ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3

Комплексні числа. Інтегральне числення

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3

Комплексні числа. Інтегральне числення

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3

Комплексні числа. Інтегральне числення

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК 517.1/2(075.8)
ББК 22.161я73
В93

Колектив авторів: Г. К. Бахмет, О. В. Головченко, О. Г. Ніколаєв,
Н. Л. Кальчук, О. М. Прохорова

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. В. М. Колодяжний,
д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін

Переклад з російської виконано Н. А. Українець з дозволу колективу авторів.

В93 **Вища** математика [Електронний ресурс] : навч. посібник : в 5 ч. / Г. К. Бахмет, О. В. Головченко, О. Г. Ніколаєв та ін. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2020. – Ч. 3 : Комплексні числа. Інтегральне числення. – 160 с.

Подано основні розділи математичного аналізу за програмою першого курсу вищих навчальних закладів. Розділи містять теоретичний виклад, основні означення, запитання для перевірки засвоєння пройденого матеріалу. Добрані приклади дають змогу закріпити матеріал під час його вивчення.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів. Може використовуватися під час підготовки до складання іспитів, заліків.

Іл. 29. Табл. 6. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 517.1/2(075.8)
ББК 22.161я73

Комплексні числа. Алгебра комплексних чисел в алгебраїчній формі. Зображення комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексних чисел. Алгебра комплексних чисел в тригонометричній формі. Формула Муавра. Корінь n-го ступеню. Показникова форма комплексних чисел.

1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Def. Під уявною одиницею будемо розуміти вираз виду $i^2 = -1$**.**

ПРИКЛАД:

$$i^1 = i\,,\; i^2 = -1\,,\; i^3 = -i\,,\; i^4 = 1\,,\; i^5 = i\,.$$

Отже, i^n — періодична функція з періодом, що дорівнює 4.

Def. Комплексним числом називають вираз виду

$$z = x + iy\,,$$

де x **– дійсна частина комплексного числа, яка позначається** $\operatorname{Re} z = x$**;** y **– уявна частина комплексного числа, яка позначається** $\operatorname{Im} z = y$**;** i **– уявна одиниця.**

Запис комплексних чисел у вигляді $z = x + iy$ називають **алгебраїчною формою комплексного числа**.

1.1. Алгебра комплексних чисел в алгебраїчній формі

Def. Комплексне число дорівнює нулю, якщо одночасно дійсна і уявна його частини дорівнюють нулю, тобто $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$**.**

Def. Два комплексних числа називають рівними, якщо рівними являються їх дійсні та уявні їх частини, тобто рівність $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ **рівносильна двом рівностям** $x_1 = x_2$ **та** $y_1 = y_2$**.**

Def. Сумою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ **та** $z_2 = x_2 + iy_2$ **називають комплексне число** z**:**

$$z = x + iy = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,.$$

Різниця двох комплексних чисел:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\,.$$

Добуток двох комплексних чисел:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Частка від ділення двох комплексних чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 - x_1 iy_2 + iy_1 x_2 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 - i^2 y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - x_1iy_2 + iy_1x_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Def. Комплексне число $\overline{z} = x - iy$ **називають спряженим до числа** $z = x + iy$ **.** Мають місце співвідношення:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\overline{z} + z}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = i\frac{\overline{z} - z}{2}.$$

1.2. Зображення комплексних чисел

Для зображення комплексних чисел використовують площину комплексних чисел, що утворюється віссю дійсних чисел $Ox = Re\ z$ та віссю уявних чисел $Oy = Im\ z$. Площину комплексних чисел називають **комплексною площиною**. Комплексне число $z = x + iy$ на комплексній площині зображується точкою з координатами (x, y), для якої абсциса ‒ це дійсна частина числа, а ордината ‒ його уявна частина (рисунок 1.1).

Комплексне число $z = x + iy$ можна представити ще й вектором, що йде з початку координат до вказаної точки з координатами (x, y).

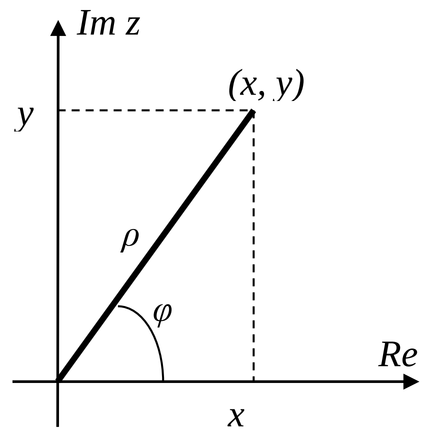


Рисунок 1.1

Якщо $y = 0$, то комплексне число є **дійсним числом** $z = x$; якщо $x = 0$, то комплексне число називають **чисто уявним числом** $z = iy$.

Комплексне число $\overline{z} = x - iy$, що є спряженим до числа $z = x + iy$, зображується симетрично відносно осі Ox.

Зауваження. Число, що є спряженим до спряженого числа, є начальним числом $\overline{\overline{z}} = z$.

Положення точки, яка зображує комплексне число, можна визначити і за допомогою полярної системи координат.

Def. Під модулем комплексного числа розуміють довжину радіус-вектору точки z

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Def. Під аргументом комплексного числа розуміють кут $\varphi = \operatorname{Arg} z$ **:**

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k\,,\ k \in Z\,,$$

де $\arg z$ **– головне значення аргументу, тобто значення кута** φ **лежить в межах** $(-\pi, \pi)$**.**

Мають місце такі формули: $\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{y}{x}$, $\sin(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

ПРИКЛАД. Визначити модуль, головне значення аргументу та сам аргумент комплексного числа $z = 2 + 3i$.

Розв'язок.

Модуль комплексного числа: $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Головне значення аргументу: $\arg z = \arcsin \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Аргумент комплексного числа: $\operatorname{Arg} z = \arcsin \dfrac{3}{\sqrt{13}} + 2\pi k$.

1.3. Тригонометрична форма комплексних чисел

З зображення комплексних чисел (див. рисунок 1.1) випливає:

$$z = x + iy\,,$$

$$x = \rho \cos \varphi\,,$$

$$y = \rho \sin \varphi\,.$$

Тоді будь-яке відмінне від нуля комплексне число можна записати у тригонометричній формі:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)\,,$$

де $\rho = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

1.4. Алгебра комплексних чисел в тригонометричній формі

Додавання та віднімання комплексних чисел не розповсюджуються на тригонометричну форму.

Множення комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Одже добуток комплексних чисел у тригонометричній формі має вигляд

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

тобто модулі перемножують, а головні значення аргументів підсумовують:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2).$$

Частка від ділення двох комплексних чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)}{\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2))}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1}.$$

Отже,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

тобто модулі ділять, а головні значення аргументів віднімають:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2).$$

1.5. Формула Муавра

Якщо скористатися правилом множення чисел, які записані у тригонометричній формі, то піднесення до цілого ступеня можна записати у вигляді

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

В цьому випадку $\left|z^n\right| = |z|^n$, $arg\, z^n = n\, arg\, z$.

При $\rho = 1$ отримаємо

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

Це формула Муавра.

ПРИКЛАД. Використовуючи формулу Муавра, виразити через степені $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$ функцію $\sin 3\varphi$.

Розв'язок.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi ;$$

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi =$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi) =$$

$$= \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi ,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi .$$

1.6. Корінь *n*-го степеня

Добування кореня n-го степеня визначається як дія, яка є зворотною піднесенню до натурального степеня. Використовуючи формулу:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) ,$$

і враховуючи періодичність аргументу, можна записати

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(\rho\left(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\rho\left(cos\left(\varphi + 2\pi k\right) + i\,sin\left(\varphi + 2\pi k\right)\right)\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \rho^{\frac{1}{n}}\left(cos\,\frac{1}{n}\left(\varphi + 2\pi k\right) + i\,sin\,\frac{1}{n}\left(\varphi + 2\pi k\right)\right) = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\,\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\,sin\,\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0,1,\ldots,n-1$. Отже, отримаємо n різних значень кореня.

ПРИКЛАД. Визначити корені рівняння $z^2 + 1 = 0$.

Розв'язок.

З заданого рівняння випливає: $z^2 = -1$;

$$z^2 = \cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k) ;$$

$$z_k = cos\,\frac{\varphi + 2\pi k}{2} + i\,sin\,\frac{\varphi + 2\pi k}{2}, \text{ де } k = 0,\ 1;$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i ;$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i\ .$$

Отже, модуль числа $\rho = 1$. Графічно значення коренів розміщені на окружності радіуса $\rho = 1$ (рисунок 1.2).

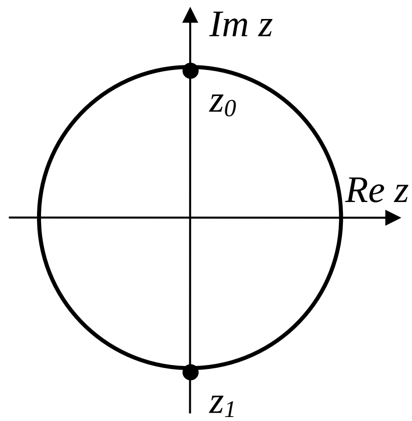


Рисунок 1.2

Зауваження. n різних значень $\sqrt[n]{z}$ мають той же самий модуль та розміщені на окружності радіуса $\sqrt[n]{\rho}$. Вони ділять окружність на n дуг однакової довжини.

1.7. Показникова форма комплексних чисел

Користуючись формулою Тейлора, запишемо розкладання

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

і розглянемо e^{ix}:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots =$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \cos x + i\sin x\ .$$

Отже, тепер можна записати

$$e^{i\varphi} = cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi\ .$$

Def. Показниковою функцією з уявним показником степеня називається комплексна функція

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,,$$

де φ **− параметр, який може приймати будь-які дійсні значення.**

Формула

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

називається формулою Ейлера.

Використовуючи формулу Ейлера, можна записати комплексне число в показниковій формі:

$$z = \rho(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Зауваження:

$$e^{(\alpha+\beta i)\varphi} = e^{\alpha\varphi}e^{i\beta\varphi} = e^{\alpha\varphi}(cos\,\beta\varphi + i\,sin\,\beta\varphi).$$

Така форма дозволяє записати число e з будь-яким комплексним показником ступеня:

$$e^{3+2i} = e^{3}(\cos 2 + i\sin 2)\,.$$

Показникова форма дозволяє виконувати наступні алгебраїчні операції над комплексними числами:

1. Множення комплексних чисел:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

2. Ділення комплексних чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

3. Обчислення коренів комплексних чисел:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \text{ де } k = 0,1,\ldots,n-1.$$

ПРИКЛАД. Обчислити значення z виразу $z^4+1=0$.

Розв'язок.

$z^4+1=0$, $z^4=-1$, $-1=e^{i\pi}$;

$z = \left(e^{i(\pi+2\pi k)}\right)^{1/4} = e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{4}}$;

$k=0$: $\quad z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$;

$k=1$: $\quad z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$;

$$k = 2: \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i);$$

$$k = 3: \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Геометричне зображення коренів представлено на рисунку 1.3.

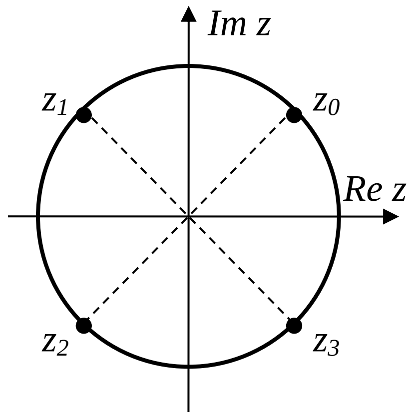


Рисунок 1.3

Для показникової форми

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

можна записати й спряжений вираз

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

З цих формул можна виразити тригонометричну функцію через показникову:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2};$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{2i}.$$

1.8. Висновки

***Def.* Під уявною одиницею будемо розуміти вираз виду** $i^2 = -1$.

***Def.* Комплексним числом називають вираз виду**

$$z = x + iy,$$

де x ***– дійсна частина комплексного числа, яка позначається*** $\operatorname{Re} z = x$***;*** y ***– уявна частина комплексного числа, яка позначається*** $\operatorname{Im} z = y$***;*** i ***– уявна одиниця.***

Запис комплексного числа в алгебраїчній формі: $z = x + iy$.

***Def.* Комплексне число дорівнює нулю, якщо одночасно** $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$**.**

Def. Два комплексних числа називають рівними між собою, якщо дорівнюють їх $\operatorname{Re} z$ ***та*** $\operatorname{Im} z$**.**

Def. Сумою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ ***та*** $z_2 = x_2 + iy_2$ ***називають комплексне число*** z***:***

$$z = x + iy = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Різниця двох комплексних чисел:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Добуток двох комплексних чисел:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Частка від ділення двох комплексних чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Def. Комплексне число $\overline{z} = x - iy$ ***називають спряженим до числа*** $z = x + iy$**.** *Мають місце співвідношення:*

$$\operatorname{Re} z = \frac{\overline{z} + z}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = i\,\frac{\overline{z} - z}{2}.$$

Для зображення використовують площину комплексних чисел, що утворюється віссю дійсних чисел $Ox = \operatorname{Re} z$ *та віссю уявних чисел* $Oy = \operatorname{Im} z$*. Площину комплексних чисел називають* ***комплексною площиною****. Комплексне число* $z = x + iy$ *на комплексній площині зображується точкою з координатами* (x, y)*, для якої абсциса − це дійсна частина числа, а ордината − його уявна частина.*

Спряжене до спряженого числа є вихідним числом $\overline{\overline{z}} = z$.

Def. Під модулем комплексного числа розуміють довжину радіус-вектору точки z

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Def. Під аргументом комплексного числа розуміють кут $\varphi = \operatorname{Arg} z$***:***

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \; k \in Z$$

де $\arg z$ ***- головне значення аргументу, тобто значення кута*** φ **лежить в межах** $(-\pi, \pi)$**.**

Мають місце такі формули*:* $\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{y}{x}$, $\sin(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

З зображення комплексних чисел випливає:

$$z = x + iy, \; x = \rho\cos\varphi, \; y = \rho\sin\varphi.$$

Запис комплексного числа в тригонометричній формі:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

де $\rho=|z|$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

Добуток комплексних чисел у тригонометричній формі має вигляд

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

тобто модулі перемножують, а головні значення аргументів підсумовують:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ arg\left(z_1z_2\right)=arg\left(z_1\right)+arg\left(z_2\right).$$

Частка від ділення комплексних чисел в тригонометричній формі має вигляд

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$

тобто модулі ділять, а головні значення аргументів віднімають:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=arg\left(z_1\right)-arg\left(z_2\right).$$

Формула Муавра:

$$(\cos\varphi+\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Корінь n *-го степеня*

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{|z|}\left(cos\,\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\,sin\,\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

де $k=0,1,\ldots,n-1$. *Отже, корінь* n *-го степеня має* n *різних значень.*

Зауваження: n *різних значень* $\sqrt[n]{z}$ *мають однаковий модуль та розташовані на окружності радіуса* $\sqrt[n]{\rho}$. *Вони ділять окружність на* n *дуг однакової довжини.*

Формула Ейлера:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Запис комплексного числа в показниковій формі:

$$z=\rho\left(cos\,\varphi+i\,sin\,\varphi\right)=\rho e^{i\varphi}.$$

Зауваження:

$$e^{(\alpha+\beta i)\varphi}=e^{\alpha\varphi}e^{i\beta\varphi}=e^{\alpha\varphi}\left(cos\,\beta\varphi+i\,sin\,\beta\varphi\right).$$

Алгебраїчні операції над комплексними числами в показниковій формі мають вигляд:

1. Множення комплексних чисел:

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

2. Ділення комплексних чисел:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

3. Обчислення коренів комплексних чисел:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ \textit{де}\ k=0,1,\dots,n-1.$$

Спряжений вираз для показникової форми:

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Запис тригонометричних функцій через показникову:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{i\varphi}}{2i}.$$

1.9. Питання для перевірки

1. Уявна одиниця – це число виду:

а) i^2; б) $\sqrt{-1}$; в) $\sqrt{i^2}$.

2. Позначення уявної одиниці:

а) i^2; б) i; в) $\sqrt{-1}$.

3. Комплексним числом називають:

а) число виду $z=x+iy$, де x,y − дійсні числа, а i − уявна одиниця; б) число виду $\sqrt{-1}$; в) число виду i^2.

4. Позначення дійсної частини комплексного числа *z*:

а) $Im\,z$; б) Dz; в) $Re\,z$.

5. Позначення уявної частини комплексного числа *z*:

а) $Im\,z$; б) Dz; в) $Re\,z$.

6. Два комплексних числа вважають рівними, якщо дорівнюють:

а) їх дійсні та уявні частини; б) їх модулі; в) їх аргументи.

7. Комплексне число дорівнює нулю, якщо:

а) його дійсна частина дорівнює нулю; б) його уявна частина дорівнює нулю; б) його дійсна та уявна частини дорівнюють нулю.

8. Для зображення комплексного числа використовують:

а) дві числові вісі; б) комплексну площину; в) декартові системи координат.

9. Вісь OX комплексної площини називають:

а) віссю абсцис; б) горизонтальною віссю; в) дійсною віссю.

10. Вісь OY комплексної площини називають:

а) уявною віссю; б) віссю ординат; в) вертикальною віссю.

11. Комплексне число, що є спряженим до числа $z=x+iy$:

а) $\bar{z}=x-iy$; б) $\bar{z}=-x-iy$; в) $\bar{z}=-x+iy$.

12. Модуль комплексного числа $z=x+iy$:

а) $|z|^2=x^2+y^2$; б) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; в) $|z|=|x+y|$.

13. Аргумент комплексного числа $z=x+iy$:

а) $Arg(z)=\frac{y}{|z|}$; б) $Arg(z)=\frac{x}{|z|}$; в) $Arg(z)=\arcsin\frac{y}{|z|}=\arccos\frac{x}{|z|}$.

14. Комплексне число в тригонометричній формі:

а) $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; б) $z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; в) $z=|z|(\sin\varphi+i\cos\varphi)$.

15. Добуток двох комплексних чисел $z_1=x_1+iy_1$ та $z_2=x_2+iy_2$:

а) $z_1z_2=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-y_1x_2)$; б) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$; в) $z_1z_2=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$.

16. Частка від ділення двох комплексних чисел $z_1=x_1+iy_1$ та $z_2=x_2+iy_2$:

а) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2-y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1+y_2x_1}{x_2^2+y_2^2}$; б) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2^2+y_2^2}$;
в) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.

17. Частка від ділення двох комплексних чисел в тригонометричній формі:

а) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(cos\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)+i\,sin\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\right)$; б) $\frac{z_1}{z_2}=(|z_1|-|z_2|)\left(cos\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)+i\,sin\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\right)$;
в) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\,sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

18. Запис формули Муавра:

а) $(cos\,\varphi+i\,sin\,\varphi)^n=(cos\,n\varphi+i\,sin\,n\varphi)$; б) $(cos\,\varphi+i\,sin\,\varphi)^n=\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\right.$
$\left.+i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$; в) $(cos\,\varphi+i\,sin\,\varphi)^n=(cos(n\varphi+2k\pi)+i\,sin(n\varphi+2k\pi))$.

19. Добуток двох комплексних чисел в тригонометричній формі:

а) $z_1z_2=|z_1||z_2|(cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\,sin(\varphi_1+\varphi_2))$; б) $z_1z_2=|z_1||z_2|(cos(\varphi_1\varphi_2)+$
$+i\,sin(\varphi_1\varphi_2))$; в) $z_1z_2=(|z_1|+|z_2|)(cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\,sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

20. Запис комплексного числа у показниковій формі:

а) $z=i\varphi\,exp(|z|)$; б) $z=\varphi\,exp(i|z|)$; в) $z=|z|\,exp(i\varphi)$.

21. Формули виду $\cos\varphi=\frac{e^{i\kappa}+e^{i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{e^{i\kappa}-e^{i\varphi}}{2i}$ називаються:

а) формулами Ейлера; б) формулами Лейбніца; в) формулами Коши.

22. Корінь *n*-го степеня з комплексного числа z дорівнює:

а) $\sqrt[n]{|z|}\,exp\left(i\varphi+\dfrac{2k\pi}{n}\right)$, де $n=1,2,\dots,n-1$; б) $\sqrt[n]{|z|}\,exp\left(i\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, де $n=1,2,\dots,n-1$;

в) $\sqrt[n]{z}\,exp\left(i\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, де $n=1,2,\dots,n-1$.

1.10. Завдання для роботи в аудиторії та вдома

1. Визначити модуль і аргумент комплексного числа: $z=-1$, $z=1$, $z=-2i$, $z=-8i$, $z=-\sqrt{3}-i$, $z=-3+4i$, $z=-1-5i$, $z=2+2\sqrt{3}i$.

2. Розв'язати рівняння: $|z|+z=1-2i$, $|z|+Re\,z-z=1+i$.

3. Записати комплексне число у тригонометричній формі: $2\sqrt{3}-2i$, $3-3\sqrt{3}i$, $-2+2\sqrt{3}i$.

4. Записати комплексне число в алгебраїчній формі: $3\left(cos\dfrac{\pi}{4}-i\,sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $4i\,cos\,\pi$, $4(cos\,\pi+i\,sin\,\pi)$.

5. Записати комплексне число в показниковій формі: $2-\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $\sqrt{8}-\sqrt{8}i$.

6. Виконати ділення: $\dfrac{2+2i}{1-3i}$, $\dfrac{1-\sqrt{2}i}{2+\sqrt{3}i}$, $\dfrac{\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{3}i}$, $\dfrac{2\left(cos\dfrac{\pi}{3}+i\,sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{3\left(cos\dfrac{\pi}{4}+i\,sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$,

$\dfrac{4(cos\,\pi+i\,sin\,\pi)}{3\left(cos\dfrac{\pi}{2}+i\,sin\dfrac{\pi}{2}\right)}$, $\dfrac{4\left(cos\dfrac{3\pi}{2}+i\,sin\dfrac{3\pi}{2}\right)}{2\left(cos\dfrac{\pi}{2}+i\,sin\dfrac{\pi}{2}\right)}$, $\dfrac{2\left(cos\dfrac{2\pi}{3}-i\,sin\dfrac{2\pi}{3}\right)}{5\left(cos\dfrac{\pi}{3}+i\,sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

7. Виконати множення: $(2+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{3}i)$, $(1-i)(1-\sqrt{3}i)$, $(1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$, $2\left(cos\dfrac{\pi}{3}+i\,sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot 3\left(cos\dfrac{\pi}{4}+i\,sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $2\left(cos\dfrac{\pi}{3}+i\,sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(-sin\dfrac{\pi}{3}+i\,cos\dfrac{\pi}{3}\right)$.

8. Знайти: $\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{8}$, $\left(4e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{-3}$, $\left(\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{2}\right)^{6}$, $\left(\dfrac{e^{\frac{7\pi}{6}i}}{\sqrt{3}}\right)^{8}$, $\left(\sqrt{2}\left(cos\dfrac{\pi}{4}+i\,sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{4}$,

$\left(\sqrt[3]{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^3$, $\left(2+\sqrt{2}i\right)^8$, $(1+i)^8$, $\left(-1-\sqrt{3}i\right)^8$.

9. Знайти значення: $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt{-i}$, $\sqrt[3]{2e^{\frac{\pi}{3}}}$, $\sqrt[3]{\left(2e^{\frac{\pi}{3}}\right)^2}$, $\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$, $\sqrt[3]{\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^2}$.

10. Розв'язати рівняння: $z^3-8=0$, $z^4-16=0$.

1.11. Самостійна робота

1. Визначити модуль і аргумент комплексного числа: $z=7$, $z=-3$, $z=i$, $z=-2+2i$, $z=7+8i$, $z=-2-8i$, $z=2-2\sqrt{3}i$.

2. Розв'язати рівняння: $z^2-(Im\,z)^2+Re\,z-z=1-2i$, $z^2+|z|-Re\,z+z=-3i$.

3. Записати комплексне число в тригонометричній формі: $2-\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $\sqrt{8}-\sqrt{8}i$.

4. Записати комплексне число в алгебраїчній формі: $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $5\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

5. Записати комплексне число в показниковій формі: $2\sqrt{3}-2i$, $3-3\sqrt{3}i$, $-2+2\sqrt{3}i$.

6. Виконати ділення: $\frac{2+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i}$, $\frac{2-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$, $\frac{\sqrt{2}+2i}{1-i}$.

7. Виконати множення: $\left(\sqrt{2}-i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)$, $\left(\sqrt{2}-i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)$, $i\left(1-\sqrt{3}i\right)$.

8. Виконати ділення: $\frac{6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$, $\frac{4\cos\pi}{3i\sin\frac{\pi}{2}}$, $\frac{4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$, $\frac{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}{5\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$.

9. Виконати множення: $2\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt[3]{3^2}\left(-sin\frac{\pi}{3}+i\,cos\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{3}\left(-cos\frac{\pi}{3}-i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$.

10. Знайти: $\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{2}\right)^6$, $\left(\frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{3}\right)^{-4}$, $\left(\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^4$, $\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}}\right)^6$.

11. Знайти: $\left(2\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^8$, $\left(2\left(-sin\frac{\pi}{3}+i\,cos\frac{\pi}{3}\right)\right)^6$, $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{18}$, $\left(-\sqrt{3}+i\right)^8$, $(-1-i)^{12}$.

12. Знайти: $\sqrt[3]{i^2}$, $\sqrt[4]{-i}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

13. Знайти: $\sqrt[4]{2\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)}$, $\sqrt[3]{\left(2\left(cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}$.

14. Розв’язати рівняння: $z^3+8=0$, $z^3-8=0$, $z^4+16=0$, $z^4-16=0$.

Невизначений інтеграл. Визначення невизначеного інтеграла. Геометричний сенс невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Основні методи інтегрування. Безпосереднє інтегрування. Метод інваріантності. Метод підстановки. Інтегрування частинами.

2. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Переходимо до розділу математичного аналізу, пов'язаного з інтегральним обчисленням. Однією з головних задач інтегрального числення є відновлення функції по відомій похідній цієї функції.

2.1. Визначення невизначеного інтеграла

Def. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо для всіх значень x з цього проміжку виконується рівність

$$F'(x) = f(x).$$

ПРИКЛАД:

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \cos x;$$

$$f(x) = |x| \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \geq 0, \\ -\dfrac{x^2}{2}, & x < 0; \end{cases}$$

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad \Rightarrow \quad \overline{\exists} F(x).$$

Лемма. Функція, похідна якої на деякому проміжку X дорівнює нулю, постійна на цьому проміжку.

◀*Доведення.* Нехай у всіх точках проміжку X : $f'(x) = 0$.

Для $\forall\, x_1, x_2 \in X$ згідно з теоремою Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

$x_1 < \xi < x_2$, оскільки $f'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow$

$f(x_2) = f(x_1)$, тобто $f(x) = const$. ▶

Th. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на деякому проміжку X, то будь-яка інша первісна для $f(x)$ на тому ж проміжку може бути представлена у вигляді $F(x) + C$, де C — довільна постійна.

◀*Доведення.* Нехай $f(x)$ на проміжку X має дві первісні $F_1(x)$ та $F_2(x)$. Нехай їх різницю можна представити функцією

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

Можна продиференціювати цю рівність:

$$G'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Згідно з попередньою лемою $G'(x) = 0 \Rightarrow G(x) = const$, тобто $F_1(x) - F_2(x) = C$, або $F_1(x) = F_2(x) + C$. ▶

Def. За невизначений інтеграл функції $f(x)$ приймається сукупність всіх первісних

$$F(x) + C$$

цієї функції.

Позначається невизначений інтеграл так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;

x — змінна інтегрування.

Хоча символ $\int f(x)dx$ і позначає сукупність всіх первісних для функції $f(x)$, але він може представляти собою і будь-який елемент з цієї сукупності.

Відновлення функції за її похідною — це і є знаходження невизначеного інтеграла за даною підінтегральною функцією. Ця операція називається інтегруванням функції.

Отже, інтегрування - це операція, зворотна диференціюванню.

Для перевірки правильності інтегрування потрібно продиференціювати результат і отримати при цьому підінтегральну функцію.

2.2. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Відомо, що похідна функції $y = F(x)$ дає тангенс кута нахилу дотичної до відповідного графіка. Тому задачу визначення первісної $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ можна пояснити так: треба знайти криву $y = F(x)$, для якої мав би місце заданий закон зміни кутового коефіцієнта дотичної $\operatorname{tg}\alpha = f(x)$ (рис. 2.1).

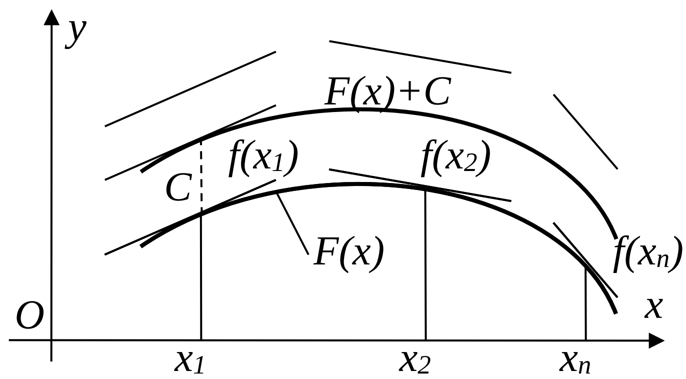


Рис. 2.1

Якщо $y = F(x)$ − одна з таких кривих, то всі інші можуть бути отримані з цієї простим зсувом паралельно осі y на довільний відрізок C.

2.3. Основні властивості невизначеного інтеграла

З визначення невизначеного інтеграла і з властивостей диференціювання випливає:

1. Інтеграл має лінійні властивості:

$$\int(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1\int f_1(x)dx + \lambda_2\int f_2(x)dx$$

(випливає з лінійних властивостей похідних).

2. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральної функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

3. Інтеграл від похідної підінтегральної функції дорівнює сумі підінтегральної функції і постійної:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

4. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int d(f(x)) = f(x) + C,$$

так як $d(f(x)) = f'(x)dx$, а $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

6. Властивість інваріантності. Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці замість незалежної змінної будь-якої диференційовної функції від неї, тобто якщо:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{, то и } \int f(\varphi)du = F(u) + C,$$

де $u = \varphi(x)$ — будь-яка диференційовна функція від x.

◀*Доведення.* Нехай $F(u) = F(\varphi(x))$, $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$. Тоді

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C,$$

$$\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = f(x) + C. \qquad ▶$$

2.4. Таблиця основних інтегралів

1. $(C)' = 0$.
2. $(x)' = 1$.
3. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha}$.
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.
7. $\left(e^x\right)' = e^x$.
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
9. $(\sin x)' = \cos x$.
10. $(\cos x)' = -\sin x$.
11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. $\int 0 \cdot dx = C$.
2. $\int 1 \cdot dx = x + C$.
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.
4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.
5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
7. $\int e^x dx = e^x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.
10. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

19. $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

20. $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

21. $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

14. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

15. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$.

16. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

18. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x + C$.

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x + C$.

21. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arth} x + C$.

Зауваження 1:

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.
2. $\operatorname{arsh} x = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|$.
3. $\operatorname{arch} x = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$.
4. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.
5. $\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.
6. $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$.

Зауваження 2. Формули в зауваженні 1 (3), (4) називають ще довгим логарифмом, а формулу (5) - коротким логарифмом. Ці формули отримують шляхом побудови зворотних функцій до заданих гіперболічних функцій синуса, косинуса, тангенса.

2.5. Основні методи інтегрування

1. Безпосереднє інтегрування.
2. Метод інваріантності (внесення виразу під знак диференціала).
3. Метод підстановки.
4. Інтегрування частинами.

2.5.1. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування - це обчислення інтегралів за допомогою безпосереднього використання таблиці найпростіших інтегралів.

ПРИКЛАД 1:

$$\int\left(5\cos x-2+\frac{1}{x}+a^x\right)dx=\int 5\cos x dx-2\int dx+\int\frac{dx}{x}+\int a^x dx=$$

$$=5\sin x-2x+\ln x+\frac{a^x}{\ln a}+C\ .$$

У деяких випадках потрібно використовувати попередні перетворення виразів.

ПРИКЛАД 2:

$$\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2}dx=\int\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}dx=\int x^2dx+2\int dx+\int x^{-2}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}+C\ .$$

ПРИКЛАД 3:

$$\int tg^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=tgx-x+C\ .$$

2.5.2. Метод інваріантності

Раніше зазначалося, що якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)du=F(u)+C$, де $u=\varphi(x)$ − будь-яка диференційовна функція від x.

Для інваріантності можна використовувати наступні заміни:

$du=d(u+a)$;

$du=\frac{1}{a}d(au)$;

$u\,du=\frac{1}{2}d\left(u^2\right)$;

$\cos u\,du=d(\sin u)$;

$\sin u\,du=-d(\cos u)$;

$\frac{du}{u}=d(\ln u)$;

$\frac{du}{\cos^2 u}=d(\mathrm{tg}\,u)$.

ПРИКЛАД 4:

$$\int\frac{dx}{5+x}=\int\frac{d(5+x)}{5+x}=\left|\int\frac{du}{u}=\ln u\right|=\ln|5+x|+C\ .$$

ПРИКЛАД 5:

$$\int (3x-4)^{11}dx = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{11}d(3x-4) = \frac{1}{3}\frac{(3x-4)^{12}}{12} + C\,.$$

ПРИКЛАД 6:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx =$$

$$= -\int \frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}} + \int \frac{d\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C\,.$$

2.5.3. Метод підстановки

Метод підстановки полягає у введенні нової змінної інтегрування, що дозволяє звести знаходження даного інтеграла до безпосереднього інтегрування. Метод підстановки заснований на наступній теоремі.

Th. Нехай функція $y = f(x)$ **при** $x \in X$ **має первісну** $G(x)$**, а функція** $\varphi(z)$ **диференційовна на інтервалі** I**, причому область значення функції** $\varphi(z)$ **входить до області** X **, тоді**

$$\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = G(\varphi(z)) + C\,.$$

◄ *Доведення.* З формули диференціювання складної функції випливає, що

$$\frac{d}{dz}G(\varphi(z)) = f(\varphi(z))\varphi'(z)\,. \qquad ►$$

Використовують два правила підстановки:

1. Заміняють $x = \varphi(z)$, тобто незалежну змінну замінюють функцією, після чого визначають

$$dx = \varphi'(z)dz$$

і інтеграл приводять до вигляду

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz\,,$$

$$\int f(u)du = \left|\begin{array}{c} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{array}\right| = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\,.$$

Висновок:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C\ .$$

ПРИКЛАД 7:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{a}{z} \\ dx = -\dfrac{a\,dz}{z^2} \end{matrix} \right| = -\int \frac{\dfrac{a}{z^2}dz}{\dfrac{a}{z}\sqrt{\dfrac{a^2}{z^2}-a^2}} =$$

$$= -\int \frac{dz}{a\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin z + C = \left| z = \frac{a}{x} \right| = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x} + C = \left| \begin{matrix} \arccos\alpha + \arcsin\alpha = \dfrac{\pi}{2} \\ \arcsin\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\alpha \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{a}{x}\right) + C = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C_1\,.$$

2. Заміняють $\psi(x) = z$, тобто функцію від x замінюють новою змінною. Після цього знаходять dx і отримують

$$\int f(x)dx = \int w(z)dz\ .$$

Підстановка досягає мети, якщо одержувані інтеграли обчислити простіше, ніж вихідні.

ПРИКЛАД 8:

$$\int \frac{2xdx}{1+x^4} = \left| \begin{matrix} x^2 = z \\ 2xdx = dz \end{matrix} \right| = \int \frac{dz}{1+z^2} = \mathrm{arctg}\, z + C = \mathrm{arctg}\, x^2 + C\ .$$

ПРИКЛАД 9:

$$\int x\sqrt[3]{x^2-6}dx = \left| \begin{matrix} x^2 - 6 = t^3 \\ 2xdx = 3t^2dt \quad xdx = \dfrac{3}{2}t^2dt \end{matrix} \right| = \int \frac{3}{2}t^2\sqrt[3]{t^3}dt = \int \frac{3}{2}t^3dt = \frac{3}{2}\frac{t^4}{4} =$$

$$= \frac{3}{8}t^4 = \left| t = \left(x^2-6\right)^{\frac{1}{3}} \right| = \frac{3}{8}\left(x^2-6\right)^{\frac{4}{3}} + C\ .$$

ПРИКЛАД 10:

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{7+3x^2}} = \left| \begin{matrix} \alpha^2 = 7 \\ \sqrt{3}x = \alpha\cdot sht \quad dx = \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}cht\cdot dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\alpha\cdot cht\cdot dt}{\sqrt{3}\sqrt{\alpha^2+\alpha^2 sh^2 t}} = \int \frac{\alpha\cdot cht\cdot dt}{\sqrt{3}\alpha\sqrt{1+sh^2 t}} =$$

$$= \int \frac{\alpha \cdot cht \cdot dt}{\sqrt{3}\alpha cht} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int dt = \frac{t}{\sqrt{3}} = \left| \begin{array}{l} \alpha = \sqrt{7} \\ \sqrt{3}x = \alpha \cdot sht, \;\; t = arsh \dfrac{\sqrt{3}x}{\alpha} = arsh \sqrt{\dfrac{3}{7}}x \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} arsh \sqrt{\frac{3}{7}}x + C.$$

2.5.4. Інтегрування частинами

Формула інтегрування частинами має вигляд

$$\int udv = uv - \int vdu$$

де $u=u(x)$; $v=v(x)$.

Формула випливає з диференціала добутку:

$$d(uv) = vdu + udv;$$

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Якщо цей вираз проінтегрувати, то отримаємо

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

ПРИКЛАД 1:

$$\int xe^x = \left| \begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Потрібно прагнути, щоб інтегрування диференціала dv мало місце, а заміна udv на vdu приводила до спрощення підінтегрального виразу.

Інтегрування частинами більш обмежене по застосуванню, ніж інтегрування підстановкою, і використовується тільки для певного класу функцій. Це можуть бути $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin nx\,dx$, $\int P(x)\cos nx\,dx$, $\int e^{ax}\sin nx\,dx$, $\int e^{ax}\cos nx\,dx$, $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$, $\int P(x)\ln ax\,dx$.

Рекомендації:

$$\int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} e^{ax} \\ sin\,ax \\ cos\,ax \end{array} \right\} dx = \left| \begin{array}{l} u = P_n(x) \\ dv = \left\{ \begin{array}{l} e^{ax} \\ sin\,ax \\ cos\,ax \end{array} \right\} dx \end{array} \right|;$$

$$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} ln\,x \\ arcsin\ ax \\ arccos\ ax \end{Bmatrix}dx = \left| \begin{matrix} u = \begin{Bmatrix} ln\,x \\ arcsin\ ax \\ arccos\ ax \end{Bmatrix} \\ dv = P_n(x)dx \end{matrix} \right|.$$

ПРИКЛАД 2:

$$\int x\,ln\,xdx = \left| \begin{matrix} u = ln\,x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}ln\,x - \int \frac{x^2}{2x}dx = \frac{x^2}{2}ln\,x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}ln\,x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Зауваження 1. Інтегрування частинами можна використовувати кілька разів.

ПРИКЛАД 3:

$$\int (ln\,x)^2 dx = \left| \begin{matrix} u = (ln\,x)^2 & du = 2\,ln\,x\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x(ln\,x)^2 - 2\int \frac{x\,ln\,x}{x}dx = x(ln\,x)^2 - 2\int ln\,xdx =$$

$$= x(ln\,x)^2 - 2I;$$

$$I = \int ln\,xdx = \left| \begin{matrix} u = ln\,x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x;$$

$$\int (ln\,x)^2 dx = x(ln\,x)^2 - 2(x\,ln\,x - x) + C.$$

Зауваження 2. У деяких випадках, коли вирази містять дві трансцендентні функції, наприклад такі - $\int e^x \sin xdx$, інтеграл приводять до такого виду, щоб вийшло рівняння, яке містить цей інтеграл, і розв’язують отримане рівняння щодо інтеграла, як алгебраїчне.

ПРИКЛАД 4:

$$J = \int e^x \sin xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin xdx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx = -e^x \cos x + J_1;$$

$$J_1 = \int e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos xdx & v = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx = e^x \sin x - J.$$

В результаті отримаємо: $J = -e^x \cos x + e^x \sin x - J$, $2J = -e^x \cos x + e^x \sin x$,

$$J = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x).$$

Отже, $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$.

Зауваження 3. Інтегрування частинами може бути використано і для побудови рекурентних співвідношень при обчисленні інтегралів.

Наприклад, для обчислення інтегралу $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, де $n \in N$, побудована рекурентна залежність має вигляд

$$J_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}.$$

ПРИКЛАД. Використовуючи рекурентну залежність, обчислити $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Розв'язання

Для цього запису задано $J_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$, тобто $n = 3$. Запишемо вираз

$$J_3 = \frac{x}{(2\cdot 3-2)(x^2+1)^{3-1}} - \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2} J_2 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{3}{4} J_2.$$

Для $n = 2$ маємо

$$J_2 = \frac{x}{(2\cdot 2-2)(x^2+1)^{2-1}} - \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} J_{2-1} = \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} J_1,$$

де $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx$. Отже, остаточно отримаємо

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = J_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{3}{4} J_2 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(x^2+1)^{3-1}} - \frac{1}{2} J_1\right) =$$

$$= \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(x^2+1)^2} - \frac{1}{2} arctgx\right) + C = \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{3x}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} arctgx + C.$$

Відповідь: $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{3x}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} arctgx + C$.

2.6. Висновки

***Def.* Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо для всіх значень x з цього проміжку виконується рівність**

$$F'(x) = f(x).$$

***Лемма.* Функція, похідна якої на деякому проміжку X дорівнює нулю, є постійною на цьому проміжку.**

***Th.* Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на деякому проміжку X, то будь-яка інша первісна для $f(x)$ на тому ж проміжку може бути представлена у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна постійна.**

***Def.* За невизначений інтеграл функції $f(x)$ приймається сукупність всіх первісних**

$$F(x)+C$$

цієї функції.

Позначається невизначений інтеграл так:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де $f(x)$ *− підінтегральна функція;*

$f(x)dx$ *− підінтегральний вираз;*

x *− змінна інтегрування.*

Інтегрування - це операція, зворотна диференціюванню.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла *полягає в тому, що потрібно знайти криву* $y = F(x)$*, для якої мав би місце заданий закон зміни кутового коефіцієнта дотичної* $\operatorname{tg}\alpha = f(x)$.

З визначення невизначеного інтеграла та з властивостей диференціювання випливає:

1. Інтеграл володіє лінійними властивостями:

$$\int(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1\int f_1(x)dx + \lambda_2\int f_2(x)dx.$$

2. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

3. Інтеграл від похідної підінтегральної функції дорівнює сумі підінтегральної функції і постійної:

$$\int f'(x)dx = f(x)+C.$$

4. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int d(f(x)) = f(x) + C,$$

оскільки $d(f(x)) = f'(x)dx$, *а* $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

6. Властивість інваріантності. Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці замість незалежної змінної будь-якої диференційовної функції від неї, тобто якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то й } \int f(\varphi)du = F(u) + C,$$

де $u = \varphi(x)$ *— будь-яка функція від* x, *що диференціюється.*

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$.	8. $\int \frac{dx}{x} = ln\, x + C$.	15. $\int shxdx = chx + C$.
2. $\int 1 \cdot dx = x + C$.	9. $\int cos\, xdx = sin\, x + C$.	16. $\int chxdx = shx + C$.
3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.	10. $\int sin\, xdx = -cos\, x + C$.	17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.
4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$.	11. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$.	18. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.	12. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$.	19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arshx + C$.
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$.	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$.	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = archx + C$.
7. $\int e^x dx = e^x + C$.	14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.	21. $\int \frac{dx}{1-x^2} = arthx + C$.

Основні методи інтегрування

1. Безпосереднє інтегрування - це обчислення інтегралів за допомогою безпосереднього використання таблиці найпростіших інтегралів.

2. Метод інваріантності - внесення під знак диференціала виразу.

3. Метод підстановки полягає у введенні нової змінної інтегрування, що дозволяє звести знаходження даного інтеграла до безпосереднього інтегрування.

Метод підстановки заснований на наступній теоремі.

Th. Нехай функція $y = f(x)$ ***при*** $x \in X$ ***має первісну*** $G(x)$***, а функція*** $\varphi(z)$ **диференційовна на інтервалі** I ***, причому область значення функції*** $\varphi(z)$ ***входить до області*** X ***, тоді***

$$\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = G(\varphi(z)) + C.$$

Використовують два правила підстановки:

а) замінюють $x = \varphi(z)$, *тобто незалежну змінну замінюють функцією, після чого визначають*

$$dx = \varphi'(z)dz$$

і інтеграл приводять до вигляду

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz .$$

Наслідок:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C .$$

б) замінюють $\psi(x) = z$, *тобто функцію від* x *замінюють новою змінною, після чого знаходять* dx *і отримують*

$$\int f(x)dx = \int w(z)dz .$$

4. Інтегрування частинами. Формула інтегрування частинами має вигляд

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du ,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Рекомендації:

$$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{Bmatrix}dx = \left| \begin{array}{l} u = P_n(x) \\ dv = \begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{Bmatrix}dx \end{array} \right|, \quad \int P_n(x)\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \end{Bmatrix}dx = \left| \begin{array}{l} u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \end{Bmatrix} \\ dv = P_n(x)dx \end{array} \right| .$$

2.7. Питання для перевірки

1. Головним завданням інтегрального числення є:

а) визначення похідної заданої функції; б) відновлення функції по відомій її похідній; в) використання інтегралів при розв’язанні задач.

2. Функція *F(x)* називається первісною для функції *f(x)* на деякому проміжку *X*, якщо для всіх значень *x* цього проміжку виконується рівність:

а) $F(x) = f'(x)$; б) $F(x) = f(x)$; в) $F'(x) = f(x)$.

3. Функція, похідна якої на деякому проміжку *X* дорівнює нулю:

а) дорівнює нулю на цьому проміжку; б) має локальний екстремум на цьому проміжку; в) постійна на цьому проміжку.

4. Якщо функція *F(x)* є первісною для функції *f(x)* на деякому проміжку *X*, то будь-яка інша первісна для *f(x)* на тому самому проміжку може бути представлена у вигляді:

а) $F(x)+C$; б) $G(x)+C$; в) C.

5. За невизначений інтеграл функції *f(x)* приймається:

а) сукупність усіх первісних $F(x)+C$; б) первісна $F(x)$; в) невизначена функція $F(x)$.

6. Функцію *f(x)* для невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ називають:

а) підінтегральним виразом; б) підінтегральною функцією; в) функцією інтегрування.

7. Величину *x* для невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ називають:

а) підінтегральною змінною; б) змінною інтегрування; в) змінною.

8. Вираз *f(x)dx* для невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ називають:

а) підінтегральною функцією; б) інтегральною змінною; в) підінтегральним виразом.

9. Інтегрування – це операція:

а) аналогічна диференціюванню; б) зворотна диференціюванню; в) побудови похідних.

10. Геометричний зміст невизначеного інтеграла – це:

а) побудова дотичних по заданому закону розташування кривої;
б) визначення площі підінтегральної кривої; в) побудова кривої по заданому закону зміни кутових коефіцієнтів дотичних.

11. Запис виду $\int(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))dx=\lambda_1\int f_1(x)dx+\lambda_2\int f_2(x)dx$ для невизначених інтегралів являє собою їх властивість:

а) лінійності; б) комутативності; в) розкладання.

12. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює:

а) підінтегральній функції; б) підінтегральному виразу; в) сумі підінтегральної функції та постійної.

13. Інтеграл від похідної підінтегральної функції дорівнює:

а) підінтегральній функції; б) підінтегральному виразу; в) сумі підінтегральної функції та постійної.

14. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює:

а) підінтегральній функції; б) підінтегральному виразу; в) сумі підінтегральної функції та постійної.

15. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює:

а) підінтегральній функції; б) підінтегральному виразу; в) сумі підінтегральної функції та постійної.

16. Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд:

а) при підстановці замість функції інтегрування будь-якої функції, що диференціюється; б) при підстановці замість функції інтегрування будь-якої константи; в) при підстановці замість незалежної змінної будь-якої функції від неї, що диференціюється.

17. $\int \frac{dx}{1+x^2}$ **= …:** а) $arctgx + C$; б) $arthx + C$; в) $arshx + C$.

18. $\int \frac{dx}{1-x^2}$ **= …:** а) $arctgx + C$; б) $arthx + C$; в) $ar\sin x + C$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ **= …:** а) $\arcsin x + C$; б) $archx + C$; в) $arshx + C$.

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **= …:** а) $\arcsin x + C$; б) $archx + C$; в) $arshx + C$.

21. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ **= …:** а) $arthx$; б) $archx$; в) $arshx$.

22. $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$ **= :** а) $arthx$ **;** б) $archx$; в) $arshx$.

23. Перерахуйте основні методи інтегрування:

а) розкладання на найпростіші, метод невизначених коефіцієнтів, метод підстановки, інтегрування частинами; б) безпосереднє інтегрування, метод інваріантності, метод підстановки, інтегрування частинами; в) безпосереднє інтегрування, універсальна тригонометрична підстановка, підстановка Ейлера, інтегрування частинами.

24. Для інваріантності можна використовувати залежність:

а) $\ln u du = \frac{du}{u}$; б) $\frac{du}{u} = d(\ln u)$; в) $d\left(-\frac{1}{u^2}\right) = \frac{du}{u}$.

25. Виберіть два методи підстановки, які використовуються при інтегруванні:

а) універсальна тригонометрична підстановка, підстановка Ейлера;

б) тригонометричні підстановки, підстановки інваріантності; в) заміна змінної функцією, заміна функції підінтегрального виразу змінною.

26. Для інваріантності можна використовувати залежність:

а) $\sin u du = d(\cos u)$; б) $\cos u du = d(\sin u)$; в) $\frac{du}{\cos^2 u} = d(ctgu)$.

27. Значення інтеграла для виразу $\int f(ax+b)dx$ **можна записати так:**

а) $aF(ax+b) + C$; б) $F(x)(ax+b) + C$; в) $\frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

28. Формула інтегрування частинами:

а) $\int udv = uv + \int vdu$; б) $\int udv = uv - \int vdu$; в) $\int udv = uv - \int d(uv)$.

29. Чи можна використовувати інтегрування частинами для інтеграла виду: $\int e^{ax} \sin bx \; dx$ **:**

а) ні; б) можна, якщо $a, b>0$; в) так?

30. Чи можна використовувати інтегрування частинами для інтеграла виду $\int P_n(x)e^{ax}dx$:

а) ні; б) можна, якщо $a>0$; в) так?

2.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

Знайти інтеграли, використавши в прикладах 1 - 48 безпосереднє інтегрування, в прикладах 49 - 69 - метод інваріантності, в прикладах 70 - 91 - метод підстановки, в прикладах 92 - 106 - інтегрування частинами.

1. $\int 5dx$.
2. $\int \frac{1}{2}dx$.
3. $\int \frac{x^3}{2}\cdot dx$.
4. $\int 5x^4 dx$.
5. $\int \frac{4-3x}{x^2}dx$.
6. $\int \frac{1-x}{x^2}dx$.
7. $\int \frac{3+2x}{\sqrt{x}}dx$.
8. $\int \frac{x-1}{2\sqrt{x}}dx$.
9. $\int 5^x \ln 5dx$.
10. $\int 2^x \ln 4dx$.
11. $\int 3e^x dx$.
12. $\int 0{,}001e^x dx$.
13. $\int \frac{dx}{3x}$.
14. $\int \frac{2dx}{x}$.
15. $\int \frac{1+\cos x}{4}dx$.
16. $\int \frac{2-2\cos x}{3}dx$.
17. $\int \frac{1-\sin x}{2}dx$.
18. $\int (1+\sin x)dx$.
19. $\int 2tg^2 xdx$.
20. $\int \frac{tg^2}{2}xdx$.
21. $\int \left(4-ctg^2 x\right)dx$.
22. $\int \frac{3-2ctg^2 x}{4}dx$.
23. $\int \frac{5dx}{\sqrt{3-3x^2}}$.
24. $\int \left(1-\frac{1}{\sqrt{2-2x^2}}\right)dx$.
25. $\int \frac{5dx}{1+x^2}$.
26. $\int \left(2+\frac{1}{2+2x^2}\right)dx$.
27. $\int \frac{1-shx}{3}dx$.
28. $\int (1+shx)dx$.
29. $\int \frac{2+3chx}{4}dx$.
30. $\int \frac{chx-2}{5}dx$.
31. $\int 5th^2 xdx$.
32. $\int \left(th^2 x-4\right)dx$.
33. $\int 100cth^2 xdx$.
34. $\int \frac{cth^2}{0{,}01}xdx$.
35. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+4x^2}}$.
36. $\int \frac{4dx}{\sqrt{9x^2+9}}$.

37. $\int \frac{3dx}{\sqrt{10x^2-10}}$.

38. $\int \frac{8dx}{\sqrt{-16+16x^2}}$.

39. $\int \frac{23dx}{46-46x^2}$.

40. $-\int \frac{17dx}{4x^2-4}$.

41. $\int \left(2x+1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

42. $\int \left(2x^{49}-\frac{3}{17x}-\frac{9}{x^2}\right)dx$.

43. $\int (3x^2+2)\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx$.

44. $\int (x^4+x)\left(\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^3}\right)dx$.

45. $\int \frac{3x^2+2}{x}dx$.

46. $\int \frac{x^4-4}{x^6}dx$.

47. $\int \frac{(x^2-2)^2}{x}dx$.

48. $\int \frac{(x+2)^3}{x^2}dx$.

49. $\int \frac{1}{2}\sin x\cos xdx$.

50. $\int \cos x\sin xdx$.

51. $\int \frac{dx}{(x+2)^2}$.

52. $\int (25+x)^{101}dx$.

53. $\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$.

54. $\int \sqrt{x+2}dx$.

55. $-\int \frac{\ln^3 xdx}{x}$.

56. $\int \frac{5dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

57. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

58. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$.

59. $\int \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$.

60. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

61. $-\int \sin(5x+12)dx$.

63. $\int \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$.

64. $\int e^x\cos e^x dx$.

65. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$.

66. $\int \frac{4e^x}{1+e^{2x}}dx$.

67. $\int tgxdx$.

68. $\int ctgx\,dx$.

69. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$.

70. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$.

71. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

72. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$.

73. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

74. $\int x(3x+2)^{10}dx$.

75. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$.

76. $\int \frac{x}{(2+x)^2}dx$.

77. $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$.

78. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$.

79. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

80. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$.

81. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$.

82. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$.

83. $\int \frac{4dx}{\sqrt{2+e^{2x}}}$.

84. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$.

85. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

86. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

87. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

88. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

89. $\int \sqrt{3+2t^2}\,dx$.

90. $\int \sqrt{3-2t^2}\,dx$.

91. $\int \sqrt{2t^2-3}\,dx$.

92. $\int x\sqrt{3+2t^2}\,dx$.

93. $\int e^{2x}(x+1)dx$.

94. $\int e^x x^2 dx$.

95. $\int x\sin 2x dx$.

96. $\int x^2 \sin x dx$.

97. $\int x^2 \cos 3x dx$.

98. $\int x\cos^2 3x dx$.

99. $\int \ln 4x dx$.

100. $\int x \ln x dx$.

101. $\int x \ \arcsin 2x dx$.

102. $\int 2x^2 \arcsin x dx$.

103. $\int 3x \ \arccos 3x dx$.

104. $\int e^x \cos 2x dx$.

105. $\int e^{2x} \cos x dx$.

106. $\int e^{2x} \cos^2 x dx$.

2.9. Самостійна робота

ПРИКЛАД 1. Побудувати зворотну функцію до $y = sh(x)$.

Розв'язання

Нехай задана функція $y = sh(x)$.

За визначенням $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = e^x - e^{-x}$.

Нехай $e^x = t \geq 0$, тоді $2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow 2y = t - \frac{1}{t} \Rightarrow 2yt = t^2 - 1$.

Отже, $t^2 - 2yt - 1 = 0$. Розв'язанням останнього рівняння буде $t = y + \sqrt{y^2+1}$.

Таким чином, $e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right|$.

Перепозначив залежну і незалежну змінні, отримаємо функцію, обернену до заданої $y = sh(x)$:

$y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$, або $arsh(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$.

Функції $arch(x)$ і $arth(x)$ будуємо аналогічно.

Значення для всіх зворотних функцій:

$$arsh(x) = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|;$$

$$arch(x) = ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|;$$

$$arth(x) = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

Це дозволяє записати інтеграли в такому вигляді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arshx + C = ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = archx + C = ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = arthx + C = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

ПРИКЛАД 2. Побудувати рекурентну залежність для обчислення інтеграла виду $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$.

Розв'язання

Нехай $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$, де $n \in N$.

При $n = 1$ маємо $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C$;

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^n} dx = \int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^n} dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n} dx = J_{n-1} - J.$$

Розглянемо інтеграл J:

$$J = \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n} & v = -\frac{1}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} = -\frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1}.$$

Отже,

$$J_n = J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1};$$

$$J_n = \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) J_{n-1};$$

$$J_n = \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}.$$

Це і є формула рекурсивної залежності для обчислення інтегралів вигляду

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}, \text{ де } n \in N.$$

Приклад використання формули наведений в підрозділі 2.5.4.

Інтегрування дробово-раціональних функцій. Розкладання дрібно-раціональних функцій на найпростіші. Дрібно-раціональні функції. Найпростіші дрібно-раціональні функції. Визначення значень числових коефіцієнтів розкладання дрібно-раціональних функцій на найпростіші. Інтегрування перших двох найпростіших раціональних дробів. Інтегрування третьої найпростішої раціонального дробу. Інтегрування четвертої найпростішої раціонального дробу. висновки

3 ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

3.1. Розкладання дрібно-раціональних функцій на найпростіші

3.1.1. Дрібно-раціональні функції

Нагадування. Дрібно-раціональної функцією називають вираз, що представляє собою відношення двох многочленів:

$$F(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $F(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i}{\sum\limits_{i=0}^{n}b_ix^i}=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n}$.

Дрібно-раціональний вираз називається правильним, якщо порядок многочлена в чисельнику менше порядку многочлена в знаменнику:

$$dim\,P_m(x)<dim\,Q_n(x).$$

Якщо дрібно-раціональна функція неправильна, то її можна перетворити в змішану, представивши її як суму цілої частини і правильної дрібно-раціональною. Для цього використовують поділ многочлена на многочлен в стовпчик.

ПРИКЛАД. Виділити цілу частину $F(x)=\dfrac{2x^6-3x^5+x^4-2x^2+4x}{x^5-x^4-x+1}$.

Рішення

$$\begin{array}{r|l}
2x^6-3x^5+x^4-2x^2+4x & x^5-x^4-x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^6-2x^5-2x^2+2x} & 2x-1 \\
-x^5+x^4+2x & \\
\underline{-x^5+x^4+x-1} & \\
x+1 &
\end{array}$$

$$F(x) = 2x - 1 + \frac{x+1}{x^5 - x^4 - x + 1}.$$

3.1.2. Найпростіші дрібно-раціональні функції

Def. Правильні раціональні дроби виду

I. $\frac{A}{x-a}$**,**

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ **(**$k \geq 2, \quad k \in N$ **),**

III. $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$ $\left(p^2 - 4q < 0\right)$**, Тобто коріння знаменника комплексні,**

IV. $\frac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^k}$ $\left(k \geq 2,\ k \in N,\ \ p^2 - 4q < 0\right)$**,**

де A**,** B**,** p**,** q **- дійсні числа, називаються найпростішими раціональними дробами I, II, III, IV типів.**

*Затвердження.*Якщо квадратний тричлен має два комплексних сполучених кореня $x_1 = a + bi$ і $x_1 = a - bi$, То його можна записати в вигляді

$$\left(x - (a+bi)\right)\left(x - (a-bi)\right) = x^2 - x(a - bi) - (a + bi)x + (a - bi)(a + bi) =$$
$$= x^2 - xa + xbi - xa - xbi + a^2 + b^2 = x^2 - 2xa + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

де $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$. При цьому $p^2 - 4q < 0$.

*Затвердження.*якщо многочлен n-го порядку має не тільки дійсні, а й уявні корені, то його можна записати в вигляді

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_1)^{\alpha_2} \ldots (x - x_1)^{\alpha_s}\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{k_1}\left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{k_2} \ldots$$
$$\ldots\left(x^2 + p_t x + q_t\right)^{k_t},$$

де $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s + 2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_t = n$.

Затвердження. Будь-яку правильну раціональну дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, Знаменник якої розкладається на множники:

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_1)^{\alpha_2} \ldots (x - x_1)^{\alpha_s}\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{k_1}\left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{k_2} \ldots$$
$$\ldots\left(x^2 + p_t x + q_t\right)^{k_t},$$

де $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_s + 2k_1 + 2k_2 + ... + 2k_t = n$, Можна уявити, причому єдиним чином, у вигляді суми найпростіших дробів

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + ... + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + ... + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x - x_2)^{\alpha_2}} + ...$$

$$... + \frac{A_{s1}}{x - x_s} + \frac{A_{s2}}{(x - x_s)^2} + ... + \frac{A_{s\alpha_s}}{(x - x_s)^{\alpha_s}} +$$

$$+ \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_{12}x + D_{12}}{\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^2} + ... + \frac{C_{1k_1}x + D_{1k_1}}{\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{C_{21}x + D_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{C_{22}x + D_{22}}{\left(x^2 + p_2x + q_2\right)^2} + ... + \frac{C_{2k_1}x + D_{2k_2}}{\left(x^2 + p_2x + q_2\right)^{k_2}} + ...$$

$$... + \frac{C_{t1}x + D_{t1}}{x^2 + p_tx + q_t} + \frac{C_{t2}x + D_{t2}}{\left(x^2 + p_tx + q_t\right)^2} + ... + \frac{C_{tk_1}x + D_{tk_t}}{\left(x^2 + p_tx + q_t\right)^{k_t}},$$

де A_{11}, A_{12}, ..., C_{11}, C_{12}, ..., D_{11}, D_{12}, ... - деякі дійсні числа.

ПРИКЛАД 3.1:

$$\frac{x-3}{x^3 - x} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A_{11}}{x} + \frac{A_{21}}{x-1} + \frac{A_{31}}{x+1};$$

$$\frac{3x^2 - 1}{(x^2-1)^3} = \frac{3x^2-1}{(x-1)^3(x+1)^3} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{13}}{(x-1)^3} + \frac{A_{21}}{x+1} + \frac{A_{22}}{(x+1)^2} + \frac{A_{23}}{(x+1)^3};$$

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = -\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(1+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{1+x^2};$$

$$\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2} = \left|D = (-6)^2 - 4\cdot 13 < 0\right| = \frac{Ax+B}{x^2-6x+13} + \frac{Cx+D}{(x^2-6x+13)^2};$$

$$\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2} = \frac{A_1}{1+x} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{1+x^2} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(1+x^2)^2}.$$

3.1.3. Визначення значень числових коефіцієнтів розкладання дрібно-раціональних функцій на найпростіші

Для визначення значень числових коефіцієнтів застосовують:

- метод невизначених коефіцієнтів;

- метод завдання приватних значень;
- метод викреслювання.

1. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод заснований на рівність двох дробів. Праву частину запису дрібно-раціональної функції через найпростіші дроби з загальними числовими коефіцієнтами призводять до спільного знаменника. З рівності числителей лівої і правої дробів будують рівності щодо ступеня змінної x. Вирішують отриману систему лінійних рівнянь щодо невідомих числових коефіцієнтів.

2. Метод завдання приватних значень. Метод заснований на рівність двох дробів. Праву частину запису дрібно-раціональної функції через найпростіші дроби з загальними числовими коефіцієнтами призводять до спільного знаменника. Записують рівність числителей лівої і правої дробів. Так як це - тотожність, воно повинно виконуватися для будь-яких значень x. Рекомендується підставляти значення коренів многочлена знаменника. При підстановці довільних значень x отримують значення числових коефіцієнтів.

3. Метод викреслювання можна використовувати тільки для дійсних простих коренів многочлена знаменника. По черзі записують рівності лівої дробу кожної найпростішої дробу. В отриманих равенствах викреслюють однакові лінійності розкладання щодо коренів і підставляють цей корінь в отриманий вираз замість x. Отримують значення числових коефіцієнтів.

ПРИКЛАД 3.2.розкласти функцію $\dfrac{x-3}{x(x-1)(x+1)}$ на найпростіші і визначити значення числових коефіцієнтів розкладання.

Рішення

1. Метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1};$$

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)};$$

$$x-3=x^2(A+B+C)+x(B-C)+x^0(-A);$$

$$\begin{array}{lll} x^2: & 0=A+B+C, & \\ x^1: & 1=B-C, & \\ x^0: & -3=-A, & \end{array} \begin{cases} A=3, \\ B+C=-3, \\ B-C=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3, \\ D=-1, \\ C=-2; \end{cases}$$

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}.$$

2. Метод завдання приватних значень:

$x-3 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$;

$x=0$, $x=1$, $x=-1$;

$x = \ 0: \quad -3 = -A \quad \Rightarrow \quad A = 3,$

$x = \ 1: \quad 1-3 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = -1,$

$x = -1: \quad -1-3 = -C(-2) \quad \Rightarrow \quad C = -2.$

3. Метод викреслювання використовується для дійсних простих коренів. із запису

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

складаємо співвідношення:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x};\ \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{B}{x-1};\ \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{C}{x+1}.$$

Викреслюємо зліва і справа однакові вирази і підставляємо в отримані вирази значення коренів викреслених виразів:

$$A = \left.\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}\right|_{x=0},\ B = \left.\frac{x-3}{x(x+1)}\right|_{x=1},\ C = \left.\frac{x-3}{x(x-1)}\right|_{x=-1}.$$

Отримуємо значення коефіцієнтів:

$$A = \frac{0-3}{(0-1)(0+1)} = 3;\ B = \frac{1-3}{1(1+1)} = -1;\ C = \frac{-1-3}{-1(-1-1)} = -2.$$

3.2. Інтегрування найпростіших раціональних дробів

Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів чотирьох типів:

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ \ ln|x-a| + C$.

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$.

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx - \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) I,$$

де $I=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}$.

для обчислення I можуть бути використані формули:

a) якщо $q-\frac{p^2}{4}>0$, то $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$;

b) якщо $q-\frac{p^2}{4}<0$, то $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arth}\frac{x}{a}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

4. $$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{(x^2+px+q)^n}dx=$$
$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx-\left(\frac{Ap}{2}-B\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=$$
$$=\frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}-\left(\frac{Ap}{2}-B\right)I_n,$$

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\int\frac{dx}{\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q\right)^n}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\left|q-\frac{p^2}{4}\right|=\alpha^2\\ x+\frac{p}{2}=\alpha t,\quad dx=\alpha dt\end{array}\right|=\int\frac{\alpha dt}{\left(\alpha^2t^2+\alpha^2\right)^n}=\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^n}.$$

Прийшли до рекуррентной формулою.

ПРИКЛАД 3.3:

$$\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+7)-\frac{21}{2}+4}{x^2+7x+14}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+7}{x^2+7x+14}dx-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{x^2+7x+14}=$$
$$=\frac{3}{2}ln\left(x^2+7x+14\right)-\frac{13}{2}I+C;$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2+7x+14}=\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{7}{2}x+\frac{49}{2}-\frac{49}{2}+14}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=\left|\begin{matrix} \frac{7}{4}=\alpha^2; & \alpha=\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \left(x+\frac{7}{2}\right)=t\alpha; & dx=\alpha dt \end{matrix}\right| = \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}dt}{\frac{7}{4}t^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{7}} + C,$$

$$\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+7x+14) - \frac{13}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{7}} + C.$$

ПРИКЛАД 3.4:

$$\int\frac{3x+1}{x^2+4x+1}dx = \int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-6+1}{x^2+4x+1}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+1}dx - 5\int\frac{dx}{x^2+4x+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+1) - 5I + C,$$

$$I = \int\frac{dx}{x^2+4x+1} = \int\frac{dx}{x^2+4x+4-4+1} = \int\frac{dx}{(x+2)^2-3} = \left|\begin{matrix} 3=\alpha^2; & \alpha=\sqrt{3} \\ x+2=\alpha t; & dx=\alpha dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \int\frac{\sqrt{3}dt}{3t^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcth} t = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right| + C,$$

$$\int\frac{3x+1}{x^2+4x+1}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+1) - \frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}} + C.$$

висновок: Інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається через елементарні функції: раціональні, логарифмічні і арктангенс.

3.3. висновки

Дрібно-раціональної функцією називають вираз, що представляє собою відношення двох многочленів:

$$F(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}.$$

Дрібно-раціональний вираз називається правильним, якщо порядок многочлена в чисельнику менше порядку многочлена в знаменнику:

$$dim\, P_m(x) < dim\, Q_n(x).$$

Def. Правильні раціональні дроби виду

I. $\dfrac{A}{x-a}$**,**

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}\quad (k \ge 2,\ k \in N)$**,**

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}\quad (p^2-4q<0)$**,**

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\quad (k \ge 2,\ k \in N,\ \ p^2-4q<0)$**,**

де A**,** B**,** p**,** q ***- дійсні числа, називаються найпростішими раціональними дробами I, II, III, IV типів.***

Якщо квадратний тричлен має два комплексних сполучених кореня $x_1 = a+bi$ *і* $x_1 = a-bi$*, То його можна записати в вигляді* x^2+px+q*. При цьому* $p^2-4q<0$.

якщо многочлен n*-го порядку має не тільки дійсні, а й уявні корені, то його можна записати так:*

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_1)^{\alpha_2}\dots(x-x_1)^{\alpha_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{k_2}\dots$$
$$\dots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{k_t},$$

де $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_s+2k_1+2k_2+\dots+2k_t = n$.

Затвердження. Будь-яку правильну раціональну дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$*, Знаменник якої розкладається на множники:*

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_1)^{\alpha_2}\dots(x-x_1)^{\alpha_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{k_2}\dots$$
$$\dots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{k_t},$$

де $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_s+2k_1+2k_2+\dots+2k_t = n$*, Можна уявити єдиним чином, у вигляді суми найпростіших дробів:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{21}}{x-x_2}+\frac{A_{22}}{(x-x_2)^2}+\dots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}}+\dots$$
$$\dots+\frac{A_{s1}}{x-x_s}+\frac{A_{s2}}{(x-x_s)^2}+\dots+\frac{A_{s\alpha_s}}{(x-x_s)^{\alpha_s}}+$$
$$+\frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_{12}x+D_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\dots+\frac{C_{1k_1}x+D_{1k_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}}+$$

$$+\frac{C_{21}x+D_{21}}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{C_{22}x+D_{22}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}+...+\frac{C_{2k_1}x+D_{2k_2}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{k_2}}+...$$

$$...+\frac{C_{t1}x+D_{t1}}{x^2+p_tx+q_t}+\frac{C_{t2}x+D_{t2}}{\left(x^2+p_tx+q_t\right)^2}+...+\frac{C_{tk_1}x+D_{tk_t}}{\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{k_t}},$$

де A_{11}, A_{12}, ..., C_{11}, C_{12}, ..., D_{11}, D_{12}, ... - *деякі дійсні числа.*

Для визначення значень числових коефіцієнтів застосовують:

1. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод заснований на рівність двох дробів. Праву частину запису дрібно-раціональної функції через найпростіші дроби з загальними числовими коефіцієнтами призводять до спільного знаменника. З рівності числителей лівої і правої дробів будують рівності записів щодо ступеня змінної x. *Вирішують отриману систему лінійних рівнянь щодо невідомих числових коефіцієнтів.*

2. Метод завдання приватних значень. Метод заснований на рівність двох дробів. Праву частину запису дрібно-раціональної функції через найпростіші дроби з загальними числовими коефіцієнтами призводять до спільного знаменника. Записують рівність числителей лівої і правої дробів. Так як це - тотожність, воно повинно виконуватися для будь-яких значень x. *Рекомендується підставляти значення коренів многочлена знаменника. При підстановці довільних значень* x *отримують значення числових коефіцієнтів.*

3. Метод викреслювання можна використовувати тільки для дійсних простих коренів многочлена знаменника. По черзі записують рівності лівої дробу кожної найпростішої дробу. В отриманих равенствах викреслюють однакові лінійності розкладання щодо коренів і підставляють цей корінь в отриманий вираз замість x. *Отримують значення числових коефіцієнтів.*

Інтегрування найпростіших раціональних дробів можна представити в наступному вигляді:

I. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ \ ln\left|x-a\right|+C$.

II. $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$.

III. $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I$,

де $I=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}$.

для обчислення I можуть бути використані формули:

- *якщо* $q-\frac{p^2}{4}>0$, *то* $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$;

- *якщо* $q-\frac{p^2}{4}<0$, *то* $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

IV. $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\frac{A}{2(1-n)\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_n$;

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\int\frac{dx}{\left(\left(x^2+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\left\|q-\frac{p^2}{4}\right|=\alpha^2\\ x+\frac{p}{2}=\alpha t,\quad dx=\alpha dt\end{array}\right|=\int\frac{\alpha dt}{\left(\alpha^2t^2+\alpha^2\right)^n}=\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^n}.$$

Прийшли до рекуррентной формулою.

Інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається через елементарні функції: раціональні, логарифмічні і арктангенс.

Перерва

● Раціональні числа розмножуються поділом!

● На іспиті з вищої математики студента групи 310 просять дати визначення кореня многочлена кратністю два. Студент, подумавши, відповідає:

- Значить так, якщо підставити число в многочлен і в результаті вийде нуль, а потім знову підставити це число, і знову вийде нуль, а от якщо в третій раз підставити те ж саме число і нуль не вийде, то це і буде корінь кратністю два .

● Котра година?

- За п'ять хвилин одинадцять.
- Шість, чи що?

3.4. Питання для перевірки

1. Дрібно-раціональної функцією називають функцію, яка представляє собою:

а) дріб, чисельник і знаменник якого - многочлени; б) дріб, чисельник якого - число, а знаменник - многочлен; в) дріб, чисельник якого - многочлен, а знаменник - число.

2. Дрібно-раціональна функція називається правильної, якщо:

а) в чисельнику знаходиться число, а в знаменнику многочлен; б) ступінь многочлена в чисельнику менше ступеня многочлена в знаменнику; в) ступінь многочлена в чисельнику не менш ступеня многочлена в знаменнику.

3. До простих відноситься дріб виду:

а) $\dfrac{Ax + b}{x - a}$; б) $\dfrac{A + B}{x - a}$; в) $\dfrac{A}{x - a}$.

4. Перетворити неправильну дрібно-раціональну функцію в правильну можна так:

а) розділити чисельник і знаменник на один і той же поліном; б) помножити чисельник і знаменник на один і той же поліном; в) розділити чисельник на знаменник.

5. При негативному дискримінант $x^2 + px + q$ до найпростіших відноситься дріб виду:

а) $\dfrac{A}{x^2 + px + q}$; б) $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$; в) $\dfrac{Ax^2 + Bx + C}{x^2 + px + q}$.

6. При негативному дискримінант $x^2 + px + q$ до найпростіших відноситься дріб виду:

а) $\dfrac{Ax}{x^2 + px + q}$; б) $\dfrac{A}{x^2 + px + q}$; в) $\dfrac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^n}$.

7. Інтеграл найпростішої раціонального дробу $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$ **дорівнює:**

а) $\dfrac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$; б) $A \cdot ln|x-a| + C$; в) $\dfrac{A}{(1+n)(x-a)^{n+1}} + C$.

8. Інтеграл найпростішої раціонального дробу $\int \frac{A}{x-a}dx$ **дорівнює:**

а) $\dfrac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$; б) $A \cdot ln|x-a| + C$; в) $\dfrac{A}{(1+n)(x-a)^{n+1}} + C$.

9. Інтеграл $\int \dfrac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^n}dx$ **можна перетворити до вигляду:**

а) $\int \dfrac{\frac{A}{2}(2x + p) - \frac{Ap}{2} + B}{\left(x^2 + px + q\right)^n}dx$; б) $\int \left(\dfrac{\frac{A}{2}(2x + p)}{\left(x^2 + p\right)^n} \quad \dfrac{-\frac{Ap}{2} + B}{(x + q)^n} \right)dx$;

в) $\int \left(\dfrac{\frac{A}{2}(2x + p)}{\left(x^2 + p\right)^n} + \dfrac{-\frac{Ap}{2} + B}{(x + q)^n} \right)dx$.

10. Інтеграл $\int \dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}dx$ **можна перетворити до вигляду:**

а) $\int \left(\dfrac{\frac{A}{2}(2x + p)}{x^2 + p} + \dfrac{-\frac{Ap}{2} + B}{x + q} \right)dx$; б) $\int \left(\dfrac{\frac{A}{2}(2x + p)}{x^2 + p} \cdot \dfrac{-\frac{Ap}{2} + B}{x + q} \right)dx$;

в) $\int \dfrac{\frac{A}{2}(2x + p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2 + px + q}dx$.

3.5.Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. $\int \frac{5}{x-2}dx$.
2. $\int \frac{4}{x-3}dx$.
3. $\int \frac{2}{2x+1}dx$.
4. $\int \frac{10}{5x+2}dx$.
5. $\int \frac{3}{(x+3)^2}dx$.
6. $\int \frac{2}{(2x-1)^3}dx$.
7. $\int \frac{3}{(3x-2)^3}dx$.
8. $\int \frac{1}{(2x+3)^2}dx$.
9. $\int \frac{5}{(5x-1)^4}dx$.
10. $\int \frac{2}{(2x+5)^5}dx$.
11. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}dx$.
12. $\int \frac{x+1}{x^2+4x-5}dx$.
13. $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+4}dx$.
14. $\int \frac{x}{x^2-3x+3}dx$.
15. $\int \frac{2x-5}{\left(x^2-5x+4\right)^3}dx$.
16. $\int \frac{5x-13}{\left(x^2-5x+6\right)^2}dx$.
17. $\int \frac{x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^3}dx$.
18. $\int \frac{x-2}{\left(x^2+2x+2\right)^3}dx$.
19. $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$.
20. $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}dx$.
21. $\int \frac{3x}{(2x-1)(4x-2)}dx$.
22. $\int \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}dx$.
23. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$.
24. $\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \frac{dx}{8}$.
25. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.
26. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.
27. $\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}$.
28. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$.
29. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.
30. $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$.
31. $\int \frac{dx}{1+x^4}$.
32. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^4}$.
33. $\int \frac{x^2dx}{\left(1-x^4\right)^2}$.

3.6.Самостійна робота

Запис рішення квадратного рівняння в загальному вигляді $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

якщо $b^2-4ac>0$, То коріння дійсні.

якщо $b^2 - 4ac < 0$, То коріння комплексні.

якщо $b^2 - 4ac = 0$, То коріння дійсні кратністю 2, т. Е. $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

для рівняння

$$ax^2 + 2px + c = 0,$$

коли другий коефіцієнт - число парне, рішення має вигляд

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - ac}}{a}.$$

Наведемо деякі факти з історії виникнення невизначених інтегралів (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

вчений	Роки життя	Внесок в математику
Блез Паскаль - французький математик, механік, фізик	1623-1662	Довів ряд теорем, що стосуються інтегрування частинами та заміни змінної
Ісаак Барроу - англійський математик, фізик і богослов, учительНьютона	1630-1677	Показав зв'язок між інтеграцією і диференціюванням як взаємно зворотними операціями в геометричній формі. Вивів формули для обчислення довжин дуг кривих, заданих в декартових і полярних координатах
Ісаак Ньютон - англійська фізик, математик, механік і астроном	1643-1727	В "Математичних засадах натуральної філософії" (1687 г.) розробив загальний метод диференціювання і інтегрування, показавши, що ці процеси назад один до одного
Готфрід Вільгельм Лейбніц - німецький математик	1646-1716	Створив власну диференціальне та інтегральне числення. Розробив правила інтегрування.Ввів назви диференціального й інтегрального числення, запропонував символ інтеграла

Продовження табл. 3.1

вчений	Роки життя	Внесок в математику
Якоб Бернуллі - швейцарський математик	1654-1705	Вирішив завдання Лейбніца про форму полукубические параболи, Опублікувавши доказ через рішеннядиференціального рівняння
Йоганн Бернуллі - швейцарський математик	1667-1748	Склав конспект нового вчення з двох частин: числення нескінченно малих та інтегральне числення
Леонард Ейлер - швейцарський математик, механік і фізик	1707-1783	Видав трактати "Диференціальне числення" (1755 р Берлін) і "Інтегральне числення" в трьох томах (1768-1770 рр., Санкт-Петербург). Виклав диференціальне й інтегральне числення, теорію диференціальних рівнянь, теорему Тейлора з багатьма додатками, формулу підсумовування Ейлера і ейлерови інтеграли
Адрієн Марі Лежандр- французький математик	1752-1833	Опублікував "Вправи з інтегрального числення" в трьох томах (1811-1819) і "Трактат про еліптичних функціях і ейлерових інтеграли" (1827-1832)
Нільс Хенрік Абель - норвезький математик	1802-1829	Досліджував статечні ряди
Карл Густав Якобі- німецький математик і механік	1804-1851	розробивкомплексний аналіз
Михайло Васильович Остроградський - російський математик і механік українського походження	1801-1862	Досліджував прикладні аспекти математичного аналізу. розробивметоди інтегрування раціональних функцій, Перетворення об'ємного інтеграла в поверхневий
Пафнутій Львович Чебишев -російська математик і механік	1821-1894	Отримав фундаментальні результати в теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії наближення функцій, математичному аналізе,геометрії, прикладної математики

Закінчення табл. 3.1

вчений	Роки життя	Внесок в математику

Георг Фрідріх Бернгард Ріман - німецький математик, механік і фізик	1826-1866	Визначив поняття n-мірного різноманіття і йогометрики, Узагальнив гауссову теорію поверхонь на багатовимірний випадок; ввів поняттятензора кривизни і інші поняття рімановової геометрії. передбачивзагальну теорію відносності

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Я випадково розділив на нуль і всі мої обчислення тут же згоріли.

Що кажуть про математику

«Науки математичні з давніх-давен привертали до себе себе особливу увагу, в даний час вони отримали ще більше інтересу щодо впливу свого на мистецтво і промисловість» (П. Л. Чебишев).

Інтегрування тригонометричних функцій і алгебраїчних іраціональносте. Біноміальний диференціал. Інтегрування тригонометричних функцій. Вирази для тригонометричних підстановок. Приклади використання тригонометричних підстановок. Інтегрування алгебраїчних ирраціональностей. Змінна в дробовоі ступеня. Ставлення лінійного або лінійність в дробової ступеня

4. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ І АЛГЕБРАЇЧНИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ. БІНОМІАЛЬНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ

4.1. Інтегрування тригонометричних функцій

При інтегруванні тригонометричних функцій можна використовувати такі способи:

1. Перетворення подинтегральную виразів. У цьому випадку основні формули - це перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right),$$

а також формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Іноді можна використовувати і запис тригонометричних функцій в експоненційної формі:

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},\ \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}.$$

2. Метод підстановки. Основний універсальної підстановкою тут є підстановка $t = tg\,\frac{x}{2}$. Але в деяких випадках така підстановка приводить до громіздких виразів, тому використовують окремі випадки підстановок: $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = tgx$.

Умова використання таких приватних підстановок можна записати в наступному вигляді:

2.1. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, заміна $\cos x = t$, Т. Е. Якщо вираз непарній щодо синуса, іншими словами, якщо при заміні $\sin x$ на $-\sin x$ знак функції змінюється, а при заміні $\cos x$ на $-\cos x$ не змінюється.

2.2. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, заміна $\sin x = t$, Т. Е. Якщо вираз непарній щодо косинуса, іншими словами, якщо при заміні $\cos x$ на $-\cos x$ знак функції змінюється, а при заміні $\sin x$ на $-\sin x$ не змінюється.

2.3. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, заміна $\operatorname{tg} x = t$, Т. Е. Якщо вираз парне щодо синуса і косинуса.

2.4. $R(\operatorname{tg} x)$, заміна $\operatorname{tg} x = t$.

Зауваження:

1. підстановка виду $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ називається універсальною.

2. Наведені підстановки перетворять інтеграли від тригонометричних функцій в інтеграли від раціональних функцій.

4.1.1. Вирази для тригонометричних підстановок

Розглянемо тригонометричні підстановки.

1. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. В цьому випадку

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

тому $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, то $\operatorname{arctg} t = \dfrac{x}{2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1 + t^2}$.

2. $\operatorname{tg} x = t$. В цьому випадку

$$\sin x = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}},$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}};$$

тому $\operatorname{tg} x = t$, то $\operatorname{arctg} t = x$, $dx = \dfrac{dt}{1 + t^2}$.

3. $\cos x = t$. У цьому випадку використовується $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, $-\sin x\,dx = dt$.

4. $\sin x = t$. У цьому випадку використовується $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, $\cos x\,dx = dt$.

4.1.2. Приклади використання тригонометричних підстановок

ПРИКЛАД 1.знайти $\int sin^2 x cos^4 xdx$.

Рішення

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 4x\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - I + C\right);$$

$$I = \int \cos 4x\cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos(4x-2x)+\cos(4x+2x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 6x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

ПРИКЛАД 2. знайти $\int \frac{dx}{sin^3 x}$.

Рішення

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left| \begin{matrix} t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ dx = \dfrac{2\,dt}{t^2+1} \end{matrix} \right| = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\dfrac{2t}{t^2+1}\right)^3} = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}\right) + C.$$

ПРИКЛАД 3. знайти $I = \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$.

Рішення

випадок $\int R(\cos^{-2}x,\sin^{-2}x)\,dx$, Тобто $m+n=-2k$ (При заміні $\cos x$ на $-\cos x$ і $\sin x$ на $-\sin x$ знак функції не змінюється, тобто $\operatorname{tg}x=t$). отже,

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\left|\begin{matrix} tgx=t & x=arctgt & dx=\dfrac{dt}{t^2+1}\\ \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} & & \cos x=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)\left(a^2\dfrac{1}{t^2+1}x+b^2\dfrac{t^2}{t^2+1}\right)}=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{1+\dfrac{b^2}{a^2}t^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\dfrac{a}{b}d\left(\dfrac{b}{a}t\right)}{1+\left(\dfrac{b}{a}t\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}+C=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

ПРИКЛАД:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin^2x}=\int\frac{dx}{\sin^2x+\cos^2x+\sin^2x}=\int\frac{dx}{\cos^2x+2\sin^2x}=\left|\begin{matrix}a=1\\ b^2=2\end{matrix}\right|=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)+C$;

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cos^2x}=\int\frac{dx}{2\cos^2x+\sin^2x}=\left|\begin{matrix}a^2=2\\ b=1\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}x\right)+C$.

ПРИКЛАД 4. знайти $\displaystyle\int\frac{\cos^5x}{\sin^4x}dx$.

Рішення

при заміні $\cos x$ на $-\cos x$ знак під інтегрального вираження змінюється ($m=-4$, $n=5$, $n=2k+1>0$), Робимо підстановку $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$:

$$\int\frac{\cos^5x}{\sin^4x}dx=\int\frac{\cos^4x}{\sin^4x}\cos xdx=\int\frac{\left(1-\sin^2x\right)^2}{\sin^4x}\cos xdx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^4}dt=$$

$$=\int\frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{2}{t^2}+t\right)dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{2}{t}+t+C=-\frac{1}{\sin^3x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C.$$

4.2. Інтегрування алгебраїчних ірраціональносте

4.2.1. Змінна в дробової ступеня

Інтеграл виду

$$\int R(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}, \ldots)\,dx,$$

де α, β, γ, ... - дрібно-раціональні числа, перетворюється в інтеграл від раціональної функції підстановкою

$$x = y^{n},\; dx = ny^{n-1}\,dy,$$

де n - найменше спільне кратне (НОК) знаменників дробів α, β, γ, ...:

$$\int R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, x^{\frac{m_3}{n_3}}, \ldots\right)dx,\; x = y^{n},\; n = \text{НОК}\,(n_1, n_2, n_3, \ldots).$$

У цьому випадку інтеграл перетвориться до виду

$$\int (y^{n\alpha}, y^{n\beta}, y^{n\gamma}, \ldots)\,ny^{n-1}\,dy,$$

де $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$, … - цілі числа.

ПРИКЛАД:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}\,dx.$$

Найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ дорівнює 6. Виконаємо підстановку $x = y^{6}$, $dx = 6y^{5}\,dy$:

$$\int \frac{y^2}{y^4 - y^3} 6y^5 dy = 6\int \frac{y^4}{y-1} dy = 6\int\left(y^3 + y^2 + y + 1 + \frac{1}{y-1}\right)dy =$$

$$= 6\left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1|\right) + C = 6\left(\frac{x^{2/3}}{4} + \frac{x^{1/2}}{3} + \frac{x^{1/3}}{2} + x^{1/6} + \ln\left|x^{1/6} - 1\right|\right) + C.$$

4.2.2. Ставлення лінійного або лінійність в дробової ступеня

інтеграл виду

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \ldots\right],$$

де α, β, γ, ... - дроби, перетворюється в інтеграл від раціональної функції підстановкою

$$\frac{ax+b}{cx+d}=y^n,$$

де n - найменше спільне кратне знаменників дробів α, β, γ, ...

Можливий окремий випадок, коли замість дробу $\frac{ax+b}{cx+d}$ підінтегральний вираз містить дробові ступеня лінійної функції від x, І тоді використовується підстановка $ax+b=y^n$.

ПРИКЛАД 1.знайти $\int \frac{x+3}{x-3}\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\,dx$.

Рішення

підставляємо $\frac{x+3}{x-3}=y^2$, звідки $x+3=y^2x-3y^2$, $x(y^2-1)=3(1+y^2)$,

$x=\frac{3(1+y^2)}{y^2-1}, dx=-\frac{12y}{(y^2-1)^2}dy$:

$$\int y^2\cdot y\frac{-12y}{(y^2-1)^2}dy=-12\int\frac{y^4}{(y^2-1)^2}dy=\left|\begin{matrix} u=y^3 & du=3y^2dy \\ dv=\frac{y\,dy}{(y^2-1)^2} & v=-\frac{1}{2(y^2-1)}\end{matrix}\right|=$$

$$=-12\left(-\frac{y^3}{2(y^2-1)}+\frac{3}{2}\int\frac{y^2\,dy}{y^2-1}\right),$$

$$\int\frac{y^2\,dy}{y^2-1}=\int\frac{y^2-1+1}{y^2-1}dy=\int dy+\int\frac{dy}{y^2-1}=y-\operatorname{arth}y+C,$$

$$\int\frac{x+3}{x-3}\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\,dx=\frac{6y^3}{y^2-1}-18y+18\operatorname{arth}y+C=$$

$$=\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{\frac{3}{2}}-18\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{\frac{1}{2}}+18\operatorname{arth}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}+C.$$

ПРИКЛАД 2.знайти $\int\frac{x^4}{\sqrt{x-1}}dx$.

Рішення

$$\int\frac{x^4}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{x^4}{(x-1)^{1/2}}dx\left|\begin{matrix} x-1=y^2 & dx=2ydy \\ x=y^2+1 & \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{(y^2+1)^4}{y}\cdot 2y\,dy=2\int(y^2+1)^4\,dy=2\int(y^8+4y^6+6y^4+4y^2+1)\,dy=$$

$$=2\left(\frac{y^9}{9}+\frac{4y^7}{7}+\frac{6y^5}{5}+\frac{4y^3}{3}+y\right)+C=$$

$$=2\left(\frac{1}{9}(x-1)^{9/2}+\frac{4}{7}(x-1)^{7/2}+\frac{6}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{4}{3}(x-1)^{3/2}+(x-1)^{1/2}\right)+C\,.$$

4.3. біноміальний диференціал

Інтегралом від біноміального диференціала називають інтеграл виду

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

де m, n, p - будь-які раціональні числа, причому в повному обсязі цілі. Якби це були всі цілі числа, то отримали б ступеневу функцію. Першими це помітили І. Ньютон і Л. Ейлер, а в наслідку П. Чебишев довів, що тільки в трьох випадках цей інтеграл може бути виражений у вигляді алгебраїчної, логарифмічною, зворотної тригонометричної функцій. Ці випадки описані в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Цілі числа	підстановка	s - найменше кратне знаменників
p	$x=y^s$	m, n
$\frac{m+1}{n}$	$a+bx^n=y^s$	p
$\frac{m+1}{n}+p$	$ax^{-n}+b=y^s$	p

ПРИКЛАД 1.знайти $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Рішення

Виконаємо перетворення:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-1/2}(1+x^{1/6})^{1/3}\,dx\,.$$

Для наведеного під інтегрального вираження $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{6}$, $p=\frac{1}{3}$.

В цьому випадку виконується умова: $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=3$, $p=\dfrac{1}{3}$, $s=3$;

$$y^s=a+bx^n \quad \Rightarrow \quad y^3=1+1\cdot x^{1/6}=1+x^{1/6},\ x^{1/6}=y^3-1;\ x=(y^3-1)^6,$$

$x^{-1/2}=(y^3-1)^{-3}$, Тобто $x^{-1/2}=\dfrac{1}{(y^3-1)^3}$, $dx=6(y^3-1)^5\cdot 3y^2\,dy=18(y^3-1)^5y^2\,dy$;

$$\int x^{-1/2}(1+x^{1/6})^{1/3}\,dx=\left|\begin{array}{c} y^3=1+x^{1/6} \\ x^{-1/2}=\dfrac{1}{(y^3-1)^3} \\ dx=18(y^3-1)^5y^2\,dy \end{array}\right|=\int\frac{(y^3)^{1/3}\cdot 18(y^3-1)^5y^2\,dy}{(y^3-1)^3}=$$

$$=18\int(y^3-1)^2y^3\,dy=18\int(y^6-2y^3+1)y^3\,dy=18\int(y^9-2y^6+y^3)\,dy=$$

$$=18\left(\frac{1}{10}y^{10}-\frac{2}{7}y^7+\frac{1}{4}y^4\right)+C=\left|y=\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}\right|=$$

$$=18(1+\sqrt[6]{x})\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}\left(\frac{1}{10}(1+\sqrt[6]{x})^2-\frac{2}{7}(1+\sqrt[6]{x})+\frac{1}{4}\right)+C.$$

ПРИКЛАД 2. знайти $\int\sqrt{x\left(3+4x^3\right)}dx$.

Рішення

Виконаємо перетворення:

$$\int\sqrt{x(3+4x^3)}\,dx=\int x^{1/2}(3+4x^3)^{1/2}\,dx.$$

Для наведеного під інтегрального вираження $m=\dfrac{1}{2}$, $n=3$, $p=\dfrac{1}{2}$.

В цьому випадку виконується умова: $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

отже, $3x^{-3}+4=y^2$, $x^{-3}=\dfrac{y^2-4}{3}$, $x^3=\dfrac{3}{y^2-4}$, $3x^2\,dx=-\dfrac{3\cdot 2y\,dy}{(y^2-4)^2}$,

$x^2\,dx=-\dfrac{2y}{(y^2-4)^2}dy$;

$$I=\int x^{1/2}(3+4x^3)^{1/2}\,dx=\int x^{1/2}\cdot x^{3/2}(3x^{-3}+4)^{1/2}\,dx=\int x^2\left(3x^{-3}+4\right)^{1/2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} 3x^{-3}+4=y^2 \\ x^2dx=-\dfrac{2y}{\left(y^2-4\right)^2}dy \end{array}\right|=-2\int\frac{y^2}{\left(y^2-4\right)^2}dy\,;$$

$$\int\frac{y^2}{(y^2-4)^2}dy=\left|\begin{array}{ll} u=y & du=dy \\ dv=\dfrac{y\,dy}{(y^2-4)^2} & v=-\dfrac{1}{2(y^2-4)} \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{y}{2(y^2-4)}+\int\frac{dy}{2(y^2-4)}=-\frac{y}{2(y^2-4)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|+C\,;$$

$$I=-2\int\frac{y^2}{\left(y^2-4\right)^2}dx=-2\left(-\frac{y}{2\left(y^2-4\right)}+\frac{1}{8}ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|\right)=\frac{y}{y^2-4}-\frac{1}{4}ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|+C=$$

$$=\left|y=\left(3x^{-3}+4\right)^{1/2}\right|=\frac{\left(3x^{-3}+4\right)^{1/2}}{3x^{-3}}-\frac{1}{4}ln\left|\frac{\left(3x^{-3}+4\right)^{1/2}-2}{\left(3x^{-3}+4\right)^{1/2}+2}\right|+C\,.$$

4.4. Висновки

Основні моменти для інтегрування тригонометричних виразів наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

рекомендації	*рішення*
$\int\sin kx\cos lx\,dx$, $\int\sin kx\sin lx\,dx$, $\int\cos kx\cos lx\,dx$ - *використовується перетворення в суму;* $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$, $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$, $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$	$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$. *Загальний випадок - універсальна тригонометрична підстановка:* $t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

Закінчення табл. 4.2

рекомендації	*рішення*	
$\int\sin^{2n}x\,dx$, $\int\cos^{2n}x\,dx$,	*Окремі випадки:* $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$	
	Умова	*підстановка*

$\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\,dx$ - *зниження ступеня,* $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$	$m = 2k+1 > 0$ *(При заміні* $\sin x$ *на* $-\sin x$ *знак функції змінюється)*	$\cos x = t$
	$n = 2k+1 > 0$ *(При заміні* $\cos x$ *на* $-\cos x$ *знак функції змінюється)*	$\sin x = t$
	$m+n = -2k$ *(При заміні* $\sin x$ *на* $-\sin x$, $\cos x$ *на* $-\cos x$ *знак функції не змінюється)*	$\operatorname{tg} x = t$, $\operatorname{ctg} x = t$

Наведені підстановки перетворять інтеграли від тригонометричних функцій в інтеграли від раціональних функцій.

Вирази для тригонометричних підстановок:

1. $tg\,\frac{x}{2} = t$. *В цьому випадку* $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

2. $tgx = t$. *В цьому випадку* $\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

3. $\cos x = t$. *В цьому випадку* $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

4. $\sin x = t$. *В цьому випадку* $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Змінна в дробової ступеня:

$$\int R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, x^{\frac{m_3}{n_3}}, \ldots\right)dx,\ x = y^n,\ n = \text{НОК}\,(n_1, n_2, n_3, \ldots);\ dx = ny^{n-1}dy;$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx,\ \frac{ax+b}{cx+d} = y^n,\ n = \text{НОК}\,(n_1, n_2, n_3, \ldots).$$

Якщо замість дробу $\frac{ax+b}{cx+d}$ *підінтегральний вираз містить дробові ступеня лінійної функції від x, то використовують підстановку* $ax+b=y^n$.

інтеграл виду

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

називають інтегралом від біноміального диференціала. У цьому виразі m, n, p *- будь-які раціональні числа, причому в повному обсязі цілі. І. Ньютон і Л. Ейлер, а в наслідку П. Чебишев довели, що тільки в трьох випадках цей інтеграл може бути виражений у вигляді алгебраїчної, логарифмічною, зворотної тригонометричної функцій. Ці випадки описані в табл. 4.3.*

Таблиця 4.3

Цілі числа	*підстановка*	s *- найменше кратне знаменників*
p	$x=y^s$	m, n
$\frac{m+1}{n}$	$a+bx^n=y^s$	p
$\frac{m+1}{n}+p$	$ax^{-n}+b=y^s$	p

Перерва

● Добре - це коли іспит зданий на "три". Відмінно - це якщо з першого разу.

● Зустрічаються два математика.
- Чув останній анекдот?
- Ні!
- Тангенс пі навпіл існує!
- Ха-ха-ха !!!

● Люди діляться на три частини - ті, хто запам'ятовує число "e" (2,718281828 ...) через рік народження Л. М. Толстого (1828), ті, хто через "e" запам'ятовує, коли народився Толстой, і ті , кому байдуже і те, і інше ...

4.5. Питання для перевірки

1. При вирішенні інтегралів, що містять тригонометричні вирази, використовується універсальна тригонометрична підстановка:

а) $t = tgx$; б) $t = tg\frac{x}{2}$; в) $t = tg2x$.

2. Якщо для під інтегрального тригонометричного виразу виконується умова $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$**, То рекомендується використовувати підстановку:**

а) $t = tgx$; б) $t = \cos x$; в) $t = \sin x$.

3. Якщо для під інтегрального тригонометричного виразу виконується умова $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$**, То рекомендується використовувати підстановку:**

а) $t = tgx$; б) $t = \cos x$; в) $t = \sin x$.

4. Якщо для під інтегрального тригонометричного виразу виконується умова $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$**, То рекомендується використовувати підстановку:**

а) $t = tgx$; б) $t = \cos x$; в) $t = \sin x$.

5. Вираз $\sin\alpha\cos\alpha$ **тотожно дорівнює:**

а) $\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$; б) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$; в) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$.

6. Вираз $\sin\alpha\sin\alpha$ **тотожно дорівнює:**

а) $\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$; б) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$; в) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$.

7. Вираз $\cos\alpha\cos\alpha$ **тотожно дорівнює:**

а) $\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$; б) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$; в) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$.

8. Виберіть правильну запис для підстановки $t = tg\frac{x}{2}$**:**

а) $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; б) $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; в) $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

9. Виберіть правильну запис для підстановки $t = tgx$**:**

а) $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; б) $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; в) $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

10. Виберіть правильну запис для підстановки $t = \sin x$**:**

а) $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; б) $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; в) $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

11. Виберіть правильну запис для тригонометричної формули пониження порядку:

а) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$; б) $2\cos^2 x = 1 - \cos 2x$; в) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

12. Виберіть правильну запис для підстановки $t = tg\frac{x}{2}$**:**

а) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; б) $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; в) $\sin x = \sqrt{1-t^2}$.

13. Виберіть правильну запис для підстановки $t = \cos x$**:**

а) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; б) $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; в) $\sin x = \sqrt{1-t^2}$.

14. Виберіть правильну запис для підстановки $t = tgx$**:**

а) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; б) $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; в) $\sin x = \sqrt{1-t^2}$.

15. При інтегруванні інтеграла виду $\int R\left(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{3}}\right)dx$ **можна використовувати підстановку:**

а) $x = y^2$; б) $x = y^3$; в) $x = y^6$.

16. При інтегруванні інтеграла виду $\int R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, x^{\frac{m_3}{n_3}}\right)dx$ **для підстановки** $x = y^s$ **можна використовувати підстановку:**

а) $s = НОК(n_1, n_2, n_3)$; б) $s = НОК(m_1, m_2, m_3)$; в) $s = n_1 n_2 n_3$.

17. При інтегруванні інтеграла виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_3}{n_3}}\right)dx$ **для підстановки** $\frac{ax+b}{cx+d} = y^s$ **можна використовувати підстановку:**

а) $s = НОК(n_1, n_2, n_3)$; б) $s = НОК(m_1, m_2, m_3)$; в) $s = n_1 n_2 n_3$.

18. При інтегруванні інтеграла виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{3}{4}}\right)dx$ **для підстановки** $\frac{ax+b}{cx+d} = y^s$ **можна використовувати підстановку:**

а) $s = НОК(1,2,3)$; б) $s = НОК(2,3,4)$; в) $s = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

19. При інтегруванні інтеграла виду $\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{1}{2}},(ax+b)^{\frac{2}{3}},(ax+b)^{\frac{3}{4}}\right)dx$ **для підстановки** $\frac{ax+b}{cx+d} = y^s$ **можна використовувати підстановку:**

а) $s = НОК(1,2,3)$; б) $s = НОК(2,3,4)$; в) $s = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

20. При інтегруванні інтеграла виду $\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},(ax+b)^{\frac{m_3}{n_3}}\right)dx$ **для підстановки** $ax+b = y^s$ **можна використовувати підстановку:**

а) $s = НОК(n_1,n_2,n_3)$; б) $s = НОК(m_1,m_2,m_3)$; в) $s = n_1 n_2 n_3$.

21. Інтеграл виду $\int x^m (a+bx)^p dx$ **називається:**

а) інтегралом раціонального вираження; б) інтегралом біноміального диференціала; в) інтегралом з ірраціональним.

22. Інтеграл виду $\int x^m (a+bx)^p dx$**:**

а) має рішення завжди; б) не має рішення; в) має рішення при виконанні певних умов.

23. При вирішенні інтеграла виду $\int x^m (a+bx)^p dx$**, якщо** p **- ціле число, використовується підстановка:**

а) $ax^{-n} + b = y^s$, де s - знаменник p; б) $x = y^s$, де s - НОК знаменників m, n; в) $a + bx^n = y^s$, де s - знаменник p.

24. При вирішенні інтеграла виду $\int x^m (a+bx)^p dx$**, якщо** $\frac{m+1}{n}$ **- ціле число, використовується підстановка:**

а) $ax^{-n} + b = y^s$, де s - знаменник p; б) $x = y^s$, де s - НОК знаменників m, n; в) $a + bx^n = y^s$, де s - знаменник p.

25. При вирішенні інтеграла виду $\int x^m (a+bx)^p dx$**, якщо** $\frac{m+1}{n} + p$ **- ціле число, використовується підстановка:**

а) $ax^{-n} + b = y^s$, де s - знаменник p; б) $x = y^s$, де s - НОК знаменників m, n; в) $a + bx^n = y^s$, де s - знаменник p.

4.6.Завдання для роботи в аудиторії і вдома

Знайти інтеграли, використавши формули тригонометрії для перетворення під інтегрального вираження.

1. $\int sin\, 2x\, cos\, 4xdx$.
2. $\int sin\, 3x\, cos\, 5xdx$.
3. $\int sin\, 4x\, sin\, 2xdx$.
4. $\int sin\, 6x\, sin\, 4xdx$.
5. $\int cos\, 2x\, cos\, 4xdx$.
6. $\int cos\, 4x\, cos\, 2xdx$.
7. $\int cos\, x\, cos\, 2x\, cos\, 3xdx$.
8. $\int sin\, x\, sin\, 2x\, sin\, 3xdx$.
9. $\int cos\, x\, sin\, 2x\, cos\, 3xdx$.
10. $\int sin^2 xdx$.
11. $\int cos^2 xdx$.
12. $\int cos^4 xdx$.
13. $\int sin^4 xdx$.
14. $\int cos^4 x\, sin^2 xdx$.
15. $\int sin^4 x\, cos^2 xdx$.
16. $\int sin^3 x\, cos\, xdx$.
17. $\int \frac{dx}{1+cos\, x}$.
18. $\int \frac{dx}{1-cos\, x}$.
19. $\int \frac{1-cos\, x}{1+cos\, x}dx$.
20. $\int \frac{dx}{1+sin\, x}$.
21. $\int \frac{dx}{1-sin\, x}$.
22. $\int \frac{1-sin\, x}{1+sin\, x}dx$.
23. $\int \frac{sin\, xdx}{cos^2 x}$.
24. $\int cos^3 x\, sin\, 2xdx$.
25. $\int \frac{sin\, 2xdx}{1+cos^2 x}$.
26. $\int \frac{dx}{cos\, x}$.
27. $\int \frac{dx}{sin\, x}$.
28. $\int \frac{1-sin\, x}{cos\, x}dx$.
29. $\int \frac{sin^3 x}{cos\, x}dx$.
30. $\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x}dx$.
31. $\int cos^3 xdx$.
32. $\int tg^3 xdx$.
33. $\int ctg^3 xdx$.

Знайти інтеграли, використавши тригонометричні підстановки (Г. Н. Берман).

34. $\int sin^3 x\, cos^2 xdx$.
35. $\int \frac{sin^3 x}{cos^4 x}dx$.
36. $\int \frac{dx}{cos\, x\, sin^3 x}$.
37. $\int \frac{sin^4 x}{cos^2 x}dx$.
38. $\int \frac{dx}{cos^3 x\, sin^3 x}$.
39. $\int \frac{dx}{cos^4 x\, sin^4 x}$.
40. $\int \frac{sin\, xdx}{(1-cos\, x)^2}$.
41. $\int \frac{cos\, xdx}{(1-cos\, x)^2}$.
42. $\int cos^6 xdx$.
43. $\int ctg^4 xdx$.
44. $\int tg^5 xdx$.
45. $\int \frac{dx}{tg^8 x}$.
46. $\int \frac{dx}{sin^3 x}$.
47. $\int \frac{dx}{sin\, x+cos\, x}$.
48. $\int \frac{dx}{(sin\, x+cos\, x)^2}$.

Знайти інтеграли.

49. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$.

50. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$.

52. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

53. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

54. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$.

55. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

56. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

57. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

58. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$.

59. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

60. $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\,dx$.

61. $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx$.

62. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

63. $\int \sqrt[3]{x\left(1-x^2\right)}dx$.

64. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$.

65. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

66. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^5+1}}$.

4.7.Самостійна робота

Повторення шкільної програми

1. Тригонометричні функції суми і різниці кутів:

$$sin(x \pm y) = sin\,x\ \ cos\,y \pm cos\,x\ \ sin\,y;$$

$$cos(x \pm y) = cos\,x\ \ cos\,y \mp sin\,x\ \ sin\,y;$$

$$tg(x \pm y) = \frac{sin(x \pm y)}{cos(x \pm y)} = \frac{sin\,x\ \ cos\,y \pm cos\,x\ \ sin\,y}{cos\,x\ \ cos\,y \mp sin\,x\ \ sin\,y} = \frac{\frac{sin\,x\ \ cos\,y}{cos\,x\,cos\,y} \pm \frac{cos\,x\ \ sin\,y}{cos\,x\,cos\,y}}{\frac{cos\,x\ \ cos\,y}{cos\,x\ \ cos\,y} \mp \frac{sin\,x\ \ sin\,y}{cos\,x\ \ cos\,y}} =$$

$$= \frac{\frac{sin\,x}{cos\,x} \pm \frac{sin\,y}{cos\,y}}{1 \mp \frac{sin\,x\ \ sin\,y}{cos\,x\ \ cos\,y}} = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx\ \ tgy};$$

$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgxtgy};$$

$$ctg\,(x \pm y) = \frac{cos(x \pm y)}{sin(x \pm y)} = \frac{cos\,x\ \ cos\,y \mp sin\,x\ \ sin\,y}{sin\,x\ \ cos\,y \pm cos\,x\ \ sin\,y} = \frac{\dfrac{cos\,x\ \ cos\,y}{sin\,x\ \ sin\,y} \mp \dfrac{sin\,x\ \ sin\,y}{sin\,x\ \ sin\,y}}{\dfrac{sin\,x\ \ cos\,y}{sin\,x\ \ sin\,y} \pm \dfrac{cos\,x\ \ sin\,y}{sin\,x\ \ sin\,y}} =$$

$$= \frac{\dfrac{cos\,x\ \ cos\,y}{sin\,x\ \ sin\,y} \mp 1}{\dfrac{cos\,y}{sin\,y} \pm \dfrac{cos\,x}{sin\,x}} = \frac{ctgy\ \ ctgx \mp 1}{ctgy \pm ctgx};$$

$$ctg\,(x \pm y) = \frac{ctgx\ \ ctgy \mp 1}{ctgx \pm ctgy}.$$

2. Тригонометричні функції подвійних кутів:

$$sin\,2x = sin(x + x) = sin\,x\,cos\,x + cos\,x\,sin\,x = 2\,sin\,x\,cos\,x;$$

$$cos\,2x = cos\,(x + y) = cos\,x\,cos\,x - sin\,x\,sin\,x = cos^2 x - sin^2 x;$$

$$tg\,2x = tg\,(x + x) = \frac{tgx + tgx}{1 - tgxtgx} = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x};$$

$$ctg\,2x = ctg\,(x + x) = \frac{ctgx \cdot ctgx - 1}{ctgx + ctgx} = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}.$$

3. Твір тригонометричних функцій:

$$\begin{array}{c|l} & sin(x + y) = sin\,x\,cos\,y + cos\,x\,sin\,y \\ + & \\ & sin(x - y) = sin\,x\,cos\,y - cos\,x\,sin\,y \\ \hline & sin(x + y) + sin(x - y) = 2\,sin\,x\,cos\,y \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} & cos\,(x + y) = cos\,x\,cos\,y - sin\,x\,sin\,y \\ - & \\ & cos\,(x - y) = cos\,x\,cos\,y + sin\,x\,sin\,y \\ \hline & cos\,(x + y) - cos\,(x - y) = -2\,sin\,x\,sin\,y \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} & cos\,(x + y) = cos\,x\,cos\,y - sin\,x\,sin\,y \\ + & \\ & cos\,(x - y) = cos\,x\,cos\,y + sin\,x\,sin\,y \\ \hline & cos\,(x + y) + cos\,(x - y) = 2\,cos\,x\,cos\,y \end{array}$$

висновок:

$$sin\,x\,cos\,y=\frac{1}{2}\left(sin(x+y)+sin(x-y)\right);$$

$$sin\,x\,sin\,y=\frac{1}{2}\left(cos(x-y)-cos(x+y)\right);$$

$$cos\,x\,cos\,y=\frac{1}{2}\left(cos(x+y)+cos(x-y)\right).$$

4. Сума і різниця тригонометричних функцій. Для отриманих виразів маємо:

$$sin(x+y)+sin(x-y)=2\,sin\,x\,cos\,y\,;$$
$$cos(x+y)-cos(x-y)=-2\,sin\,x\,sin\,y\,;$$
$$cos(x+y)+cos(x-y)=2\,cos\,x\,cos\,y\,.$$

Ввівши нові позначення

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases} \Rightarrow\ x=\frac{\alpha+\beta}{2},\ y=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

отримуємо:

$$sin(\alpha)+sin(\beta)=2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$cos(\alpha)-cos(\beta)=-2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$cos(\alpha)+cos(\beta)=2\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

5. Формули пониження порядку. з виразу $cos\,2x=cos^2x-sin^2x$ отримаємо

$$cos\,2x=cos^2x-sin^2x=1-sin^2x-sin^2x=1-2\,sin^2x\,,$$

звідки

$$2\,sin^2x=1-cos\,2x\ \Rightarrow\ sin^2x=\frac{1-cos\,2x}{2}.$$

За аналогією можна записати

$$cos\,2x=cos^2x-sin^2x=cos^2x-1+cos^2x=-1+2\,cos^2x,$$

звідки

$$2\,cos^2x=1+cos\,2x\ \Rightarrow\ cos^2x=\frac{1+cos\,2x}{2}.$$

отже, $sin^2x=\frac{1-cos\,2x}{2}$, $cos^2x=\frac{1+cos\,2x}{2}$.

Приклади обчислення найменшого спільного кратного:

$НОК(16,12)=НОК(2^4,2^2\cdot3)=2^4\cdot3=48$;

$НОК(15,24)=НОК(3\cdot5,2^3\cdot3)=2^3\cdot3\cdot5=120$;

$$\text{НОК}(4,6,8)=\text{НОК}(2^2,2\cdot 3,2^3)=2^3\cdot 3=24;$$
$$\text{НОК}(2,3,4)=\text{НОК}(2,3,2^2)=2^2\cdot 3=12.$$

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Вночі закінчилася паста в ручці, кудись поділися всі олівці ...

Що кажуть про математику

«Математика - це мова, якою розмовляють все точні науки» (Н. І. Лобачевський).

Інтегрування функцій зі знаком радикала. Інтегрування радикалів. Інтегрування при виділенні повного квадрата. Використання розкладання три члена на множники або підстановки. Інтегрування функцій у вигляді многочлена під знаком радикала. Підведення підсумків обчислення невизначених інтегралів. Інтеграли, що не виражаються в елементарних функціях

5. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАКОМ РАДИКАЛА

5.1. інтегрування радикалів

Розглянемо інтеграл, що залежить від ірраціонального виразу виду

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right).$$

Для вирішення такого інтеграла можна використовувати виділення повного квадрата під знаком радикала або розкладання під інтегрального вираження на множники.

5.1.1. Інтегрування при виділенні повного квадрата

Можна виділити кілька видів інтегралів.

1. Для інтегралів виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

можливі варіанти:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm p^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm p^2}\right| + C, \ \int \frac{du}{\sqrt{p^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{p} + C.$$

Існує також табличний інтеграл виду

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$$

2. Для інтегралів виду

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx,$$

виділивши повний квадрат і отримавши одне з трьох виразів:

$$\sqrt{a_1^2 x^2 \pm b_1^2}, \ \sqrt{a_1^2 x^2 - b_1^2}, \ \sqrt{b_1^2 - a_1^2 x^2},$$

можна використовувати підстановку, записану в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

функція	$\sqrt{a_1^2x^2 \pm b_1^2}$	$\sqrt{a_1^2x^2 - b_1^2}$	$\sqrt{b_1^2 - a_1^2x^2}$
підстановка	$x = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{sh} t$	$x = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{ch} t$	$x = \frac{b_1}{a_1}\sin t$, $x = \frac{b_1}{a_1}\cos t$

ПРИКЛАД:

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \left| \begin{array}{l} x = sht \\ dx = cht \quad dt \end{array} \right| = \int \sqrt{sh^2 t + 1} \ \ cht \quad dt = \int ch^2 t \quad dt =$$

$$= \int \left(\frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \int (1+\operatorname{ch} 2t)\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t \right) + C = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2} \cdot 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \right) + C =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{sht}{2}\sqrt{1+sh^2 t} + C = \frac{arshx}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + C = \frac{1}{2} ln\left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + C .$$

5.1.2. Використання розкладання три члена на множники або підстановки

Можливі такі випадки:

1. Якщо коріння x_1, x_2 три члена

$$ax^2 + bx + c$$

є дійсними, то можна отримати функцію виду

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = (x - x_1)\sqrt{a\frac{x - x_2}{x - x_1}} .$$

Така під інтегральна функція вже розглядалася. Це випадок відносини лінійних в дробової ступеня $\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\alpha}$, коли $\frac{x - x_2}{x - x_1} = t^2$.

2. Якщо коріння три члена

$$ax^2 + bx + c \ \ (\text{при } a > 0)$$

є комплексними, тобто дискримінант негативний ($D = b^2 - 4ac < 0$), То можна використовувати підстановку Ейлера

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a} \ \text{ або } \ t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a} .$$

Підстановка Ейлера використовується і при $D > 0$.

ПРИКЛАД. обчислити $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Рішення

Для під кореневого виразу x^2+x+1 дискримінант негативний: $D = 1-4 = -3 < 0$. Отже, можна використовувати підстановку Ейлера

$$t = \sqrt{x^2+x+1} + x.$$

Для цієї підстановки $t - x = \sqrt{x^2+x+1} \Rightarrow t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + x + 1 \Rightarrow t^2 - 2tx = x+1$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2-1}{1+2t} \Rightarrow dx = \frac{2t(1+2t) - 2(t^2-1)}{(1+2t)^2}dt = \frac{2t+4t^2-2t^2+2}{(1+2t)^2}dt;$$

$dx = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt$. отже,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| t = \sqrt{x^2+x+1} + x, \quad x = \frac{t^2-1}{1+2t}, \quad dx = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt \right| =$$

$$= 2\int \frac{t^2+t+1dx}{(1+2t)^2 t}dt.$$

Розкладаємо дрібно-раціональну функцію на найпростіші:

$$\frac{2(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{D}{(1+2t)^2};$$

$$2t^2+2t+2 = A(1+2t)^2 + B(1+2t)t + Ct = t^2(4A+2B) + t(4A+B+D) + A;$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & 2 = 4A+2B; \\ t & 2 = 4A+B+D \Rightarrow A = 2,\ B = -3,\ D = 2; \\ t^0 & 2 = A. \end{array}$$

отже,

$$\frac{2t^2+2t-2}{t(1+2t)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2},$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2} \right) dx =$$

$$=2\int\frac{dt}{t}-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+2t)}{1+2t}-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+2t)}{(1+2t)^2}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C=$$

$$=\left|t=x+\sqrt{x^2+x+1}\right|=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x\right|+$$

$$+\frac{3}{2\left(1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x\right)}+C.$$

5.1.3. Інтегрування функцій у вигляді многочлена під знаком радикала

Інтеграл виду

$$\int\frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

визначають за формулою

$$\int\frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $Q(x)$ - многочлен на одиницю меншого порядку, ніж $P(x)$. Для знаходження коефіцієнтів $Q(x)$ і числа λ виконують такі дії:

а) диференціюють обидві частини рівності:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q'(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+Q(x)\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

б) множать обидві частини на $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$P(x)=Q'(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q(x)(2ax+b)+\lambda;$$

в) визначають коефіцієнти методом невизначених коефіцієнтів.

ПРИКЛАД. обчислити $\int\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}$.

Рішення

Записуємо інтеграл у вигляді запропонованої формули:

$$\int\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}dx=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x-7}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}.$$

Використовуємо запропонований вище порядок дій:

а) $\dfrac{3x^2-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}=(2ax+b)\sqrt{x^2-4x-7}+(ax^2+bx+c)\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x-7}}+\dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2-4x-7}}$;

б) $3x^3-8x+5=(2ax+b)(x^2-4x-7)+(ax^2+bx+c)(x-2)+\lambda$;

в) $3x^3-8x+5=3ax^3+(-10a+2b)x^2+(-14a-6b+c)x+(-7b-2c+\lambda)x^0$;

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 3=3a \\ x^2 & 0=-10a+2b \\ x & -8=-14a-6b+c \\ x^0 & 5=-7b-2c+\lambda \end{array} \quad \Rightarrow \quad a=1,\ b=5,\ c=36,\ \lambda=112\,.$$

Отже, можна записати

$$\int\frac{3x^2-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}dx=\left(x^2+5x+36\right)\sqrt{x^2-4x-7}+112\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2\cdot 2x+4-11}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-11}}=$$

$$=\ln\left(x-2+\sqrt{(x-2)^2-11}\right)+C=\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right)+C\,.$$

Отриманий в результаті перетворень інтеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}$ можна вирішити і через підстановку Ейлера:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}=$$

$$=\left|\begin{array}{lll} D=4-7=-3<0, & t^2-2tx+x^2=x^2-4x-7, & dx=\dfrac{2t(2t-4)-2\left(t^2+7\right)}{(2t-4)^2}dt= \\ t=\sqrt{x^2-4x-7}+x, & t^2-2tx=-4x-7, & =\dfrac{4t^2-8t-2t^2-14}{(2t-4)^2}dt, \\ t-x=\sqrt{x^2-4x-7}, & x=\dfrac{t^2+7}{2t-4}, & dx=\dfrac{2t^2-8t-14}{(2t-4)^2}dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{2t^2-8t-14}{(2t-4)^2\left(t-\dfrac{t^2+7}{2t-4}\right)}dx=\int\frac{2t^2-8t-14}{(2t-4)\left(2t^2-4t-t^2-7\right)}dx=$$

$$= \int \frac{2\left(t^2 - 4t - 7\right)}{(2t-4)\left(t^2 - 4t - 7\right)} dx = \int \frac{2}{2t-4} dx = \int \frac{dx}{t-2} x = ln\left|t-2\right| = ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x - 7}\right| + C .$$

5.2. Підведення підсумків обчислення невизначених інтегралів

Невизначені інтеграли добре вивчені. В даному навчальному посібнику були розглянуті основні, найбільш часто застосовуються методи визначення значень невизначених інтегралів (рис. 5.1).

Для обчислення невизначених інтегралів існують математичні довідники, наприклад [1, 2].

Існують також MatLab, MatCad і інші програмні додатки, які дозволяють обчислити невизначений інтеграл.

5.3. Інтеграли, що не виражаються в елементарних функціях

При диференціюванні для елементарної функції завжди знаходять елементарну функцію. При інтегруванні не завжди можна знайти елементарну функцію, яка є первісною заданої елементарної функції. Доведено, що в багатьох випадках не існують такі елементарні вирази для первісних.

Def. Якщо первісна елементарної функції не є елементарною функцією, то кажуть, що ця функція не інтегрується в елементарних функціях, або інтеграл не береться до елементарних функціях.

Так, наприклад, інтеграли

$$\int e^{-x^2} dx , \int \frac{\sin x}{x} dx , \int \frac{\cos x}{x} dx , \int \frac{dx}{\ln x} , \int \frac{e^x}{x} dx , \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} , \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

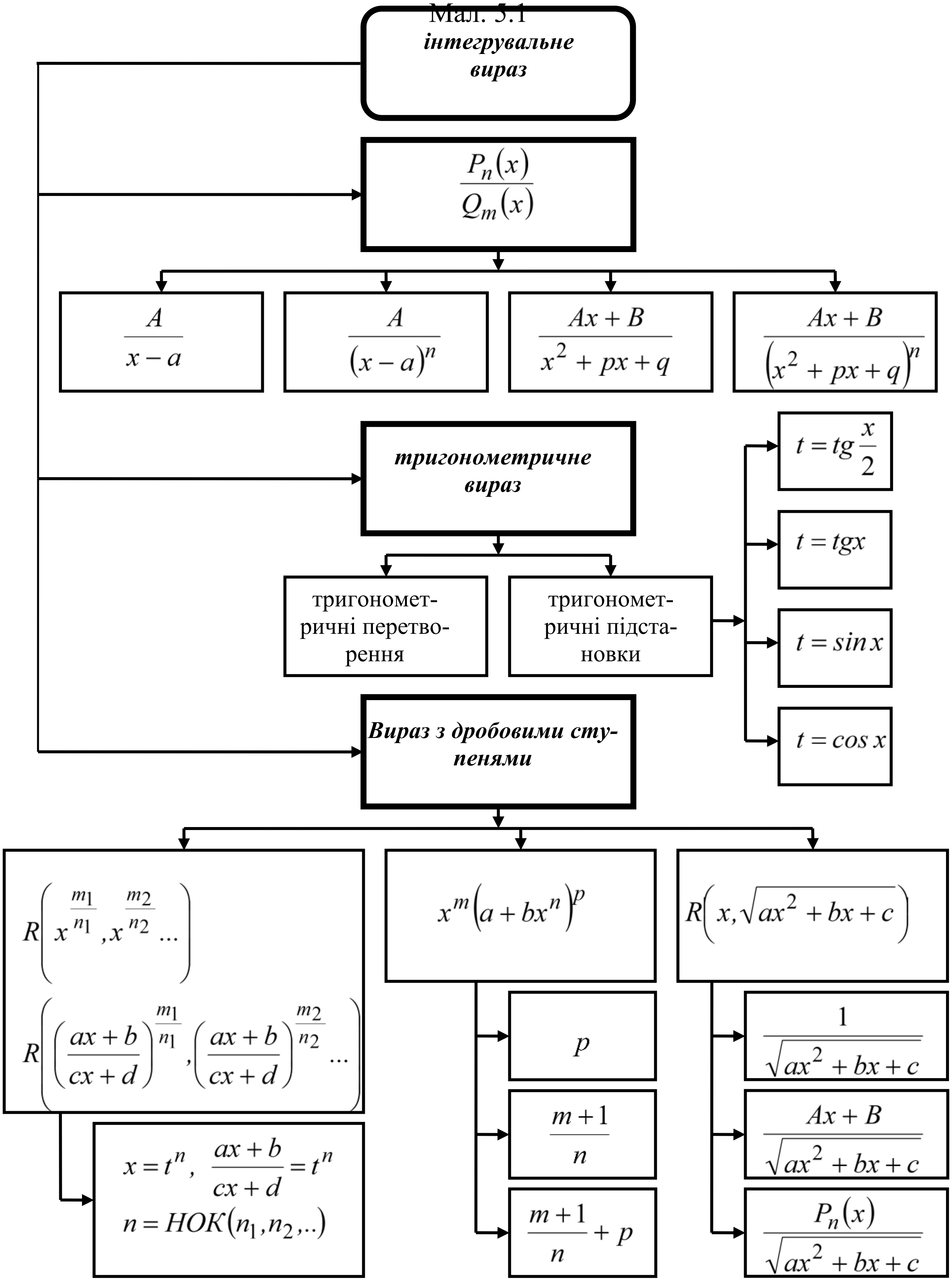
не можна уявити ніякими елементарними функціями. Тут слід розрізняти наступне:

- існування функції;
- можливість її вираження за допомогою елементарних функцій.

Іншими словами, зазначені інтеграли існують, але введені основні елементарні функції не описують їх первісних.

Неберучі інтеграли добре вивчені. Для них складені таблиці значень, введені назви функцій, наприклад: функція Гаусса, інтегральний синус, і т.д.

Мал. 5.1


інтегрувальне вираз
$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$
$\frac{A}{x-a}$
$\frac{A}{(x-a)^n}$
$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$
тригонометричне вираз
тригонометричні перетворення
тригонометричні підстановки
$t = tg\frac{x}{2}$
$t = tgx$
$t = \sin x$
$t = \cos x$
Вираз з дробовими ступенями
$R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}} \ldots\right)$
$R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}} \ldots\right)$
$x = t^n, \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^n$
$n = НОК(n_1, n_2, ..)$
$x^m(a+bx^n)^p$
p
$\frac{m+1}{n}$
$\frac{m+1}{n} + p$
$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
$\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

До таких интегралам відносяться:

$\int e^{-x^2}\,dx$ - інтеграл Пуассона, або інтеграл помилок, який використовується в статистичній фізиці, теорії теплопровідності, дифузії;

$\int \cos(x^2)\,dx$, $\int \sin(x^2)\,dx$ - інтеграли Френеля, що застосовуються в оптиці;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - інтегральний логарифм;

$\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ - інтегральний косинус;

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ - інтегральний синус.

5.4. Висновки

Для інтегралів виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

можливі варіанти:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm p^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm p^2}\right| + C\,;\ \int \frac{du}{\sqrt{p^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{p} + C\,;$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C\,.$$

Для інтегралів виду

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx\,,$$

виділивши повний квадрат і отримавши одне з трьох виразів:

$$\sqrt{a_1^2x^2 \pm b_1^2}\,,\ \sqrt{a_1^2x^2 - b_1^2}\,,\ \sqrt{b_1^2 - a_1^2x^2}\,,$$

можна використовувати наступну підстановку:

функція	$\sqrt{a_1^2x^2 \pm b_1^2}$	$\sqrt{a_1^2x^2 - b_1^2}$	$\sqrt{b_1^2 - a_1^2x^2}$
підстановка	$x=\frac{b_1}{a_1}\operatorname{sh} t$	$x=\frac{b_1}{a_1}\operatorname{ch} t$	$x=\frac{b_1}{a_1}\sin t\,,\ x=\frac{b_1}{a_1}\cos t$

якщо коріння x_1, x_2 *три члена*

$$ax^2+bx+c$$

є дійсними, то можна отримати функцію виду

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}.$$

Можна використовувати підстановку $\frac{x-x_2}{x-x_1}=t^2$.

Якщо коріння три члена

$$ax^2+bx+c \text{ (при } a>0)$$

є комплексними, тобто дискриминант негативний ($D=b^2-4ac<0$), *То можна використовувати підстановку Ейлера*

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a} \text{ або } t=\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}.$$

Підстановка Ейлера можна використовувати і при $D>0$.

інтеграл виду

$$\int\frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

визначають за формулою

$$\int\frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $Q(x)$ *- многочлен на одиницю меншого порядку, ніж* $P(x)$. *Для знаходження коефіцієнтів* $Q(x)$ *і числа* λ *необхідно:*

1. *Про диференціювали обидві частини рівності.*
2. *Помножити обидві частини на* $\sqrt{ax^2+bx+c}$.
3. *Для отриманого виразу* $P(x)=Q'(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q(x)(2ax+b)+\lambda$ *визначити числові коефіцієнти методом невизначених коефіцієнтів.*

Для обчислених значень невизначених інтегралів існують математичні довідники. Існують також MatLab, MatCad і інші програмні додатки, які дозволяють обчислити невизначений інтеграл.

При диференціюванні для елементарної функції завжди знаходять елементарну функцію. При інтегруванні не завжди можна знайти елементарну функцію, яка є первісною заданої елементарної функції.

Якщо первісна елементарної функції не є елементарною функцією, то кажуть, що ця функція не інтегрується в елементарних функціях, або інтеграл не береться до елементарних функціях.

Іншими словами, зазначені інтеграли існують, але введені основні елементарні функції не описують їх первісних.

До таких інтегралів відносяться:

$\int e^{-x^2}\,dx$ - *інтеграл Пуассона, або інтеграл помилок;*

$\int \cos(x^2)\,dx$, $\int \sin(x^2)\,dx$ - *інтеграли Френеля;*

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - *інтегральний логарифм;*

$\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ - *інтегральний косинус;*

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ - *інтегральний синус.*

Неберучі інтеграли добре вивчені. Для них складені таблиці значень, введені назви функцій.

Перерва

● Межа групи студентів при кількості студентів на парі, яка прагне до нуля, дорівнює старості.

● Нахабство його на іспиті з математики не мала меж, похідної і не виражалася через елементарні функції.

● Викладач, звертаючись до студентів:

-Хлопці, повинен сказати, що у вас дуже погано йдуть справи з математикою. Я думаю, що 90 відсотків з вас не здадуть модуль.

Голос з аудиторії:

- Так нас тут стільки і не набереться.

5.5. Питання для перевірки

1. Якщо інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **привести до виду** $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+p^2}}$**, То його рішенням буде:**

а) $ln\left|u+\sqrt{u^2-p^2}\right|+C$; б) $ln\left|u+\sqrt{u^2+p^2}\right|+C$; в) $arcsin\,\frac{u}{p}+C$.

2. Якщо інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **привести до виду** $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-p^2}}$**, То його рішенням буде:**

а) $ln\left|u+\sqrt{u^2-p^2}\right|+C$; б) $ln\left|u+\sqrt{u^2+p^2}\right|+C$; в) $arcsin\,\frac{u}{p}+C$.

3. Якщо інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **привести до виду** $\int \frac{du}{\sqrt{p^2-u^2}}$**, То його рішенням буде:**

а) $ln\left|u+\sqrt{u^2-p^2}\right|+C$; б) $ln\left|u+\sqrt{u^2+p^2}\right|+C$; в) $arcsin\,\frac{u}{p}+C$.

4. Для інтеграла виду $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\;dx$**, Виділивши повний квадрат і отримавши вираження** $\sqrt{a_1^2x^2+b_1^2}$ **, Можна використовувати підстановку:**

а) $x=\frac{b_1}{a_1}sin(t)$; б) $x=\frac{b_1}{a_1}ch(t)$; в) $x=\frac{b_1}{a_1}sh(t)$.

5. Для інтеграла виду $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\;dx$**, Виділивши повний квадрат і отримавши вираження** $\sqrt{a_1^2x^2-b_1^2}$ **, Можна використовувати підстановку:**

а) $x=\frac{b_1}{a_1}sin(t)$; б) $x=\frac{b_1}{a_1}ch(t)$; в) $x=\frac{b_1}{a_1}sh(t)$.

6. Для інтеграла виду $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\;dx$**, Виділивши повний квадрат і отримавши вираження** $\sqrt{b_1^2-a_1^2x^2}$ **, Можна використовувати підстановку:**

а) $x=\frac{b_1}{a_1}sin(t)$; б) $x=\frac{b_1}{a_1}ch(t)$; в) $x=\frac{b_1}{a_1}sh(t)$.

7. Для інтеграла виду $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, Виділивши повний квадрат і отримавши вираження $\sqrt{b_1^2-a_1^2x^2}$, Можна використовувати підстановку:

а) $x=\frac{b_1}{a_1}cos(t)$; б) $x=\frac{b_1}{a_1}ch(t)$; в) $x=\frac{b_1}{a_1}sh(t)$.

5.6. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

Визначити інтеграл функції:

- 1-4 - виділивши повний квадрат;
- 5-8 - використавши інваріантність;
- 9-24 - застосувавши тригонометричні або гіперболічні підстановки;
- 25-32 - використавши розкладання три члена на множники або підстановку Ейлера;
- 33-39 - застосувавши алгоритм інтегрування функцій у вигляді многочлена під знаком радикала.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-3}}$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4}}$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x}}$.
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x-3}}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-16x}}$.
9. $\int \sqrt{3-16x^2}dx$.
10. $\int \sqrt{4-9x^2}dx$.
11. $\int \sqrt{16x^2-3}dx$.
12. $\int \sqrt{9x^2-4}dx$.
13. $\int \sqrt{3+16x^2}dx$.
14. $\int \sqrt{4+9x^2}dx$.
15. $\int \sqrt{16x^2+3}dx$.
16. $\int \sqrt{9x^2+4}dx$.
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-16x^2}}$.
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-3}}$.
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$.
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+16x^2}}$.
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$.
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+3}}$.
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$.
25. $\int \sqrt{3x^2-9x+6}dx$.
26. $\int \sqrt{2x^2-2x-12}dx$.
27. $\int \sqrt{3x^2+9x+6}dx$.
28. $\int \sqrt{4x^2+20x+24}dx$.
29. $\int \sqrt{2x^2-6x+4}dx$.
30. $\int \sqrt{2x^2+6x+4}dx$.

31. $\int \sqrt{2x^2 + 2x - 4}dx$.

32. $\int \sqrt{2x^2 - 2x - 4}dx$.

33. $\int \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}dx$.

34. $\int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}dx$.

35. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}dx$.

36. $\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}dx$.

37. $\int \frac{3x^3 - 8x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x - 7}}dx$.

38. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}dx$.

39. $\int \sqrt{1 - 4x - x^2}dx$.

5.7.Самостійна робота

інтеграл виду $\int \frac{dx}{(mx+n)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, де $k = 1{,}2$, Спрощується за допомогою підстановки $mx + n = \frac{1}{t}$. В цьому випадку $mdx = -\frac{1}{t^2}dt$ і $x = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{t} - n\right)$. отже,

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\left(\frac{1}{t}\right)^k \sqrt{a\frac{}{} + bx + c}}.$$

ПРИКЛАД. Вирішити самостійно:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$. 2. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

У найнесподіванішій момент вирубали світло у всьому районі.

Що кажуть про математику

«Математика виявляє порядок, симетрію і визначеність, а це - найважливіші види прекрасного» (Аристотель).

Визначений інтеграл. Поняття криволінійної трапеції. Визначені інтеграли за Ріманом. Геометричний сенс певного інтеграла. Основні властивості визначеного інтеграла. Оцінки певних інтегралів. Існування певного інтеграла. Похідна від інтеграла по його верхньої межі. Інтеграл із змінною верхньою межею. Похідна від інтеграла за верхньою межею. Формула Ньютона - Лейбніца. Обчислення визначеного інтеграла. Інтегрування парних і непарних функцій в симетричних межах

6. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

6.1. Поняття криволінійної трапеції

Розглянемо неперервну функцію $y = f(x)$, задану і додатну на відрізку $[a,b]$.

Def. Фігуру, обмежену кривими AB **графіка** $y = f(x)$**,** aA**,** bB **і відрізком** $[a,b]$ **осі абсцис, називають криволінійною трапецією** (рисунок 6.1).

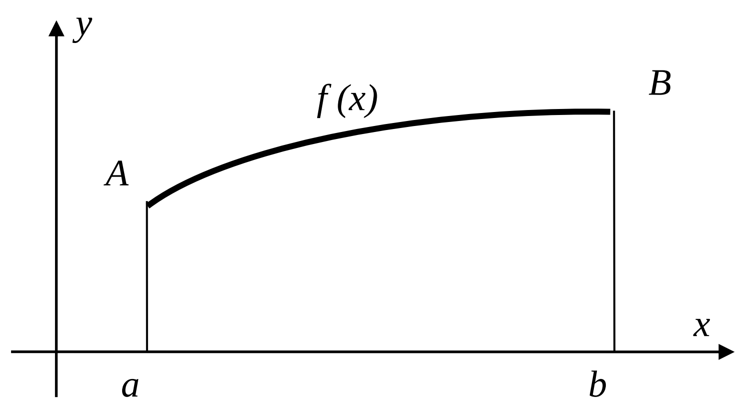


Рисунок 6.1

6.2. Визначений інтеграл за Ріманом

Нехай на відрізку $[a,b]$ ($a < b$) задана неперервна функція $f(x)$. Розділимо відрізок$[a,b]$ на n частин з довільними довжинами. Отримані відрізки називаються частковими інтервалами. Довжини часткових інтервалів

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i .$$

Виберемо на кожному частковому інтервалі довільну точку ξ_i (рисунок 6.2):

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \ \left(i = \overline{1, n-1}\right).$$

Обчислимо значення функції в цій точці $f(\xi_i)$. Знайдемо добуток числа $f(\xi_i)$ на довжину інтервалу Δx_i:

$$f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Складемо суму таких добутків:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n .$$

Def. Сума виду

$$S_n(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

називається інтегральною сумою Рімана для функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$.

Для заданої функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ можна скласти безліч інтегральних сум, тому що інтервал $[a,b]$ може бути розділений на частини незліченною кількістю способів, для кожного з яких існує і незліченна кількість можливостей вибору точок ξ_i.

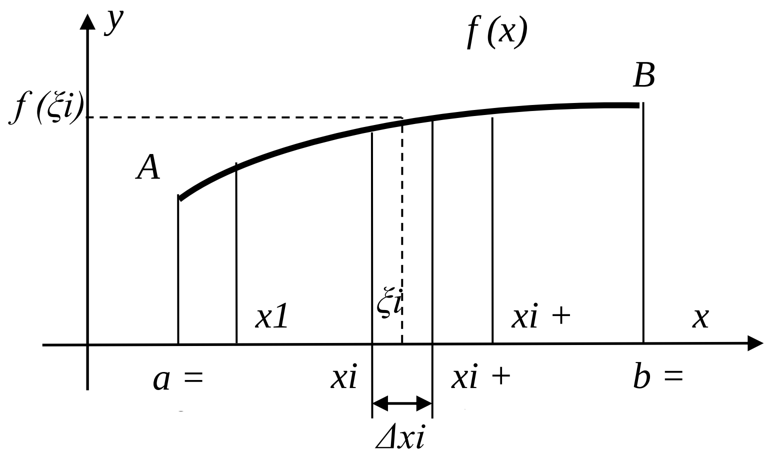


Рисунок 6.2

Def. Границя інтегральної суми Рімана

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

при прагненні до нуля найбільшого часткового інтервалу Δx_i і необмеженого зростання n ($n \to \infty$), якщо він існує і не залежить від способу розбиття $[a,b]$ на

часткові інтервали і вибору точки ξ_i на кожному частковому інтервалі, називається визначеним інтегралом за Ріманом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Зауваження:

1. У записі $\int_a^b f(x)\,dx$:

- a, b - нижній і верхній границі інтегрування;
- $f(x)$ - підінтегральна функція (або інтегрована функція);
- x - змінна інтегрування;
- $[a,b]$ - область інтегрування (або відрізок інтегрування).

2. Оскільки $\max \Delta x_i \to 0$, кожний доданок $f(\xi_i)\Delta x_i$ - нескінченно мала величина (Δx_i - нескінченно мала величина, число $f(\xi_i)$ - через непереривність функції кінцеве). Отже, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ є границя суми нескінченно малих величин, кількість яких необмежено зростає.

6.3. Геометричний сенс визначеного інтеграла

З побудови інтегральних сум Рімана і визначення визначеного інтеграла випливає, що геометричний сенс визначеного інтеграла функції $f(x)$ на інтервалі $[a,\ b]$ - це площа криволінійної трапеції, утвореної функцією $f(x)$ на інтервалі $[a,\ b]$.

6.4. Основні властивості визначеного інтеграла

Оскільки визначення визначеного інтеграла пов'язано з границею, то і властивості інтеграла випливають з властивостей границь.

1. Постійний множник підінтегральної функції можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

$$◀\int_a^b Af(x)dx = \lim_{max\ \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1} Af(\xi_i)\Delta x_i = A\lim_{max\ \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx\,.▶$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

$$◀\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx\,.▶$$

Зауваження. Наведені дві властивості називаються властивостями лінійності, тобто визначений інтеграл має властивості лінійності.

3. Визначений інтеграл від функції, що дорівнює одиниці, дорівнює заданому інтервалу:

$$\int_a^b dx = b - a\,.$$

$$◀\int_a^b dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = b - a\,.▶$$

4. Якщо верхню і нижню границі інтеграла поміняти місцями, то змінюється тільки знак інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Зміна розташування границь веде до зміни знаку Δx_i, що призводить до зміни знаку всього інтеграла.

5. Якщо верхня і нижня границі інтегрування збігаються, тобто $a = b$, то такий інтеграл дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

6. Яке б не було розташування a, b, c, можна записати

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

З рисунка 6.3 випливає: якщо точка c знаходиться поза інтервалом, то інтеграл на цій ділянці стає від'ємним.

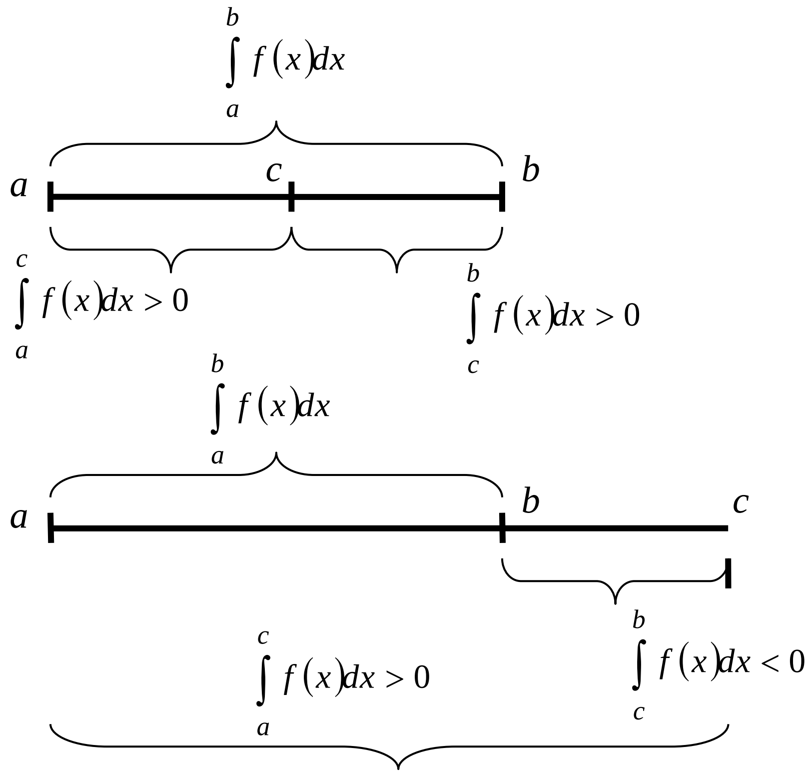


Рисунок 6.3

6.5. Оцінки визначених інтегралів

Вважаємо, що $a < b$. тоді:

1. Якщо всюди на відрізку $[a,b]$ $f(x) \ge 0$ (або $f(x) \le 0$), то

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \text{ (або } \le 0\text{)}.$$

◄По умові, якщо $f(x) \ge 0$, то $f(\xi_i) \ge 0$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$. тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0\,.$$▶

2. Якщо всюди на відрізку $[a,b]$ $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

◀ Із умови можна записати $g(x) - f(x) \geq 0$, тоді

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,,\; \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$▶

3. Для функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[a,b]$, має місце нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

◀ $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ або $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$,

а це рівносильне

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$▶

Зауваження. Наведену нерівність називають нерівністю трикутника.

4. Якщо m і M - відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)\,.$$

◀ Можна записати

$$m \leq f(x) \leq M\,,$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx\,,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$ ►

5. Th. якщо функція $f(x)$ непереривна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку існує точка c, така, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

◄ Можна записати

$$m \le f(x) \le M,$$

де m і M - мінімум і максимум функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. тоді

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \text{ або } m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

нехай $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$, де $m \le \mu \le M$. оскільки число μ знаходиться між найбільшим і найменшим значеннями функції, то знайдеться така точка c, що $\mu = f(c)$ або

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c), \text{ де } m \le f(c) \le M \text{ або } \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$ ►

Цей наслідок називають ще теоремою про середнє значення визначеного інтеграла від неперервної функції

6. Середнє значення визначеного інтеграла від неперервної функції.

Def. Середнім значенням y_{cp} визначеного інтеграла від непереривної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається відношення визначеного інтеграла від цієї функції до довжини інтервалу

$$y_{cp} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

6.6. Існування визначеного інтеграла

Th. ***Теорема Коші про існування визначеного інтеграла*****. Якщо функція** $f(x)$ **неперервна на обмеженому інтервалі** $[a,b]$**, то визначений інтеграл** $\int_a^b f(x)\,dx$ **існує.**

6.7. Похідна від інтеграла по його верхній границі

6.7.1. Інтеграл із змінною верхньою границею

Припустимо, що нижня границя інтегрування - постійна величина a, а верхня - змінна величина x. Надаючи верхньої границі різні значення, будемо отримувати відповідні значення інтеграла. Отже, в цьому випадку інтеграл є функцією своєї верхньої границі, тобто

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx .$$

В цьому записі верхня границя x позначена тієї ж буквою, що і змінна інтегрування, тобто більш коректно слід було б записати

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt ,$$

де t пробігає значення в інтервалі від a до x, однак має місце і попередній запис, де x над інтегралом - це верхня границя інтегрування, а x в функції - це змінна інтегрування.

6.7.2. Похідна від інтеграла по верхній границі

Th. Інтеграл із змінною верхньою границею є первісною підінтегральної функції:

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(x)dx\right)' = f(x).$$

◄ $F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt ,$

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt .$$

Використовуючи середнє значення визначеного інтеграла від неперервної функції можна записати:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x, \text{ де } x \le c \le x + \Delta x .$$

За визначенням похідна $F'(x)$ дорівнює

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Але якщо $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$, тому $c \to x$, і так як $f(x)$ - неперервна функція, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x),$$

тобто $F'(x) = f(x), F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,\ F'(x) = f(x)$. ►

6.8. Формула Ньютона - Лейбніца

Th. Значення визначеного інтеграла дорівнює різниці значень первісної підінтегральної функції, для верхньої і нижньої границь інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Рівність називається формулою Ньютона - Лейбніца.

Значення визначеного інтеграла дорівнює приросту первісної підінтегральної функції на інтервалі інтегрування.

◄ Було показано, що функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і має первісну

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt .$$

Такий інтеграл можна записати як сукупність первісних у вигляді

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

При $x = a$

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C,\ 0 = F(a) + C,\ C = -F(a),$$

тобто $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

При $x = b$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Умовно це можна записати і в наступному вигляді:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

6.9. Обчислення визначеного інтеграла

Обчислення визначених інтегралів методом, заснованим на визначенні інтеграла як границі інтегральних сум, є доволі трудомістким. Якщо є можливість, то для обчислення визначеного інтеграла використовують зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами у вигляді формули Ньютона - Лейбніца.

Найпростіші правила інтегрування сум і добутку постійної величини на функцію такі ж, як і для невизначених інтегралів. Аналогічні також наступні правила:

1. Правило інтегрування частинами

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

◄ Побудуємо похідну добутку функцій:

$$(uv)' = u'v + v'u,\ \text{де}\ u = u(x),\ v = v(x).$$

Тепер візьмемо інтеграл від обох частин рівності:

$$\int_a^b (u'v+v'u)dx=\int_a^b (uv)'\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^b (u'v+v'u)\,dx = uv\Big|_a^b \;\Rightarrow\; \int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b$$. Це можна записати і в такому вигляді: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$. ►

ПРИКЛАД:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx & v=x \end{matrix} \right| = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 =$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 .$$

2. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Th. нехай $f(x)$ **- непереривна функція на відрізку** $[a,b]$**. Тоді, якщо:**

- функція $x=\varphi(t)$ **диференційована на відрізку** $[\alpha,\beta]$ **і її похідна** $\varphi'(t)$ **непереривна на** $[\alpha,\beta]$**;**

- множиною значень функції $x=\varphi(t)$ **є відрізок** $[a,b]$**;**

- $\varphi(\alpha)=a$ **і** $\varphi(\beta)=b$**,**

то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt .$$

Це формула заміни змінної (рисунок 6.4).

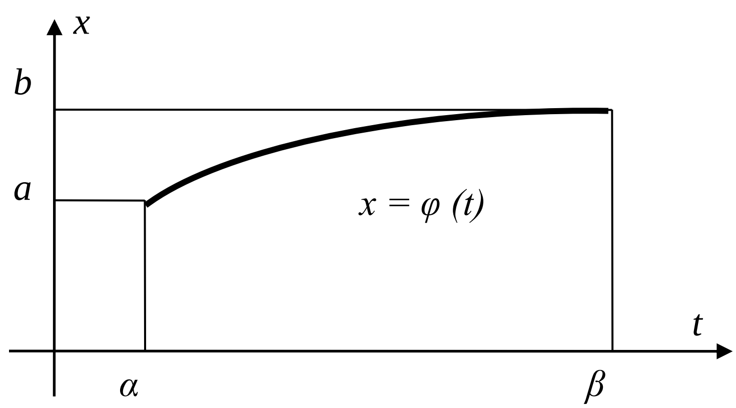


Рисунок 6.4

За формулою Ньютона - Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x).$$

Розглянемо на відрізку $[\alpha, \beta]$ складну функцію від змінної t:

$$\Phi(t) = F(\varphi(t)),$$

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t)\varphi'(t)),$$

тобто функція $\Phi(t)$ є первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, неперервиної на $[\alpha, \beta]$, тому за формулою Ньютона - Лейбніца

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Зауваження 1. При обчисленні невизначеного інтеграла за допомогою заміни змінної від нової змінної t слід повертатися до старої змінної x. При обчисленні визначеного інтеграла цього робити не потрібно, а потрібно просто підставити нові границі інтегрування.

ПРИКЛАД:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \sin\dfrac{\pi}{2} = 1 \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Зауваження 2. замість підстановки $x = \varphi(t)$ може бути використана підстановка $t = g(x)$.

6.10. Інтегрування парних і непарних функцій в симетричних межах

Вид графіків парної і непарної функцій у симетричних границях представлено на рисунку 6.5.

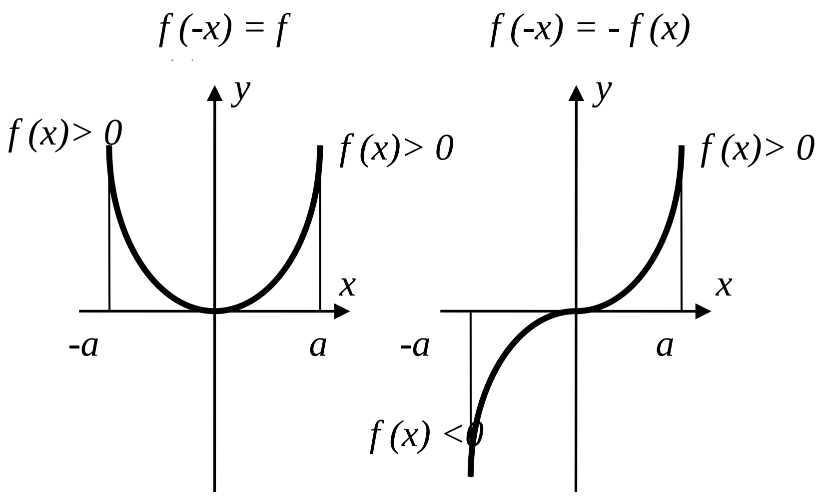


Рисунок 6.5

Твердження. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, тоді

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(-x) = f(x), \\ 0, & f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

Оскільки для парної функції графік має лінійну симетрію і значення функції зліва і справа додатні, значення інтеграла можна визначити як подвоєне його значення на одному половинному інтервалі.

Для непарної функції графік має центральну симетрію, а значення функції зліва і справа мають різні знаки. В цьому випадку сумарне значення інтеграла для лівого і правого половинних інтервалів дорівнює нулю.

6.11. Висновки

Def. Фігуру, обмежену кривими AB ***графіка*** $y = f(x)$, aA, bB ***і відрізком*** $[a,b]$ ***осі абсцис, називають криволінійною трапецією.***

Нехай на відрізку $[a,b]$ $(a < b)$ *Задана неперервна функція* $f(x)$. *Розділимо відрізок* $[a,b]$ *на* n *частин, які називаються частковими інтервалами:*

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i .$$

Виберемо на кожному частковому інтервалі довільну точку ξ_i .

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \ \left(i = \overline{1, n-1}\right).$$

Обчислимо значення функції в довільній точці ξ_i *часткового інтервалу* $f(\xi_i)$. *Складемо суму добутку числа* $f(\xi_i)$ *на довжину інтервалу* Δx_i*:*

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Def. Сума виду

$$S_n(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

називається інтегральною сумою Рімана для функції $f(x)$ ***на інтервалі*** $[a,b]$**.**

Def. Границя інтегральної суми Рімана

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

при прагненні до нуля найбільшого часткового інтервалу Δx_i ***і необмеженому зростанні*** n ***(***$n \to \infty$***), якщо він існує і не залежить від способу розбиття***$[a,b]$ ***на часткові інтервали і вибору точки*** ξ_i ***на кожному частковому інтервалі, називається визначеним інтегралом за Ріманом функції*** $f(x)$ ***на відрізку*** $[a,b]$ ***і позначається символом***

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Зауваження. У записі $\int_a^b f(x)\,dx$*:*

- a, b *- нижній і верхній границі інтегрування;*
- $f(x)$ *- підінтегральна функція (або інтегрована функція);*
- x *- змінна інтегрування;*
- $[a,b]$ *- область інтегрування (або відрізок інтегрування).*

Оскільки визначення визначеного інтеграла пов'язано з границею, то і властивості інтеграла випливають з властивостей границь.

1. Постійний множник підінтегральної функції можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx .$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx .$$

Зауваження. Наведені дві властивості називаються властивостями лінійності.

3. Визначений інтеграл від функції, що дорівнює одиниці, дорівнює заданому інтервалу:

$$\int_a^b dx = b - a .$$

4. Якщо верхня і нижня границі інтеграла поміняти місцями, то змінюється тільки знак інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx .$$

5. Якщо верхня і нижня границі інтегрування збігаються, тобто $a = b$*, то такий інтеграл вважається рівним нулю:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 .$$

6. Яке б не було розташування a, b, c, *Можна записати*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

Оцінки визначених інтегралів. Нехай $a < b$, *Тоді:*

1. Якщо всюди на відрізку $[a,b]$ $f(x) \ge 0$ *(або* $f(x) \le 0$*), то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \text{ (або } \le 0\text{)}.$$

2. Якщо всюди на відрізку $[a,b]$ $f(x) \le g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

3. Для функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[a,b]$, має місце нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Наведену нерівність називають нерівністю трикутника.

4. Якщо m і M - відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\,.$$

5. Th. якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку існує точка c, така, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\,.$$

6. Середнє значення визначеного інтеграла від неперервної функції.

Def. Середнім значенням y_{cp} визначеного інтеграла від неперервної функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається відношення визначеного інтеграла від цієї функції до довжини інтервалу:

$$y_{cp} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

Th. Теорема Коші про існування визначеного інтеграла. *Якщо функція $f(x)$* ***неперервна на обмеженому інтервалі $[a,b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ існує.***

Th. Інтеграл із змінною верхньою границею є первісною підінтегральної функції:

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(x)dx\right)' = f(x).$$

Th. Значення визначеного інтеграла дорівнює різниці значень первісної підінтегральної функції, для верхньої і нижньої границь інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Рівність називається ***формулою Ньютона - Лейбніца****.*

Найпростіші правила інтегрування сум і добутків постійної величини на функцію такі ж, як і для невизначених інтегралів. Аналогічні також правила:

1. Правило інтегрування частинами

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

2. Заміна змінної в певному інтегралі.

Th. Нехай $f(x)$ ***- неперервна функція на відрізку*** $[a,b]$***. Тоді, якщо:***

- функція $x = \varphi(t)$ ***диференційована на відрізку*** $[\alpha,\beta]$ ***і її похідна*** $\varphi'(t)$ ***неперервна на*** $[\alpha,\beta]$***;***

- множина значень функції $x = \varphi(t)$ ***є відрізок*** $[a,b]$***;***

- $\varphi(\alpha) = a$ ***і*** $\varphi(\beta) = b$***,***

то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\,.$$

При обчисленні визначеного інтеграла не потрібно повертатися до старої змінної.

Підстановка може бути у вигляді $x = \varphi(t)$ *або* $t = g(x)$.

Твердження. Відносно інтегрування парної та непарної функцій на симетричних інтервалах. Нехай функція $f(x)$ *неперервна на відрізку* $\lfloor -a,\ a \rfloor$*, тоді*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & f(-x) = f(x), \\ 0, & f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

Перерва

● Чому формула Ньютона - Лейбніца позначена двома іменами?
- Інтеграл, це як пісня. Так ось, Ньютон написав музику, а Лейбніц - слова.

● Батько перевіряє зошит маленького сина:
-Чому ти так нерівно пишеш гачки?
-Це не гачечки, тато, це інтеграли.

6.12. Питання для перевірки

1. Криволінійна трапеція - це:

а) трапеція, для якої порушена паралельність сторін; б) фігура, обмежена кривою AB графіка $y = f(x)$, прямими aA, bB і відрізком $[a,b]$ осі абсцис; в) трапеція, сторони якої є криві лінії.

2. Інтегральна сума Рімана - це:

а) добуток суми часткових інтервалів на значення функції в довільній точці; б) сума добутків довжин часткових інтервалів на значення функцій довільних точок цих інтервалів; в) сума часткових інтервалів і сума значень функцій в довільних точках часткових інтервалів.

3. Визначений інтеграл функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ - це: а) границя інтегральних сум функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на часткові інтервали і вибору точок на них; б) границя сум функцій $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, якщо вона не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на часткові інтервали і вибору точок на них; в) границя інтегральних сум функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, якщо він існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на часткові інтервали.

4. Запис визначеного інтеграла:

а) $\int f(x)dx$; б) $\int_a^{\infty} f(x)dx$; в) $\int_a^b f(x)dx$.

5. Чи існують лінійні властивості визначеного інтеграла:

а) ні; б) володіє тільки для елементарних функцій; в) не володіє?

6. Визначений інтеграл від функції, що дорівнює одиниці, дорівнює:

а) одиниці; б) нулю; в) довжині інтервалу.

7. Якщо верхню і нижню границі інтеграла поміняти місцями, то інтеграл:

а) змінює лише знак; б) стає від’ємним; в) не змінює свого значення.

8. Якщо верхня і нижня границі інтегрування збігаються, то:

а) інтеграл дорівнює одиниці; б) інтеграл має від'ємне значення; в) інтеграл дорівнює нулю.

9. Властивості визначеного інтеграла:

а) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx \;\; \int\limits_c^b f(x)dx$; б) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

в) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$.

10. Для функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[a,b]$, має місце нерівність:

а) $\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$; б) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$; в) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \ge \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

11. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку існує точка c, така, що:

а) $\int\limits_a^b f(x)dx = f(a)(b-c)$; б) $\int\limits_a^b f(x)dx = f(b)(b-c)$; в) $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

12. Оцінка визначеного інтеграла:

а) $mb \le \int\limits_a^b f(x)dx \le Ma$; б) $m(a-b) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(a-b)$; в) $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

13. Середнє значення визначеного інтеграла від неперервної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$:

а) $f(c) = \dfrac{1}{a-b}\int\limits_a^b f(x)dx$; б) $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$; в) $f(c) = (b-a)\int\limits_a^b f(x)dx$.

14. Інтеграл із змінною верхньою границею:

а) $\int\limits_a^x f(x)dx$; б) $\int\limits_a^\infty f(x)dx$; в) $\int\limits_a^b f(x)dx$.

15. Формула Ньютона - Лейбніца:

а) $\int\limits_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$; б) $\int\limits_a^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(a)$; в) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

6.13.Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Зробити оцінку інтегралам.

1.1. $\int\limits_{1.5}^{3.5} \frac{x^2 dx}{x-1}$. 1.2. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(1+\sin^2 x\right)dx$. 1.3. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} x^2 e^{-x^2} dx$.

1.4. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{xdx}{1+x^2}$. 1.5. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x\ arctg\,(x)dx$.

2. З'ясувати (не вичислюючи), який з інтегралів більше.

2.1. $\int\limits_0^1 x^2 dx$ або $\int\limits_0^1 x^3 dx$. 2.2. $\int\limits_1^2 x^2 dx$ або $\int\limits_1^2 x^3 dx$. 2.3. $\int\limits_0^1 2^{x^2} dx$ або $\int\limits_0^1 2^{x^3} dx$.

2.4. $\int\limits_1^2 2^{x^2} dx$ або $\int\limits_1^2 2^{x^3} dx$. 2.5. $\int\limits_1^2 \ln x dx$ або $\int\limits_1^2 (\ln x)^2 dx$. 2.6. $\int\limits_3^4 \ln x dx$ або $\int\limits_3^4 (\ln x)^2 dx$.

3. Обчислити середнє значення визначеного інтеграла функції $y=2x^2+3x+3$ в інтервалі $[1,\ 4]$.

4. Обчислити інтеграли із змінною верхньою границею.

4.1. $\int\limits_0^x x^2 dx$. 4.2. $\int\limits_1^x \left(\frac{x^3}{5}-\frac{x^4}{4}\right)dx$. 4.3. $\int\limits_a^x x^5 dx$.

5. Використовуючи формулу Ньютона - Лейбніца, обчислити інтеграли.

5.1. $\int\limits_{-1}^2 x^3 dx$. 5.2. $\int\limits_1^2 \left(3x^2-2x+1\right)dx$. 5.3. $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5.4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 5.5. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}dx$. 5.6. $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

5.7. $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. 5.8. $\int\limits_1^8 \frac{\left(2+5\sqrt[3]{x}\right)}{x^3}dx$. 5.9. $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$.

5.10. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2+3}{x-2} dx$.

5.11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^6} dx$.

5.12. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$.

5.13. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

5.14. $\int\limits_{0}^{1} e^x dx$.

5.15. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$.

5.16. $\int\limits_{0}^{3} 2^x dx$.

5.17. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x}$.

5.18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$.

5.19. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tg^4 x dx$.

5.20. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

5.21. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$.

5.22. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$.

5.23. $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x dx$.

5.24. $\int\limits_{0}^{1} x e^x dx$.

5.25. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

5.26. $\int\limits_{0}^{1} x \; arctg x dx$.

5.27. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 2} dx$.

5.28. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}$.

5.29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$.

5.30. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x dx$.

5.31. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5.32. $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

5.33. $\int\limits_{0}^{3} x^2 \sqrt{9-x^2} dx$.

5.34. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$.

5.35. $\int\limits_{2}^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$.

6.14. Самостійна робота

6.14.1. Визначений інтеграл по Коші

Перше визначення визначеного інтеграла дав Коші.

Def. Нехай на інтервалі $[a,b]$ задана безперервна функція $f(x)$. Сума виду

$$S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right),$$

де $\forall n\in N$, називається інтегральною сумою Коші.

Def. Визначеним інтегралом Коші функції $f(x)$ називається число, яке є границею, до якої прагне n-а інтегральна сума Коші при n, що прагне до нескінченності:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Позначення певного інтеграла Коші:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

6.14.2. Альтернативне визначення певного інтеграла за Ріманом

В основній частині лекції дано визначення визначеного інтеграла за Ріманом як границі інтегральних сум Рімана.

Визначення визначеного інтеграла можна дати і через нескінченно малі величини.

Def. Число I називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо при розбитті відрізка на частини довжиною Δx_i для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що при $\Delta x_i<\delta$ незалежно від вибору точок ξ_i виконується нерівність

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon.$$

З визначення визначеного інтеграла випливає, що величина інтеграла залежить тільки від виду функції і чисел a і b.

6.14.3. Критерій інтегрованості за Ріманом

Def. Множина дійсних чисел {*x*} називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує число *M* (*m*) таке, що $\forall x \in \{x\}\ \ x \le M \quad \left(\forall x \in \{x\}\ \ x \ge m\right)$

Число *M* називається **верхньою гранню** числової множини $\{x\}$. Аналогічно, число *m* називається **нижньою гранню** числової множини $\{x\}$.

Верхніх (нижніх) граней нескінченно багато, так як будь-яке число, більше *M* (менше *m*), є також верхня (нижня) грань.

Def. Найменша з верхніх граней називається точною верхньою гранню або супренумом числової множини {*x*} (позначення *sup {x}).*

Def. Найбільша з нижніх граней називається точною нижньою гранню або інфімум числової множини {x} (позначення *inf {x}).*

Будь-якому розбиття інтервалу $[a,b]$ функції $f(x)$ можна поставити у відповідність два числа:

$$S_p = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \text{, де } M_i = sup\left\{ f(x) : x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]\right\},\ i = 1..n,$$

$$s_p = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \text{, де } m_i = inf\left\{ f(x) : x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]\right\},\ i = 1..n$$

Тут називають S_p - верхня сума Дарбу, s_p - нижня сума Дарбу.

Верхня і нижня суми Дарбу є кінцевими числами.

Функція $f(x)$, яка обмежена на відрізку$[a,b]$, є інтегрованою тоді і тільки тоді, коли границя різниці верхньої і нижньої сум Дарбу дорівнює нулю при прагненні до нуля часткового інтервалу $\Delta x_i \to 0$:

$$\exists \int_a^b f(x)\,dx \Leftarrow \lim_{\max \Delta x_i \to 0} [S_p - s_p] = 0.$$

Наведений критерій інтегрованості за Ріманом дозволяє визначити і питання існування певного інтеграла, який випливає з існування сум Дарбу, а саме: певний інтеграл існує, якщо:

- функція $f(x)$ непереривна в замкнутому інтервалі;
- функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a,b]$ і непереривна на ньому всюди, крім кінцевого числа точок.

6.14.4. Мінлива площа криволінійної трапеції функції $y = f(x)$ як її первісна

Розглянемо спочатку частину криволінійної трапеції $aAXx$, яка відсікається від трапеції $aABb$ ординатою xX довільної точки x відрізка $[a,b]$. При зміні x площа $S(x)$ трапеції $aAXx$ буде змінюватися разом з x, так що $S(x)$ буде неперервною функцією аргументу x (рисунок 6.6).

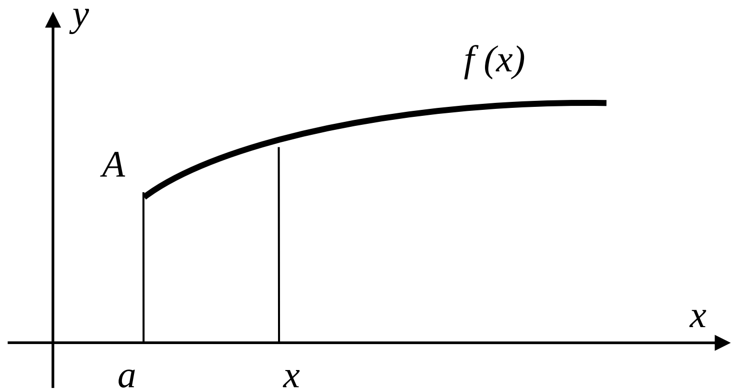


Рисунок 6.6

***Th.* Похідна від площі $S(x)$ криволінійної трапеції $aAXx$ в довільній точці x дорівнює ординаті $y = f(x)$ в цій точці.**

◀ Додаємо до x деякий приріст Δx, тобто площа $S(x)$ одержить збільшення ΔS. Позначимо через M і m найбільше і найменше значення функції $f(x)$ у проміжку $[x, x+\Delta x]$. Порівняємо отримані площі на відрізку Δx (рисунок 6.7):

$$m < \frac{\Delta S}{\Delta x} < M .$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то в силу неперервності функції

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} M ,$$

але $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} M = f(x)$, отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = S'(x) = f(x)$. ►

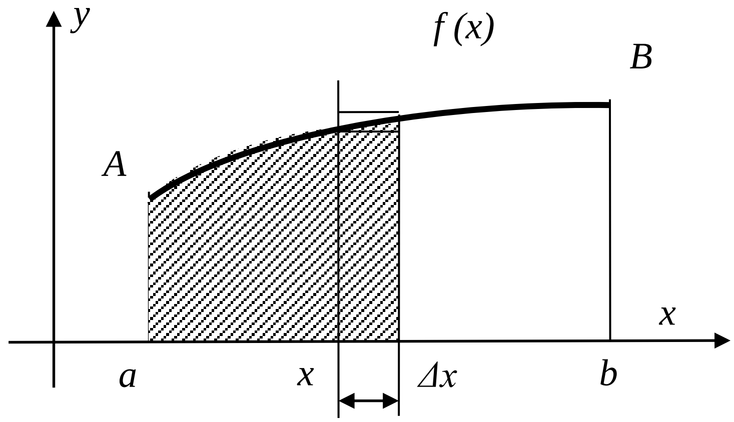


Рисунок 6.7

Висновок. Площа $S(x)$, яка змінюється, являє собою первісну для даної функції $y = f(x)$.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Собака порвала, покусала, описала зошит.

Що кажуть про математику

«Як же я раніше не здогадувався, що це так просто? Тобто не щастя, а наближення до нього, то, що в математиці називається асимптотою: лінія, ніколи не збігається з кривою, але тісно наближається до неї. Асимптота щастя - ось чого треба шукати в житті »(М. Алданов).

7. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ПЕВНОГО ІНТЕГРАЛА

Найбільш поширені геометричні додатки певного інтеграла:
- площа криволінійної трапеції;
- площа криволінійного сектора;
- довжина дуги кривої;
- обсяг тіла обертання;
- площа бічної поверхні тіла обертання.

7.1. Площа криволінійної трапеції

1. Функція, задана явно. Для безперервної і невід'ємної функції площа криволінійної трапеції (рис. 7.1)

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Це випливає з визначення певного інтеграла і його геометричного сенсу.

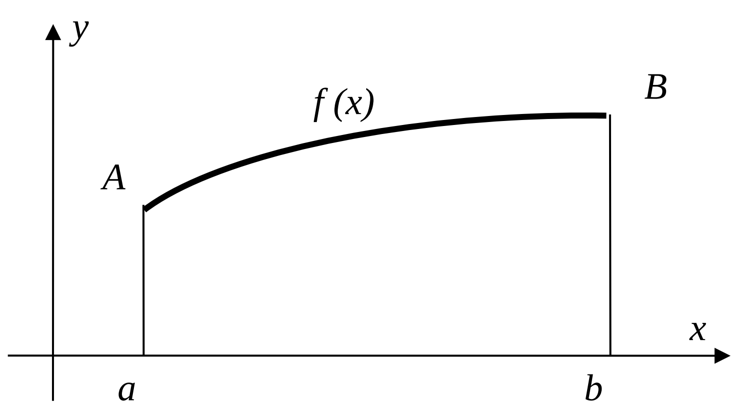


Рис. 7.1

2. Функція задана параметрично: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ на інтервалі $[t_1,\ t_2]$. У цьому випадку має місце рівність $dx = \dot{\varphi}(t)dt$ і площа криволінійної трапеції має вигляд

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\dot{\varphi}(t)dt,$$

де t_1 і t_2 - значення, між якими змінюється параметр t, Коли точка пробігає зліва направо всю криву, що обмежує трапецію зверху.

Зауваження. При визначенні площі криволінійної трапеції необхідно враховувати негативність функції (рис. 7.2).

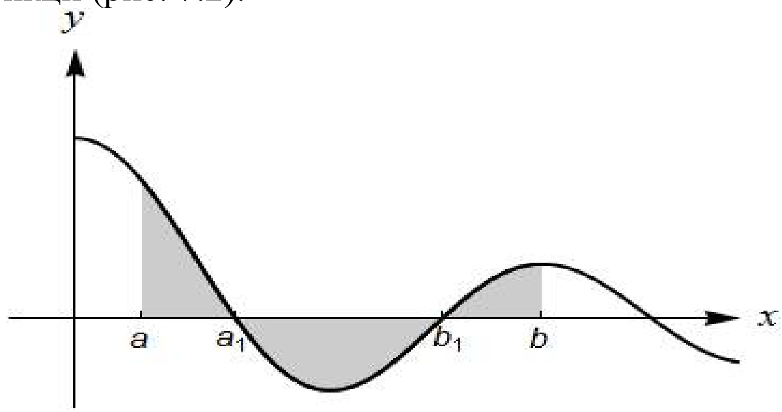


Рис. 7.2

Для наведеного рисунка можна записати

$$S = \int_{a}^{a_1} f(x)\,dx - \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b} f(x)\,dx.$$

Це можна ще записати так:

$$S = \int_{a}^{b} |f(x)|dx.$$

ПРИКЛАД 1.Обчислити площу, обмежену кривими $y = x^2$ і $y = x^3$.

Рішення

Визначаємо точки перетину кривих (рис. 7.3):

$$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Площа, обмежена кривими, дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, обмежених кривими $y = x^2$ і $y = x^3$ на інтервалі $[0...1]$, Причому крива $y = x^2$ розташована над кривою $y = x^3$. Отже, знаходимо шукану площу:

$$S=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x^3dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}.$$

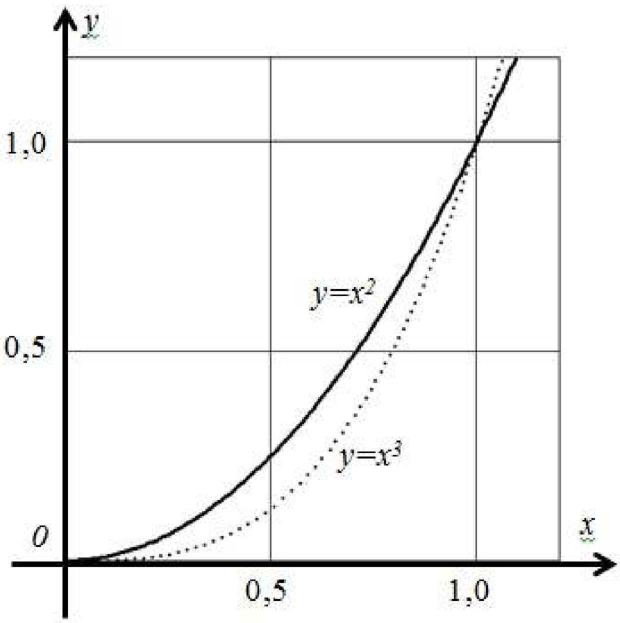


Рис. 7.3

ПРИКЛАД 2. Обчислити площу еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис. 7.4).

Рішення. Задаємо еліпс в параметричному вигляді:

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ \text{де}\ t\in 0\ldots 2\pi.$$

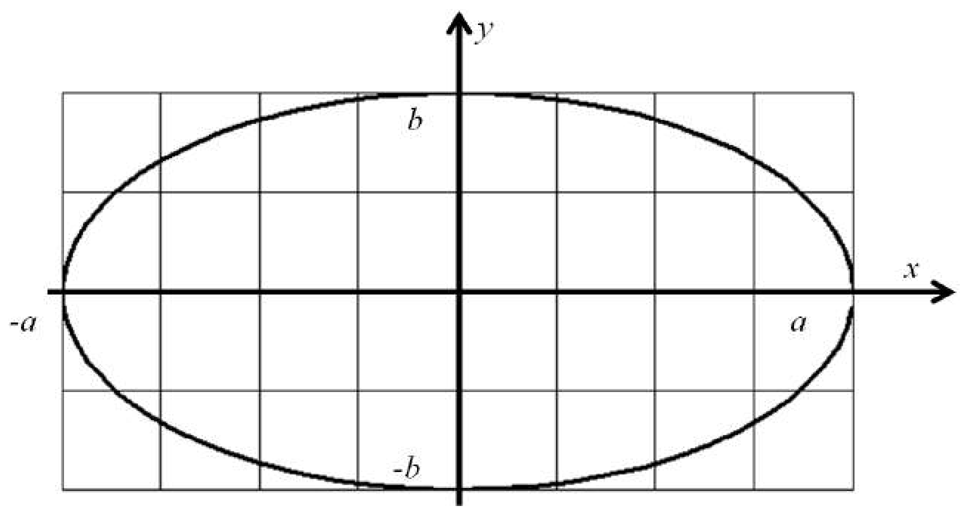


Рис. 7.4

В цьому випадку $dx = -a\sin t$.

Площа еліпса можна розглядати як чотири чверті, де для першої чверті x змінюється від 0 до a:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; a\cos t = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{2};$$

$$x = a \;\Rightarrow\; a\cos t = a \;\Rightarrow\; \cos t = 1 \;\Rightarrow\; t = 0.$$

Отже, інтегрування чверті майданчики еліпса виконується на інтервалі значень параметра t від $\frac{\pi}{2}$ до 0. Це можна записати у вигляді

$$\frac{S}{4} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot a\sin t \cdot dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t \cdot dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\frac{ab}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2t dt\right) =$$

$$= -\frac{ab}{2}\left(t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\right) = -\frac{ab}{2}\left(0 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0-0)\right) = -\frac{ab}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab\pi}{4};$$

$$S = \pi ab.$$

Відповідь. Площа еліпса дорівнює πab.

зауваження. Якщо припустити, що $a = b = R$, То отримуємо площа кола πR^2.

7.2. Площа криволінійного сектора

нехай крива AB задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Причому, функція $\rho = \rho(\varphi)$ - неперервна і невід'ємна на інтервалі $[\alpha, \beta]$ (Рис. 7.5).

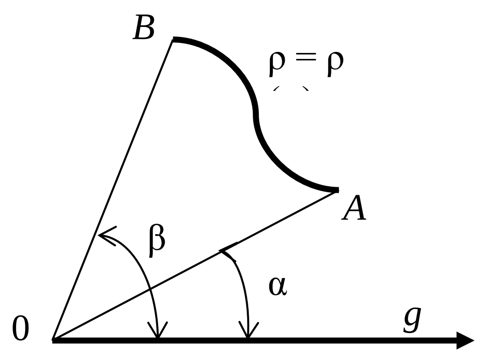


Рис. 7.5

Def. Плоска фігура, обмежена кривою AB і двома променями, складовими з полярною віссю кути α і β, Називається криволінійним сектором.

Розіб'ємо заданий криволінійний сектор променями на n елементарних криволінійних секторів (рис. 7.6). Площа такого елементарного криволінійного сектора можна розглядати як площа трикутника:

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho_i(\rho_i + \Delta\rho) \sin \Delta\varphi_i .$$

При розбивці на велику кількість малих криволінійних секторів в наближенні можна прийняти

$$\rho_i \approx \rho_i + \Delta\rho , \sin \Delta\varphi_i \approx \Delta\varphi_i .$$

Отже, можна записати

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_i .$$

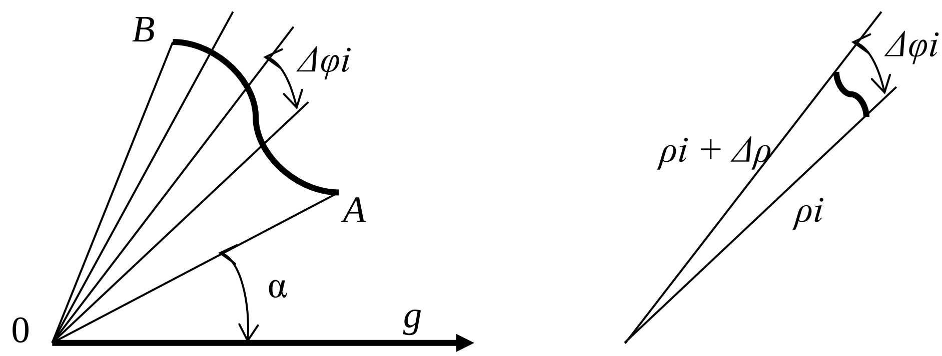


Рис. 7.6

Площа всього криволінійного сектора можна записати у вигляді

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i ,$$

а це можна записати як певний інтеграл:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi .$$

Отже, площа криволінійного сектора дорівнює

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi .$$

ПРИКЛАД**.** Обчислити площу лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Рішення

Лемніската представлена на рис. 7.7 ($a = 2$).

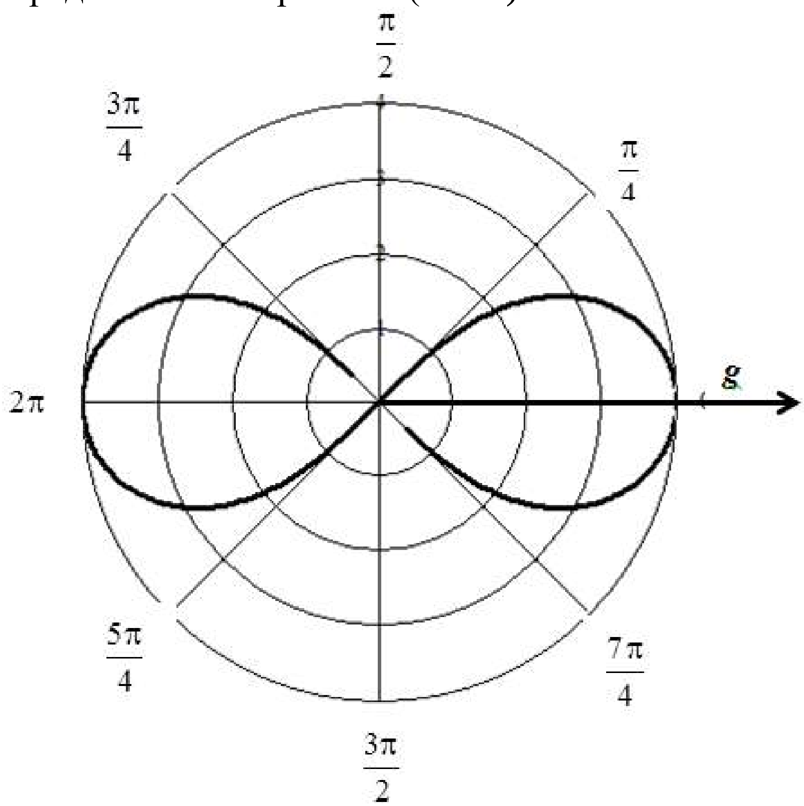


Рис. 7.7

Її побудова визначається наступними етапами:

1. Для $\rho = a\sqrt{cos\ 2\varphi}$ повинна виконуватися умова

$$cos\ 2\varphi \geq 0 \ \Rightarrow \ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \Rightarrow \ -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi .$$

Функція періодична з періодом π.

2. Функція парна, отже, графік буде симетричним щодо полярної осі g. Тому складемо таблицю значень функції ρ від значень φ (Табл. 7.1).

Таблиця 7.1

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	$a \cdot 1$	$a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}931a$	$a\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0{,}841a$	$a\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}707a$	$a \cdot 0$

3. За отриманими точкам будуємо половину лемніскати в першій чверті і, з огляду на періодичність, будуємо всю криву.

Для четвертинки площі можна записати

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}a^{2}\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^{2}}{4}\sin 2\varphi\Big|_{0}^{\pi/4}=\frac{a^{2}}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{a^{2}}{4},$$

$$S=a^{2}.$$

7.3. Довжина дуги кривої

1. Нехай крива задана аналітично: $y=f(x)$. Назвемо частину кривої між двома точками A і B дугою AB (Рис. 7.8).

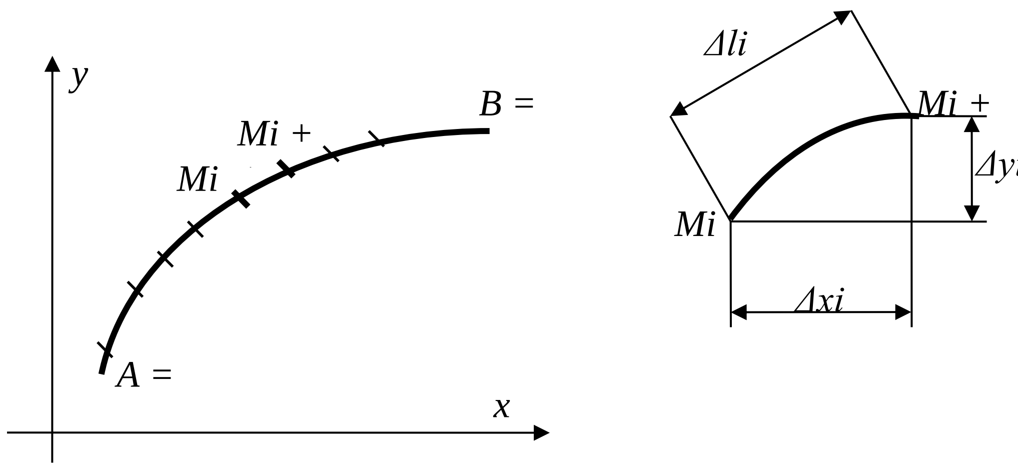


Рис. 7.8

Розіб'ємо цю дугу на n елементарних дуг, які позначимо як Δl_i. виберемо i-у елементарну дугу. У наближенні її можна розглядати як гіпотенузу трикутника, побудованого на катетах Δx_i і Δy_i. У цьому випадку довжина елементарної дуги

$$\Delta l_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}.$$

Цей вислів можна перетворити до вигляду

$$\Delta l_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Перейдемо до диференціальних уявленням збільшень:

$$dl_i\approx\sqrt{1+\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)^2}\,dx_i.$$

Цю величину називають диференціалом дуги, і її можна записати у вигляді

$$dl_i\approx\sqrt{1+y'^2}\,dx_i.$$

2. Функція задана параметрично: $x=\psi(t)$, $y=\varphi(t)$.

В цьому випадку $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\dfrac{\dot\varphi(t)}{\dot\psi(t)}$, $dx=\dot\psi\,dt$.

Якщо довжину відрізка дуги уявити як

$$dl_i=\sqrt{1+y'^2}\,dx_i,$$

то для параметричної дуги маємо

$$dl_i=\sqrt{1+\frac{\dot\varphi^2(t)}{\dot\psi^2(t)}}\dot\psi(t)dt=\sqrt{\dot\psi^2(t)+\dot\varphi^2(t)}dt.$$

3. Функція задана в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi)$. В полярній системі координат функцію можна записати параметрично:

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi.$$

Похідні в цьому випадку будуть мати вигляд $x'(\varphi)=\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi$, $y'(\varphi)=\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi$. отже,

$$x'^2(\varphi)=\rho'^2\cos^2\varphi-2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi,$$

$$y'^2(\varphi)=\rho'^2\sin^2\varphi+2\rho'\rho\sin\varphi\cos\varphi+\rho^2\cos^2\varphi.$$

Диференціал дуги визначається формулою

$$dl=\sqrt{\rho'^2\cos^2\varphi-2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$$

висновки. Для представлених міркувань довжину дуги кривої можна записати так:

а) для функції, заданої в явному вигляді,

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx;$$

б) для функції, заданої параметрично,

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot\psi^2(t)+\dot\varphi^2(t)}\,dt \text{ або } L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot x^2(t)+\dot y^2(t)}\,dt;$$

в) для функції, заданої в полярній системі координат,

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi,$$

де α і β - значення полярного кута відповідно початку A і кінця B дуги.

ПРИКЛАД 1. Обчислити довжину дуги параболи $y = ax^2$ на інтервалі $0 \le x \le 1$ (Рис. 7.9).

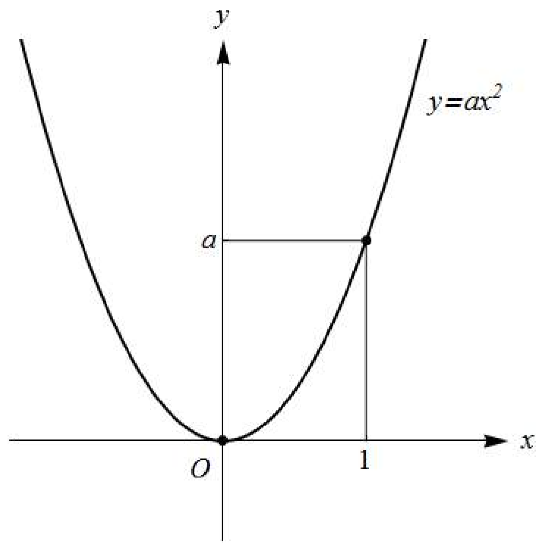


Рис. 7.9

Рішення

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx,\ \ y' = 2ax,\ \ y'^2 = 4a^2x^2;\ dl = \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx;$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{\operatorname{sh} t}{2a} \\ dx = \dfrac{\operatorname{ch} t}{2a} dt \\ 0 \le t \le \operatorname{arsh}(2a) \end{matrix} \right| = \int_0^{\operatorname{arsh}(2a)} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\,\frac{\operatorname{ch} t}{2a} dt =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arsh}(2a)} \frac{\operatorname{ch}^2 t}{2a} dt = \frac{1}{2a} \int_0^{\operatorname{arsh}(2a)} \frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2} dt = \frac{1}{4a}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2t)\right)\Bigg|_0^{\operatorname{arsh}(2a)} =$$

$$= \frac{1}{4a}\left(\operatorname{arsh}(2a) + \operatorname{sh}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\mathrm{t})}\Bigg|_0^{\operatorname{arsh}(2\mathrm{a})} \right) = \frac{1}{4a}\left(ln\left(2a + \sqrt{1+4a^2}\right) + 2a\sqrt{1+4a^2} \right).$$

ПРИКЛАД 2. Знайти довжину астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$; $x = R\cos^3 \frac{t}{4}$, $y = R\sin^3 \frac{t}{4}$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$, де t - параметр, що відповідає часу, за яке коло робить один оборот, $0 \le t \le 2\pi$ (Рис. 7.10).

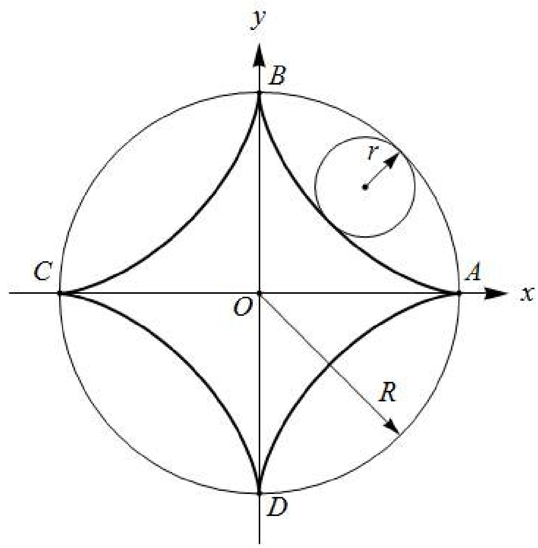


Рис. 7.10

Рішення

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt\,,\ \dot{x}(t) = -\frac{3}{4}R\cos^2\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4},\ \dot{y}(t) = \frac{3}{4}R\sin^2\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4};$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = \frac{9}{16}R^2\cos^4\frac{t}{4}\sin^2\frac{t}{4} + \frac{9}{16}R^2\sin^4\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4} =$$

$$= \frac{9}{16}R^2\cos^2\frac{t}{4}\sin^2\frac{t}{4}\left(\cos^2\frac{t}{4} + \sin^2\frac{t}{4}\right) = \frac{9}{64}R^2\sin^2\frac{t}{2};$$

$$dl = \sqrt{\frac{9}{64}R^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \frac{3}{8}R\sin\frac{t}{2}dt;$$

$$L = 4\int_0^{2\pi}\frac{3}{8}R\sin\frac{t}{2}dt = -\frac{3}{2}R\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = -3R(-1-1) = 6R.$$

ПРИКЛАД 3. Знайти довжину спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ від початку координат до довільної точки $P(R_0, \varphi_0)$ (Рис. 7.11).

Рішення

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi,\ \rho=a\varphi,\ \rho'=a,\ dl=\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi;$$

$$L=\int\limits_0^{\varphi_0}a\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi=\left|\begin{array}{l}\varphi=\mathrm{sh}t\\ d\varphi=\mathrm{ch}t\ \ dt\\ t\big|_{\varphi=\varphi_0}\end{array}\right|=\int\limits_0^{\mathrm{arsh}\varphi_0}a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{t})}\mathrm{ch}tdt=$$

$$=\int\limits_0^{\mathrm{arsh}\varphi_0}a\ \mathrm{ch}^2tdt=a\int\limits_0^{\mathrm{arsh}\varphi_0}\frac{1+\mathrm{ch}2\mathrm{t}}{2}dt=\frac{\mathrm{a}}{2}\left(\mathrm{t}+\mathrm{sh}t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{t})}\Big|_0^{\mathrm{arsh}\varphi_0}\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left(arsh\varphi_0+\varphi_0\sqrt{1+\varphi_0^2}\right)=\frac{a}{2}\left(ln\left(\varphi_0+\sqrt{1+\varphi_0^2}\right)+\varphi_0\sqrt{1+\varphi_0^2}\right).$$

Для першого витка $0<\varphi\le 2\pi$, $\varphi_0=2\pi$:

$$l=\frac{a}{2}\left(ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)+2\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

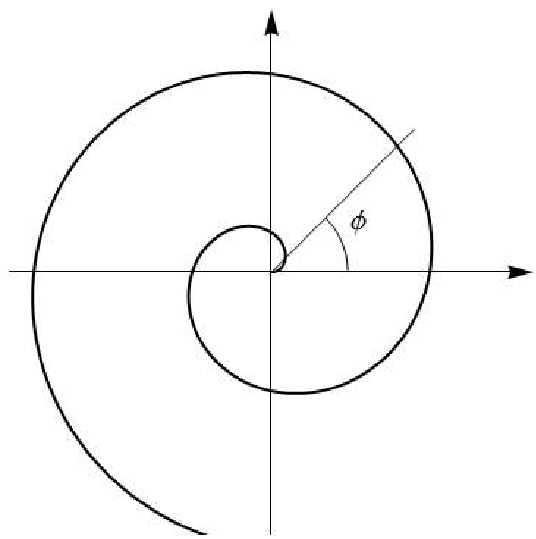


Рис. 7.11

7.4. Обсяг тіла обертання

Нехай задана функція $y=f(x)$, Безперервна на інтервалі $[a,b]$. В результаті обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції утворюється тіло обертання F (Рис. 7.12).

Th. обсяг тіла F **, Утвореного обертанням навколо осі** Ox **криволінійної трапеції графіка функції** $|f(x)|$**, дорівнює**

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx\,.$$

◀ розіб'ємо інтервал $[a,b]$ на часткові інтервали Δx і представимо тіло обертання як набір циліндрів товщиною Δx_i. При цьому радіус кожного такого циліндра можна прийняти таким: $r_i = f(x_i)$.

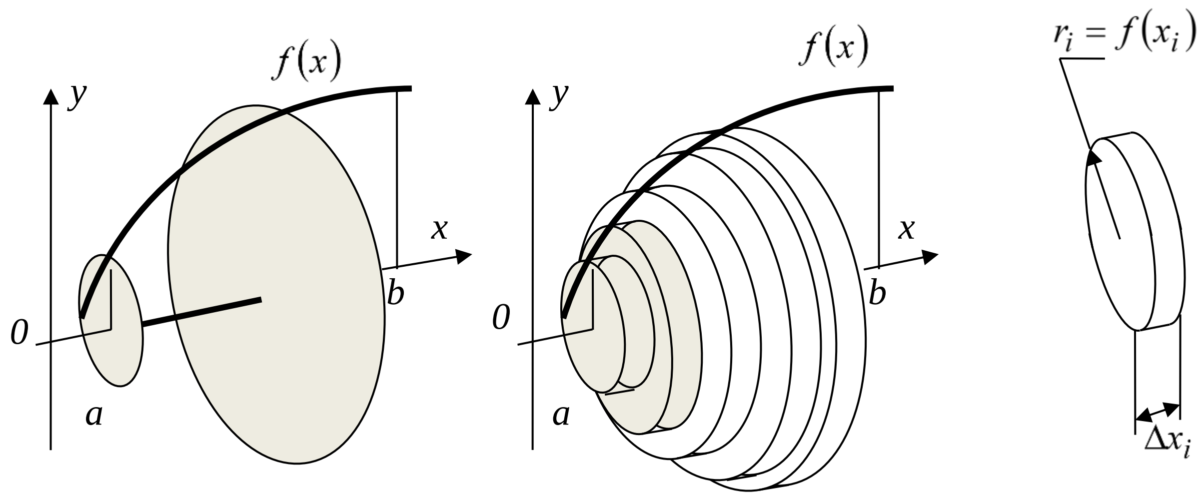


Рис. 7.12

обсяг такого i -го циліндра

$$V_i = \pi r_i^2 \Delta x_i = \pi f^2(x_i)\Delta x_i\,.$$

Весь обсяг можна записати як

$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \pi\sum_{i=0}^{n} f^2(x_i)\Delta x_i = \pi\int_a^b f^2(x)dx\,. ▶$$

ПРИКЛАД. Визначити об'єм кулі радіусом R (Рис. 7.13).

Куля, який представляє собою тіло обертання, утворюється при обертанні кривої $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ навколо осі 0х. тоді

$$V=\pi\int_{-R}^{R} f^2(x)dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\pi\left(\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right)=$$

$$=\pi\left(2R^3-\frac{2R^3}{3}\right)=\pi\frac{6R^3-2R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

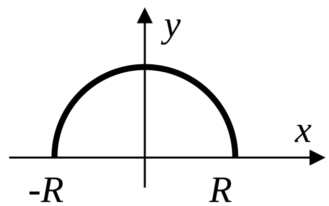


Рис. 7.13

Примітки:

1. Якщо крива задана параметрично: $x=x(t)$, $y=y(t)$, То обсяг тіла обертання визначається виразом

$$V=\pi\int_{t_1}^{t^2} y^2(t)\dot{x}(t)\,dt.$$

2. При обертанні криволінійної трапеції навколо осі Oy (Рис. 7.14) обсяг тіла обчислюють за формулою

$$V=\pi\int_{c}^{d} x^2(y)dy.$$

3. Якщо задана площа перпендикулярного до осі Ox перетину тіла як функція від x, Тобто $S(x)$ (Див. Рис. 7.14), то обсяг тіла можна записати в такий спосіб:

$$V=\int_{a}^{b} S(x)\,dx.$$

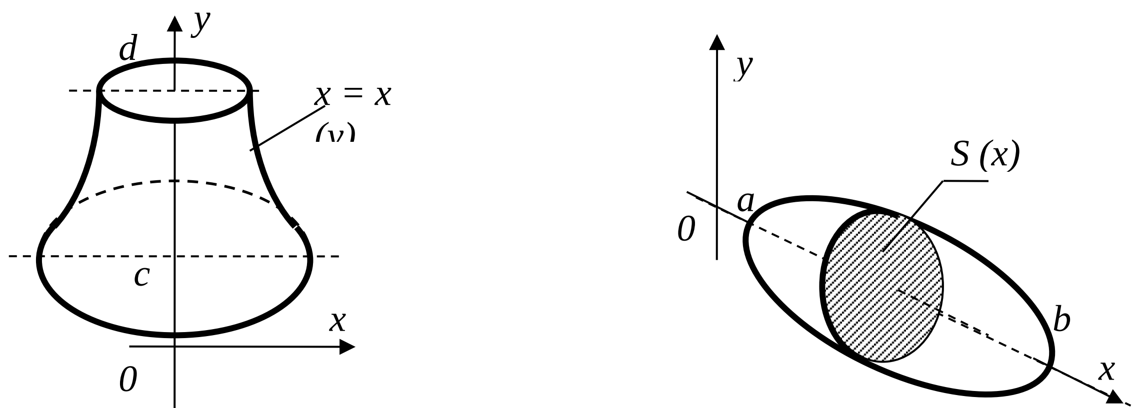


Рис. 7.14

7.5. Поверхня тіла обертання

Нехай задана функція $f(x)$, Яка утворює поверхню обертання з віссю Ox. розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на граничні інтервали. криву $y = f(x)$ замінимо відповідної ламаною лінією $M_0 M_1 \dots M_i M_{i+1} \dots$ (Рис. 7.15). При обертанні ламаної навколо осі Ox отримаємо поверхню усічених конусів.

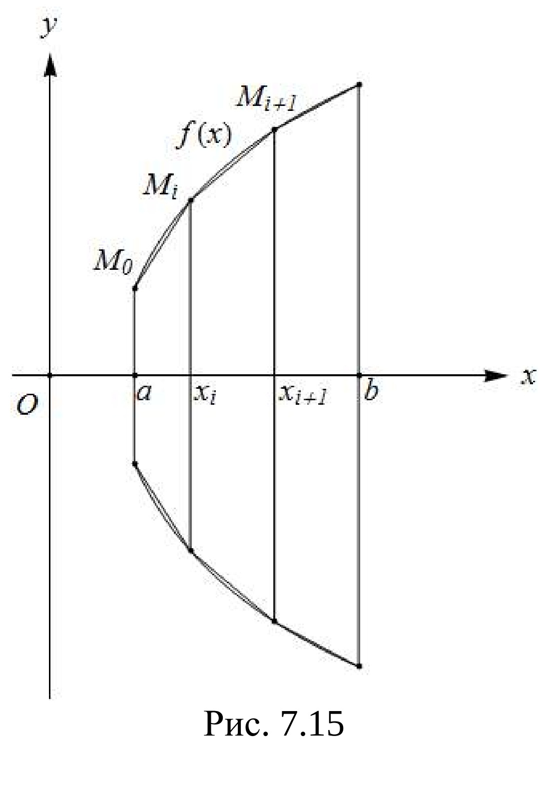


Рис. 7.15

Для усіченого конуса площа бічної поверхні (рис. 7.16) дорівнює площі криволінійної трапеції:

$$S_i = \frac{2\pi f(x_i) + 2\pi f(x_i + \Delta x)}{2} \Delta l_i .$$

У наближенні при нескінченній розбивці можна записати

$$S_i \approx (\pi f(x_i) + \pi f(x_i + \Delta x))\Delta l_i \approx 2\pi f(x_i)\Delta l_i ,$$

де $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$.

Тоді для бічної площі можна записати

$$S = \lim_{\max \Delta x_i} \sum_{i=1}^{n} \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i (2 f(x_i) + \Delta f(x_i)) =$$

$$= \int_a^b \pi \sqrt{1 + y'^2}\, 2 f(x) dx \text{ , Тобто } S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx .$$

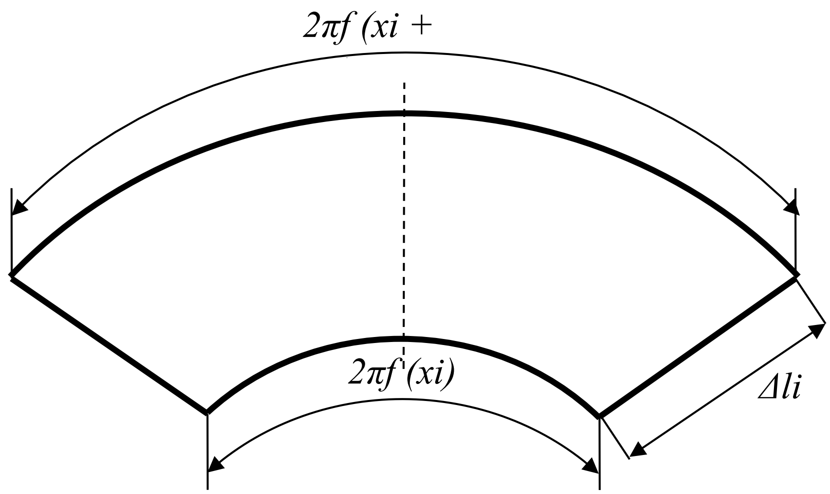


Рис. 7.16

Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, То поверхня тіла обертання

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt .$$

ПРИКЛАД**.** Визначити площу поверхні кулі радіусом R (Мал. 7.13).

Рішення

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}\,dx\,,\ y = \sqrt{R^2 - x^2}\,,\ y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y};$$

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx = 2\pi \int_{-R}^{R} y\frac{\sqrt{R^2}}{y}dx = \pi \int_{-R}^{R} Rdx = 2\pi Rx\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2\,.$$

7.6.висновки

А. Площа криволінійної трапеції:

1. Функція, задана явно. Для безперервної і невід'ємної функції площа криволінійної трапеції

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

2. Функція задана параметрично: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. *В цьому випадку*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)\,dt\,,$$

де t_1 *і* t_2 *- значення, між якими змінюється параметр* t, *Коли точка пробігає зліва направо всю лінію, що обмежує трапецію зверху.*

Зауваження. При визначенні площі криволінійної трапеції необхідно враховувати негативність функції:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Б. Площа криволінійного сектора.

Def. Плоска фігура, обмежена кривою AB ***і двома променями, складовими з полярною віссю кути*** α ***і*** β***, Називається криволінійним сектором.***

Площа криволінійного сектора

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\,d\varphi\,.$$

В. Довжина дуги кривої:

а) для функції, заданої в явному вигляді,

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx\,;$$

б) для функції, заданої параметрично,

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{\psi}^2(t)+\dot{\varphi}^2(t)}\,dt \;\; \textit{або} \;\; L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt\,;$$

в) для функції, заданої в полярній системі координат,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi\,,$$

де α *і* β *- значення полярного кута відповідно початку* A *і кінця* B *дуги.*

Г. Обсяг тіла обертання

Th. обсяг тіла F *, Утвореного обертанням навколо осі* Ox *криволінійної трапеції графіка функції* $|\,f(x)|$,

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx\,.$$

Примітки:

1. *Якщо крива задана параметрично:* $x=x(t)$, $y=y(t)$, *То обсяг тіла обертання визначається виразом*

$$V=\pi\int_{t_1}^{t^2} y^2(t)\dot{x}(t)\,dt\,.$$

2. *При обертанні криволінійної трапеції навколо осі* Oy *обсяг тіла обчислюють за формулою*

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta} x^2(y)\,dy\,.$$

3. *Якщо задана площа перпендикулярного до осі* Ox *перетину тіла як функція від* x, *Тобто* $S(x)$, *То обсяг тіла можна записати в такий спосіб:*

$$V=\int_a^b S(x)\,dx\,.$$

Д. Поверхня тіла обертання.

для функції $f(x)$, *Яка утворює поверхню обертання з віссю* Ox, *Площа бічної поверхні* $S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, *То поверхня тіла обертання*

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt .$$

Перерва

- Математика складається на 50% з формул, на 50% з доказів, і на 50% з уяви.
- Професор математики - це той, хто говорить в чужому сні.
- Аналітики використовують Епсілон і дельти в математиці, тому що вони прагнуть робити помилки.
- Ентузіазм професора в викладанні початків математичного аналізу змінюється обернено пропорційно ймовірності того, що він повинен буде робити це.
- Найпрекрасніші моменти в житті математика - це перші кілька хвилин після того, як він щось довів, і ще ніхто не знайшов помилку.

7.7. Питання для перевірки

1. Площа криволінійної трапеції для аналітичної функції, заданої в явному вигляді:

а) $S = \int_{t1}^{t2} y(t)\dot{x}(t)dt$; б) $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \rho^2(\varphi)d\varphi$; в) $S = \int_a^b f(x)dx$.

2. Площа криволінійної трапеції для функції, заданої параметрично:

а) $S = \int_{t1}^{t2} y(t)\dot{x}(t)dt$; б) $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \rho^2(\varphi)d\varphi$; в) $S = \int_a^b f(x)dx$.

3. Площа криволінійного сектора:

а) $S = \int_{t1}^{t2} y(t)\dot{x}(t)dt$; б) $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \rho^2(\varphi)d\varphi$; в) $S = \int_a^b f(x)dx$.

4. Довжина дуги кривої, заданої аналітичної функцією в явному вигляді:

а) $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$; б) $L = \int_{t1}^{t2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$; в) $L = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}d\varphi$.

5. Довжина дуги кривої, заданої параметрично:

а) $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$; б) $L = \int_{t1}^{t2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$; в) $L = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}d\varphi$.

6. Довжина дуги кривої, заданої функцією в полярній системі координат:

а) $L=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$; б) $L=\int\limits_{t1}^{t2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$; в) $L=\int\limits_{\varphi1}^{\varphi2}\sqrt{\rho^2+\dot{\rho}^2}\,d\varphi$.

7. Обсяг тіла обертання, що утворює якого задана аналітичною функцією в явному вигляді:

а) $V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$; б) $V=\pi\int\limits_{t1}^{t2} y^2(t)\dot{x}(t)dt$; в) $V=\pi\int\limits_a^b S(x)dx$.

8. Обсяг тіла обертання, що утворює якого задана параметричної функцією:

а) $V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$; б) $V=\pi\int\limits_{t1}^{t2} y^2(t)\dot{x}(t)dt$; в) $V=\pi\int\limits_a^b S(x)dx$.

9. Обсяг тіла, для якого задана площа перетину тіла уздовж координатної осі тіла:

а) $V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$; б) $V=\pi\int\limits_{t1}^{t2} y^2(t)\dot{x}(t)dt$; в) $V=\pi\int\limits_a^b S(x)dx$.

10. Площа бічної поверхні тіла обертання, що утворює якого задана аналітичною функцією в явному вигляді:

а) $S=2\pi\int\limits_{t1}^{t2} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$; б) $S=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$; в) $S=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

11. Площа бічної поверхні тіла обертання, що утворює якого задана параметричної функцією:

а) $S=2\pi\int\limits_{t1}^{t2} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$; б) $S=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$; в) $S=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

7.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1) $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=0$, $x=2$, $x=3$;

2) $y=6-x-2x^2$, $y=x+2$;

3) $y=cos\,x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{4}$;

4) $y=\frac{3}{x}$, $x+y=4$.

2. Знайти площу фігури, обмеженою астроїда $x=a\,cos^3\,t$, $y=a\,sin^3\,t$.

3. Знайти площу петлі кривої $x=a\left(t^2+1\right)$, $y=b\left(t^3-3t\right)$.

4. Знайти площу фігури, обмеженою кардіоїд $\rho = a(1 + sin\,\varphi)$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a\,sin\,5\varphi$.

6. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $\rho = \dfrac{atg\varphi}{cos\,\varphi}$, $\rho = 2a\,cos\,\varphi$ і полярною віссю.

7. Знайти площу фігури, обмеженою лемніската $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

8. Знайти довжину дуги параболи $y = x^2$ від $x = 0$ до $x = 1$.

9. Знайти довжину дуги кривої $x = a(3\cos t - \cos 3t), y = a(3\sin t - \sin 3t)$ від $t = 0$ до $t = \dfrac{\pi}{2}(a > 0)$.

10. Знайти довжину петлі кривої $x = t^2, y = t\left(\dfrac{1}{3} - t^2\right)$.

11. Знайти довжину петлі кривої $x = a\left(t^2 + 1\right), y = \dfrac{a}{3}\left(t^3 - 3t\right)(a > 0)$.

12. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $r = e^{a\varphi}$, Що знаходиться всередині кола $r = 1(a > 0)$.

13. Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $r = 5\varphi$, Що знаходиться всередині кола $r = 10\pi$.

14. Знайти площу поверхні еліпсоїда, утвореного обертанням еліпса $4x^2 + y^2 = 4$ навколо: а) осі Ox; б) осі Oy.

15. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = \dfrac{1}{6}\sqrt{x}(x - 12)$ між її точками перетину з віссю Ox.

16. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої $x = a(3\cos t - \cos 3t), y = a(3\sin t - \sin 3t)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ навколо: а) осі Ox; б) осі Oy.

17. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ навколо її осі симетрії.

18. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням окружності $r = 2a\sin\varphi$ навколо полярної осі.

19. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $r = a(1 + \cos\varphi)$ навколо дотичній в її вершині $(2a, 0)$.

20. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $2y = x^2$ і $2x + 2y - 3 = 0$.

21. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = e^{-2x} - 1, y = e^{-x} + 1, x = 0$.

22. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ і $y = 2$.

23. Знайти обсяги тіл, утворених обертанням фігури, обмеженої кривою $x = at^2, y = a\ln t\left(a > 0\right)$ і осями координат, навколо: а) осі Ox; б) осі Oy.

24. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням астроїди $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ навколо прямої $x = a$.

25. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $r = a\sin^2\varphi$ навколо полярної осі.

7.9.Самостійна робота

1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1) $y = \sqrt[3]{x}, y = 0, x = 1, x = 8$;

2) $y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}$;

3) $y = e^{-x}, y = 0, x = 1, x = 2$;

4) $y = \frac{2}{x}, y = 0, x = 2, x = 3$.

2. Знайти площу петлі кривої $x = \frac{1}{3}t\left(3 - t^2\right), y = t^2$.

3. Знайти площу петлі кривої $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$.

4. Знайти площу одного пелюстки кривої $r = a\sin 2\varphi$.

5. Знайти площу фігури, що лежить в першій чверті, обмеженою кривими $r = atg\varphi, r = \frac{a}{\cos\varphi}$ і полярною віссю.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

7. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ від $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$.

8. Знайти довжину дуги кривої $x = e^t\cos t, y = e^t\sin t$ від $t = 0$ до $t = 1$.

9. Знайти довжину дуги кривої $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}$ між точками її перетину з осями координат.

10. Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2\left(1 - \cos\varphi\right)$, Що знаходиться всередині кола $r = 1$.

11. Знайти довжину дуги всієї кривої $r = a\sin^4\frac{\varphi}{4}\left(a > 0\right)$.

12. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = \frac{1}{3}x^3$ від $x = -1$ до $x = 1$.

13. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням петлі кривої $x = a\left(t^2 + 1\right), y = \frac{a}{3}\left(t^3 - 3t\right)$ навколо осі Ox.

14. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги евольвенти кола $x = a\left(t\sin t + \cos t\right), y = a\left(\sin t - t\cos t\right), 0 \le t \le \pi$ навколо осі Ox.

15. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої $r = \dfrac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ навколо полярної осі.

16. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = x, y = x + \sin^2 x\left(0 \le x \le \pi\right)$.

17. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $x = a\cos t, y = a\sin 2t$ і віссю $Ox\left(0 \le x \le a\right)$.

18. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням лемніскати $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ навколо полярної осі.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

У найнесподіванішій момент вирубали світло у всьому кварталі.

Що кажуть про математику

«Математика - це наука про хитромудрих операції, які здійснює за спеціально розробленими правилами над спеціально придуманими поняттями. Ясно, що особливо важлива роль при цьому відводиться вигадування нових понять. Запас цікавих теорем в математиці швидко вичерпався б, якби їх доводилося формулювати лише за допомогою понять, що містяться в аксіомах »(Юджин Пол Вігнер).

Невласні інтеграли. Види невласних інтегралів. Невласний інтеграл 1-го роду (інтеграл з нескінченним проміжком інтегрування). Властивості невласних інтегралів 1-го роду. Геометричний сенс невласного інтеграла 1-го роду. Збіжність і розбіжність невласних інтегралів 1-го роду. Невласний інтеграл 2-го роду. Ознаки збіжності невласних інтегралів 2-го роду

8. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

8.1. Види невласних інтегралів

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ визначається з двох умов:

1) інтервал $[a,b]$ кінцевий;

2) функція $f(x)$ неперервна або кус очно - неперервна на інтервалі $[a,b]$.

Якщо ці умови порушені, то вводять поняття невласного інтеграла:

1. Невласний інтеграл 1-го роду, коли інтервал інтегрування нескінченний.

2. Невласний інтеграл 2-го роду, коли функція на інтервалі має хоча б один нескінченний розрив (розрив 2-го роду).

8.2. Невласний інтеграл 1-го роду (інтеграл з нескінченним проміжком інтегрування)

Розглянемо інтервал $a \le x < +\infty$. нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $a \le x < +\infty$ і для будь-якого числа $A > a$ існує певний інтеграл Рімана, т. е.

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a).$$

Def. Якщо існує границя виду $\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$, то ця границя називається невласних інтегралом 1-го роду від функції $f(x)$ на променя $[a,+\infty)$ і позначається символом

$$\int_a^\infty f(x)dx\,\mathbf{.}$$

При цьому говорять, що невласний інтеграл збіжний, і пишуть

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

Позначення $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ вживається і тоді, коли границі не існує, але при цьому кажуть, що невласний інтеграл такого виду розбіжний. Використовують також позначення

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \to зб. \text{ або } \int\limits_a^{\infty} f(x)dx \to розб.$$

Для випадку, коли інтервал інтегрування $-\infty < x \le b$, за аналогією визначають невласний інтеграл 1-го роду:

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_A^b f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx .$$

Для випадку $-\infty < x < +\infty$

$$\lim_{\substack{A'\to+\infty \\ A''\to-\infty}}\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx ,$$

де A' і A'' прагнуть до своїх значень незалежно один від одного.

8.3. Властивості невласних інтегралів 1-го роду

Для невласних інтегралів 1-го роду має місце наступне:

1. Справедлива рівність $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

2. Якщо для деякого числа a інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ збіжні, то збіжний і інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

3. Якщо збіжний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то для будь-якого числа $b > a$ збіжний і інтеграл $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$, при цьому

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx .$$

ПРИКЛАД 1.Визначити збіжність $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Рішення

Для інтеграла $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ на сегменті $[0,\ A]$ можна записати

$$F(A) = \int\limits_0^{A}\frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x\Big|_0^A = arctgA\ ,\ \ \lim_{A\to\infty} F(A) = \lim_{A\to\infty} arctg\,(A) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, невласний інтеграл 1-го роду збіжний і $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$.

ПРИКЛАД 2. Визначити збіжність інтеграла $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$, де $a>0$.

Рішення

При $\lambda>0$ і $\lambda\neq 1$ на сегменті $\left[a,\ A\right]$ отримаємо

$$F(A)=\int\limits_a^A\frac{dx}{x^{\lambda}}=\left.\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right|_a^A=\frac{A^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}-\frac{a^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}.$$

При $\lambda>1$

$$\lim_{A\to\infty}F(A)=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{A^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}-\frac{a^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right)=\frac{\infty^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}-\frac{a^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}=0-\frac{a^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}=\frac{a^{-\lambda+1}}{\lambda-1}.$$

При $\lambda<1$

$$\lim_{A\to\infty}F(A)=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{A^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}-\frac{a^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right)=\frac{\infty^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}-\frac{a^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}=\infty-\frac{a^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}=\infty.$$

При $\lambda=1$

$$F(A)=\int\limits_a^A\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_a^A=\ln A-\ln a=\ln\frac{A}{a},$$

$$\lim_{A\to\infty}F(A)=\lim_{A\to\infty}\ln\frac{A}{a}=\infty.$$

Отже, $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\begin{cases}\dfrac{a^{-\lambda+1}}{\lambda-1} & \text{\textit{при}}\ \lambda>1,\\ \text{\textit{не існує при}}\ \lambda\le 1.\end{cases}$

Таким чином, $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ при $0<\lambda\le 1$ розбіжний, а при $\lambda>1$ збіжний.

8.4. Геометричний сенс невласного інтеграла 1-го роду

Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $\left[a,\ \infty\right)$. Тоді визначений інтеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$ виражає площу області, обмеженої зверху графіком функції $f(x)$ і інтервалом $\left[a,\ A\right]$. Але при $A\to\infty$ виникає невласний інтеграл, який виражає кінцеву площу нескінченної області (рисунок 8.1).

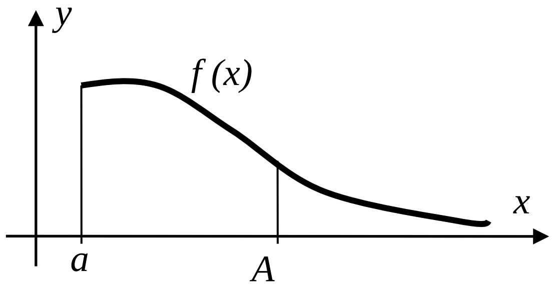


Рисунок 8.1

ПРИКЛАДИ:

a) $\int\limits_0^\infty \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\infty$ - не існує, отже, $\int\limits_0^\infty \sin x dx \to розб.$;

b) $\int\limits_0^\infty e^{-2x} \cos 3x dx = \dfrac{3\sin 3x - 2\cos 3x}{13} e^{-2x}\Big|_0^\infty = \dfrac{2}{13}$, Отже,

$$\int\limits_0^\infty e^{-2x} \cos 3x dx \to зб.;$$

c) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^\infty \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x} dx = \cos \dfrac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^\infty = 1$, Отже, $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^\infty \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x} dx \to зб.$

8.5. Збіжність і розбіжність невласних інтегралів 1-го роду

З'ясування питання про збіжність невласних інтегралів значно ускладнюється, якщо первісна підінтегральної функції невідома. У таких випадках іноді вдається встановити, збіжний або розбіжний інтеграл, використовуючи спеціальні ознаки, які не потребують значення первісної.

1. Ознака порівняння. Якщо для $[a, +\infty)$ при $x \ge a$ має місце нерівність

$$0 \le f(x) \le \varphi(x),$$

то:

- якщо збіжний $\int\limits_a^\infty \varphi(x) dx$, то збіжний і $\int\limits_a^\infty f(x) dx$;
- якщо розбіжний $\int\limits_a^\infty f(x) dx$, то розбіжний і $\int\limits_a^\infty \varphi(x) dx$.

ПРИКЛАД. Дослідити збіжність $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Рішення

Оскільки при $x > 1$ має місце $\frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{e^x}$ і при цьому інтеграл $\int\limits_1^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{e}$ збіжний, за ознакою порівняння збігається і інтеграл $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2} dx$.

2. Гранична ознака порівняння. Якщо при $x \geq a$ і $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ існує кінцева границя виду $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = const \neq 0$, то інтеграли $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

ПРИКЛАД. Дослідити збіжність $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{1+x^2}$.

Рішення

Нехай $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Розглянемо $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$, але інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбіжний, отже, інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{1+x^2}$ також розбіжний.

3. Збіжність для нескінченно малої величини. Якщо при $x \to +\infty$ функція $f(x) > 0$ є нескінченно малою порядку $m > 0$ (порівняно з $\frac{1}{x}$), то інтеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ збіжний при $m > 1$ і розбіжний при $m \leq 1$ $\left(x \to \infty \;\Rightarrow\; f(x) \sim \frac{1}{x^m} \right)$.

ПРИКЛАД. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Рішення

При $x \to \infty$ підінтегральний вираз є нескінченно малою другого порядку $\frac{1}{x^2}$, отже, інтеграл збіжний.

4. Абсолютна збіжність. Якщо збіжний інтеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$, то збіжний і інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$.

ПРИКЛАД. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

Рішення

Має місце $\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$. Але інтеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ збіжний, значить, збіжний і інтеграл $\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| dx$, отже, збіжний і $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

Def. Інтеграл виду $\int_a^\infty |f(x)|dx$, який збіжний, називається <u>абсолютно</u> збіжним.

Зауваження. Якщо інтеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$ абсолютно збіжний, то інтеграли $\int_a^\infty f(x) sin\, xdx$ і $\int_a^\infty f(x) cos\, xdx$ збіжні.

8.6. Невласний інтеграл 2-го роду

Нехай на полу сегменті $[a,b)$ задана функція $f(x)$. Нехай в такому вигляді функція є необмеженою, тобто при $x \to b$, $f(x) \to \pm\infty$.

Def. Точка інтервалу, при наближенні до якої $f(x) \to \pm\infty$, називається особливою.

Нехай функція $f(x)$ на сегменті $[a, b-\delta]$ інтегрована і обмежена, тобто

$$\int_a^{b-\delta} f(x)dx = F(b-\delta) - F(a).$$

Def. Якщо існує границя $\lim\limits_{\delta \to 0+} \left(F(b-\delta) - F(a)\right), \delta > 0$, то вираз $\int_a^b f(x)dx$ називається збіжним невласним інтегралом 2-го роду від функції $f(x)$ на сегменті $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx .$$

Якщо границя відсутня, то кажуть, що невласний інтеграл 2-го роду є розбіжним.

Аналогічно дається визначення при необмеженості функції в точці a.

Нехай функція $f(x)$ при $x \to a$ необмежена $(f(x) \to \pm\infty)$. І нехай функція $f(x)$ обмежена і інтегрована на сегменті $[a+\delta,\ b]$, тобто

$$\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a-\delta).$$

Def. Якщо існує границя $\lim\limits_{\delta\to 0} (F(b) - F(a+\delta))$**, де** $\delta > 0$**, то вираз** $\int_a^b f(x)dx$ **називається збіжним невласним інтегралом 2-го роду від функції** $f(x)$ **на сегменті** $[a,b]$**:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx .$$

Аналогічно дається визначення при необмеженості функції в точці c, де $a < c < b$, тобто при $x \to c$ $f(x) \to \pm\infty$. В цьому випадку для інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ можна записати

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\delta 1\to 0} \int_a^{c-\delta 1} f(x)dx + \lim_{\delta 2\to 0} \int_{c+\delta 2}^{b} f(x)dx .$$

І якщо обидві границі інтегралів праворуч існують, то інтеграл є збіжним.

ПРИКЛАД 1:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to 0} \int_{0+\alpha}^{a} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_{0+\alpha}^{a} = \lim_{\alpha\to 0} \left(2\sqrt{a} - 2\sqrt{0+\alpha}\right) = 2\sqrt{a} .$$

Отже, інтеграл збіжний.

ПРИКЛАД 2:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)\Big|_0^1 = +\infty .$$ Інтеграл розбіжний.

8.7. Ознаки збіжності невласних інтегралів 2-го роду

Для невласних інтегралів 2-го роду властиві ознаки збіжності, аналогічні ознаками збіжності невласних інтегралів 1-го роду.

1. Ознака порівняння. Якщо на проміжку $\left[a,\ b\right)$ функції $f(x),\ \varphi(x)$ неперервні і при $x = b$ терплять нескінченний розрив і при цьому має місце нерівність

$$0 \le f(x) \le \varphi(x),$$

то:

● якщо збіжний $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$, то збіжний і $\int\limits_a^b f(x)dx$;

● якщо розбіжний $\int\limits_a^b f(x)dx$, то розрозбіжний і $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

2. Гранична ознака порівняння. Якщо на проміжку $\left[a,\ b\right)$ функції $f(x)$, $g(x)$ неперервні і при $x = b$ терплять нескінченний розрив і при цьому існує кінцева границя виду $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = const \ne 0$, то інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_a^b g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

ПРИКЛАД. Дослідити збіжність $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Рішення

Функція $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ на проміжку $\left[0,\ 1\right]$ має розрив в точці $x = 0$. Функція $g(x) = \frac{1}{x}$ має також розрив в точці $x = 0$. Інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{0+\delta}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0} \ln x\Big|_\delta^1 = \ln 1 - \lim_{\delta\to 0} \ln\delta = \infty$$

розбіжний, а так як

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1,$$

то інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ також розбіжний.

Твердження. **Інтеграли** $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ **і** $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ **при** $0 < k < 1$ **збіжні, а при** $k \ge 1$ **розбіжні.**

◀ Для наведених інтегралів $k > 0$, так як при $k < 0$ інтеграл стає визначеним.

При $k = 1$ маємо

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)} = ln(x-a)\Big|_a^b = ln(b-a) - ln(a-a) = ln(b-a) - ln(0) = ln(b-a) + \infty = \infty .$$

Отже, інтеграл розбіжні.

Якщо $k \neq 1$, то

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \int\limits_a^b (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}\Bigg|_a^b = \frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \frac{(a-a)^{-k+1}}{-k+1} =$$

$$= \frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \frac{(0)^{-k+1}}{-k+1}.$$

У цьому випадку другий доданок в залежності від ступеня $-k+1$ приймає різні значення.

При $-k+1 > 0$, тобто при $k < 1$, цей доданок дорівнює нулю, $\frac{(0)^{-k+1}}{-k+1} = 0$ і інтеграл збіжний.

При $-k+1 < 0$, тобто при $k > 1$, цей доданок стає нескінченно великою величиною, $\frac{(0)^{-k+1}}{-k+1} = \frac{1}{(-k+1)(0)^{k-1}} = \frac{1}{0} = \infty$ і, отже, інтеграл розбіжний. ▶

ПРИКЛАД 1:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x\Big|_{1}^{-1} = arcsin(1) - arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi .$$ Інтеграл збіжний.

ПРИКЛАД 2:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3}$$ - обидва розбіжні.

Дійсно, $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$ і $\lim\limits_{x \to 0}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\infty$.

Зауваження:

1. Якщо первісна невласного інтеграла 2-го роду на розглянутому інтервалі неперервна, то невласний інтеграл 2-го роду сбіжний.

2. Якщо первісна в особливих точках звертається в $\pm\infty$, то невласний інтеграл 2-го роду розбіжний.

8.8. Висновки

Def. Якщо функція $f(x)$ ***визначена на інтервалі*** $a \le x < +\infty$ ***і для будь-якого числа*** $A > a$ ***існує границя виду*** $\lim\limits_{A \to \infty} \int\limits_a^A f(x)dx$***, то ця границя називається невласним інтегралом 1-го роду від функції*** $f(x)$ ***на проміжку*** $[a, +\infty)$ ***і позначається символом***

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx.$$

При цьому говорять, що невласний інтеграл збіжний.

Позначення $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ *вживається і тоді, коли межа не існує, але при цьому кажуть, що невласний інтеграл такого виду розбіжний. Використовують також позначення*

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \to зб. \text{ або } \int\limits_a^{\infty} f(x)dx \to розб.$$

Аналогічно визначають невласний інтеграл 1-го роду:

$$\lim_{A \to \infty} \int\limits_A^b f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx;$$

$$\lim_{\substack{A' \to +\infty \\ A'' \to -\infty}} \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

де A' *і* A'' *прагнуть до своїх значень незалежно один від одного.*

Для невласних інтегралів 1-го роду має місце наступне:

1. Справедлива рівність $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

2. Якщо для деякого числа a *інтеграли* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *і* $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ *збіжні, то збіжний і інтеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

3. Якщо збіжний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, *то для будь-якого числа* $b > a$ *збіжний і інтеграл* $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$, *при цьому*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx.$$

Для визначення збіжності можна використовувати і інтеграл виду $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$, *який при* $0<\lambda\le 1$ *розбіжний, а при* $\lambda>1$ *збіжний.*

Геометричний сенс невласного інтеграла 1-го роду полягає в тому, що він висловлює кінцеву площу нескінченної області.

З'ясування питання про збіжність невласних інтегралів значно ускладнюється, якщо первісна підінтегральної функції невідома. У таких випадках іноді вдається встановити, збіжний або розбіжний інтеграл, використовуючи спеціальні ознаки, які не потребують значення первісної.

1. Ознака порівняння*. якщо для* $[a,+\infty)$ *при* $x\ge a$ *має місце нерівність*

$$0\le f(x)\le \varphi(x),$$

то:

● *якщо збіжний* $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$, *то збіжний і* $\int_a^{\infty}f(x)dx$;

● *якщо розбіжний* $\int_a^{\infty}f(x)dx$, *то розбіжний і* $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$.

2. Гранична ознака порівняння. *Якщо при* $x\ge a$ *і* $f(x)>0$, $g(x)>0$ *існує кінцева границя виду* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=const\neq 0$, *то інтеграли* $\int_a^{\infty}f(x)dx$ *і* $\int_a^{\infty}g(x)dx$ *збіжні або розбіжні одночасно.*

3. Збіжність для нескінченно малої величини*. Якщо при* $x\to+\infty$ *функція* $f(x)>0$ *є нескінченно малою порядку* $m>0$ *(порівняно з* $\frac{1}{x}$*), то інтеграл* $\int_0^{\infty}f(x)dx$ *збіжний при* $m>1$ *і розбіжний при* $m\le 1$ $\left(x\to\infty \;\Rightarrow\; f(x)\sim\frac{1}{x^m}\right)$.

4. Абсолютна збіжність. *Якщо збіжний інтеграл* $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$, *то збіжний і інтеграл* $\int_a^{\infty}f(x)dx$.

Def. Інтеграл виду $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$***, якщо він збіжний, називається абсолютно збіжним.***

Зауваження. Якщо $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ *збіжний, то інтеграли* $\int_a^{\infty}f(x)\sin x dx$ *і*

$\int\limits_a^\infty f(x)\cos xdx$ *також збіжні*

Зауваження. Якщо $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ *збіжні, то інтеграли* $\int\limits_a^\infty f(x)\sin xdx$ *і* $\int\limits_a^\infty f(x)\cos xdx$ *також збіжні.*

Нехай на проміжку $[a,b)$ *задана функція* $f(x)$ *і при* $x \to b$ $f(x) \to \pm\infty$.

Def. Точка інтервалу, при наближенні до якої $f(x) \to \pm\infty$***, називається особливою.***

Def. Якщо існує границя $\lim\limits_{\delta\to 0+}\left(F(b-\delta)-F(a)\right), \delta > 0$***, то вираз*** $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***називається збіжним невласним інтегралом 2-го роду від функції*** $f(x)$ ***на сегменті*** $[a,b]$***:***

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

Якщо межа відсутня, то говорять, що невласний інтеграл 2-го роду є розбіжний.

Аналогічно дається визначення при необмеженості функції і в точці a*, де при* $x \to a$, $f(x) \to \pm\infty$.

Аналогічно дається визначення при необмеженості функції в точці c*, де* $a < c < b$*, тобто, при* $x \to c$ $f(x) \to \pm\infty$. *В цьому випадку для інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *можна записати*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\delta 1\to 0}\int\limits_a^{c-\delta 1} f(x)dx + \lim_{\delta 2\to 0}\int\limits_{c+\delta 2}^b f(x)dx.$$

І якщо обидві границі інтегралів праворуч існують, то інтеграл є збіжним.

Для невласних інтегралів 2-го роду властиві ознаки збіжності, аналогічні ознакам збіжності невласних інтегралів 1-го роду.

1. Ознака порівняння. *Якщо на проміжку* $[a, b)$ *функції* $f(x)$, $\varphi(x)$ *неперервні і при* $x = b$ *терплять нескінченний розрив і при цьому має місце нерівність*

$$0 \le f(x) \le \varphi(x),$$

то:

- *якщо збіжний* $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$*, то збіжний і* $\int\limits_a^b f(x)dx$*;*

● *якщо розбіжний* $\int_a^b f(x)dx$ *, то розбіжний і* $\int_a^b \varphi(x)dx$.

2. Гранична ознака порівняння. *Якщо на проміжку* $[a,\ b)$ *функції* $f(x)$, $g(x)$ *неперервна, а при* $x = b$ *має нескінченний розрив і при цьому існує кінцева границя виду* $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = const \neq 0$ *, то інтеграли* $\int_a^b f(x)dx$ *і* $\int_a^b g(x)dx$ *збіжний або розбіжний одночасно.*

Твердження. *Інтеграли* $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ *і* $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ *при* $0 < k < 1$ *збіжні, а при* $k \geq 1$ *розбіжні.*

Зауваження:

1. Якщо первісна невласного інтеграла 2-го роду на розглянутому інтервалі неперервна, то невласний інтеграл 2-го роду збіжний.

2. Якщо первісна в особливих точках звертається в $\pm\infty$ *, то невласний інтеграл 2-го роду розбіжний.*

Перерва

● Син-другокласник підходить до свого батька, професора математики, і питає:

- Пап, а як пишеться цифра "8"?
- Нескінченність, повернена на π/2, синку!

● Класифікація інтегралів:

- власні - які сам взяв, і невласні, які списав;
- визначені - до яких є відповідь, і невизначені, до яких відповіді немає;
- збіжні - які сходяться з відповіддю, і розбіжні - які розходяться з відповіддю.

8.9. Питання для перевірки

1. Умова існування визначеного інтеграла:

а) інтервал інтегрування кінцевий, функція інтегрування на інтервалі неперервна або кус очно - неперервна; б) інтервал інтегрування кінцевий, функція інтегрування на інтервалі диференційована; в) границі інтервалу інтегрування належать області визначення функції інтегрування, функція інтегрування на інтервалі диференційована

2. Невласний інтеграл 1-го роду вводиться для такої умови:

а) інтервал інтегрування нескінченний; б) функція інтегрування на інтервалі має розрив 2-го роду; в) функція інтегрування на інтервалі диференційована.

3. Невласний інтеграл 2-го роду вводиться для такого умови:

а) інтервал інтегрування нескінченний; б) функція інтегрування на інтервалі має два розриву 1-го роду; в) функція інтегрування на інтервалі має розрив вище 1-го роду.

4. Позначення невласного інтеграла 1-го роду:

а) $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$; б) $\int\limits_a^{b} f(x)dx$; в) $\int\limits_a^{b} |f(x)|dx$.

5. Якщо існує границя виду $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx$**, то кажуть, що невласний інтеграл:**

а) розбіжний; б) збіжний; в) визначений.

6. Якщо не існує границя виду $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx$**, то кажуть, що невласний інтеграл:**

а) розбіжний; б) збіжний; в) не визначений.

7. Позначення збіжного невласного інтеграла:

а) $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \to \textit{збіжний}$; б) $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \to \textit{зб.}$; в) $\exists\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

8. Позначення розбіжного невласного інтеграла:

а) $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \to \textit{розбіжний}$; б) $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \to \textit{розб}$; в) $\overline{\exists}\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

9. Рівність $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ **є:**

а) справедливою; б) несправедливою; в) справедливою при певних умовах.

10. Якщо для деякого числа a **інтеграли** $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ **і** $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ **збіжні, то інтеграл** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$:

а) розбіжний; б) збіжний; в) не існує.

11. Якщо для деякого числа a інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збіжний, а інтеграл $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ розбіжний, то інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$:

а) розбіжний; б) збіжний; в) не існує.

12.Якщо для деякого числа a інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ розбіжний, а інтеграл $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ збіжний, то інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$:

а) розбіжний; б) збіжний; в) не існує.

13. Якщо інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збіжний, то для будь-якого числа $b > a$ інтеграл $\int_b^{\infty} f(x)dx$:

а) розбіжний; б) збіжний; в) не існує.

14. Якщо інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збіжний, то чи можна для будь-якого числа $b > a$ записати рівність $\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx$:

а) да; б) ні; в) можна тільки для додатних a і b?

15. Інтеграл $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ збіжний ($a > 0$):

а) при $\lambda = 1$; б) при $\lambda > 1$; в) при $0 < \lambda < 1$?

16. Геометричний сенс невласного інтеграла 1-го роду:

а) геометричний сенс відсутній; б) кінцева площа нескінченної області; в) кінцева площа нескінченної області, якщо інтеграл сходиться.

17. Перша ознака порівняння для невласних інтегралів 1-го роду. Якщо для $[a,+\infty)$ при $x \ge a$ має місце нерівність $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то:

а) якщо розбіжний $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$, то розбіжний і $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$; б) якщо збіжний $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$, то збіжний і $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$; в) якщо розбіжний $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$, то збіжний $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$.

18. Перша ознака порівняння для невласних інтегралів 1-го роду. Якщо для $[a,+\infty)$ **при** $x \geq a$ **має місце нерівність** $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$**, То:**

а) якщо розбіжний $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$, то збіжний $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$; б) якщо збіжний $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$, то збіжний і $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$; в) якщо розбіжний $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$, то розбіжний і $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$.

19. Друга гранична ознака порівняння. Якщо при $x \geq a$ **і** $f(x) > 0$**,** $g(x) > 0$ **існує кінцева границя виду** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = const \neq 0$**, то:**

а) якщо $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ збіжний, то $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx$ розбіжний; б) якщо $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ розбіжний, то $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx$ збіжний; в) якщо $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ збіжний, то і $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx$ збіжний.

20. Друга гранична ознака порівняння. Якщо при $x \geq a$ **і** $f(x) > 0$**,** $g(x) > 0$ **існує кінцева границя виду** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = const \neq 0$**, то:**

а) якщо $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ збіжний, то $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx$ розбіжний; б) якщо $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ розбіжний, то $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx$ збіжний; в) якщо $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ розбіжний, то і $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx$ розбіжний.

21. Якщо при $x \to +\infty$ **функція** $f(x) > 0$ **є нескінченно малою порядку** $m > 0$ **(порівняно з** $\dfrac{1}{x}$**), то інтеграл** $\int\limits_0^{\infty}f(x)dx$ **:**

а) розбіжний при $m > 1$; б) збіжний при $m \leq 1$; в) збіжний при $m > 1$.

22. Якщо сходиться $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$:

а) збіжний; б) розбіжний; в) не має сенсу.

23. Збіжний інтеграл виду $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ називається:

а) строго збіжним; б) позитивно збіжним; в) абсолютно збіжним.

24. Якщо сходиться $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)\sin x \; dx$:

а) збіжний; б) розбіжний; в) не має сенсу.

25. Якщо сходиться $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)\cos x \; dx$:

а) збіжний; б) розбіжний; в) не має сенсу.

26. Точка інтервалу, при наближенні до якої $f(x) \to \pm\infty$, називається:

а) нескінченної; б) особливою; в) точкою розриву.

27. Особливість поведінки функції $f(x)$ на полу сегменті $\lfloor a,\ b)$ при визначенні невласного інтеграла 2-го роду:

а) при $x \to b$ функція прагне до нуля; б) при $x \to b$ функція прагне до $const$; б) при $x \to b$ функція прагне до $\pm\infty$.

28. Особливість поведінки функції $f(x)$ на інтервалі $\lfloor a,\ b \rfloor$ в точці c, де $a < c < b$, при визначенні невласного інтеграла 2-го роду:

а) при $x \to c \pm 0$ функція прагне до нуля; б) при $x \to c \pm 0$ функція прагне до $const$; б) при $x \to c \pm 0$ функція прагне до $\pm\infty$.

29. Інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ збіжний:

а) при $k > 1$; б) при $k = 1$; в) при $0 < k < 1$.

30. Інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ збіжний:

а) при $k > 1$; б) при $k = 1$; в) при $0 < k < 1$.

31. Якщо первісна невласного інтеграла 2-го роду на розглянутому інтервалі неперервна, то невласний інтеграл 2-го роду:

а) розбіжний; б) не визначений; в) збіжний.

32. Якщо первісна в особливих точках звертається в $\pm\infty$, то невласний інтеграл 2-го роду:

а) розбіжний; б) не визначений; в) збіжний.

8.10.Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити невласні інтеграли 1-го роду.

1. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x} dx$.

2. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^5+2}} dx$.

3. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{arctg^3 x}{x^2+1} dx$.

4. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{7x^2+3}$.

5. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)arctgx}$.

6. $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$.

7. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-3x} dx$.

8. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{5+3ln(x-3)}{x-3} dx$.

9. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3}$.

10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

11. $\int\limits_{-2e}^{\infty} \frac{dx}{(x+3e)ln^2(x+3e)}$.

12. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{arctg^3 x \ dx}{x^2+1}$.

2. Обчислити невласні інтеграли 2-го роду.

13. $\int\limits_{0}^{1} ln\, xdx$.

14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

15. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} ctgx \ dx$.

16. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

17. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{arcsin\ x}{1-x^2}} dx$.

18. $\int\limits_{0}^{3} \frac{e^x dx}{e^x-1}$.

19. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{ln\, x}}$.

20. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

21. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-6x+8}$.

22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

23. $\int\limits_{-2e}^{\infty} \frac{dx}{(x+3e)ln^2(x+3e)}$.

3.Дослідити на збіжність невласні інтеграли

24. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}$.

25. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^7+x^2+5}$.

26. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x^2+1}}$.

27. $\int\limits_{0}^{\infty} cos\ xdx$.

28. $\int\limits_{1}^{\infty} e^{-2x^2} dx$.

29. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{sin\ x}{1+x^2} dx$.

30. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^2}}$.

31. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}} dx$.

32. $\int\limits_{0}^{1} \frac{ln(1+2x)}{e^{sin^2 x}-1} dx$.

33. $\int\limits_0^1 \frac{5dx}{\arcsin x}$.   34. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{tgx}$.   35. $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$.

36. $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$.

8.11.Самостійна робота

Історична довідка. Геометричні задачі, що приводять до невласних інтегралів, розглядав П. Ферма. Він отримав результати, рівносильні обчисленню перших невласних інтегралів виду $\int\limits_a^\infty x^n dx$ при $n < -1$ і $a > 0$ (1679). Свій метод П. Ферма назвав логарифмування, тим самим вказав на його зв'язок з властивостями логарифмів.

Знак інтеграла був опублікований в статті Г. Лейбніца 1686 р, хоча спочатку він користувався позначеннями Б. Кавальєрі $\overline{omnl}$ (*omnia* - все, *l* - лінія).

Термін «інтеграл» вперше використав у друкованих роботах І. Бернуллі в 1690 р, після чого стало звичним вираз «інтегральне числення». (Спочатку Г. Лейбніц говорив про «підсумовуючі числення».)

Вперше точне визначення невласного інтеграла дав О. Коші (1823) для необмеженого проміжку інтегрування і для функцій з кінцевим числом точок розриву.

Дж. Стокс і П. Діріхле встановили поняття абсолютної і умовної збіжності (1854).

Згодом був запропонований Ейлеров інтеграл 2-го роду (або гамма-функція)

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \qquad (*)$$

Формула (*) зустрічається в роботах Л. Ейлера в 1781 р (опубліковано в 1794 р). Назва «ейлерів інтеграл» дано А. Лежандром (1814).

1-ша ознака порівняння для визначення збіжності невласного інтеграла. Якщо для $[a,+\infty)$ при $x \geq a$ має місце нерівність

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x),$$

то:

- якщо сходиться $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$, То сходиться і $\int\limits_a^\infty f(x)dx$;
- якщо розходиться $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, То розходиться і $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$.

◄ Розглянемо лише перший випадок, тобто нехай $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ сходиться, тоді

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx \le \int_a^A \varphi(x)dx \le \int_a^{\infty} \varphi(x)dx .$$

Функція $F(A)$ монотонно зростає і зі збільшенням A залишається обмеженою кінцевим числом $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$. Але існують теореми існування границь, одна з яких говорить, що якщо функція $f(x)$ **є монотонною і обмеженою (**$|f(x)| < M$ **), то вона має границю (границя монотонної функції).**

Отже, для $F(A)$ при $A \to +\infty$ існує кінцева границя, що і доводить збіжність $\int_a^{\infty} f(x)dx$.►

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

У мене не було підручника, за яким потрібно було зробити домашнє завдання.

Що кажуть про математику

«Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися вирішувати завдання, то вирішуйте їх» (Д. Пойа).

ДЖЕРЕЛА

1. Практичний курс вищої математики : навч. посіб. : у 4 кн. / І. В. Брисіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2004. − Кн. 2 : Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння. Кратні та криволінійні інтеграли. Елементи теорії векторного поля. – 221 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Бахмет Геннадій Костянтинович,
Головченко Олександр Васильович,
Ніколаєв Олексій Георгійович та ін.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3
Комплексні числа. Інтегральне числення

(Українською мовою)

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2020
Підписано до видання 04.11.2020
Ум. друк. арк. 8,9. Обл.-вид. арк. 10. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu Видавничий
центр «ХАІ» 61070, Харків-70,
вул. Чкалова, 17 izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001