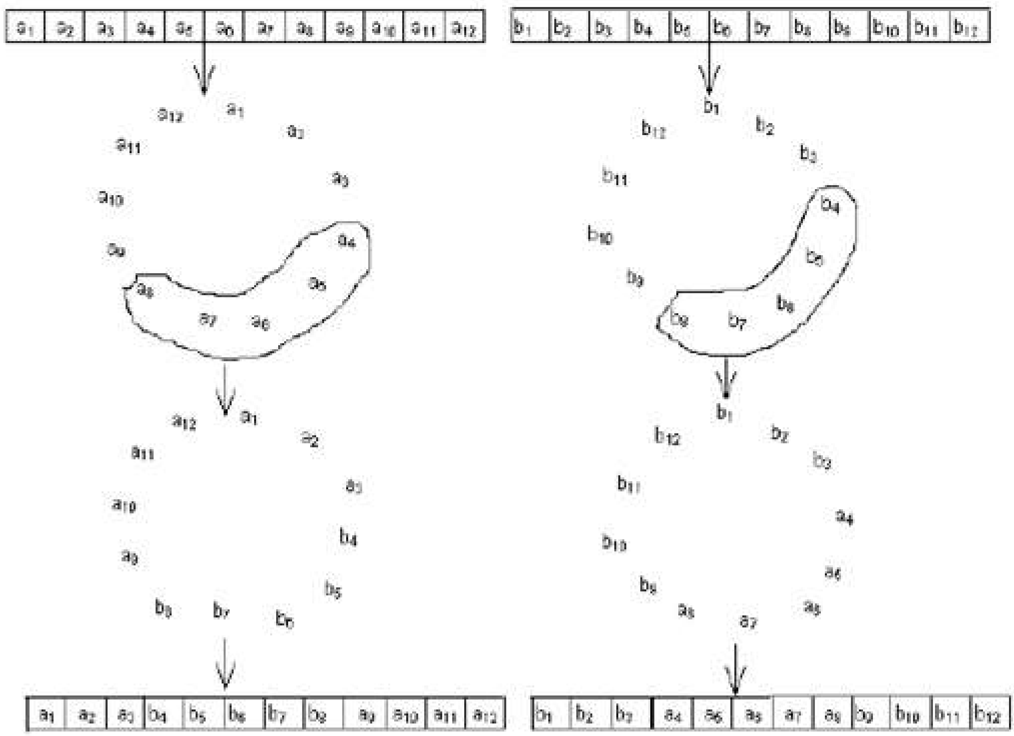

Рис. 5.2. Двоточковий кросинговер

Для заміни сегмента одного циклу сегментом іншого циклу потребується вибір двох точок розрізу. Тобто, одноточковий кросинговер може бути розглянутий як кросинговер з двома точками, але з однією точкою розрізу, зафіксованою на початку рядка.

Приклад 5.1. Описати функціонування однієї епохи генетичного алгоритму на прикладі довільної задачі (випадковим чином закодувати не менше п'яти ознак, початкова популяція містить не менше 10 особин). Використовувати такі параметри генетичного алгоритму: фітнес-функція — сума всіх бітів, поділена на середнє значення суми бітів особин популяції; метод відбору — рулетка з принципом елітизму; оператор схрещування — двоточковий кросовер; оператор мутації — одиночна мутація.

Для використання генетичного алгоритму необхідно:

– визначити набір ознак, що характеризують розв’язання задачі оптимізації або моделювання, і фенотип, закодувати ознаки (можна використовувати код Грея);

– використовувати послідовність кроків генетичного алгоритму з відповідними операторами.

Розв’язання

Визначаємо фенотип (задаємо десяткові значення випадковим чином):

Ознака	Двійкове значення ознаки	Десяткове значення ознаки	Код Грея
Ознака 1	0011	3	0010
Ознака 2	1100	12	1010
Ознака 3	1110	14	1001
Ознака 4	0111	7	0100
Ознака 5	1001	9	1101

Крок 1 — формування початкової популяції. Визначено п'ять ознак, нехай особина містить будь-які дві з них (дві перші — значення першого критерію, три останні — другого), випадковим чином згенеруємо 10 особин, кожна особина завдовжки 8 бітів:

Особина 1: 00111110;
Особина 2: 11001110;
Особина 3: 00111001;
Особина 4: 11001001;
Особина 5: 00110111;
Особина 6: 00111110;
Особина 7: 11000111;
Особина 8:00110111;
Особина 9: 10101010;
Особина 10: 01010101.

Крок 2 — оцінювання особин популяції. Використовується фітнес-функція, що дорівнює сумі бітів особини:

Особина	Сума бітів особини	Придатність особини
1	5	1,389
2	5	1,389
3	4	1,112
4	4	1,112
5	5	1,389
6	5	1,389
7	5	1,389
8	5	1,389
9	4	1,112
10	4	1,112

Середнє значення суми бітів у популяції — 3,6.

Крок 3 — відбір. Використовується метод відбору — рулетка з принципом елітизму.

Будуємо рулетку (сектори пропорційні пристосованості, рис. 5.3) і запускаємо її 8 разів (вибираємо 4 пари, рис. 5.4):

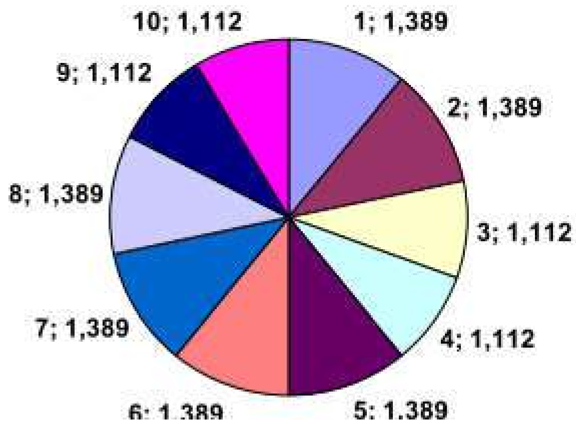

Рис. 5.3. Рулетка для задачі генетичного алгоритму

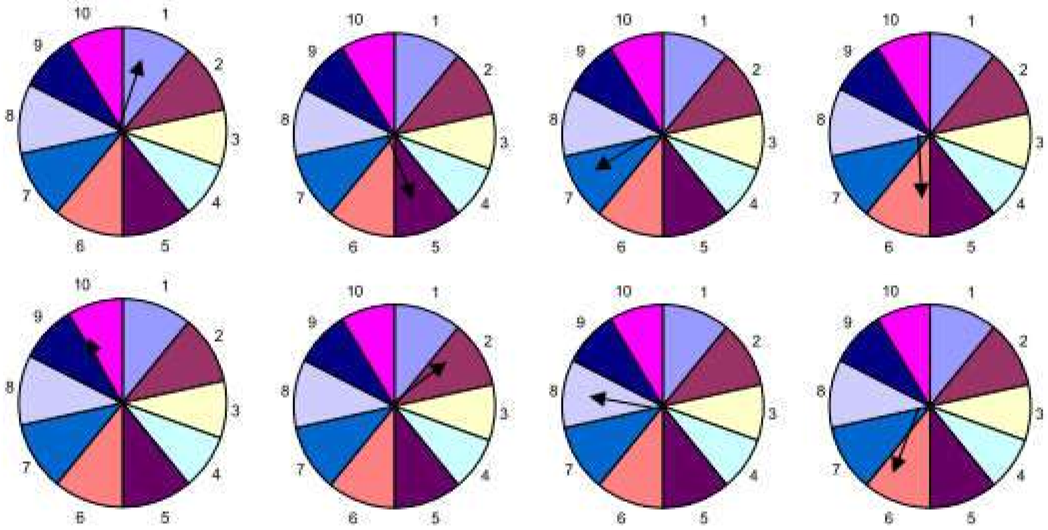

Рис. 5.4. Запуски рулетки для задачі генетичного алгоритму

Таким чином, утворилися такі пари: 1 і 5, 7 і 5, 10 і 2, 8 і 6.

Крок 4 — схрещування. Використовується оператор — двоточковий кросовер:

особина 1: 00|111|110;	$\longrightarrow$	особина 2.1: 00|110|110;
особина 5: 00|110|111;		особина 2.2: 00|111|111;
особина 7: 11|000|111;	$\longrightarrow$	особина 2.3: 11|110|111;
особина 5: 00|110|111;		особина 2.4: 00|000|111;
особина 10: 01|010|101;	$\longrightarrow$	особина 2.5:01|001|101;
особина 2: 11|110|111;		особина 2.6: 11|010|110;
особина 6: 00|111|110;	$\longrightarrow$	особина 2.7: 00|110|110;
особина 8: 00|110|111;		особина 2.8: 00|111|111.

Вибираємо дві точки розриву (випадковим чином, але числа мають відрізнятися хоча б на 2 і не дорівнювати 1 або довжині особини) — 2 і 5, застосовуємо оператор до вибраних пар особин.

Крок 5 — мутація (використовуваний оператор — одноточкова мутація). Визначили ймовірність мутації (30 %) і біт, що піддається мутації (третій):

Особина	Випадкове число	Особина	Мутована особина
1	5	00111110	00011110
2	33	11001110	
3	67	00111001	
4	78	11001001	
5	90	00110111	
6	12	00111110	00011110
7	45	11000111	
8	53	00110111	
9	74	10101010	
10	29	01010101	01110101

Крок 6 — формування нової популяції:

Особина 2.1: 00110110 Особина 2.2: 00111111	Особина 2.5:01001101 Особина 2.6: 11010110	Особина 2.9: 00011110 Особина 2.10: 00011110
Особина 2.3: 11110111 Особина 2.4: 00000111	Особина 2.7: 00110110 Особина 2.8: 00111111	Особина 2.11: 01110101 Особина 2.12: 00111110

Маємо: 1–8 — потомки, 9–11 — особини, що мутують, 12 — особина з максимальною пристосованістю за принципом елітизму.

Крок 7. Популяція є досить різноманітною — немає ознак збіжності. Оскільки розглядається лише одна епоха генетичного алгоритму, виходимо з алгоритму.

5.4. Деякі моделі ГА

У моделі ***Genitor (Whitley)*** використовується специфічна стратегія відбору. На кожному кроці тільки одна пара випадкових батьків створює тільки одного потомка, який заміняє не одного з батьків, а одну з найгірших особин популяції. Таким чином, на кожному етапі в популяції оновлюється тільки одна особина.

Дослідження показали, що пошук гіперплощин відбувається краще, а збіжність — швидше, ніж у класичному ГА.

CHC (Eshelman) — це Cross generational elitist selection, Heterogenous recombination, Cataclysmic mutation.

Для нового покоління вибираються ***N*** кращих особин серед батьків і потомків. Дублювання рядків не допускається.

Для схрещування всі особини розбиваються на пари, але схрещуються лише ті пари, між якими відстань Хеммінга є більшою від деякої порогової (також може бути встановлено обмеження на мінімальну відстань між різними крайніми бітами).

При схрещуванні використовується так званий HUX-оператор (Half Uniform Crossover), різновид однорідного кросовера — кожному потомку переходить рівно половина бітів кожного з батьків.

Розмір популяції є невеликим. Цим виправдано використання однорідного кросовера.

Цей алгоритм досить швидко збігається, тому що в ньому немає мутацій. У цьому випадку в СНС застосовується cataclysmic mutation: усі рядки, крім найбільш пристосованої особини, піддаються сильній мутації (змінюється близько третини бітів). Таким чином, алгоритм перезапускається і далі продовжує роботу із застосуванням тільки кросовера.

Hybrid algorithm (Davis). Використання гібридного алгоритму дає змогу об'єднати переваги ГА з перевагами класичних методів.

Справа в тому, що ГА дають змогу знаходити задовільне рішення, але знаходження оптимального рішення часто є набагато більш важким завданням через стохастичність принципів роботи алгоритму. Тому виникла ідея використовувати ГА на початковому етапі для ефективного звуження простору пошуку навколо глобального екстремуму, а потім, узявши кращу особину, застосувати один з класичних методів оптимізації.

Однак можна використовувати класичні методи (hill-climbing, наприклад) і всередині самих ГА. У кожному поколінні отриманий потомок оптимізується цим методом, таким чином, кожна особина набуває локального максимуму, поблизу якого вона знаходиться, після чого піддається відбору, схрещуванню й мутації. Такий метод погіршує здатність алгоритму шукати рішення з допомогою відбору гіперплощин, натомість збільшується ймовірність того, що одна особина потрапить в область глобального максимуму і після оптимізації виявиться розв’язком задачі.

Island Models. Острівна модель (island model) — модель паралельного генетичного алгоритму (рис. 5.5). Розіб'ємо популяцію на кілька підпопуляцій. Кожна з них буде розвиватися окремо за якимось генетичним алгоритмом. Таким чином, можна сказати, що ми розселили особини на декількох ізольованих островах.

Деколи (наприклад, кожні п'ять поколінь) відбувається міграція — острови обмінюються кількома хорошими особинами.

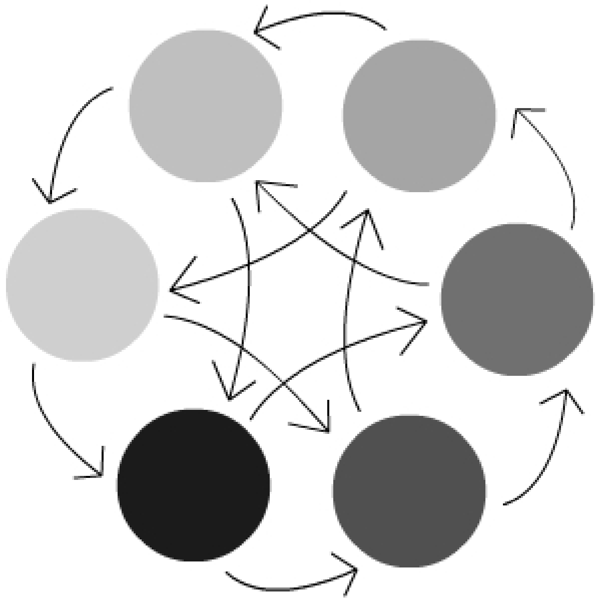

Рис. 5.5. Острівна модель генетичного алгоритму

Оскільки населеність островів є невеликою, підпопуляції будуть схильними до передчасної збіжності. Тому важливо правильно встановити частоту міграції:

• надто часта міграція (або міграція занадто великої кількості особин) призведе до змішання всіх підпопуляцій, і тоді острівна модель буде несильно відрізнятися від звичайного ГА;

• якщо міграція буде занадто рідкою, то вона не зможе запобігти передчасній збіжності підпопуляцій.

Генетичний алгоритм є стохастичним, тому при різних його запусках популяція може збігатися до різних хороших рішень. Острівна модель дає змогу запустити алгоритм одразу кілька разів і поєднати «досягнення» різних островів для отримання найкращого рішення.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Нечіткість і невизначеність, що виникає в процесі постановки завдання.

2. Класифікація невизначеностей.

3. Моделі опису невизначених даних: імовірнісно-статистична, нечітка, інтервальна.

4. Застосування біонічних принципів в інформаційних технологіях.

5. Нечітке моделювання. Класифікація й переваги нечітких моделей.

6. Модель задачі багатокритеріального вибору. Аксіома Парето.

7. Множина Парето.

8. Принцип Еджворта – Парето.

9. Розширення системи «розумних» аксіом.

10. Алгоритм знаходження множини Парето.

11. Шкали критеріїв та інваріантність множини Парето.

12. Відносна важливість критеріїв. Звуження множини Парето на основі інформації про відносну важливість критеріїв.

13. Експертне оцінювання як процес вимірювання.

14. Методи вимірювання ступеня впливу об'єктів.

15. Метод аналізу ієрархій (МАІ). Ієрархічне подання проблеми.

16. Матриця відносних ваг. Матриця порівнянь парами.

17. Оцінювання однорідності суджень. Синтез пріоритетів на ієрархії й оцінювання її однорідності.

18. Урахування думок декількох експертів.

19. Опис МАІ.

20. Спрощені варіанти методу МАІ.

21. Методи оброблення й узгодження думок експертів (пряма методика, принцип групового ранжування, узагальнена методика на основі стохастичних сценаріїв).

22. Оцінювання об'єктів з використанням нечіткого методу Дельфі.

23. Нечіткий багатокритеріальний аналіз варіантів.

24. Багатокритеріальний вибір альтернатив на основі перетину нечітких множин.

25. Багатокритеріальний вибір альтернатив при нечіткому відношенні переваги.

26. Багатокритеріальний вибір альтернатив з використанням правила нечіткого висновку.

27. Ранжування альтернатив на множині лінгвістичних векторних оцінок.

28. Переваги й недоліки різних методів багатокритеріального аналізу варіантів. Області застосування.

29. Генетичні алгоритми (ГА). Основні поняття.

30. Зв'язок між звичайною (біологічною) і штучною термінологіями.

31. Класичний ГА.

32. Оператори вибору батьків, рекомбінації, мутації та селекції.

33. Моделі ГА (Genitor (Whitley), CHC (Eshelman), Hybrid algorithm (Davis), Island Models).

34. Фактори, що спричиняють складність для ГА. Модернізація ГА. Недоліки й переваги ГА.

35. Використання ГА для розв’язання задач оптимізації.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Черноруцкий, И. Г. Методы принятия решений / И. Г. Черноруцкий. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

2. Афоничкин, А. И. Управленческое решение в экономических системах : учеб. для вузов / А. И. Афоничкин, Д. Г. Михаленко. – СПб. : Питер, 2009. – 480 с.

3. Заде, Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1976. – 165 с.

4. Мураховська, О. А. Управління складними системами в умовах невизначеності : навч. посіб. / О. А. Мураховська. – Харків : ХАІ, 2010. – 88 с.

5. Моисеев, И. Н. Математические задачи системного анализа / И. Н. Моисеев. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 488 с.

6. Ногин, В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В. Д. Ногин. – М. : Физматлит, 2002. – 144 с.

7. Мушик, З. Методы принятия технических решений / З. Мушик, П. Мюллер. – М. : Мир, 1990. – 208 с.

8. Колпаков, В. М. Теория и практика принятия управленческих решений : учеб. пособие / В. М. Колпаков. – Киев : МАУП, 2004. – 504 с.

9. Борисов, А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. – Рига : Зинатне, 1990. – 184 с.

10. Орловский, С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 206 с.

11. Раскин, Л. Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / Л. Г. Раскин, О. В. Серая. – Харьков : Парус, 2008. – 352 с.

12. Бочарников, В. П. Прогнозные коммерческие расчеты и анализ рисков на Fuzzy for Excel / В. П. Бочарников, С. В. Свешников, С. Н. Возняк. – Киев : Ника-Центр, Эльга, 2000. – 159 с.

13. Павлов, А. Н. Принятие решений в условиях нечеткой информации : учеб. пособие / А. Н. Павлов, Б. В. Соколов. – СПб. : ГУАП, 2006. – 72 с.

14. Хаптахаева, Н. Б. Введение в теорию нечетких множеств : учеб. пособие / Н. Б. Хаптахаева, С. В. Дамбаева, Н. Н. Аюшева. – Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2004. – 68 с.

15. Прикладные нечеткие системы : пер. с яп. / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. – М. : Мир, 1993. – 368 с.

16. Блюмин, С. Л. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности / С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова. – Липецк : ЛЭГИ, 2001. – 138 с.

17. Пономарёв, О. С. Нечеткие множества в задачах автоматизированного управления и принятия решения : учеб. пособие / О. С. Пономарёв. – Харьков : НТУ „ХПІ", 2005. – 232 с.

18. Штовба, С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB / С. Д. Штовба. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.

19. Юдин, Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин. – М. : Сов. радио, 1974. – 400 с.

20. Иваненко, В. И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. – Киев : Наук. думка, 1990. – 134 с.

21. Раскин, Л. Г. Формирование скалярного критерия предпочтения по результатам попарных сравнений объектов / Л. Г. Раскин, О. В. Серая // Вісн. Нац. техн. ун-ту НТУ „ХПІ". – 2003. – № 6. – С. 63–68.

22. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной / А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, О. А. Крумберг и др. – Рига : Зинатне, 1982. – 256 с.

23. Саак, А. Э. Разработка управленческого решения : учеб. для вузов / А. Э. Саак, В. Н. Тюшняков. – СПб. : Питер, 2007. – 272 с.

24. Панченко, Т. В. Генетические алгоритмы : учеб. пособие / Т. В. Панченко; под ред. Ю. Ю. Тарасевича. – Астрахань : Астраханский университет, 2007. – 87 с.

25. Липатова, С. В. Сборник задач по курсу «Интеллектуальные информационные системы» / С. В. Липатова. – Ульяновск : УлГУ, 2010 – 64 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Мураховська Олена Анатоліївна
Українець Наталія Анатоліївна

ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2020
Підписано до видання 24.07.2020
Ум. друк. арк. 7,8. Обл.-вид. арк. 8,81. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khau.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001