К. П. Барахов, С. С. Курєннов, О. І. Соловйов

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

К. П. Барахов, С. С. Курєннов, О. І. Соловйов

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК [51;53+517.95](075.8)
Б24

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Н. В. Сметанкіна,
д-р техн. наук, проф. О. О. Стрельнікова

Барахов, К. П.
Б24 Рівняння математичної фізики [Електронний ресурс] : навч. посіб. / К. П. Барахов, С. С. Курєннов, О. І. Соловйов. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. – 175 с.

Викладено основні розділи математичної фізики в обсязі, рекомендованому для інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Запропоновано лише той теоретичний матеріал, який викладається на лекціях, з деякими необхідними доповненнями, що допомагають зрозуміти викладене більш поглиблено. Подано тільки теорію лінійних рівнянь з частинними похідними в основному другого порядку. Детально описано виведення деяких рівнянь та основні типи рівнянь класичної математичної фізики. Серед методів розв'язання головну увагу приділено методам Фур'є, Даламбера та методу функцій Гріна.

Матеріал викладено так, щоб якнайкраще допомогти студенту оволодіти математичними методами та впевнено їх використовувати в майбутньому. З цією метою наведено розв'язання великої кількості задач. Кожен розділ містить теоретичний матеріал і детальне розв'язання задач і прикладів.

Для студентів, викладачів, аспірантів і наукових працівників, яким у їх практичній діяльності необхідно розв'язувати рівняння в частинних похідних.

Іл. 17. Бібліогр.: 14 назв

УДК [51;53+517.95](075.8)

ЗМІСТ

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1.1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними

У загальному випадку диференціальне рівняння з частинними похідними з *n* незалежними змінними має вигляд

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}) = 0. \qquad (1.1.1)$$

Будь-яку функцію $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, що перетворює рівняння (1.1.1) на тотожність у деякій області $D \subset \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, називають розв'язком цього рівняння. У рівняннях, пов'язаних з задачами фізики, незалежними змінними найчастіше є просторові координати x, y, z і час t.

Рівняння з частинними похідними класифікуються за такими ознаками:

1. Порядок рівняння. Порядком рівняння (1.1.1) називається найбільший порядок частинних похідних, що входять до цього рівняння. Рівняння (1.1.1) записано як рівняння *m*-го порядку.

2. Лінійність. Рівняння (1.1.1) називається лінійним, якщо функція F лінійно залежить від шуканої функції $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ та усіх її частинних похідних. Надалі розглядаються лише лінійні рівняння другого порядку як найбільш вивчені і важливі у застосуванні. Лінійне рівняння другого порядку з невідомою функцією $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ у найзагальнішому випадку має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu + f \quad (A_{ij} = A_{ji}), \qquad (1.1.2)$$

де $A_{ij} = A_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $B_i = B_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $C = C\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $f = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ – задані функції.

3. Однорідність. Рівняння (1.1.2) називається однорідним або неоднорідним залежно від того, чи буде $f = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \equiv 0$ або $f = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \neq 0$ в D.

4. Вигляд коефіцієнтів. Якщо коефіцієнти A_{ij}, B_i, C – числа, то (1.1.2) називається рівнянням зі сталими коефіцієнтами (в інших випадках – зі змінними коефіцієнтами).

5. Типи лінійних рівнянь другого порядку. Лінійному рівнянню (1.1.2) поставимо у відповідність квадратичну форму

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(x_1,x_2,...,x_n)\lambda_i\lambda_j \qquad (1.1.3)$$

відносно дійсних параметрів $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$. У кожній фіксованій точці $(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ коефіцієнти $A_{ij}=const$. Тоді, як відомо, квадратичну форму (1.1.2) з постійними коефіцієнтами деяким невиродженим лінійним перетворенням $\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_k$ $(i=1,2,...,n;\ \alpha_{ik}=const,\ \det(a_{ik})\neq 0)$ можна звести до вигляду

$$Q=K(\xi_1,\xi_2,...\xi_n)=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k^2\,. \qquad (1.1.4)$$

1.2. Зведення лінійних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними і зі змінними коефіцієнтами до канонічного вигляду

Розглянемо лінійне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними і в загальному випадку зі змінними коефіцієнтами $A=A(x,y),\ B=B(x,y),\ C=C(x,y)$:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+E\frac{\partial u}{\partial x}+G\frac{\partial u}{\partial y}+Hu+f(x,y)=0\ \ ((x,y)\in\Omega). \qquad (1.2.1)$$

Рівняння (1.2.1) можна звести до канонічного вигляду не тільки в окремо взятій точці (x,y), але і в деякій області $D\in\Omega$. Уважаємо, що в кожній точці $(x,y)\in\Omega$ хоча б один із коефіцієнтів A, B, C є відмінним від нуля.

Зробимо в рівнянні (1.2.1) заміну незалежних змінних x, y за формулами

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y)\quad ((x,y)\in D), \qquad (1.2.2)$$

які встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками (x,y) і (ξ,η) областей D і D'. Якщо функції (1.2.2) є неперервними й мають неперервні частинні похідні першого порядку в D, то якобіан

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}$$ є відмінним від нуля в області D.

Нехай, крім того, функції (1.2.2) мають неперервні частинні похідні другого порядку в області D. Тоді за формулами диференціювання складних функцій маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\underline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\underline{\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)}=$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]+\frac{\partial \psi}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Аналогічно обчислюються другі похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$. В індексних позначеннях

$$\begin{cases} u_x=\varphi_x u_\xi+\psi_x u_\eta,\, u_{xx}=\underline{\varphi_x^2 u_{\xi\xi}+2\varphi_x\psi_x u_{\xi\eta}+\psi_x^2 u_{\eta\eta}}+\varphi_{xx}u_\xi+\psi_{xx}u_\eta,\\ u_y=\varphi_y u_\xi+\psi_y u_\eta,\, u_{yy}=\underline{\varphi_y^2 u_{\xi\xi}+2\varphi_y\psi_y u_{\xi\eta}+\psi_y^2 u_{\eta\eta}}+\varphi_{yy}u_\xi+\psi_{yy}u_\eta,\\ u_{xy}=\underline{\varphi_x\varphi_y u_{\xi\xi}+\left(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x\right)u_{\xi\eta}+\psi_x\psi_y u_{\eta\eta}}+\varphi_{xy}u_\xi+\psi_{xy}u_\eta. \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

Підставивши (1.2.3) у рівняння (1.2.1) та об'єднавши складові з однаковими похідними, отримаємо перетворене рівняння

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0, \qquad (1.2.4)$$

де

$$a=A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2,$$

$$b=A\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+C\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad (1.2.5)$$

$$c=A\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2.$$

Функція Φ лінійно залежить від $u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}$ і визначається сумою $E\frac{\partial u}{\partial x}+G\frac{\partial u}{\partial y}+Hu+f(x,y)$.

Використовуючи формули (1.2.5), безпосередньою перевіркою можна встановити правильність тотожності

$$ac-b^2=(AC-B^2)J^2(x,y), \tag{1.2.6}$$

де $J(x,y)$ – виписаний вище якобіан відображення (1.2.2).

Розглянемо матрицю старших коефіцієнтів рівняння (1.2.1) $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ та її характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & A-\lambda \end{vmatrix}=0$ або

$$\lambda^2-(A+C)\lambda+AC-B=0. \tag{1.2.7}$$

Рівняння (1.2.7) має дійсні корені (власні значення) $\lambda_{1,2}=\dfrac{A+C\pm\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}$, оскільки $(A+C)^2-4(AC-B^2)=$ $=(A-C)^2+4B^2\ge 0$. Ці корені мають однакові знаки, якщо $\Delta=AC-B^2>0$, і різні знаки, якщо $\Delta<0$. Якщо $\Delta=0$, то один із коренів дорівнює нулю $(\lambda=0)$, а інший корінь $\lambda=A+C$ є відмінним від нуля. Звідси випливає, що рівняння (1.2.1) – еліптичне, якщо $AC-B^2>0$, гіперболічне, якщо $AC-B^2<0$, параболічне, якщо $AC-B^2=0$.

Оскільки якобіан $J(x,y)\neq 0 \quad (\forall(x,y)\in D)$, то тотожність (1.2.6) показує, що при заміні незалежних змінних за формулами (1.2.2) тип рівняння (1.2.1) не змінюється. Дійсно, оскільки $J^2(x,y)>0$, то $ac-b^2$ і $AC-B^2$ або мають однакові знаки, або одночасно перетворюються на нуль, тому що вираз (1.2.6) є тотожністю. Отже, задане рівняння (1.2.1) і перетворене рівняння (1.2.4) – одного типу.

Скористаємося заміною незалежних змінних (1.2.2) для зведення рівняння (1.2.1) до канонічного вигляду відразу в усій області D.

1. Якщо рівняння (1.2.1) гіперболічне ($AC-B^2<0$) в області D, то в ній існують такі функції $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, що заміною змінних (1.2.2) рівняння (1.2.1) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\Phi_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \quad (a=c=0);\Phi_1=\frac{\Phi}{b^2}. \tag{1.2.8}$$

Доведення:

1. Якщо $A\equiv 0,\ C\equiv 0$ в D, то за умовою $B\neq 0$ в D. Поділивши обидві частини рівняння (1.2.1) на $2B$, одразу отримуємо рівняння (1.2.8) при $\xi=x,\ \eta=y$.

2. Нехай A і C не перетворюються на нуль одночасно в області D. Для визначеності вважаємо, що $A\neq 0$ в D. Візьмемо за $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ у формулах (1.2.2) такі функції, що перетворюють на нуль коефіцієнти a і c перетвореного рівняння (1.2.4), тобто внаслідок

(1.2.5) є розв'язками диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0,\ A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=0. \quad (1.2.9)$$

Обидва рівняння (1.2.9) мають однакову структуру, тому замість двох рівнянь (1.2.9) достатньо розглянути одне рівняння

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2=0, \quad (1.2.10)$$

яке називається диференціальним рівнянням характеристик.

Лінія, що визначається рівнянням

$$\omega(x,y)=\overline{C}, \quad (1.2.11)$$

де $\overline{C}$ – довільна стала, $\omega(x,y)$ – розв'язок рівняння (1.2.10), називається характеристикою вихідного диференціального рівняння (1.2.1).

Рівняння (1.2.10) можна звести до звичайного диференціального рівняння. З цією метою візьмемо диференціали від обох частин (1.2.11). Тоді вздовж характеристик (1.2.11) виконується співвідношення $\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy=0$, звідки

$$\frac{\omega_x}{\omega_y}=-\frac{dy}{dx} \qquad \left(\omega_x=\frac{\partial\omega}{\partial x},\ \omega_y=\frac{\partial\omega}{\partial y}\right). \quad (1.2.12)$$

Переписавши рівняння характеристик (1.2.10) у вигляді $A\left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right)^2+2B\left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right)+C=0$ і використавши (1.2.12), отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C=0. \quad (1.2.13)$$

Отже, якщо $\omega(x,y)$ є частинним розв'язком рівняння (1.2.10), то співвідношення $\omega(x,y)=\overline{C}$ є загальним інтегралом (розв'язком у неявній формі) звичайного диференціального рівняння (1.2.13). Навпаки, якщо $\omega(x,y)=\overline{C}$ є загальним інтегралом рівняння (1.2.13), то, міркуючи в зворотному порядку, легко переконатися, що функція $\omega(x,y)$ задовольняє рівнянню характеристик (1.2.10). Тому звичайне диференціальне рівняння (1.2.13) також називається рівнянням характеристик.

Рівняння (1.2.13) розпадається на два рівняння вигляду $y'=f(x,y)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A};\ \ \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}. \tag{1.2.14}$$

Тут A, B, C у загальному випадку є функціями від x, y, і за умовою, що $A\neq 0,\ B^2-AC>0$ (розглядається гіперболічне рівняння: $AC-B^2<0$).

Нехай $\varphi(x,y)=\overline{C}_1,\ \psi(x,y)=\overline{C}_2$ – загальні інтеграли рівнянь (1.2.14). Тоді, відповідно до викладеного, ліві частини цих інтегралів і є шуканими функціями $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$, що перетворюють на нуль коефіцієнти a і c перетвореного рівняння (1.2.4).

При цьому коефіцієнт b не перетворюється на нуль в жодній точці області D, що відразу випливає з тотожності (1.2.6): $-b^2=(AC-B^2)J^2(x,y)$ $(a\equiv 0,\ b\equiv 0$ *за побудовою*$)$, оскільки за умовою пункту **1** $AC-B^2<0$ в D, тобто $AC-B^2\neq 0$. Оскільки з побудови (згідно із зазначеним вибором функцій $\varphi(x,y),\psi(x,y)$) випливає, що $a\equiv 0,\ b\equiv 0$ в перетвореному рівнянні (1.2.4), то після його ділення на $2b$ отримуємо рівняння (1.2.8).

Уводячи замість змінних $\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y)$ нові змінні

$$\xi_1=\xi+\eta=\varphi(x,y)+\psi(x,y),\ \ \eta_1=\xi-\eta=\varphi(x,y)-\psi(x,y), \tag{1.2.15}$$

доданок $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$ в (1.2.8), що визначає тип вихідного рівняння (1.2.1), зводимо до вигляду $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta_1^2}$, а саме рівняння (1.2.8) – до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1^2}+\Phi_2\left(\xi_1,\eta_1,u,\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)=0 \tag{1.2.16}$$

Дійсно, оскільки в нових змінних $u=u(\xi_1,\eta_1)$, то за формулами диференціювання складних функцій одержуємо

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u}{\partial\eta_1},\ \ \frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}+\frac{\partial u}{\partial\eta_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)\frac{\partial\xi_1}{\partial\xi}+ \tag{1.2.17}$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\eta_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\eta_1}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1^2},$$

тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1^2}. \tag{1.2.18}$$

Оскільки в рівнянні (1.2.16) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ і $\lambda_1,\ \lambda_2$ мають різні знаки, то відповідно до наведеної раніше класифікації воно є канонічним рівнянням гіперболічного типу.

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \left(x \neq 0,\ y \neq 0 \right).$$

Розв'язання. Тут $A = x^2,\ B = 0,\ C = -y^2,\ \Delta = AC - B^2 = -x^2 y^2 < 0$, тобто задане рівняння є гіперболічним в області $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0;0)$.

Складемо рівняння характеристик (1.2.13) $x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 = 0$. Для отримання загальних інтегралів $\varphi\left(x, y\right) = \overline{C}_1,\ \psi\left(x, y\right) = \overline{C}_2$ цього рівняння не обов'язково користуватися рівняннями (1.2.14). У цьому випадку рівняння можна записати у вигляді $(xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0$:

а) $xdy + ydx = 0,\ \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x},\ \ \ln|y| = -\ln|x| + \ln\left|\overline{C}_1\right|,$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{\overline{C}_1}{x}\right|,\ \ y = \frac{\overline{C}_1}{x},\ \ xy = \overline{C}_1,\ \ \textit{тобто}\ \varphi\left(x, y\right) = xy;$$

б) $xdy - ydx = 0,\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x},\ \ln|y| = \ln|x| + \ln\left|\overline{C}_2\right|,\ \ln|y| = \ln\left|\overline{C}_2 x\right|,$

$$y = \overline{C}_2 x,\ \ \frac{y}{x} = \overline{C}_2,\ \textit{тобто}\ \psi\left(x, y\right) = \frac{y}{x}.$$

Для отримання перетвореного рівняння (1.2.4) використовуємо формули (1.2.3):

$$\varphi_x = y,\ \varphi_y = x,\ \varphi_{xx} = 0,\ \varphi_{yy} = 0,\ \psi_x = -\frac{y}{x^2},\ \psi_y = \frac{1}{x},\ \psi_{xx} = \frac{2y}{x^3},\ \psi_{yy} = 0;$$

$$u_{xx} = \varphi_x^2 u_{\xi\xi} + 2\varphi_x \psi_x u_{\xi\eta} + \psi_x^2 u_{\eta\eta} + \varphi_{xx} u_\xi + \psi_{xx} u_\eta = y^2 u_{\xi\xi} - \frac{2y^2}{x^2} u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3} u_\eta,$$

$$u_{yy} = \varphi_y^2 u_{\xi\xi} + 2\varphi_y \psi_y u_{\xi\eta} + \psi_y^2 u_{\eta\eta} + \varphi_{yy} u_\xi + \psi_{yy} u_\eta = x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2} u_{\eta\eta};$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = x^2 y^2 u_{\xi\xi} - 2y^2 u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x} u_\eta - y^2 x^2 u_{\xi\xi} -$$

$$-2y^2 u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} = -4y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u_\eta = 0;\ \ u_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy} u_\eta = 0.$$

Оскільки $\xi = \gamma\left(x, y\right) = xy$, то перетворене рівняння має вигляд $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$. Використовуючи перетворення (1.2.15) і формули (1.2.17), (1.2.18), отримаємо $2\xi = \xi_1 + \eta_1$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}-\frac{1}{\xi_1+\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}-\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)=0,\ \Phi_2=-\frac{1}{\xi_1+\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}-\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right).$$

Це і є канонічний вигляд заданого рівняння, яке можна отримати перетворенням незалежних змінних x, y до нових змінних ξ_1, η_1 за формулами

$$\xi_1=\xi+\eta=\varphi(x,y)+\psi(x,y)=xy+\frac{y}{x},\ \ \eta_1=\xi-\eta=\varphi(x,y)-\psi(x,y)=xy-\frac{y}{x}.$$

2. Якщо рівняння (1.2.1) – еліптичне ($AC-B^2>0$) в області D, то в ній існують такі функції $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$, що заміною змінних (1.2.2) рівняння (1.2.1) зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0. \qquad (1.2.19)$$

Тут, як і в пункті **1**, обмежимося описом процедури відшукання функцій $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$, не задаючись питанням про умови їх існування.

Оскільки $AC-B^2>0$, то в рівняннях (1.2.14) дискримінант $B^2-AC<0$, тобто

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A}+i\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A},\ \ \frac{dy}{dx}=\frac{B}{A}-i\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}\ \ (AC-B^2>0), \qquad (1.2.14')$$

отже, загальні інтеграли рівнянь (1.2.14) або (1.2.14') є функціями комплексної змінної.

Нехай $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=\overline{C}_1$ – загальний інтеграл першого рівняння (1.2.14), або, що те ж саме, (1.2.14'). Оскільки права частина другого рівняння (1.2.14') комплексно сполучена з правою частиною першого рівняння (1.2.14'), то $\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=\overline{C}_2$ – загальний інтеграл другого рівняння (1.2.14').

Нові змінні ξ і η є, як установлено вище, лівими частинами цих загальних інтегралів. Тому заміна змінних x, y на змінні $\xi=\varphi(x,y)+i\psi(x,y),\ \eta=\varphi(x,y)-i\psi(x,y)$ знову дає рівняння (1.2.8). Зробимо ще одну заміну змінних:

$$\xi_1=\frac{1}{2}(\xi+\eta)=\varphi(x,y),\ \ \eta_1=-\frac{1}{2}i(\xi-\eta)=i\psi(x,y). \qquad (1.2.20)$$

Тоді доданок $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ в (1.2.8) набуває вигляду $\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\right)$.

Дійсно, за формулами диференціювання складних функцій маємо

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+\frac{1}{2}i\frac{\partial u}{\partial \eta_1},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+i\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+i\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+i\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}+i\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1\partial \eta_1}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1\partial \eta_1}+i\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\right)+\frac{1}{4}i\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1\partial \eta_1}-\frac{1}{4}i\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1\partial \eta_1}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\right).$$

Отже, після заміни (1.2.20) рівняння (1.2.8) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}+\Phi_2\left(\xi_1,\eta_1,u,\frac{\partial u}{\partial \xi_1},\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)=0 \qquad (1.2.21)$$

і лише позначеннями незалежних змінних відрізняється від рівняння (1.2.19). Тому на практиці в формулах (1.2.20) і рівнянні (1.2.21) можна відкинути індекс 1. Тоді формули перетворення

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y), \qquad (1.2.22)$$

де $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$ – дійсна й уявна частини загального інтеграла $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=\overline{C_1}$ першого рівняння (1.2.14'), одразу зводять вихідне рівняння (1.2.1) до канонічного вигляду.

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$\left(1+x^2\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\left(1+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Розв’язання. Тут $A=\left(1+x^2\right)^2,\ B=0,\ C=1,\ \Delta=AC-B^2=$ $=\left(1+x^2\right)^2>0$, тобто задане рівняння є еліптичним в області $D=\mathbb{R}^2$. Складемо рівняння характеристик (1.2.13): $\left(1+x^2\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0.$ Звідси $\left[\left(1+x^2\right)dy\right]^2+(dx)^2=0;\left(dy+i\frac{dx}{1+x^2}\right)\left(dy-i\frac{dx}{1+x^2}\right)=0,$ тобто рівняння характеристик розпадається на два рівняння: $dy+i\frac{dx}{1+x^2}=0$, $dy-i\frac{dx}{1+x^2}=0$. Відповідно до викладеного вище достатньо обмежитися першим із них. Інтегруючи його, маємо $\int dy+i\int\frac{dx}{1+x^2}=\overline{C}_1,\ y+iarctgx=\overline{C}_1$, тобто $\varphi(x,y)=y,\ \psi(x,y)=arctgx$.

Отже, перетворення (1.2.22) має вигляд $\xi=y,\ \eta=arctgx$.

Для отримання канонічного рівняння (1.2.19) використовуємо формули (1.2.3):

$$\varphi_x \equiv 0,\ \varphi_y = 1,\ \psi_x = \frac{1}{1+x^2},\ \psi_y \equiv 0, \varphi_{xx} \equiv 0,\ \psi_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ \varphi_{yy} \equiv 0,\ \psi_{yy} \equiv 0,$$

$$u_x = \frac{1}{1+x^2} u_\eta,\ u_{xx} = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} u_{\eta\eta} - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} u_\eta,\ u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

Підставляючи ці частинні похідні в задане рівняння, одразу отримуємо канонічне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \text{ (рівняння Лапласа).}$$

3. Якщо рівняння (1.2.1) є параболічним ($AC - B^2 = 0$) в області D, то в ній існують такі функції $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$, що заміною змінних (1.2.2) рівняння (1.2.1) можна звести до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \qquad (1.2.23).$$

Процедура відшукання функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ полягає в такому. Спочатку знаходимо таку функцію $\varphi(x,y)$, яка перетворює на нуль коефіцієнт a перетвореного рівняння (1.2.4). Оскільки $AC - B^2 = 0$ або $B^2 - AC = 0$, то замість двох рівнянь (1.2.14) отримуємо лише одне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} \quad (A \neq 0). \qquad (1.2.24)$$

Нехай $\varphi(x,y) = \overline{C}$ – загальний інтеграл рівняння (1.2.24). Тоді, відповідно до викладеного вище, ліва частина цього інтеграла і є шуканою функцією $\varphi(x,y)$, що перетворює на нуль коефіцієнт a рівняння (1.2.4). Тоді з огляду на умову параболічності $AC - B^2 = 0$ і рівність $a = 0$ тотожність (1.2.6) набуває вигляду $-b^2 = 0$, звідки $b = 0$. Як функцію $\psi(x,y)$ можна взяти будь-яку функцію, що є двічі диференційовною й не перетворює на нуль коефіцієнт c у перетвореному рівнянні (1.2.4), тобто таку, що

$$A\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \quad ((x,y) \in D). \qquad (1.2.25)$$

Оскільки $a = 0,\ b = 0$, то і при заміні змінних (1.2.2) рівняння (1.2.4) набуде вигляду

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \ (C \neq 0) \text{ або}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \Phi_2 = \frac{\Phi_1}{C}.$$

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x\neq 0, y\neq 0).$$

Розв'язання. Тут $A=y^2,\ B=xy,\ C=x^2,\ \Delta=AC-B^2\equiv 0$, тобто задане рівняння – параболічне в області $D=\mathbb{R}^2\setminus(0;0)$. Складемо рівняння характеристик (1.2.24): $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$. Звідси $2ydy-2xdx=0$, $2\int ydy-2\int xdx=\overline{C},\ y^2-x^2=\overline{C}$ – загальний інтеграл. Отже, $\xi=\varphi(x,y)=y^2-x^2$. Як функцію $\psi(x,y)$ можна взяти $\eta=\ \psi(x,y)=x^2$. Легко перевірити, що при цьому умова (1.2.25) виконується. Для отримання перетвореного рівняння (1.2.4), як і вище, використовуємо формули (1.2.3). Маємо

$$\varphi_x=-2x,\ \varphi_y=2y,\ \psi_x=2x,\ \psi_y\equiv 0,\ \varphi_{xx}=-2,$$

$$\psi_{xx}=2,\ \varphi_{yy}=2,\ \psi_{yy}\equiv 0,\ \varphi_{xy}\equiv 0,\ \psi_{xy}\equiv 0,$$

$$u_{xx}=4x^2u_{\xi\xi}-8x^2u_{\xi\eta}+4x^2u_{\eta\eta}-2u_\xi+2u_\eta$$

$$u_{yy}=4y^2u_{\xi\xi}+2u_\xi,\quad u_{xy}=-4xyu_{\xi\xi}+4xyu_{\eta\eta}.$$

Підставивши ці частинні похідні в задане рівняння, отримуємо

$$4x^2y^2u_{\xi\xi}-8x^2y^2u_{\xi\eta}+4x^2y^2u_{\eta\eta}-2y^2u_\xi+2y^2u_\eta-8x^2y^2u_{\xi\xi}+8x^2y^2u_{\eta\eta}+4x^2y^2u_{\xi\xi}+2x^2u_\xi=0,$$

$$u_{\eta\eta}-\frac{y^2-x^2}{2x^2y^2}u_\xi+\frac{1}{2x^2}u_\eta=0.$$

З формул перетворення змінних $\xi=y^2-x^2,\ \eta=x^2$ маємо $y^2=\xi+\eta$, $\frac{y^2-x^2}{2x^2y^2}=\frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}$. Отже, задане рівняння зводиться до канонічного вигляду $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$.

Зауваження. Оскільки вихідне рівняння (1.2.1) є лінійним, то й перетворене рівняння (1.2.4) буде лінійним. Дійсно, на основі формул (1.2.3) маємо

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+G\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+Hu+f(x,y)=E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+$$

$$+Hu+f=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right),$$

тобто лінійна група доданків $E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+G\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+Hu+f(x,y)$ виражається через $u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}$ лінійно. При цьому внаслідок взаємної однозначності перетворення і $J(x,y)\neq 0$ в області D, своєю чергою,

$x = x(\xi,\eta),\ y = y(\xi,\eta)$ $((\xi,\eta)\in D')$, причому $J'(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0$ в області D'.

Отже, канонічні форми лінійних рівнянь (1.2.1) мають такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = g(\xi,\eta) \text{ (гіперболічне рівняння);} \quad (1.2.26)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = g(\xi,\eta) \text{(еліптичне рівняння);} \quad (1.2.27)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = g(\xi,\eta) \text{(параболічне рівняння).} \quad (1.2.28)$$

1.3. Подальше спрощення лінійних рівнянь другого порядку

Якщо вихідне рівняння (1.2.1) мало постійні коефіцієнти A, B, C, E, G, H, то і у відповідному канонічному рівнянні (1.2.26)–(1.2.28) коефіцієнти β_1, β_2, γ також будуть постійними. У цьому випадку рівняння (1.2.26)–(1.2.28) можна й далі спрощувати за допомогою заміни невідомої функції $u = u(\xi,\eta)$ на невідому функцію $v = v(\xi,\eta)$:

$$u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)e^{\mu\xi+\upsilon\eta} \quad (\mu,\upsilon - const). \quad (1.3.1)$$

Підбором сталих μ, ν можна добитися того, щоб у нових отриманих канонічних рівняннях гіперболічного й еліптичного типу не було частинних похідних першого порядку $\dfrac{\partial v}{\partial \xi}, \dfrac{\partial v}{\partial \eta}$, а в канонічному рівнянні параболічного типу не було однієї з цих похідних і самої шуканої функції $v(\xi,\eta)$.

Дійсно, обчислюючи частинні похідні функції (1.3.1)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi}e^{\mu\xi+\upsilon\eta} + \mu v e^{\mu\xi+\upsilon\eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta}e^{\mu\xi+\nu\eta} + \upsilon v e^{\mu\xi+\nu\eta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}e^{\mu\xi+\upsilon\eta} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial \xi}e^{\mu\xi+\upsilon\eta} + \mu^2 v e^{\mu\xi+\nu\eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}e^{\mu\xi+\upsilon\eta} + 2\upsilon\frac{\partial v}{\partial \eta}e^{\mu\xi+\upsilon\eta} + \upsilon^2 v e^{\mu\xi+\nu\eta} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

і підставляючи їх в рівняння (1.2.26), отримуємо рівняння відносно нової шуканої функції $v = v(\xi,\eta)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+(\beta_1+2\mu)\frac{\partial v}{\partial \xi}+(\beta_2-2\upsilon)\frac{\partial v}{\partial \eta}+(\gamma+\mu^2-\upsilon^2+\beta_1\mu+\beta_2\upsilon)v=g(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\upsilon\eta}. \quad (1.3.3)$$

Якщо покласти тут $\mu=-\frac{1}{2}\beta_1,\ \upsilon=\frac{1}{2}\beta_2$, то коефіцієнти при $\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}$ перетворяться на нуль, а коефіцієнт при v

$$\gamma_1=\gamma+\mu^2-\upsilon^2+\beta_1\mu+\beta_2\upsilon=\gamma-\frac{1}{4}\left(\beta_1^2-\beta_2^2\right).$$

Отже, перетворене рівняння (1.2.26) набере вигляду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\gamma_1 v=f(\xi,\eta) \quad \left(f(\xi,\eta)=g(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\upsilon\eta}\right).$$

Приклад. Звести до канонічного вигляду та спростити рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$$

Розв'язання. Тут $A=0,\ B=\frac{1}{2},\ C=2,\ \Delta=AC-B^2=-\frac{1}{4}<0$, тобто задане рівняння є гіперболічним у $D=\mathbb{R}^2$. Оскільки $A=0$, то рівняння (1.2.14) тут є незастосовними. Скористаємося рівнянням характеристик (1.2.13), переписавши його у вигляді $A(dy)^2-2Bdydx+C(dx)^2=0$. У цьому випадку $-dydx+2(dx)^2=0$, звідки $(2dx-dy)dx=0$; причому $2dx-dy=0$, $2\int dx-\int dy=\overline{C}_1,\ 2x-y=\overline{C}_1$; $dx=0,\ \int dx=\overline{C}_2,\ x=\overline{C}_2$. Отже, $\xi=\varphi(x,y)=2x-y;\ \eta=\psi(x,y)=x;\ \varphi_x=2,$ $\varphi_y=-1,\ \psi_x=1,\ \psi_y\equiv 0,\ \varphi_{yy}\equiv 0,\ \psi_{yy}\equiv 0,\ \varphi_{xy}\equiv 0,\ \psi_{xy}\equiv 0$. Використовуючи тепер формули (1.2.3), маємо $\frac{\partial u}{\partial x}=2\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$.

Підставивши ці похідні в задане рівняння, отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+6\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}-u=0. \quad (1.3.4)$$

Роблячи нову заміну незалежних змінних за формулами (1.2.15) $\xi_1=\xi+\eta,\ \eta_1=\xi-\eta$ і використовуючи формули (1.2.17), (1.2.18), на основі яких $\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial \xi_1}-\frac{\partial u}{\partial \eta_1}$, $\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+\frac{\partial u}{\partial \eta_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}$, рівняння (1.3.4) перетворимо до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}+7\frac{\partial u}{\partial \xi_1}+5\frac{\partial u}{\partial \eta_1}-u=0.$$

Порівнюючи його з рівнянням (1.2.26), маємо $\beta_1 = 7,\ \beta_2 = 5,\ \gamma = -1,\ \ g(\xi,\eta) \equiv 0$.

Отже, $\mu = -\dfrac{7}{2},\ \upsilon = \dfrac{5}{2},\ \gamma_1 = -7$ і остаточно перетворене рівняння унаслідок (1.3.3) має вигляд (з урахуванням індексу 1) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta_1^2} - 7v = 0$.

Підставивши тепер формули (1.3.2) у рівняння (1.2.27), отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + (\beta_1 + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial \xi} + (\beta_2 + 2\upsilon)\frac{\partial v}{\partial \eta} + (\gamma + \mu^2 + \upsilon^2 + \beta_1\mu + \beta_2\upsilon)v = g(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\upsilon\eta}. \quad (1.3.5)$$

Якщо в (1.3.4) покласти $\mu = -\dfrac{1}{2}\beta_1,\ \upsilon = \dfrac{1}{2}\beta_2$, то коефіцієнти при $\dfrac{\partial v}{\partial \xi}, \dfrac{\partial v}{\partial \eta}$ перетворяться на нуль, а коефіцієнт при v $\gamma_1 = \gamma + \mu^2 + \upsilon^2 + \beta_1\mu + \beta_2\upsilon = \gamma - \dfrac{1}{4}\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)$. Отже, перетворене рівняння (1.2.27) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \gamma_1 v = f(\xi,\eta) \quad \left(f(\xi,\eta) = g(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\upsilon\eta}\right). \quad (1.3.6)$$

Приклад. Звести до канонічного вигляду та спростити рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

Розв'язання. Тут $A = 1,\ B = -2,\ C = 5,\ \Delta = AC - B^2 = 1 > 0$, тобто задане рівняння – еліптичного типу в $D = \mathbb{R}^2$. Рівняння характеристик (1.2.13) у цьому випадку є таким: $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 4\dfrac{dy}{dx} + 5 = 0$. Звідси $\dfrac{dy}{dx} = -2 \pm i$.

Відповідно до пункту **2** достатньо розглянути випадок $\dfrac{dy}{dx} = -2 + i$, звідки $y = (-2+i)x + \overline{C}_1,\ \ 2x + y - ix = \overline{C}_1$, тобто $\xi = \varphi(x,y) = 2x + y;\ \ \eta = \psi(x,y) = -x$. Отже, $\varphi_x = 2,\ \varphi_y = 1,\ \psi_x = -1, \psi_y \equiv 0, \varphi_{xx} \equiv 0,\ \varphi_{yy} \equiv 0, \varphi_{xy} \equiv 0, \psi_{xx} \equiv 0, \psi_{yy} \equiv 0,$ $\psi_{xy} \equiv 0$.

Використовуючи формули (1.2.3), маємо $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \eta},\ \ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi},$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\ \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\ \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$

Підставивши ці похідні в задане рівняння, отримаємо $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-5\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta}+u=0$.

Порівнюючи отримане рівняння з рівнянням (1.2.27), маємо $\beta_1=-5,\ \beta_2=3,\ \gamma=1$. Отже, $\mu=\frac{5}{2},\ \upsilon=-\frac{3}{2},\ \gamma_1=-\frac{15}{2}$. З урахуванням (1.3.6) і того, що $g(\xi,\eta)\equiv 0$, одержуємо остаточно перетворене рівняння

$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-\frac{15}{2}v=0$.

Нарешті, підставивши (1.3.2) у рівняння (1.2.28), одержуємо рівняння відносно нової шуканої функції $v=\ v(\xi,\eta)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\beta_1\frac{\partial v}{\partial \xi}+(\beta_2+2\upsilon)\frac{\partial v}{\partial \eta}+(\gamma+\upsilon^2+\beta_1\mu+\beta_2\upsilon)v=g(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\upsilon\eta}. \quad (1.3.7)$$

Тут коефіцієнт β_1 не залежить від μ і υ, тому при $\beta_1\neq 0$ рівняння (1.3.6) містить $\frac{\partial v}{\partial \xi}$. Покладемо $\upsilon=-\frac{1}{2}\beta_2$. Тоді в рівняння (1.3.7) похідна $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ входити не буде. Якщо покласти тепер $\gamma+\upsilon^2+\beta_1\mu+\beta_2\upsilon=0$, то при $\mu=\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{1}{4}\beta_2^2-\gamma\right)$ у рівнянні (1.3.7) буде відсутній доданок, що містить шукану функцію $v=\ v(\xi,\eta)$.

Отже, якщо у формулі (1.3.1) покласти $\upsilon=-\frac{1}{2}\beta_2$, $\mu=\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{1}{4}\beta_2^2-\gamma\right)$, то параболічне рівняння (1.2.28) набере найпростішої форми:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\beta_1\frac{\partial v}{\partial \xi}=f(\xi,\eta)\quad \left(f(\xi,\eta)=g(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\nu\eta}\right).$$

Приклад. Звести до канонічного вигляду та спростити рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+12\frac{\partial u}{\partial y}+27u=0.$$

Розв'язання. Тут $A=1,\ B=-1,\ C=1,\ \Delta=AC-B^2=0$, тобто задане рівняння – параболічне в області $D=\mathbb{R}^2$. Запишемо рівняння характеристик (1.2.24): $\frac{dy}{dx}=-1$. Звідси $y=-x+\overline{C},\ x+y=\overline{C}$ – загальний інтеграл. Отже, $\xi = \varphi(x, y) = x + y$. Як функцію $\psi(x, y)$ можна взяти $\eta = \psi(x, y) = x$. Легко перевірити, що при цьому умова (1.2.25) виконується. Для отримання перетвореного рівняння (1.2.4) використовуємо формули (1.2.3). Маємо $\varphi_x = 1,\ \varphi_y = 1,\ \psi_x = -1,\ \psi_y = \varphi_{xx} = \psi_{xx} = \varphi_{yy} = \psi_{yy} = = \varphi(x,\ y) = \psi(x,\ y) \equiv 0$;

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$. Підставивши ці похідні в задане рівняння, отримуємо

перетворене рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 3\frac{\partial u}{\partial \eta} + 27u = 0.$

Порівнюючи його з рівнянням (1.2.28), маємо $\beta_1 = 9,\ \beta_2 = -3,\ \gamma = 27$. Отже, $\upsilon = -\frac{1}{2}\beta_2 = \frac{3}{2}$, $\mu = \frac{1}{\beta_1}\left(\frac{1}{4}\beta_2^2 - \gamma\right) = -\frac{11}{4}$, і тоді

заміна $v = ue^{\mu\xi + \nu\eta} = ue^{-\frac{11}{4}\xi + \frac{3}{2}\eta}$ зводить задане рівняння (відповідно до (1.3.7)) до найпростішого вигляду $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 9\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$.

Отже, маючи на увазі описані можливості спрощення рівняння (1.2.1), надалі достатньо розглянути лише методи розв’язання задач, сформульованих для найпростіших канонічних рівнянь:

$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \gamma_1 v = f(\xi, \eta)$ (гіперболічний тип),

$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \gamma_1 v = f(\xi, \eta)$ (еліптичний тип),

$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \beta_1 \frac{\partial v}{\partial \xi_1} = f(\xi, \eta)$ (параболічний тип).

2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОСНОВНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

2.1. Математична модель плоских поперечних коливань струни

1. Рівняння коливань струни. Струною називають гнучку пружну нитку, у стані спокою натягнуту вздовж прямої, яка в процесі коливань не опирається вигину, але опирається розтягуванню.

Якщо уявно розрізати струну в деякій точці, то дія однієї ділянки на іншу виражається силою, яка називається натягом струни.

Відсутність опору вигину математично виражається в тому, що натяг $\vec{T}$ у кожній точці струни, що коливається, завжди напрямлений за дотичною до її миттєвого профілю.

Нехай для визначеності кінці струни жорстко закріплені, а сама струна туго натягнута (рис. 1). Припустимо, що порівняно з натягом $\vec{T}$ силою тяжіння та іншими зовнішніми силами можна знехтувати. Тоді в стані спокою струна буде натягнута вздовж прямої (положення рівноваги). Цю пряму візьмемо як координатну вісь Ox, а початок координат виберемо так, щоб кінці струни знаходилися в точках $x=0,\ x=l$.

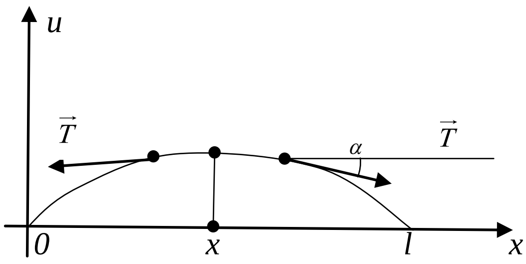

Рис. 1

Короткочасною силою виведемо струну з положення рівноваги й дамо їй змогу діяти самостійно. Завдяки своїм пружним властивостям струна почне коливатися навколо положення рівноваги. Ці коливання обумовлені тільки специфічними властивостями струни, і тому їх називають вільними (або власними) коливаннями.

Обмежимося розглядом малих плоских поперечних коливань, тобто коливань, при яких гострий кут α між віссю Ox і дотичною до струни в будь-якій точці з абсцисою x і в будь-який момент часу t є малим; при будь-якому t всі точки струни знаходяться в одній і тій же площині; кожна точка струни коливається, залишаючись на одному й тому ж перпендикулярі до осі Ox.

Основною величиною, що характеризує коливання струни, є відхилення $u=u(x,t)$ її точки з абсцисою x у момент часу t від положення рівноваги. Малість коливань означає, що $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$ і величинами $\sin^2\alpha,\ tg^2\alpha,\ \alpha^2$ можна знехтувати. Оскільки з огляду на геометричний сенс похідної $tg\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ і $tg^2\alpha \approx 0$, то $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0$. Звідси відразу випливає, що в процесі коливань (тобто в будь-який момент часу t) можна знехтувати зміною довжини будь-якої ділянки струни. Дійсно, довжина довільної ділянки A_1A_2 струни між точками A_1 і A_2 з абсцисами x_1 і x_2 дорівнює $A_1A_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx$. Оскільки $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0$, то

$A_1A_2 \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} dx$, тобто $A_1A_2 \approx x_2 - x_1\ (\forall t)$.

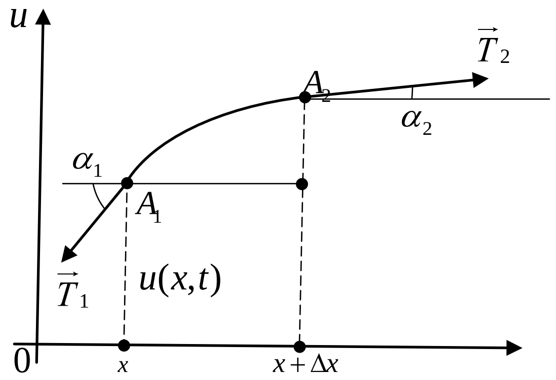

Рис. 2

Покажемо тепер, що при зроблених припущеннях сила натягу струни $T = \left|\vec{T}\right|$ – величина постійна, яка не залежить ні від точки її прикладення (від абсциси x), ні від часу t. З цією метою розглянемо довільну ділянку струни A_1A_2 у фіксований момент часу t і замінимо дію відкинутих ділянок силами натягу $\vec{T_1}$ і $\vec{T_2}$ (рис. 2). Сума проекцій цих сил на вісь Ox має дорівнювати нулю, так як розглядаються тільки поперечні (перпендикулярні осі Ox) коливання:

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 \quad \left(T_1 = \left|\vec{T_1}\right|,\ T_2 = \left|\vec{T_2}\right|\right).$$

Через малість коливань (малість кутів $\alpha_1,\ \alpha_2$) $\cos\alpha_1 \approx 1,\ \cos\alpha_2 \approx 1$. Отже, $T_2 - T_1 = 0$, тобто $T_2 = T_1$. Оскільки точки A_1 і A_2 вибрано довільно, то це означає, що у фіксований момент часу t величина сили натягу в усіх точках струни є постійною: $\left|\vec{T}\right| = T = const$.

Передбачається, що струна є пружною й підкоряється закону Гука: зміна $T_2 - T_1$ величини сили натягу $\vec{T}$ є прямо пропорційною зміні довжини відповідної ділянки струни в будь-який момент часу t. Оскільки вище було показано, що в процесі коливань (тобто в будь-який момент часу t) можна знехтувати зміною довжини будь-якої ділянки, то за законом Гука незмінною є і величина сили натягу, тобто $\vec{T}$ не залежить і від t. Отже, при зроблених припущеннях $\left|\vec{T}\right| = T = const$.

Для виведення рівняння коливань розглянемо сили, які діють на довільну елементарну (досить малу) ділянку A_1A_2 струни, що коливається, у довільний фіксований момент часу і застосуємо до нього закон руху Ньютона $mw = F$ у напрямку осі Ou (поперечність коливань). У точках $A_1,\ A_2$ на елемент A_1A_2 діють сили натягу T_1 і T_2, що замінюють вплив відкинутих частин струни і напрямлені по дотичній до дуги A_1A_2. Так як $T_2 = T_1 = T\ (T = const)$, то результівна величина поперечної (перпендикулярної до осі Ox) компоненти сили натягу, що діє на елемент A_1A_2, визначається формулою $F=T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=T\ (\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)$.

Уважаємо, що струна є однорідною, $\rho=const$ – її лінійна густина (маса одиниці довжини струни). Оскільки коливання малі й досить мала ділянка A_1A_2, то вертикальне (перпендикулярне до осі Ox) прискорення w довільної точки елемента A_1A_2 приблизно дорівнює вертикальному прискоренню точки A_1 з абсцисою x, тобто $w=u_{tt}(x,t)$ $(\forall x\in[x,x+\Delta x])$. При цьому маса m елемента A_1A_2 приблизно є такою: $m=\rho\Delta x$. Якщо тепер до елемента A_1A_2 застосувати закон Ньютона $mw=F$ (через малість елемента A_1A_2 розглядаємо його як матеріальну точку), то отримаємо співвідношення $\rho\Delta x u_{tt}(x,t)=T\ (\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)$.

Уведені тут припущення (зокрема, заміна довжини $l_{A_1A_2}$ на Δx і заміна елемента A_1A_2 матеріальною точкою) є цілком коректними, оскільки на заключному етапі виведення рівняння здійснюється граничний перехід $\Delta x\to 0$. Через малість коливань і з огляду на геометричний сенс похідної при цьому $\sin\alpha_2\approx tg\alpha_2=u_x(x+\Delta x,t)$, $\sin\alpha_1\approx tg\alpha_1=u_x(x,t)$. Отже, з урахуванням усіх припущень $\rho\Delta x u_{tt}(x,t)=T\ [u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)]$. Ділячи обидві частини цього співвідношення на $\rho\Delta x$ і переходячи до границі при $\Delta x\to 0$, отримуємо $u_{tt}(x,t)=\dfrac{T}{\rho}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}=\dfrac{T}{\rho}u_{xx}(x,t)$.

Таким чином, отримуємо найпростіше рівняння малих плоских поперечних коливань струни – однорідне одновимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ \ (0<x<l,\ 0<t<\infty),\ a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \qquad (2.1.1)$$

Незважаючи на свою простоту, рівняння (2.1.1) є одним з найважливіших диференціальних рівнянь математичної фізики.

Характеризуючи розглянуту фізичну задачу, не можна обмежитися лише диференціальним рівнянням (2.1.1). Крім нього слід сформулювати й додаткові умови – початкові й граничні умови. Дійсно, саме по собі рівняння (2.1.1) не містить ніякої інформації про те, яким чином струна може бути виведена з положення рівноваги і яким може бути стан кінців струни в процесі коливань. Ця інформація повинна бути врахована особливо.

Необхідність у формулюванні додаткових умов очевидна і в суто математичному аспекті, оскільки рівняння (2.1.1) має безліч розв’язків.

Легко перевірити, наприклад, що функція $u = g_1(x-at) + g_2(x+at)$ є розв'язком рівняння при будь-яких двічі диференційовних функціях g_1 і g_2.

2. Початкові умови. Усі фізичні процеси вивчають, починаючи з деякого моменту часу (зазвичай з моменту $t=0$). Отже, треба задати певні умови в той момент – початкові умови. Ясно, що в даній задачі потрібно знати початкове положення струни (форму в момент часу $t=0$) і початкову швидкість точок струни. Нехай початкове положення струни задається функцією $\varphi(x)$, а початкова швидкість – функцією $\psi(x)$. Тоді початкові умови мають вигляд

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)\ \ (0 \le x \le l). \tag{2.1.2}$$

Умови (2.1.2) аналогічні початковим умовам у найпростішій задачі динаміки матеріальної точки. Там для визначення закону руху точки, крім диференціального рівняння, потрібно знати початкове положення точки та її початкову швидкість.

3. Граничні (крайові) умови. У задачі про коливання струни граничні умови що накладаються на шукану функцію $u(x,t)$, визначають стан кінців струни. Наприклад, у процесі коливань кінці струни можуть здійснювати рух уздовж прямих $x=0$ і $x=l$, бути вільними, перебувати під дією пружних сил або бути жорстко закріпленими. Жорстке закріплення кінців $x=0$ і $x=l$ струни в будь-який момент часу означає, що виконуються граничні умови

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ (0 \le t < \infty). \tag{2.1.3}$$

Тепер можна сформулювати просту математичну модель малих плоских поперечних коливань струни з жорстко закріпленими кінцями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \ (0 < x < l,\ 0 < t < \infty),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)\ \ (0 \le x \le l),$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ (0 \le t < \infty). \text{ (2.1.3)}$$

При певних обмеженнях на відомі функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ хвильове рівняння (2.1.1) має єдиний розв'язок, який задовольняє початкові (2.1.2) і граничні (2.1.3) умови. Це означає, що математична модель (2.1.1)–(2.1.3) містить усю інформацію, необхідну для вивчення вільних коливань струни (розв'язок єдиний), і не містить надлишкової інформації (розв'язок існує).

Ускладнення вихідної задачі внаслідок урахування додаткових факторів, що діють на струну, призводить до більш складних рівнянь. Нехай, наприклад, на струну в площині коливань Oxu діють зовнішні сили, паралельні до осі Ou (поперечні сили), які можуть змінюватися вздовж струни (залежно від x) і з плином часу. Сили ці вважатимемо неперервно розподіленими вздовж струни. Їх дія на струну характеризується густиною розподілу $p(x,t)$ – функцією, яка є границею відношення величини $\Delta F(x,t)$ рівнодійної $\Delta\vec{F}$ поперечних зовнішніх сил $\left(F=\left|\vec{F}\right|\right)$, прикладених до елементарної ділянки A_1A_2, до довжини Δl цієї ділянки від x до $x+\Delta x$ за умови, що $\Delta l\to 0$ (ділянка стягується в точку): $p(x,t)=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta l}$.

Оскільки коливання є малими, то $\Delta l\approx\Delta x$ і, отже, $\Delta F\approx p\left(x,t\right)\Delta x$. Повторюючи пророблені вище викладки з урахуванням дії на струну зовнішніх сил, маємо $\rho\Delta x u_{tt}=T\left[u_x\left(x+\Delta x,t\right)-u_x\left(x,t\right)\right]+p\left(x,t\right)\Delta x$, звідки в границі при $\Delta x\to 0$ $u_{tt}=\dfrac{T}{\rho}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u_x\left(x+x,t\right)-u_x\left(x,t\right)}{\Delta x}+\dfrac{p\left(x,t\right)}{\rho}$ і, нарешті,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x,t\right)\quad\left(0<x<l,\ 0<t<\infty\right),\quad a^2=\frac{T}{\rho},\ f\left(x,t\right)=\frac{p\left(x,t\right)}{\rho}.\qquad(2.1.4)$$

Рівняння (2.1.4) на відміну від (2.1.1) є неоднорідним та описує так звані вимушені коливання струни.

Істотно, що одна й та сама математична модель може описувати абсолютно різні фізичні явища. Це дає змогу використовувати методи, що застосовуються для дослідження одного класу прикладних задач, в абсолютно інших фізичних ситуаціях. Наприклад, модель (2.1.1)–(2.1.3) описує так само поздовжні коливання пружного стрижня, розподіл струму в прямолінійному дроті, коливання газу в трубці, поширення електромагнітних хвиль далеко від джерела випромінювання.

Зауваження. Виведення рівнянь (2.1.1), (2.1.4) коливань струни супроводжувалося багатьма припущеннями механічного й геометричного характеру. Таке ж положення має місце і при виведенні диференціальних рівнянь інших завдань математичної фізики. Питання в тому, наскільки точно рівняння описує фізичний процес, може бути вирішене тільки порівнянням результатів, отриманих при розв'язанні рівняння й експериментальним шляхом.

У зв'язку з цим доречно зробити таке зауваження. Добре відома роль моделей при вивченні різних питань техніки. Наприклад, гідротехніки під час проектування греблі часто будують у значно зменшеному вигляді її модель, щоб, проводячи досліди над нею в лабораторних умовах, зробити деякі висновки про характер зусиль, що діють на реальну греблю. Таку ж роль відіграють і моделі проектованих мостів, крил і фюзеляжу літаків та ін. Звичайно, дані, отримані при дослідженні моделей, не можна просто переносити на реальні об'єкти. У лабораторії неможливо створити всі умови, що можуть бути в реальності, і, крім того, явища, що відбуваються при дослідженні моделі, не завжди в точності копіюють відповідні явища в природі. Однак найбільш істотні риси процесу все-таки часто вдається визначити, і подальша задача проектувальника в тому й полягає, щоб пов'язати спостережені на моделі факти з тими, які зустрінуться в натурі.

Подібну ж роль у фізиці відіграє і вивчення диференціальних рівнянь математичної фізики. Щоб користуватися методами математичної фізики, насамперед треба встановити, які величини є визначальними (основними) для даної задачі. Потім, використовуючи фізичні закони (принципи), що відображають зв'язки між цими величинами, скласти рівняння (систему рівнянь) у частинних похідних і додаткові умови (граничні, початкові). З них потім аналітичними, чисельно-аналітичними або числовими методами знайти невідомі величини, що характеризують дану задачу. Так і відбувається знайомство з основними методами побудови й вивчення математичних моделей у «лабораторних умовах математики».

2.2. Математична модель теплопровідності

1. Рівняння теплопровідності. Розглянемо спочатку задачу про поширення тепла в однорідному тонкому циліндричному стрижні завдовжки l, бокова поверхня якого теплоізольована (рис. 3). Теплоізольованість бічної поверхні стрижня означає, що через неї не відбувається теплообмін з навколишнім середовищем. Якщо стрижень

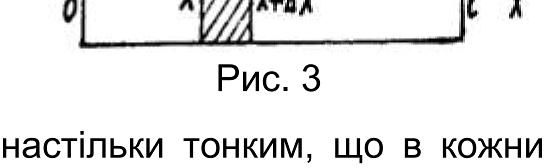

Рис. 3

у початковому стані нерівномірно нагрітий, то завдяки теплопровідності в ньому буде відбуватися передача тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих. Стрижень уважається настільки тонким, що в кожний момент часу температура всіх точок кожного поперечного перерізу стрижня є постійною. Нехай $S = const$ – площа поперечного перерізу стрижня, $\rho = const$ – густина, $c = const$ –

питома теплоємність, $k = const$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності матеріалу стрижня.

Питома теплопровідність c характеризує здатність матеріалу запасати тепло і чисельно дорівнює кількості калорій тепла, якого необхідно надати одному граму речовини, щоб підняти його температуру на один градус за Цельсієм.

У більшості випадків величину c можна вважати постійною, яка не залежить ні від вибору поперечного перерізу стрижня, ні від часу t.

Коефіцієнт внутрішньої теплопровідності k характеризує здатність матеріалу проводити тепло і чисельно дорівнює кількості тепла (у калоріях), що проходить за секунду через пластину завтовшки 1 см з площею поперечного перерізу $1\ см^2$ при різниці температур на протилежних гранях $1^\circ C$. Якщо стрижень виконано з однорідного матеріалу, то величина k не залежить від вибору поперечного перерізу стрижня. Для деяких матеріалів k залежить від температури, але незначно.

Якщо вісь стрижня взяти за вісь абсцис Ox, то основною величиною, що характеризує процес поширення тепла в стрижні, є температура $u(x,t)$ у поперечному перерізі з координатою x у момент часу t. При цьому частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x}$ – швидкість зміни температури в напрямку осі Ox. Виведення диференціального рівняння теплопровідності базується на таких фізичних передумовах.

1. Кількість тепла, якого необхідно надати однорідному тілу, щоб підвищити його температуру на Δu, дорівнює $\Delta Q = c\rho V \Delta u$, де V – об'єм тіла, ρ – його густина, c – питома теплоємність.

2. Кількість тепла, що проходить через поперечний переріз стрижня за час Δt (теплова течія), пропорційна площі перерізу, швидкості зміни температури в напрямку, перпендикулярному до перерізу, і проміжку часу Δt, тобто $\Delta Q_1 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Delta t$, де S – площа поперечного перерізу, k – коефіцієнт теплопровідності (закон Фур'є). Знак «мінус» в останній формулі пояснюється тим, що функція $u(x,t)$ монотонно спадає за змінною x (тепло передається від більш нагрітих частин тіла до менш нагрітих), так що $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) < 0$ і, отже, $\Delta Q_1 > 0$.

Виділимо довільно всередині стрижня досить малий елемент об'єму $\Delta V = S\Delta x$, укладений між поперечними перерізами в точках x і $x + \Delta x$. З огляду на малість елемента ΔV (приріст Δx) і сталість температури в кожному перерізі стрижня будемо вважати, що температура всіх точок елемента ΔV є однаковою і змінюється тільки зі зміною часу t. Тоді за час Δt температура елемента ΔV зміниться на величину $\Delta u = u(x,t+\Delta t)$. Це припущення (про незалежність температури від координати x у межах елемента ΔV) є цілком коректним, оскільки на заключному етапі виведення рівняння теплопровідності буде здійснено граничний перехід $\Delta x \to 0$. Отже,

$$\Delta Q = c\rho \Delta V \Delta u = c\rho S \Delta x \left[u(x,t+\Delta) - u(x,t) \right]. \qquad (2.2.1)$$

Оскільки кількість тепла, що проходить в елемент ΔV через поперечний переріз з координатою x за час Δt дорівнює $\Delta Q_1 = -kS \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Delta t$, а виходить через переріз з координатою $x+\Delta x$ дорівнює $\Delta Q_2 = -kS \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)\Delta t$, то в елемент ΔV за час t надійде кількість тепла

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = kS\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)\Delta t. \qquad (2.2.2)$$

Це тепло витрачається на нагрівання елемента ΔV на величину температури Δu. Отже, $\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \Delta Q$ або на підставі (2.2.1), (2.2.2) $c\rho S\Delta x\left[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)\right] = kS\left[u_x(x,t+\Delta t) - u_x(x,t)\right]\Delta t \quad \left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ (закон збереження кількості тепла для елемента об'єму ΔV). Звідси $\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho}\frac{u_x(x,t+\Delta t) - u_x(x,t)}{\Delta x}$.

Переходячи тут до границі при $\Delta t \to 0,\ \Delta x \to 0$, отримуємо найпростіше рівняння теплопровідності – однорідне одновимірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad (0 < x < l,\ 0 < t < \infty),\ a^2 = \frac{k}{c\rho}. \qquad (2.2.3)$$

Припустимо тепер додатково, що на деяких ділянках стрижня може виникати тепло (усередині стрижня є теплові джерела). Виділення тепла характеризується густиною теплових джерел – функцією $q(x,t)$, такою, що внаслідок дії цих джерел на малій ділянці стрижня $[x,\ x+\Delta x]$ за малий проміжок часу $[t,\ t+\Delta t]$ виділяється кількість тепла $\Delta Q^* = Sq(x,\ t)\Delta x \Delta t$. Тоді з рівняння теплового балансу $\Delta Q_1 - \Delta Q_2 + \Delta Q^* = \Delta Q$ шляхом граничного переходу $\Delta t \to 0,\ \Delta x \to 0$ отримуємо одновимірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad f(x,t) = \frac{q(x,t)}{c\rho}. \qquad (2.2.4)$$

Зауваження. Рівняння (2.2.3) отримано в припущенні, що тепло поширюється тільки через торці циліндричного стрижня вздовж осі Ox.

Цей режим реалізується, якщо бокова поверхня стрижня теплоізольована.

Розглянемо випадок, коли між бічною поверхнею і навколишнім середовищем відбувається конвективний теплообмін, що підпорядковується закону Ньютона. Кількість тепла, переданого в одиницю часу з одиниці площі бічної поверхні в навколишнє середовище, є пропорційною різниці між шуканою температурою стрижня $u(x,t)$ і відомою температурою навколишнього середовища $u_0(t)$. Якщо відповідний коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт конвективного теплообміну) позначити α, то можна переконатися, що зміна процедури виведення рівняння теплопровідності з урахуванням теплообміну через бічну поверхню стрижня зводиться лише до приєднання доданка $-\beta(u-u_0)$ до правої частини рівняння (2.2.3).

При цьому $\beta = \dfrac{\alpha\sigma}{c\rho S}$, σ – периметр поперечного перерізу стрижня.

Отже, рівняння теплопровідності з урахуванням конвективного теплообміну має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u-u_0). \qquad (2.2.5)$$

2. Початкова умова. На відміну від задачі про коливання струни в задачі теплопровідності задається тільки одна початкова умова – температура стрижня $\varphi(x)$ $(0 \le x \le l)$ у початковий момент часу $t=0$:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le l). \qquad (2.2.6)$$

3. Граничні (крайові) умови. У задачах теплопровідності для тонкого циліндричного стрижня граничні умови, що накладаються на шукану функцію $u(x,t)$, описують ті чи інші теплові режими на торцях стрижня $x=0$ і $x=l$. Наприклад, торці можуть підтримуватися при певній температурі, перебувати в стані теплообміну з навколишнім середовищем, бути схильними до дії теплових потоків.

Розглянемо два найпростіших випадки, коли торці стрижня підтримуються при деякій температурі і коли вони теплоізольовані.

У першому випадку граничні умови мають вигляд

$$u(0,t) = g_1(t),\ u(l,t) = g_2(t) \quad (0 \le t < \infty). \qquad (2.2.7)$$

У випадку теплоізоляції торців $x=0$ і $x=l$ тепло крізь них не проходить, тобто

$$\Delta Q_1 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\Delta t = 0,\ \ \Delta Q_2 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)\Delta t = 0,$$

звідки отримуємо граничні умови

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty). \qquad (2.2.8)$$

Зауважимо, що бокова поверхня тонкого циліндричного стрижня не бере участі в формуванні граничних умов, оскільки вона враховується шляхом вибору відповідного рівняння теплопровідності. Наприклад, якщо бокова поверхня стрижня теплоізольована, то необхідно користуватися рівнянням (2.2.3) або (2.2.4). Якщо ж через неї здійснюється конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, то треба використовувати рівняння (2.2.5).

Сформулюємо просту математичну модель поширення тепла в тонкому однорідному циліндричному стрижні завдовжки l з теплоізольованою бічною поверхнею і з відомою температурою на торцях $x=0,\ x=l$. За відсутності в стрижні внутрішніх джерел тепла ця модель має вигляд

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<l,\ 0<t<\infty),\\
&a^2=\frac{k}{c\rho}=const,\\
&u(x,0)=\varphi(x)\quad (0\le x\le l),\\
&u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)\quad (0\le t<\infty).
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

4. Тривимірне рівняння теплопровідності. Нехай $u(x,y,z,t)$ – температура тіла Ω у точці $(x,y,z)\in\Omega$ в момент часу t. Якщо $u(x,y,z,t)\not\equiv const$, то виникають теплові потоки, спрямовані від місць з більш високою температурою до місць з більш низькою температурою.

Нехай S – межа тіла Ω, ΔS – довільна мала ділянка поверхні S, що містить точку $M(x,y,z)$, $\vec{n}$ – одинична зовнішня нормаль до ΔS у точці M, σ – частина дотичної площини до ΔS у точці M, на яку в напрямку $\vec{n}$ проектується ділянка ΔS, $d\sigma$ – площа σ. Тоді кількість тепла, що проходить через σ в одиницю часу, відповідно до закону Фур'є визначається формулою

$$W_n d\sigma=\left(\vec{W}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=-k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma,$$

де k – коефіцієнт теплопровідності; $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – похідна за напрямком $\vec{n}$ до ΔS,

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z)=grad\,u\cdot\vec{n}.$$

Закон Фур'є часто записують у формі $\vec{W}=-k\,grad\,u$, де $\vec{W}$ – вектор густини теплового потоку.

Підрахуємо баланс тепла для тіла Ω з урахуванням внутрішніх джерел тепла з густиною $q(x,y,z,t)$:

$Q_1 = -\iint\limits_{(S)} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ – витрата тепла внаслідок потоку, що виходить з Ω в одиницю часу;

$Q_2 = \iiint\limits_{(\Omega)} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dxdydz$ – витрата тепла на зміну температури всередині Ω в одиницю часу, c – коефіцієнт теплоємності, ρ – густина речовини тіла Ω;

$Q_3 = \iiint\limits_{(\Omega)} q(x,y,z,t) dxdydz$ – надходження тепла від джерел тепла за одиницю часу.

Закон збереження кількості тепла потребує, щоб $Q_3 = Q_1 + Q_2$ або

$$\iiint\limits_{(\Omega)} q(x,y,z,t) dxdydz = -\iint\limits_{(S)} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \iiint\limits_{(\Omega)} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dxdydz .$$

Застосовуючи до поверхневого інтеграла формулу Остроградського – Гаусса

$$\iint\limits_{(S)} \left(\vec{A} \cdot \vec{n}\right) d\sigma = \iiint\limits_{(\Omega)} div\vec{A} dxdydz$$

$\left(div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},\ \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \right)$, маємо

$$\iint\limits_{(S)} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint\limits_{(S)} (k \cdot gradu \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint\limits_{(\Omega)} div(k \cdot gradu) dxdydz$$

$$\iiint\limits_{(\Omega)} \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - div(k \cdot gradu) - q(x,y,z,t) \right] dxdydz = 0 . \qquad (2.2.10)$$

Очевидно, що рівність (2.2.10) має виконуватися і для будь-якої області $\Omega' \subset \Omega$ з межею S':

$$\iiint\limits_{(\Omega')} \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - div(k \cdot gradu) - q(x,y,z,t) \right] dxdydz = 0 .$$

Відомо, що якщо функція $\varphi(x,y,z)$ є неперервною в області Ω і в будь-якій області $\Omega' \subset \Omega$ інтеграл $\iiint\limits_{(\Omega)} \varphi(x,y,z) dxdy\,dz = 0$, то $\varphi(x,y,z) \equiv 0$ в області Ω.

Отже, $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - div(k \cdot gradu) - q(x,y,z,t) \equiv 0$ в області Ω, тобто шукане рівняння теплопровідності має вигляд

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(k \cdot gradu) + q(x,y,z,t) . \qquad (2.2.11)$$

Якщо $k = const$, то $div(k \cdot gradu) = k \cdot div(gradu) = k \cdot \Delta u =$ $= k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ і рівняння (2.2.11) набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t) \quad \left((x, y, z) \in \Omega,\ 0 < t < \infty\right), \tag{2.2.12}$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f(x, y, z, t) = \frac{q(x, y, z, t)}{c\rho}$, $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

В одновимірному випадку, коли $u = u(x,t)$, $f = f(x,t)$, отримуємо рівняння (2.2.4).

Якщо тепловий процес – стаціонарний, то встановлюється розподіл температури $u(x, y, z)$, що не змінюється з плином часу. Тоді $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ і, отже, при відсутності в тілі Ω внутрішніх джерел тепла маємо найпростіше тривимірне рівняння теплопровідності

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{(рівняння Лапласа).} \tag{2.2.13}$$

При наявності внутрішніх джерел тепла маємо рівняння

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \quad \text{(рівняння Пуассона).} \tag{2.2.14}$$

2.3. Диференціальні рівняння класичної електродинаміки й електростатики

Система диференціальних рівнянь класичної електродинаміки має назву рівнянь Максвелла. Д. Максвелл уперше сформулював ці рівняння в 60-х роках XIX-го століття і розкрив їх фізичний зміст. Остаточне загальноприйняте нині формулювання рівнянь електродинаміки належить Герцу. Ці рівняння відіграють ту ж фундаментальну роль, яку в класичній механіці відіграє закон Ньютона.

Рівняння Максвелла у вакуумі для області Ω, у якій немає електричних зарядів, мають вигляд

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},\ rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\ div\vec{E} = 0,\ div\vec{H} = 0, \tag{2.3.1}$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного поля; $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля; c – швидкість поширення електромагнітних збурень (у вакуумі дорівнює швидкості світла).

Застосовуючи оператор rot до першого рівняння (2.3.1), отримуємо

$$rot\,rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{H}\,. \qquad (2.3.2)$$

Використавши відомі формули векторного аналізу $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\overrightarrow{\times c} = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$,

$rot\vec{A} = \nabla\times\vec{A},\ div\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A},\ \nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},\ \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, де ∇ – оператор Гамільтона «набла», Δ – оператор Лапласа «дельта», $\times$, $\cdot$ – знаки векторного и скалярного добутків, отримуємо

$rot\,rot\vec{E} = \nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) = -\left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\nabla = \left|\vec{a} = \nabla,\, \vec{b} = \vec{E},\, \vec{c} = \nabla\right| = -\left(\nabla\cdot\nabla\right)\vec{E} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)$,

тобто $rot\,rot\vec{E} = -\Delta\vec{E} + \nabla div\vec{E}$. Оскільки третє рівняння (2.3.1) має вигляд $div\,\vec{E} = 0$, то $rot\,rot\vec{E} = -\Delta\vec{E}$. Підставляючи цей вираз у формулу (2.3.2) і використовуючи друге рівняння системи (2.3.1), з урахуванням якого $\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, отримуємо векторне хвильове рівняння для $\vec{E}$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2\Delta\vec{E} \quad \left(\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t)\right). \qquad (2.3.3)$$

Якщо $\vec{E} = E_1\vec{i} + E_2\vec{j} + E_3\vec{k}$, то рівняння (2.3.3) є рівносильним трьом скалярним хвильовим рівнянням для компонент E_i:

$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c^2\Delta E_i \quad \left(i = 1,2,3\right)$ або в розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}\right) \quad \left(i = 1,2,3\right). \qquad (2.3.4)$$

Аналогічно, застосовуючи оператор rot до обох частин другого рівняння системи (2.3.1), отримуємо векторне хвильове рівняння для напруженості $\vec{H}$ магнітного поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_i}{\partial t^2} = c^2\Delta\vec{H} \quad \left(\vec{H} = \vec{H}\left(x,y,z,t\right)\right). \qquad (2.3.5)$$

Якщо $\vec{H} = H\vec{i} + H_2\vec{j} + H_3\vec{k}$, то рівняння (2.3.5) є рівносильним трьом скалярним хвильовим рівнянням для компонент H_i:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2}\right) \quad \left(i = 1,2,3\right). \qquad (2.3.6)$$

У випадку стаціонарного електромагнітного поля, коли $\vec{E} = \vec{E}\left(x,y,z\right),\ \vec{H} = \vec{H}\left(x,y,z\right)$ (тобто коли $\vec{E}$ і $\vec{H}$ не залежать від часу t), перше і третє рівняння системи (2.3.1) набувають вигляду

$$rot\,\vec{E} = \vec{0},\ div\,\vec{E} = 0 \quad \left(\left(x,y,z\right)\in\Omega\right). \qquad (2.3.7)$$

Ці рівняння визначають так зване електростатичне поле в області Ω, яка не містить електричних зарядів. Як відомо з теорії поля, рівність $rot\,\vec{A}=0$ $\left((x,y,z)\in\Omega\right)$ означає, що в області Ω існує скалярна функція $\varphi=\varphi(x,y,z)$, така, що $\vec{A}=grad\,\varphi$ $\left(rot\,grad\,\varphi\equiv\vec{0}\right)$.

При цьому $\varphi=\varphi(x,y,z)$ називають скалярним потенціалом векторного поля $\vec{A}$, а саме поле $\vec{A}$ – потенціальним полем. У електростатиці як потенціал вибирається скалярна функція $\varphi=\varphi(x,y,z)$, така, що

$$\vec{E}=-grad\,\varphi \quad \left((x,y,z)\in\Omega\right). \tag{2.3.8}$$

Очевидно, що $rot\vec{E}=rot(-grad\varphi)=-rot\,grad\varphi\equiv\vec{0}$ в області Ω, тобто виконується перше рівняння (2.3.7). Друге ж рівняння (2.3.7) набуває вигляду $div(-grad\varphi)=-div\,grad\varphi=-\Delta\varphi=0$, тобто

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \quad \left((x,y,z)\in\Omega\right). \tag{2.3.9}$$

Диференціальне рівняння (2.3.9) називається рівнянням Лапласа.

З огляду на рівність (2.3.8), напруженість електростатичного поля є мірою швидкості спадання потенціалу φ, оскільки $grad\,\varphi$ як вектор напрямлений у бік найшвидшого зростання φ, а $|grad\,\varphi|$ є числовою мірою швидкості зростання φ.

В електростатиці фізичний зміст має не сам потенціал φ (який визначається неоднозначно: якщо φ – потенціал, то $\varphi+C$ – також потенціал, $C=const$, $grad(\varphi+C)=grad\varphi+gradC=grad\varphi$), а різниця потенціалів.

Відомо, що якщо $\vec{A}$ – потенціальне поле ($\vec{A}=grad\,\varphi$), то

$$\varphi=\int\limits_{(M_0M)}\vec{A}d\vec{r}+C=\int\limits_{(M_0M)}A_xdx+A_ydy+A_zdz+C,\ \left(d\vec{r}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k}\right),$$

де (M_0M) – будь-який шлях, що з'єднує фіксовану точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ і змінну точку $M(x,y,z)$, $(M_0M)\subset\Omega$. Якщо позначити $C=\varphi_0$, то різниця потенціалів $\varphi-\varphi_0=\varphi(M)-\varphi(M_0)$ між двома точками M і M_0 електростатичного поля дорівнює взятій з протилежним знаком роботі, яку здійснюють сили поля $\vec{A}=-\vec{E}$ при переміщенні одиничного позитивного заряду з точки M_0 у точку M :

$$\varphi-\varphi_0=-\int\limits_{(M_0M)}\vec{E}d\vec{r}\,. \tag{2.3.10}$$

Очевидно, потенціалу φ_0 довільної фіксованої точки M_0 можна приписати будь-яке наперед вибране значення. Це відповідає тому, що шляхом вимірювання роботи на основі (2.3.10) можна визначити лише різницю потенціалів двох точок поля, але не сам потенціал, однак, як тільки буде зафіксовано значення потенціалу в будь-якій одній точці поля, значення його у всіх інших точках цього поля однозначно визначається формулою (2.3.10).

2.4. Двовимірні задачі математичної фізики

1. Математична модель малих поперечних коливань мембрани. Мембраною називається натягнута плоска плівка, що не опирається вигину і зсуву, але опирається розтягуванню. У площині мембрани введемо декартову систему координат Oxy. Нехай D – область, яку займає мембрана в площині Oxy (стан спокою), dl – елемент дуги довільного контуру L, що лежить на поверхні σ виведеної зі стану спокою мембрани, M – точка цього елемента.

Якщо подумки вирізати будь-яку ділянку $d\sigma$ мембрани, то дію відкинутої її частини слід замінити силами, розподіленими вздовж контуру L ділянки. Відсутність опору мембрани вигину і зсуву виражається в тому, що ці сили лежать у площинах, дотичних до мембрани у напрямку нормалей до контуру L. Будемо вважати, що мембрана перебуває під дією рівномірного натягу. Це означає, що сила, прикладена до будь-якого елемента dl контуру L, дорівнює $\vec{T}dl$ (є пропорційною dl). Вектор $\vec{T}$ (сила натягу) у точці $M \in \sigma$ лежить у площині, дотичній до σ у точці M .

Коливання мембрани називаються малими поперечними, якщо зсув кожної її точки від положення рівноваги D є перпендикулярним до площини Oxy і кути між вектором натягу $\vec{T}$ (у будь-якій точці мембрани) і площиною Oxy є малими. Можна довести, що в цьому випадку величина $T = \left|\vec{T}\right|$ не залежить від координат $x,\ y$ і часу t, тобто $T = const$.

Нехай $\rho = const$ – поверхнева густина матеріалу мембрани, $p(x,y,t)$ – щільність рівнодійної зовнішніх сил, що діють на мембрану в точці $M(x,y)$ у момент часу t уздовж осі Ou, $u = u(x,y,t)$ – зсув довільної точки $M(x,y)$ мембрани (відносно положення рівноваги D) у момент часу t перпендикулярно до площини Oxy. Тоді за аналогією зі схемою виведення рівняння коливань струни отримуємо диференціальне рівняння малих поперечних коливань мембрани:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \ \ \left((x,y) \in D,\ 0 < t < \infty\right);$$

$$a^2 = \frac{T}{\rho},\ \ f(x,y,t) = \frac{p(x,y,t)}{\rho}. \qquad (2.4.1)$$

Рівняння (2.4.1) називають двовимірним хвильовим рівнянням.

2. Початкові й граничні умови. З фізичних міркувань ясно, що для однозначного опису процесу коливань крім рівняння (2.4.1) потрібно знати (задати) початкове положення (форму мембрани при $t=0$), початкові швидкості точок мембрани і стан межі Γ мембрани (граничний режим). Якщо, наприклад, край мембрани жорстко закріплено, то початкові умови й граничний режим мають вигляд

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y) \quad \big((x,y)\in D\cup\Gamma\big); \tag{2.4.2}$$

$$u\big|_\Gamma=0 \quad (0\le t<\infty) \quad (u\big|_\Gamma=u(x,y,t) \text{ при } (x,y)\in\Gamma). \tag{2.4.3}$$

При певних обмеженнях на відомі функції $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$, що задають форму мембрани і швидкості її точок у момент часу $t=0$, математична модель (2.4.1)–(2.4.3) однозначно описує малі поперечні коливання мембрани.

3. ОДНОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

3.1. Задача Коші для одновимірного рівняння. Явище поширення хвиль

Однією з найважливіших задач в теорії поширення хвиль є задача Коші (задача з початковими умовами), яка полягає в знаходженні розв’язку $u(x,t)$ одновимірного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty<x<\infty, 0<t<\infty), \tag{3.1.1}$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \quad (-\infty<x<\infty). \tag{3.1.2}$$

Задача Коші описує, наприклад, коливання нескінченної струни з заданим початковим становищем (профілем) і заданою початковою швидкістю точок цієї струни (граничні умови відсутні!). Постановка такої задачі пояснюється такими міркуваннями. Якщо струна є дуже довгою (але скінченною), то вплив граничних режимів у точках струни, досить віддалених від границь (кінців струни), позначається через досить великий проміжок часу. Інакше кажучи, на коливання, що виникли в середній частині такої струни, кінці струни протягом певного проміжку часу помітно не впливають. Картина почне спотворюватися тільки тоді, коли коливання дійдуть до кінців струни і, відбившись, підуть назад. Отже, не враховуючи впливу кінців струни, ми тим самим не враховуємо вплив відбитих коливань. Отже, якщо нас цікавить явище протягом невеликого проміжку часу, коли вплив кінців ще несуттєвий, то замість повної задачі можна розглядати граничну задачу (3.1.1) з початковими умовами (3.1.2).

Задачу (3.1.1), (3.1.2) 1750 року розв’язав французький математик Даламбер.

Формула Даламбера

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \tag{3.1.3}$$

дає змогу легко знайти розв’язок задачі (3.1.1), (3.1.2), якщо відомі початкові функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, і дати змістовну фізичну інтерпретацію цього розв’язку на мові біжних хвиль.

Процес знаходження розв’язку задачі (3.1.1), (3.1.2) розіб’ємо на декілька етапів:

1. Перетворення рівняння (3.1.1) до вигляду, зручного для інтегрування. Перетворимо рівняння (3.1.1) до канонічного вигляду, який містить мішану похідну. Рівняння характеристик $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C=0$ у цьому випадку $\left(A=1,\ B=0,\ C=-a^2,\ y=x,\ x=t\right)$ має вигляд $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-a^2=0,$ тобто розпадається на два рівняння $dx=adt,\ dx=-adt,$ загальними інтегралами яких є прямі $x-at=C_1,\ x+at=C_2$. Уведемо нові змінні $\xi=x+at,\ \eta=x-at$. Тоді рівняння (3.1.1) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0. \tag{3.1.4}$$

Переконаємося в цьому безпосередньо. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=$$

$$=a\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right),\text{ тобто}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right);\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\text{, тобто }\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Підставляючи ці вирази для $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ у (3.1.1), отримуємо рівняння (3.1.4).

2. Знаходження загального розв'язку рівняння (3.1.1). Записавши рівняння (3.1.4) у вигляді $\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$, отримуємо $\frac{\partial u}{\partial \eta}=g(\eta)$, де $g(\eta)$ – довільна функція, що диференціюється. Інтегруючи останнє рівняння за η при фіксованому ξ, маємо $u=\int g(\eta)d\eta+g_2(\xi)$ або

$$u=g_1(\eta)+g_2(\xi), \qquad (3.1.5)$$

де $g_1(\eta)=\int g(\eta)d\eta,\ g_2(\xi)$ – довільні двічі диференційовні функції. Навпаки, якими б не були двічі диференційовні функції g_1 і g_2, функція $u(\xi,\eta)=g_1(\eta)+g_2(\xi)$ являє собою розв'язок рівняння (3.1.4), тобто є загальним розв'язком рівняння (3.1.4). Підставляючи $\xi=x+at$, $\eta=x-at$ у формулу (3.1.5), отримуємо загальний розв'язок хвильового рівняння

$$u(x,t)=g_1(x-at)+g_2(x+at). \qquad (3.1.6)$$

3. Урахування початкових умов. Виділимо серед нескінченної множини розв'язків (3.1.6) рівняння (3.1.1) такий розв'язок, який задовольняє початкові умови (3.1.2). Уважаючи в (3.1.6) $t=0$ і враховуючи умову $u(x,0)=\varphi(x)$, отримуємо співвідношення

$$g_1(x)+g_2(x)=\varphi(x). \qquad (3.1.7)$$

Диференціюючи (3.1.6) за t і вважаючи потім $t=0$, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=g_1'(x-at)(x-at)'_t+g_2'(x+at)(x+at)'_t=-ag_1'(x-at)+ag_2'(x+at),$$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-a\left[g_1'(x)-g_2'(x)\right]$. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$, то звідси отримуємо співвідношення $-g_1'(x)+g_2'(x)=\frac{1}{a}\psi(x)$. Інтегруючи його від 0 до x, маємо

$$-g_1(x)+g_2(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz+C \quad (C \text{ – довільна стала}). \qquad (3.1.8)$$

Тепер із (3.1.7) і (3.1.8) визначаємо функції

$$g_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz-\frac{C}{2}, \quad g_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz+\frac{C}{2}. \qquad (3.1.9)$$

Отже, розв’язок (3.1.6) набуває вигляду

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(z)dz-\int_0^{x-at}\psi(z)dz\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{0}\psi(z)dz+\int_0^{x+at}\psi(z)dz\right], \text{ тобто}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz\,.$$

Якщо функція $\varphi(x)$ має похідні $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, а функція $\psi(x)$ – похідну $\psi'(x)$, то формула (3.1.3) дає розв'язок задачі Коші (3.1.1), (3.1.2) (розв'язок існує). У цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою функції (3.1.3) у рівняння (3.1.1) і початкові умови (3.1.2).

Спосіб виведення формули (3.1.3) доводить єдиність розв'язку задачі (3.1.1), (3.1.2).

Під час перевірки (підстановки функції (3.1.3) у рівняння (3.1.1)) слід урахувати, що $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{x+at}\psi(z)dz=a\psi(x+at)$, $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{x+at}\psi(z)dz=\psi(x+at)$. Аналогічні формули виходять при диференціюванні інтеграла $\int_0^{x-at}\psi(z)dz$.

Фізична інтерпретація розв’язку. Функція $u(x,t)$, що визначається формулою (3.1.3), описує процес поширення початкового відхилення $\varphi(x)$ і початкової швидкості $\psi(x)$. Якщо фіксувати $t=t_0$, то функція $u(x,t_0)$ описує профіль (форму) струни в момент часу t_0; фіксуючи $x=x_0$, отримаємо функцію $u(x_0,t)$, що описує процес руху точки $x=x_0$ уздовж прямої $x=x_0$.

Припустимо, що спостерігач, який перебував у точці $x=0$ у момент часу $t=0$ і зафіксував у пам'яті деякий профіль $u_1=g_1(x)$, рухається зі швидкістю a у додатному напрямку осі Ox. Уведемо систему координат, зв'язану з рухомим спостерігачем, уважаючи, що $x'=x-at,\ t'=t$.

У цій рухомій системі координат функція $u_1=g_1(x-at)$ буде мати вигляд $u_1=g_1(x')$ і, отже, спостерігач весь час буде бачити той же профіль, що й в початковий момент $t=0$. Таким чином, функція $u_1(x,t)=g_1(x-at)$ є незмінним профілем $g_1(x)$, що переміщується праворуч уздовж осі Ox зі швидкістю a, або це, як кажуть, біжна хвиля. У цьому явищі хвилею є процес поширення відхилення (збурення) точок струни. Аналогічно, функцію $u_2(x,t) = g_2(x+at)$ можна інтерпретувати як хвилю, що поширюється ліворуч зі швидкістю a.

Таким чином, розв'язок (3.1.3) задачі Коші (3.1.1), (3.1.2) є суперпозицією $u(x,t) = g_1(x-at) + g_2(x+at)$ двох хвиль $u_1(x,t) = g_1(x-at)$ і $u_2(x,t) = g_2(x+at)$, причому з урахуванням (3.1.9)

$$g_1(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\omega(x-at),\ g_2(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\omega(x+at),$$

$\omega(y) = \int\limits_0^y \psi(z)dz$.

Зазначимо, що така картина є характерною для всіх хвильових процесів, наприклад для електромагнітних коливань далеко від джерел випромінювання.

3.2. Коливання напівнескінченної струни. Метод подовження

Розглянемо задачу про поширення хвиль у напівнескінченній струні $0 \le x \le \infty$. Ця задача має особливо важливе значення при вивченні процесів відбиття хвиль від кінця $x = 0$. У разі жорсткого його закріплення задача формулюється у такий спосіб.

Знайти розв'язок рівняння коливань (одновимірного хвильового рівняння)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty), \tag{3.2.1}$$

що задовольняє початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad (0 \le x < \infty) \tag{3.2.2}$$

і граничну умову

$$u(0,t) = 0 \qquad (0 \le t < \infty). \tag{3.2.3}$$

Відразу зазначимо, що умови $u(x,0) = \varphi(x)$ і $u(0,t) = 0$ накладають обмеження на початкову функцію $\varphi(x)$. Дійсно, $u(0,0) = \varphi(0)$ при $x = 0$, $u(0,0) = 0$ при $t = 0$. Тому треба накласти обмеження

$$\varphi(0) = 0 \ \text{(умова узгодження).} \tag{3.2.4}$$

Задача (3.2.1)–(3.2.3) легко зводиться до задачі Коші для нескінченної струни. Для цього подовжимо початкові функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ на від'ємну піввісь $-\infty < x < 0$ непарним чином, тобто введемо функції

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & (x\ge 0),\\ -\varphi(-x), & (x<0);\end{cases}\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & (x\ge 0),\\ -\psi(-x), & (x<0)\end{cases} \tag{3.2.5}$$

і розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & (-\infty<x<\infty, 0<t<\infty),\\ U(x,0)=\Phi(x),\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0)=\Psi(x) & (-\infty<x<\infty).\end{cases} \tag{3.2.6}$$

Розв'язок задачі (3.2.6) знаходимо за формулою Даламбера

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz. \tag{3.2.7}$$

Звідси $U(0,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(-at)+\Phi(at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(z)dz.$ Оскільки функції Φ і Ψ є непарними, то $\int_{-at}^{at}\Psi(z)dz\equiv 0$, $\Phi(-at)=-\Phi(at)$, і тоді $\Phi(-at)+\Phi(at)\equiv 0$,

$$U(0,t)=0\ (0\le t<\infty). \tag{3.2.8}$$

Крім того, $U(x,0)=\Phi(\mathrm{x})=\varphi(x)$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0)=\Psi(x)=\psi(x)\quad (x\ge 0)$.

Таким чином, розглядаючи функцію $U(x,t)$ тільки для $x\ge 0$, розв'язок задачі (3.2.1)–(3.2.3) отримуємо за формулою

$$u(x,t)=U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(x)dz\quad (x\ge 0, t\ge 0).$$

Повернемось до колишніх функцій $\varphi(x)\quad (x\ge 0), \Psi(x)\quad (x\ge 0)$.
Оскільки $x+at\ge 0$, то

$$\Phi(x+at)=\varphi(x+at)\quad (x\ge 0, t\ge 0). \tag{3.2.9}$$

Далі, $\Phi(x-at)=\begin{cases}\varphi(x-at) & при\ x-at\ge 0,\\ -\varphi(at-x) & при\ x-at<0,\end{cases}$ тобто

$$\Phi(x-at)=\begin{cases}\varphi(x-at) & при\ t\le\dfrac{x}{a}\quad (x\ge 0),\\ -\varphi(at-x) & при\ t>\dfrac{x}{a}\quad (x\ge 0);\end{cases} \tag{3.2.10}$$

$\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz=\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$ при $x-at\ge 0$ $\left(t\le\dfrac{x}{a}\right)$, оскільки в цьому випадку $z\ge 0$, і тоді з урахуванням (3.2.5) $\Psi(z)=\psi(z)$. Отже,

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz=\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \text{ при } t\le\frac{x}{a} \quad (x\ge 0), \tag{3.2.11}$$

При $x-at<0$ $\left(t>\dfrac{x}{a}\right)$ маємо

$\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz=\int\limits_{x-at}^{0}\Psi(z)dz+\int\limits_{0}^{x+at}\Psi(z)dz=-\int\limits_{x-at}^{0}\Psi(-z)dz+\int\limits_{0}^{x+at}\Psi(z)dz$, тобто

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz=\int\limits_{at-ч}^{0}\psi(z)dz+\int\limits_{0}^{x+at}\psi(z)dz=\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz \text{ при } t>\frac{x}{a} \ (x\ge 0). \tag{3.2.12}$$

На основі (3.2.7), (3.2.9)–(3.2.12) розв’язок вихідної задачі має вигляд

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\dfrac{1}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \ \textit{при} \ t\le\dfrac{x}{a} \ (x\ge 0),\\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)\right]+\dfrac{1}{2}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz \ \textit{при} \ t>\dfrac{x}{a} \ (x\ge 0).\end{cases} \tag{3.2.13}$$

Із формули (3.2.13) при $t\le\dfrac{x}{a}$ видно, що розв’язок (3.2.13) збігається з розв’язком задачі Коші для нескінченної струни, тобто в області $t\le\dfrac{x}{a}$ $(x\ge 0)$ вплив граничної умови (3.2.3) не позначається.

3.3. Метод відокремлення змінних для однорідного хвильового рівняння

Метод відокремлення змінних, або метод Фур'є, є одним з найбільш ефективних аналітичних методів розв'язання задач математичної фізики. Цей метод використовується тоді, коли рівняння, початкові умови і граничні умови вихідної задачі є лінійними. Безпосередньо метод застосовується в разі однорідних граничних умов, однак за допомогою спеціальних прийомів допускається узагальнення і на випадок лінійних неоднорідних граничних умов.

Викладення цього методу проведемо для однієї з найбільш важливих задач математичної фізики – задачі про знаходження розв’язку $u(x,t)$ одновимірного однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, 0 < t < \infty), \qquad (3.3.1)$$

що задовольняє початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \ \ (0 \le x \le l) \qquad (3.3.2)$$

та однорідні граничні умови

$$u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty). \qquad (3.3.3)$$

Ця задача є математичною моделлю всіх одновимірних задач математичної фізики, які описуються хвильовим рівнянням (3.3.1) з однорідними граничними умовами (3.3.3). Будемо інтерпретувати її як задачу про малі плоскі поперечні коливання струни з жорстко закріпленими кінцями $x = 0$, $x = l$.

Відразу зауважимо, що початкові й граничні умови (3.3.2) і (3.3.3) не є цілком незалежними. Дійсно, з граничних умов (3.3.3) випливає, що при $t = 0$ $u(0,0) = 0$, $u(l,t) = 0$, а з першої початкової умови (3.3.2) при $x = 0$ і $x = l$ маємо $u(0,0) = \varphi(0), u(l,0) = \varphi(l)$. Для того щоб ця система рівностей була несуперечливою, необхідно покласти

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0. \qquad (3.3.4)$$

Рівності (3.3.4) називаються умовами узгодження і на основі фізичних міркувань є необхідними для неперервності розв’язку в області $0 \le x \le l, \ 0 \le t < \infty.$

1. Загальні принципи відокремлення змінних. Рівняння (3.3.1) – лінійне й однорідне, тому сума його частинних розв’язків також є розв’язком. Маючи досить велику кількість частинних розв’язків, можна спробувати шляхом додавання їх з деякими коефіцієнтами знайти розв’язок задачі (3.3.1)–(3.3.3).

Для одновимірних рівнянь гіперболічного й параболічного типів відокремлення змінних – це пошук нетривіальних розв’язків вигляду

$$u(x,t) = \mathrm{X}(x)\mathrm{T}(t), \qquad (3.3.5)$$

де $\mathrm{X}(x)$ – функція, що залежить тільки від координат, а $\mathrm{T}(t)$– тільки від часу t.

Загальна ідея методу полягає в тому, щоб для певного рівняння в частинних похідних знайти безліч функцій вигляду (3.3.5), які задовольняють і рівнянню (3.3.1), і граничні умови (3.3.3).

Ці функції є найпростішими елементами, з яких конструюється розв'язок у вигляді функціонального ряду (або інтеграла), що дає можливість задовольнити початкові умови (3.3.2).

2. Знаходження частинних розв'язків (3.3.5), що задовольняють граничні умови. Підставляючи функцію (3.3.5) у рівняння (3.3.1), знаходимо $X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$ або, після ділення на $a^2X(x)T(t)$, $\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$.

У цій рівності змінні x, t розділені, тобто ліва частина залежить тільки від t, а права – тільки від x. Щоб функція (3.3.5) була розв'язком рівняння (3.3.1), остання рівність має задовольнятися тотожно, тобто для всіх значень $0 < x < l,\ t > 0$. Оскільки змінні x і t не залежать одна від одної, то кожна частина цієї рівності має бути константою: позначаючи її $-\lambda$, отримуємо для знаходження функцій $X(x)$ і $T(t)$ звичайні диференціальні рівняння

$$T''(t) + a^2\lambda T = 0 \quad \left(T(t) \not\equiv 0 \right),$$
$$X''(x) + X(x) = 0 \quad \left(X(x) \not\equiv 0 \right).$$

Граничні умови (3.3.3) дають таке:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \ (0 \le t < \infty), \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \ \ (0 \le t < \infty),$$

звідки випливає, що функція $X(x)$ має задовольняти додаткові умови $X(0) = X(l) = 0$, оскільки в противному випадку ми мали б $T(t) \equiv 0$ і, отже, $u(x,t) \equiv 0$, тоді як задача полягає в знаходженні нетривіального розв'язку $u(x,t)$. Для функції $T(t)$ ніяких додаткових умов немає.

Таким чином, у зв'язку зі знаходженням функції $X(x)$ маємо найпростішу задачу про власні значення.

Знайти ті значення параметра λ, при яких існують нетривіальні розв'язки задачі

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \left(0 < x < l\right), \tag{3.3.6}$$

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0, \tag{3.3.7}$$

а також знайти ці розв'язки і, тим самим, знайти нетривіальні частинні розв'язки (3.3.5) рівняння (3.3.1), які вже задовольняють граничні умови (3.3.3). Такі значення параметра λ називають власними значеннями, а нетривіальні розв'язки $\mathrm{X}(x)$, що їм відповідають, – власними функціями задачі (3.3.6), (3.3.7).

Множину всіх власних значень називають спектром $\{\lambda\}$, а задачу (3.3.6), (3.3.7) про відшукання спектра системи власних функцій $\{\mathrm{X}(x)\}$, що йому відповідають, – спектральною задачею або задачею Штурма – Ліувілля.

Розглянемо окремо випадки, коли параметр є додатним, дорівнює нулю і є від'ємним.

1. При $\lambda = -\beta^2 < 0$ $(\beta \neq 0)$ задача (3.3.6), (3.3.7) не має нетривіальних розв'язків. Дійсно, у цьому випадку рівняння (3.3.6) має вигляд $\mathrm{X}''(x) - \beta^2 \mathrm{X}(x) = 0$, а його загальний розв'язок $\mathrm{X}(x) = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x}$. Крайові умови (3.3.7) дають $C + D = 0$, $Ce^{\beta l} + De^{-\beta l} = 0$, тобто $D = -C$, $C\left(e^{\beta l} - e^{-\beta l}\right) = 0$. Оскільки $e^{\beta l} - e^{-\beta l} = 2\operatorname{sh}\beta l$, то $C\operatorname{sh}\beta l = 0$. У цьому випадку $\beta \neq 0$ і тому $\operatorname{sh}\beta l \neq 0$. Але тоді $C = 0$, отже, $D = 0;$ $\mathrm{X}(x) \equiv 0$.

2. При $\lambda = 0$ задача (3.3.6), (3.3.7) також не має нетривіальних розв'язків. Дійсно, у цьому випадку рівняння (3.3.6) має вигляд $\mathrm{X}''(x) = 0$, а його загальний розв'язок $\mathrm{X}(x) = Cx + D$ $(C, D - const)$. Крайові умови (3.3.7) дають $D = 0,$ $Cl + D = 0$, звідки $C = 0,$ $\mathrm{X}(x) \equiv 0$.

3. Нехай, нарешті, $\lambda = \beta^2 > 0$ $(\beta \neq 0)$. У цьому випадку рівняння (3.3.6) має вигляд $\mathrm{X}''(x) + \beta^2 \mathrm{X}(x) = 0,$ а його загальний розв'язок $\mathrm{X}(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x.$ Крайові умови (3.3.7) дають $C = 0,$ $C\cos\beta l + D\sin\beta l = 0$, звідки $D\sin\beta l = 0$. Якщо покласти $D = 0$, то знову отримаємо тривіальний розв'язок $\mathrm{X}(x) \equiv 0$. Залишається тільки випадок $\sin\beta l = 0,$ звідки $\beta l = \pi n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$ $\beta = \beta_n = \dfrac{\pi n}{l},$ $\lambda = \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Цим значенням відповідають функції $\mathrm{X} = \mathrm{X}_n(x) = \sin\dfrac{\pi n x}{l}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (множники $C = C_n$ випускаємо). Зауважимо, що немає необхідності розглядати значення $n = -1, -2, \ldots$, оскільки відповідні власні функції відрізняються тільки знаком від $\mathrm{X}_n(x)$ при $n = 1, 2, \ldots$ і тому не поповнюють набір власних функцій новими функціями (лінійно незалежними відносно $\mathrm{X}_n(x)$ при $n = 1, 2, \ldots$).

Таким чином, знайдено спектр $\{\lambda_n\}$ $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ і систему власних функцій $\{\mathrm{X}_n(x)\}$ $\mathrm{X} = \mathrm{X}_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, що йому відповідає.

Розв'язки $\mathrm{T} = \mathrm{T}_n(t)$ рівняння $\mathrm{X}'' + a^2\lambda\mathrm{T} = 0$, що відповідають власним значенням $\lambda = \lambda_n$, визначаються формулою

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_n(t) = a_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n a t}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

де a_n, b_n – довільні сталі.

Отже, знайдено всі нетривіальні розв'язки з розділеними змінними рівняння (3.3.1), що задовольняють граничні умови (3.3.3):

$$u = u_n(x,t) = \mathrm{X}_n(x)\mathrm{T}_n(t) = \left(a_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (3.3.8)$$

3. Побудова розв'язку задачі (3.3.1)–(3.3.3). Функції (3.3.8) з побудови задовольняють і рівнянню (3.3.1), і граничні умови (3.3.3). Тому останній етап полягає в знаходженні за допомогою елементарних частинних розв'язків (3.3.8) такого розв'язку рівняння (3.3.1), який задовольняв би і початкові умови (3.3.2). Оскільки рівняння (3.3.1) і граничні умови (3.3.3) є лінійними й однорідними, довільна скінченна сума елементарних розв'язків (3.3.8) і формально функціональний ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{X}_n(x)\mathrm{T}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l} \quad (3.3.9)$$

по всій системі власних функцій так само є розв'язками рівняння (3.3.1) і задовольняють граничні умови (3.3.3). Зауважимо, що самі по собі функції $u = u_n(x,t) = \mathrm{X}_n(x)\mathrm{T}_n(t)$ та їх скінченні суми можуть задовольняти початкові умови (3.3.2) тільки для окремих випадків початкових функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, а саме для випадків, коли вони мають вигляд $A_k \sin\frac{\pi k x}{l}$ або $\sum_{n=1}^{k} A_k \sin\frac{\pi k x}{l}$ $(A_s = const)$.

У всіх інших випадках початкових функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ необхідно використовувати функціональний ряд (3.3.9). Підстановка його в початкові умови (3.3.2) приводить до двох розвинень відомих функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ у ряди Фур'є за синусами на проміжку $[0;l]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi nx}{l} = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi na}{l} b_n \sin\frac{\pi nx}{l} = \psi(x) \quad (0 \le x \le l).$$

Уважаючи, що умови розвинення для цих функцій виконуються, за відомими формулами знаходимо

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{3.3.10}$$

Отже, формально задачу (3.3.1)–(3.3.3) розв'язано, і її розв'язок подано функціональним рядом (3.3.9) з коефіцієнтами (3.3.10).

Фізична інтерпретація розв'язку. У задачі про коливання нескінченної струни формула Даламбера є розв'язком у вигляді суми двох біжних хвиль, що поширюються в протилежних напрямках. У цій же задачі біжних хвиль не буде, оскільки вони взаємодіють з краями $x=0$, $x=l$. Замість них виникають інші хвилі, що мають назву стійних хвиль.

Дійсно, розв'язок (3.3.9)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nat}{l} + b_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l} \quad (0 \le x \le l, 0 \le t \le \infty)$$

можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi na}{l}t + \varphi_n\right)\sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{3.3.11}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \sin\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}, \quad \cos\varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \quad \left(\tan\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}\right).$$

Доданок з номером n у розв'язку (3.3.11)

$$u_n(x,t) = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)\sin\frac{\pi nx}{l} \quad \left(\omega_n = \frac{\pi na}{l}\right) \tag{3.3.12}$$

називають n-ю гармонікою, а $A_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \omega_n, \varphi_n$ – амплітудою, частотою та фазою цієї гармоніки. Очевидно, що $\max|u_n(x,t)| = A_n$.

Розглянемо елементарне коливання струни, що визначається гармонікою (3.3.12). Точки струни $x = \frac{ml}{n}$ $(m = 1,2,\ldots,n-1)$, у яких $\sin\frac{\pi nx}{l} = 0$ і які протягом усього процесу коливань є нерухомими, називають вузлами хвилі $u_n(x,t)$. Точки $x = \frac{2m+1}{2n} l \quad (m = 0,1,\dots,n-1)$, у яких $\sin\frac{\pi n x}{l} = \pm 1$ і які здійснюють коливання з максимальною амплітудою A_n, називають пучностями хвилі $u_n(x,t)$.

Рух струни такого вигляду називають стійною хвилею. Профіль стійної хвилі в будь-який момент часу являє собою синусоїду $u_n(x,t) = C_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}$, де $C_n(t) = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$.

У момент часу t, коли $\sin(\omega_n t + \varphi_n) = \pm 1$, відхилення $u_n(x,t)$ точок струни набувають максимальних значень, а швидкості $\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)$ їх руху дорівнюють нулю. У моменти часу t, при яких $\sin(\omega_n t + \varphi_n) = 0$, відхилення точок струни дорівнюють нулю, а швидкість їх руху є максимальною. Частоти коливань усіх точок є однаковими: $\omega_n = \frac{\pi n a}{l} = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\rho}}$. Їх називають власними частотами коливань струни. Повне коливання струни на основі (3.3.11) є накладенням елементарних коливань (3.3.12).

Коливання струни сприймаються нами зазвичай через звук, що видає струна. Не розглядаючи процесу поширення коливань у повітрі і сприйняття звукових коливань вухом, можна сказати, що звук струни є накладенням «простих тонів», що відповідають елементарним коливанням (3.3.12). Це розкладання звуку на прості тони не є операцією тільки математичного характеру. Виокремити прості тони (гармоніки (3.3.12)) можна експериментально за допомогою резонаторів.

Висота тону залежить від частоти коливань, а сила тону визначається його амплітудою. Найнижчий тон, який може створювати струна, визначається найнижчою частотою $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\rho}}$ і називається основним тоном струни. Решту тонів, що відповідають частотам $\omega_n = n\omega_1$, називають обертонами. Тембр (забарвлення) звуку залежить від наявності обертонів (поряд з основним тоном).

Нижчий (основний) тон струни та тембр звуку залежать від способу збудження струни. Дійсно, спосіб порушення коливань визначається початковими умовами $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, через які виражаються коефіцієнти a_n і b_n. Якщо, наприклад, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, то основним тоном буде тон, що відповідає частоті ω_n, де n – найменше число, для якого коефіцієнти a_n або b_n є відмінними від нуля.

3.4. Метод відокремлення змінних для неоднорідного хвильового рівняння з однорідними граничними умовами

Розглянемо найпростішу неоднорідну модель коливань

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (0 < x < l,\ 0 < t < \infty), \tag{3.4.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \ (0 \le x \le l), \tag{3.4.2}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty). \tag{3.4.3}$$

Через неоднорідність рівняння (3.4.1) неможливо знайти його елементарні розв’язки $u_n(x,t) = \mathrm{X}_n(x)\mathrm{T}_n(t)$ так, як це було зроблено для однорідного рівняння. Проте отримані раніше результати можна використовувати і в цьому випадку.

Основна ідея методу розв’язання задачі (3.4.1)–(3.4.3) полягає в розвиненні відомої функції $f(x,t)$ і шуканої функції $u(x,t)$ у ряди за власними функціями $\mathrm{X}_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ розглянутої вище задачі Штурма – Ліувілля

$$\begin{gathered} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \ (0 \le x \le l), \\ X(o) = 0,\ X(l) = 0, \end{gathered} \tag{3.4.4}$$

що відповідає однорідним граничним умовам (3.4.3):

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{3.4.5}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{3.4.6}$$

Рівність (3.4.5) є розвиненням функції $f(x,t)$ у ряд Фур’є за синусами при будь-якому фіксованому значенні t. Оскільки функція $f(x,t)$ є відомою, коефіцієнти $f_n(t)$ ряду (3.4.5) можна знайти за формулами

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots.). \tag{3.4.7}$$

Для знаходження величин $T_n(t)$ підставимо у рівняння (3.4.1) замість $u(x,t)$ і $f(x,t)$ їх розвинення (3.4.6), (3.4.5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\,X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,X_n(x). \qquad (3.4.8)$$

Ураховуючи, що за формулою (3.4.4) $X_n''(x) = -\lambda_n X_n(x)$ $\left(\lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)$, зі співвідношення (3.4.8) одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) - f_n(t) \right] X_n(x) = 0 \quad (0 < x < l, 0 < t < \infty).$$

Оскільки система власних функцій $\{X_n(x)\} = \left\{ \sin\dfrac{\pi n x}{l} \right\}_1^{\infty}$ є лінійно незалежною, ця рівність (тотожність) можлива лише у випадку, коли всі коефіцієнти при $X_n(x)$ дорівнюють нулю. Отже, при будь-якому $n = 1, 2, ..$ функція $T_n(t)$ задовольняє звичайному диференціальному рівнянню

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n(t) \ \ (n = 1, 2, ...), \ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \qquad (3.4.9)$$

яке, на відміну від розглянутого раніше випадку, є неоднорідним.

На основі (3.4.6) і (3.4.2) запишемо

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) sin\frac{\pi n x}{l} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) sin\frac{\pi n x}{l} = \psi(x) \ (0 \le x \le l),$$

звідки величини $T_n(0)$ і $T_n'(0)$ знаходимо як коефіцієнти Фур'є:

$$T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) sin\frac{\pi n x}{l} dx, \ \ T_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) sin\frac{\pi n x}{l} dx \ (n = 1, 2, ...). \ (3.4.10)$$

На основі (3.4.9), (3.4.10) для знаходження функції $T_n(t)$ отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку:

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (n = 1, 2, ...), \qquad (3.4.11)$$

$$T_n(0) = A_n, \quad T_n'(0) = B_n,$$

де $A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ \ B_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x) sin\frac{\pi n x}{l}dx$ – відомі величини.

Після знаходження $T_n(t)$ із задачі (3.4.11) розв'язок вихідної задачі (3.4.1)–(3.4.3) будуємо у вигляді функціонального ряду (3.4.6).

3.5. Явище резонансу

Явище резонансу розглянемо на прикладі розв'язання задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\sin\omega t \qquad (0 < x < l, 0 < t < \infty), \tag{3.5.1}$$

$$u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (0 \le x \le l), \tag{3.5.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty). \tag{3.5.3}$$

Тут $f(x,t) = A\sin\omega t,\ A = const$, ω – частота зовнішньої сили $f(x,t)$, $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$. На основі формули (3.4.7) маємо

$$f_n(t) = \frac{2A}{l}\sin\omega t\int\limits_0^l sin\frac{\pi n x}{l}dx = -\frac{2A}{\pi n}\sin\omega t\cos\frac{\pi n x}{l}\bigg|_0^l = -\frac{2A}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right]\sin\omega t$$, тобто

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & (n = 2k), \\ \dfrac{4A}{\pi(2k+1)}\sin\omega t & (n = 2k+1; k = 0,1,2,...). \end{cases}$$

При $n = 2k$ задача Коші (3.4.11) має вигляд

$$T''_{2k}(t) + \omega_{2k}^2\ T_{2k}(t) = 0 \qquad (k = 1,2,...),$$
$$T_{2k}(0) = 0,\ T'_{2k}(0) = 0.$$

Загальним розв'язком рівняння цієї задачі є функція $T_{2k}(t) = C_{2k}\cos\omega_{2k}t + D_{2k}\sin\omega_{2k}t,$ а її похідною буде функція $T'_{2k}(t) = -C_{2k}\omega_{2k}\sin\omega_{2k}t + D_{2k}\cos\omega_{2k}t.$ З огляду на початкові умови $T_{2k}(0) = 0,$ $T'_{2k}(0) = 0$ отримуємо $C_{2k} = 0,\ D_{2k} = 0,$ тобто $T_{2k}(t) \equiv 0.$ При $n = 2k+1$ $(k = 0,1,2,...)$ задача Коші (3.4.11) має вигляд

$$T''_{2k+1}(t) + \omega_{2k+1}^2 T_{2k+1}(t) = \frac{4A}{\pi(2k+1)}\sin\omega t, \qquad T_{2k+1}(0) = 0, \qquad T'_{2k+1}(0) = 0.$$

Загальним розв'язком однорідного рівняння є функція

$$T_{2k+1}^{(0)}(t) = C_{2k+1}\cos(\omega_{2k+1}t) + D_{2k+1}\sin(\omega_{2k+1}t).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $T_{2k+1}^*(t) = B\sin\omega t,$ де B – невизначений числовий коефіцієнт. Підставляючи

$T_{2k+1}^{*}(t)$ і $T_{2k+1}''^{*}(t) = -B\omega^2 \sin\omega t$ у рівняння, знаходимо $B = \dfrac{4A}{\pi(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}$,

отже, $T_{2k+1}^{*}(t) = \dfrac{4A\sin\omega t}{\pi(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}$. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$T_{2k+1}(t) = C_{2k+1}\cos(\omega_{2k+1}t) + D_{2k+1}\sin(\omega_{2k+1}t) + \dfrac{4A\sin\omega t}{\pi(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}$, звідки

$T_{2k+1}'(t) = \omega_{2k+1}[-C_{2k+1}\sin(\omega_{2k+1}t) + D_{2k+1}\cos(\omega_{2k+1}t)] + \dfrac{4A\sin\omega t}{\pi(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}$.

Із початкових умов $T_{2k+1}(0) = 0,$ $T_{2k+1}'(0) = 0$ отримуємо

$C_{2k+1} = 0, \omega_{2k+1}D_{2k+1} + \dfrac{4A\sin\omega}{\pi(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)} = 0,$ $D_{2k+1} = -\dfrac{4A\omega}{\pi(2k+1)\omega_{2k+1}(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}$.

Отже, $T_{2k+1} = \dfrac{4Al}{\pi^2 a(2k+1)^2}\dfrac{\omega_{2k+1}\sin\omega t - \omega\sin\omega_{2k+1}t}{\omega_{2k+1}^2 - \omega^2}$,

$$u(x,t) = \frac{4Al}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\omega_{2k+1}\sin\omega t - \omega\sin\omega_{2k+1}t}{\omega_{2k+1}^2 - \omega^2}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}. \qquad (3.5.4)$$

Розв'язок (3.5.4) задачі (3.5.1)–(3.5.3) має сенс тільки в тому випадку, якщо частота ω зовнішньої (збурювальної) сили $f(x,t) = A\sin\omega t$ не збігається з жодною із непарних власних частот $\omega_{2k+1} = \dfrac{\pi(2k+1)a}{l}$. У цьому випадку $\left|\omega_{2k+1}\sin\omega t - \omega\sin\omega_{2k+1}t\right| \le \omega_{2k+1} + \omega$, $\left|u(x,t)\right| \le \dfrac{4Al}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2\left|\omega_{2k+1}^2 - \omega^2\right|} < \infty$.

Отже, при будь-якому t коливання є обмеженими (резонансу немає).

Нехай тепер для якого-небудь k має місце рівність $\omega = \omega_{2k+1}$, наприклад, $\omega = \omega_1$ $(k = 0)$. Тоді

$$\lim_{\omega\to\omega_1}\frac{\omega_1\sin\omega t - \omega\sin\omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega^2} = \lim_{\omega\to\omega_1}\frac{\omega_1 t\cos\omega t - \sin\omega_1 t}{-2\omega} = \frac{\sin\omega_1 t - \omega_1 t\cos\omega_1 t}{2\omega_1},$$

$$u(x,t) = \frac{4Al}{\pi^2 a}\left[\frac{l}{2\pi a}\left(\sin\frac{\pi at}{l} - \frac{\pi at}{l}\cos\frac{\pi at}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}\right] + \qquad (3.5.5)$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\omega_{2k+1}\sin\omega_1 t - \omega_1\sin\omega_{2k+1}t}{\omega_{2k+1}^2 - \omega_1^2}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}.$$

У розв'язку (3.5.5) доданок $-\dfrac{2Al}{\pi^2 a}t\cos\dfrac{\pi at}{l}\sin\dfrac{\pi x}{l}$ не є обмеженим при $t\to\infty$, тобто має місце явище резонансу.

3.6. Явище згасання коливань

Досі розглядалися коливання без урахування опору навколишнього середовища. Природно, що при цьому отримувались незгасаючі коливання. Розглянемо тепер випадок, коли коливання струни відбуваються за наявності опору середовища. Сила опору, що виникає при цьому, є пропорційною швидкості руху струни. У цьому випадку на елемент струни A_1A_2 від x до $x+\Delta x$ діє сила $F_{сопр} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t}\Delta x$, де α – коефіцієнт пропорційності, $\alpha > 0$. Міркуючи так само, як і при виведенні неоднорідного рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ ($f(x,t) = \frac{1}{\rho}\rho(x,t)$), і враховуючи, що сила опору завжди напрямлена проти руху, отримуємо рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) - \frac{\alpha}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t}$. Обмежуючись випадком вільних коливань ($f(x,t) \equiv 0$) і позначаючи $\frac{\alpha}{\rho} = 2\beta$ $(\beta > 0)$, розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} \quad (0 < x < l, 0 < t < \infty), \tag{3.6.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le l), \tag{3.6.2}$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \quad (0 \le t \le \infty). \tag{3.6.3}$$

Уважаючи, що $u(x,t) = X(x)T(t)$, і відокремлюючи змінні, отримуємо $\frac{T''(t) + 2\beta T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ ($\lambda = const$ – параметр відокремлення), звідки

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < l),$$

$$T''(t) + 2\beta T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (0 < t < \infty).$$

Оскільки граничні умови (3.6.3) є такими ж самими, що і в задачі для хвильового рівняння $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, то залишається колишньою задача Штурма – Ліувілля зі спектром $\{\lambda\} = \left\{\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right\}_1^\infty$ і системою власних функцій $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_1^\infty$.

Для знаходження відповідних функцій $T_n(t)$ і, отже, нетривіальних частинних розв'язків $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, що задовольняють граничні умови (3.6.3), отримуємо диференціальне рівняння

$$T_n''(t)+2\beta T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)=0\,. \tag{3.6.4}$$

Його частинні розв'язки, за Ейлером, шукаємо у вигляді $T_n(t)=e^{k_n t}$.

Характеристичне рівняння для знаходження k_n має вигляд $k_n^2+2\beta k_n+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2=0.$ Його корені $k_n=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2}$. Припустимо, що $\beta<\frac{\pi na}{l}$. Тоді $\beta^2<\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2$, $\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2-\beta^2>0$ при будь-якому $n=1,2,...$

Увівши позначення $p_n=\sqrt{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2-\beta^2}$ $(p_n>0)$, одержуємо корені $k_n=-\beta\pm ip_n$ $(n=1,2,...)$.

Цим комплексним кореням відповідають дійсні лінійно незалежні розв'язки

$$T_n(t)=e^{-bt}\begin{Bmatrix}\cos p_n t\\ \sin p_n t\end{Bmatrix}\ (n=1,2,...).$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.6.4) має вигляд $T_n(t)=e^{-\beta t}\left(a_n\cos p_n t+b_n\sin p_n t\right)$, а розв'язок з відокремленими змінними рівняння (3.6.1), що задовольняє однорідні граничні умови (3.6.3), –

$$u(x,t)=e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos p_n t+b_n sin p_n t\right)sin\frac{\pi nx}{l},$$

звідки

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\beta e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos p_n t+b_n sin p_n t\right)sin\frac{\pi nx}{l}+e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n p_n\sin p_n t+b_n p_n\cos p_n t\right)sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Задовольняючи тепер початкові умови (3.6.2), отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\phi(x),\ -\beta\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n p_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\psi(x)\ \ (0\le x\le l),$$

звідки $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n p_n-\beta a_n\right)\sin\frac{\pi nx}{l}=\psi(x)$,

$b_n p_n-\beta a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$, $b_n p_n=\beta a_n+\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$.

Отже, розв'язок задачі (3.6.1)–(3.6.3) має вигляд

$$\begin{gathered}u(x,t)=e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos p_n t+b_n sin p_n t\right)sin\frac{\pi nx}{l};\quad p_n=\sqrt{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2-\beta^2};\\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx,\qquad b_n=\frac{\beta}{p_n}a_n+\frac{2}{lp_n}\int_0^l\psi(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx.\end{gathered} \tag{3.6.5}$$

Наявність множника $e^{-\beta t}$, що експоненціально спадає до нуля, у розв'язку (3.6.5) приводить до того, що $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)=0$, тобто з часом коливання згасають.

3.7. Перетворення неоднорідних граничних умов на однорідні

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \quad (0<x<l,\ 0<t<\infty), \qquad (3.7.1)$$

$$u(x,0)=\phi(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \quad (0\le x\le l), \qquad (3.7.2)$$

$$u(0,t)=\mu(t),\ \ u(l,t)=\upsilon(t) \quad (0\le t<\infty). \qquad (3.7.3)$$

Очевидно, що навіть при $f(x,t)\equiv 0$ задачу (3.7.1)–(3.7.3) неможливо розв'язати безпосередньо методом відокремлення змінних. Дійсно, якщо $\mu(t)\not\equiv 0$ або $\upsilon(t)\not\equiv 0$, то для елементарних розв'язків з відокремленими змінними вигляду $u(x,t)=X(x)T(t)$ через неоднорідність граничних умов (3.7.3) неможливо поставити задачу Штурма – Ліувілля.

Ідея розв'язання задачі (3.7.1)–(3.7.3) полягає в заміні шуканої функції $u(x,t)$ на нову невідому функцію $v(x,t)$, яка задовольняє вже однорідні граничні умови.

Уводимо функцію $v(x,t)$ за формулою

$$u(x,t)=(\alpha_1 x+\beta_1)\mu(t)+(\alpha_2 x+\beta_2)\upsilon(t)+v(x,t) \qquad (3.7.4)$$

і добираємо числа $\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2$ так, щоб нова невідома функція $v(x,t)$ задовольняла однорідні граничні умови

$$v(0,t)=0,\ v(l,t)=0 \quad (0\le t<\infty).$$

З урахуванням умов (3.7.3) маємо

$$\beta_1\mu(t)+\beta_2\upsilon(t)+v(0,t)=\mu(t),\ (\alpha_1 l+\beta_1)\mu(t)+(\alpha_2 l+\beta_2)\upsilon(t)+v(l,t)=\upsilon(t). \qquad (3.7.5)$$

Покладемо $\beta_1=1,\ \beta_2=0$. Тоді перша рівність (3.7.5) має вигляд $u(t)+v(0,t)=u(t)$, звідки $v(0,t)=0$.

При цьому друга рівність (3.7.5) дає

$$(\alpha_1 l+1)u(t)+\alpha_2 l\upsilon(t)+v(l,t)=\upsilon(t).$$

Покладемо тут $\alpha_1 l+1=0,\ \alpha_2 l=1$, тобто $\alpha_1=-\dfrac{1}{l},\ \alpha_2=\dfrac{1}{l}$.

На основі (3.7.4) розв'язок вихідної задачі (3.7.1)–(3.7.3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t)=\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu(t)+\frac{x}{l}\upsilon(t)+v(x,t), \qquad (3.7.6)$$

де нова невідома функція $v(x,t)$ задовольняє вже однорідні граничні умови

$$v(0,t)=0,\ v(l,t)=0 \quad (0\le t<\infty).$$

Розглянемо тепер питання про те, який вигляд матимуть рівняння й початкові умови для функції $v(x,t)$. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{l}\mu(t) + \frac{1}{l}\upsilon(t) + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu'(t) + \frac{x}{l}\upsilon'(t) + \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu''(t) + \frac{x}{l}\upsilon''(t) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Підставляючи ці вирази для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ у вихідне рівняння (3.7.1), отримуємо хвильове рівняння для функції $v(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x,t) \quad (0 < x < l,\ 0 < t < \infty),$$

де $f_1(x,t) = f(x,t) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu''(t) - \frac{x}{l}v''(t)$.

Із початкових умов (3.7.2) на основі (3.7.6) отримуємо

$$\left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(0) + \frac{x}{l}\upsilon(0) + v(x,0) = \varphi(x),$$

$$\left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu'(0) + \frac{x}{l}\upsilon'(0) + \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \psi(x),$$ звідки

$$v(x,0) = \varphi_1(x), \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x),$$ де

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(0) - \frac{x}{l}\upsilon(0), \quad \psi_1(x) = \psi(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu'(0) - \frac{x}{l}\upsilon'(0).$$

Таким чином, для нової шуканої функції $v(x,t)$ отримуємо задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x,t) \quad (0 < x < l,\ 0 < t < \infty), \tag{3.7.7}$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x), \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x) \quad (0 \le x \le l), \tag{3.7.8}$$

$$v(0,t) = 0, \ v(l,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty) \tag{3.7.9}$$

з більш складними функціями $f_1(x,t)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ порівняно з функціями $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, але вже з однорідними граничними умовами.

Метод розв'язання задачі (3.7.7)–(3.7.9) для неоднорідного рівняння наведено вище. Після знаходження $v(x,t)$ розв'язок вихідної задачі (3.7.1)–(3.7.3) визначається формулою (3.7.6).

За допомогою формули (3.7.4) шляхом заміни шуканої функції $u(x,t)$ на нову невідому функцію $v(x,t)$ і належного вибору чисел α_1, β_1, α_2, β_2

розв'язується задача (3.7.1), (3.7.2) з граничними умовами вигляду $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\mu(t),\ u(l,t)=\upsilon(t)$ або $u(0,t)=\mu(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\upsilon(t)$.

У випадку граничних умов $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\mu(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\upsilon(t)$ формула (3.7.4) приводить до суперечності, якщо для $v(x,t)$ вимагати виконання однорідних граничних умов $\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(l,t)=0$.

Дійсно, на основі (3.7.4)

$\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha_1\mu(t)+\alpha_2 v(t)+\frac{\partial v}{\partial x}$, а на основі вихідних умов

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\mu(t),\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=v(t)$ маємо систему рівностей

$$\alpha_1\mu(t)+\alpha_2\upsilon(t)+\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=\mu(t)\,,\quad \alpha_1\mu(t)+\alpha_2\upsilon(t)+\frac{\partial v}{\partial x}(x,l)=\upsilon(t)\,.$$

Якщо вимагати, щоб $\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(l,t)=0$, то

$$\alpha_1\mu(t)+\alpha_2\upsilon(t)=\mu(t)\,,\quad \alpha_1\mu(t)+\alpha_2\upsilon(t)=\upsilon(t)\,.$$

Ця система є суперечливою в загальному випадку, коли $\mu(t)\neq\upsilon(t)$.

При граничних умовах

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=\mu(t),\ \frac{\partial v}{\partial x}(l,t)=\upsilon(t)\quad(0\le t<\infty)$$

заміну шуканої функції $u(x,t)$ на нову невідому функцію $v(x,t)$ слід проводити за формулою

$$u(x,t)=\left(\alpha_1x^2+\beta_1x\right)\mu(t)+\left(\alpha_2x^2+\beta_2x\right)\upsilon(t)+v(x,t)\,.$$

3.8. Умови існування класичного розв'язку

Знову розглянемо найпростішу математичну модель

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\quad(0<x<l,\ 0<t<\infty)\,, \tag{3.8.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\quad(0\le x\le l)\,, \tag{3.8.2}$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0\quad(0\le t<\infty) \tag{3.8.3}$$

та її реалізацію у формі функціонального ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nat}{l}+b_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}\,, \tag{3.8.4}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\,. \tag{3.8.5}$$

Виникають такі запитання: чи буде збігатися ряд (3.8.4); які аналітичні властивості матиме розв'язок $u(x,t)$ задачі (3.8.1)–(3.8.3) і які властивості насправді він має в формі (3.8.4); чи буде розв'язок задачі (3.8.1)–(3.8.3) єдиним?

Відразу зауважимо, що початкові й граничні умови (3.8.2) і (3.8.3) не є цілком незалежними. Дійсно, з граничних умов (3.8.3) випливає, що при $t=0$ $u(0,0)=0,\ u(l,0)=0$, а з першої початкової умови (3.8.2) при $x=0$ і $x=l$ маємо $u(0,0)=\varphi(0),\ u(l,0)=\varphi(l)$. Для того щоб ця система рівностей була несуперечливою, необхідно, щоб

$$\varphi(0)=0,\ \ \varphi(l)=0. \tag{3.8.6}$$

Рівності (3.8.6), що називаються умовами узгодження, є необхідними для неперервності розв'язку $u(x,t)$ в області $0\le x\le l$, $0\le t<\infty$. Однак згідно з постановкою задачі (3.8.1)–(3.8.3) шукана функція $u(x,t)$ повинна бути не тільки неперервною, але й при $0<x<l,\ 0<t<\infty$ мати ті похідні, які входять у рівняння (3.8.1), тобто і похідні другого порядку $u_{xx},\ u_{tt}$.

Розв'язок задачі (3.8.1)–(3.8.3) називають класичним, якщо при $0\le x\le l$, $0\le t<\infty$ він є неперервним разом зі своїми частинними похідними першого й другого порядків. Такий розв'язок буде існувати, якщо ряд (3.8.4) і ряди, отримані з нього одно- і двоазовим диференціюванням за x і t, рівномірно збігаються при $0\le x\le l$, $0\le t<\infty$. Така збіжність існує, якщо, наприклад,

$$\varphi(x)\in C_3[0;l],\ \ \psi(x)\in C_2[0;l] \tag{3.8.7}$$

і виконуються додаткові умови узгодження

$$\psi(0)=\psi(l)=0,\ \ \varphi''(0)=\varphi''(l)=0. \tag{3.8.8}$$

Перші дві умови (3.8.8) випливають із неперервності $\frac{\partial u}{\partial t}$ швидкості руху точок струни в момент часу $t=0$. Дійсно, оскільки $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$ $(0\le x\le l)$; $u(0,t)=0,\ u(l,t)=0\quad(0\le t<\infty)$, то $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(l,t)=0\ \ (0\le t<\infty)$ і тоді при $x=0$, $t=0$ і $x=l$, $t=0$ маємо $\frac{\partial u}{\partial t}(0,0)=\psi(0)=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(l,0)=\psi(l)=0$, звідки $\psi(0)=0,\ \psi(l)=0$.

Умови $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$ можна отримати так. Уважаючи, що в рівнянні (3.8.1) $t=0$, маємо $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0)$ або $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0)=a^2\varphi''(x)\quad(0\le x\le l)$.

Диференціюючи тотожність $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(l,t)=0 \quad (0\le t<\infty)$ за t, отримуємо $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t)=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t)=0 \quad (0\le t<\infty)$. Уважаючи тут $t=0$, а в попередньому співвідношенні $x=0$ і $x=l$, маємо $a^2\varphi''(0)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,0)=0$, $a^2\varphi''(l)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,0)=0$, звідки $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$.

За наявності умов узгодження (3.8.6), (3.8.8), необхідних для існування класичного розв’язку, подальші міркування пов'язані з оцінюванням при $n\to\infty$ швидкості зменшення коефіцієнтів (3.8.5) формального розв’язку (3.8.4).

Інтегруванням частинами отримуємо

$$\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=-\frac{l^3}{\pi^3 n^3}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=-\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

При виведенні цих рівностей використано умови (3.8.6)–(3.8.8) і рівність $\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l=0$, з урахуванням яких при кожному інтегруванні частинами позаінтегральні складові перетворюються на нуль. Тепер на основі (3.8.5) маємо $a_n=\frac{\alpha_n}{n^3},\ b_n=\frac{\beta_n}{n^3}$, де

$$\alpha_n=-\frac{2l^2}{\pi^3}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad \beta_n=-\frac{2l^2}{\pi^3 a}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Отже, ряд (3.8.4) набуває вигляду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\alpha_n\cos\frac{\pi nat}{l}+\beta_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{3.8.9}$$

Оскільки $|\sin z\le 1|,\ |\cos z|\le 1\ (z\in R)$, то при всіх $0\le x\le l$, $0\le t<\infty$ $|u(x,t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n^3}$, тобто числовий ряд справа є мажорантним для функціонального ряду (3.8.9). Неважко перевірити, що для рядів із частинних похідних першого і другого порядків функції (3.8.9) мажорантними будуть числові ряди

$$C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n^2}\quad (\text{для } \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial t}), C_1=\max\left\{\frac{\pi}{l},\frac{\pi a}{l}\right\}, \tag{3.8.10}$$

$$C_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n} \quad \text{(для } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}), C_2=\max\left\{\frac{\pi^2}{l^2},\frac{\pi^2 a}{l^2},\frac{\pi^2 a^2}{l^2}\right\}.$$

Величини $\alpha_n,\ \beta_n$ є коефіцієнтами Фур'є функцій $-\frac{2l^2}{\pi^3}\varphi'''(x)$, $-\frac{2l^2}{\pi^3 a}\psi''(x)$, неперервних на відрізку $0\le x\le l$ за умовою (3.8.7).

Із теорії рядів Фур'є випливає, що в цьому випадку збігаються числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$. Оскільки ці ряди є додатними, то $\alpha_n\sim\frac{d_1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}}$, $\beta_n\sim\frac{d_2}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}}$ $(n\to\infty)$, де $\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0;\ \ \varepsilon_i,d_i-const$.

Отже, мажорантні ряди (3.8.10) збігаються внаслідок збіжності ряду Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha>1$. Тоді за ознакою Вейєрштрасса ряд (3.8.9) і ряди його перших і других частинних похідних збігаються рівномірно в області $0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$ і тому згідно з відомою теоремою про ряди, що рівномірно збігаються, функція $u(x,t)$ – сума ряду (3.8.9) або (3.8.4) – є неперервною разом зі своїми першими і другими частинними похідними в області $0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$, що й треба було довести.

Умови (3.8.6)–(3.8.8) є достатніми умовами для обґрунтування існування класичного розв'язку, а також для обґрунтування відокремлення змінних.

3.9. Єдиність розв'язку найпростішої задачі теорії коливань

Теорема. Якщо шукана функція $u(x,t)$ та її частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$ є неперервними в області $0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$, то задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<l,\ 0<t<\infty),\quad a^2=\frac{T}{\rho}, \tag{3.9.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\quad (0\le x\le l), \tag{3.9.2}$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0\quad (0\le t<\infty) \tag{3.9.3}$$

має тільки один розв'язок.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ задачі (3.9.1)–(3.9.3). Розглянемо їх різницю $\tilde u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. Унаслідок лінійності моделі (3.9.1)–(3.9.3) для функції $\tilde u(x,t)$ отримуємо задачу з однорідними початковими й граничними умовами:

$$\frac{\partial^2\tilde u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\tilde u}{\partial x}\quad (0<x<l,0<t<\infty), \tag{3.9.4}$$

$$\tilde{u}(x,0)=0,\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0)=0 \quad (0\le x\le l), \tag{3.9.5}$$

$$\tilde{u}(0,t)=0,\ \tilde{u}(l,t)=0 \quad (0\le t<\infty). \tag{3.9.6}$$

Згідно з умовами теореми функція $\tilde{u}(x,t)$ та її перші й другі частинні похідні є неперервними в області $0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$. Доведемо, що $\tilde{u}(x,t)\equiv 0$, тобто $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$. З цією метою розглянемо функцію

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \left[T\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)^2+\rho\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)^2\right]dx \quad (E(t)\ge 0), \tag{3.9.7}$$

що являє собою повну енергію струни в момент часу t . При цьому $K=\frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)^2 dx$ – кінетична енергія струни.

Дійсно, нескінченно малий елемент струни від x до $x+dx(dx=\Delta x)$, що має довжину $\Delta l\approx dx$, рухається зі швидкістю $v=\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$, має кінетичну енергію $\frac{1}{2}\Delta m\cdot v^2=\frac{1}{2}(\rho dx)\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)^2$ ($\Delta m=\rho dx$ – маса елемента). Тоді кінетична енергія всієї струни виражається інтегралом за x . Покажемо, що $E(t)$ насправді не залежить від t , тобто $E(t)=const$.

Оскільки функція $\tilde{u}(x,t)$ та її частинні похідні першого й другого порядків є неперервними при $0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$, то диференціювання (3.9.7) за t можна здійснити під знаком інтеграла:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}\int_0^l \left(2T\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x\partial t}+2\rho\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}\right)dx\,\textbf{.}$$

Інтегруючи частинами перший доданок, маємо

$$T\int_0^l \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x\partial t}dx=\left(T\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}-T\int_0^l \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}dx\,.$$

Диференціювання граничних умов (3.9.6) (тотожностей) за t дає

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(0,t)=0,\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(l,t)=0 \quad (0\le t<\infty).$$

Тому інтегральний доданок $\left(T\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}=0$ і тоді

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^l \left(\rho\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}-T\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\right)dx=\rho\int_0^l \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\right)dx\,.$$

З рівняння (3.9.4) випливає, що інтеграл справа дорівнює нулю. Отже, $\frac{dE}{dt}=0 \quad (0\le t<\infty)$, тому $E(t)=const \quad (0\le t<\infty)$, зокрема, $E(t)=E(0)$. З огляду на початкові умови (3.9.5), маємо

$$E(t)=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l \left[T\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2+\rho\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right)^2\right]_{t=0} dx=0,$$

оскільки $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}|_{t=0}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(x,0)=0$, а з умови $\tilde{u}(x,0)=0$ випливає, що $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}(x,0)=0$, тобто $\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right|_{t=0}=0$. Отже, $E(t)\equiv 0$. Оскільки $T>0,\ \rho>0$, то таке є можливим тільки в тому випадку, якщо $T\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2+\rho\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right)^2=0,$ тобто $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}(x,t)\equiv 0,\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(x,t)\equiv 0$, звідки $\tilde{u}(x,t)=C=const \quad (0\le x\le l,\ 0\le t<\infty)$.

Із першої початкової умови маємо $\tilde{u}(x,t)=C=0$, отже, $\tilde{u}(x,t)\equiv 0$, тобто $u_1(x,t)=u_2(x,t)$.

Таким чином, якщо класичний розв’язок задачі (3.9.1)–(3.9.3) існує, то він є єдиним.

Викладений метод доведення теореми єдиності, що базується на використанні виразу повної енергії, широко застосовується під час доведення теорем єдиності в різних розділах математичної фізики, наприклад в електродинаміці, гідродинаміці й теорії пружності.

4. ОДНОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

4.1. Задача Коші для одновимірного рівняння теплопровідності. Формула Пуассона та її фізична інтерпретація

Розглянемо процес теплопровідності в дуже довгому однорідному тонкому циліндричному стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею. Протягом певного проміжку часу вплив температурного режиму на межі (торцях стрижня) у центральній частині стрижня позначається дуже слабо, і в цій частині спостерігається лише початковий розподіл температури. У цьому випадку точний розрахунок довжини стрижня помітно не впливає на температуру в центральній частині стрижня. У задачах подібного типу вважають, що стрижень має нескінченну довжину. Таким чином, якщо в стрижні немає теплових джерел, то маємо задачу з початковою умовою (задачу Коші) про розподіл температури в нескінченному однорідному тонкому циліндричному стрижні:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty), \qquad (4.1.1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\ \ (-\infty<x<\infty), \qquad (4.1.2)$$

де $u=u(x,t)$ – температура в поперечному перерізі стрижня з координатою x у момент часу t; $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$, k – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, c – питома теплоємність, $\rho=const$ – густина матеріалу стрижня. При цьому граничні умови замінюються на умову обмеженості розв'язку задачі (4.1.1), (4.1.2):

$$|u(x,t)|\le M<+\infty\ \ (-\infty<x<\infty,\ 0\le t<\infty), \qquad (4.1.3)$$

яка гарантує єдиність розв'язку задачі (4.1.1), (4.1.2). Для розв'язання задачі (4.1.1), (4.1.2) використаємо метод відокремлення змінних. Як і в задачі про коливання струни, елементарні розв'язки рівняння (4.1.1) шукаємо у вигляді $u(x,t)=X(x)T(t)$. Підстановка їх у це рівняння дає $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$ (λ – параметр відокремлення), звідки

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\ \ (-\infty<x<\infty), \qquad (4.1.4)$$

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0\ \ (0<t<\infty). \qquad (4.1.5)$$

Загальним розв'язком рівняння (4.1.5) є функція $T(t)=C(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda t}$ ($C(\lambda)$ – довільна функція параметра λ). Оскільки розв'язок $u(x,t)$ має бути обмеженим при $-\infty<x<\infty,\ 0\le t<\infty$, то $\lambda\ge 0$, тобто $\lambda=\omega^2$. У цьому випадку $T(t)=T_\omega(t)=\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}$ (множник $C(\lambda)$ випускаємо). При цьому рівняння (4.1.4) набуває вигляду $X''(x)+\omega^2X(x)=0$. Його загальним розв'язком є функція $X_\omega(x)=\mathrm{A}(\omega)\cos\omega x+\mathrm{B}(\omega)\sin\omega x$ ($\mathrm{A}(\omega),\mathrm{B}(\omega)$ – довільні функції параметра ω). Тому обмежені елементарні розв'язки рівняння (4.1.1) мають вигляд

$$u_\omega(x,t)=T_\omega(t)X_\omega(x)=\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\left[\mathrm{A}(\omega)\cos\omega x+\mathrm{B}(\omega)\sin\omega x\right].$$

Оскільки рівняння (4.1.1) є лінійним, то інтеграл

$$u(x,t)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\left[\mathrm{A}(\omega)\cos\omega x+\mathrm{B}(\omega)\sin\omega x\right]d\omega \qquad (4.1.6)$$

формально є розв'язком цього рівняння.

Початкова умова (4.1.2) приводить до розвинення відомої функції $\varphi(x)$ в інтеграл Фур'є

$$\varphi(x)=\int_0^\infty [\mathrm{A}(\omega)\cos\omega x+\mathrm{B}(\omega)\sin\omega x]d\omega\ \ (-\infty<x<\infty),$$

звідки за відомими формулами знаходимо

$$\mathrm{A}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\xi\omega d\xi,\ \mathrm{B}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\xi\omega d\xi. \qquad (4.1.7)$$

Якщо початкова функція $\varphi(x)$, що абсолютно інтегрується на осі $(-\infty,\infty)$, тобто $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|dx<\infty$, то $|\mathrm{A}(\omega)|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\xi)|d\xi<\infty$, $|\mathrm{B}(\omega)|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\xi)|d\xi<\infty$. Отже, абсолютна інтегровність початкової функції $\varphi(x)$ гарантує існування величин (4.1.7). Підставляючи їх у формулу (4.1.6), маємо

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(\cos\omega x\cos\omega\xi+\sin\omega x\sin\omega\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos(x-\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x,t,\xi)\varphi(\xi)d\xi\,, \qquad (4.1.8)$$

де $g(x,t,\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}\cos(x-\xi)d\omega$.

Розглянемо інтеграл $I(\gamma,\delta)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\gamma\omega^2}\cos\delta\omega d\omega$. При будь-якому фіксованому $\gamma\ne0$

$$\frac{dI}{d\delta}=-\int\limits_{0}^{\infty}\omega e^{-\gamma\omega^2}\sin\delta\omega d\omega=\left|\begin{matrix}u=\sin\delta\omega,\ du=\delta\cos\delta\omega d\omega,\\ dv=-\omega e^{-\gamma\omega^2}d\omega,\ v=\frac{1}{2\gamma}e^{-\gamma\omega^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\gamma}e^{-\gamma\omega^2}\sin\delta\omega\Big|_0^{\infty}-\frac{\delta}{2\gamma}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\gamma\omega^2}\cos\delta\omega d\omega,$$

тобто отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$\frac{dI}{d\delta}=-\frac{\delta}{2\gamma}I$, звідки $\frac{dI}{I}=-\frac{\delta}{2\gamma}\delta d\delta$, $\int\frac{dI}{I}=-\frac{\delta}{2\gamma}\int\delta d\delta$, $\ln|I|=-\frac{\delta^2}{4\gamma}+\ln|C|$, $I(\gamma,\delta)=Ce^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}}$.

Оскільки $I(\gamma,\delta)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\gamma\omega^2}\cos\delta\omega d\omega$, при $\delta=0$ маємо

$$C=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\gamma\omega^2}d\omega=\left|\sqrt{\gamma}\omega=x,\ d\omega=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}dx\right|=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx\,.$$

Розглянемо область $D:0\le x<\infty,\ 0\le y<\infty$. Маємо

$$\iint\limits_{(D)}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=|x=\rho\cos\varphi,y=\rho\sin\varphi|=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{\infty}\rho e^{-\rho^2}d\rho=\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

З іншого боку,

$$\iint\limits_{(D)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}dy=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx\int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy=\left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, і тоді $C=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}},\ I(\gamma,\delta)==\int\limits_0^\infty e^{-\gamma\omega^2}\cos\delta\omega d\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}e^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}}$.

Уважаючи тут, що $\gamma=a^2t,\ \delta=x-\xi$, знаходимо за (4.1.8)

$$g(x,t,\xi)=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{4.1.9}$$

Отже, формальний розв'язок задачі (4.1.1), (4.1.2) має вигляд

$$G(x-\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}};G(x-\xi,t)=G(\xi-x,t). \tag{4.1.10}$$

Розв'язок задачі (4.1.1), (4.1.2) у вигляді невласного інтеграла

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \tag{4.1.11}$$

називається формулою Пуассона. У цій формулі умову абсолютної інтегровності початкової функції $\varphi(\xi)$ (тобто її прямування до нуля при $x\to\pm\infty$ є порівнянним зі спаданням еталонної функції $\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}},\ \varepsilon>0$) можна замінити менш жорсткою умовою обмеженості: $|\varphi(x)|\le M\ \ (-\infty<x<\infty)$. Дійсно, у цьому випадку

$$|u(x,t)|\le\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\xi)|e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\le\frac{M}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=$$

$$=\left|\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}=z,\ d\xi=2a\sqrt{t}dz\right|=\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz=\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=M.$$

Таким чином, інтеграл (4.1.11) збігається рівномірно в замкненій області $\bar{D}:-\infty<x<\infty,\ 0\le t<\infty$ і $|u(x,t)|\le M$ у $\bar{D}$. Тоді за відомою властивістю інтегралів, що рівномірно збігаються, розв'язок $u(x,t)$ задачі (4.1.1), (4.1.2) у формі інтеграла (4.1.11) є неперервним в області $\bar{D}$ (звичайно, за умови, що початкова функція $\varphi(x)$ є неперервною).

З формули (4.1.11) випливає, що тепло поширюється вздовж стрижня миттєво (з нескінченною швидкістю). Дійсно, нехай у початковий момент часу $t=0$ весь стрижень, окрім деякої його частини $[\alpha,\beta]$, має нульову температуру $(\varphi(x)\equiv0,\ x\notin[\alpha,\beta])$. Тоді в будь-якій точці $x\in(-\infty,\infty)$ і в будь-який момент часу $t>0$ температура $u(x,t)$ стрижня визначається згідно з формулою (4.1.11) інтегралом

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (4.1.12)$$

Якщо, наприклад, $\varphi(x)>0$ при $x\in[\alpha,\beta]$, то $\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}>0$ при $\xi\in[\alpha,\beta]$, $x\in(-\infty,\infty)$, $t>0$ і тому відповідно до (4.1.12) $u(x,t)>0$, тобто $u(x,t)\neq 0$ при будь-якому $x\in(-\infty,\infty)$ і будь-якому $t>0$. Таким чином, при як завгодно малому значенні t і при як завгодно великій відстані від точки x стрижня до відрізка $[\alpha,\beta]$ на цьому стрижні тепло з області $[\alpha,\beta]$ за проміжок часу t встигає дійти до точки x. Це означає, що тепло поширюється миттєво. Однак це суперечить молекулярно-кінетичним уявленням про природу тепла. Така суперечність виникає через те, що у виведеному рівнянні теплопровідності (4.1.1) не враховується інерційність процесу руху молекул. На практиці ця обставина ускладнень не спричиняє. Дійсно, якщо значення $|x|$ є великим, а значення t – малим, то у формулі (4.1.12) від'ємний показник є більшим за модулем і тому підінтегральна функція, а разом з нею і температура $u(x,t)$ є дуже малими (практично дорівнюють нулю при досить великій відстані від точки x стрижня до відрізка $[\alpha,\beta]$, на якому $\varphi(x)\neq 0$). Отже, формула Пуассона (4.1.11) практично визначає скінченну швидкість поширення тепла.

Функція (4.1.10) називається фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності (4.1.1). У тому, що $G(x-\xi,t)$ задовольняє цьому розв'язку, легко впевнитися безпосереднім диференціюванням.

Фундаментальний розв'язок $G(x-\xi,t)$ має важливий фізичний сенс, пов'язаний з поняттям теплового імпульсу.

Фізичним тепловим імпульсом називається такий початковий розподіл температури:

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}u_0, & якщо\ |x-x_0|<\varepsilon,\\ 0, & якщо\ |x-x_0|>\varepsilon,\end{cases}$$

де $u_0=const,\ \varepsilon>0$. Такий розподіл виникає, якщо в стрижень, температура якого в будь-якій точці спочатку дорівнює нулю, у момент часу $t=0$ на ділянці стрижня від $x_0-\varepsilon$ до $x_0+\varepsilon$ миттєво вводиться кількість тепла $Q=mcu_0=2\varepsilon Sc\rho u_0$ ($m=\rho V_\varepsilon$ – маса, $V_\varepsilon=2\varepsilon S$ – об'єм цієї ділянки стрижня, S – площа його поперечного перерізу).

При такому фізичному тепловому імпульсі розв'язок (4.1.11) задачі (4.1.1), (4.1.2) як початковий розподіл температури має вигляд

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (4.1.13)$$

Відомо, що якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$, то існує точка $\bar{x}$, $a<\bar{x}<b$, така, що $\int_a^b f(x)dx = f(\bar{x})(b-a)$ (теорема про середнє для визначеного інтеграла). Функція $e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ – неперервна за змінною ξ на відрізку $[x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon]$. Тому існує точка $\bar{\xi}$, $x_0-\varepsilon<\bar{\xi}<x_0+\varepsilon$, така, що $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi = 2\varepsilon e^{-\frac{(x-\bar{\xi})^2}{4a^2t}}$.

Тоді, з огляду на (4.1.13), $u(x,t) = 2\varepsilon u_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\bar{\xi})^2}{4a^2t}} = \frac{Q}{Sc\rho}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\bar{\xi})^2}{4a^2t}}$.

Щоб виключити фізичні параметри стрижня, припустимо, що підведена кількість тепла $Q = Sc\rho$. Тоді у випадку фізичного теплового імпульсу розв'язок отримуємо у такому вигляді:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\bar{\xi})^2}{4a^2t}} \quad (x_0-\varepsilon<\bar{\xi}<x_0+\varepsilon). \tag{4.1.14}$$

Від фізичного теплового імпульсу перейдемо до **точкового теплового імпульсу**, спрямовуючи ε до нуля. Оскільки $2\varepsilon u_0 = 1$, то $u_0 \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$. Крім того, $\bar{\xi} \to x_0$ при $\varepsilon \to 0$, так що розв'язок (4.1.14) для точкового теплового імпульсу набуває вигляду

$$u(x,t) = G(x-x_0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}, \tag{4.1.15}$$

тобто розв'язок (4.1.15) для точкового теплового імпульсу є фундаментальним розв'язком $G(x-\xi,\, t)$ при $\xi = x_0$. Таким чином, фундаментальний розв'язок $G(x-x_0,\, t)$ – це розподіл температур у тонкому нескінченному стрижні, обумовлений миттєвим підведенням в початковий момент часу $t=0$ в точці $x=x_0$ кількості тепла $Q=Sc\rho$.

Згідно з (4.1.15) при $x=x_0$ маємо $\lim\limits_{t\to 0} G(x-x_0,t) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} = +\infty$, а при $x \neq x_0$ після зміни $t=\frac{1}{\tau}\left(\tau=\frac{1}{t}\right)$ маємо $\lim\limits_{t\to 0} G(x-x_0,t) =$

$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \lim\limits_{\tau\to+\infty} \frac{\sqrt{\tau}}{e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}\tau}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{a}{\sqrt{\pi}(x-x_0)^2} \lim\limits_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau} e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}\tau}} = 0$, тобто

$$G(x-x_0,0) = \lim_{t\to 0} G(x-x_0,t) = \begin{cases} 0 & при\, x \neq x_0, \\ +\infty & при\, x = x_0. \end{cases}$$

Оскільки при будь-якому t $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-x_0,t)dx = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}dx =$

$=\left|\frac{x-x_0}{2a\sqrt{t}}=z,\ dx=2a\sqrt{t}dz\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$, то, зокрема, при $t=0$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-x_0,0)dx=1$. Отже,

$$G(x-x_0,\ 0)=\begin{cases}0, & (x\neq x_0),\\ +\infty, & (x=x_0)\end{cases} \tag{4.1.16}$$

і при цьому функція $G(x-x_0,\ 0)=\lim\limits_{t\to 0}G(x-x_0,\ t)$ у точці $x=x_0$ прямує до нескінченності так, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-x_0,0)dx=1. \tag{4.1.17}$$

У зв'язку з тим, що поряд з неперервно розподіленими величинами (масою, зарядом, тепловими джерелами, механічним імпульсом і т. д.) часто доводиться мати справу з зосередженими величинами (точковою масою, точковим зарядом, точковим джерелом тепла і т. д.), для опису зосереджених величин П. Дірак увів дельта-функцію $\delta(x-x_0)$ $\left(x, x_0\in(-\infty,\infty)\right)$, яка визначається таким чином:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0, & (x\neq x_0),\\ +\infty, & (x=x_0);\end{cases}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1, \tag{4.1.18}$$

зокрема, $\delta(x)=\begin{cases}0, & (x\neq 0),\\ +\infty, & (x=0);\end{cases}$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$. Очевидно, що $\delta(-x)=\delta(x)$.

Відповідно до (4.1.16)–(4.1.18)

$$G(x-x_0,0)=\delta(x-x_0). \tag{4.1.19}$$

З початкової умови (4.1.2), фундаментального розв'язку (4.1.15) і рівності (4.1.19) маємо $\varphi(x)=u(x,0)=G(x-x_0,0)=\delta(x-x_0)$. Таким чином, фундаментальний розв'язок (4.1.15) (функція $G(x-x_0,t)$) є розв'язком задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty),$$

$$u(x,0)=\delta(x-x_0)\quad (-\infty<x<\infty).$$

Далі, з огляду на початкову умову (4.1.2) і формулу Пуассона (4.1.11) маємо $\varphi(x)=u(x,0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi,0)\varphi(\xi)d\xi$. Оскільки $G(x-\xi,\ t)=G(\xi-x,\ t)$, то $G(x-\xi,0)=G(\xi-x,0)$, і тоді $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\xi-x,0)\varphi(\xi)d\xi=\varphi(x)$ або на основі (4.1.19)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\delta(\xi-x)d\xi=\varphi(x) \quad (-\infty<x<\infty). \tag{4.1.20}$$

Цей вираз, що виникає і в інших задачах математичної фізики, є основною властивістю, що визначає δ-функцію. Замінюючи в ньому ξ на x та x на x_0, маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0). \tag{4.1.20'}$$

Нехай $x_0 \epsilon (a,b)$. Тоді $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\int\limits_{-\infty}^{a} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx+$ $+\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx+\int\limits_{b}^{\infty} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx$, оскільки на інтервалах $(-\infty,a),(b,\infty)$ $x\neq x_0$, отже, $\delta(x-x_0)=0$ на цих інтервалах. Тоді за формулою (4.1.20') можна записати $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)$ $(x_0\in(a,b))$. Якщо $x_0\notin[a,b]$, то $x\neq x_0$ на $[a,b]$, і тому $\delta(x-x_0)$ на $[a,b]$ перетворюється на нуль. Тоді $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx=0$ $(x_0\in(a,b))$. Отже,

$$\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\begin{cases}\varphi(x_0), & \textit{якщо } x_0 \epsilon [a,b];\\ 0, & \textit{якщо } x_0 \bar{\epsilon} [a,b].\end{cases} \tag{4.1.21}$$

Рівність (4.1.21) часто є основою для визначення δ-функції як функціонала на множині неперервних функцій ($\varphi(x)\in C(-\infty,+\infty)$).

Рівність $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx=1$ є окремим випадком формули (4.1.20) при $\varphi(x)\equiv 1$, а сама формула (4.1.20') – окремий випадок формули (4.1.21) при $a=-\infty,\ b=\infty$.

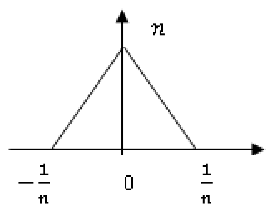

Рис. 4

Ураховуючи (4.1.20), початковий розподіл температури $\varphi(x)=u(x,0)$ у (4.1.2) можна подати як розклад на імпульси $\varphi(\xi)\delta(x-\xi)$. Тому розв'язок (4.1.11) задачі (4.1.1), (4.1.2) можна розглядати як результат суперпозиції (накладання) температур, що виникають у точці x у момент часу t унаслідок неперервно розподілених по стрижню теплових імпульсів інтенсивності $\varphi(\xi)$ у момент часу $t=0$:

$$g_n(x)=\frac{1}{1+e^{-nx}},\ \ f_n(x)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}e^{-nx^2},\ \ \varphi_n(x)=\frac{n}{\pi\left(1+n^2x^2\right)},\ \psi_n(x)\ \text{(рис. 4).}$$

4.2. Метод відокремлення змінних для одновимірного рівняння теплопровідності

Розглянемо задачу про поширення тепла в тонкому однорідному циліндричному стрижні завдовжки l з теплоізольованою бічною поверхнею й нульовою температурою на торцях $x=0$ і $x=l$. Якщо в стрижні немає внутрішніх джерел тепла, то маємо просту математичну модель:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \left(0<x<l,\ 0<t<\infty\right), \tag{4.2.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\ \ (0\le x\le l),\ \ \varphi(x)\in C[0,l], \tag{4.2.2}$$

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0\ \left(0\le t<\infty\right). \tag{4.2.3}$$

Крім того, для неперервності розв'язку $u(x,t)$ необхідно ввести обмеження $\varphi(0)=0,\ \varphi(l)=0$ на значення початкової температури $\varphi(x)$, що випливають із (4.2.2), (4.2.3) при $x=0,\ x=l$ і $t=0$.

Вище встановлено, що функції $X(x),\ T(t)$ в елементарних розв'язках $u(x,t)=X(x)T(t)$ рівняння (4.2.1) задовольняють звичайним диференціальним рівнянням, що містять параметр відокремлення λ:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\ \ (-\infty<x<\infty),$$

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0\ \ (0<t<\infty).$$

Оскільки рівняння для $X(x)$ і граничні умови (4.2.3) є такими самими, як і в задачі про коливання скінченної струни, спектральна задача (задача Штурма – Ліувілля) має вигляд

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\ \ (0<x<l),$$

$$X(0)=0,\ \ X(l)=0.$$

Ця задача має нетривіальний розв'язок лише при $\lambda=\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. При $n=1,2,\ldots$ система $\left\{X_n(x)=\sin\frac{\pi nx}{l}\right\}_1^\infty$ цих розв'язків є лінійно незалежною на відрізку $0\le x\le l$. При цьому рівняння для визначення

$T(t)$ має вигляд $T'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T(t)=0$, а його загальний розв'язок $T=T_n(t)=B_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}$ (B_n – довільні сталі).

Отже, функції

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=B_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi nx}{l} \quad (n=1,2,\ldots) – \qquad (4.2.4)$$

усі лінійно незалежні розв'язки з відокремленими змінними, що задовольняють граничні умови (4.2.3). Оскільки рівняння (4.2.1) і граничні умови (4.2.3) є лінійними й однорідними, довільна скінченна сума і формально функціональний ряд, складені з розв'язків (4.2.4), також задовольняють рівнянню (4.2.1) і граничні умови (4.2.3). У разі довільної початкової функції $\varphi(x)$ розв'язок рівняння (4.2.1), який задовольняє граничні умови, будуємо у вигляді функціонального ряду по всій системі частинних розв'язків (4.2.4):

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi nx}{l} \quad (0<x<l,\ 0<t<\infty). \qquad (4.2.5)$$

Задовольняючи на підставі цього розв'язку початкову умову (4.2.2), отримуємо розвинення функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є за синусами: $\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\varphi(x)$ $(0\le x\le\infty)$. Звідси за відомою формулою

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \qquad (4.2.6)$$

Отже, формальний розв'язок задачі (4.2.1)–(4.2.3) подамо у вигляді функціонального ряду (4.2.5) з коефіцієнтами (4.2.6). Доведемо, що він фактично і є розв'язком задачі. Для цього треба переконатися, що ряд (4.2.5) збігається рівномірно в замкненій області $\bar{D}:0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$, а ряди для похідних $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ збігаються і являють собою неперервні функції у відкритій області $D:0<x<l,\ 0<t<\infty$.

Наявність експоненціального множника в ряді (4.2.5) дає змогу диференціювати його почленно за x і t скільки завгодно раз в області $0\le x\le l,\ 0<t<\infty$, причому ряди для $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x},\ldots$ рівномірно збігаються при $0\le x\le l,\ \delta\le t<\infty$ $(\forall\delta>0)$, що гарантує неперервність цих похідних в області $0\le x\le l,\ 0<t<\infty$.

Дійсно, оскільки $\varphi(x)\in C[0,l]$ (неперервна на відрізку $[a,b]$), то $|\varphi(x)|\le M$ (обмежена на $[a,b]$) для деякого M, наприклад, для

$M=\|\varphi\|=\max\limits_{0\le x\le l}|\varphi(x)|$. Тоді $|B_n|\le\frac{2}{l}\int\limits_0^l|\varphi(x)|\left|\sin\frac{\pi nx}{l}\right|dx\le\frac{2}{l}M\int\limits_0^l dx$, тобто $|B_n|\le 2M$. Отже, при $t\ge\delta>0,\ 0\le x\le l$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|=\left|-\frac{\pi^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2B_ne^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi nx}{l}\right|\le\frac{\pi^2}{l^2}2M\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\delta}.$$

Використовуючи ознаку Даламбера, легко переконатися, що виписаний справа числовий ряд збігається, і тоді за ознакою Вейєрштрасса ряд для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ рівномірно збігається при $0\le x\le l,\ t\ge\delta>0$ і будь-якому δ, і тоді за властивістю рядів, що рівномірно збігаються, похідна $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є неперервною при $0\le x\le l,\ t\ge\delta>0$. Оскільки $\delta>0$ – будь-яке, то похідна $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є неперервною в області $0\le x\le l,\ 0<t<\infty$. Аналогічно встановлюється неперервність будь-яких інших похідних у цій області.

Зазначимо, що розв'язок задачі про коливання скінченної струни таких диференціальних властивостей не має. У цьому й полягає одна з принципових відмінностей у характері розв'язків задач для диференціальних рівнянь гіперболічного й параболічного типів.

Для рівномірної збіжності ряду (4.2.5) (і, отже, неперервності розв'язку $u(x,t)$) у замкненій області $\bar{D}:0\le x\le l,\ \ 0\le t<\infty$ достатньо припустити, що початкова функція $\varphi(x)$ не тільки є неперервною на відрізку $0\le x\le l$, але й має на ньому кусково-гладку похідну $\varphi'(x)$. У цьому випадку інтегрування частинами в (4.2.6) дає

$B_n=\frac{2}{l}\left[-\frac{l}{\pi n}\varphi(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l+\frac{l}{\pi n}\int\limits_0^l\varphi'(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\right]$ або в силу $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $B_n=\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^l\varphi'(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=O\left(\frac{1}{n^{3/2+\varepsilon}}\right)$ $(n\to\infty)$. Тоді і при $t=0$ ряд $u=u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{\pi nx}{l}$ збігається рівномірно при $0\le x\le l$, оскільки $|u(x,0)|\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}|B_n|<+\infty$ через те, що $B_n=O\left(\frac{1}{n^{3/2+\varepsilon}}\right)(n\to\infty)$.

4.3. Задача Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності

Розглянемо процес теплопровідності в дуже довгому однорідному тонкому циліндричному стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею з урахуванням внутрішніх теплових джерел. Виділення тепла характеризується щільністю теплових джерел – функцією $q(x,t)$, такою, що внаслідок дії цих джерел на малій ділянці стрижня $[x, x+\Delta x]$ за малий проміжок часу виділяється кількість тепла $\Delta Q^* = Sq(x,t)\Delta x\Delta t$. У цьому випадку задача Коші має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \ (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty);\ a^2 = \frac{k}{c\rho},\ f(x,t) = \frac{q(x,t)}{c\rho}, \tag{4.3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \ (-\infty < x < \infty). \tag{4.3.2}$$

Цю задачу розіб’ємо на дві:

1) задачу Коші для однорідного рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty), \tag{4.3.3}$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \ (-\infty < x < \infty); \tag{4.3.4}$$

2) задачу Коші для вихідного неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t) \ (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty), \tag{4.3.5}$$

$$w(x,0) = 0 \ (-\infty < x < \infty) \tag{4.3.6}$$

з однорідною (нульовою) початковою умовою. Очевидно, що $u = v + w$.

Розв’язок задачі (4.3.3), (4.3.4) задається формулою Пуассона

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi,\ G(x-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{4.3.7}$$

Побудуємо таку функцію $\omega(x,t;\tau)$, яка б задовольняла однорідному рівнянню теплопровідності при $t > \tau$ і початковій умові $\omega(x,t;\tau)|_{t=\tau} = f(x;\tau)\ (-\infty < x < \infty)$. Припускаючи, що $t' = t - \tau$, і враховуючи, що $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t'}$, $t' > 0$ $(t' = t - \tau > 0)$, для $\omega(x,t;\tau)$ маємо задачу Коші

$$\frac{\partial \omega}{\partial t'} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \ (-\infty < x < \infty,\ 0 < t' < \infty),$$

$$\omega|_{t'=0} = f(x;\tau) \ (-\infty < x < \infty).$$

При будь-якому фіксованому τ її розв’язок задається формулою Пуассона $\omega(x,t;\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t') f(\xi;\tau) d\xi \ (t' = t - \tau)$ або

$$\omega(x,t;\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t-\tau) f(\xi;\tau) d\xi. \tag{4.3.8}$$

Шляхом безпосередньої перевірки доведемо, що розв’язок задачі (4.3.5), (4.3.6) задається формулою

$$W(x,t)=\int_0^t \omega(x,t,\tau)\,d\tau. \qquad (4.3.9)$$

Очевидно, що $W(x,0)=0$, тобто задовольняється початкова умова (4.3.6).

Залишається переконатися, що функція (4.3.9) задовольняє неоднорідному рівнянню (4.3.5). Відомо, що якщо в інтегралі зі змінною верхньою межею $H(t)=\int_0^t h(t,\tau)\,d\tau$ $(0\le t<\infty)$ функція $h(t,\tau)$ та її похідна $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ є неперервними в області $0\le t<\infty,\ 0\le\tau\le t$, то $\dfrac{\partial H}{\partial t}=h(t,t)+\int_0^t \dfrac{\partial}{\partial t}h(t,\tau)\,d\tau$ $\left(h(t,t)=h(t,\tau)\big|_{\tau=t}\right)$. Тому для функції (4.3.9) її частинна похідна за t має вигляд

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\omega(x,t;\tau)|_{\tau=t}+\int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial t}(x,t;\tau)\,d\tau=f(x,t)+\int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial t}(x,t;\tau)\,d\tau.$$

Похідну $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ можна знайти диференціюванням під знаком інтеграла (4.3.9): $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\int_0^t \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,t;\tau)\,d\tau$. Отже, $\dfrac{\partial W}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=f(x,t)+\int_0^t\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)d\tau$.

Оскільки функція $\omega(x,t;\tau)$ при $\tau<t$ задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності, то $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\equiv 0$, тобто $\dfrac{\partial W}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+f(x,t)$. Отже, функція (4.3.9) задовольняє рівнянню (4.3.5). На основі рівності $u=v+w$ і формул (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9) розв'язок вихідної задачі (4.3.1), (4.3.2) задається формулою

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

4.4. Задачі без початкових умов. Температурні хвилі

Якщо процес теплопровідності вивчається в моменти, досить віддалені від початкових, то вплив початкової умови практично не позначається на розподілі температури під час спостереження. У цьому випадку ставиться задача для напівнескінченного стрижня $0\le x<\infty$ з граничною умовою $u(0,t)=u(t)$. Якщо стрижень має скінченну довжину, то граничні умови задаються на обох його кінцях. Ці задачі вивчав іще Фур'є, і вперше їх було застосовано при визначенні температурних коливань ґрунту.

Температура на поверхні землі має чітко виражену добову й річну періодичність. Розглянемо задачу про періодичні температурні коливання в ґрунті, яку будемо розглядати як однорідне рівняння в півпросторі $0 \le x < \infty$ (температура не залежить від y, z). Ця задача є характерною задачею без початкової умови, оскільки при багаторазовому повторенні температурного режиму на поверхні $x = 0$ вплив початкової температури буде меншим, ніж вплив інших факторів, якими нехтуємо (наприклад, неоднорідністю ґрунту).

Таким чином, маємо таку задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(0 \le x < \infty\ ,\ -\infty < t < \infty\right);\ \underline{|u(x,t)| < \infty}; \qquad (4.4.1)$$

$$u(0,t) = A\cos\omega t \quad \left(-\infty < t < \infty\right),\quad A = const\,. \qquad (4.4.2)$$

Замість (4.4.2) розглянемо граничну умову

$$u(0,t) = Ae^{i\omega t}\,. \qquad (4.4.2')$$

З лінійності рівняння (4.4.1) випливає, що дійсна й уявна частини комплексного розв'язку рівняння (4.4.1) кожна окремо задовольняють йому. Якщо знайдено розв'язок задачі (4.4.1), (4.4.2'), то його дійсна частина задовольняє умову (4.4.2).

Розв'язок задачі (4.4.1), (4.4.2') шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \qquad (4.4.3)$$

де α і β – невизначені сталі.

Підставляючи (4.4.3) у рівняння (4.4.1) та умову (4.4.2'), знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta A e^{\alpha x+\beta t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 A e^{\alpha x+\beta t};\ \beta = a^2\alpha^2,\ \beta = i\omega,\ \text{звідки}$$

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{\omega}}{a}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right],$$

$$\underline{u(x,t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + i\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right)}}\,.$$

Дійсна частина цього розв'язку (фактично два розв'язки)

$$u(x,t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right), \qquad (4.4.4)$$

задовольняє рівнянню теплопровідності (4.4.1) і граничну умову (4.4.2). Тільки функція, що відповідає знаку «мінус», задовольняє умову обмеженості. Таким чином, розв'язок задачі (4.4.1), (4.4.2) отримуємо в елементарних функціях:

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right). \qquad (4.4.5)$$

На основі розв’язку (4.4.5) можна дати таку характеристику процесу поширення температурної хвилі у ґрунті.

Якщо температура поверхні тривалий час періодично змінюється, то в ґрунті також встановлюються коливання температури з тим же періодом, причому:

1. Амплітуда коливань експоненціально спадає з глибиною $A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}$ (перший закон Фур’є).

2. Температурні коливання в ґрунті відбуваються зі зсувом фази. Час δ затримки максимумів (мінімумів) температури в ґрунті від відповідних моментів на поверхні є пропорційним глибині $\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x$ (другий закон Фур’є).

4.5. Метод відокремлення змінних для неоднорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами

Розглянемо задачу теплопровідності для скінченного стрижня з однорідною початковою та однорідними граничними умовами

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x,t) \ \left(0 < x < l,\ 0 < t < \infty\right), \qquad (4.5.1)$$

$$W(x,0) = 0 \ \left(0 \le x \le l\right), \qquad (4.5.2)$$

$$W(0,t) = 0,\ W(l,t) = 0 \ \left(0 \le t < \infty\right). \qquad (4.5.3)$$

Як і в задачі про коливання скінченної струни, розв’язок $W(x,t)$ і відому функцію $f(x,t)$ при довільному фіксованому t подамо у вигляді рядів Фур'є за власними функціями задачі Штурма – Ліувілля $X''(x) + \lambda X(x) = 0 \ \left(0 \le x \le l\right)$, $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, тобто за функціями $X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l},\ \ f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l}. \qquad (4.5.4)$$

Оскільки функція $f(x,t)$ є відомою, то $f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n \xi}{l}d\xi$.

Підставляючи (4.5.4) у рівняння (4.5.1), при будь-якому t маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) - f_n(t)\right]\sin\frac{\pi n x}{l} = 0 \ \left(0 \le x \le l\right).$$

Унаслідок лінійної незалежності системи функцій $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_1^{\infty}$ $\left(0 \le x \le l\right)$

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)=0 \ \ (n=1,2,...).$$

Аналогічно, із початкової умови (4.5.2) випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{\pi nx}{l}=0$, звідки $T_n(0)=0 \ \ (n=1,2,...)$.

Таким чином, для відшукання функцій $T_n(t)$ отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t), \qquad (4.5.5)$$

$$T_n(0)=0 \quad (n=1,2,...). \qquad (4.5.6)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)=0, \ T_n^{(0)}(t)=C_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}$$ (C_n – довільна стала).

Загальний розв'язок відповідного неоднорідного рівняння (4.5.5) згідно з методом варіації довільної сталої шукаємо у вигляді

$$T_n(t)=C_n(t)e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}. \qquad (4.5.7)$$

Підставляючи (4.5.7) у (4.5.5), маємо

$$\left[C_n'(t)-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 C_n(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 C_n(t)\right]e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}=f_n(t), \quad C_n'(t)=e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t} f_n(t),$$ звідки

$$C_n(t)=\int_0^t e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \tau} f_n(\tau)d\tau+C_n.$$

З огляду на початкову умову (4.5.6) і (4.5.7) маємо $C_n(0)=0$, тобто $C_n=0$.

Отже, $C_n(t)=\int_0^t e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \tau} f_n(\tau)d\tau$, $T_n(t)=e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\int_0^t e^{\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2 \tau} f(\tau)d\tau$ або

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)d\tau. \qquad (4.5.8)$$

Підставляючи вираз (4.5.8) у формулу (4.5.4), отримуємо розв'язок задачі (4.5.1)–(4.5.3) у вигляді

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (4.5.9)$$

Оскільки $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi$, то на основі (4.5.9) можна записати

$$W(x,t)=\int_0^t\int_0^\ell G\left(x,\xi,t-\tau\right)f\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau\,,$$

де $G\left(x,\xi,t-\tau\right)=\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\dfrac{\pi nx}{l}\sin\dfrac{\pi n\xi}{l}$.

Розв'язок задачі теплопровідності для скінченного стрижня з неоднорідною початковою умовою й однорідними граничними умовами, але для однорідного рівняння

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}\quad\left(0<x<l,\ 0<t<\infty\right),$$

$$\upsilon\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)\quad\left(0\le x\le l\right),$$

$$\upsilon\left(0,t\right)=0,\ \upsilon\left(l,t\right)=0\quad\left(0\le t<\infty\right),$$

було знайдено вище методом відокремлення змінних:

$$\upsilon\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi nx}{l},\ B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi\left(\xi\right)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\,.$$

Звідси $\upsilon\left(x,t\right)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi\left(\xi\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\right]d\xi$ або

$\upsilon(x,t)=\displaystyle\int_0^\ell G\left(x,\xi,t\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi$, де $G\left(x,\xi,t\right)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}$.

Отже, розв'язок задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f\left(x,t\right)\quad\left(0<x<l,\ 0<t<\infty\right),$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)\quad\left(0\le x\le l\right),$$

$$u\left(0,t\right)=0,\ u\left(l,t\right)=0\quad\left(0\le t<\infty\right)$$

унаслідок лінійності моделей, що розглядаються, має вигляд

$$u\left(x,t\right)=\int_0^l G\left(x,\xi,t\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi+\int_0^t\int_0^l G\left(x,\xi,t-\tau\right)f\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau\,,$$

$$G\left(x,\xi,t\right)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l};$$

$$\lim_{t\to0}G\left(x,\xi,t\right)=G\left(x,\xi,0\right)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}=\delta\left(x-\xi\right).$$

4.6. Єдиність розв'язку задачі теплопровідності для скінченного стрижня

Розглянемо математичну модель поширення тепла в тонкому однорідному стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею і відомою температурою на торцях:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\quad \left(0<x<l,\ 0<t<\infty\right), \tag{4.6.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad \left(0\le x\le l\right), \tag{4.6.2}$$

$$u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)\quad \left(0\le t<\infty\right), \tag{4.6.3}$$

де $a^2=\dfrac{k}{c\rho}=const$; $f(x,t)=\dfrac{1}{c\rho}q(x,t)$; $q(x,t)$ – щільність теплових джерел.

Теорема. Розв'язок $u(x,t)$ задачі (4.6.1)–(4.6.3), що неперервно диференціюється в замкненій області $\bar{D}: 0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$ і має неперервну обмежену похідну $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ у відкритій області $D: 0<x<l,\ 0<t<\infty$, є єдиним.

Доведення. Нехай $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ – два розв'язки задачі (4.6.1)–(4.6.3), що задовольняють умови теореми і $\upsilon(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. Тоді для функції $\upsilon(x,t)$ отримуємо задачу для однорідного рівняння з однорідною початковою умовою й однорідними граничними умовами:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}\quad \left(0<x<l,\ 0<t<\infty\right), \tag{4.6.4}$$

$$\upsilon(x,0)=0\quad \left(0\le x\le l\right), \tag{4.6.5}$$

$$\upsilon(0,t)=0,\ \upsilon(l,t)=0\quad \left(0\le t<\infty\right). \tag{4.6.6}$$

Доведемо, що $\upsilon(x,t)\equiv 0$ в області $\bar{D}$. З цією метою розглянемо $\int\limits_0^l \upsilon\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}dx=\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\Big|_0^l-\int\limits_0^l\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2dx$. Оскільки за умовами (4.6.6) $\upsilon\big|_0^l=\upsilon(l,t)-\upsilon(0,t)=0$, то $\int\limits_0^l \upsilon\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}dx=-\int\limits_0^l\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2dx$ або на основі рівняння (4.6.4)

$$\int\limits_0^l \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t}dx=-a^2\int\limits_0^l\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2dx,\ \left(0\le t<\infty\right). \tag{4.6.7}$$

Інтегруючи тотожність (4.6.7) за змінною t від 0 до довільного значення T $(T>0)$, після зміни порядку інтегрування отримуємо

$\int\limits_0^l dx\int\limits_0^T \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t}dx=-a^2\int\limits_0^l dx\int\limits_0^T\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2dt$ або

$$\frac{1}{2}\int_0^l \upsilon^2(x,t)\Big|_0^T dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\upsilon^2(x,T)-\upsilon^2(x,0)\right]dx = -a^2\int_0^l\int_0^T\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2 dtdx.$$

Оскільки $\upsilon(x,t)=0$ за умовою (4.6.5), то для будь-якого $T\ge 0$

$$\int_0^l \upsilon^2(x,T)dx = -2a^2\int_0^l\int_0^T\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2 dtdx. \qquad (4.6.8)$$

Оскільки ліва частина (4.6.8) є невід'ємною, а права – недодатною, то ця рівність виконується тільки в тому випадку, коли її обидві частини дорівнюють нулю, зокрема

$$\int_0^l \upsilon^2((x,T)dx = 0 \text{ при будь-якому } T\ge 0. \qquad (4.6.9)$$

Оскільки згідно з умовами теореми функція $\upsilon(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ є неперервною при будь-якому $t\ge 0$, отже, функція $\upsilon(x,T)$ є неперервною при будь-якому $T\ge 0$, то рівність (4.6.9) виконується тільки у випадку $\upsilon(x,T)\equiv 0$ або $\upsilon(x,t)\equiv 0$, тобто $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ в області $\bar{D}$. Теорему доведено.

Зауваження 1. Для існування розв'язку, неперервного в області $\bar{D}$, необхідним є виконання умов узгодження $g_1(0)=\varphi(0)$, $g_2(0)=\varphi(l)$.

Зауваження 2. Позаінтегральний доданок $\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\Big|_0^l$ перетворюється на нуль і у випадку граничних умов

$$u(0,t)=g_1(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=g_2(t)\quad (0\le t<\infty);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)\quad (0\le t<\infty);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=g_1(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=g_2(t)\quad (0\le t<\infty);$$

Тому єдиність розв'язку має місце і в цих випадках.

Зауваження 3. Умова неперервності розв'язку $u(x,t)$ у замкненій області $\bar{D}: 0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$ є необхідною для єдиності розв'язку задачі (4.6.1)–(4.6.3), що диктується фізичними міркуваннями. Якщо відмовитися від цієї умови, то окрім $u(x,t)\in C_1(\bar{D})$ розв'язком (розривним у точках $x=0$, $x=l$) є будь-яка функція вигляду $u(x,t)+\bar{u}(x,t)$, де

$$\bar{u}(x,t)=\begin{cases} C=const\ne 0 & (0<x<\ell,\ 0<t<\infty),\\ 0 & \text{при } x=0,\ x=l,\ t=0.\end{cases}$$

4.7. Принцип максимуму й мінімуму для розв’язків рівняння теплопровідності

Теорема. Будь-який розв’язок $u(x,t)$ рівняння $u_t = a^2 u_{xx}$ $(0<x<l,\ 0<t\le T)$, неперервний у замкненій області $0\le x\le l,\ 0\le t\le T$, набирає найбільшого й найменшого значень або в початковий момент $t=0$, або в точках $x=0$ і $x=l$.

Ця теорема є вираженням того фізично очевидного факту, що тепло переміщається лише від місць із більшою температурою до місць із меншою температурою, тобто "розтікається".

При наявності початкової температури $u(x,0)=\varphi(x)$ $(0\le x\le l)$, із моменту $t=0$ починається процес "розтікання" тепла у внутрішні точки стрижня. Тоді внаслідок зазначеного вище факту температура у внутрішніх точках стрижня не може бути вищою від температури при $t=0$. Те ж саме можна сказати і про випадок, коли задається температура на торцях $x=0$, $x=l$.

Використовуючи цю теорему єдиність розв'язку задачі (4.6.1)–(4.6.3) можна довести при більш слабких припущеннях. Саме умову неперервної диференційовності розв’язку $u(x,t)$ у замкненій області $\bar{D}: 0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$ можна замінити на менш жорстку умову його неперервності в $\bar{D}$.

Дійсно, нехай $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ – два неперервних у $\bar{D}$ розв’язки задачі (4.6.1)–(4.6.3). Тоді $\upsilon(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ – неперервний у $\bar{D}$ розв’язок задачі (4.6.4)–(4.6.6), тобто неперервний в області $\bar{D}_T: 0\le x\le l,\ 0\le t\le T$ при будь-якому $T>0$.

Отже, за принципом максимуму й мінімуму $\upsilon(x,t)$ набуває своїх максимального й мінімального значень або при $t=0$, або при $x=0$, або при $x=l$, однак з огляду на умови (4.6.5), (4.6.6) $\upsilon(x,0)=0$ $(0\le x\le l)$, $\upsilon(0,t)=0$, $\upsilon(\ell,t)=0$ $(0\le t\le T)$, тому $\max\limits_{(D_T)}\upsilon(x,t)=\min\limits_{(D_T)}\upsilon(x,t)=0$, тобто $\upsilon(x,t)\equiv 0$ в області $\bar{D}_T$ або $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ у $\bar{D}_T$. Оскільки $T>0$ – будь-яке, то $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ в області $\bar{D}: 0\le x\le l,\ 0\le t<\infty$.

5. ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

5.1. Рівняння Лапласа і гармонічні функції

Найпростішими й водночас найважливішими рівняннями еліптичного типу є рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\,2}} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^{\,2}} = 0 \quad \left(x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D\subset \mathbb{R}^n\right). \qquad (5.1.1)$$

При $n=2,\ x_1=x,\ x_2=y$ отримуємо двовимірне рівняння Лапласа

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \ \left((x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2\right),$$

а при $n=3,\ x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z$ – тривимірне рівняння Лапласа

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ \ \left((x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3\right).$$

Розглянемо деяку замкнену поверхню Γ, необов'язково зв'язну, і нехай Γ обмежує область $D\subset\mathbb{R}^n$, скінченну або нескінченну.

Функцію $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називають гармонічною в скінченній області $D\subset\mathbb{R}^n$, якщо вона в цій області є двічі неперервно диференційовною і задовольняє рівнянню (5.1.1).

Функцію $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називають гармонічною в нескінченній області $D\subset\mathbb{R}^n$, якщо вона в цій області є двічі неперервно диференційовною, задовольняє рівнянню (5.1.1) і на нескінченності має порядок $O\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$, тобто при досить великих $r=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\ldots+x_n^{\ 2}}$ виконується нерівність

$$\left|u(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right|\le\frac{M}{r^{n-2}}\quad(M=const>0). \qquad (5.1.2)$$

У випадку двовимірної нескінченної області $D\subset\mathbb{R}^2$ умова (5.1.2) набуває вигляду $\left|u(x,y)\right|\le M$, і це означає, що гармонічна в цій області функція повинна бути обмеженою на нескінченності.

Визначення гармонічної функції стосується тільки випадку відкритої області (тобто відкритої зв'язної множини) і не накладає ніяких обмежень на поведінку функції $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ на межі Γ області D.

5.2. Рівняння Лапласа в криволінійній системі координат

Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ замість декартових координат x,y,z уведено криволінійні координати $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ за допомогою трьох неперервно диференційовних функцій

$$x=x(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \ y=y(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \ z=z(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3). \qquad (5.2.1)$$

Для однозначної розв'язності співвідношень (5.1.1) відносно $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$: $\alpha_1=\alpha_1(x,y,z),\ \alpha_2=\alpha_2(x,y,z),\ \alpha_3=\alpha_3(x,y,z)$ необхідно і достатньо, щоб якобіан відображення (5.1.1) був відмінним від нуля:

$$J(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial x}{\partial\alpha_2} & \dfrac{\partial x}{\partial\alpha_3}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial y}{\partial\alpha_2} & \dfrac{\partial y}{\partial\alpha_3}\\ \dfrac{\partial z}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial z}{\partial\alpha_2} & \dfrac{\partial z}{\partial\alpha_3}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{5.2.2}$$

Рівняння $\alpha_i = C_i = const$ визначають три сім'ї поверхонь, які називаються координатними поверхнями криволінійної системи координат $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$. Наприклад, якщо $\langle r,\theta,\varphi\rangle$ $(\alpha_1 = r,\ \alpha_2 = \theta,\ \alpha_3 = \varphi)$ – сферична система координат, то $r = const$ – сім'я концентричних сфер з центром у точці $O(0;0;0)$; $\theta = const$ – сім'я кругових конусів зі спільною вершиною в точці O; $\varphi = const$ – сім'я півплощин зі спільною межею Oz.

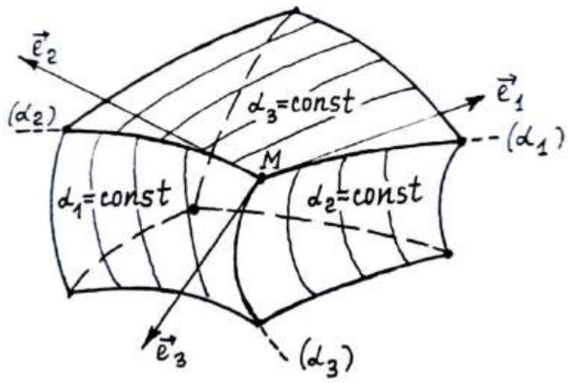

Рис. 5

Якщо відповідність (5.2.1) є взаємно однозначною, тобто $(x, y, z) \leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, то через кожну точку $M \in \mathbb{R}^3$ буде проходити тільки по одній координатній поверхні $\alpha_1 = const,\ \alpha_2 = const,\ \alpha_3 = const$ (рис. 5).

Координатними лініями криволінійної системи координат $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ називають лінії перетину двох координатних поверхонь. Координатною лінією (α_1) називають лінію, на якій $\alpha_2 = const,\ \alpha_3 = const$. Уздовж цієї лінії змінюється тільки координата α_1. Аналогічно координатній лінії (α_2) відповідають значення $\alpha_1 = const,\ \alpha_3 = const$, а координатній лінії (α_3) – значення $\alpha_1 = const,\ \alpha_2 = const$.

Криволінійну систему координат $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ називають ортогональною, якщо координатні лінії (α_1), (α_2), (α_3), що проходять через довільну фіксовану точку $M \in \mathbb{R}^3$, утворюють між собою прямі кути. Надалі будемо розглядати тільки такі системи координат.

Побудуємо одиничні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, що виходять з точки M, є дотичними до відповідних координатних ліній (α_1), (α_2), (α_3) у точці M і напрямлені в бік збільшення відповідних координат. Оскільки така побудова $\vec{e}_i$ здійснюється в кожній точці M, то в кожній точці простору є своя трійка одиничних попарно ортогональних векторів $\vec{e}_i$, яка залежить тільки від точки M:

$$\vec{e}_i=\vec{e}_i(M)=\vec{e}_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ (\vec{e}_i,\vec{e}_j)=0\ (i\neq j),\ (\vec{e}_i,\vec{e}_i)=1\ (i,j=1,2,3). \quad (5.2.3)$$

Трійку векторів (5.2.3) називають рухомим репером, а самі вектори $\vec{e}_i$ – ортами рухомого репера. У декартовій системі координат напрямки векторів $\vec{e}_1=\vec{i}$, $\vec{e}_2=\vec{j}$, $\vec{e}_3=\vec{k}$ не залежать від точки, у якій їх побудовано, тобто в декартовій системі координат усі положення рухомого репера можна отримати з репера в початку координат O за допомогою паралельного перенесення. Що стосується криволінійних систем координат, то в них орти $\vec{e}_i$, побудовані в різних точках, не обов'язково є паралельними один до одного: $\vec{e}_i(M_1)\not\parallel\vec{e}_i(M_2)$.

Для аналітичної побудови ортів $\vec{e}_i$ співвідношення (5.2.1) замінимо одним векторним співвідношенням

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=x(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\vec{i}+y(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\vec{j}+z(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\vec{k}.$$

Тоді при фіксованих значеннях α_2,α_3 (координатна лінія(α_1))

$\vec{r}'_{\alpha_1}=\dfrac{\partial x}{\partial\alpha_1}\vec{i}+\dfrac{\partial y}{\partial\alpha_1}\vec{j}+\dfrac{\partial z}{\partial\alpha_1}\vec{k}$ – вектор, дотичний до координатної лінії (α_1).

Аналогічно $\vec{r}'_{\alpha_2}=\dfrac{\partial x}{\partial\alpha_2}\vec{i}+\dfrac{\partial y}{\partial\alpha_2}\vec{j}+\dfrac{\partial z}{\partial\alpha_2}\vec{k}$ $(\alpha_1=const,\ \alpha_3=const)$,

$\vec{r}'_{\alpha_3}=\dfrac{\partial x}{\partial\alpha_3}\vec{i}+\dfrac{\partial y}{\partial\alpha_3}\vec{j}+\dfrac{\partial z}{\partial\alpha_3}\vec{k}$ $(\alpha_1=const,\ \alpha_2=const)$ – вектори, дотичні до координатних ліній (α_2), (α_3). Звідси отримуємо орти

$$\vec{e}_i=\frac{\vec{r}'_{\alpha_i}}{|\vec{r}'_{\alpha_i}|}=\frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial\alpha_i}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial\alpha_i}\vec{k}\right)\quad(i=1,2,3), \qquad (5.2.4)$$

$$H_i=|\vec{r}'_{\alpha_i}|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha_i}\right)^2}\quad(i=1,2,3). \qquad (5.2.5)$$

Величини H_i називаються коефіцієнтами Ламе.

Умови (5.2.3) ортогональності криволінійної системи координат $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ на основі (5.2.4) мають вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}\frac{\partial x}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial y}{\partial\alpha_i}\frac{\partial y}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial z}{\partial\alpha_i}\frac{\partial z}{\partial\alpha_j}=0\quad(i\neq j\ ;\ i,j=1,2,3). \qquad (5.2.6)$$

Рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$ (у $D\subset\mathbb{R}^3$) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ $(u=u(x,y,z))$

в ортогональній криволінійній системі координат $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ має вигляд

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial\alpha_3}\right)\right]=0\,. \quad (5.2.7)$$

Рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^2$ (у $D\subset\mathbb{R}^2$) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\left(u=u(x,y)\right)$

в ортогональній криволінійній системі координат $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle:\begin{cases}x=x(\alpha_1,\alpha_2)\\ y=y(\alpha_1,\alpha_2)\end{cases}$ має вигляд

$$\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial\alpha_2}\right)\right]=0\,. \quad (5.2.8)$$

Тут ортогональний репер складається із ортів

$$\vec{e}_i=\frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial\alpha_i}\vec{j}\right),\ H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha_i}\right)^2}\ \ (i=1,2), \quad (5.2.9)$$

а умова ортогональності криволінійної системи координат $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ на площині $\mathbb{R}^2$ має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha_1}\frac{\partial x}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial y}{\partial\alpha_1}\frac{\partial y}{\partial\alpha_2}=0\,. \quad (5.2.10)$$

5.3. Інваріантність двовимірного рівняння Лапласа відносно конформних перетворень областей

Неперервне однозначне відображення $f:D_Z\to D_W$ деякої області $D_Z\subset\mathbb{R}^2$ на область $D_W\subset\mathbb{R}^2$, яка зберігає кути між кривими, що проходять через будь-яку задану точку $M_0\in D_Z$, називається конформним у цій точці.

Відомо, якщо функція $W=f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$ комплексної змінної $z=x+iy$ є аналітичною в області $D_Z\subset\mathbb{R}^2$ і $f'(z)\neq 0$ у D_Z, тобто в області D_Z $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}$ $\quad(z=(x,y)\in D_Z)$ (умови Коші – Рімана), $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}=$ $=\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}+i\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq 0$ $\left(z=(x,y)\in D_Z\right)$, то відображення області D_Z на область D_W за допомогою функції $W=f(z)$ або, що те ж саме, за допомогою пари дійсних функцій $u=u(x,y),\ \upsilon=\upsilon(x,y)$ є конформним у будь-якій точці області D_Z.

Нехай на площині $\mathbb{R}^2$ замість декартових координат $x,\ y$ уведено криволінійні координати $\alpha_1,\ \alpha_2$ за допомогою аналітичної функції

$$z=x+iy=f(\alpha)=x(\alpha_1,\alpha_2)+iy(\alpha_1,\alpha_2)\ \left(f:D_\alpha\to D_z;\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in D_\alpha, z=(x,y)\in D_Z\right) \quad (5.3.1)$$

комплексної змінної $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ або, що те ж саме, за допомогою пари неперервно диференційовних функцій $x = x(\alpha_1, \alpha_2),\ y = y(\alpha_1, \alpha_2)$, таких, що

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial y}{\partial \alpha_2},\ \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\ \left(z = (x, y) \in D_Z\right)\ \text{(умови Коші – Рімана)}, \qquad (5.3.2)$$

$$f'(\alpha) = \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} + i\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} + i\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} - i\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} - i\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \neq 0. \qquad (5.3.3)$$

Відповідна криволінійна система координат $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ є ортогональною, оскільки з огляду на (5.3.2)

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} + \left(-\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} = 0,$$

тобто виконується умова (5.2.10) ортогональності криволінійної системи координат $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ на площині $\mathbb{R}^2$.

Коефіцієнти Ламе $H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)^2}$, $H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\right)^2}$ за формулою (5.3.3) є відмінними від нуля. Крім того, $H_2 = H_1$. Дійсно, з умов Коші – Рімана (5.3.2) випливає, що

$$H_2 = \sqrt{\left(-\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)^2} = H_1.$$

Отже, двовимірне рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ у криволінійній системі координат $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ на основі (5.2.8) має вигляд

$$\frac{1}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2}\right) = 0\ \text{або}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} = 0. \qquad (5.3.4)$$

Отже, двовимірне рівняння Лапласа в декартових координатах x, y і криволінійних координатах α_1, α_2, уведених за допомогою аналітичної функції $x + iy = x(\alpha_1, \alpha_2) + iy(\alpha_1, \alpha_2)$, мають той самий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} = 0.$$

Інакше кажучи, двовимірне рівняння Лапласа є інваріантним відносно конформних перетворень областей.

5.4. Гармонічні й аналітичні функції. Елементарні розв'язки двовимірного рівняння Лапласа в декартових і полярних координатах

Нехай $f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$ – функція комплексної змінної $z=x+iy$, а $u=u(x,y),\ \upsilon=\upsilon(x,y)$ – дійсні функції дійсних змінних $x,\ y$. Функція $f(z)$ називається диференційовною в точці $z=x+iy$, якщо існує скінченна похідна

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\quad (\Delta z=\Delta x+i\Delta y),$$

і диференційовною в області $D_Z\subset\mathbb{R}^2$, якщо вона є диференційовною в кожній точці $z\in D_Z$.

Для того щоб функція $f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$ була диференційовною в точці $z=x+iy$, необхідно й достатньо, щоб функції $u(x,y),\ \upsilon(x,y)$ були диференційовними в точці (x,y) і щоб у ній виконувалися умови Коші – Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}. \qquad (5.4.1)$$

Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці z, якщо вона є диференційовною в цій точці і в деякому її околі, і аналітичною в області D_Z, якщо вона є аналітичною в кожній точці $z\in D_Z$.

Відомо, що функція $f(z)$, аналітична в деякій області $D_Z\subset\mathbb{R}^2$, має в цій області похідні всіх порядків, зокрема, функції $u(x,y),\ \upsilon(x,y)$ мають у D_Z неперервні частинні похідні 2-го порядку за x і y.

Диференціюючи першу рівність (5.4.1) за x, а другу за y, після додавання отриманих результатів маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \ \left((x,y)\in D_Z\right).$$

Аналогічно, диференціюючи першу рівність (5.4.1) за y, а другу за x, після віднімання отриманих результатів маємо

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=0\ \ \left((x,y)\in D_Z\right).$$

Таким чином, дійсна й уявна частини аналітичної функції задовольняють двовимірному рівнянню Лапласа, отже, є гармонічними в скінченній області D_Z, а при виконанні умови $|u(x,y)|\le M,\ \left(|\upsilon(x,y)|\le M\right)$ – і в нескінченній області $D\subset\mathbb{R}^2$. Ця обставина дає змогу використовувати аналітичні функції для знаходження елементарних розв'язків двовимірного рівняння Лапласа.

1. Декартові координати. Функції $\cos\lambda z$, $\sin\lambda z$, $e^{i\lambda z}$, $e^{i|\lambda|z}$ (λ – дійсний параметр) є аналітичними в будь-якій скінченній області. Тому дійсні й уявні частини цих функцій

$$ch\lambda y \begin{Bmatrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{Bmatrix},\ sh\lambda y \begin{Bmatrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{Bmatrix},\ e^{-\lambda y} \begin{Bmatrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{Bmatrix},\ e^{-|\lambda|y} \begin{Bmatrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{Bmatrix} \qquad (5.4.2)$$

задовольняють рівнянню Лапласа.

Аналогічно, функції $ch\lambda z$, $sh\lambda z$, $e^{-\lambda z}$, $e^{-|\lambda|z}$ дають елементарні розв'язки із відокремленими змінними

$$ch\lambda x \begin{Bmatrix}\cos\lambda y\\ \sin\lambda y\end{Bmatrix},\ sh\lambda x \begin{Bmatrix}\cos\lambda y\\ \sin\lambda y\end{Bmatrix},\ e^{-\lambda x} \begin{Bmatrix}\cos\lambda y\\ \sin\lambda y\end{Bmatrix},\ e^{-|\lambda|x} \begin{Bmatrix}\cos\lambda y\\ \sin\lambda y\end{Bmatrix}. \qquad (5.4.3)$$

Функції (5.4.2), (5.4.3) використовують при розв'язанні крайових задач для рівняння Лапласа в прямокутнику, смузі, півплощині і чвертьплощині з межами, елементи яких є паралельними до координатних осей Ox і Oy. Конкретний вибір цих функцій обумовлений виглядом області D_Z, у якій розв'язується крайова задача, і специфікою крайових умов (умов на межі Γ області D).

2. Полярні координати. Полярні координати ρ, φ зв'язані з декартовими x, y формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \left(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi\right)$$

або в комплексній формі

$$x + iy = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),\text{ тобто } z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = \rho e^{i\varphi}.$$

Функція $f(z) = z^n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ є аналітичною в будь-якій скінченній області $D \subset \mathbb{R}^2$, а $f(z) = z^{-n}$ $(n = 1,2,\ldots)$ – у будь-якій області $D \subset \mathbb{R}^2$, яка не містить початку координат. Тому функції $u = \operatorname{Re} z^n,\ \upsilon = \operatorname{Im} z^n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, $\upsilon = \operatorname{Im} z^n$ $(n = 1,2,\ldots)$ – гармонічні в будь-якій скінченній області $D \subset \mathbb{R}^2$, а функції $u = \operatorname{Re} z^{-n},\ \upsilon = \operatorname{Im} z^{-n}$, $(n = 1,2,\ldots)$ – гармонічні в будь-якій області $D \subset \mathbb{R}^2$, яка не містить початку координат $(z \ne 0)$.

Оскільки $z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, то $z^n = \rho^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$, $z^{-n} = \rho^{-n}\left(\cos n\varphi - i\sin n\varphi\right)$; $u = \operatorname{Re} z^n = \rho^n\cos n\varphi,\ \upsilon = \operatorname{Im} z^n = \rho^n\sin n\varphi$, $u = \operatorname{Re} z^{-n} = \rho^{-n}\cos n\varphi,$ $\upsilon = \operatorname{Im} z^{-n} = \rho^{-n}\sin n\varphi$.

Функція $f(z) = \ln z = \ln\rho + i\varphi$ – аналітична в будь-якій області $D \subset \mathbb{R}^2$, що не містить початку координат $(\rho \ne 0)$, тому функція $u = \operatorname{Re}\ln z = \ln\rho$ – гармонічна в цій області. Знайдені функції

$$\rho^n \begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix},\ \rho^{-n} \begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix},\ \ln\rho$$

є елементарними розв'язками з відокремленими змінними рівняння Лапласа і спеціально пристосовані для розв'язання крайових задач у крузі $x^2+y^2\le R^2$ $(\rho\le R)$, у зовнішній частині круга $(\rho\ge R)$ і в кільці $R_1^2\le x^2+y^2\le R_2^2$ $(R_1\le\rho\le R_2)$.

5.5. Формули Гріна

Поверхню, що складається зі скінченної кількості кусків з дотичною площиною на них, що неперервно змінюється, називають кусково-гладкою поверхнею. Далі розглядатимемо тільки гладкі й кусково-гладкі поверхні.

Нехай $D\subset\mathbb{R}^3$ – деяка область, обмежена поверхнею Γ, $\vec{A}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ – неперервне в замкненій області $\overline{D}=D\bigcup\Gamma$ і неперервно диференційовне в D векторне поле, причому частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial z}$ є не тільки неперервними, а й обмеженими у відкритій області D; $\vec{n}=\cos(n,x)\vec{i}+\cos(n,y)\vec{j}+\cos(n,z)\vec{k}$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні Γ, dS – елемент площі цієї поверхні. Тоді має місце формула Остроградського – Гаусса

$$\iiint\limits_{(D)} div\vec{A}dxdydz=\oint\!\!\!\oint\limits_{(\Gamma)}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)dS\quad\left(div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right).\qquad(5.5.1)$$

Нехай $u=u(x,y,z),\ \upsilon=\upsilon(x,y,z)$ – неперервно диференційовні в замкненій області $\overline{D}$ і двічі неперервно диференційовні в області D функції, причому їх другі частинні похідні є не тільки неперервними, але й обмеженими у відкритій області D. Покладемо $P=u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x},\ Q=u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y},\ R=u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z}$.

Тоді $\vec{A}=u\left(\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z}\vec{k}\right)$, $div\vec{A}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z}\right)=$

$$=u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\upsilon}{\partial z}\ \text{або}$$

$$div\vec{A}=u\Delta\upsilon+\nabla u\cdot\nabla\upsilon,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ \text{– оператор Лапласа,}\qquad(5.5.2)$$

$\nabla=\vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамільтона (Δ – "дельта", ∇ – "набла");

$$\vec{A}\cdot\vec{n}=u\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial\upsilon}{\partial z}\cos(n,z)\right)=u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}. \qquad (5.5.3)$$

$\frac{\partial\upsilon}{\partial n}=\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial\upsilon}{\partial z}\cos(n,z)$ – похідна функції за напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до поверхні Γ.

Підставивши (5.5.2), (5.5.3) у формулу (5.5.1), отримуємо першу формулу Гріна

$$\iiint\limits_{(D)}u\Delta\upsilon dxdydz=\oiint\limits_{(\Gamma)}u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}\nabla u\nabla\upsilon dxdydz. \qquad (5.5.4)$$

Міняючи ролями функції u, υ, маємо

$$\iiint\limits_{(D)}\upsilon\Delta udxdydz=\oiint\limits_{(\Gamma)}\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}\nabla\upsilon\nabla udxdydz. \qquad (5.5.5)$$

Віднявши від рівності (5.5.4) рівність (5.5.5), отримуємо другу формулу Гріна

$$\iiint\limits_{(D)}\left(u\Delta\upsilon-\upsilon\Delta u\right)dxdydz=\oiint\limits_{(\Gamma)}\left(u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \qquad (5.5.6)$$

Область D може бути обмежена кількома неперетинними замкненими поверхнями (наприклад, двома концентричними сферами). Формули Гріна є правильними і в цьому випадку, тільки поверхневі інтеграли слід брати по всіх поверхнях, що обмежують область.

Умови, що накладаються на функції u, υ, гарантують правильність формул Гріна (5.5.4)–(5.5.6), зокрема інтегровність на поверхні Γ нормальних похідних $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial\upsilon}{\partial n}$.

Для функцій $u=u(x,y),\ \upsilon=\upsilon(x,y)$ двох змінних мають місце аналогічні формули.

Нехай $D\subset\mathbb{R}^2$ – деяка область, обмежена гладкою або кусково-гладкою кривою Γ, $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$ – неперервні в замкненій області $\overline{D}=D\bigcup\Gamma$ і неперервно диференційовні в області D функції, причому частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ є не тільки неперервними, але й обмеженими у відкритій області D.

Тоді має місце формула Гріна

$$\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{(\Gamma)}Pdx+Qdy \qquad (5.5.7)$$

(межа Γ пробігається в додатному напрямку).

Покладемо $P=-u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}$, $Q=u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}$, де $u=u(x,y)$, $\upsilon=\upsilon(x,y)$ – неперервно диференційовні в замкненій області $\overline{D}$ і двічі неперервно диференційовні у відкритій області D функції, причому їх другі частинні похідні є не тільки неперервними, але й обмеженими в D. Тоді $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}+u\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+$ $+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}+u\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial y^2}=u\Delta\upsilon+\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}$, $\Delta\upsilon=\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial y^2}$, і формула (5.5.7) набуває вигляду

$$\iint\limits_{(D)}u\Delta\upsilon dxdy=\oint\limits_{(\Gamma)}u\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}dy-\frac{\partial\upsilon}{\partial y}dx\right)-\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\right)dxdy\,.\qquad(5.5.8)$$

Перетворимо вираз $\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}dy-\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}dx$. Маємо $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ – радіус-вектор точки $M\in\Gamma$, $\overrightarrow{dr}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}$ – вектор, дотичний до кривої Γ у точці $M=M(x,y)$, $\left|\overrightarrow{dr}\right|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=dl$ – елемент довжини кривої Γ, $\vec{\tau}=\dfrac{\overrightarrow{dr}}{\left|\overrightarrow{dr}\right|}$ – одиничний вектор, дотичний до кривої Γ у точці M (рис. 6).

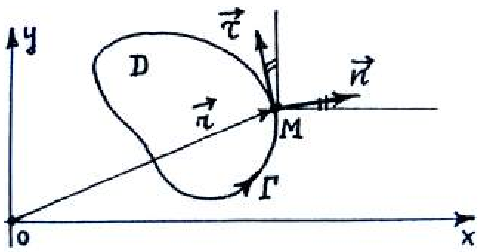

Рис. 6

Оскільки $\left|\vec{\tau}\right|=1$, то $\vec{\tau}=\cos(\tau,x)\vec{i}+\cos(\tau,y)\vec{j}$, $\overrightarrow{dr}=\left|\overrightarrow{dr}\right|\vec{\tau}$ або $dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}=dl\cdot\cos(\tau,x)\vec{i}+dl\cdot\cos(\tau,y)\vec{j}$, звідки $dx=dl\cdot\cos(\tau,x)$, $dy=dl\cdot\cos(\tau,y)$.

Якщо вважати, що вектор $\vec{\tau}$ напрямлений у бік обходу контуру Γ, то $\cos(\tau,x)=-\cos(n,y)$, $\cos(\tau,y)=\cos(n,x)$, де $\vec{n}$ – одинична зовнішня нормаль до контуру (межі) Γ області D у точці M. Тоді

$dx=-\cos(n,y)dl$, $dy=\cos(n,x)dl$, $\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}dy-\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}dx=\left[\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}\cos(n,x)+\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}\cos(n,y)\right]dl$,

тобто $\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}dy-\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}dx=\dfrac{\partial\upsilon}{\partial n}dl$, $\dfrac{\partial\upsilon}{\partial n}=\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x}\cos(n,x)+\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}\cos(n,y)$ – похідна функції $\upsilon=\upsilon(x,y)$ за напрямком одиничної зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до контуру Γ. Отже, із формули (5.5.8) отримуємо першу формулу Гріна

$$\iint\limits_{(D)} u\Delta\upsilon dxdy = \oint\limits_{(\Gamma)} u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}dl - \iint\limits_{(D)} \nabla u\nabla\upsilon dxdy\,, \tag{5.5.9}$$

де $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}$ – двовимірний оператор Гамільтона.

Міняючи в (5.5.9) ролями функції u, υ, маємо

$$\iint\limits_{(D)} \upsilon\Delta u dxdy = \oint\limits_{(\Gamma)} \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}dl - \iint\limits_{(D)} \nabla\upsilon\nabla u dxdy\,. \tag{5.5.10}$$

Віднявши від рівності (5.5.9) рівність (5.5.10), отримуємо другу формулу Гріна

$$\iint\limits_{(D)} \left(u\Delta\upsilon - \upsilon\Delta u\right)dxdy = \oint\limits_{(\Gamma)}\left(u\frac{\partial\upsilon}{\partial n} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl\,. \tag{5.5.11}$$

5.6. Постановка крайових задач для рівняння Лапласа

Нехай $D\subset\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ – область, обмежена поверхнею (контуром) Γ; $\overline{D} = D\cup\Gamma$. Область D може бути скінченною і нескінченною, але в обох випадках припускаємо, що межа Γ області D є скінченною.

Функцією класу $C_m(D)$ $\left(C_m\left(\overline{D}\right)\right)$ називають однозначну функцію, неперервну в D $\left(\overline{D}\right)$ разом з усіма частинними похідними аж до порядку m.

Найважливішими задачами для рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ є крайові (граничні) задачі Діріхле і Неймана.

Крайову задачу називають внутрішньою (зовнішньою), якщо шукана функція u має бути знайдена в скінченній (нескінченній) області D.

Внутрішня крайова задача Діріхле (задача D_i) ставиться таким чином. Нехай D – скінченна область і g – задана неперервна на межі Γ функція. Потрібно знайти розв'язок $u(x,y,z)$ $\left(u\left(x,y\right)\right)$ рівняння Лапласа в області D

$$\Delta u = 0 \quad \left(D\right), \tag{5.6.1}$$

який належить до класу функцій $C_2(D)\bigcap C\left(\overline{D}\right)$ і на межі Γ області D збігається із заданою функцією g:

$$u\big|_{\Gamma} = g\,. \tag{5.6.2}$$

Відразу зазначимо, що неперервність шуканої функції в замкненій області $\overline{D}$ $\left(u\in C\left(\overline{D}\right)\right)$ є необхідною для єдиності розв'язку задачі (5.5.1), (5.5.2).

Якщо відмовитися від цієї умови, то будь-яку функцію вигляду $u = \begin{cases} C = const\, в\, області\, D, \\ g\, на\, межі\, \Gamma \end{cases}$ (розривну при $g \neq C$) можна розглядати як розв'язок задачі Діріхле (5.6.1), (5.6.2), оскільки вона задовольняє рівнянню (5.6.1) і крайову умову (5.6.2).

Зазначимо також, що вимога гармонічності шуканої функції на межі Γ області D (тобто виконання рівності $\Delta u = 0$ на Γ) є надмірною, оскільки це спричинило б додаткові обмеження для граничних значень шуканої функції – існування частинних похідних g_{xx}, g_{yy}.

Внутрішня крайова задача Неймана (задача N_i) ставиться таким чином. Нехай D – скінченна область і h – задана інтегровна на Γ функція. Потрібно знайти розв'язок $u(x,y,z)$, $(u(x,y))$ рівняння (5.6.1), який належить до класу функцій $C_2(D) \cap C(\bar{D})$ і на межі Γ задовольняє умову

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = h, \tag{5.6.3}$$

де $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}$ – похідна за напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до межі Γ області D.

Відразу зазначимо, що функція h не може бути довільною. Дійсно, якщо в другій формулі Гріна (5.5.6) для довільної області $D' \subset D$ з межею $\Gamma' \subset D$ $\iiint\limits_{(D')} (u\Delta \upsilon - \upsilon \Delta u)\, dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{(\Gamma')} \left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial n} - \upsilon \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$ покласти $\upsilon \equiv 1$, то $\Delta \upsilon \equiv 0$ і тоді $\oint\!\!\!\oint\limits_{(\Gamma')} \frac{\partial \upsilon}{\partial n} dS \equiv \iiint\limits_{(D')} \Delta u dxdydz$.

Оскільки $\Delta u = 0$ у D і тим самим $\Delta u = 0$ у $D' \subset D$, то для будь-якої поверхні $\Gamma' \subset D$ виконується рівність

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{(\Gamma)} \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0. \tag{5.6.4}$$

Якщо додатково покласти, що розв'язок задачі Неймана (5.6.1), (5.6.3) має неперервні частинні похідні першого порядку на межі Γ, то разом з (5.6.4) буде виконуватися й рівність

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{(\Gamma)} \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0. \tag{5.6.5}$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = h = h(x,y,z)$, то на основі (5.6.5) задача Неймана (5.6.1), (5.6.3) може мати розв'язок тільки при виконанні умови

$$\oiint\limits_{(\Gamma)} h(x,y,z)\,dS = 0. \tag{5.6.6}$$

Це твердження залишається в силі і без припущення про неперервність частинних похідних шуканого розв'язку на межі Γ.

З'ясуємо фізичний зміст умови (5.6.6) у випадку стаціонарної теплопровідності, коли температура $u = u(x,y,z)$ тіла D не залежить від часу і тому за відсутності внутрішніх джерел тепла задовольняє рівнянню Лапласа. У цьому випадку в будь-який момент часу $-k\oiint\limits_{(\Gamma')} \frac{\partial \upsilon}{\partial n} dS$ є сумарною течією тепла крізь межу Γ тіла D.

Стаціонарний розподіл температури можливий лише за умови рівності нулю цієї течії, звідки й випливає додаткове обмеження на задану функцію $h(x,y,z)$: оскільки $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = h(x,y,z)$, то $-k\oiint\limits_{(\Gamma)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = -k\oiint\limits_{(\Gamma)} h(x,y,z)\,dS = 0$ або $\oiint\limits_{(\Gamma)} h(x,y,z)\,dS = 0$.

У випадку двовимірної задачі N_i, коли $u = u(x,y)$, $h = h(x,y)$, аналогічні побудови з використанням формули Гріна (5.5.11) приводять до такого додаткового обмеження на задану функцію $h(x,y)$:

$$\oint\limits_{(\Gamma)} h(x,y)\,dl = 0. \tag{5.6.7}$$

Зовнішні тривимірні крайові задачі Діріхле і Неймана (задачі D_e і N_e), відрізняються від відповідних внутрішніх задач тільки тим, що область D тепер є нескінченною і на невідому функцію накладається додаткова вимога на нескінченності: при всіх досить великих значеннях $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$|u(x,y,z)| \le \frac{M}{r} \quad (M = const). \tag{5.6.8}$$

Умова (5.6.8) є істотною для єдиності розв'язку зовнішніх крайових задач, у чому легко переконатися на простому прикладі. Нехай D – зовнішність сфери: Γ: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(r = R)$ і крайова умова має вигляд $u|_{\Gamma} = u|_{r=R} = u_0 = const$. Якщо відмовитися від вимоги (5.6.8), то легко перевірити, що функції $u = u_0$, $u = \frac{u_0 R}{r}$, а також будь-яка функція вигляду $u = Au_0 + B\frac{u_0 R}{r}$ (A, B – будь-які числа, такі, що $A + B = 1$) є розв'язками задачі Діріхле D_e у нескінченній області $\bar{D}: r \ge R$.

З них тільки розв'язок $u = u_0 R/r$ задовольняє умову (5.6.8), тобто він є єдиним розв'язком зовнішньої задачі Діріхле $\Delta u = 0$, $u|_{\Gamma} = u|_{r=R} = u_0$, $|u| \le M/r$.

Роль M тут виконує число $|u_0|R$.

У випадку зовнішніх двовимірних крайових задач Діріхле і Неймана додаткова вимога на нескінченності має вигляд $|u(x,y)| \le M$ $(M = const)$ і означає обмеженість шуканого розв'язку на нескінченності.

5.7. Принцип максимуму для рівняння Лапласа

У скінченній області $D \subset \mathbb{R}^n$ разом з рівнянням Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \left(u = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right) \qquad (5.7.1)$$

розглянемо рівняння Пуассона

$$\Delta u = f \ \left(f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right). \qquad (5.7.2)$$

Лема. Якщо точка $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in D$ і $f(M_0) = f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) > 0$, то розв'язок рівняння (5.7.2) не може набувати максимуму в цій точці.

Дійсно, якби в точці M_0 розв'язок $u(M) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рівняння (5.7.2) набував максимуму, то він набував би його в цій точці за кожною змінною $x_1, x_2, \ldots, x_n$ окремо. Але тоді в точці M_0 усі другі похідні функції $u(M)$ за кожною змінною мали б бути від'ємними. Отже, їх сума $\Delta u(M_0)$ також мала б бути від'ємною: $\Delta u(M_0) < 0$. Але це неможливо, оскільки за умовою $f(M_0) > 0$, і тоді з огляду на рівняння (5.7.2) $\Delta u(M_0) > 0$. Отримана суперечність і доводить лему.

Аналогічно доводиться таке твердження: якщо точка $M_0 \in D$ і $f(M_0) < 0$, то розв'язок рівняння (5.7.2) не може набувати мінімуму вційточці.

Теорема. Функція, гармонічна в скінченній області D і неперервна в замкненій області $\bar{D} = D \cup \Gamma$ ніде в області D не може набувати значень, більших за найбільше її значення на межі Γ, або значень, менших за найменше її значення на межі Γ.

Інакше кажучи, якщо функція $u(M) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є неперервною в замкненій області $\bar{D} = D \cup \Gamma$ і задовольняє рівнянню Лапласа (5.7.1) у відкритій області D, то максимуму і мінімуму ця функція набуває на межі Γ області D.

Доведення. Якщо $u(M) \equiv const$ в області $\bar{D}$, то правільність теореми є очевидною. Тому вважаємо, що $u(M) \ne const$ в області $\bar{D}$. Теорему доводимо від супротивного, тобто припустимо, що гармонічна в області D функція $u(M)$ набуває максимуму не на межі Γ області D, а в деякій точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in D$, тобто $u(M_0) > \max u\big|_\Gamma$ або $u(M_0) - \max u|_\Gamma > 0$. Позначимо $\varepsilon = u(M_0) - \max u|_\Gamma$ $(\varepsilon > 0)$. Тоді $u(M_0) = \max u\big|_\Gamma + \varepsilon$ і, отже, $u(M_0) \ge u|_\Gamma + \varepsilon$ для будь-якої точки межі Γ.

Допоміжна функція $v = u + \delta w,$ де $W = \left(x_1 + x_1^0\right)^2 + \left(x_2 + x_2^0\right)^2 + {}$ $+ \ldots + \left(x_n + x_n^0\right)^2$, а δ – додатне число, при досить малому δ набуде в точці M_0 значення, більшого від значення $v|_\Gamma$ у будь-якій точці межі Γ. Дійсно, $v(M_0) = u(M_0) + \delta w(M_0) = u(M_0) \ge u|_\Gamma + \varepsilon = v|_\Gamma - \delta w|_\Gamma + \varepsilon$. Виберемо δ настільки малим, щоб у всій області $\bar{D}$, зокрема на Γ, виконувалася нерівність $\varepsilon - \delta w > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді $v(M_0) > v|_\Gamma + \dfrac{\varepsilon}{2}$ у будь-якій точці межі Γ області D.

Отже, функція v буде набувати максимуму всередині області $\bar{D}$ (тобто у відкритій області D). Але внаслідок очевидної рівності $\Delta W = 2n\delta$ маємо $\Delta v = \Delta u + \Delta(\delta w) = \Delta u + \delta \Delta W = \Delta u + 2n\delta = 2n\delta$ (оскільки $\Delta u = 0$). Отже, функція v є розв’язком рівняння $\Delta v = 2n\delta$, тобто розв’язком рівняння Пуассона (5.7.2) при $f = 2n\delta > 0$. Але за лемою при $f > 0$ функція v не може набувати максимуму в точці, у якій $f > 0$. Оскільки $f = 2n\delta = const > 0,$ тобто $f > 0$ у будь-якій точці області D, то v не може набувати максимуму в жодній точці області D. Отримана суперечність означає, що функція $u(M)$ набуває максимуму на межі Γ області D. Доведення щодо мінімуму є аналогічним.

5.8. Єдиність розв’язків внутрішніх крайових задач Діріхле і Неймана

Теорема. Внутрішня крайова задача Діріхле D_i не може мати двох різних розв’язків у класі функцій $C_2(D) \cap C(\bar{D})$.

Доведення. Нехай $u_1, u_2 \in C_2(D) \cap C(\bar{D})$, два розв’язки задачі D_i, тобто $\Delta u_1 = 0$, $\Delta u_2 = 0$ в області D, $u_1|_\Gamma = g$, $u_2|_\Gamma = g$. Тоді з урахуванням лінійності рівняння Лапласа й крайової умови для функції $u = u_1 - u_2$ маємо задачу в області D. Відомо, що будь-яка неперервна функція в замкненій області набуває свого максимуму. Переконаємося в тому, що

$u \equiv 0$ в області D. Якщо $u \neq 0$ у D і хоча б в одній точці області D $u > 0$, то функція u відповідно до крайової умови $u|_{\Gamma} = 0$ повинна набувати додатного максимуму в області D, що є неможливим через принцип максимуму. Отже, функція u не може набувати додатних значень в області D. Так само доводиться, що ця функція на може набувати від'ємних значень у D. Отже, $u \equiv 0$ в області D. Оскільки $u|_{\Gamma} = 0$, то $u \equiv 0$ у $\bar{D} = D \cup \Gamma$, тобто $u_1 \equiv u_2$ у $\bar{D}$, що й треба було довести.

Теорема. Будь-які два розв'язки u_1 і u_2 внутрішньої крайової задачі Неймана N_i у класі функцій $C_2(D) \cap C(\bar{D})$ можуть відрізнятися один від одного лише на адитивну постійну, тобто $u_1 - u_2 = const$. Інакше кажучи, якщо u – розв'язок задачі, то будь-який інший її розв'язок має вигляд $u + C$ (C – довільна стала), тобто розв'язок внутрішньої крайової задачі Неймана N_i – єдиний з точністю до адитивної сталої.

Доведення. Припустимо додатково, що шуканий розв'язок u є не тільки неперервним у замкненій області $\bar{D} = D \cup \Gamma$, а й має в ній (зокрема, на межі Γ) неперервні частинні похідні першого порядку. Нехай u_1, u_2 – два неперервно диференційовних у замкненій області $\bar{D} = D \cup \Gamma$ розв'язки задачі N_i, тобто $\Delta u_1 = 0$, $\Delta u_2 = 0$ $\frac{\partial u_1}{\partial n}|_{\Gamma} = h$, $\frac{\partial u_2}{\partial n}|_{\Gamma} = h$. Тоді відповідно до лінійності рівняння Лапласа й крайової умови для функції $u = u_1 - u_2$ маємо задачу N: $\Delta u = 0$ в області D, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$, причому функція u є неперервно диференційовною в замкненій області $\bar{D}$ унаслідок додаткового припущення. У цьому випадку до функції u і функції $v = u$ можна застосувати першу формулу Гріна (5.5.4). Оскільки $\Delta u = 0$, $\Delta v = \Delta u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$, $\nabla u \cdot \nabla v = \nabla u \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$, з урахуванням цієї формули $\iiint\limits_{(D)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dxdydz = 0$. Оскільки підінтегральна функція є неперервною і невід'ємною в області D, то ця рівність можлива тільки в тому випадку, якщо $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ в області

D, тобто якщо $u = C = const$ в області D. Оскільки за постановкою задачі Неймана шукана функція є неперервною в $\bar{D} = D \cup \Gamma$, то $u = C = const$ у замкненій області $\bar{D}$, тобто $u_1 - u_2 = C = const$ у $\bar{D}$, що й треба було довести.

Зауваження. Наведені теореми є правильними і для двовимірних задач D_i і N_i. Їх доведення проводиться аналогічно за допомогою принципу максимуму і першої формули Гріна (5.5.9).

Зауваження. Єдиність розв'язку задачі Неймана N_i має місце і при менш жорстких обмеженнях на частинні похідні першого порядку від шуканої функції.

5.9. Єдиність розв’язку зовнішніх крайових задач Діріхле і Неймана

Теорема. Зовнішня крайова задача Діріхле D_e не може мати двох різних розв’язків у класі функцій $C_2(D) \cap C(\bar{D})$.

Доведення. Зовнішня крайова задача Діріхле D_e полягає в такому: потрібно знайти функцію $u = u(x, y, z)$, що задовольняє умови:

1) $\Delta u = 0$ у нескінченній області $D \in \mathbb{R}^3$, обмеженій скінченною (замкненою) поверхнею Γ;

2) функція u є неперервною в замкненій області $\bar{D} = D \cup \Gamma$;

3) $u|_\Gamma = g(x, y, z)$, де $g(x, y, z)$ – функція, задана на поверхні Γ;

4) при всіх достатньо великих значеннях $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $|u(x, y, z)| \le \frac{M}{r}$ $(M = const)$.

Раніше було показано, що умова 4 є істотною для єдиності розв’язку. Припускаючи існування двох розв’язків u_1, u_2, які відповідають умовам 1–4, бачимо, що їх різниця $u = u_1 - u_2$ являє собою розв’язок задачі D_e з нульовою граничною умовою $u|_\Gamma = 0$. Оскільки виконується умова 4, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число R $(R > 0)$, що $|u(M)| = |u(x, y, z)| < \varepsilon$ для всіх $r \ge R$ (тобто і на сфері $r = R$).

Якщо точка M' лежить усередині області D', укладеної між поверхнею Γ і сферою S_R: $r = R$, то за принципом максимуму $|u(M')| < \varepsilon$

не тільки в області $r \ge R$, а й в області D'. Оскільки $D = D' \cup \{r \ge R\}$, то $|u| < \varepsilon$ і в області D. З огляду на довільність $\varepsilon > 0$ робимо висновок, що $u \equiv 0$ в області D, тобто $u_1 \equiv u_2$ у D, а внаслідок $u|_{\Gamma} = 0$ і в області $\bar{D}$ $\sigma_R M\Gamma D_R$: $r = R$ (рис. 7).

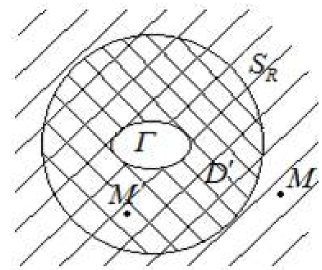

Рис. 7

Одна з теорем єдиності для зовнішньої крайової задачі Неймана N_e передбачає правильність формул Гріна для нескінченних областей зі скінченною межею.

Визначення. Функція $u = u(x, y, z)$, що диференціюється, називається регулярною на нескінченності, якщо для всіх досить великих $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$|u| \le \frac{M}{r}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{M_1}{r^2}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{M_2}{r^2}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \le \frac{M_3}{r^2} \ (M, M_i - const). \quad (5.9.1)$$

Переконаємося, що формули Гріна є правильними і в нескінченній області D зі скінченною межею Γ, якщо функції $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ є неперервно диференційовними в області $\bar{D} = D \cup \Gamma$ і двічі неперервно диференційовними в D при додатковій умові їх регулярності на нескінченності.

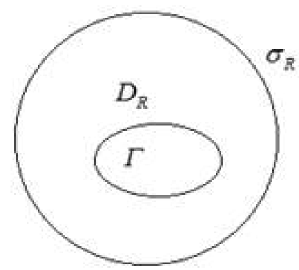

Рис. 8

Розглянемо сферу σ_R з таким радіусом R, щоб поверхня Γ (межа нескінченної області D) лежала всередині σ_R. Позначимо через D_R область, обмежену поверхнями Γ і σ_R (рис. 8). Застосувавши до цієї скінченної області першу формулу Гріна (5.5.4), маємо

$$\oiiint\limits_{D_R} u\Delta v dxdydz = \oiint\limits_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n} dS + \oiint\limits_{\sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint\limits_{D_R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz. \quad (5.9.2)$$

Оцінимо інтеграл по поверхні σ_R, використовуючи при цьому властивість регулярності функцій u, v при $r = R$:

$$\left|\oiint\limits_{\sigma_R} u\frac{\partial u}{\partial n} dS\right| = \left|\oiint\limits_{\sigma_R} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n, z)\right) dS\right| \le$$

$$\le \oiint_{\sigma_R} |u| \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \right) dS \le \frac{M}{R} \cdot \frac{M_1 + M_2 + M_3}{R^2} \oiint_{\sigma_R} dS = \frac{M\left(M_1 + M_2 + M_3\right)}{R^3},$$

$\sigma_R = \dfrac{M\left(M_1 + M_2 + M_3\right)}{R^3} \cdot 4\pi R^2$, тобто $\left| \oiint_{\sigma_R} u \dfrac{\partial u}{\partial n} dS \right| \le \dfrac{4\pi M\left(M_1 + M_2 + M_3\right)}{R^3}$. Звідси

$\lim\limits_{R\to\infty} \oiint_{\sigma_R} u \dfrac{\partial u}{\partial n} dS = 0$.

Переходячи в (5.9.2) до границі при $R \to \infty$ і враховуючи, що $D_R \to D$ при $R \to \infty$, отримуємо

$$\iiint_{(D)} u \Delta v dxdydz = \oiint_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dxdydz. \qquad (5.9.3)$$

Тут $\iiint_{D} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z} \right) dxdydz$ існує, оскільки при деякому $N = const$

$\left| \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z} \right| \le \dfrac{N}{r^4}$, а $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$, тому

$$\left| \iiint_{(r>R)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dxdydz \right| \le N \iiint_{(r>R)} \frac{\sin\theta dr d\theta d\varphi}{r^2} =$$

$$= N \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = N \cdot 2\pi \cdot 2 \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_R^{\infty} = \frac{4\pi N}{R}.$$

Отже, інтеграл ліворуч у формулі (5.9.3) також існує. Таким чином, перша й друга формули Гріна (5.5.4) і (5.5.6) є правильними і для нескінченної області D зі скінченною межею Γ, якщо функції u, v, що в них фігурують, є регулярними на нескінченності.

Теорема. Розв’язок зовнішньої крайової задачі Неймана N_e у класі функцій $C_2(D) \cap C(\bar{D})$, регулярних на нескінченності, – єдиний.

Доведення. Як і у випадку внутрішньої задачі Неймана N_i, теорему доводимо при додатковому припущенні, що шукана функція має неперервні частинні похідні першого порядку в замкненій області $\bar{D}$. Оскільки шукана функція є ще й регулярною на нескінченності, то до неї можна застосувати першу формулу Гріна (5.9.3). Нехай u_1, u_2 – два розв'язки задачі Неймана N_e, тобто $\Delta u_1 = 0,\ \Delta u_1 = 0$ в області D, $\frac{\partial u_1}{\partial n}|_{\Gamma} = h$, $\frac{\partial u_2}{\partial n}|_{\Gamma} = h$. Тоді з урахуванням лінійності рівняння Лапласа й крайової умови для функції $u = u_1 - u_2$ маємо задачу Неймана $\Delta u = 0$ в області D, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$. Уважаючи у формулі (5.9.3) $v = u$, отримуємо $\iiint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dxdydz = 0$, звідки внаслідок неперервності частинних похідних першого порядку й невід'ємності підінтегральної функції $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}$ в області D. Але тоді $u = C = const$ у D. Оскільки $u|_{\infty} = 0$ унаслідок (5.9.1), то $C = 0$, і тоді $u \equiv 0$, тобто $u_1 \equiv u_2$.

Для зовнішніх двовимірних крайових задач умова регулярності розв'язку на нескінченності є занадто сильною, оскільки розв'язків, що задовольняють її, може й не існувати. У двовимірних задачах шуканий розв'язок має бути обмеженим на нескінченності, а частинні похідні першого порядку шуканої функції мають задовольняти й нерівностям $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{M_1}{\rho^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{M_2}{\rho^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \le \frac{M_3}{\rho^2}$ при досить великих $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5.10. Найпростіші частинні розв'язки рівняння Лапласа

Важливе значення мають розв'язки рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ зі сферичною $u = u(r)$ і циліндричною $u = u(\rho)$ (зокрема, круговою) симетрією.

1. У сферичних координатах r, θ, φ, що визначаються формулами $r = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\frac{H_2 H_3}{H_3}\frac{\partial u}{\partial \alpha_3} \right) \right] = 0, \quad (5.10.1)$$

де $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_i} \right)^2}$ – параметри Ламе, має вигляд

$$\Delta u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right]=0$$

$(\alpha_1=r,\ \alpha_2=\theta,\ \alpha_3=\varphi;\ H_1=1,\ H_2=r,\ H_3=r\sin\theta)$ або після помноження на r^2

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (5.10.2)$$

Якщо $u=u(r)$ – сферично симетричний розв'язок рівняння Лапласа (5.10.2), через те, що $\frac{\partial u}{\partial\theta}\equiv 0$, $\frac{\partial u}{\partial\varphi}\equiv 0$, це рівняння перетворюється на звичайне диференціальне рівняння $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0$. Інтегруючи його, маємо послідовно $r^2\frac{du}{dr}=C_1$, $\frac{du}{dr}=\frac{C_1}{r^2}$, $u=\int\frac{dr}{r^2}=-\frac{C_1}{r}+C_2$. Отже, при $r\neq 0$

$$u=u(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2 \; (C_1,\ C_2 \text{ – довільні сталі}). \qquad (5.10.3)$$

Розглянемо задачу Діріхле в сферичному шарі $\bar{D}$: $r_1\le r\le r_2$:

$$\Delta u=0\ \left(r_1<r<r\right)_2, \qquad (5.10.4)$$

$$u|_{r=r_1}=u_1,\ u|_{r=r_2}=u_2\ \ (u_1,u_2-const). \qquad (5.10.5)$$

Задача (5.10.4), (5.10.5) має сферичну симетрію, оскільки її має область $\bar{D}$ і граничні умови (5.10.5). Тому розв'язок рівняння (5.10.2) беремо в формі (5.10.3). Задовольняючи на його основі граничні умови (5.10.5), маємо $-\frac{C_1}{r_1}+C_2=u_1$, $-\frac{C_1}{r_2}+C_2=u_2$, звідки $C_1=\frac{u_1-u_2}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}$, $C_2=u_1+\frac{C_1}{r_1}$;

$u=u(r)=-\frac{C_1}{r}+u_1+\frac{C_1}{r_1}=u_1-C_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)$ або

$$u=u(r)=u_1+(u_2-u_1)\frac{1/r-1/r_1}{1/r_2-1/r_1}\ \ (r_1\le r\le r_2). \qquad (5.10.6)$$

Розв'язок (5.10.6) можна інтерпретувати як потенціал сферичного конденсатора (системи двох концентричних проводильних сфер), коли на його обкладинках (сфера $r=r_1$, $r=r_2$) є відомими потенціали $u_1=const$,

$u_2 = const$. Якщо зовнішню обкладинку заземлено ($u_2 = 0$), то $u = u(r) = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} u_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right)$; $u = u(r) = \frac{r_1 u_1}{r}$ (при $r_2 = +\infty$).

Припускаючи, що $C_1 = -1,\ C_2 = 0$ у (5.10.3), отримуємо функцію

$$u = u_0(r) = \frac{1}{r} \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right), \tag{5.10.7}$$

яка задовольняє рівнянню Лапласа всюди в $\mathbb{R}^3$, крім початку координат ($r = 0$), і є регулярною на нескінченності. Функцію (5.10.7) називають сингулярним розв'язком рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в області, яка не містить початку координат $r = 0$. У будь-якій області (зокрема, у $\mathbb{R}^3$) сингулярний розв'язок (5.10.7) задовольняє рівнянню $\Delta u = -4\pi\delta(x, y, z)$, де $\delta(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ – тривимірна δ-функція Дірака. З точністю до постійного множника сингулярний розв'язок (5.10.7) збігається з потенціалом електростатичного поля, що створюється точковим зарядом e, розташованим у початку координат $r = 0$; потенціал цього поля $u = eu_0(r) = \frac{e}{r} \quad (0 < r < \infty)$.

2. У циліндричних координатах $\rho,\ \varphi,\ z$, що визначаються формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z \quad (0 \le \rho < \infty,\ -\infty < z < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$, рівняння Лапласа (5.10.1) при $\alpha_1 = \rho,\ \alpha_2 = \varphi,\ \alpha_3 = z; H_1 = H_3 = 1,\ H_2 = \rho_3$ має вигляд

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{5.10.8}$$

Якщо $u = u(\rho)$ – циліндрично симетричний розв'язок рівняння Лапласа (5.10.8), то, оскільки $\frac{\partial u}{\partial \varphi} \equiv 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$, отримуємо звичайне диференціальне рівняння $\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0$, звідки $\rho \frac{du}{d\rho} = C_1$, $\frac{du}{d\rho} = \frac{C_1}{\rho},\ u = C_1 \int \frac{d\rho}{\rho} = C_1 \ln\rho + C_2$. Отже,

$$u = u(\rho) = C_1 \ln\rho + C_2 \ (C_1, C_2 \text{ – довільні сталі}). \tag{5.10.9}$$

Розглянемо задачу Діріхле в нескінченній циліндричній області $(\rho_1 \le \rho \le \rho_2)$:

$$\Delta u = 0 \ \ (\rho_1 < \rho < \rho_2),$$

$$u\big|_{\rho=\rho_1} = u_1, \ u\big|_{\rho=\rho_2} = u_2 \ \ (u_1, u_2 - const).$$

Очевидно, що ця задача має циліндричну симетрію. Задовольняючи на основі розв'язку (5.10.9) граничні умови, маємо $C_1 \ln \rho_1 + C_2 = u_1$, $C_1 \ln \rho_2 + C_2 = u_2$, звідки $C_1 = \dfrac{u_2 - u_1}{\ln \rho_2 - \ln \rho_1}$, $C_2 = u_1 - C_1 \ln \rho_1$; $u = u(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2 = C_1 \ln \rho + u_1 - C_1 \ln \rho_1 = u_1 + C_1 (\ln \rho - \ln \rho_1)$, тобто

$$u = u(\rho) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{\ln \dfrac{\rho}{\rho_1}}{\ln \dfrac{\rho_2}{\rho_1}} \ \ (\rho_1 \le \rho \le \rho_2). \tag{5.10.10}$$

Формула (5.10.10) дає розв'язок задачі про стаціонарний розподіл температури в нескінченному порожнистому циліндрі $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$ $(-\infty < z < \infty)$ при умові, що на циліндричних межах $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ підтримується стала температура $u\,|_{\rho=\rho_1} = u_1, \ u\,|_{\rho=\rho_2} = u_2$.

Ця формула показує, що розподіл температур у цій задачі не залежить від координат φ, z. Незалежність розв'язку (5.10.10) від координати z означає, що при заданих граничних умовах цей розподіл є таким самим у будь-якому перерізі циліндра площиною $z = const$.

Формулу (5.10.10) можна інтерпретувати і як розв'язок задачі про знаходження потенціалу електростатичного поля в коаксіальному циліндричному конденсаторі, на обкладинках якого $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$, потенціали сталі.

3. У полярних координатах ρ, φ двовимірне рівняння Лапласа $\Delta u = \dfrac{1}{H_1 H_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\dfrac{H_2}{H_1}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\dfrac{H_1}{H_2}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right)\right] = 0$, де $H_i = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \alpha_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha_i}\right)^2}$ – параметри Ламе, має вигляд

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \ \ (u = u(\rho, \varphi)) \tag{5.10.11}$$

$\left(\alpha_1=\rho,\ \alpha_2=\varphi; H_1=1,\ H_2=\rho_3,\ x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi\right)$.

У цьому випадку формула (5.10.9) є розв’язком рівняння (5.10.11), що має кругову симетрію, а формула (5.10.10) – розв’язок задачі про стаціонарний розподіл температури в тонкій кільцевій пластинці $\rho_1\le\rho\le\rho_2$ (товщина пластинки є малою порівняно із зовнішнім діаметром ρ_2). Уважаючи в формулі (5.10.9) $C_1=-1$, $C_2=0$, отримуємо функцію

$$u=u_0(\rho)=\log\frac{1}{\rho}\left(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\right), \tag{5.10.12}$$

яка задовольняє двовимірному рівнянню Лапласа (5.10.11) усюди в $\mathbb{R}^2$, крім початку координат $\rho=0$. Функцію (5.10.12) називають сингулярним розв’язком двовимірного рівняння Лапласа $\Delta u=0$ в області, яка не містить початку координат $\rho=0$. У будь-якій області (зокрема, у $\mathbb{R}^2$) сингулярний розв’язок (5.10.12) задовольняє рівнянню $\Delta u=-2\pi\delta(x,y)$, де $\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)$ – двовимірна дельта-функція Дірака.

З точністю до постійного множника ця функція збігається з потенціалом електростатичного поля, що створюється зарядженою лінією $\rho=0$ (вісь Oz у просторі). Цей потенціал визначається формулою $u=2e_1u_0(\rho)=2e_1\ln\dfrac{1}{\rho}\ \ (0<\rho<\infty)$.

5.11. Відокремлення змінних у рівнянні Лапласа в циліндричних координатах

Рівняння Лапласа $\Delta u=0$ у циліндричних координатах ρ,φ,z має вигляд $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$ або після диференціювання виразу в дужках

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0. \tag{5.11.1}$$

Щоб мати фізичний зміст, розв’язком рівняння (5.11.1) мають бути 2π-періодичні функції кутової координати. Тому частинні розв’язки з відокремленими змінними рівняння (5.11.1) будемо шукати у вигляді

$$u=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\ \ \left(u\ne0,\ |u|<\infty\right), \tag{5.11.2}$$

де $\Phi(\varphi)=e^{in\varphi}$ $(n=-\infty,\infty)$ або $\Phi(\varphi)=\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}$ $(n=0,\infty)$.

Оскільки $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-n^2R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$, то підстановка (5.11.2) у рівняння (5.11.1) дає $\left[R''(\rho)Z(z)+\dfrac{1}{\rho}R'(\rho)Z(z)-\dfrac{n^2}{\rho^2}R(\rho)Z(z)+R(\rho)Z''(z)\right]\Phi(\varphi)\equiv 0$.

Оскільки $\Phi(\varphi)\neq 0$, то

$$R''(\rho)Z(z)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)Z(z)-\frac{n^2}{\rho^2}R(\rho)Z(z)+R(\rho)Z''(z)=0,$$

$$R(\rho)Z''(z)=-\left[R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)-\frac{n^2}{\rho^2}R(\rho)\right]Z(z),$$

$\dfrac{Z''(z)}{Z(z)}=-\dfrac{R''(\rho)+\dfrac{1}{\rho}R'(\rho)-\dfrac{n^2}{\rho^2}R(\rho)}{R(\rho)}=\lambda^2$ (λ – параметр відокремлення).

Звідси для знаходження функцій $Z(z)$ і $R(\rho)$ отримуємо диференціальні рівняння

$$Z''(z)-\lambda^2 Z(z)=0, \qquad (5.11.3)$$

$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\left(\lambda^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0. \qquad (5.11.4)$$

Загальний розв’язок рівняння (5.11.3) можна записати у вигляді

$$Z(z)=A(\lambda)ch(\lambda z)+B(\lambda)sh(\lambda z) \qquad (5.11.5)$$

або

$$Z(z)=A(\lambda)e^{-\lambda z}+B(\lambda)e^{\lambda z}. \qquad (5.11.6)$$

Звідси видно, що параметр λ можна вважати невід’ємним $(\lambda\geq 0)$.

Природним наслідком фізичної постановки крайової задачі для рівняння (5.11.2) є умова обмеженості її розв’язку $u=u(\rho,\varphi,z)$ в області D. Якщо $D: 0\leq\rho<\infty$, $0<z<\infty$ – верхній півпростір, то загальним розв’язком рівняння (5.11.3), обмеженим при $z\to\infty$, є функція

$$Z(z)=A(\lambda)e^{-\lambda z} \quad (\lambda\geq 0). \qquad (5.11.7)$$

Якщо ж крайова задача для рівняння (5.11.1) розглядається в шарі $D: 0 \le \rho < \infty$, $h_1 \le z \le h_2$, то загальний розв'язок рівняння (5.11.3) зручно брати у вигляді (5.11.5).

Рівняння (5.11.4) є рівнянням циліндричних функцій *n*-го порядку або рівнянням Бесселя *n*-го порядку.

Якщо покласти $\rho = \dfrac{x}{\lambda}$ $(x = \lambda \rho)$, то рівняння (5.11.4) набуває вигляду

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad (5.11.8)$$

або

$$x^2 y + x y' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0, \qquad (5.11.9)$$

причому $R(\rho) = y(\lambda \rho)$, $y = y(x)$.

Обмежений в околі точки $x = 0$ розв'язок рівняння (5.11.9) називають функцією Бесселя *n*-го порядку й позначають $y_1 = J_n(x)$. Тоді функція $R_1(\rho) = J_n(\lambda \rho)$ є обмеженою при $\rho \to \infty$. Отже, елементарними розв'язками рівняння Лапласа (5.11.1) у циліндричних координатах, обмеженими при $\rho \to 0$, $\rho \to \infty$, $z \to \infty$, є функції

$$e^{-\lambda z} J_n(\lambda \rho) \Phi_n(\varphi), \ \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad (n = 0, \infty), \qquad (5.11.10)$$

а обмеженими при $\rho \to 0$, $\rho \to \infty$ – функції

$$\begin{Bmatrix} ch \lambda z \\ sh \lambda z \end{Bmatrix} J_n(\lambda \rho) \Phi_n(\varphi) \quad (n = 0, \infty). \qquad (5.11.11)$$

Якщо область D, у якій розглядається крайова задача для рівняння Лапласа (5.11.1), має осьову симетрію (відносно осі Oz) і граничні умови не залежать від кутової координати φ, то $n = 0$ і розв'язками, що відповідають (5.11.10), (5.11.11), є функції

$$e^{-\lambda z} J_0(\lambda \rho), \quad \begin{Bmatrix} ch \lambda z \\ sh \lambda z \end{Bmatrix} J_0(\lambda \rho). \qquad (5.11.12)$$

Загальні розв'язки осесиметричних крайових задач для рівняння Лапласа в півпросторі D: $0 \le \rho < \infty$, $0 < z < \infty$ і циліндричному шарі D: $0 \le \rho < \infty$, $0 < z < h$ залежно від вигляду області D і типу крайових умов слід вибирати в формі інтеграла:

$$u(\rho,z)\int_0^\infty \begin{Bmatrix}1\\ \lambda\end{Bmatrix} A(\lambda)e^{-\lambda z}J_0(\lambda\rho)d\lambda\,,$$

$$u(\rho,z)=\int_0^\infty \begin{Bmatrix}1\\ \lambda\end{Bmatrix}\left[A(\lambda)ch(\lambda z)+B(\lambda)sh(\lambda z)\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda\,,$$

$$u(\rho,z)=\int_0^\infty \begin{Bmatrix}1\\ \lambda\end{Bmatrix}\left[A(\lambda)ch(\lambda(h-z))+B(\lambda)sh(\lambda z)\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda \text{ і т. д.}$$

При цьому реалізація граничних умов здійснюється за допомогою інтегрального перетворення Ганкеля.

5.12. Інтегральне перетворення Ганкеля та його застосування до розв'язання крайових задач для півпростору та шару

Перетворенням Ганкеля функції $f(\rho)$, заданої на проміжку $[0,\infty)$, є невласний інтеграл

$$F(\lambda)=\int_0^\infty \rho J_n(\lambda z)f(\rho)d\rho \quad (0\le\lambda<\infty), \tag{5.12.1}$$

де $J_n(x)$ $(n=0,1,2,...)$ – функція Бесселя порядку n.

Якщо функція $f(\rho)$ є кусково-неперервною на будь-якому скінченному проміжку $[0,a]\subset[0,\infty)$ і збігається $\int_0^\infty \sqrt{\rho}\,|f(\rho)|d\rho$, то перетворення (5.12.1) існує як функція параметра λ. Якщо до того ж функція $f(\rho)$ задовольняє умови Діріхле на будь-якому проміжку $0\le\rho\le a$, то має місце формула оберненого перетворення Ганкеля

$$f(\rho)=\int_0^\infty \lambda J_n(\lambda z)F(\lambda)d\lambda \quad (0\le\rho<\infty). \tag{5.12.2}$$

Формула (5.12.2) має місце в точках неперервності функції $f(\rho)$, а в точках розриву $\int_0^\infty \lambda J(\lambda z)f(\rho)d\lambda=\frac{1}{2}\left[f(\rho-0)+f(\rho+0)\right]$.

Інтеграл у формулі (5.12.2) називають інтегралом Ганкеля, а сама формула (5.12.2) – розвиненням функції в півпросторі й циліндричному шарі.

5.13. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в півпросторі

Знайти розв'язок рівняння Лапласа в півпросторі $0 \le \rho < \infty, 0 < z < \infty$

$$\Delta u = 0 \quad (0 \le \rho < \infty, 0 < z < \infty), \tag{5.13.1}$$

що задовольняє на його межі $z = 0,\ 0 \le \rho < \infty$ умову

$$u(\rho, 0) = f(\rho) \ (0 \le \rho < \infty). \tag{5.13.2}$$

Розв'язання. Оскільки півпростір має осьову симетрію і гранична умова (5.13.2) не залежить від кутової координати φ, то і шуканий розв'язок не залежить від неї, тобто $u = u(\rho, z)$. У цьому випадку частинним розв'язком з відокремленими змінними рівняння (5.13.1), що є обмеженим при $\rho \to 0$ ($\rho = 0$ – вісь Oz) і прямує до 0 при $\rho \to \infty$, є функція $e^{-\lambda z} J_0(\lambda \rho)$. Загальний розв'язок рівняння (5.13.1) подамо у вигляді інтеграла

$$u(\rho, z) = \int_0^\infty \lambda A(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \tag{5.13.3}$$

Задовольняючи з його допомогою граничну умову (5.13.2), маємо

$$\int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_0(\lambda \rho) f(\rho) d\lambda = f(\rho) \quad (0 \le \rho < \infty).$$

Звідси за формулами (5.12.1), (5.12.2) $\left(F(\lambda) = A(\lambda),\ n = 0\right)$ знаходимо

$$A(\lambda) = \int_0^\infty \rho J_0(\lambda \rho) f(\rho) d\rho. \tag{5.13.4}$$

Рівності (5.13.3), (5.13.4) є формальними розв'язками задачі Діріхле (5.13.1), (5.13.2). Слово «формальні» тут і далі означає, що ми не будемо досліджувати збіжність інтегралів, допустимість граничного переходу, диференціювання під знаком інтеграла і т. ін. Якщо ці операції є законними і побудовані інтеграли збігаються, то формальні розв'язки задач, що розглядаються, і є розв'язками.

Як приклад розглянемо задачу про стаціонарний розподіл температури в півпросторі, якщо температура межі $(z = 0)$ при $\rho < \rho_0$ є незмінною $u_0 = const$, а при $\rho > \rho_0$ дорівнює 0:

$$f(\rho)=\begin{cases} u_0 & (0\le\rho<\rho_0), \\ 0 & (\rho_0\le\rho<\infty). \end{cases}$$

У цьому випадку на основі (5.13.4) $A(\lambda)=u_0\int\limits_0^{\rho_0}\rho J_0(\lambda\rho)d\rho=\left|\lambda\rho=x,\right.$ $\left.d\rho=\frac{1}{\lambda}dx\right|=\frac{u_0}{\lambda^2}\int\limits_0^{\lambda\rho_0}xJ_0(x)dx.$ Використовуючи рівність $\left[xJ_1(x)\right]'=xJ_0(x)$, маємо $A(\lambda)=\frac{u_0}{\lambda^2}\int\limits_0^{\lambda\rho_0}\left[xJ_1(x)\right]'dx=\frac{u_0}{\lambda^2}xJ_1(x)\Big|_0^{\lambda\rho_0}=\rho_0u_0\frac{J_1(\lambda\rho_0)}{\lambda}\quad\left(J_1(0)=0\right).$

Отже, з огляду на (5.13.3) розв’язок цієї задачі має вигляд

$$u(\rho,z)=\rho_0u_0\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda z}J_1(\lambda\rho_0)J_0(\lambda\rho)d\lambda\,.$$

Розподіл температури $u(0,z)=\rho_0u_0\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda z}J_1(\lambda\rho_0)d\lambda\quad\left(J_0(0)=1\right)$ на осі $Oz\quad\left(\rho=0,\ 0\le z<\infty\right)$ можна отримати в елементарних функціях. Використовуючи рівності $J_0(x)'=-J_1(x),\ J_0(0)=0,\ J_0(+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}J_0(x)=0$, маємо $J_1(\lambda\rho_0)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{dJ_0(\lambda\rho_0)}{d\lambda}$, $\int\limits_0^{\infty}J_1(\lambda\rho_0)e^{-z\lambda}d\lambda=-\frac{1}{\rho_0}\int\limits_0^{\infty}e^{-z\lambda}\frac{dJ_0(\lambda\rho_0)}{d\lambda}d\lambda=$

$$=-\frac{1}{\rho_0}\left[e^{-z\lambda}J_0(\lambda\rho_0)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}+z\int\limits_0^{\infty}e^{-z\lambda}J_0(\lambda\rho_0)d\lambda\right]=\frac{1}{\rho_0}-\frac{z}{\rho_0}\int\limits_0^{\infty}e^{-z\lambda}J_0(\lambda\rho_0)d\lambda\,.$$

Останній інтеграл за допомогою інтегрального перетворення функції Бесселя

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)d\theta \qquad (5.13.5)$$

подамо у вигляді подвійної квадратури

$$I=\int\limits_0^{\infty}e^{-z\lambda}J_0(\lambda\rho_0)d\lambda=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\infty}e^{-z\lambda}\cos(\lambda\rho_0\sin\theta)d\lambda\,.$$

Інтегруванням частинами спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda}\cos\left(\lambda\rho_0\cos\theta\right)d\lambda=\frac{z}{z^2+\rho_0{}^2\sin^2\theta}.$$ Тоді $$I=\frac{2z}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{z^2+\rho_0{}^2\sin^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}}.$$

Отже, $$\int_0^\infty e^{-z\lambda}J_1\left(\lambda\rho_0\right)d\lambda=\frac{1}{\rho_0}-\frac{z}{\rho_0\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}}==\frac{\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}-z}{\rho_0\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}}.$$ Таким чином,

$$u(0,z)=\frac{\rho_0{}^2u_0}{\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}\left(\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}+z\right)},\ \lim_{z\to\infty}u(0,z)=0.$$

5.14. Задача Неймана для рівняння Лапласа в півпросторі

Знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta u=0\ \ \left(0\le\rho<\infty\ ,0<z<\infty\right), \tag{5.14.1}$$

що задовольняє на межі $z=0$, $0\le\rho<\infty$ півпростору умову

$$\frac{\partial u}{\partial z}(\rho,0)=g(\rho)\ \ \left(0\le\rho<\infty\right). \tag{5.14.2}$$

Розв'язання. Оскільки гранична умова (5.14.2) не залежить від кутової координати φ, то шуканий розв'язок не залежить від φ, тобто $u=u(\rho,z)$.

Загальний розв'язок рівняння (5.14.1) подамо у вигляді інтеграла Ганкеля

$$u(\rho,z)=\int_0^\infty A(\lambda)e^{-z\lambda}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \tag{5.14.3}$$

Звідси $\frac{\partial u}{\partial z}=-\int_0^\infty\lambda A(\lambda)e^{-z\lambda}J_0(\lambda\rho)d\lambda$. Задовольняючи граничну умову (5.4.12), маємо

$$A(\lambda)=-\int_0^\infty\rho J_0(\lambda\rho)g(\rho)d\rho\ . \tag{5.14.4}$$

Рівності (5.14.3), (5.14.4) дають формальний розв'язок задачі (5.14.1), (5.14.2).

Як приклад розглянемо задачу про стаціонарний розподіл температури в півпросторі $0\le\rho<\infty$, $0<z<\infty$, якщо його межа $z=0$ знаходиться під впливом теплової течії інтенсивності

$$q(\rho)=\begin{cases} q_0=const & (0\le\rho<\rho_0), \\ 0 & (\rho_0<\rho<\infty). \end{cases}$$

Згідно з законом Фур'є інтенсивність (щільність) теплової течії через поверхню σ у напрямку нормалі $\vec{n}$ до σ визначається формулою $q=-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma}$ (k – коефіцієнт теплопровідності). У цьому випадку σ: $z=0,\ 0\le\rho<\infty$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma}=\frac{\partial u}{\partial z}(\rho,0)$. Отже, розв'язок (5.14.3) має задовольняти граничну умову $-k\frac{\partial u}{\partial z}(\rho,0)=q(\rho)=\begin{cases} q_0=const & (0\le\rho<\rho_0), \\ 0 & (\rho_0<\rho<\infty) \end{cases}$ або $\frac{\partial u}{\partial z}(\rho,0)=q(\rho)=\begin{cases} -\frac{q_0}{k} & (0\le\rho<\rho_0), \\ 0 & (\rho_0<\rho<\infty). \end{cases}$ За формулою (5.14.4) $A(\lambda)=\frac{q_0}{k}\int_0^{\rho_0}\rho J_0(\lambda\rho)\,d\rho$.

Оскільки $\int_0^{\rho_0}\rho J_0(\lambda\rho)\,d\rho=\rho_0\frac{J_1(\lambda\rho_0)}{\lambda}$ (див. попередню задачу), то $A(\lambda)=\frac{q_0\rho_0}{k}\frac{J_1(\lambda\rho_0)}{\lambda}$. Отже, розв'язок задачі задається формулою

$$u(\rho,z)=\frac{q_0\rho_0}{k}\int_0^{\infty}\frac{J_1(\lambda\rho_0)}{\lambda}J_0(\lambda\rho)e^{-z\lambda}\,d\lambda. \qquad (5.14.5)$$

Як і в попередньому прикладі, розподіл температури $u(0,z)=\frac{q_0\rho_0}{k}\int_0^{\infty}\frac{J_1(\lambda\rho_0)}{\lambda}e^{-z\lambda}\,d\lambda$ $\left(J_0(0)=1\right)$ на осі Oz $\left(\rho=0,\ 0\le z<\infty\right)$ можна виразити через елементарні функції. Для цього спочатку знаходимо $\frac{\partial u}{\partial z}(0,z)=-\frac{q_0\rho_0}{k}\int_0^{\infty}J_1(\lambda\rho_0)e^{-z\lambda}d\lambda=-\frac{q_0}{k}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}}\right)$ (див. попередній приклад). Оскільки $\lim\limits_{z\to\infty}u(\rho,z)=0$, то $u(0,z)$ можна знайти з рівності

$$u(0,z)=\int\limits_{\infty}^{z}\frac{\partial u}{\partial \xi}(0,\xi)d\xi=-\frac{q_0}{k}\int\limits_{\infty}^{z}\left(1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\rho_0{}^2}}\right)d\xi=-\frac{q_0}{k}\int\limits_{\infty}^{z}\left(\xi-\sqrt{\xi^2+\rho_0{}^2}\right)\Bigg|_{\infty}^{z}=$$

$$=\frac{q_0}{k}\frac{\rho_0{}^2}{\xi+\sqrt{\xi^2+\rho_0{}^2}}\Bigg|_{\infty}^{z}=\frac{q_0\rho_0{}^2}{k}\frac{1}{z+\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}}.$$

Отже, температура на осі Oz $u(0,z)=\dfrac{q_0\rho_0{}^2}{k}\dfrac{1}{z+\sqrt{z^2+\rho_0{}^2}}$, $\lim\limits_{z\to\infty}u(0,z)=0$.

Очевидно, що $u(0,z)\sim\dfrac{const}{z}$ $(z\to\infty)$, а в попередній задачі $u(0,z)\sim\dfrac{const}{z^2}$ $(z\to\infty)$.

5.15. Мішана задача для рівняння Лапласа в шарі

Знайти розв'язок рівняння Лапласа в шарі $0\le\rho<\infty,\ 0\le z\le h$

$$\Delta u=0\ \ (0\le\rho<\infty\ ,0<z<\infty), \tag{5.15.1}$$

що задовольняє на межовій площині $z=0$ умову Діріхле

$$u(\rho,0)=f(\rho)\ \ (0\le\rho<\infty), \tag{5.15.2}$$

а на межовій площині $z=h$ – умову Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial z}(\rho,h)=g(\rho)\ \ (0\le\rho<\infty). \tag{5.15.3}$$

Розв'язання. Оскільки циліндричний шар $0\le\rho<\infty,\ 0\le z\le h$ має осьову симетрію і граничні умови (5.15.2), (5.15.3) не залежать від кутової координати φ, то і шуканий розв'язок не залежить від неї, тобто $u=u(\rho,z)$. У цьому випадку частинними розв'язками з відокремленими змінними рівняння (5.15.1), що є обмеженими при $\rho\to 0$ ($\rho=0$ – вісь Oz) і прямують до 0 при $\rho\to\infty$, є функції $\left\{\begin{matrix} sh\lambda z\\ ch\lambda z\end{matrix}\right\}J_0(\lambda\rho)$ або їх лінійні комбінації $\left\{\begin{matrix} sh\lambda(h-z)\\ ch\lambda(h-z)\end{matrix}\right\}J_0(\lambda\rho)$.

Загальний розв'язок рівняння (5.15.1) тут зручно брати у вигляді інтеграла

$$u(\rho,z)=\int_0^\infty\left[\lambda A(\lambda)ch\lambda(h-z)+B(\lambda)sh\lambda z\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda\,. \qquad (5.15.4)$$

Звідси $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\int_0^\infty\left[-\lambda^2A(\lambda)sh\lambda(h-z)+B(\lambda)ch\lambda z\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda\,.$

Задовольняючи умови (5.15.2), (5.15.3), маємо

$$\int_0^\infty\lambda A(\lambda)ch\lambda hJ_0(\lambda\rho)d\lambda=f(\rho),\ \int_0^\infty\lambda B(\lambda)ch\lambda hJ_0(\lambda\rho)d\lambda=g(\rho)\ \left(0\le\rho<\infty\right).$$

Звідси на основі (5.12.1), (5.12.2) знаходимо

$$\begin{Bmatrix}A(\lambda)\\B(\lambda)\end{Bmatrix}=\frac{1}{ch\lambda h}\int_0^\infty\rho\begin{Bmatrix}f(\rho)\\g(\rho)\end{Bmatrix}J_0(\lambda\rho)d\rho. \qquad (5.15.5)$$

Рівності (5.15.4), (5.15.5) є формальними розв'язками задачі (5.15.1)–(5.15.3).

Як приклад знайдемо стаціонарний розподіл температури в шарі $0\le\rho<\infty,\ 0\le z\le h$, якщо температура на межовій площині дорівнює 0, а межова площина $z=h$ перебуває під впливом теплової течії інтенсивності

$$q(\rho)=\begin{cases}q_0=const & \left(0\le\rho<\rho_0\right),\\ 0 & \left(\rho_0<\rho<\infty\right).\end{cases}$$

Тоді $f(\rho)\equiv0,\ g(\rho)=\begin{cases}-q_0/k & \left(0\le\rho<\rho_0\right),\\ 0 & \left(\rho_0<\rho<\infty\right);\end{cases}\ A(\lambda)\equiv0,$

$B(\lambda)=-\dfrac{q_0}{k\,ch\lambda h}\int_0^{\rho_0}\rho\,J_0(\lambda\rho)d\rho=-\dfrac{q_0\rho_0}{k}\dfrac{J_1(\lambda\rho_0)}{\lambda}$ (див. попередній приклад) і, отже, з огляду на (5.15.4) шуканий розв'язок температури в шарі задається формулою

$$u(\rho,z)=-\frac{q_0\rho_0}{k}\int_0^\infty\frac{sh\lambda z}{\lambda\,ch\lambda h}J_1(\lambda\rho_0)J_0(\lambda\rho)d\lambda \quad \left(0\le\rho<\infty,\ 0\le z\le h\right).$$

5.16. Стаціонарні вісесиметричні задачі теплопровідності для скінченного циліндра

Розглянемо лише ті крайові задачі для циліндра D: $0\le\rho\le\rho_0$, $0\le\varphi\le2\pi$, $0\le z\le h$, які описуються рівнянням Лапласа $\Delta u=0$ і розв'язки яких не залежать від кутової координати φ (вісесиметричні задачі). У цьому випадку частинні розв'язки рівняння $\Delta u = 0$ зручно брати у вигляді

$$u_\lambda(\rho,z) = \left[A(\lambda) sh\lambda(h-z) + B(\lambda) sh\lambda z\right] J_0(\lambda\rho) \quad (\lambda \ge 0). \qquad (5.16.1)$$

Розв'язок (5.16.1) безпосередньо використовується в тих випадках, коли:

а) $u(\rho_0, z) = 0$ (температура бічної поверхні дорівнює нулю);

б) $\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho_0, z) = 0$ (бічна поверхня є теплоізольованою).

Оскільки $\frac{\partial J_0(\lambda\rho)}{\partial \rho} = -\lambda J_1(\lambda\rho)$, тоді

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_\lambda(\rho,z) = -\left[A(\lambda) sh\lambda(h-z) + B(\lambda) sh\lambda z\right] \lambda J_1(\lambda\rho), \qquad (5.16.2)$$

то граничні умови *а*, *б* приводять до рівнянь:

а) $J_0(\lambda\rho_0) = 0$; б) $J_1(\lambda\rho_0) = 0$.

Якщо позначити $\lambda\rho_0 = \mu$, то $\lambda = \lambda_n = \frac{\mu_n}{\rho_0}$, де μ_n є:

а) додатними коренями рівняння $J_0(\mu) = 0$;

б) невід'ємними коренями рівняння $J_1(\mu) = 0$ ($\mu = \mu_0 = 0$ – корінь цього рівняння).

Отже, елементарними розв'язками рівняння Лапласа, що задовольняють граничні умови *а* і *б*, є функції

$$u_n(\rho,z) = \left[a_n sh\frac{\mu_n}{\rho_0}(h-z) + b_n sh\frac{\mu_n}{\rho_0} z\right] J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right). \qquad (5.16.3)$$

Задача Діріхле. Знайти стаціонарний розподіл температури в циліндрі $0 \le \rho \le \rho_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le h$, якщо торець $z = 0$ має температуру $f_1(\rho)$, торець $z = h$ – температуру $f_2(\rho)$, а бічна поверхня $\rho = \rho_0$ – нульову температуру.

Математична модель задачі має вигляд

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \left(0 \le \rho \le \rho_0,\ 0 \le z \le h\right), \qquad (5.16.4)$$

$$u(\rho_0, z) = 0 \quad (0 < z < h)), \qquad (5.16.5)$$

$$u(\rho,0)=f_1(\rho),\quad u(\rho,h)=f_2(\rho)\quad (0\le\rho\le\rho_0). \tag{5.16.6}$$

Оскільки тут має місце випадок *а*, то в частинних розв'язках (5.16.3) μ_n – додатні корені рівняння $J_0(u)=0.$ Тоді розв'язок рівняння (5.16.4) у вигляді функціонального ряду

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n sh\frac{\mu_n}{\rho_0}(h-z)+b_n sh\frac{\mu_n}{\rho_0}z\right]J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right) \tag{5.16.7}$$

автоматично задовольняє граничну умову (5.16.5).

Задовольняючи умови (5.16.6), маємо два розвинення за функціями Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n sh\frac{\mu_n h}{\rho_0}J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)=f_1(\rho)\quad (0\le\rho\le\rho_0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n sh\frac{\mu_n h}{\rho_0}J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)=f_2(\rho)\quad (0\le\rho\le\rho_0).$$

Помножимо обидві частини цих розвинень на $\rho J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)$ і зінтегруємо отримані рівності за змінною ρ від 0 до ρ_0:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_n sh\frac{\mu_n h}{\rho_0}\int_0^{\rho_0}\rho J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho=\int_0^{\rho_0}\rho f_1(\rho)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho,\\&\sum_{n=1}^{\infty}b_n sh\frac{\mu_n h}{\rho_0}\int_0^{\rho_0}\rho J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho=\int_0^{\rho_0}\rho f_2(\rho)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho.\end{aligned} \tag{5.16.8}$$

Тоді $\int_0^{\rho_0}\rho J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho=\left|\rho=\rho_0 x\right|=\rho_0{}^2\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)J_0(\mu_n x)dx$.

Якщо α,β – корені рівняння $J_\nu(\mu)=0$, то $\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)dx=0$ $(\alpha\ne\beta)$ (ортогональність функцій Бесселя),

$\left\|J_\nu(\alpha x)\right\|=\int_0^1 xJ_\nu^2(\alpha x)dx=\frac{1}{2}\left[J_\nu{}'(\alpha)\right]^2$.

Оскільки в цьому випадку $\nu=0,\ J_0^{'}(\alpha)=-J_1(\alpha),\ \alpha=\mu_k,\beta=\mu_n$, то

$\int_0^{\rho_0}\rho J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho=\rho_0{}^2\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)J_0(\mu_n x)dx=0\ \ (n\ne k),$

$$\int_0^{\rho_0} \rho J_0^{\,2}\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right) d\rho = \rho_0^{\,2}\int_0^1 x J_0^{\,2}(\mu_k x)\,dx = \frac{1}{2}\rho_0^{\,2} J_1^{\,2}(\mu_k).$$

Отже, співвідношення (5.16.8) набувають вигляду

$\left\{\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} sh\frac{\mu_k h}{\rho_0}\frac{1}{2}\rho_0^{\,2} J_1^{\,2}(\mu_k) = \int_0^{\rho_0} \rho \left\{\begin{matrix} f_1(\rho) \\ f_2(\rho) \end{matrix}\right\} J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right) d\rho$, звідки

$$\left\{\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\rho_0^{\,2} J_1^{\,2}(\mu_k)} \frac{1}{sh\dfrac{\mu_k h}{\rho_0}} \int_0^{\rho_0} \rho \left\{\begin{matrix} f_1(\rho) \\ f_2(\rho) \end{matrix}\right\} J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right) d\rho\,. \qquad (5.16.9)$$

Формули (5.16.7), (5.16.9) є розв’язками задачі (5.16.4)–(5.16.6).

Розглянемо частинний випадок, коли $f_1(\rho) \equiv 0,\ f_2(\rho) = A\left(\rho_0^{\,2} - \rho^2\right)$.

Тоді $a_k = 0,\ \int_0^{\rho_0} \rho f_2(\rho) J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right) d\rho = A\int_0^{\rho_0} \left(\rho_0^{\,2} - \rho^2\right)\rho J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right) d\rho =$

$$= \left|\rho = \frac{\rho_0}{\mu_k}x\right| = \frac{\rho_0^{\,4}}{\mu_k^{\,2}} A\left[\int_0^{\mu_k} x J_0(x)\,dx - \frac{1}{\mu_k^2}\int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\,dx\right].$$

Використовуючи формули $\left[xJ_1(x)\right]' = xJ_0(x),\ J_0{}'(x) = -J_1(x)$ і рівності $J_1(0) = 0,\ J_0(0) = 1$, маємо

$$\int_0^{\mu_k} x J_0(x)\,dx = \int_0^{\mu_k} \left[xJ_1(x)\right]' dx = xJ_1(x)\Big|_0^{\mu_k} = \mu_k J_1(\mu_k),$$

$$\int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\,dx = \int_0^{\mu_k} x^2\left[xJ_1(x)\right]' dx = x^3 J_1(x)\Big|_0^{\mu_k} - 2\int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\,dx = \mu_k^{\,3} J_1(\mu_k) +$$

$$+2\int_0^{\mu_k} x^2 J_0{}'(x)\,dx = \mu_k^{\,3} J_1(\mu_k) + 2\left(x^2 J_0(x)\Big|_0^{\mu_k} - 2\int_0^{\mu_k} x J_0(x)\,dx\right) = \mu_k^{\,3} J_1(\mu_k) +$$

$$+2\mu_k^{\,2} J_0(\mu_k) - 4\mu_k J_1(\mu_k) = \mu_k^{\,3} J_1(\mu_k) - 4\mu_k J_1(\mu_k) \quad \left(J_0(\mu_k) = 0\right).$$

Отже, $\int_0^{\rho_0} \rho f_2(\rho) J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right) d\rho = \frac{\rho_0^{\,4}}{\mu_k^{\,2}} A\left[\mu_k J_1(\mu_k) - \mu_k J_1(\mu_k) + \frac{4}{\mu_k} J_1(\mu_k)\right] =$

$$= \frac{4A\rho_0^{\,4}}{\mu_k^{\,3}} J_1(\mu_k), \quad b_k = \frac{8A\rho_0^{\,2}}{\mu_k^{\,3} J_1(\mu_k)} \frac{1}{sh\dfrac{\mu_k h}{\rho_0}}.$$

Таким чином, розв’язок задачі задається формулою $(k \to n)$

$$U(u(\rho, z) = 8A\rho_0^{\ 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{\ 3} J_1(\mu_n)} \frac{sh\dfrac{\mu_n z}{\rho_0}}{sh\dfrac{\mu_n h}{\rho_0}} J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right).$$

5.17. Нестаціонарна вісесиметрична задача теплопровідності для нескінченного циліндра

Нехай поверхня $\rho = \rho_0$ нескінченного циліндра $0 \le \rho \le \rho_0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < \infty$ має нульову температуру. Початкова температура внутрішніх точок циліндра є відомою й дорівнює $u_0(\rho)$. Знайти розподіл температур у циліндрі в будь-який момент часу t.

Математична модель задачі. Якщо внутрішніх джерел тепла немає, то рівняння теплопровідності в однорідному тілі має вигляд $\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$, де $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Оскільки циліндр має осьову симетрію, а початкова й гранична умови не залежать від кутової координати φ і координати z, розподіл температури в ньому в будь-який момент часу t також не залежить від координат φ і z, тобто шуканим розв’язком є функція $u = u(\rho, t)$.

Таким чином, потрібно знайти розв’язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (0 \le \rho < \rho_0,\ 0 < t < \infty), \tag{5.17.1}$$

що задовольняє початкову умову

$$u(\rho, 0) = u_0(\rho) \quad (0 \le \rho < \rho_0) \tag{5.17.2}$$

і граничну умову

$$u(\rho_0, t) = 0 \ (0 < t < \infty). \tag{5.17.3}$$

Частинні розв’язки $u(\rho, t)$ рівняння (5.17.1) знаходимо методом відокремлення змінних у вигляді $u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$. Тоді рівняння (5.17.1) набуває вигляду $R''(\rho)T(t) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)T(t) = \frac{1}{a^2}R(\rho)T'(t)$, звідки

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)}{R(\rho)}=-\lambda^2$$ (λ – параметр відокремлення).

Отже, для визначення функцій $T(t)$ і $R_n(\rho)$ отримуємо звичайні диференціальні рівняння

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0,$$

$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\lambda^2R(\rho)=0$ (рівняння Бесселя порядку $\nu=0$), звідки $T(t)=Ce^{-\lambda^2a^2t}$, $R(\rho)=J_0(\rho\lambda)$. Частинні розв’язки рівняння (5.17.1)

$$u_\lambda(\rho,t)=C(\lambda)e^{-\lambda^2a^2t}J_0(\rho\lambda) \quad (C(\lambda)\neq 0) \tag{5.17.4}$$

є обмеженими при $0\le\rho\le\rho_0$, $0\le t<\infty$.

Із граничної умови (5.17.3) отримуємо рівність $C(\lambda)\,e^{-\lambda^2a^2t}J_0(\lambda\rho_0)=0$ або $J_0(\rho\lambda_0)=0$ $(\lambda>0)$. Уважаючи, що $\lambda\rho_0=\mu$, маємо рівняння $J_0(\mu)=0$ $(\mu>0)$. Це рівняння має зліченну кількість простих додатних коренів $0<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n<\ldots,\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=+\infty.$

Значення $\lambda=\lambda_n=\frac{\mu_n}{\rho_0}(n=1,2,\ldots)$ є власними значеннями задачі Штурма – Ліувілля

$$\begin{cases} R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R(\rho)+\lambda^2R(\rho)=0 \quad (0<\rho<\rho_0), \\ R(\rho_0)=0, \ |R(0)|<\infty. \end{cases}$$

Власними функціями, що відповідають цим власним значенням, є функції Бесселя $R_n(\rho)=J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)$ $(n=1,2,\ldots)$.

Ці функції – ортогональні з вагою ρ на відрізку $0\le\rho\le\rho_0$, тобто

$$\int_0^{\rho_0}\rho J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho=0 \quad (n\neq k). \tag{5.17.5}$$

При цьому

$$\int_0^{\rho_0}\rho J_0^2\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)d\rho=\frac{\rho_0^2}{2}J_1^2(\mu_n). \tag{5.17.6}$$

Розв’язки (5.17.4) рівняння (5.17.1), що задовольняють граничну умову (5.17.3), мають такий вигляд:

$$u_n(\rho,t)=C_n c^{-\frac{\mu_n^2}{\rho_0^2}a^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right) \quad (n=1,2\ldots) \quad \left(\mu_n : J_0(\mu)=0\right).$$

Розв’язок задачі (5.17.1)–(5.17.3) шукаємо у вигляді ряду

$$u=u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n c^{-\frac{\mu_n^2}{\rho_0^2}\alpha^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right). \qquad (5.17.7)$$

Коефіцієнти C_n цього ряду знаходимо, використовуючи початкову умову (5.17.2), умови ортогональності (5.17.5) і рівність (5.17.6):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)=u_0(\rho) \quad (0\le\rho\le\rho_0),$$

$$C_k\int_0^{\rho_0}\rho J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho=\int_0^{\rho_0}\rho u_0(\rho) J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho,$$

$$C_k\frac{\rho_0^2}{2}J_1^2(\mu_k)=\int_0^{\rho_0}\rho u_0(\rho) J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho,$$

$$C_k=\frac{2}{\rho_0^2 J_1^2(\mu_k)}\int_0^{\rho_0}\rho u_0(\rho) J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho. \qquad (5.17.8)$$

Отже, формальний розв’язок задачі (5.17.1)–(5.17.3) задається формулами (5.17.7), (5.17.8).

В окремому випадку, коли $u_0(\rho)=u_0\left(\rho_0^2-\rho^2\right) \quad (u_0=const)$,

$$C_k=\frac{2u_0}{\rho_0^2 J_1^2(\mu k)}\int_0^{\rho_0}\rho\left(\rho_0^2-\rho^2\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho,$$

$$T_k=\int_0^{\rho_0}\rho\left(\rho_0^2-\rho^2\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}\rho\right)d\rho=\frac{4\rho_0^4}{\mu_k^3}J_1(\mu_k)$$ і, отже,

$$u(\rho,t)=8u_0\rho_0^2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2\mu_n^2 t}{\rho_0^2}}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\rho\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

5.18. Відокремлення змінних у рівнянні Лапласа в сферичних координатах

Розв'язання крайових задач для кульових областей зручніше за все проводити в сферичних координатах r,θ,y: $x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,$ $z = r\cos\theta\ \ \left(0\le r\le\infty,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right).$

Розглянемо лише ті граничні задачі для кульових областей $0\le r<r_0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ і $r_0\le r<\infty,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$, розв'язки яких не залежать від кутової координати φ (вісесиметричні задачі). Диференціальне рівняння $\Delta u = 0$ таких задач у сферичних координатах має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{d\theta}\right)=0\quad\left(u=u\left(r,\theta\right)\right).\tag{5.18.1}$$

Нетривіальні частинні розв'язки рівняння (5.18.1) згідно з методом Фур'є шукаємо у вигляді $u=u\left(r,\theta\right)=R\left(r\right)T\left(\theta\right)$, тоді замість (5.18.1) отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]T\left(\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right]R\left(r\right)=0 \text{ або}$$

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dR(r)}{dr}\right]}{R(r)}=-\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\dfrac{dT}{d\theta}\right]}{T(\theta)}=\lambda$$ (λ – параметр відокремлення).

Звідси для знаходження $R(r),\ T(\theta)$ отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]-\lambda R(r)=0\quad\left(0\le r\le r_0\ \text{или}\ \ r_0\le r<\infty\right),\tag{5.18.2}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d_0}\left[\sin\theta\frac{dT(\theta)}{d\theta}\right]+\lambda T\left(\theta\right)=0\quad\left(0\le\theta\le\pi\right).\tag{5.18.3}$$

Якщо ввести нову змінну $x=\cos\theta\ \ \left(-1\le x\le 1\right)$ і позначити

$$T\left(\theta\right)=T\left(\arccos x\right)=y\left(x\right),\tag{5.18.4}$$

то $\dfrac{dT(\theta)}{d\theta}=\dfrac{dT(\theta)}{dx}\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\dfrac{dy}{dx},\ \ \sin\theta\dfrac{dT(\theta)}{d\theta}=-\sin^2\theta\dfrac{dy}{dx}=-\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx},$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dT\theta}{d\theta}\right]=-\frac{d}{d\theta}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]=-\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]\frac{dx}{d\theta}=\sin\theta\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right],$$

$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dT(\theta)}{d\theta}\right]=\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]$. Отже, при $x=\cos\theta$ рівняння (5.18.3) набуває стандартного вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0 \quad (-1\le x\le 1);\ y=y(x)=T(\arccos x)=T(\theta). \tag{5.18.5}$$

Рівняння (5.18.5), яке називають рівнянням Лежандра, має неперервні (і отже, обмежені) на відрізку $[-1,1]$ розв'язки при $\lambda=n(n+1)$ $(n=0,1,2...)$. Цими розв'язкам є многочлени Лежандра

$$y=y_n(x)=P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] \quad (n=0,1,2...). \tag{5.18.6}$$

При $\lambda=n\,(n+1)$ рівняння (5.18.2) набуває вигляду

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-n(n+1)R(r)=0. \tag{5.18.7}$$

Це рівняння називають рівнянням Ейлера. Відомо, що його частинні лінійно незалежні розв'язки можна знайти у вигляді $R(r)=r^k$. Дійсно, у цьому випадку $R'(r)=kr^{k-1},\ R''(r)=k(k-1)r^{k-2}$ і, отже, $[k(k-1)+2k-n(n+1)]r^k=0,\ \ k^2+k-n(n+1)=0$,

$k=\frac{-1\pm\sqrt{1+4n(n+1)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{4n^2+4n+1}}{2}=\frac{-1\pm(2n+1)}{2};\ k_1=n,\ k_2=-(n+1);$

$R_1(r)=r^n,\ \ R_2=r^{-(n+1)}=\frac{1}{r^{n+1}}$. Таким чином, загальним розв'язком рівняння (5.18.7) є лінійна комбінація $R=A_nR_1(r)+B_nR_2(r)=A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}$.

Оскільки $x=\cos\theta$, частинні розв'язки рівняння Лапласа з відокремленими змінними (5.18.1) мають вигляд

$$u=u_n(r,\theta)=\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \quad (n=0,1,2...). \tag{5.18.8}$$

Функція $r^{-(n+1)}$ є невизначеною в центрі кулі $r=0$ і обмеженою на нескінченності, а функція r^n, навпаки, є визначеною в точці $r=0$ і необмеженою на нескінченності. Тому при розв'язанні крайових задач у кулі $0 \le r \le r_0$ використовуються елементарні розв'язки

$$u = u_n(r,0) = A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad (n =, 0, 1, 2....),$$

а в необмеженій кульовій області $r_0 \le r < \infty$ – розв'язки

$$u = u_n(r,\theta) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (n = 0, 1, 2...).$$

Елементарні розв'язки (5.18.8), очевидно, використовуються при розв'язанні крайових задач у сферичному шарі $r_0 \le r \le r_1$.

Загальні розв'язки рівняння (5.18.1) зручно вибирати у формі рядів

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (0 \le r \le r_0,\ 0 \le \theta \le \pi) \quad \left(A_n = \frac{C_n}{r_0^n}\right), \qquad (5.18.9)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \quad (r_0 < r < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi) \quad \left(B_n = C_n r_0^{n+1}\right). \qquad (5.18.10)$$

Задача Діріхле для кулі. Знайти розв'язок $u(r,\theta)$ рівняння (5.18.1), що на межі $r = r_0$ кулі $0 \le r \le r_0,\ 0 \le \theta \le \pi$ задовольняє умову $u(r_{0,}\theta) = f(\theta) \quad (0 \le \theta \le \pi)$.

На основі загального розв'язку (5.18.9) маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) = f(\theta) \quad (0 \le \theta \le \pi). \qquad (5.18.11)$$

Коефіцієнти C_n знаходимо з умов ортогональності поліномів Лежандра

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (n \ne k), \\ \dfrac{2}{2k+1} & (n = k), \end{cases}$$ або, якщо $x = \cos\theta$, то

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_k(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 & (n \ne k), \\ \dfrac{2}{2k+1} & (n = k). \end{cases} \qquad (5.18.12)$$

Відповідно до (5.18.12) помножимо обидві частини (5.18.11) на $P_k(\cos\theta)\sin\theta$ і зінтегруємо отриманий результат за θ від 0 до π

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_k(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta.$$

Звідси за допомогою формули (5.18.12) знаходимо

$$C_k = \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta \quad (k=0,1,2,....). \tag{5.18.13}$$

Зауваження. Тут і далі по суті використовується теорема про розвинення функції $\varphi(x)$ $(-1\le x\le 1)$ у ряд Фур'є за ортогональними на відрізку $[-1;1]$ поліномами Лежандра $\{P_n(x)\}_0^{\infty}$.

Якщо функція $\varphi(x)$ є кусково-неперервною разом з похідною $\varphi'(x)$, то в кожній точці неперервності функції $\varphi(x)$ її ряд Фур'є $\sum_{n-0}^{\infty} C_n P_n(x)$, $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(x)P_n(x)dx$ за поліномами Лежандра збігається до цієї функції.

Задача. Визначити потенціал усередині тонкої сферичної оболонки радіусом r_0, що складається із двох півкуль, ізольованих одна від одної тонкою прокладкою й заряджених до потенціалів u_1 і u_2.

Ця задача є частинним випадком розглянутої вище задачі, коли

$$f(0) = \begin{cases} u_1 & \left(0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}\right), \\ u_2 & \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta\le\pi\right). \end{cases}$$

На основі (5.18.13) $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta =$

$$= \frac{2n+1}{2}\left[u_1\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta + u_2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right] = \begin{vmatrix}\cos\theta = x \\ \sin\theta d\theta = -dx\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2n+1}{2}\left[-u_1\int_1^0 P_n(x)dx - u_2\int_0^{-1} P_n(x)dx\right] = \frac{2n+1}{2}\left[u_1\int_0^1 P_n(x)dx + u_2\int_0^1 P_n(-x)dx\right] =$$

$$= \left|P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)\right| = \frac{2n+1}{2}\left[u_1 + (-1)^n u_2\right]\int_0^1 P_n(x)dx = \left|\int_0^1 P_n(x)dx = -\frac{P_{n+1}(0)}{n}\right| =$$

$$= -\frac{2n+1}{2n}P_{n+1}(0)\left[u_1 + (-1)^n u_2\right] \quad (n=1,2...).$$

При $n=2k$ $\quad P_{n+1}(0)=P_{2k+1}(0)=0,\ C_{2k}=0.$

При $n=2k-1$ $\ P_{n+1}(0)=P_{2k}(0)=(-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$;

$$A_{2k-1}=-\frac{4k-1}{4k-2}P_{2k}(0)(u_1-u_2)=\frac{4k-1}{4k-2}(u_2-u_1)(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\quad (k=1,2,...),$$

$C_0=\dfrac{1}{2}(u_1+u_2)\displaystyle\int_0^1 P_0(x)dx=\dfrac{1}{2}(u_1+u_2)$. Отже, на основі (5.18.9)

$$u=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2}(u_1+u_2)+\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k-1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k-1}P_{2k-1}(\cos\theta),$$

$$u=\frac{1}{2}(u_1+u_2)+(u_2-u_1)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k-1)(2k-1)!!}{(4k-2)(2k)!!}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k-1}P_{2k-1}(\cos\theta).$$

Оскільки $r^{2k-1}=0$ при $r=0$, то в центрі кулі ($r=0$) потенціал дорівнює $(u_1+u_2)/2$, тобто середньому арифметичному значень потенціалу на кулі $r=r_0$.

6. КОЛИВАННЯ СТРИЖНІВ

6.1. Види хвиль у пружних стрижнях

Під стрижнем розуміють пружне тіло, два розміри якого є малими порівняно з третім, і яке має скінченну жорсткість на розтяг, згин і скручування. Стрижень уважається одновимірним об'єктом.

Хвилі у стрижнях бувають трьох типів: поздовжні, поперечні (згинні) і крутильні.

Частинки при **поздовжніх хвилях** рухаються симетрично серединній лінії стрижня. Домінує лише поздовжня компонента переміщень (рис. 9, *а*).

При **згинних хвилях** серединна лінія стрижня зазнає згину. Домінує поперечна компонента вектора переміщень (рис. 9, *б*).

У випадку **крутильних хвиль** вектор переміщень має лише азимутальну компоненту. Рух частинок являє собою обертання поперечних перерізів відносно серединної лінії (рис. 9, *в*).

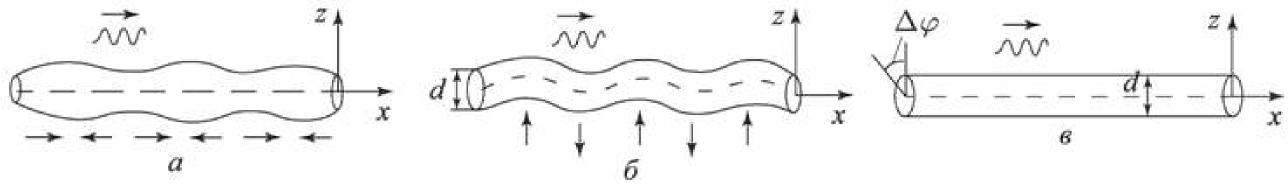

Рис. 9

6.2. Поперечні коливання стрижня

Метод Фур'є може бути застосований для більш складних задач про коливання, ніж поперечні коливання струни. Як приклад розглянемо задачу про поперечні коливання тонкого стрижня. Від струни стрижень відрізняється тим, що він працює на згин. Шуканою функцією є ордината $u(x,t)$ деформованої осі стрижня з абсцисою x у момент часу t.

Якщо M – це згинальний момент, а $F(x,t)$ – навантаження, віднесене до одиниці довжини, то відповідно до технічної теорії згину (теорії балок Бернуллі) маємо

$$EJ\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=M;\qquad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=F\,, \tag{6.2.1}$$

звідки

$$EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=F(x,t). \tag{6.2.2}$$

Тут EJ – жорсткість стрижня на згин. Якщо балка має однорідну структуру, то E – це модуль пружності, а J – це момент інерції поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі. Якщо додати до розподілених зусиль $F(x,t)$ ще й сили інерції за принципом Даламбера, замінивши $F(x,t)$ на $F(x,t)-\rho S\frac{\partial y^2}{\partial t^2}$, то отримаємо рівняння поперечних коливань стрижня (балки). Тут ρ – об'ємна густина матеріалу стрижня, S – площа поперечного перерізу, $\frac{\partial y^2}{\partial t^2}$ – прискорення. Отримане рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,t), \tag{6.2.3}$$

де

$$b^2=\frac{EJ}{\rho S}\,,\ \ f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho S}.$$

Принципово важливими для методу відокремлення змінних є крайові умови на кінцях стрижня при $x=0$ і $x=l$. Ці умови випливають зі способу закріплення кінця балки. Якщо кінець стрижня жорстко защемлено або затиснено, то маємо дві умови:

$$u=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0 \text{ при } x=0 \text{ або } x=l. \qquad (6.2.4)$$

Якщо кінець балки шарнірно закріплено, що виключає лінійне переміщення але допускає поворот балки, то маємо умови

$$u=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0 \text{ або } x=l. \qquad (6.2.5)$$

І якщо кінець стрижня – вільний, то в ньому не діють ні згинальний момент, ні поперечне зусилля $\frac{\partial M}{\partial x}$. При цьому саме переміщення u може бути відмінним від нуля. У такому випадку маємо умови

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \text{ при } x=0 \text{ або } x=l. \qquad (6.2.6)$$

Є і більш складні умови, наприклад пружне закріплення, у якому згинальний момент у нерухомій точці закріплення є пропорційним нахилу балки $\frac{\partial u}{\partial x}$ у цій точці.

Але в кожному з розглянутих випадків маємо на кожному з кінців стрижня по дві умови, на відміну від струни, коли на кожному з кінців мали одну умову (3.3.3).

Насамкінець, треба мати ще й початкові умови того ж типу, що й для струни (3.3.2):

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\ \ (0\le x\le l) \qquad (6.2.7)$$

Якщо шукаємо вільні коливання, то рівняння (6.2.3) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \qquad (6.2.8)$$

Як і у випадку коливань струни, частинні розв’язки шукаємо у вигляді

$$u=T(t)X(x). \qquad (6.2.9)$$

Підставивши (6.2.9) у (6.2.8), знаходимо

$$T''(t)X(x)+b^2T(t)X^{(4)}(x)=0,$$

як і у випадку струни, маємо

$$\frac{T''(t)}{b^2T(t)} = -\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -k^4,$$

де k^4 – константа відокремлення змінних, яку вважаємо дійсною.

Це дає рівняння

$$T''(t) + b^2k^4T(t) = 0. \qquad (6.2.10)$$

$$X^{(4)}(x) - k^4X(x) = 0. \qquad (6.2.11)$$

Загальний розв'язок рівняння (6.2.10) має вигляд

$$T(t) = N\sin\left(bk^2t + \theta\right),$$

тобто розв'язком (6.2.9) знову є стійна хвиля, при якій точки стрижня здійснюють гармонічні коливання з однаковими частотами й фазами, які відрізняються лише амплітудою $NX(x)$, що залежить від координати x.

Загальний розв'язок (6.2.11) можна подати у вигляді

$$X(x) = C_1\operatorname{ch}kx + C_2\operatorname{sh}kx + C_3\cos kx + C_4\sin kx. \qquad (6.2.12)$$

Далі розглянемо деякі випадки крайових умов.

1. Якщо стрижень має шарнірне закріплення з обох кінців, то потрібно задовольнити при $x=0$ і $x=l$ умови (6.2.5). Маємо

$$X(0) = C_1 + C_3 = 0;\quad X''(0) = k^2(C_1 - C_3) = 0,$$

$$X(l) = C_1\operatorname{ch}kl + C_2\operatorname{sh}kl + C_3\cos kl + C_4\sin kl = 0,$$

$$X''(l) = k^2\left(C_1\operatorname{ch}kl + C_2\operatorname{sh}kl - C_3\cos kl - C_4\sin kl\right) = 0,$$

що при умові $k \neq 0$ дає:

$$C_1 = C_3 = 0;$$

$$C_2\operatorname{sh}kl + C_4\sin kl = 0;$$

$$C_2\operatorname{sh}kl - C_4\sin kl = 0.$$

Система двох останніх однорідних рівнянь має нетривіальний (ненульовий) розв'язок при умові

$$\sin kl = 0.$$

Якщо ця умова виконується, то неважко знайти $C_2 = 0$ і, поклавши $C_4 = C$, отримати

$$X(x) = C\sin kx.$$

При $k=0$ рівняння (6.2.11) має розв'язок $X(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$, і, задовольнивши умови (6.2.5), легко визначити, що всі константи C дорівнюють нулю.

2. Якщо стрижень має жорстке закріплення з обох кінців, то необхідно задовольнити умови (6.2.4) при $x=0$ і $x=l$, що дає

$$X(0) = C_1 + C_3 = 0;\quad X'(0) = k(C_2 + C_4) = 0,$$

$$X(l) = C_1\operatorname{ch}kl + C_2\operatorname{sh}kl + C_3\cos kl + C_4\sin kl = 0,$$

$$X'(l)=k\left(C_1\,\mathrm{sh}\,kl+C_2\,\mathrm{ch}\,kl-C_3\sin kl+C_4\cos kl\right)=0.$$

Звідси видно, що $C_3=-C_1$ і $C_4=-C_2$. Це приводить до системи двох однорідних рівнянь:

$$C_1\left(\mathrm{ch}\,kl-\cos kl\right)+C_2\left(\mathrm{sh}\,kl-\sin kl\right)=0,$$
$$C_1\left(\mathrm{sh}\,kl+\sin kl\right)+C_2\left(\mathrm{ch}\,kl-\cos kl\right)=0.$$

Для того щоб система мала нетривіальний розв'язок, потрібно, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю. Це рівняння можна спростити, використавши основні тригонометричні й гіперболічні тотожності:

$$\mathrm{ch}\,kl\cdot\cos kl=1. \qquad (6.2.13)$$

Якщо для спрощення запису покласти $kl=\lambda$, то це рівняння можна записати у вигляді

$$\cos\lambda=\frac{1}{\mathrm{ch}\,\lambda}. \qquad (6.2.14)$$

На рис. 10 зображено графіки функцій $\cos\lambda$ і $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\lambda}$. Легко з'ясувати, що рівняння (6.2.14) має нескінченну кількість коренів

$$0,\ \pm\lambda_1,\ \pm\lambda_2,\ \ldots,\ \pm\lambda_n,\ \ldots\ .$$

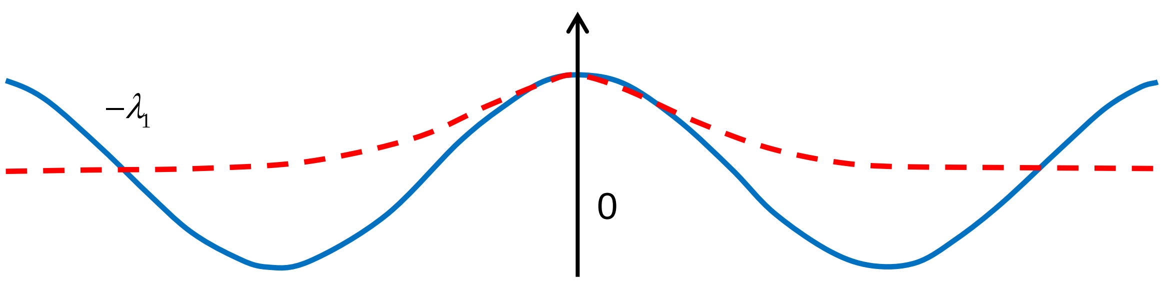

Рис. 10

Цим кореням відповідає нескінченна кількість значень параметра $k_n=\dfrac{\lambda_n}{l}$. При цих значеннях умова (6.2.13) виконується, а константи C_1 і C_2 можна подати у вигляді

$$C_1=C\left(\mathrm{sh}\,kl-\sin kl\right);\ C_2=-C\left(\mathrm{ch}\,kl-\cos kl\right).$$

Визначивши за раніше встановленими формулами константи $C_3=-C_1$, $C_4=-C_2$, підставивши результати в (6.2.12) і поклавши при цьому для визначеності $C=1$, отримаємо шуканий розв'язок $X(x)$ у вигляді

$$X(x)=\left(\mathrm{sh}\,kl-\sin kl\right)\left(\mathrm{ch}\,kx-\cos kx\right)-\left(\mathrm{ch}\,kl-\cos kl\right)\left(\mathrm{sh}\,kx-\sin kx\right). \qquad (6.2.15)$$

Точніше, отримали нескінченну кількість розв'язків $X_n(x)$, які визначаються із загальної формули (6.2.15) заміною k на k_n. Від'ємні корені $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, … можна не брати до уваги, оскільки їм відповідають власні значення $-k_1$, $-k_2$, … параметра k, які внаслідок непарності функцій (6.2.15) відносно k дадуть той же ряд функцій $X_n(x)$.

Узявши замість k значення k_n у рівнянні (6.2.10), отримуємо ряд розв'язків

$$T_n(t) = N_n \sin(\omega_n t + \theta_n), \quad \omega_n = bk_n^2.$$

Для інших крайових умов та їх комбінацій на кінцях виконуємо аналогічні дії: подаємо функцію $X(x)$ у вигляді (6.2.12) і, підставивши її в крайові умови, отримуємо систему чотирьох однорідних рівнянь відносно констант $C_1,...,C_4$, яка має нетривіальний розв'язок у випадку рівності нулю визначника цієї системи. Прирівнявши до нуля визначник системи, отримуємо трансцендентне рівняння відносно k, що має нескінченну кількість розв'язків k_1, k_2, … . Підставивши ці корені в систему рівнянь відносно $C_1,...,C_4$, визначаємо ці константи з точністю до деякого довільного множника.

Далі перейдемо до виконання початкових умов (6.2.7). Для цього запишемо загальний розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t) X_n(x). \tag{6.2.16}$$

У цьому випадку умови (6.1.7) дають

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n X_n(x) = \psi(x). \tag{6.2.17}$$

Як бачимо, визначення констант a_n і b_n є цілком аналогічним тому, як задовольняються початкові умови в задачі про коливання струни.

Не зупиняючись на питаннях збіжності та можливості розвинення в ряд, покажемо лише, що таке розвинення є можливим, і що коефіцієнти розвинення можна отримати саме так, як це було показано у підрозд. 3.8.

Почнемо з того, що розвинемо задану на відрізку $(0;l)$ функцію $f(x)$ у ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = f(x). \tag{6.2.18}$$

Припустимо, що таке розвинення є можливим і що ряд (6.1.18) можна зінтегрувати. Коефіцієнти A_n можна знайти завдяки ортогональності функцій $X_n(x)$ на відрізку $(0;l)$. Тобто

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = 0, \text{ якщо } n \neq m. \qquad (6.2.19)$$

Зазначимо, що функція $X_n(x)$ задовольняє рівнянню (6.2.11), тобто маємо

$$X_n(x) = k_n^4 X_n^{(4)}(x), \quad X_m(x) = k_m^4 X_m^{(4)}(x). \qquad (6.2.20)$$

Помноживши перше рівняння (6.2.20) на $X_m(x)$, а друге – на $X_n(x)$, віднявши почленно й зінтегрувавши за змінною x від 0 до l, отримаємо

$$\left(k_n^4 - k_m^4\right)\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = \int_0^l \left[X_m^{(4)}(x)X_n(x) - X_n^{(4)}(x)X_m(x)\right]dx. \qquad (6.2.21)$$

Для того щоб довести (6.2.19), треба довести, що

$$\int_0^l \left[X_m^{(4)}(x)X_n(x) - X_n^{(4)}(x)X_m(x)\right]dx = 0, \qquad (6.2.22)$$

оскільки множник $k_n^4 - k_m^4 \neq 0$, якщо $n \neq m$.

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int X_m^{(4)}(x)X_n(x)dx = X_m^{(3)}(x)X_n(x) - \int X_m^{(3)}(x)X_n^{'}(x) =$$
$$= X_m^{(3)}(x)X_n(x) - X_m^{''}(x)X_n^{'}(x) + \int X_m^{''}(x)X_n^{''}(x)dx.$$

Таким же чином знаходимо

$$\int X_n^{(4)}(x)X_m(x)dx = X_n^{(3)}(x)X_m(x) - \int X_n^{(3)}(x)X_m^{'}(x) =$$
$$= X_n^{(3)}(x)X_m(x) - X_n^{''}(x)X_m^{'}(x) + \int X_n^{''}(x)X_m^{''}(x)dx.$$

Звідси виводимо рівність:

$$\int_0^l \left[X_m^{(4)}(x)X_n(x) - X_n^{(4)}(x)X_m(x)\right]dx =$$
$$= \left[X_m^{(3)}(x)X_n(x) - X_n^{(3)}(x)X_m(x)\right]\Big|_0^l - \left[X_m^{''}(x)X_n^{'}(x) - X_n^{''}(x)X_n^{'}(x)\right]\Big|_0^l.$$

Права частина рівності містить функції $X_m(x)$ і $X_n(x)$ та їх похідні до третього порядку включно при $x=0$ і $x=l$. Будь-які з умов (6.2.4), (6.2.5) та (6.2.6) містять такі множники, що дорівнюють нулю. Таким чином, рівність (6.2.22), а разом з цим і ортогональність (6.2.19) доведено.

Якщо $n = m$, то інтеграл (6.2.19) перетворюється на інтеграл

$$I_n = \int_0^l X_n^2(x)dx = 0, \qquad (6.2.23)$$

який є визначеною константою, яку в кожному випадку можна розрахувати.

Отримуємо розвинення довільної функції $f(x)$ у ряд, аналогічний ряду Фур'є:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x), \quad A_n=\frac{\int\limits_0^l f(x)X_n(x)dx}{\int\limits_0^l X_n^2(n)dx}.$$

Після наведеного вище визначаємо коефіцієнти a_n і b_n:

$$a_n=\frac{\int\limits_0^l \varphi(x)X_n(x)dx}{\int\limits_0^l X_n^2(n)dx}, \quad b_n=\frac{\int\limits_0^l \psi(x)X_n(x)dx}{\omega_n\int\limits_0^l X_n^2(n)dx}. \qquad (6.2.24)$$

Вимушені коливання стрижнів трактуються таким же чином, як і вимушені коливання струни, з тією різницею, що функцію $f(x,t)$ треба розвивати в ряд не за синусами, а за функціями $X_n(x)$.

6.3. Поздовжні коливання стрижня із закріпленою масою

Якщо маса стрижня є малою порівняно з масою закріпленого тягаря, то задача зводиться до задачі про коливання системи з одним ступенем свободи (рис. 11). Але якщо неможливо знехтувати масою стрижня або тягаря, закріпленого на стрижні, то для розв'язання задачі слід застосовувати методи математичної фізики.

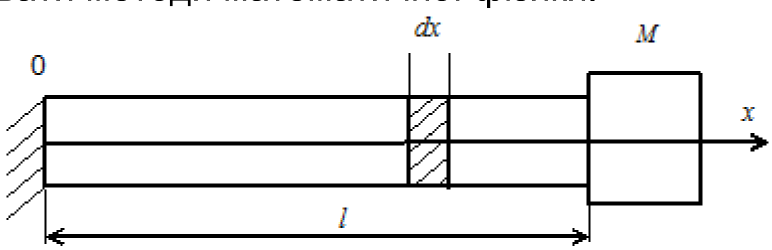

Рис. 11

Спочатку з'ясуємо, яким рівнянням можна описати поздовжні коливання стрижня. Для цього розглянемо диференціальний елемент стрижня, уважаючи, що напружений стан стрижня є рівномірним по поперечному перерізу. Площу поперечного перерізу позначимо S, модуль пружності матеріалу стрижня – E.

Поздовжні переміщення в напрямку x позначимо $u(x,t)$. У загальному перерізі згідно зі співвідношеннями теорії пружності діє сила

$$F(x,t) = ES\frac{\partial u}{\partial x}.$$

У близькому перерізі, віддаленому на dx, діє сила

$$F(x+dx,t) = ES\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right).$$

Різниця цих сил відповідно до закону Ньютона дорівнює силам інерції, які, своєю чергою, дорівнюють добутку маси диференціального елемента і його прискорення: $S\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$, де ρ – густина матеріалу стрижня. Таким чином, маємо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (6.3.1)$$

де $a^2 = \frac{E}{\rho}$.

Це рівняння є аналогічним отриманому раніше рівнянню коливань струни (3.3.1), де переміщення $u(x,t)$ досліджуються на відрізку $0 \le x \le l$, а час – на інтервалі $0 \le t < \infty$.

Початкові умови мають вигляд (3.3.2), аналогічний умовам (6.2.7). Крайові ж умови суттєво різняться. Розмістивши початок координат у закріпленому кінці стрижня, отримаємо для цього кінця умову

$$u(0,t) = 0. \qquad (6.3.2)$$

На іншому кінці закріплено зосереджену масу, тому граничною тут буде умова рівності пружних напружень у стрижні на його кінці і сил інерції закріпленого тягаря:

$$ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -M\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l}. \qquad (6.3.3)$$

Техніку відокремлення змінних детально описано в підрозд. 3.3. Розглянемо одне з власних коливань системи, яке можна записати, наприклад, у вигляді $u(x,t) = X(x)\cos\omega t$. Підставивши цей вираз у головне рівняння (6.3.1), отримуємо $a^2 X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$, звідки

$$X(x) = C_1\cos\frac{\omega}{a}x + C_2\sin\frac{\omega}{a}x. \qquad (6.3.4)$$

Щоб задовольнялися умови (6.3.2) і (6.3.3), треба покласти

$$C_1 = 0; \quad ES\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega l}{a} = M\omega^2 \sin\frac{\omega l}{a}.$$

Позначивши через α відношення $\dfrac{ES}{aM}$ і поклавши $\dfrac{\omega l}{a} = \mu,$ перепишемо умову (6.3.3) у вигляді

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \alpha .$$

Це трансцендентне рівняння має нескінченну кількість коренів μ_n. Розв'язок має вигляд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\mu_n x}{l}\left[A_n \cos\frac{\mu_n at}{l} + B_n \sin\frac{\mu_n at}{l}\right]. \qquad (6.3.5)$$

Коефіцієнти A_n і B_n знаходимо з початкових умов.

Зазначимо, що таким же чином розв'язуються задачі про крутильні коливання круглих стрижнів, які описуються рівнянням (6.3.1). При цьому, звичайно, зміст коефіцієнта a^2 змінюється, а переміщення $u(x,t)$ описує кут повороту поперечного перерізу стрижня.

6.4. Вимушені поздовжні коливання системи стрижнів

Розглянемо систему стрижнів різної довжини, що здійснюють поздовжні коливання u_k, де $k = 1,2,3$ – номери відповідних ділянок (рис. 12). Початок координат знаходиться на межі двох областей.

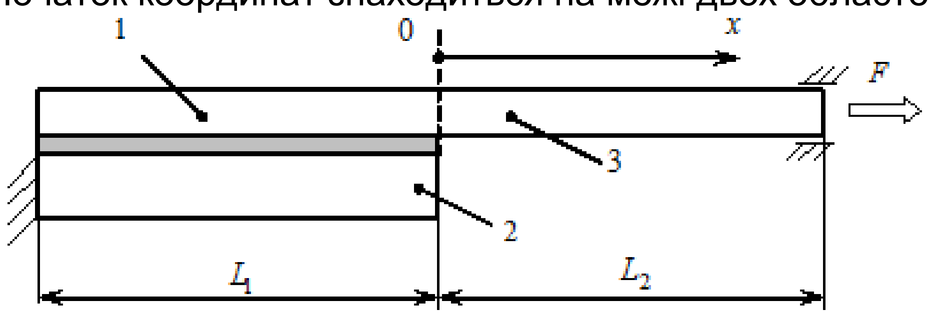

Рис. 12

Товщина стрижнів – відповідно δ_1 і δ_2, товщина з'єднувального шару – δ_c, ширина стрижнів – l. Між стрижнями розташовується пружний клейовий прошарок, дотичні напруження в якому вважаємо пропорційними різниці переміщень з'єднуваних стрижнів:

$$\tau = G\gamma = \frac{G}{\delta_c}(u_2 - u_1), \qquad (6.4.1)$$

де G – модуль зсуву клею.

Рівняння рівноваги диференціальних елементів в області клейового з'єднання мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \gamma_1 (u_2 - u_1) = \dfrac{1}{a_1^2} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \gamma_2 (u_2 - u_1) = \dfrac{1}{a_2^2} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{6.4.2}$$

де $\gamma_m = \dfrac{G}{\delta_c E_m \delta_m}$; $a_m^2 = \dfrac{E_m}{\rho_m}$; ρ_m – густина матеріалу відповідного стрижня. Масою клейового прошарку через малість його товщини нехтуємо.

Рівняння (6.4.2) відрізняються від рівняння (6.3.1) наявністю додаткової сили, що діє на диференціальний елемент з боку клейового шару (6.4.1).

Рівняння рівноваги стрижня за межами області склеювання мають вигляд (6.3.1), а саме: $\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a_1^2} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$. Граничні умови й умови спряження переміщень на межі областей мають вигляд

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=-L_1} = 0, \quad u_2\big|_{x=-L_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_3}{\partial x}\right|_{x=L_2} = F_0 = \frac{F}{E_1 \delta_1 l}, \tag{6.4.3}$$

$$u_1\big|_{x=0} = u_3\big|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u_3}{\partial x}\right|_{x=0},$$

де F – поздовжня сила, прикладена в початковий момент часу $t = 0$.

Початкові умови беремо такими:

$$u_m\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_m}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad m = 1;\, 2;\, 3. \tag{6.4.4}$$

Зведемо задачу до однорідних крайових умов, для чого шукані переміщення подамо у вигляді

$$u_m(x,t) = V_m(x,t) + W_m(x), \tag{6.4.5}$$

де $W_m(x)$ – статичні переміщення, спричинені силою F; $V_m(x,t)$ – переміщення при однорідних крайових умовах, які являють собою вільні коливання цієї пружної системи.

Підставивши $W_m(x)$ у систему (6.4.2), отримаємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь, розв’язок якої має вигляд

$$\begin{aligned} W_1 &= S_1 + S_2 x + S_3 \operatorname{sh} \kappa x + S_4 \operatorname{ch} \kappa x, \\ W_2 &= S_1 + S_2 x - S_3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{sh} \kappa x - S_4 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{ch} \kappa x, \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

де $\kappa = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2}$; $S_1, ..., S_4$ – константи, які знаходимо з відповідних крайових умов

$$\left.\frac{dW_1}{dx}\right|_{x=0} = F_0 = \frac{F}{E_1\delta_1 l}, \quad \left.\frac{dW_1}{dx}\right|_{x=-L_1} = 0, \quad \left.\frac{dW_2}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad W_2\big|_{x=-L_1} = 0.$$

Константи $S_1,...,S_4$ є досить громіздкими, тому в явному вигляді їх не наводимо.

На консольному відрізку статичні переміщення є лінійними:

$$W_3 = \frac{F}{E_1\delta_1} x + S_5, \tag{6.4.7}$$

де $S_5 = W_1(0)$.

Після виключення неоднорідної крайової умови для переміщень $V_k(x,t)$ отримаємо рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \gamma_1 (V_2 - V_1) = \dfrac{1}{a_1^2} \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - \gamma_2 (V_2 - V_1) = \dfrac{1}{a_2^2} \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{6.4.8}$$

$$\frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}. \tag{6.4.9}$$

Однорідні крайові умови й умови спряження мають вигляд

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{x=-L} = 0; \; V_2\big|_{x=-L} = 0; \; \left.\frac{\partial V_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \\ \left.\frac{\partial V_3}{\partial x}\right|_{x=L_1} = 0; \; V_1\big|_{x=0} = V_3\big|_{x=0}; \; \left.\frac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial V_3}{\partial x}\right|_{x=0}. \end{gathered} \tag{6.4.10}$$

Виключивши з системи рівнянь (6.4.8), наприклад, V_2, отримаємо рівняння

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} \right), \tag{6.4.11}$$

$$\frac{\partial^4 V_1}{\partial x^4} - (\gamma_1 + \gamma_2)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \frac{\partial^4 V_1}{\partial t^2 \partial x^2} + \left(\frac{\gamma_1}{a_2^2} + \frac{\gamma_2}{a_1^2} \right) \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \frac{\partial^4 V_1}{\partial t^4} = 0. \tag{6.4.12}$$

Відокремити змінні в рівнянні (6.4.12) проблематично, але це і не потрібно. Коливання описуються функціями $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$. Доведено, що це можна поширити на всі лінійні коливальні системи, і шукати частинні розв'язки можна у вигляді функцій $X(x)\sin\omega t$ і $X(x)\cos\omega t$. Якщо, крім того, коефіцієнти в диференціальних рівняннях є постійними, тобто якщо в цьому випадку параметри стрижнів є постійними за довжиною, то частинні розв’язки рівняння (6.4.12) можна шукати у вигляді $Ae^{i(kx-\omega t)}$, де i – уявна одиниця, k – хвильове число, ω – частота. Підставивши $Ae^{i(kx-\omega t)}$ у рівняння (6.4.12), отримаємо співвідношення між хвильовим числом і частотою, що має назву дисперсійного співвідношення (рівняння):

$$k^4-(\gamma_1+\gamma_2)k^2-\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}\right)k^2\omega^2+\left(\frac{\gamma_1}{a_2^2}+\frac{\gamma_2}{a_1^2}\right)\omega^2+\frac{\omega^4}{a_1^2a_2^2}=0. \qquad (6.4.13)$$

Це рівняння являє собою біквадратне рівняння, тобто деякій власній частоті коливань ω відповідає чотири хвильових числа $\pm k_1(\omega)$ і $\pm k_2(\omega)$. Закон частотної дисперсії (6.4.13) у першій координатній чверті має дві гілки, графіки яких зображено на рис. 13.

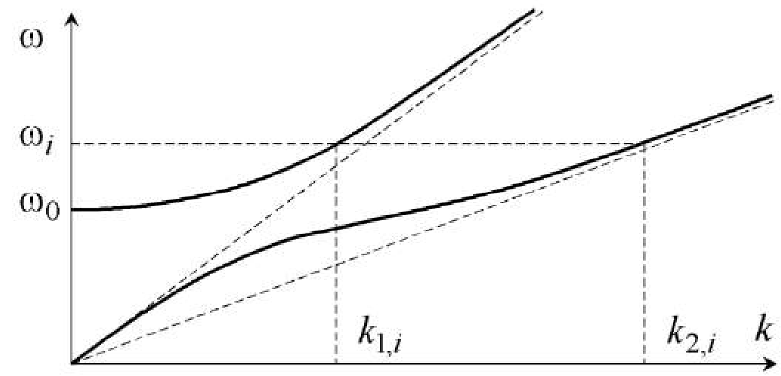

Рис. 13

Частота $\omega_0=\sqrt{\gamma_1 a_1+\gamma_2 a_2}$ є найнижчою частотою, за якою хвильові числа k_1 є дійсними числами.

Аналогічним чином з (6.4.9) знаходимо

$$k_3=\pm\frac{\omega}{a_1}. \qquad (6.4.14)$$

Якщо позначити розв’язки (6.4.13) і (6.4.14) як $k_j=k_j(\omega)$, то частинні розв’язки (6.4.8) і (6.4.9) можна записати у вигляді

$$V_m^*=X^{(m)}(x)e^{i\omega t}, \qquad (6.4.15)$$

де

$$X^{(1)}=C_1\sin k_1x+C_2\cos k_1x+C_3\sin k_2x+C_4\cos k_2x;$$

$$X^{(2)}=p_1(C_1\sin k_1x+C_2\cos k_1x)+p_2(C_3\sin k_2x+C_4\cos k_2x);$$

$$X^{(3)} = C_5 \sin k_3 x + C_6 \cos k_3 x; \quad p_j = 1 + \frac{k_j^2(\omega)}{\gamma_1} - \frac{\omega^2}{\gamma_1 a_1^2}; \ (j = 1;2).$$

Тут $C_1,...,C_6$ – деякі константи. Частинні розв'язки у формі (6.4.15) відображають той факт, що система здійснює коливання однакової частоти, тобто коливання стрижнів зв'язані і здійснюються з однаковими частотами.

Однорідні крайові умови (6.4.10) мають виконуватися в будь-який момент часу, тобто мають виконуватися для функцій $X^{(m)}(x)$. Звідси маємо систему однорідних лінійних рівнянь

$$\mathbf{B} \cdot \vec{\mathbf{C}} = 0, \qquad (6.4.16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} k_1 c_1 & k_1 s_1 & k_2 c_2 & k_2 s_2 & 0 & 0 \\ -p_1 s_1 & p_1 c_1 & -p_2 s_2 & p_2 c_2 & 0 & 0 \\ p_1 k_1 & 0 & p_2 k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 c_3 & k_3 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_6 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \cos k_1 L_1, \ c_2 = \cos k_2 L_1, \ s_1 = \sin k_1 L_1, \ s_2 = \sin k_2 L_1,$$

$$c_3 = \cos k_3 L_2, \ s_3 = \sin k_3 L_2.$$

Система (6.4.16) має нетривіальній (ненульовий) розв'язок, якщо $\det \mathbf{B}(\omega) = 0$. Обчисливши цей визначник і спростивши вираз, отримаємо трансцендентне рівняння відносно частот власних коливань ω:

$$g_1 \sin k_3 L_2 \sin k_2 L_1 \sin k_1 L_1 + g_2 \cos k_3 L_2 \cos k_2 L_1 \sin k_1 L_1 -$$
$$-g_4 \sin k_3 L_2 + g_3 \cos k_3 L_2 \sin k_2 L_1 \cos k_1 L_1 + \cos k_1 L_1 \cos k_2 L_1 \sin k_3 L_2 = 0, \qquad (6.4.17)$$

де

$$g_1 = \frac{k_2^2 + k_1^2}{p_2^2 + p_1^2} \frac{p_1 p_2}{k_1 k_2}, \ g_2 = \frac{p_2 - p_1}{p_2^2 + p_1^2} \frac{p_1 k_1}{k_3}, \ g_3 = \frac{p_2 - p_1}{p_2^2 + p_1^2} \frac{p_1 k_2}{k_3}, \ g_4 = \frac{2 p_2 p_1}{p_2^2 + p_1^2}.$$

У рівнянні хвильові числа k_1, k_2 і k_3, а також p_1, p_2 і відповідно $g_1,...,g_4$ є функціями частоти ω. Рівняння (6.4.17) має нескінченну кількість коренів ω_n. Перші декілька коренів можуть бути меншими за $\omega_0 = \sqrt{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2}$ (див. рис. 13), тобто хвильові числа k_1, що їм відповідають, є не дійсними, а уявними. Відповідно власні функції $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$ містять замість $\sin k_1 x$ і $\cos k_1 x$ функції $\operatorname{sh} k_1 x$ і $\operatorname{ch} k_1 x$.

При збільшенні частоти коливань ω множники $g_1 \to 0$, $g_3 \to 0$, $g_4 \to 0$ і $g_2 \to 1$, тобто для високих частот коливань рівняння (6.4.17) зводиться до більш простого рівняння

$$\cos k_2(\omega) L_1 \cdot \sin\left[k_1(\omega) L_1 + k_3(\omega) L_2\right] = 0.$$

З рівняння (6.4.16) випливає, що для кожної власної частоти коливань ω_n константи $C_1,...,C_6$ можна знайти з системи з точністю до довільного множника, оскільки при $\omega = \omega_n$ ранг матриці $\mathbf{B}$ дорівнює п'яти. Отже, власні функції, що відповідають власній частоті ω_n, можна записати у вигляді

$$X_n^{(1)} = h_{1,n} \sin k_{1,n} x + h_{2,n} \cos k_{1,n} x + h_{3,n} \sin k_{2,n} x + h_{4,n} \cos k_{2,n} x;$$

$$X_n^{(2)} = p_{1,n}\left(h_{1,n} \sin k_{1,n} x + h_{2,n} \cos k_{1,n} x\right) + p_{2,n}\left(h_{3,n} \sin k_{2,n} x + h_{4,n} \cos k_{2,n} x\right);$$

$$X_n^{(3)} = h_{5,n} \sin k_{3,n} x + h_{6,n} \cos k_{3,n} x,$$

де $h_{1,n},...,h_{6,n}$ – компоненти вектора нетривіального розв'язку системи (6.4.16), які відповідають частоті ω_n, $k_{j,n} = k_j(\omega_n)$, $p_{j,n} = 1 + \dfrac{k_{j,n}^2}{\gamma_1} - \dfrac{\omega_n^2}{\gamma_1 a_1^2}$. Очевидно, що $h_{1,n},...,h_{6,n}$ визначаються з точністю до деякого довільного множника.

Загальний розв'язок рівнянь (6.4.8) і (6.4.9) будуємо як суперпозицію відповідних частинних розв'язків (6.4.15). Таким чином, розкривши експоненту від уявного аргумента в (6.4.15) за формулою Ейлера, отримаємо

$$V_m = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(m)}(x)\left[S_n \sin\omega_n t + R_n \cos\omega_n t\right], \qquad (6.4.18)$$

де S_n, R_n – невідомі константи, що визначаються початковими умовами.

Слід зазначити, що константи $h_{1,n},...,h_{6,n}$ у $X_n^{(m)}(x)$ можна знайти з системи (6.4.16) з точністю до довільного множника, тому функції $X_n^{(m)}(x)$ можуть суттєво відрізнятися за амплітудою, що ускладнює дослідження на збіжність отриманого розв'язку. Для покращання аналізу функції $X_n^{(m)}(x)$ слід нормувати, поділивши їх на множник

$$N_n = \sqrt{\int_{-L_1}^{0}\left[\left(X_n^{(1)}\right)^2 + \left(X_n^{(2)}\right)^2\right]dx + \int_0^{L_2}\left(X_n^{(3)}\right)^2 dx}.$$

Завдяки цьому отримані нові функції

$$Y_n^{(m)}(x)=\frac{1}{N_n}X_n^{(m)}(x)$$

будуть нормованими, тобто для них буде виконуватися умова

$$\int_{-L_1}^{0}\left[\left(Y_n^{(1)}\right)^2+\left(Y_n^{(2)}\right)^2\right]dx+\int_{0}^{L_2}\left(Y_n^{(3)}\right)^2dx=1.$$

Слід також зазначити, що функції $X_n^{(m)}(x)$ (отже, і функції $Y_n^{(m)}(x)$) не є ортогональними на відповідних відрізках ($[-L_1,0]$, $[0,L_2]$), на відміну від аналогічних функцій у задачі про поперечні коливання балки (6.2.19). Це ускладнює задоволення крайових умов і незалежне знаходження кожного з коефіцієнтів S_n, R_n у (6.4.18). Для скорочення запису подамо переміщення (6.4.5), (6.4.6) і (6.4.18) кожного зі стрижнів як компоненти вектора:

$$\mathbf{u}=(u_1;\quad u_2;\quad u_3)^T,\ \mathbf{W}=(W_1;\quad W_2;\quad W_3)^T,\ \mathbf{V}=(V_1;\quad V_2;\quad V_3)^T.$$

Застосувавши вектор нормованих функцій $\vec{\mathbf{Y}}_n=\left(Y_n^{(1)};\quad Y_n^{(2)};\quad Y_n^{(3)}\right)^T$, маємо змогу записати переміщення стрижнів у формі

$$\mathbf{u}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\vec{\mathbf{Y}}_n\left[S_n\sin\omega_n t+R_n\cos\omega_n t\right]+\mathbf{W}(x). \tag{6.4.19}$$

Задовольнивши початкові умови (6.4.4), отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}R_n\mathbf{Y}_n+\mathbf{W}-\mathbf{\Phi}=0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}S_n\omega_n\mathbf{Y}_n-\mathbf{\Psi}=0, \tag{6.4.20}$$

де

$$\mathbf{W}=\begin{pmatrix}W_1\\W_2\\W_3\end{pmatrix},\ \mathbf{\Phi}=\begin{pmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\\\Phi_3\end{pmatrix},\ \mathbf{\Psi}=\begin{pmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\\\Psi_3\end{pmatrix}.$$

Іншими словами, необхідно підібрати коефіцієнти S_n, R_n таким чином, щоб рівності (6.4.20) виконувалися максимально точно. Якщо обмежити кількість частот власних коливань деяким числом N, то, застосувавши до рівнянь (6.1.49) метод найменших квадратів, отримуємо

$$J_1=\left\|\sum_{n=1}^{N}R_n\vec{\mathbf{Y}}_n+\vec{\mathbf{W}}-\vec{\mathbf{\Phi}}\right\|^2\to\min,\ J_2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}S_n\omega_n\vec{\mathbf{Y}}_n-\vec{\mathbf{\Psi}}\right\|^2\to\min,$$

де норма вектор-функції вводиться як сума інтегралів від квадратів компонентів векторів, узятих на відповідних інтервалах, тобто перші два компоненти інтегруються на інтервалі $[-L_1,0]$, а третій компонент – на $[0,L_2]$. У координатній формі маємо

$$J_1=\int_{-L_1}^{0}\left[\sum_{j=1}^{2}\left(W_j-\Phi_j+\sum_{n=1}^{N}R_nY_n^{(j)}\right)^2\right]dx+\int_{0}^{L_2}\left(W_3-\Phi_3+\sum_{n=1}^{N}R_nY_n^{(3)}\right)^2dx,$$

$$J_2=\int_{-L_1}^{0}\left[\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{n=1}^{N}S_n\omega_nY_n^{(j)}-\Psi_j\right)^2\right]dx+\int_{0}^{L_2}\left(\sum_{n=1}^{N}S_n\omega_nY_n^{(3)}-\Psi_3\right)^2dx.$$

Умови мінімуму $\frac{\partial J_1}{\partial R_n}=0$, $\frac{\partial J_2}{\partial S_n}=0$ приводять до систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{P};\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{Q}, \tag{6.4.21}$$

де

$$\mathbf{R}=\left(R_1;\quad R_2;\quad \ldots\quad R_N\right)^T;\ \mathbf{S}=\left(S_1;\quad S_2;\quad \ldots\quad S_N\right)^T,$$

$$A_{m,n}=\int_{0}^{-L_1}\left(Y_m^{(1)}Y_n^{(1)}+Y_m^{(2)}Y_n^{(2)}\right)dx+\int_{0}^{L_2}Y_m^{(3)}Y_n^{(3)}dx;\quad B_{m,n}=\omega_mA_{m,n};$$

$$P_n=\int_{0}^{-L_1}\left[\left(\Phi_1-W_1\right)Y_n^{(1)}+\left(\Phi_2-W_2\right)Y_n^{(2)}\right]dx+\int_{0}^{L_2}\left(\Phi_3-W_3\right)Y_n^{(3)}dx;$$

$$Q_n=-\int_{0}^{-L_1}\left[\Psi_1Y_n^{(1)}+\Psi_2Y_n^{(2)}\right]dx-\int_{0}^{L_2}\Psi_3Y_n^{(3)}dx.$$

Очевидно, що $A_{n,n}=1$. Функції $Y_n^{(1)},Y_n^{(2)},Y_n^{(3)}$ являють собою нормовані функції $X_n^{(1)},X_n^{(2)},X_n^{(3)}$, які, своєю чергою, є лінійними комбінаціями тригонометричних функцій (6.4.15). Зі збільшенням власних частот ω_n відповідні хвильові числа k_1 і k_2 також збільшуються, причому ця залежність наближається до лінійної. Коефіцієнти при тригонометричних функціях $X_n^{(m)}(x)$ (а саме, $h_{m,n}$ і $p_{m,n}$) являють собою або константи, або функції, що квадратично залежать від частоти ω. Операція нормування приводить до того, що відповідні коефіцієнти функцій $Y_n^{(1)},Y_n^{(2)},Y_n^{(3)}$ є обмеженими абсолютно інтегрованими функціями від частоти ω.

Відповідно до теореми Рімана про осциляцію маємо

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\neq n}}A_{n,m}=0,\ (A_{n,m}=A_{m,n}),\ \lim_{n\to\infty,}P_n=0,\ \lim_{n\to\infty,}Q_n=0.$$

Унаслідок того, що власні функції є неортогональними, коефіцієнти S_n, R_n , знайдені з системи (6.4.21), залежать від кількості розглянутих членів ряду N . Але зі збільшенням N значення перших членів стабілізуються і при подальшому збільшенні N майже не залежать від N. Розрахунки показують, що коефіцієнти S_n, R_n зменшуються немонотонно, але досить швидко. Для розв'язання інженерних задач достатньо узяти декілька десятків доданків у сумі (6.4.19).

6.5. Мішані поздовжньо-поперечні коливання системи стрижнів. Неоднорідні крайові умови

Розглянемо ту саму конструкцію, яку було розглянуто в підрозд. 6.4 і яка складається з двох стрижнів різної довжини, з'єднаних клейовим прошарком. Але до моделі додаємо ще й врахування поперечних переміщень. Тобто ця конструкція має можливість здійснювати поздовжні й поперечні коливання, причому поперечні й поздовжні переміщення шарів будуть зв'язаними один з одним завдяки наявності з'єднувального клейового шару (рис. 14).

Зазначимо, що модель поперечних коливань балки, розглянута в підрозд. 6.1, не враховує повороту перерізу балки, а враховує лише інерцію елементів балки при поперечних переміщеннях. У цьому підрозділі застосуємо більш точну модель коливань балки, що враховує інерцію перерізу балки до кутового прискорення, яке вочевидь відбувається при поперечних коливаннях.

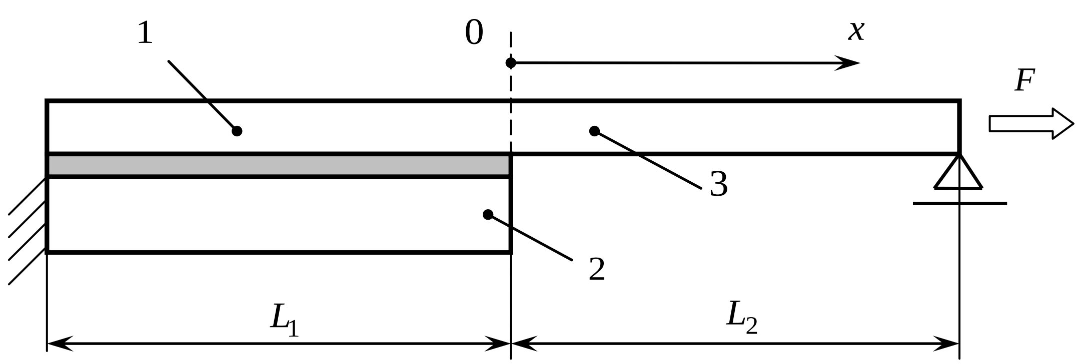

Рис. 14

Клейове з'єднання має довжину L, довжина частини, що виступає за межі з'єднання, – L_1. Ширину шарів вважаємо такою, що дорівнює одиниці, поздовжні переміщення шарів – u_k, а поперечні – w_k. Номера шарів $k=1,2$ в області з'єднання і $k=3$ для ділянки, що виступає за межі з'єднання. Поздовжні й поперечні зусилля в шарах і згинальні моменти позначено відповідно N_k, Q_k, M_k. Конструкція навантажена в початковий момент часу $t=0$ поздовжнім зусиллям $F=const$.

Крайові умови й умови спряження:

$$N_1\big|_{x=-L_1} = Q_1\big|_{x=-L_1} = M_1\big|_{x=-L_1} = N_2\big|_{x=0} = Q_2\big|_{x=0} = M_2\big|_{x=0} = 0;$$

$$u_2\big|_{x=-L_1} = w_2\big|_{x=-L_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x}\bigg|_{x=-L_1} = M_3\big|_{x=L_2} = w_3\big|_{x=L_2} = 0; \qquad (6.5.1)$$

$$u_1\big|_{x=0} = u_3\big|_{x=0};\; w_1\big|_{x=0} = w_3\big|_{x=0};\; \frac{\partial w_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial w_3}{\partial x}\bigg|_{x=0};$$

$$N_1\big|_{x=0} = N_3\big|_{x=0};\; M_1\big|_{x=0} = M_3\big|_{x=0};\; Q_1\big|_{x=0} = Q_3\big|_{x=0};$$

$$N_3\big|_{x=L_1} = F. \qquad (6.5.2)$$

Візьмемо такі початкові умови:

$$u_1\big|_{t=0} = u_2\big|_{t=0} = u_3\big|_{t=0} = 0; \qquad w_1\big|_{t=0} = w_2\big|_{t=0} = w_3\big|_{t=0} = 0;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial u_3}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial w_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial w_2}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial w_3}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \qquad (6.5.3)$$

Розглянемо рівновагу диференціального елемента з’єднання (рис. 15).

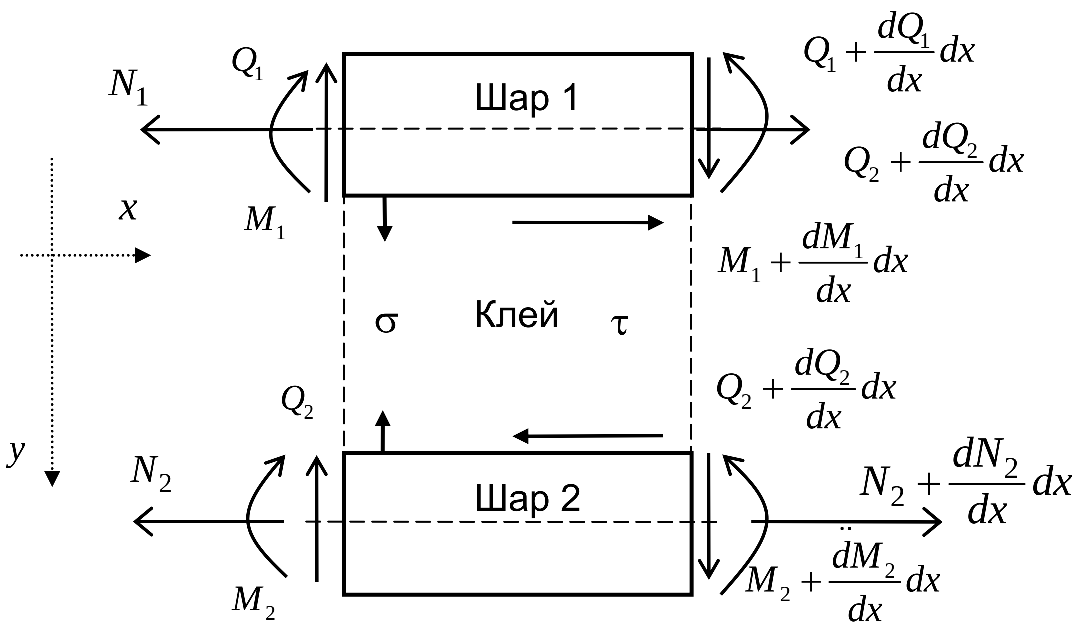

Рис. 15

Рівняння рівноваги елементів шарів мають такий вигляд:

$$\frac{\partial N_k}{\partial x} + (-1)^k \tau = \rho_k \delta_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2},\; \frac{\partial Q_k}{\partial x} + (-1)^k \sigma = \rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2},\; \frac{\partial M_k}{\partial x} - \frac{\delta_k}{2}\tau - Q_k = J_k \frac{\partial^3 w_k}{\partial t^2 \partial x}, \qquad (6.5.4)$$

де τ – дотичні напруження в клейовому шарі; σ – нормальні напруження в клейовому шарі; ρ_k – густина матеріалу відповідного шару; δ_1 і δ_2 –

товщина першого й другого шарів; δ_0 – товщина клейового прошарку; J_k – момент інерції поперечного перерізу однорідного шару, $J_k = \dfrac{\delta_k^3 \rho_k}{12}$.

Масою клейового шару нехтуємо, тому що він має відносно малу товщину, на декілька порядків меншу за товщину зовнішніх шарів.

Співвідношення теорії пружності для балок має вигляд

$$\frac{du_k}{dx} = \frac{N_k}{B_k}, \; D_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} = -M_k, \; k = 1, 2, 3, \tag{6.5.5}$$

де B_k, D_k – відповідно жорсткість шарів на розтяг-стиск та згин, для однорідних шарів $B_k = E_k \delta_k$, $D_k = \delta_k^3 E_k / 12$ (E_k – модуль пружності відповідного шару).

Дотичні й нормальні напруження в клейовому шарі вважаємо рівномірними за товщиною й пропорційними різниці переміщень внутрішніх сторін шарів, що з’єднуються:

$$\tau = \frac{1}{P_c}\left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2}\frac{dw_1}{dx} - \frac{\delta_2}{2}\frac{dw_2}{dx} \right), \; \sigma = K\left(w_2 - w_1 \right). \tag{6.5.6}$$

Тут P_c – піддатливість з’єднувального шару, $P_c = \delta_0 G_0^{-1}$; K – жорсткість з’єднувального шару на відрив, $K = E_0 \left[\delta_0 \left(1 - \mu_0^2 \right) \right]^{-1}$; G_0, E_0 і μ_0 – відповідно модуль зсуву, модуль пружності й коефіцієнт Пуассона клейового шару.

Виключивши силові фактори в рівняннях (6.5.4)–(6.5.6), отримуємо систему рівнянь відносно переміщень шарів у з’єднанні:

$$\mathbf{A}_4^0 \frac{\partial^4 \mathbf{v}}{\partial x^4} + \mathbf{A}_2^0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \mathbf{A}_1^0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{A}_0^0 \mathbf{v} + \mathbf{A}_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \mathbf{A}_2^2 \frac{\partial^4 \mathbf{v}}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \tag{6.5.7}$$

де вектор-функція переміщень має вигляд $\mathbf{v} = \left(w_1 \quad w_2 \quad u_1 \quad u_2 \right)^T$, а матриці коефіцієнтів при похідних від вектора переміщень мають вигляд

$$\mathbf{A}_4^0 = \begin{pmatrix} P_c D_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & P_c D_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \; \mathbf{A}_2^0 = \begin{pmatrix} -s_1^2 & -s_1 s_2 & \cdot & \cdot \\ -s_1 s_2 & -s_2^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & B_1 P_c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & B_2 P_c \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & s_1 & -s_1 \\ \cdot & \cdot & s_2 & -s_2 \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot \\ -s_1 & -s_2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \; \mathbf{A}_0^0 = \begin{pmatrix} KP_c & -KP_c & \cdot & \cdot \\ -KP_c & KP_c & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_0^2 = P_c \begin{pmatrix} r_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -r_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -r_2 \end{pmatrix}; \ \mathbf{A}_2^2 = -P_c \begin{pmatrix} J_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & J_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Тут позначено: $s_k = \dfrac{\delta_k}{2}$, $r_k = \rho_k \delta_k$.

Поперечні й поздовжні переміщення вільного кінця з’єднання, а саме ділянка 3 (див. рис. 14), описуються рівнянням коливання балки (на відміну від (6.2.3), також ураховуємо інерцію перерізу балки до кутового прискорення) і рівнянням поздовжніх коливань стрижня (6.3.1):

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \frac{\rho_3 \delta_3}{B_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \ D_3 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + J_1 \frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial t^2} + \rho_3 \delta_3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} = 0. \qquad (6.5.8)$$

Як бачимо, на цій ділянці поздовжні й поперечні переміщення не зв’язані між собою в рівняннях, але вони зв’язані граничними умовами в точці з’єднання з ділянкою клейового з’єднання. Поздовжні переміщення u_3 у точці $x = 0$ спричиняють дотичні напруження τ у клейовому шарі (6.5.6), які, своєю чергою, впливають на згинальні моменти, що діють на стрижень на ділянці 1, чим зумовлюють відповідні поперечні переміщення стрижня на цій ділянці, які, своєю чергою, спричиняють зміну поперечних переміщень стрижня на зв’язаній з ним ділянці 3. Тим самим поперечні й поздовжні переміщення (6.5.8) є зв’язаними через відповідні крайові умови (6.5.1).

Оскільки крайова умова (6.5.2) є неоднорідною, то для виключення неоднорідності переміщення будемо шукати у вигляді суперпозиції стаціонарних переміщень $U_k(x)$, $W_k(x)$, спричинених зусиллям (6.5.2), і динамічних переміщень з однорідними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= v_k(x,t) + U_k(x); \\ w_k(x,t) &= y_k(x,t) + W_k(x), \end{aligned} \qquad (6.5.9)$$

Завдяки цьому крайова умова (6.5.2) розпадається на дві умови:

$$\left.\frac{dU_3}{dx}\right|_{x=L_2} = \frac{F}{B_3}, \ \left.\frac{\partial v_3}{\partial x}\right|_{x=L_2} = 0. \qquad (6.5.10)$$

Розв’яжемо статичну задачу. Підставивши $U_k(x)$, $W_k(x)$ у систему (6.5.7), отримуємо

$$\mathbf{A}_4^0 \frac{d^4 \mathbf{V}}{dx^4} + \mathbf{A}_2^0 \frac{d^2 \mathbf{V}}{dx^2} + \mathbf{A}_1^0 \frac{d\mathbf{V}}{dx} + \mathbf{A}_0^0 \mathbf{V} = 0, \qquad (6.5.11)$$

де $\mathbf{V} = \left(W_1; \quad W_2; \quad U_1; \quad U_2\right)^T$.

Частинний розв'язок системи (6.5.11) шукаємо у вигляді $\mathbf{V} = C\mathbf{h}\mathrm{e}^{\theta x}$, де C – довільна стала, $\mathbf{h}$ – деякий вектор. Підставивши його у (6.5.11), отримаємо систему лінійних рівнянь відносно компонентів вектора $\mathbf{h}$:

$$\left(\mathbf{A}_4^0\theta^4 + \mathbf{A}_2^0\theta^2 + \mathbf{A}_1^0\theta + \mathbf{A}_0^0\right)\mathbf{h} = 0. \qquad (6.5.12)$$

Система (6.5.12) має нетривіальний розв'язок за умови, що

$$\det \mathbf{A}_s = \det\left(\mathbf{A}_4^0\theta^4 + \mathbf{A}_2^0\theta^2 + \mathbf{A}_1^0\theta + \mathbf{A}_0^0\right) = 0. \qquad (6.5.13)$$

Рівняння (6.5.13) являє собою рівняння 12-го степеня відносно θ (усі степені є парними) з коренем $\theta = 0$ 6-го степеня кратності, тобто після заміни змінної рівняння (6.5.13) можна звести до кубічного рівняння відносно θ^2.

Вектор $\mathbf{h}$ – це нетривіальний розв'язок системи (6.5.12) при відповідних значеннях θ, визначених з рівняння (6.5.13). Ураховуючи сказане вище, розв'язок (6.5.11) запишемо у вигляді

$$\left(W_1; \quad W_2; \quad U_1; \quad U_2\right)^T = \sum_{j=1}^{6} C_j \mathbf{h}_j \mathrm{e}^{\theta_j x} + \sum_{m=0}^{3} x^m \mathbf{H}_m; \qquad (6.5.14)$$

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} C_7 \\ C_7 \\ C_{11} \\ C_{11} - C_8\delta_s - 6C_{10}\delta_s B_s \end{pmatrix}; \ \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} C_8 \\ C_8 \\ C_{12} \\ C_{12} - 2C_9\delta_s \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} C_9 \\ C_9 \\ 3\dfrac{C_{10}\delta_s B_s}{B_1} \\ -3\dfrac{C_{10}\delta_s B_s}{B_2} \end{pmatrix}; \ \mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} C_{10} \\ C_{10} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \delta_s = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}; \ B_s = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2}.$$

Статичні переміщення ділянки 3, тобто частини стрижня, що виходить за межі області з'єднання, знаходимо з (6.5.8), прирівнявши до нуля похідні за часом і розв'язавши відповідні звичайні диференціальні рівняння:

$$U_3 = \frac{F}{B_3}x + C_{13}, \ W_3 = -C_{14}\frac{x^3}{6D_3} - C_{15}\frac{x^2}{2D_3} + C_{16}x + C_{17}. \qquad (6.5.15)$$

Підставивши отримані розв'язки (6.5.14) і (6.5.15) у крайові умови (6.5.1) (умова (6.5.2) виконується автоматично), отримуємо систему з 17 лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $C_1, C_2, ..., C_{17}$.

Далі знаходимо розв'язок задачі про вільні коливання цієї пружної системи. Частинні розв'язки системи (6.5.7) шукаємо у вигляді

$$\left(y_1;\quad y_2;\quad v_1;\quad v_2\right)^T=\left(X^{(1)};\quad X^{(2)};\quad X^{(4)};\quad X^{(5)}\right)^T \mathrm{e}^{i\omega t}=\mathbf{X}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad (6.5.16)$$

де i – уявна одиниця.

Отже, частинний розв'язок (6.5.7) шукаємо у вигляді стійної хвилі, коли всі елементи пружної системи здійснюють коливання з однаковою частотою.

При підстановці (6.5.16) у систему (6.5.17) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\mathbf{A}_4^0\frac{d^4\mathbf{X}}{dx^4}+\left(\mathbf{A}_2^0-\omega^2\mathbf{A}_2^2\right)\frac{d^2\mathbf{X}}{dx^2}+\mathbf{A}_1^0\frac{d\mathbf{X}}{dx}+\left(\mathbf{A}_0^0-\omega^2\mathbf{A}_0^2\right)\mathbf{X}=0. \quad (6.5.17)$$

Розв'язання системи (6.5.17) є цілком аналогічним розв'язанню системи (6.4.8). Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\mathbf{X}=C\,\mathbf{q}\mathrm{e}^{\lambda x}$, де C – довільна стала, $\mathbf{q}$ – невідомий вектор. При підстановці його в (6.5.17) отримаємо систему однорідних лінійних рівнянь відносно компонентів вектора $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{A}_d\mathbf{q}=0, \quad (6.5.18)$$

де

$$\mathbf{A}_d=\lambda^4\mathbf{A}_4^0+\left(\mathbf{A}_2^0\lambda^2-\omega^2\mathbf{A}_2^2\right)\lambda^2+\mathbf{A}_1^0\lambda+\left(\mathbf{A}_0^0-\omega^2\mathbf{A}_0^2\right).$$

Система (6.5.18) має нетривіальний розв'язок, якщо

$$\det\mathbf{A}_d(\lambda)=0. \quad (6.5.19)$$

Рівняння (6.5.19) описує співвідношення між частотою коливань ω і хвильовими числами λ (дисперсійне рівняння). Це співвідношення має вигляд многочлена 12-го степеня відносно λ і 8-го степеня відносно ω, де всі степені є парними. Іншими словами, для деякої частоти ω отримуємо набір з 12 хвильових чисел $\lambda_n(\omega)$, $n=1,2,...,12$. Вектор $\mathbf{q}$ є нетривіальним розв'язком системи лінійних алгебричних рівнянь (6.5.18), який відповідає одному з 12 значень $\lambda_n(\omega)$ при заданій частоті ω. Вектор $\mathbf{q}$ визначається з точністю до довільного множника, тому що дефект матриці $\mathbf{A}_d$ дорівнює одиниці. Таким чином, розв'язок системи (6.5.17), який відповідає частоті ω, має вигляд

$$\mathbf{X}=\sum_{n=1}^{12}C_n\mathbf{q}_n e^{\lambda_n(\omega)x}, \quad (6.5.20)$$

де ω – деяка частота власних коливань, значення яких будуть визначені нижче виходячи з крайових умов.

Розв'язок рівнянь (6.5.8) має вигляд

$$y_3 = X^{(3)}(x)\mathrm{e}^{i\omega t},\ v_3 = X^{(6)}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad (6.5.21)$$

$$X^{(3)}(x) = \sum_{n=13}^{16} C_n e^{\lambda_n x};\ X^{(6)}(x) = \sum_{n=17}^{18} C_n e^{\lambda_n x},$$

$$\lambda_{13,...,16} = \pm\sqrt{-\frac{\omega}{2D_3}\left(J_3\omega \pm \sqrt{(J_3\omega)^2 + 4D_3\rho_3\delta_3}\right)},\ \lambda_{17,18} = \pm i\omega\sqrt{\frac{\rho_3\delta_3}{B_3}}. \qquad (6.5.22)$$

Вирази для зусиль і моментів у стрижнях, що відповідають переміщенням (6.5.16) і (6.5.21) знаходимо за допомогою формул (6.5.4)–(6.5.6).

Для пошуку власних частот коливань необхідно задовольнити крайові умови (6.5.1) і другу умову з (6.5.10). Унаслідок цього отримаємо систему з 18 однорідних рівнянь. Виключивши з рівнянь загальний множник $\mathrm{e}^{i\omega t}$, отримуємо систему однорідних рівнянь, у яку входять функції $X^{(1)}, X^{(2)},..., X^{(6)}$, похідні від них та їх лінійні комбінації. Ця система зводиться до системи однорідних лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $\mathbf{C} = (C_1, C_2,..., C_{18})^T$:

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = 0. \qquad (6.5.23)$$

Система є досить громіздкою, тому її не наводимо. Коефіцієнти матриці $\boldsymbol{B}$ залежать від частоти ω. При цьому залежність є досить складною, тому що в коефіцієнти цієї матриці також входять множники вигляду $\mathrm{e}^{-\lambda_n(\omega)L_1}$, де залежність $\lambda_n(\omega)$ визначається залежністю (6.5.19).

Система (6.5.23) має нетривіальний розв'язок за умови

$$\det \boldsymbol{B}(\omega) = 0. \qquad (6.5.24)$$

Розв'язувати рівняння (6.5.24) доцільно числовими методами, не розкриваючи визначника в явному вигляді, наприклад: з деяким шагом $\Delta\omega$ змінювати значення ω, починаючи від деякого початкового малого значення, і відслідковувати знак визначника $\det\mathbf{B}(\omega)$. Чергова зміна знака визначника свідчить про те, що на інтервалі від попереднього значення частоти ω^* до її поточного значення $\omega^* + \Delta\omega$ існує корінь рівняння (6.5.24). Уточнення значення цього кореня краще проводити за допомогою методу хорд. Знайшовши черговий корінь ω_m, переходимо до частоти $\omega^* + \Delta\omega$ і т. д. доти, доки не знайдемо необхідну кількість власних частот.

Кожній частоті ω_m відповідають 18 хвильових чисел $\lambda_n(\omega_m)$ перші 12 з яких знаходимо з рівняння (6.5.19), а числа $\lambda_{13}(\omega_m),....,\lambda_{18}(\omega_m)$ – із залежностей (6.5.22). А також кожній власній частоті ω_m відповідає вектор $\boldsymbol{C}_m$, який знаходимо з системи (6.5.23) з точністю до довільного множника, тому що дефект матриці $\boldsymbol{B}(\omega_m)$ дорівнює одиниці.

Якщо записати множник $e^{i\omega_m t}$ у тригонометричній формі, то переміщення при вільних коливаннях можна записати в такій формі:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} X_m^{(1)} \\ X_m^{(2)} \\ \dots \\ X_m^{(6)} \end{pmatrix} \left(S_m \sin \omega_m t + R_m \cos \omega_m t \right). \qquad (6.5.25)$$

Тут власні функції визначаються такими залежностями:

$$\left(X_m^{(1)}; \quad X_m^{(2)}; \quad X_m^{(4)}; \quad X_m^{(5)} \right)^T = \sum_{n=1}^{12} c_{n,m}\, \mathbf{q}_{n,m} e^{\lambda_{n,m} x},$$

$$X_m^{(3)} = \sum_{n=13}^{16} c_{n,m}\, e^{\lambda_{n,m} x}; \qquad X_m^{(6)} = \sum_{n=17}^{18} c_{n,m}\, e^{\lambda_{n,m} x},$$

де $X_m^{(k)}$ – власні функції, що відповідають власній частоті коливань ω_m; $\mathbf{q}_{n,m}$ – нетривіальні розв'язки системи (6.5.18), що відповідають кореням $\lambda_{n,m} = \lambda_n(\omega_m)$ дисперсійного співвідношення (6.5.19); $c_{n,m}$ – компонента за номером n вектора $\boldsymbol{C}_m$ нетривіального розв'язку системи (6.5.23), що відповідає власній частоті ω_m; S_n, R_n – довільні коефіцієнти.

Вектор-функції $\mathbf{Y}_m = \left(X_m^{(1)}; \quad X_m^{(2)}; \quad \dots \quad X_m^{(6)} \right)^T$, застосовані в (6.5.25), є неортогональними й ненормованими. Остання обставина спричинена тим, що вектори $\boldsymbol{C}_m$ визначаються з точністю до довільного множника, унаслідок чого кожний вектор $K\boldsymbol{C}_m$, який відрізняється від $\boldsymbol{C}_m$ у K разів, може також бути застосований у (6.5.25) замість вектора $\boldsymbol{C}_m$. Тому функції $X_m^{(k)}$ залежать від способу визначення їх векторів $\boldsymbol{C}_m$ і від значення вільної змінної в системі (6.5.23). Унаслідок цього середні й відповідно максимальні значення функцій $X_m^{(k)}$ для різних власних частот можуть відрізнятися один від одного в десятки разів. Для полегшення аналізу на збіжність загального розв'язку вектор-функції $\mathbf{Y}_m = \left(X_m^{(1)}; \quad X_m^{(2)}; \quad \dots \quad X_m^{(6)} \right)^T$ доцільно нормувати, поділивши їх на відповідні множники, щоб середні значення відповідних функцій $X_m^{(k)}$ для різних власних частот не відрізнялися один від одного. Для цього введемо норму вектор-функцій як суму інтегралів від квадратів власних функцій:

$$\|\mathbf{Y}_m\|^2 = I_m = \int_{-L_1}^{0}\left[\sum_{k=1,2,4,5}\left(X_m^{(k)}(x)\right)^2\right]dx + \int_{0}^{L_2}\left[\sum_{k=3,6}\left(X_m^{(k)}(x)\right)^2\right]dx.$$

Уведемо нормовані вектор-функції

$$\mathbf{Z}_m = \frac{\mathbf{Y}_m}{\|\mathbf{Y}_m\|}, \text{ тобто } Z_m^{(k)} = \frac{X_n^{(k)}}{\sqrt{I_m}}.$$

Таким чином, для всіх частот власних коливань сума інтегралів від квадратів власних функцій $Z_m^{(k)}$ дорівнює одиниці.

Застосувавши в (6.5.25) замість власних функцій $X_m^{(k)}$ аналогічні їм власні функції $Z_m^{(k)}$, що відрізняються від $X_m^{(k)}$ лише відповідним множником, і повернувшись до (6.5.9), можна записати переміщення стрижнів:

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} S_m \mathbf{Z}_m(x)\sin\omega_m t + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \mathbf{Z}_m(x)\cos\omega_m t, \tag{6.5.26}$$

$$\mathbf{v} = \left(w_1;\quad w_2;\quad w_3;\quad u_1;\quad u_2;\quad u_3\right)^T;$$

$$\mathbf{W} = \left(W_1;\quad W_2;\quad W_3;\quad U_1;\quad U_2;\quad U_3\right)^T.$$

Задовольнивши початкові умови (6.4.4), отримуємо рівняння

$$\mathbf{W}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \mathbf{Z}_m(x) = 0; \qquad \sum_{m=1}^{\infty} S_m \omega_m \mathbf{Z}_m(x) = 0.$$

З другого рівняння випливає, що $S_m = 0$. Оскільки вектор-функції $\mathbf{Z}_m(x)$ є неортогональними, для знаходження коефіцієнтів R_m застосуємо метод найменших квадратів. Якщо обмежити тригонометричні ряди в (6.5.26) деяким числом N розглянутих власних частот ω_m, то отримаємо

$$J = \left\|\mathbf{W}(x) + \sum_{m=1}^{N} R_m \mathbf{Z}_m(x)\right\|^2 \to \min,$$

тобто

$$J = \sum_{k=1}^{2}\int_{0}^{-L_1}\left[\left(W_k + \sum_{m=1}^{N} R_m Y_m^{(k)}\right)^2 + \left(U_k + \sum_{m=1}^{N} R_m Y_m^{(3+k)}\right)^2\right]dx +$$

$$+\int_{0}^{L_2}\left[\left(W_3 + \sum_{n=1}^{N} R_n Y_n^{(3)}\right)^2 + \left(U_3 + \sum_{n=1}^{N} R_n Y_n^{(6)}\right)^2\right]dx \to \min.$$

Умова мінімуму $\frac{\partial J}{\partial R_m} = 0$ приводить до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{Q},$$

де $\mathbf{R} = \left(R_1, ..., R_N\right)^T$,

$$A_{s,r} = \int_{-L_1}^{0} \sum_{k=1,2,4,5} Y_s^{(k)} Y_r^{(k)}\, dx + \int_{0}^{L_2} \sum_{k=3,6} Y_s^{(k)} Y_r^{(k)} dx,$$

$$Q_r = -\int_{-L_1}^{0} \sum_{k=1}^{2} \left[W_k Y_r^{(k)} + U_k Y_r^{(k+3)}\right] dx - \int_{0}^{L_2} \left[W_3 Y_r^{(3)} + U_3 Y_r^{(6)}\right] dx.$$

Усі інтеграли можна взяти в аналітичному вигляді. Коефіцієнти, у тому числі завдяки нормуванню, мають такі властивості:

$$A_{s,r} = A_{r,s};\ A_{s,r} < 1; \left(s \neq r\right); A_{s,s} = 1;\ \lim_{\substack{s\to\infty \\ r\neq s}} A_{s,r} = 0;\ \lim_{r\to\infty} Q_r = 0.$$

6.6. Окремі відомості про хвилі

Зміни стану середовища, які поширюються в цьому середовищі й несуть з собою енергію, називають хвилями. Для хвиль будь-якої природи характерним є поширення зі скінченною швидкістю й перенесення енергії без перенесення речовини.

Хвилі можуть мати різну форму. Розрізняють одиночні хвилі (рис. 16, *а*), відомим прикладом яких є солітони в нелінійному середовищі, цуги хвиль або хвильові пакети – збурення, що повторюються (рис. 16, *б*); гармонічні хвилі (рис. 16, *в*) – нескінченні синусоїдальні хвилі.

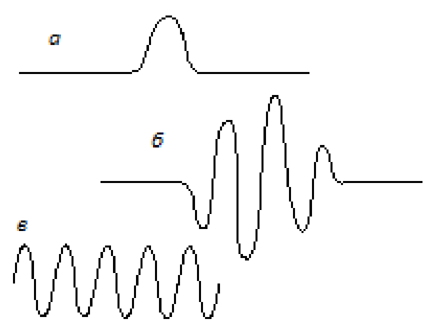

Рис. 16

Рівняння гармонічної хвилі в комплексній формі має вигляд

$$u\left(x,t\right) = A\mathrm{e}^{i\left(\omega t - kt\right)} + A^* \mathrm{e}^{-i\left(\omega t - kt\right)}, \qquad (6.6.1)$$

де $\omega t - kx$ – фаза хвилі.

Гармонічна хвиля є ідеалізованою, її збудження в реальних умовах є проблематичним. Але її важливе значення полягає в тому, що хвилю будь-якої форми можна подати як суму гармонічних хвиль різної частоти (гармонік). У лінійних системах виконується принцип суперпозиції, згідно з яким ефекти, спричинені негармонічними хвилями, можна визначити як суму ефектів, створених окремими гармонічними компонентами негармонічної хвилі.

Для гармонічних хвиль уведено поняття фазової швидкості. Фазовою швидкістю $v_{ф}$ гармонічної хвилі називають швидкість переміщення в просторі точки, у якій фаза хвилі є незмінною: $\Phi = \omega t - kx = const$, тобто $\frac{d\Phi}{dt} = \omega - k\frac{dx}{dt} = 0$. Відповідно

$$v_{ф} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{6.6.2}$$

Залежність фазової швидкості від довжини хвилі (хвильового числа або частоти) має назву **дисперсії хвилі.** Якщо в системі є дисперсія, то частота ω є нелінійною функцією хвильового числа k, і навпаки.

Більш загальним випадком, ніж монохроматична гармонічна хвиля, є набір різних гармонічних хвиль, що має назву **хвильового пакета**. Найпростішим прикладом є пакет, що складається з двох гармонічних хвиль з близькими частотами ω_1 і ω_2 і однаковими амплітудами, який описує так звані биття:

$$u(x,t) = a\cos(\omega_1 t - k_1 x) + a\cos(\omega_2 t - k_2 x) \approx 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega_0 t - k_0 x), \tag{6.6.3}$$

де $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$ – середні значення частоти й хвильового числа; $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $\Delta k = k_1 - k_2$ – різниця частот і хвильових чисел.

Хвиля (6.6.3) – модульована за амплітудою, і її обгортка поширюється зі швидкістю, відмінною від фазової швидкості $v_{ф} = \frac{\omega_0}{k_0}$. Ліміт значення швидкості поширення обгортки при $\Delta\omega, \Delta k \to 0$ характеризує рух групи хвиль (хвильового пакета) і має назву **групової швидкості**

$$v_{гр} = \lim_{\Delta\omega, \Delta k \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Групова й фазова швидкості зв’язані між собою співвідношенням Релея

$$v_{гр} = v_{ф} + k\frac{dv_{ф}}{dk}. \tag{6.6.4}$$

Дисперсію хвилі називають **нормальною**, якщо $v_{гр} < v_ф$, і **аномальною**, якщо $v_{гр} > v_ф$. Із співвідношення (6.6.4) випливає, що при нормальній дисперсії $\frac{dv_ф}{dk} < 0$, а при аномальній $\frac{dv_ф}{dk} > 0$.

Оскільки в системі з дисперсією фазові швидкості гармонічних складових є різними, фазові співвідношення між ними будуть змінюватися, унаслідок чого буде змінюватися форма обгортки хвильового пакета. Виявляється, що зміну обгортки модульованої хвилі можна розглядати як деякий хвильовий процес – **хвилю обгортки**, для якої також можна записати рівняння руху.

Розглянемо простий приклад – хвилі у струні, розташованій у пружному середовищі. Рівняння коливань такої струни має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h}{\rho} u = 0,$$

де h – коефіцієнт, який характеризує жорсткість середовища; ρ – лінійна густина матеріалу струни.

Частота й хвильові числа зв'язані співвідношенням

$$\omega = \pm\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2},$$

де $\omega_0^2 = \frac{h}{\rho}$ – критична частота, при перевищенні якої коливання струни мають хвильовий характер.

Поперечні хвилі у струні в пружному середовищі мають дисперсію. Їх фазова швидкість визначається формулою

$$v_ф = \pm\frac{1}{k}\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2},$$

а групова швидкість –

$$v_{гр} = \frac{c^2 k}{\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2}}.$$

Легко бачити, що $c = \sqrt{N/\rho}$ (де N – розтяжне зусилля в струні) являє собою максимально можливе значення швидкості поперечних хвиль, якого швидкість набуває при $\omega \to \infty$.

Згідно з означенням величина і знак фазової швидкості визначаються тангенсом кута нахилу відрізка, проведеного з початку координат до дисперсійної кривої, а величина і знак групової швидкості – тангенсом кута нахилу дотичної (рис. 17), $v_ф = \tan\alpha$, $v_{гр} = \tan\beta$, $c = \tan\gamma$.

Дисперсія хвиль зазвичай пов'язана або з наявністю часового запізнювання в реакції середовища на хвильове збурення (часова дисперсія) або з впливом на певну точку простору сусідніх точок (просторова дисперсія). У ряді випадків, однак, неможливо провести однозначний поділ на просторову і часову дисперсії. Конкретний фізичний механізм, що приводить до появи дисперсії, залежить від конкретної ситуації.

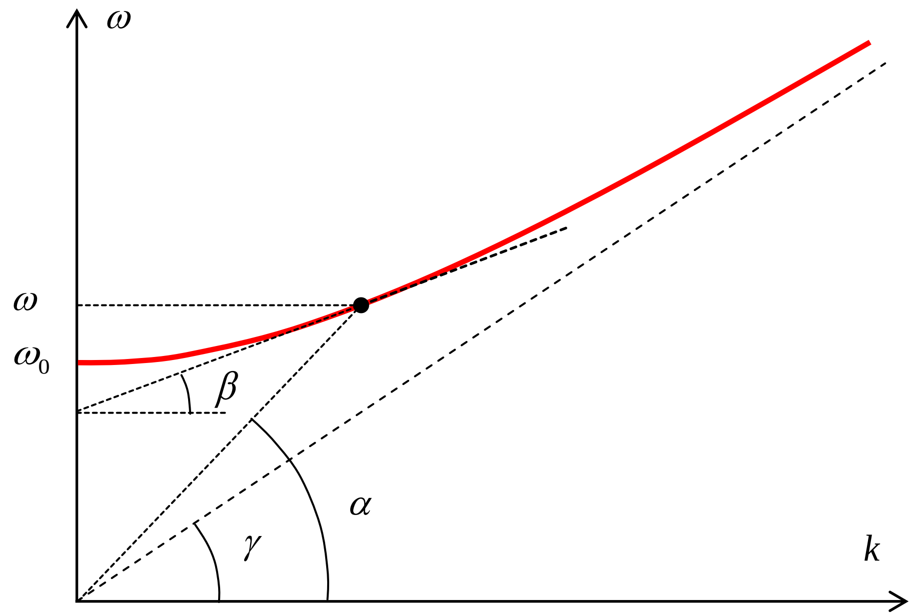

Рис. 17

Прикладом хвиль, що мають дисперсію, можуть бути хвилі на поверхні рідини. Для досить довгих хвиль, які мають назву гравітаційних, дисперсійне рівняння має вигляд

$$\omega^2 = gk \, ,$$

де g - прискорення вільного падіння.

Для коротких хвиль, які називаються капілярними, дисперсійне співвідношення має вигляд

$$\omega^2 = \sigma k^3 / \rho \, ,$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу, ρ - густина рідини.

У дисипативних (поглинальних) середовищах групова швидкість зменшується зі збільшенням частоти в разі нормальної дисперсії фазової швидкості. Якщо дисперсійні властивості середовища э такими, що хвильовий пакет поширюється без істотних змін форми обвідної, то групова швидкість зазвичай може бути інтерпретована як швидкість перенесення енергії хвилі і швидкість, з якою можуть бути передані за допомогою хвильового пакета сигнали, що несуть інформацію (тобто швидкість поширення причинності).

Додаток 1

ІНТЕГРАЛИ ЕЙЛЕРА

Гамма-функція

Інтеграл

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x>0) \tag{Д.1.1}$$

називають гамма-функцією або інтегралом Ейлера другого роду. Цей інтеграл є невласним, оскільки верхня межа є нескінченною і, крім того, при $x-1<0$ $(x<1)$ підінтегральна функція є необмеженою в околі точки $t=0$.

Інтеграл (Д.1.1) збігається при $x>0$. Дійсно, $\Gamma(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$ і оскільки при $0<t\le 1$ маємо $t^{x-1}e^{-t}\le t^{x-1}$, $\int_0^1 t^{x-1}dt=\left.\frac{t^x}{x}\right|_{t=0}^{t=1}=\frac{1}{x}$ $(x>0)$, тобто при $x>0$ інтеграл $\int_0^1 t^{x-1}dt$ збігається, то за першою ознакою порівняння збігається і $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ (при $x>0$).

Для доведення збіжності $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ припустимо, що $t^{x-1}e^{-t}=g(x,t)t^{-1}e^{-\frac{t}{2}}$, де $g(x,t)=t^x e^{-\frac{t}{2}}$. Тоді $g_t'(x,t)=t^{x-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}$, $g_t'(x,t)=0$ при $t=2x$ (точка максимуму), $\max g(x,t)=(2x)^x e^{-x}$, $g(x,t)\le(2x)^x e^{-x}$, $t^{x-1}e^{-t}\le(2x)^x e^{-x}t^{-1}e^{-\frac{t}{2}}\le(2x)^x e^{-x}e^{-\frac{t}{2}}$ при $t\ge 1$ і будь-якому фіксованому $x>0$. Отже, $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\le(2x)^x e^{-x}\int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt=(2x)^x e^{-x}\left.\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\right|_1^\infty=2e^{-\frac{1}{2}}(2x)^x e^{-x}$, тобто $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ збігається при будь-якому $x>0$.

Розглянемо $\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt$ і проведемо інтегрування частинами:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt=\begin{vmatrix} u=t^x & du=xt^{x-1}dt \\ dv=e^{-t}dt & v=-e^{-t}\end{vmatrix}=-t^x e^{-t}\Big|_0^\infty+x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=-t^x e^{-t}\Big|_0^\infty+$$

$+x\Gamma(x) \quad (x>0)$.

Оскільки $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$ при $x>0$, то

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x>0). \qquad \text{(Д.1.2)}$$

Рівність (Д.1.2) виражає основну властивість гамма-функції.

При $x = n \in \mathbb{N}$ унаслідок (Д.1.2) і рівності $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty =$ $= -\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} + e^0 = 1$ отримуємо $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) =$ $n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = ... = n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot\Gamma(1) = n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$, тобто

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad (n\in\mathbb{N}). \qquad \text{(Д.1.3)}$$

Формула (Д.1.3) показує, що гамма-функція $\Gamma(x)$ є прямим узагальненням факторіала.

Оскільки в інтегралі (Д.1.1) підінтегральна функція $t^{x-1}e^{-t} > 0$, то

$$\Gamma(x) > 0 \quad (x>0). \qquad \text{(Д.1.4)}$$

Крім того,

$$\lim_{x\to+0}\Gamma(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\Gamma(x) = +\infty. \qquad \text{(Д.1.5)}$$

Дійсно, на основі (Д.1.2) $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, тоді $\lim\limits_{x\to+0}\Gamma(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\Gamma(x+1)}{x} =$ $= \Gamma(1)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x} = +\infty$. Далі $\Gamma(x) = \int\limits_0^2 t^{x-1}e^{-t}dt + \int\limits_2^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int\limits_2^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \ge \int\limits_2^\infty 2^{x-1}e^{-t}dt =$ $= 2^{x-1}\int\limits_2^\infty e^{-t}dt = e^{-2}\cdot 2^{x-1}$, тобто $\int\limits_2^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \ge e^{-2}\cdot 2^{x-1}$. Оскільки $2^{x-1}\to+\infty$, то $\int\limits_2^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \to +\infty$ при $x\to+\infty$. Але тоді і $\Gamma(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$.

Гамма-функцію можна визначити і при від'ємних значеннях x на основі (Д.1.2):

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad (x<0). \qquad \text{(Д.1.6)}$$

Якщо $-1<x<0$, то $0<x+1<1$, тому $\Gamma(x+1)$, а разом із нею й права частина (Д.1.6) має сенс. При цьому $\Gamma(x)<0$, оскільки $\Gamma(x+1)>0 \quad (x+1>0),\ \ x<0$.

Продовжуючи аналогічні міркування, переконуємося в тому, що гамма-функція є визначеною для всіх від'ємних значень x, крім $x=-n \ \ (n=1,2,...)$, причому

$$\lim_{x\to -n}\left|\Gamma(x)\right| = +\infty. \qquad (Д.1.7)$$

Для напівцілих значень $x\left(x = n+\frac{1}{2},\ n = 0,1,2,...\right)$ можна отримати точні значення $\Gamma(x)$. Дійсно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \left|t = u^2\right| = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-u^2}du.$$

Як відомо, $\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$ (інтеграл Пуассона). Отже,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \qquad (Д.1.8)$$

Використовуючи тепер формулу (Д.1.2), маємо $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, тобто

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad (Д.1.9)$$

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, тобто

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4};\ ...\ ;\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (n = 1,2,...). \qquad (Д.1.10)$$

Далі на основі формули (Д.1.6) маємо

$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{4\sqrt{\pi}}{3}$ і взагалі

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}\sqrt{\pi} \quad (n = 1,2,...). \qquad (Д.1.11)$$

Бета-функція

Інтеграл

$$B(x,y) = \int_0^1 \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1}d\tau \quad (x>0,\ y>0) \qquad (Д.1.12)$$

називають бета-функцією або інтегралом Ейлера першого роду. Підінтегральна функція є необмеженою в околі точки $\tau = 0$ при $x<1$ і в околі точки $\tau = 1$ при $y<1$. На основі ознаки порівняння з еталонними інтегралами $\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\alpha}$ (збігається при $\alpha<1$), $\int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^\beta}$ (збігається при $\beta<1$) робимо висновок, що інтеграл (Д.1.12) збігається при $x>0,\ y>0$.

Бета-функція і гамма-функція зв'язані рівністю

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x>0,\ y>0). \tag{Д.1.13}$$

Доведення. Розглянемо функцію $\beta(t)=\int_0^t \tau^{x-1}(t-\tau)^{y-1}d\tau$ (x, y – параметри). Очевидно, що $\beta(1)=B(x,y)$. Функція $\beta(t)$ є згорткою $t^{x-1}*t^{y-1}$ функцій $f(t)=t^{x-1}$ і $\varphi(t)=t^{y-1}$. За теоремою Бореля зображення згортки $f*\varphi=\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$ функцій оригіналів $f(t)$ і $\varphi(t)$ – це добуток їх зображень $F(p)$ і $\Phi(p)$: $\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \div F(p)\Phi(p)$; $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$, $\Phi(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt$. Зображення цих функцій $f(t)=t^{x-1}$, $\varphi(t)=t^{y-1}$ відповідно дорівнюють $F(p)=\frac{\Gamma(x)}{p^x}$, $\Phi(p)=\frac{\Gamma(y)}{p^y}$. Дійсно, $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}t^{x-1}dt=\left|t=\frac{\xi}{p}\right|=\frac{1}{p^x}\int_0^\infty \xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi=\frac{\Gamma(x)}{p^x}$. Аналогічно знаходиться $\Phi(p)$. Тому $\beta(t)=\int_0^t \tau^{x-1}(t-\tau)^{y-1}d\tau \div \frac{\Gamma(x)}{p^x}\cdot\frac{\Gamma(y)}{p^y}$ або $\beta(t)\div\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\cdot\frac{\Gamma(x+y)}{p^{x+y}}$. Оскільки $\frac{\Gamma(x)}{p^x}\div t^{x-1}$, то $\frac{\Gamma(x+y)}{p^{x+y}}\div t^{x+y-1}$. Отже, оригінал (згортка) $\beta(t)$ дорівнює $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}t^{x+y-1}$. Звідси $\beta(1)=B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, що й потрібно було довести.

Додаток 2

РІВНЯННЯ БЕССЕЛЯ ТА ЙОГО РОЗВ'ЯЗКИ

При розв'язанні багатьох задач математичної фізики (зокрема, задач про коливання круглої мембрани або задачі теплопровідності для півпростору, шару, циліндра) приходимо до звичайного диференціального рівняння $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$ або $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \quad (n = 0,1,2,...)$.

Розглянемо більш загальне рівняння

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \tag{Д.2.1}$$

(рівняння Бесселя порядку ν), де ν – довільне дійсне число.

Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x^\beta \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...\right) \quad \left(a_0 \neq 0\right). \tag{Д.2.2}$$

Звідси $y' = \beta x^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$,

$$y'' = \beta(\beta-1) x^{\beta-2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + 2\beta x^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2},$$

$$x^2 y'' = \beta(\beta-1) x^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + 2\beta x^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k} + x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k},$$

$$xy' = \beta x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k, \quad x^2 y = x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = x^\beta \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k.$$

Підставляючи отримані результати в рівняння (Д.2.1), отримуємо

$$\left[\beta(\beta-1) + \beta - \nu^2\right] a_0 + \left[\beta(\beta-1) + 2\beta + \beta + 1 - \nu^2\right] a_1 x +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left(\left[\beta(\beta-1) + 2\beta k + k(k-1) + \beta + k - \nu^2\right] a_k + a_{k-2}\right) x^k = 0 \text{ або}$$

$$\left(\beta^2 - \nu^2\right) a_0 + \left[(\beta+1)^2 - \nu^2\right] a_1 x + \left\{\left[(\beta+2)^2 - \nu^2\right] a_2 + a_0\right\} x^2 +$$

$$+ \left\{\left[(\beta+3)^2 - \nu^2\right] a_3 + a_1\right\} x^3 + ... + \left\{\left[(\beta+k)^2 - \nu^2\right] a_k + a_{k-2}\right\} x^k + ... = 0.$$

Оскільки система функцій $\left\{x_k\right\}_0^\infty$ є лінійно незалежною на будь-якому проміжку, то ця рівність можлива тільки в тому випадку, коли всі коефіцієнти при степенях x^k дорівнюють нулю:

$$\left(\beta^2 - \nu^2\right) a_0 = 0, \quad \left[(\beta+1)^2 - \nu^2\right] a_1 = 0, \quad \left[(\beta+2)^2 - \nu^2\right] a_2 + a_0 = 0, ..., \tag{Д.2.3}$$
$$\left[(\beta+k)^2 - \nu^2\right] a_k + a_{k-2} = 0, ...$$

Із першої рівності маємо $\beta = \pm\nu$ $(a_0 \neq 0)$.

Розглянемо випадок $\beta = \nu \geq 0$. Тоді друга рівність має вигляд $(2\nu+1)a_1 = 0$, звідки $a_1 = 0$. Далі при $k = 2,3,...$ отримуємо рекурентну формулу для знаходження a_k через a_{k-2}:

$a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{(\beta+k)^2 - \nu^2}$ або $a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}$ $(k = 2,3,...)$, оскільки $\beta = \nu$. Звідси

$a_3 = -\dfrac{a_1}{3(3+2\nu)} = 0$ і взагалі $a_{2m+1} = 0$ $(m = 0,1,2,...)$.

При $k = 2m$ $(m = 1,2,...)$ отримуємо із (Д.2.3)

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m+\nu)}. \qquad \text{(Д.2.4)}$$

Послідовне застосування формули (Д.2.4) дає змогу виразити a_{2m} через a_0:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!(1+\nu)(2+\nu)...(m-1+\nu)(m+\nu)} \quad (m = 1, 2, ...). \qquad \text{(Д.2.5)}$$

Дійсно, із рівності (Д.2.4) послідовно отримуємо

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 1!(1+\nu)},\ a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(2+\nu)} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 1!2(1+\nu)(2+\nu)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(1+\nu)(2+\nu)},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(3+\nu)} = -\frac{a_0}{2^4 \cdot 2^2 \cdot 2!3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 3!(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$ і т. д.

Коефіцієнт a_0 досі був довільним. Покладемо

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \text{ } (\Gamma(z) \text{ – гамма-функція}). \qquad \text{(Д.2.6)}$$

За основною властивістю гамма-функції $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ маємо

$$\Gamma(m+\nu+1) = (m+\nu)\Gamma(m+\nu) = (m+\nu)(m-1+\nu)\Gamma(m-1+\nu) = ...$$

$$... = (m+\nu)(m-1+\nu)(m-2+\nu)...(2+\nu)(1+\nu)\Gamma(1+\nu), \quad \Gamma(m+1) = m!$$

Звідси і з рівностей (Д.2.5), (Д.2.6) випливає, що

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)(m+\nu)(m-1+\nu)(m-2+\nu)...(2+\nu)(1+\nu)\Gamma(\nu+1)},$$ тобто

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \quad (m = 0,1,2,...). \qquad \text{(Д.2.7)}$$

Отже, при $\beta = \nu \geq 0$ з урахуванням (Д.2.2) і (Д.2.7) і рівностей $a_k = 0$ при $k = 2m+1$ розв'язок рівняння Бесселя (Д.2.1) отримуємо у вигляді ряду

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}\quad(\nu\ge 0). \qquad (Д.2.8)$$

Розв'язок (Д.2.8) рівняння (Д.2.1) називається функцією Бесселя порядку ν $(\nu\ge 0)$. Використовуючи ознаку Даламбера, легко переконатися, що ряд (Д.2.8) збігається для всіх $x\ge 0$, причому рівномірно на будь-якому відрізку $[0,a)$. Отже, функція $J_\nu(x)$ є неперервною на проміжку $[0,\infty)$.

При $\beta=-\nu$ $(\nu>0)$, ν – неціле число, покладемо

$$a_0=\frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)} \qquad (Д.2.9)$$

(при $\nu=n\in\mathbb{N}$ визначення (Д.2.9) не має сенсу). Другий розв'язок рівняння Бесселя (Д.2.1) отримуємо у вигляді ряду

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}\quad(\nu>0\text{ – неціле число}). \qquad (Д.2.10)$$

Цей розв'язок називають функцією Бесселя порядку $-\nu$.

Ряд (Д.2.10) збігається для всіх $x>0$.

Очевидно, що

$$J_\nu(x)=x^\nu P_\nu(x)\ (\nu\ge 0),\ P_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^\nu\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

$$J_{-\nu}(x)=x^{-\nu}P_{-\nu}(x)\ (\nu>0),\ P_{-\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{-\nu}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \qquad (Д.2.11)$$

$$P_\nu(0)=\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)},\quad P_{-\nu}(0)=\frac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(-\nu+1)}.$$

Якщо $\nu>0$ – неціле число, то функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ є лінійно незалежними, оскільки $J_\nu(x)\sim x^\nu P_\nu(0)$ $(x\to 0)$, тобто є обмеженою в околі точки $x=0$, а $J_{-\nu}(x)\sim x^{-\nu}P_{-\nu}(0)$ $(x\to 0)$, тобто є необмеженою в околі цієї точки. Тому для нецілих значень $\nu>0$ загальний розв'язок рівняння Бесселя (Д.2.1) має вигляд $y_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$ $(C_1, C_2$ – довільні сталі).

Розглянемо випадок $\nu=n\in\mathbb{N}$ і визначимо $J_{-n}(x)$ як $J_{-n}(x)=\lim\limits_{\nu\to n}J_{-\nu}(x)$. Оскільки $\lim\limits_{\nu\to n}\Gamma(m-\nu+1)=\infty$ при $m=0,1,2,...,n-1$ і, отже, $\lim\limits_{\nu\to n}\frac{1}{\Gamma(m-\nu+1)}=0$

при $m=0,1,2,...,n-1$, то $J_{-n}(x)=\lim_{\nu\to n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}=$

$=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$.

В останній сумі зробимо заміну змінної додавання $m=s+n$. Тоді

$J_{-n}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(-1)^n}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\,\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$, тобто

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \quad (n=1,2,...). \tag{Д.2.12}$$

Рівність (Д.2.12) означає, що для $\nu=n\in\mathbb{N}$ функції Бесселя (Д.2.8), (Д.2.10), тобто функції $J_n(x)$ і $J_{-n}(x)$, є лінійно залежними, отже, з їх допомогою неможливо отримати загальний розв'язок рівняння (Д.2.1).

Щоб отримати для $\nu=n\in\mathbb{N}$ розв'язок рівняння (Д.2.1), що лінійно не залежить від $J_n(x)$, уведемо до розгляду функцію Неймана

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{Д.2.13}$$

Очевидно, що (Д.2.13) є розв'язком рівняння (Д.2.1) як лінійна комбінація $y_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$ при $C_1=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}$, $C_2=-\frac{1}{\sin\nu\pi}$.

Підстановка в формулу (Д.2.13) замість ν значень $n=1,2,...$ дає невизначеність $\frac{0}{0}$, оскільки $\sin\pi n=0$, $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$, $\cos\pi n=(-1)^n$. Для таких значень ν $(\nu=n)$ функція Неймана $N_n(x)$ визначається як границя:

$$N_n(x)=\lim_{\nu\to n}N_\nu(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{Д.2.14}$$

Можна довести, що функції $J_\nu(x)$ і $N_\nu(x)$ є лінійно незалежними при будь-яких ν. Отже, загальний розв'язок рівняння Бесселя (Д.2.1) при $\nu=n=1,2,...$ можна записати у вигляді

$$y_n(x)=C_1J_n(x)+C_2N_n(x). \tag{Д.2.15}$$

Формули (Д.2.14), (Д.2.15) можна застосовувати і при $n=0$. Розкриваючи невизначеність (Д.2.14) за правилом Лопіталя, отримуємо

$$N_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}-(-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right] \quad (n=0,1,2,...).$$

Можна довести, що $N_\nu(x) \sim \dfrac{A}{x^\nu}\ (x \to 0)$, якщо $\nu > 0$ $N_0(x) \sim A \ln x\ (x \to 0)$, $A - const$, тобто функція Неймана $N_\nu(x)$ з індексом $\nu \ge 0$ є необмеженою при $(x \to 0)$. Якщо шукається обмежений розв'язок рівняння Бесселя, то $y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x)$, зокрема, $y_n(x) = C_1 J_n(x)\ \ (n = 0,1,2,...)$.

При $\nu = n + \dfrac{1}{2}$ (n – ціле число) функції $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ виражаються в елементарних функціях. Знайдемо, наприклад, вираз для функцій

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}},\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\frac{1}{2}}. \quad \text{(Д.2.16)}$$

Використовуючи основну властивість Γ-функції $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, маємо

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) = \Gamma\left(m + \frac{1}{2} + 1\right) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m - \frac{1}{2} + 1\right) =$$
$$= \left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) = ... = \frac{(2m+1)(2m-1)\cdot ... \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^{m+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) = \Gamma\left(m - \frac{1}{2} + 1\right) = \left(m - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) = ... = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdot ... \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Оскільки $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, то формули (Д.2.16) набувають вигляду

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1},\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}.$$

Тут суми (ряди) являють собою розвинення $\sin x$ і $\cos x$ відповідно. Таким чином, $J_{\frac{1}{2}}(x)$ і $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ визначаються формулами

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,\ J_{\frac{1}{2}}(x) \sim \sqrt{\frac{2x}{\pi}},\ J_{-\frac{1}{2}}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \ (x \to 0). \quad \text{(Д.2.17)}$$

З огляду на (Д.2.13) через елементарні функції виражається й функція Неймана $N_{n+\frac{1}{2}}(x)$, наприклад: $N_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

Асимптотика при $x \to \infty$ (поведінка при $x \to \infty$) функцій $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$ задається формулами

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\qquad (x\to\infty),$$
$$J_{-\nu}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x+\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\qquad (x\to\infty). \tag{Д.2.18}$$

Рекурентні формули для функцій Бесселя першого роду

Правильними є такі співвідношення:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{Д.2.19}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]=x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{Д.2.20}$$

Ці формули можна перевірити безпосереднім диференціюванням ряду (Д.2.8) для функції Бесселя $J_\nu(x)$. Доведемо, наприклад, правильність формули (Д.2.19):

$$x^\nu\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]=x^\nu\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2^\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]=\left|\Gamma(m+1)=m!\right|=$$

$$=x^\nu\frac{1}{2^\nu}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}\cdot 2m\cdot\frac{1}{2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+(\nu-1)}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+(\nu-1)}=\left|k=m-1\quad \text{или}\quad m=k+1\right|=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu+1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu+1)}=-J_{\nu+1}(x).$$ Звідси й випливає (Д.2.19).

Опишемо випадки, що часто застосовуються. При $\nu=0$ з (Д.2.19) випливає, що

$$J_0'(x)=-J_1(x). \tag{Д.2.21}$$

У випадку $\nu=1$ формула (Д.2.20) набуває вигляду

$$[xJ_1(x)]'=xJ_0(x)\ \text{або}\ xJ_1(x)=\int_0^x \xi J_0(\xi)d\xi. \tag{Д.2.22}$$

Визначимо рекурентні формули, що зв'язують $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ і $J_{\nu-1}(x)$.

Диференціюючи (Д.2.19) і (Д.2.20), отримуємо

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x), \quad \frac{\nu J_\nu(x)}{x} + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x).$$

Додаючи й віднімаючи ці рівності, отримуємо рекурентні формули

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \tag{Д.2.23}$$

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J'_\nu(x). \tag{Д.2.24}$$

За допомогою формули (Д.2.23) можна обчислювати $J_{\nu+1}(x)$, якщо $J_\nu(x)$ і $J_{\nu-1}(x)$ є відомими:

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x} J_\nu(x). \tag{Д.2.25}$$

Нулі функції Бесселя $J_\nu(x)$

1. Функція $J_\nu(x)$ $(\nu \in \mathbb{R},\ 0 \le x < \infty)$ має нескінченну множину нулів.

2. Усі нулі функції $J_\nu(x)$ є простими, крім, можливо, $x = 0$.

Припустимо, що $x_0 \ne 0$ – нуль кратністю n $(n = 2, 3, \ldots)$ розв'язку $y_\nu(x) = J_\nu(x) \ne 0$ рівняння Бесселя (Д.2.1). Тоді $y_\nu(x_0) = 0,\ y'_\nu(x_0) = 0$ $(n \ge 2)$. Оскільки задача Коші для лінійного диференціального рівняння має єдиний розв'язок, то для початкових умов $y_\nu(x_0) = y'_\nu(x_0) = 0$ цей розв'язок має вигляд $y_\nu(x) \equiv 0$, що неможливо, оскільки $y_\nu(x) = J_\nu(x) \ne 0$.

3. Усі нулі функції Бесселя $J_\nu(x)$ при $\nu \ge 0$ є ізольованими.

На основі п. **1–3** корені рівняння $J_\nu(x) = 0$ можна перенумерувати в порядку їх збільшення натуральними числами:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} < \ldots$$

4. Нулі функцій $J_\nu(x)$, $J'_\nu(x)$ і $\varphi(x) = xJ'_\nu(x) + hJ_\nu(x)$ $(h = const)$ додатного порядку ν збільшуються зі збільшенням ν.

5. Функції $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ не мають спільних нулів, крім, можливо, $x = 0$.

6. Нулі функцій $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ розділяють один одного.

Ортогональність функцій Бесселя

1. Функції Бесселя $J_\nu(x)$ мають властивість ортогональності з вагою $\rho(x)=x$. Точніше, при будь-якому $\nu>-1$

$$\int_x^1 xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)dx=0 \quad (\alpha\neq\beta), \tag{Д.2.26}$$

якщо числа α, β – корені одного із трьох рівнянь

$$J_\nu(\mu)=0,\quad J'_\nu(\mu)=0,\quad \mu J'_\nu(\mu)+hJ_\nu(\mu)=0. \tag{Д.2.27}$$

2. Якщо α – корінь одного із рівнянь (Д.2.27), то

$$\|J_\nu(\alpha x)\|=\int_x^1 xJ_\nu^{\,2}(\alpha x)dx=\frac{1}{2}\left\{\left[J'_\nu(\alpha)\right]^2+\left(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)J_\nu^{\,2}(\alpha)\right\}. \tag{Д.2.28}$$

Інтегральні зображення

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\theta-x\sin\theta)d\theta \quad (n=0,1,2,...), \tag{Д.2.29}$$

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)d\theta. \tag{Д.2.30}$$

Додаток 3

ПОЛІНОМИ ЛЕЖАНДРА

1. Функція комплексної змінної t

$$\omega(x,t)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (-1\le x\le 1) \tag{Д.3.1}$$

є однозначною й аналітичною за t в околі точки $t=0$. Тому її можна розвинути в степеневий ряд за степенями t:

$$\omega(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n . \tag{Д.3.2}$$

Відомо (теорема Тейлора), що якщо функція $f(z)$ комплексної змінної z є однозначною й аналітичною в деякій області D, $z_0\in D$ і r – відстань від точки z_0 до межі області D, то в колі $|z-z_0|<r$ її можна розвинути в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n ,$$

де $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(L)}\dfrac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$, а L – деякій замкнений контур, усередині якого знаходиться точка z_0. Зокрема,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(L)}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi^{n+1}}, \quad (z_0=0).$$

Отже,

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\omega}{\partial t^n}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(L)}\frac{\omega(x,\xi)d\xi}{\xi^{n+1}}, \tag{Д.3.3}$$

де L – деякій замкнений контур, усередині якого знаходиться точка ξ=0. Уважаючи, що $\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}=1-\xi z$, знаходимо $\xi=\dfrac{2(z-x)}{z^2-1}$, $d\xi=\dfrac{2(1-\xi z)}{z^2-1}dz$, $\omega(x,\xi)d\xi=\dfrac{2dz}{z^2-1}$. Тоді формула (Д.3.3) набуває вигляду

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint\limits_{(L_1)}\frac{\left(z^2-1\right)dz}{(z-x)^{n+1}}, \tag{Д.3.4}$$

де L_1 – деякий контур, усередині якого знаходиться точка $z=x$.

Відомо (інтегральна формула Коші), що якщо функція $f(z)$ є однозначною й аналітичною в деякій області D, а L – будь-який замкнений контур в області D, то для будь-якої точки $z_0 \in D$ правильною є формула $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(L)}\frac{f(z)dz}{z-z_0}$. Отже, $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(L_1)}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}dz=(x^2-1)^n \quad (z_0=x)$,

$\frac{1}{2\pi i}\frac{d^n}{dx^n}\oint\limits_{(L_1)}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}dz=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{(L_1)}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz=\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ або

$\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint\limits_{(L_1)}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$. Тепер на основі (Д.3.4)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] \quad (-1\le x\le 1). \tag{Д.3.5}$$

З формули (Д.3.5) безпосередньо випливає, що $P_n(x)$ – поліном ступеня n, який називають поліномом Лежандра n-го порядку. При цьому функцію (Д.3.1) називають твірною функцією поліномів Лежандра, а формулу (Д.3.5) – формулою Родріга.

Уважаючи, що $x=\pm 1$ у (Д.3.1) і (Д.3.2), маємо $\frac{1}{1-t}=1+t+$ $+t^2+...+t^n+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n$ або $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n \quad (|t|<1)$, $\frac{1}{1-t}=1-t+$ $+t^2+...+(-1)^n t^n+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(-1)t^n$, або $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(-1)t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \quad (|t|<1)$, звідки $P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n \quad (n=0,1,2,...)$.

За формулою (Д.3.1) $\omega(-x,-t)=\omega(x,t)$, тобто $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(-x)(-1)^n t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$. Отже,

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x) \quad (-1\le x\le 1). \tag{Д.3.6}$$

Із формули (Д.3.6) випливає, що $P_{2k}(x)$ – парна функція, а $P_{2k+1}(x)$ – непарна. Наприклад, $P_0(x)\equiv 1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\ P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$, $P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$.

2. Отримуємо диференціальне рівняння, розв’язком якого є $P_n(x)$. Для цього розглянемо функцію $w(x)=\left(x^2-1\right)^n$. Тоді за формулою (Д.3.5)

$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}w^{(n)}(x)$. Очевидно, що $w'(x)=2nx\left(x^2-1\right)^{n-1}$ або $w'(x)=2nx\dfrac{w(x)}{x^2-1}$. Звідси $\left(x^2-1\right)w'(x)-2nxw(x)\equiv 0$. Диференціюючи цю тотожність $n+1$ разів, за допомогою формули Лейбніца $(uv)^{(m)}=\sum\limits_{k=0}^{m}C_m^k u^{(m-k)}v^{(k)}$ $\quad(m=n+1)$ отримуємо $\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k(w')^{(n+1-k)}\left(x^2-1\right)^{(k)}-2n\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k w^{(n+1-k)}x^{(k)}\equiv 0$. Оскільки $\left(x^2-1\right)^{(0)}=x^2-1$,

$\left(x^2-1\right)^{(1)}=\left(x^2-1\right)'=2x,\ \left(x^2-1\right)^{(2)}=\left(x^2-1\right)''=2,\ \left(x^2-1\right)^{(3)}=\left(x^2-1\right)'''\equiv 0,\ x^{(0)}=x,$

$x^{(1)}=x'\equiv 1,\ x^{(2)}=x''\equiv 0,\ C_{n+1}{}^{(0)}=1,\ C_{n+1}^1=n+1,\ C_{n+1}^2=\dfrac{1}{2}n(n+1),$ то

$$(w')^{(n+1)}\left(x^2-1\right)+(n+1)(w')^{(n)}2x+\frac{1}{2}n(n+1)(w')^{n-1}2-2n\left[w^{(n+1)}x+(n+1)w^{(n)}\right]=$$

$$=\left(x^2-1\right)\left[w^{(n)}\right]''+2x(n+1)\left[w^{(n)}\right]'+n(n+1)w^{(n)}-2nx\left[w^{(n)}\right]'-2n(n+1)w^{(n)}\equiv 0,$$

$$\left(x^2-1\right)\left[w^{(n)}\right]''+2x\left[w^{(n)}\right]'-n(n+1)w^{(n)}\equiv 0.$$

Таким чином, функція $w^{(n)}(x)$, а отже, і $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}w^{(n)}(x)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\lambda y=0 \quad \left(при \quad \lambda=n(n+1)\right). \qquad \text{(Д.3.7)}$$

Рівняння (Д.3.7) називають рівнянням Лежандра. Його можна записати також у такому вигляді:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'\right]+\lambda y=0 \quad \left(\lambda=n(n+1)\right). \qquad \text{(Д.3.8)}$$

3. Ортогональність многочленів Лежандра.

Теорема. Многочлени Лежандра є ортогональними на відрізку $[-1;1]$, тобто

$$\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx=0 \quad (n\neq k). \qquad \text{(Д.3.9)}$$

Доведення. Уважаючи в (Д.3.8) $y=P_n(x)$ і $y=P_k(x)$, отримуємо тотожність $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]+n(n+1)P_n(x)\equiv 0,\ \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_k'\right]+k(k+1)P_k(x)\equiv 0.$ Перше з них помножимо на $P_k(x)$, друге – на $P_n(x)$; результати віднімемо один із іншого й отриману різницю зінтегруємо на відрізку $[-1;1]$: $\int\limits_{-1}^{1}\left\{P_k\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]-P_n\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_k'\right]\right\}dx=[k(k+1)-n(n+1)]\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx$ або $\int\limits_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)(P_n'P_k-P_nP_k')\right\}dx=(k-n)(k+n+1)\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx$. Звідси $\left(1-x^2\right)\left(P_n'P_k-P_nP_k'\right)\Big|_{-1}^{1}=(k-n)(k+n+1)\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx$. Оскільки $\left(1-x^2\right)\Big|_{-1}^{1}=0$ і $n\neq k$, то $\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx=0,\quad n\neq k$.

4. Рекурентні співвідношення для многочленів Лежандра. Правильними є співвідношення

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \tag{Д.3.10}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)\right]\quad (n=1,2,...). \tag{Д.3.11}$$

Для доведення (Д.3.10), (Д.3.11) здиференціюємо розвинення $\omega(x,t)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=P_0(x)+P_1(x)t+P_2(x)t^2+...+P_n(x)t^n+...$ за змінними t і x. Маємо тотожності

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{x-t}{\left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(x-t)\omega(x,t)}{1-2xt+t^2}=P_1(x)+2P_2(x)t+...+nP_n(x)t^{n-1}+...,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{t}{\left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{t\omega(x,t)}{1-2xt+t^2}=P_0'(x)+P_1'(x)t+P_2'(x)t^2+..+P_n'(x)t^n+...,$$ або

$$(x-t)\omega(x,t)=(x-t)\left(P_0+P_1t+...+P_nt^n+...\right)\equiv\left(1-2xt+t^2\right)\left(P_1+2P_2t+...+nP_nt^{n-1}+...\right),$$

$$t\omega(x,t)=t\left(P_0+P_1t+P_2t^2+...+P_nt^n+...\right)\equiv\left(1-2xt+t^2\right)\left(P_0'+P_1't+P_2't^2+...+P_n't^n+...\right).$$

Порівнюючи в цих тотожностях коефіцієнти при однакових степенях t, отримуємо тотожності

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)\equiv 0, \qquad \text{(Д.3.12)}$$

$$P_n(x)\equiv P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x);\ \ n=1,2,... \qquad \text{(Д.3.13)}$$

здиференціюємо тотожність (Д.3.12):

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2n+1)P_n(x)-(2n+1)xP'_n(x)+nP'_{n-1}(x)\equiv 0.$$

Виключаючи з цього співвідношення і співвідношення (Д.3.13) добуток $xP'_n(x)$, отримаємо співвідношення (Д.3.11).

За допомогою співвідношення (Д.3.12) і значень $P_0(x)\equiv 1,\ P_1(x)\equiv x$ можна знайти всі поліноми Лежандра.

5. Норма поліномів Лежандра. Обчислимо $\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}P_n^{\,2}(x)dx=$ $=\int_{-1}^{1}P_n(x)P_n(x)dx$. Для цього один із множників $P_n(x)$ виразимо через $P_{n-1}(x)$ і $P_{n-2}(x)$ за формулою (Д.3.12), замінивши в ній n на $n-1$: $nP_n(x)-(2n-1)xP_{n-1}(x)+(n-1)P_{n-2}(x)\equiv 0\ \ (n=2,3,...)$,

$$P_n(x)=\frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}(x)\ \ (n=2,3,...).$$

Отримуємо $\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}P_n(x)\left[\frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}(x)\right]dx$.

Унаслідок ортогональності поліномів $P_n(x)$ і $P_{n-2}(x)$ $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_{n-2}(x)dx=0$ і, отже, $\|P_n\|^2=\frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n-1}(x)dx$.

За формулою (Д.3.10) $xP_n(x)=\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)$, і тоді $\|P_n\|^2=\frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1}P_{n-1}(x)\left[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)\right]dx$.

Оскільки $\int_{-1}^{1}P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)dx=0$, то $\|P_n\|^2=\frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx$ або

$$\|P_n\|^2=\frac{2n-1}{2n+1}\|P_{n-1}\|^2\ \ \ (n=2,3,...). \qquad \text{(Д.3.14)}$$

Якщо співвідношення (Д.3.9) записати для $n = 2,3, \dots, \mathrm{k}$ і потім помножити їх, то отримаємо $\|P_n\|^2 = \frac{2k-1}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-1} \cdot \frac{2k-5}{2k-3} \cdot \ldots \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} \|P_1\|^2 =$ $= \frac{3\|P_1\|^2}{2k+1}$.

Оскільки $\|P_1\|^2 = \int_{-1}^{1} P_1(x) P_1(x) dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$, то $\|P_k\|^2 = \frac{2}{2k+1}$, так що

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \; \|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (Д.3.15)$$

Формула (Д.3.15) є правильною для $n = 0,1,2,\ldots$, тобто для всіх поліномів Лежандра.

Поліноми Лежандра можна розглядати як власні функції такої задачі: знайти такі значення λ, для яких на відрізку $-1 \le x \le 1$ існують нетривіальні розв'язки рівняння Лежандра $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0 \; \left(-1 < x < 1\right)$, неперервні (і, отже, обмежені) на відрізку $[-1;1]$, які задовольняють умову нормування $y(1) = 1$.

Числа $\lambda = \lambda_n = n(n+1) \; (n = 0,1,2,\ldots)$ є власними числами цієї задачі, а $P_n(x)$ – власними функціями, що їм відповідають.

6. Рівномірна обмеженість поліномів Лежандра. Доведемо, що поліноми Лежандра $P_n(x)$ рівномірно обмежені числом $M = 1$, тобто для будь-якого $n = 0,1,2,\ldots$ виконується нерівність

$$|P_n(x)| \le 1 \; (-1 \le x \le 1). \quad (Д.3.16)$$

Цю нерівність легко отримати з інтегрального подання

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \sin\varphi\right)^n d\varphi. \quad (Д.3.17)$$

Виведемо формулу (Д.3.17). Візьмемо в (Д.3.4) як контур L_1 коло радіусом $R = \sqrt{1-x^2}$ $\left(|x| < 1\right)$ із центром у точці $z = x$ $(y = 0)$. Тоді $z = x + \mathrm{Re}\, e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ або $z = x + \sqrt{1-x^2} e^{i\varphi}$, $L_1 \to [0, 2\pi]$, $dz = i\sqrt{1-x^2} e^{i\varphi} d\varphi$, $(z-x)^{n+1} = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}(n+1)} e^{i(n+1)\varphi}$, $z^2 - 1 = x^2 - 1 + \left(1-x^2\right) e^{2i\varphi} + 2x\sqrt{1-x^2} e^{i\varphi} =$ $= \sqrt{1-x^2} e^{i\varphi} \left[2x + \sqrt{1-x^2}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)\right]$. Оскільки $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$, то $z^2 - 1 = 2\sqrt{1-x^2} e^{i\varphi} (x + i\sqrt{1-x^2} \sin\varphi)$.

Підставляючи ці вирази в (Д.3.4) і враховуючи, що $\oint\limits_{(L_1)} \to \int\limits_0^{2\pi}$, отримаємо (Д.3.17).

Якщо $-1 \le x \le 1$, то $\left| x + \sqrt{1-x^2}\, i \sin\varphi \right| = \left| \sqrt{x^2 + \left(1-x^2\right)\sin^2\varphi} \right| =$
$= \left| \sqrt{x^2\left(1-\sin^2\varphi\right) + \sin^2\varphi} \right| = \left| \sqrt{x^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \right| \le \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \ \left(x^2 \le 1\right)$,
тобто $\left| x + i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi \right| \le 1$, і тоді $\left| \left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi \right)^n \right| \le 1$,
$\left| P_n\left(x\right) \right| \le \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi \right)^n \right| d\varphi \le \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 1$, тобто $\left| P_n\left(x\right) \right| \le 1$ одночасно для всіх $n = 0,1,2,...$ і $-1 \le x \le 1$.

Використовуючи відомі теореми про замкненість і повноту системи ортогональних поліномів (функціональний аналіз), легко переконатися, що множина $\left\{ P_n(x) \right\}_0^{\infty}$ поліномів Лежандра містить усі неперервні й обмежені на відрізку $\left[-1;1\right]$ розв’язки рівняння Лежандра.

За допомогою формули Родріга (Д.3.5) можна довести таке твердження: поліном Лежандра $P_n\left(x\right)$ має n нулів, розташованих на інтервалі $\left(-1;1\right)$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1984. – 382 с.

Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1966. – 296 с.

Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Юрайт, 2019. – 246 с.

Будак, Б. М. Кратные интегралы и ряды / Б. М. Будак, С. В. Фомин. – М. : Физматлит, 2002. – 550 с.

Вайсфельд, Н. Д. Рівняння математичної фізики / Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 194 с.

Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1988. – 512 с.

Курпа, Л. В. Рівняння математичної фізики / Л. В. Курпа, Г. Б. Лінник. – Харків : Вид-во «Підручник НТУ "ХПІ"», 2011. – 312 с.

Методи математичної фізики / С. С. Піх, О. М. Попель, А. А. Ровенчак, І. І. Тальянський. – Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2011. – 402 с.

Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1968. – 576 с.

Николенко, В. Н. Уравнения математической физики / В. Н. Николенко. – М. : Изд-во МГУ, 1977. – 110 с.

Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М. : Физматгиз, 1958 – 1960.

Смирнов, М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1964. – 104 с.

Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1966. – 444 с.

Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1964. – 742 с.

Навчальне видання

Барахов Костянтин Петрович
Курєннов Сергій Сергійович
Соловйов Олександр Іванович

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2020
Підписано до видання 29.04.2020
Ум. друк. арк. 9,7. Обл.-вид. арк. 10,94. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001