

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
"Харківський авіаційний інститут"

**С. В. Сінченко, О. Л. Шпінська**

## **ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК [621.311+621.355] (075.8)

С38

Рецензенти: д-р техн. наук А. О. Давідов,  
канд. фіз.-мат. наук Л. Н. Трефілова

**Сінченко, С. В.**

С38 Основи планування експерименту [Електронний ресурс] : навч. посіб. / С. В. Сінченко, О. Л. Шпілінська. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харків. авіац. ін-т", 2020. – 72 с.

Наведено прийоми і способи оптимальної організації дослідної роботи. Вивчення основ планування експерименту і оволодіння практичними прийомами їх використання, які підвищують ефективність роботи дослідника, дають змогу з найменшими витратами вирішувати багато практичних дослідних завдань.

Розглянуто основи теорії математичного оброблення результатів експерименту, види вимірювань і причини помилок, наведено принципи найбільш ймовірного значення вимірюваної величини і оцінювання точності вимірювань, обґрунтовано поняття довірчого інтервалу і довірчої ймовірності, подано методи математичної статистики, розглянуто нормальний і окремі випадки розподілів параметрів у математичній статистиці. Докладно описано регресійний аналіз для однофакторного, багатфакторного та дробового експериментів і з побудовою лінійної моделі тощо.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю «Інженерія програмного забезпечення» і «Авіаційна та ракетно-космічна техніка», а також суміжних спеціальностей, при виконанні магістерської роботи та застосуванні методів оброблення результатів усіх видів експериментальних досліджень.

Іл. 18. Табл. 11. Бібліогр.: 19 назв

**УДК [621.311+621.355] (075.8)**

© Сінченко С. В., Шпілінська О. Л., 2020  
© Національний аерокосмічний  
університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут», 2020

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ВСТУП ДО ДИСЦИПЛІНИ ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ...	6
2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ.....	7
3 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ПОМИЛКИ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ.....	17
3.1 Мета математичної обробки результатів експерименту.....	17
3.2 Види вимірювань і причини помилок.....	18
3.3 Типи помилок вимірювання і властивості випадкових помилок.....	19
3.4 Найбільш імовірне значення вимірюваної величини і оцінювання точності вимірювань.....	25
3.5 Поняття довірчого інтервалу і довірчої ймовірності.....	28
3.6 Правила округлення чисел і порядок оброблення результатів вимірювань.....	29
4 МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.....	31
4.1 Вибірковий метод для визначення властивостей генеральної сукупності.....	31
4.2 Статистичний розподіл параметрів.....	31
4.3 Нормальний розподіл параметрів у математичній статист.....	33
4.4 Розподіл Стюдента.....	35
4.5 Розподіл за Фішером.....	36
5 РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ ДЛЯ ОДНОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ І ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ.....	37
5.1 Побудова регресійної моделі.....	37
5.2 Максимальне правдоподібне визначення параметрів МНК.....	39
5.3 Однофакторний експеримент – рівняння регресії і лінійна модель ...	40
5.4 Побудова лінійного рівняння регресії.....	43
6. ФАКТОРИ ВПЛИВУ. ОРГАНІЗАЦІЯ БАГАТОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ.....	44
6.1 Визначення фактора.....	45
6.2 Вимоги, що ставляться до факторів при плануванні експерименту...	45
6.3 Вимоги до сукупності факторів.....	47
6.4 Вибір моделі. перевірка адекватності моделі.....	47
6.5. Матриця планування при повному факторному експерименті (ПФЕ).....	52
6.6 Дробний факторний експеримент.....	55
6.7 Рототабельний центральний композиційний план.....	58
6.8 Експерименти з симплекс-плануванням.....	59
7. ЗАСТОСУВАННЯ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ.....	62
8. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАХОДІВ.....	68
ВИСНОВКИ.....	70
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....	71

## ВСТУП

Будь-який технічний об'єкт або процес можна розглядати як систему, яка характеризується входами і виходами. У багатьох випадках функціональні залежності між вхідними та вихідними параметрами системи не встановлені, в зв'язку з цим удаються до математичного моделювання системи за допомогою статистичних методів планування експерименту та оброблення результатів експериментальних даних. На підставі таких математичних моделей вибирають оптимальні значення вхідних параметрів. Створення авторами навчального посібника присвячено вивченню і освоєнню основ планування експерименту для правильного і влучного використання статистичних методів для вирішення різних інженерних завдань. Застосування статистичних методів значно спрощується при використанні спеціального програмного забезпечення, у зв'язку з цим виникають завдання освоєння і отримання навичок застосування програмного забезпечення для можливості використання основних законів математичної статистики та оброблення результатів у професійній діяльності; застосування методів математичного аналізу і моделювання теоретичного і експериментального дослідження; отримання навичок з використання стандартних програмних пакетів для проектування оброблення і тощо.

Серед математичного програмного забезпечення оброблення інформації слід виділити дуже поширені програмні продукти MS Excel, Statistica, Mathematica, MatLab та ін. Якщо коротко характеризувати ці пакети, за їх допомогою можливо проведення математичного моделювання і оброблення вимірювальної інформації, одержаної під час фізичних експериментів. Наприклад, програма Microsoft Excel є програмним засобом для роботи з таблицями даних, що дозволяє упорядковувати, аналізувати і графічно подавати різні види даних. Застосування електронних таблиць спрощує роботу з даними і дозволяє одержати результати без проведення розрахунків вручну або спеціального програмування. У науково-технічних завданнях електронні таблиці можна використовувати ефективно для проведення однотипних розрахунків над великими наборами даних, автоматизації підсумкових обчислень, оброблення результатів експериментів, проведення пошуку оптимальних значень параметрів. Черговим лідером на ринку математичних пакетів є MathCad.

Цей програмний продукт також, як і Mathematica є інтерпретуючою системою. Пакет орієнтований на вирішення різноманітних завдань аналізу і інтерпретації інформації. Серед цих завдань слід виділити розв'язання окремих рівнянь алгебри (лінійних і нелінійних) і їх систем, звичайних диференціальних рівнянь і їх систем, статистичну обробку даних (інтерполяцію, екстраполяцію, апроксимацію тощо), роботу з векторами і матрицями, пошук екстремуму функціональних залежностей. У

систему інтегровані засоби символної математики, що забезпечує числове і аналітичне вирішення різних завдань. Зараз ринок програмних систем у області фізико-математичних додатків продовжує рости. Нові програмні пакети розробляються на основі комп'ютерних технологій, що інтенсивно розвиваються, з використанням досягнень сучасних методів досліджень.

Авторами запропонованого навчального посібника з основ планування експерименту формулюються прийоми і способи оптимальної організації дослідної роботи. Вивчення основ теорії експерименту і оволодіння практичними прийомами її використання підвищують ефективність роботи дослідника, дозволяють з найменшими витратами вирішувати багато практичних дослідних завдань.

Використання спеціалізованих програмних пакетів комп'ютерних прикладних програм без вивчення основ планування експерименту не відбудеться, тому що досліднику важливо правильно розуміти область застосування статистичних методів вирішення того чи іншого класу завдань. Однак ніякі можливості сучасного призначеного для користувача інтерфейсу не звільняють дослідника від необхідності вивчення і розуміння суті статистичних методів, реалізованих у таких системах.

## 1 ВСТУП ДО ДИСЦИПЛІНИ «ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ»

Думка про те, що експеримент можна планувати, сягає глибокої давнини. Наш далекий предок, переконавшись, що гострим каменем можна вбити навіть мамонта, безсумнівно висував гіпотези, які після цілеспрямованої експериментальної перевірки привели до створення списів, дротиків, а потім і лука зі стрілами.

Він, однак, не користувався статистичними методами, тому залишається незрозумілим, як він взагалі вижив і забезпечив тим самим наше існування.

Тільки на початку нашого століття люди, нарешті, зрозуміли, що далі справа так не піде, і придумали статистичні методи планування експерименту. Честь відкриття цієї ідеї належить англійському статистику Рональду Фішеру (кінець двадцятих років минулого століття), який вперше показав доцільність одночасного варіювання всіма факторами на противагу поширеному однофакторному експерименту. Знадобилося ще кілька десятиліть, щоб на початку п'ятдесятих років ХХ ст. з'явився новий напрям у плануванні експерименту, пов'язаний з оптимізацією процесів, - планування екстремального експерименту. Перша робота в цій області була опублікована в 1951 р. Боксом і Вілсоном в Англії. Ідея методу Бокса-Вілсона вкрай проста. Експериментатору пропонується ставити послідовні невеликі серії дослідів, у кожній з яких одночасно варіюються за певними правилами всі фактори. Серії організуються таким чином, щоб після математичної обробки попередньої можна було вибрати умови проведення (тобто спланувати) наступної серії. Так послідовно, крок за кроком, досягається область оптимуму.

Застосування планування експерименту робить поведінку експериментатора цілеспрямованою і організованою, істотно сприяє підвищенню продуктивності його праці та надійності отриманих результатів. Важливою перевагою методу є його універсальність, придатність у величезній більшості областей дослідження, що цікавлять сучасну людину.

Інтерес дослідників до планування експерименту цілком зрозумілий: перспектива скоротити кількість дослідів, знайти оптимум, отримати кількісні оцінки впливу факторів і визначити помилки - вкрай приваблива.

Але коли експериментатор робить спробу ознайомитися з плануванням експерименту, він часто стикається з серйозними труднощами. Більше того, іноді він просто неправильно застосовує методи планування або вибирає не найоптимальніший для даної ситуації шлях дослідження, або допускає ще якісь прикрі помилки. При цьому знижується ефективність його роботи і з'являється небезпека дискредитації важливого і корисного спрямування.

## 2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ

Більшість наукових досліджень пов'язані з експериментом. Методи проведення експериментів у різних областях мають багато спільного. Вони враховують вплив різних чинників і змінних величин. Яким би простим не був експеримент, спочатку необхідно скласти план його проведення. У процесі будь-якого експерименту необхідно аналізувати отримані результати і давати їх інтерпретацію, оскільки без цього вирішального етапу весь цей процес не має сенсу. Багато експериментальних змінних дослідник не може контролювати, і тому він повинен певним чином планувати експеримент, щоб звести до мінімуму або взагалі виключити зовнішні впливи. Крім того, дослідник змушений багаторазово повторювати експеримент. Однак це не означає, що планування експерименту і статистичний висновок не цікавлять дослідника. Маючи порівняно точні дані, він буде використовувати графіки та формули для подання отриманих ним результатів. Методи і експерименти з різних областей науки завдяки їх спільності можуть бути класифіковані за різними ознаками: за кількістю змінних, впливом зовнішніх змінних, характером взаємодії цих змінних.

Експерименти і експериментатори можуть відрізнятися один від одного, але фактично планування, проведення та аналіз усіх експериментів здійснюються в однаковій послідовності, що і показано в цьому посібнику. Багато сучасних експериментів, особливо в таких областях, як електронна, ракетна техніка, є виключно дорогими і на перший погляд дуже складними. При цьому яким би складним не був той чи інший експеримент, результати експерименту, що подаються, за формою мало відрізняються. Він проводиться в лабораторіях, на виробництві, на дослідних підприємствах, у клініках і т. д. Експеримент може бути фізичним, психологічним або модельним. Він може безпосередньо проводитися на об'єкті або на його моделі. Модель зазвичай відрізняється від об'єкта масштабом, а іноді природою.

Як Ви вважаєте, чи можна поставити експеримент на абстрактній математичній моделі?

Якщо модель досить точно описує об'єкт, то експеримент на об'єкті може бути замінений експериментом на моделі. Останнім часом поряд з фізичними моделями все більшого поширення набувають абстрактні математичні моделі. Можна отримувати нові відомості про об'єкт, експериментуючи на моделі, якщо вона досить точно описує об'єкт.

Експеримент займає центральне місце в науці. Однак виникає питання, наскільки ефективно він використовується. Джон Бернал, наприклад, зазначав, що наукові дослідження організовуються і проводяться настільки хаотично, що їх коефіцієнт корисної дії може бути оцінений величиною близько 2 %. Для того щоб підвищити ефективність досліджень, потрібно щось зовсім нове. Одним з можливих шляхів є

застосування математичних методів, побудова математичної теорії планування експерименту.

Планування експерименту - це процедура вибору кількості і умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для вирішення поставленого завдання з необхідною точністю. При цьому важливе таке:

- прагнення до мінімізації загальної кількості дослідів;
- одночасне варіювання всіма змінними, що визначають процес, за спеціальними правилами - алгоритмами;
- використання математичного апарату, що формалізує багато дій експериментатора;
- вибір чіткої стратегії, що дозволяє приймати обґрунтовані рішення після кожної серії експериментів.

Завдання, для вирішення яких може використовуватися планування експерименту, надзвичайно різноманітні.

Пошук оптимальних умов, побудова інтерполяційних формул, вибір істотних чинників, оцінювання та уточнення констант теоретичних моделей (наприклад, кінетичних), вибір найбільш прийнятних з деякої множини гіпотез про механізм явищ, дослідження діаграм склад - властивість - ось приклади завдань, при вирішенні яких застосовується планування експерименту.

Можна сказати, що там, де є експеримент, має місце і наука про його проведення - планування експерименту.

Пошук оптимальних умов є одним з найбільш поширених науково-технічних завдань. Вони виникають у той момент, коли встановлена можливість проведення процесу і необхідно знайти найкращі (оптимальні в певному сенсі) умови його реалізації.

Нехай, наприклад, у хіміка виникла гіпотеза про те, що при взаємодії двох речовин повинен виходити деякий цікавий продукт. Щоб переконатися в правильності своєї гіпотези, він починає проводити експеримент. Можливо, що йому пощастило і він отримав необхідний продукт. Однак вихід продукту дуже низький, скажімо, 2 %. Ось тут-то і виникає завдання вибору оптимальних умов. Потрібно так підібрати концентрації реагуючих речовин, температуру, тиск, час реакції та інші чинники, щоб зробити вихід можливо ближчим до 100 %. У цьому прикладі знаходяться умови проведення процесу, оптимальні в сенсі максимізації виходу необхідного продукту. Але це далеко не єдина можлива постановка задачі. Знайдені умови виявилися б іншими, якби ставилася, наприклад, мета мінімізації собівартості продукту або мінімізації кількості шкідливих домішок. Слід підкреслити, що завжди необхідно чітко формулювати, в якому сенсі умови повинні бути оптимальними. Цим визначається вибір мети дослідження. Точне формулювання мети значною мірою визначає успіх дослідження.

Завдання, сформульовані аналогічним чином, називаються завданнями оптимізації.



Процес їх вирішення називається процесом оптимізації, або просто оптимізацією. Вибір оптимального складу багатокомпонентних сумішей або сплавів, підвищення продуктивності діючих установок, підвищення якості продукції, зниження витрат на її отримання - ось приклади завдань оптимізації.

*Експеримент*, який ставиться для вирішення завдань оптимізації, називається *екстремальним*. Ця назва пов'язана з глибокою аналогією між оптимізацією і пошуком екстремуму деякої функції. Давайте розглянемо такі два завдання.

1. Міцність бетону значною мірою визначається маркою цементу, кількістю наповнювача і кількістю води. Потрібно встановити зв'язок між міцністю бетону і названими факторами.

2. Надійність деякого напівпровідникового приладу залежить від ряду технологічних факторів. Потрібно так підібрати значення цих факторів, щоб надійність приладу підвищилася.

Як Ви думаєте, яке з цих завдань є екстремальним?

Щоб полегшити Вам вибір, укажемо на ознаку, що відрізняє екстремальні завдання. Завдання є екстремальним, якщо мета його полягає в пошуку екстремуму деякої функції. Щоб установити, яке з двох завдань є екстремальним, треба звернутися до їх формулювань і з'ясувати, де задовольняються вимоги екстремальності. У завданні 1 потрібно встановити зв'язок між міцністю бетону і трьома факторами. Тут не визначено, яка міцність є оптимальною, і не потрібно її оптимізувати. У завданні 2 необхідно підвищити надійність приладу. Сама постановка завдання вказує на те, що існуюча надійність не задовольняє експериментатора і потрібно шукати такі умови, при яких значення надійності підвищуються. Завдання ці називають інтерполяційними, а типу 2 - екстремальними.

Щоб просунутися далі, нам доведеться визначити ще ряд важливих понять, перше з яких - *об'єкт дослідження*. Для опису об'єкта дослідження зручно користуватися уявленням про кібернетичну систему, яка схематично зображена на рисунку 2.1. Іноді таку кібернетичну систему називають «чорною скринькою». Стрілки праворуч зображують числові характеристики цілей дослідження. Ми позначаємо їх буквою  $y$  «ігрек» і називаємо *параметрами оптимізації*. У літературі Ви можете зустріти інші назви: критерій оптимізації, цільова функція, вихід «чорної скриньки» і т. п.

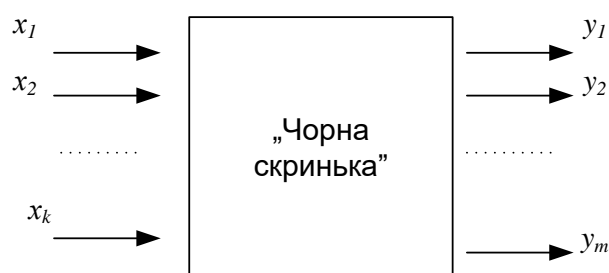


Рисунок 2.1 – Схема "чорної скриньки"

Для проведення експерименту необхідно мати можливість впливати на поведінку «чорної скриньки». Всі способи такого впливу ми позначаємо буквою  $x$  «ікс» і називаємо факторами. Їх називають також входами «чорної скриньки».

При вирішенні завдання будемо використовувати математичні моделі об'єкта дослідження. Під *математичною моделлю* ми розуміємо рівняння, що зв'язує параметр оптимізації з факторами. Це рівняння в загальному вигляді можна записати так:

$$y = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

де символ  $\varphi(x_n)$ , як зазвичай, в математиці замінює слова «функція від».

Така функція називається функцією відгуку.

Кожен фактор може набувати в досліді одного з декількох значень. Такі значення будемо називати рівнями. Може виявитися, що фактор здатний набувати нескінченно багато значень (безперервний ряд). Однак на практиці точність, з якою встановлюється деяке значення, не безмежна. Тому ми маємо право вважати, що будь-який фактор має певну кількість дискретних рівнів. Ця угода істотно полегшує побудову «чорної скриньки» і експерименту, а також спрощує оцінювання їх складності.

Фіксований набір рівнів факторів (тобто встановлення кожного фактора на деякий рівень) визначає одним з можливих станів «чорної скриньки». Одночасно це є умови проведення одного з можливих дослідів. Якщо перебрати всі можливі набори станів, то ми отримаємо безліч різних станів цієї «скриньки» - це буде кількість можливих різних дослідів.

Щоб дізнатися про кількість різних станів, досить кількість рівнів факторів (якщо воно для всіх факторів однаково) звести в степінь кількості факторів  $k : p^k$ , де  $p$  – кількість рівнів.

На перший погляд проста система з п'ятьма факторами на п'яти рівнях має 3125 станів, а для десяти факторів на чотирьох рівнях – їх уже понад мільйон!

За цих умов ми просто змушені відмовитися від таких експериментів, які містять усі можливі досліді: перебір занадто великий. Тоді виникає питання: скільки і яких дослідів треба включити до експерименту, щоб вирішити поставлене завдання? Ось тут і приходиться на допомогу планування експерименту.

Однак потрібно мати на увазі, що при плануванні експерименту не байдуже, які властивості має об'єкт дослідження. Зазначимо дві основні вимоги, з якими доводиться рахуватися. Перш за все результати експерименту повинні бути відтворювані на об'єкті. Виберемо деякі рівні для всіх факторів і в цих умовах проведемо експеримент. Потім повторимо його кілька разів через нерівні проміжки часу і порівняємо значення параметра оптимізації. Розкид цих значень характеризує відтворюваність результатів. Якщо він не перевищує деякої заздалегідь заданої величини (наших вимог до точності експерименту), то об'єкт задовольняє вимогу

відтворюваності результатів, а якщо перевищує, то не задовольняє цю вимогу. Ми будемо розглядати тільки такі об'єкти, для яких вимога відтворюваності виконується.

*Планування експерименту* припускає *активне* втручання в процес і можливість вибору в кожному досліді тих рівнів чинників, які становлять інтерес. Тому такий експеримент називається *активним*. *Об'єкт*, на якому можливий активний експеримент, називається *керованим*. Це і є друга вимога до об'єкта дослідження.

На практиці немає абсолютно керованих об'єктів. На реальний об'єкт зазвичай діють як керовані, так і некеровані фактори. Некеровані фактори впливають на відтворюваність експерименту і є причиною її порушення. Якщо вимоги відтворюваності не виконуються, доводиться звертатися до активно-пасивного експерименту.

Можливо, погана відтворюваність пояснюється дією чинника, що систематично змінюється (дрейфує) у часі. Тоді потрібно звертатися до спеціальних методів планування. Нарешті, можливо, що всі фактори некеровані. В цьому випадку виникає задача встановлення зв'язку між параметром оптимізації і факторами за результатами спостережень за поведінкою об'єкта, або, як кажуть, за результатами пасивного експерименту.

*Планування екстремального експерименту* - це метод вибору кількості і умов проведення дослідів, мінімально необхідних для відшукування оптимальних умов, тобто для вирішення поставленого завдання.

Під *експериментом* будемо розуміти метод наукового дослідження, коли дослідник активно і цілеспрямовано впливає на об'єкт дослідження шляхом створення штучних умов або використання природних з метою отримання інформації про його властивості.

Найважливішим завданням методів оброблення отриманої під час експерименту інформації є задача побудови математичної моделі досліджуваного явища, процесу, об'єкта. Її можна використовувати і при аналізі процесів, і при проектуванні об'єктів. Іншим завданням оброблення отриманої під час експерименту інформації є задача оптимізації, тобто знаходження такої комбінації незалежних змінних, при якій обраний показник оптимальності набуває екстремального значення.

*Планування експерименту* - вибір плану експерименту, що задовольняє задані вимоги та сукупність дій, спрямованих на розроблення стратегії експериментування (від отримання апріорної інформації до отримання працездатної математичної моделі або визначення оптимальних умов). Це - цілеспрямоване управління експериментом, що реалізовується в умовах неповного знання механізму досліджуваного явища.

Під *планом експерименту* розуміється сукупність даних, що визначають кількість, умови і порядок реалізації дослідів. Під словом

дослід у цьому випадку мається на увазі окрема елементарна частина експерименту.

Планування сприяє значній інтенсифікації праці дослідника і скороченню витрат на експеримент, підвищенню достовірності отриманих результатів дослідження.

Основним математичним апаратом основ теорії планування експерименту є теорія ймовірностей і математична статистика.

*Багатовимірний факторний простір* – це безліч точок, кожна з яких відповідає певній комбінації чинників. Область можливих комбінацій факторів називається областю можливих (допустимих) планів експерименту.

Вектор, утворений вихідними параметрами-характеристиками властивостей або якостей об'єкта, називають *відгуком*, а залежність відгуку від розглянутих факторів – *функцією відгуку*. Геометричне подання функції відгуку в факторному просторі називають *поверхнею відгуку*. Функцію відгуку називають також цільовою функцією, маючи на увазі, що при плануванні експерименту з метою знаходження оптимальних умов вона є критерієм оптимальності.

Планування експерименту проводиться в кілька етапів:

- постановка задачі (визначення мети експерименту, з'ясування вихідної ситуації, оцінювання допустимих витрат часу і коштів, установлення типу завдання);

- збір апріорної інформації (отримання літератури, опитування фахівців і т. п.);

- вибір способу вирішення і стратегії його реалізації (встановлення типу моделі, виявлення можливих факторів впливу, виявлення вихідних параметрів, вибір цільових функцій, створення необхідних нестандартних технічних засобів, формулювання статистичних завдань, вибір або розроблення алгоритмів програм оброблення експериментальних даних).

Основними концепціями сучасного підходу до організації експерименту є рандомізація, багатофакторність і автоматизація.

Сутність *рандомізації* полягає у наступному. Будь-яке експериментальне дослідження проводиться, як звичайно, в умовах дії систематичних помилок і чинників, які важко піддаються обліку і контролю. При традиційному підході до експерименту дослідники нерідко намагаються відокремити досліджуване явище від чинників, як це робиться в детермінованих об'єктах з добре вивченою структурою. Очевидно, що в недетермінованих об'єктах з величезною кількістю випадкових факторів цінність експерименту, проведеного в особливих умовах, не може бути високою.

Концепція *рандомізації* пропонує принципово новий підхід до організації вибіркового експерименту. План експерименту складається таким чином, щоб рандомізувати, тобто зробити випадковими в просторі і в часі систематично діючі чинники. Тоді ці фактори можна

розглядати як випадкові величини і, отже, врахувати статистично їх вплив у помилки експерименту. Іншими словами, на протипагу традиційному підходу до експерименту з прагненням стабілізувати чинники, що впливають на експеримент, рандомізація внесла концепцію випадку в експеримент.

Принцип *багатофакторності* відображує новий підхід до експерименту в задачах з багатьма факторами. При вивченні об'єктів з кількома факторами відповідно до цього принципу досліднику пропонується ставити досліди так, щоб варіювати всі фактори відразу на відміну від традиційного підходу, коли дослідник намагається вивчати дію кожного чинника при почерговому варіюванні. Організація експерименту із застосуванням багатофакторних схем варіювання дозволяє підвищити точність оцінювань параметрів, що підбираються до моделей для недетермінованих об'єктів, точніше оцінити чутливість вихідної залежної змінної об'єкта до варіації досліджуваних вхідних незалежних змінних.

Розвиток технічних програмних засобів обчислювальної техніки дає можливість говорити про нову концепцію в організації наукових досліджень - автоматизацію експерименту. Технічні засоби обчислювальних комплексів дозволяють на якісно новому рівні за точністю, швидкодією і наочністю вирішувати завдання збору, перероблення та відображення інформації. Програмні засоби надають досліднику нові можливості організації процесу аналізу даних, створення автоматично керованої послідовності процедур аналізу, використання інтерактивного режиму роботи з пакетами прикладних програм.

Серед основних методів планування, що застосовуються на різних етапах дослідження, використовують:

- планування відсіюючого експерименту, основне значення якого – виділення з усієї сукупності факторів групи істотних факторів, що підлягають подальшому детальному вивченню;
- планування експерименту для дисперсійного аналізу, тобто складання планів для об'єктів з якісними факторами;
- планування регресійного експерименту, що дозволяє отримувати регресійні моделі (поліноміальні, оптимізаційні та ін.);
- планування екстремального експерименту, в якому головне завдання - експериментальна оптимізація об'єкта дослідження;
- планування при вивченні динамічних процесів і т. п.

При пасивному експерименті існують тільки фактори у вигляді вхідних контрольованих, але некерованих змінних, і експериментатор знаходиться в положенні пасивного спостерігача. Завдання планування в цьому випадку зводиться до оптимальної організації збирання інформації і вирішення таких питань, як вибір кількості і частоти вимірювань, вибір методу оброблення результатів вимірювань.

Найчастіше метою пасивного експерименту є побудова математичної моделі об'єкта, яка може розглядатися або як добре, або як погано організований об'єкт.

У добре організованому об'єкті мають місце певні процеси, в яких взаємозв'язок вхідних і вихідних параметрів устанавлюється у вигляді детермінованих функцій. Тому такі об'єкти називають *детермінованими*. Погано організовані або дифузні об'єкти являють собою статистичні моделі. Методи дослідження з використанням таких моделей не потребують детального вивчення механізму процесів і явищ, що відбуваються в об'єкті.

Безліч усіх точок проведення експериментів

$$x^i = (x_{11}^i, x_{21}^i, \dots, x_{n1}^i), i = 1, 2, \dots, N$$

подається за допомогою матриці

$$t = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{vmatrix}$$

і називається планом експерименту.

*Однофакторний пасивний експеримент* проводиться шляхом виконання  $n$  пар вимірювань у дискретні моменти часу єдиного вхідного параметра  $x$  і відповідних значень вихідного параметра  $y$ . Аналітична залежність між цими параметрами внаслідок випадкового характеру впливів розглядається у вигляді залежності математичного очікування у від значення  $x$ , що називається регресійним. Відповідну лінію АВ показано на графіку (рисунок 2.2).

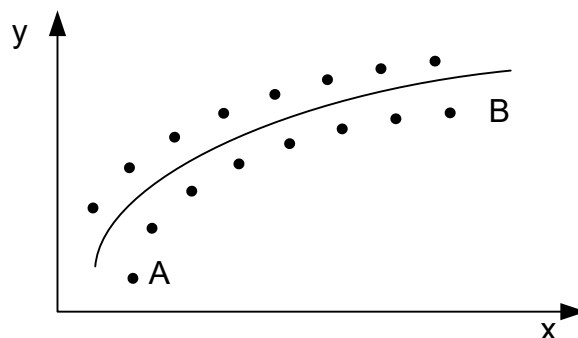


Рисунок 2.2 – Графік регресійної залежності  $y$  від  $x$

Метою однофакторного пасивного експерименту є побудова регресійної моделі. Слід зазначити, що регресійна модель є наближеною оцінкою істинної регресійної залежності. Для побудови моделі слід провести обґрунтований вибір апроксимуючої функції. Критеріями вибору

є простота, зручність користування, забезпечення необхідної точності апроксимації, адекватність. Адекватна регресійна модель дозволяє прогнозувати з необхідною точністю значення вихідної величини в деякій області значень вхідних величин.

Нерідко для вибору апроксимуючої функції користуються кривою регресійної залежності, проведеною "на око".

Найчастіше регресійна модель подається за допомогою апроксимуючої функції у вигляді полінома

$$y = a_1 + a_2x + \dots + a_m x^{m-1}. \quad (2.2)$$

З цієї моделі слід визначити порядок полінома, після чого обчислити параметри  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

До визначень і термінів у плануванні експериментів слід віднести також:

- вимірювальні прилади, що сприймають, зчитують, вимірюють, спостерігають, а потім записують і зберігають усі параметри;

- випробувальну апаратуру - це зазвичай все, що необхідно для проведення експерименту, включаючи вимірювальні прилади і об'єкт дослідження;

- зразок для випробувань, який є об'єктом, що піддається випробуванням;

- план експерименту - це загальний термін. Він визначає набір інструкцій з проведення експерименту.

Термін *змінна* використовується в самому широкому сенсі і означає будь-яку варійовану фізичну величину. Якщо варіювання змінної відбувається незалежно від інших величин, то маємо *незалежну змінну*. Якщо ж фізична величина змінюється при зміні однієї або більшої кількості незалежних змінних, то вона називається *залежною*. Якщо деяка фізична величина, що впливає на експеримент, змінюється випадково і її не можна контролювати, то вона називається *зовнішньою змінною*.

При проведенні серії випробувань випробувальна апаратура встановлюється в певний фіксований стан або вмикається за схемою, і проводиться запис усіх вимірювань. Зазвичай внаслідок кожного випробування отримують певну точку або експериментальний відлік. При цьому мається на увазі деяка фактична точка на реальному або уявному графіку (див. рисунок 2.2), що зображує результати експерименту.

Термін *дані* належить до всіх символічних "продуктів" експерименту. Так, даними можуть бути фотознімки, імпульси на магнітній стрічці, цифри, записані на папері, показання механічних лічильників, прості відповіді типу "так - ні". *Необроблені дані* - це інформація, записана в символічному вигляді, що отримується безпосередньо з вимірювальних приладів. *Оброблені дані* - це та ж інформація після виконання над нею деяких математичних операцій, наприклад, таких, як внесення виправлень за

допомогою калібрувальної кривої або побудова графіка.

Оброблені дані, нанесені на графік, утворюють криву; вони можуть також привести до деякого функціонального співвідношення між незалежними і залежними змінними, яке зазвичай записується у вигляді формули. На рисунку 2.3 зображено схему типового експерименту зі всіма існуючими зв'язками.

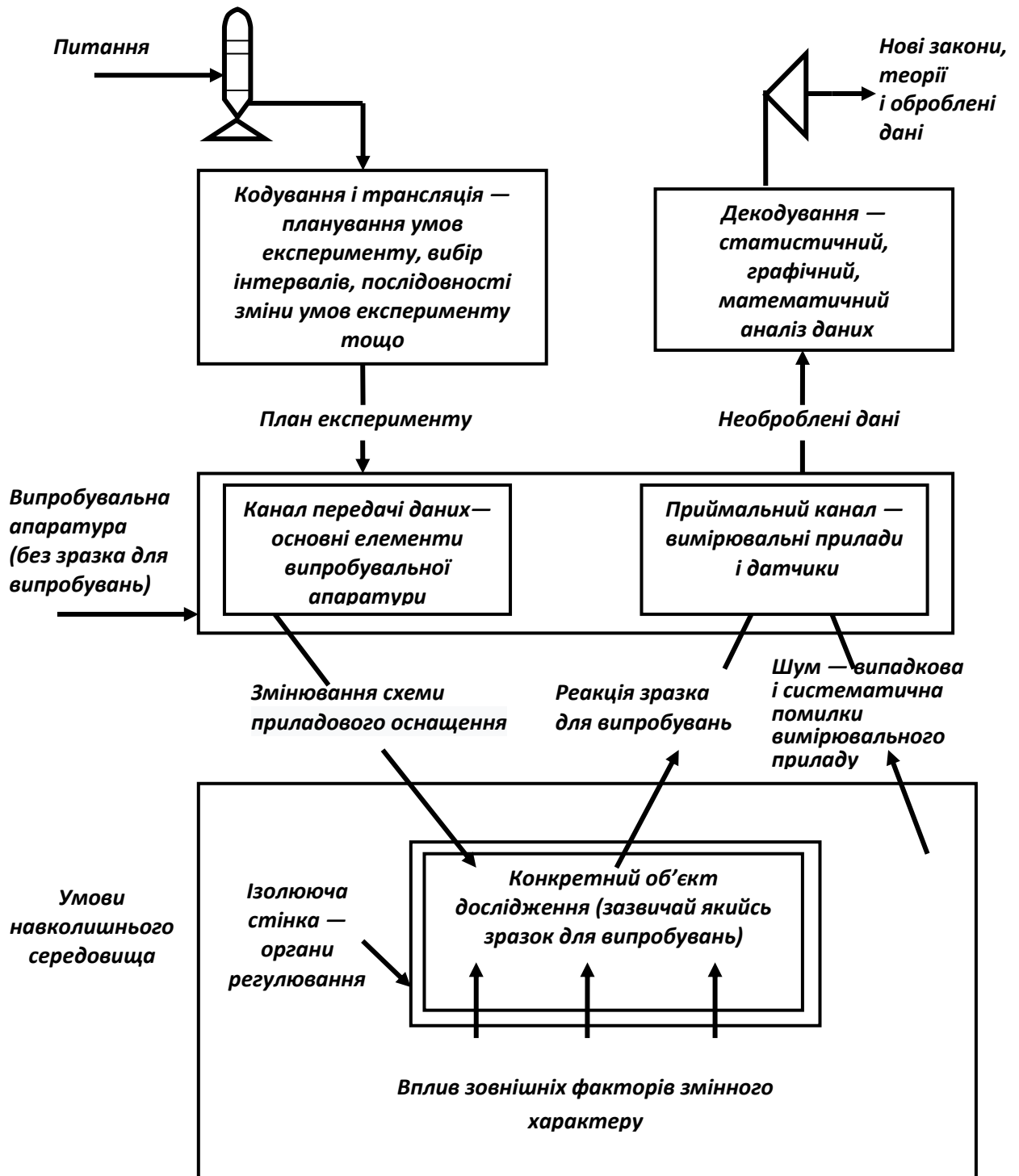


Рисунок 2.3 – Спрощена схема типового експерименту, зображена як система зв'язку



## 3 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ПОМИЛКИ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

### 3.1 Мета математичної обробки результатів експерименту

При дослідженні теоретичних питань, пов'язаних з проведенням експериментів, важливу роль відіграє вивчення помилок і невизначеностей.

Результати всіх експериментів містять помилки, які можуть бути як суттєвими, так і мізерно малими. Жоден експеримент не можна правильно спланувати без ретельного вивчення цього важливого фактора. Якщо невизначеності ігноруються або оцінюються недбало, то це може призводити до збитків, втрати часу і праці. І що ще гірше – технічні прорахунки призводять до різного роду небезпечних відмов і дорогих неполадок.

При дослідженні технічних систем можуть використовуватися теоретичні та емпіричні методи пізнання. Кожен з цих напрямів має відносну самостійність, свої переваги і недоліки. У загальному випадку теоретичні методи у вигляді математичних моделей дозволяють описувати і пояснювати взаємозв'язок елементів системи, що вивчається, або об'єкта у відносно широких діапазонах змінювання величин. Однак при побудові теоретичних моделей неминучим є введення будь-яких обмежень, припущень, гіпотез і т. п. Тому виникає задача оцінювання достовірності (адекватності) отриманої моделі реального процесу або об'єкта. Для цього проводиться експериментальна перевірка розроблених теоретичних моделей. Практика є вирішальною основою наукового пізнання. У ряді випадків саме результати експериментальних досліджень дають поштовх до теоретичного узагальнення досліджуваного явища. Експериментальне дослідження дає більш точну відповідність між досліджуваними параметрами. Але не слід і перебільшувати результати експериментальних досліджень, які справедливі тільки в межах умов проведеного експерименту.

Таким чином, теоретичні та експериментальні дослідження доповнюють один одного і є складовими елементами процесу пізнання навколишнього світу.

Як звичайно, результати експериментальних досліджень потребують певної математичної обробки. На сьогодні процедура оброблення експериментальних даних досить добре формалізована і досліднику необхідно тільки її правильно використовувати. Коло питань, що вирішуються при обробленні результатів експерименту, не таке вже й широке. Це - питання підбору емпіричних формул і оцінювання їх параметрів, питання оцінювання істинних значень вимірюваних величин і точності вимірювань, питання дослідження кореляційних залежностей та деякі інші.

Перевагами експерименту порівняно зі спостереженням реального явища або об'єкта є:

1. Можливість вивчення цього процесу в "чистому вигляді", без впливу побічних чинників, що затінюють основний процес.

2. В експериментальних умовах можна отримати результат швидше і точніший.

3. При експерименті можна проводити випробування стільки разів, скільки це необхідно.

Результат експерименту або вимірювання завжди містить деяку похибку. Якщо похибка мала, то нею можна знехтувати. Однак при цьому неминуче виникають два питання: по-перше, що розуміти під малою похибкою, і, по-друге, як оцінити величину похибки. Тобто, і результати експерименту потребують певного теоретичного осмислення.

Метою будь-якого експерименту є визначення якісної і кількісної складових зв'язку між досліджуваними параметрами, або оцінювання числового значення будь-якого параметра.

У деяких випадках вигляд залежності між змінними величинами відомий за результатами теоретичних досліджень. Як звичайно, формули, що виражають ці залежності, містять деякі постійні, значення які й необхідно визначити з досліду.

Іншим типом завдання є визначення невідомого функціонального зв'язку між змінними величинами на основі даних експерименту. Такі залежності називають емпіричними.

Однозначно визначити невідому функціональну залежність між змінними неможливо навіть у тому випадку, якщо б результати експерименту не мали помилок. Тим більше не слід було цього очікувати, маючи результати експерименту, що містять різні помилки вимірювання.

Тому слід чітко розуміти, що метою математичної обробки результатів експерименту є не знаходження істинного характеру залежності між змінними або абсолютної величини будь-якої константи, а подання результатів спостережень у вигляді найбільш простої формули з оцінюванням можливої похибки її використання.

### **3.2 Види вимірювань і причини помилок**

Під *вимірюванням* розуміють порівняння вимірюваної величини з іншою величиною, прийнятою за одиницю вимірювання.

Розрізняють *два типи вимірювань: прямі і непрямі*. При прямому вимірюванні величина, яка вимірюється, порівнюється безпосередньо зі своєю одиницею міри. Наприклад, вимірювання мікрометром лінійного розміру, проміжку часу за допомогою годинникових механізмів, температури - термометром, сили струму - амперметром тощо. Значення вимірюваної величини відраховується при цьому за відповідною шкалою приладу.

При непрямому вимірюванні величина визначається обчислюється за результатами вимірювань інших величин, які пов'язані з вимірюваною

величиною певною функціональною залежністю.

Наприклад, вимірювання швидкості пройденого шляху і витраченого часу, вимірювання щільності тіла за масою і об'ємом, температури при різанні за електрорушійною силою, величиною сили – за пружними деформаціями і т. п.

При вимірюванні будь-якої фізичної величини перевіряють і пристосування відповідного приладу, тобто показання точки відліку. При цьому істинного значення вимірюваної величини ми ніколи не одержимо. Це пояснюється тим, що вимірювальні засоби основані на певному методі вимірювання, точність якого має кінцеве значення. При виготовленні приладу задається клас точності. Його похибка визначається точністю поділок шкали приладу. Якщо на шкалі лінійки поділки нанесені через 1 мм, то точність відліку  $\pm 0,5$  мм не змінюється. Аналогічно відбуваються вимірювання і при використанні інших вимірювальних засобів.

Крім приладової похибки на результат вимірювання впливає ще ряд об'єктивних і суб'єктивних причин, які зумовлюють появу помилки вимірювання - різниці між результатом вимірювання й істинним значенням вимірюваної величини. Помилка вимірювання зазвичай невідома, як невідомо й істинне значення вимірюваної величини. Виняток становлять вимірювання відомих величин при визначенні точності вимірювальних приладів або їх тарування. Тому одним з найважливіших завдань математичної обробки результатів експерименту і є оцінювання істинного значення вимірюваної величини за даними експерименту з можливо меншою помилкою.

### **3.3 Типи помилок вимірювання і властивості випадкових помилок**

Крім приладових похибок вимірювання (які визначаються методом вимірювання) існують й інші, які можна розділити на три типи:

1. Систематичні похибки зумовлюються постійно діючими факторами. Наприклад, зсув початкової точки відліку, вплив нагрівання тіл на їх подовження, спрацювання ріжучого леза тощо. Систематичні помилки виявляють при відповідному таруванні приладів і тому вони можуть бути враховані при обробленні результатів вимірювань. У першу чергу це стосується абсолютної і відносної похибок вимірювань.

Якщо  $A$  – точне значення деякої величини,  $a$  – відоме наближення до нього, то абсолютною похибкою наближення  $a$  числа  $A$  називають деяку величину  $\Delta(a)$  таку, що

$$|A - a| \leq \Delta(a).$$

Відносну похибку, яку зазвичай виражають у відсотках, називають величиною  $\delta(a)$  за формулою

$$\left| \frac{a - A}{a} \right| \leq \delta(a).$$

Значущими цифрами числа називають усі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва.

Значущу цифру називають правильною, якщо абсолютна похибка числа не перевищує  $1/2$  одиниці розряду, що відповідає цій цифрі.

Наприклад:

$$a = 9348; \Delta(a) = 15;$$

$$9348 = 9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Маємо  $\Delta(a) = 15 > 5$  і  $\Delta(a) = 15 < 50$ ; отже, правильні цифри 9, 3 і 4.

У загальному випадку  $\Delta(a) \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$ , де  $m$  – порядок старшої цифри;  $n$  – кількість правильних значущих цифр.

Відносна похибка пов'язана з кількістю правильних цифр наближеного числа співвідношенням

$$\delta(a) \leq \frac{\Delta(a)}{a_m} 10^{-m} \leq \frac{10^{m-n+1}}{a_m 10^m} \leq \frac{1}{a_m 10^{n-1}},$$

де  $a_m$  – старша значуща цифра.

Інформацію про те, що  $a$  є наближеним значенням числа  $A$  з абсолютною похибкою  $\Delta(a)$ , прийнято записувати у вигляді

$$A = a \pm \Delta(a),$$

причому числа  $a$  і  $\Delta(a)$  записують з однаковою кількістю знаків після коми.

Інформацію про те, що  $a$  є наближеним значенням числа  $A$  з відносною похибкою  $\delta(a)$ , записують у вигляді

$$A = a(1 \pm \delta(a)).$$

2. Випадкові помилки містять в своїй основі багато різних причин, кожна з яких не проявляє себе чітко. Випадкову помилку можна також розглядати як сумарний ефект дії багатьох чинників. Тому випадкові помилки при багаторазових вимірюваннях виходять різними як за величиною, так і за знаком. Їх неможливо врахувати як систематичні, але можна врахувати їх вплив на оцінювання істинного значення вимірюваної величини. Аналіз випадкових помилок є найважливішим розділом математичної обробки експериментальних даних.

Підкреслимо, що при вимірюванні можуть виникати випадкові помилки, при цьому величина помилки залежить від того, наскільки добре прилад може відтворити послідовні відліки при постійній вхідній дії. Таким чином, випадкова помилка не має фіксованого значення подібно систематичній помилці; вона буде різною при кожному повторному знятті

відліку. За допомогою статистичних методів для кожного приладу можна визначити середні значення випадкових помилок.

Помилка виражається деяким числом, наприклад 2 об/хв, 0,6 °С, 15 Ом тощо і визначається як різниця між каліброваним або відомим відліком і відліком, знятим з приладу. Таким чином, помилку можна знати чи передбачити тільки в тому випадку, якщо вдається прокалібрувати або будь-яким іншим способом перевірити випробувальну апаратуру.

Невизначеність (неточність значення) являє собою *оцінювання помилки*. Під *невизначеністю* будемо розуміти "помилку, якою вона буде, якби її вдалося виміряти шляхом калібрування". Нижче показано, що *невизначеність*, як і випадкова помилка, буде аналізуватися статистичними методами.

Отже, ми визначили три види відхилень від точного відліку. Якщо при повторному знятті показань приладів відхилення від відомого значення має фіксовану величину, то ми маємо систематичну помилку. Якщо при повторному знятті відліків результат кожного разу відхиляється на різну величину щодо відомого значення, то маємо випадкову помилку.

3. Грубі помилки (промахи) з'являються внаслідок неправильного відліку за шкалою, неправильного запису, неправильної установки умов експерименту і т. п., вони легко виявляються при повторному проведенні дослідів.

Надалі будемо вважати, що систематичні й грубі помилки з результатів експерименту виключені.

Випадкові помилки бувають як позитивні, так і негативні, різної величини, що не перевищує певної межі. Якщо позначити через  $X$  істинне значення вимірюваної величини, а результат першого виміру – через  $a_1$ , то різницю

$$X - a_1 = x_1 \text{ або } a_1 - X = x_1$$

називають істинною абсолютною помилкою одного виміру. Одночасно вона є випадковою (при виключенні систематичних і грубих помилок).

Якщо вимірювання провести багаторазово в одних і тих же умовах, то результати окремих вимірювань будуть однаково надійні. Таку сукупність вимірів  $a_1, a_2 \dots a_n$  називають рівноточними вимірюваннями. Якщо проаналізувати досить велику серію рівноточних вимірів і відповідних випадкових помилок вимірів, то можна виділити чотири властивості випадкових помилок:

1. Кількість позитивних помилок майже дорівнює кількості негативних.

2. Дрібні помилки зустрічаються частіше, ніж великі.

3. Величина найбільш великих помилок не перевищує деякої певної межі, що залежить від точності вимірювання. Найбільшу помилку в ряду рівноточних вимірювань називають граничною помилкою.

4. Частка від ділення алгебраїчної суми всіх випадкових помилок на їх кількість близька до нуля, тобто

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \approx 0.$$

На основі зазначених властивостей при врахуванні деяких припущень математично досить строго виводиться закон розподілу помилок, описуваний такою функцією:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Чим більше відліків буде знято, тим менший інтервал  $\Delta X$  можна взяти, і в межах інтервалу отримаємо деяку плавну криву розподілу.

У теоретичних роботах з математичної статистики вивчається велика кількість різних розподілів [9]. На цьому етапі ми розглянемо лише один розподіл - знамениту нормальну криву помилок, яку часто називають розподілом Гаусса. Формула для цього розподілу часто виводиться на основі таких двох припущень:

1. Остаточна помилка будь-якого вимірювання є результатом великої кількості дуже малих помилок, розподілених випадково.

2. Позитивні і негативні відхилення щодо істинного значення рівноймовірні.

На основі цих припущень декількома способами можна отримати вираз для частоти появи відхилення як функції величини відхилення

$$y = y_0 e^{-\eta^2 x^2}, \quad (3.1)$$

де  $y$  – частота появи деякого відхилення  $x$  щодо точного значення  $\mu_x$ ;  $y_0$  – частота появи нульового відхилення;  $\eta$  – деяка постійна, що характеризує даний нормальний розподіл, називається модулем або показником точності.

Уважаючи, що  $y_0$  і  $\eta$  - постійні, і будуючи залежність  $y$  від  $x$ , отримуємо добре знайому колоколоподібну криву, показану на рисунку 3.1. Функція (3.1) і її крива неперервні, тобто вони описують сукупність, що містить множину вимірів. Це так звана генеральна сукупність, з якої для дослідження беруться деякі кінцеві вибірки. Генеральна сукупність охоплює всю множину відхилень для цього приладу. Нас цікавить, насамперед, математичний вираз для площі  $A$  під кривою. Площа знаходиться шляхом інтегрування за формулою

$$A = 2 \int_0^{\infty} y_0 e^{-\eta^2 x^2} dx. \quad (3.2)$$

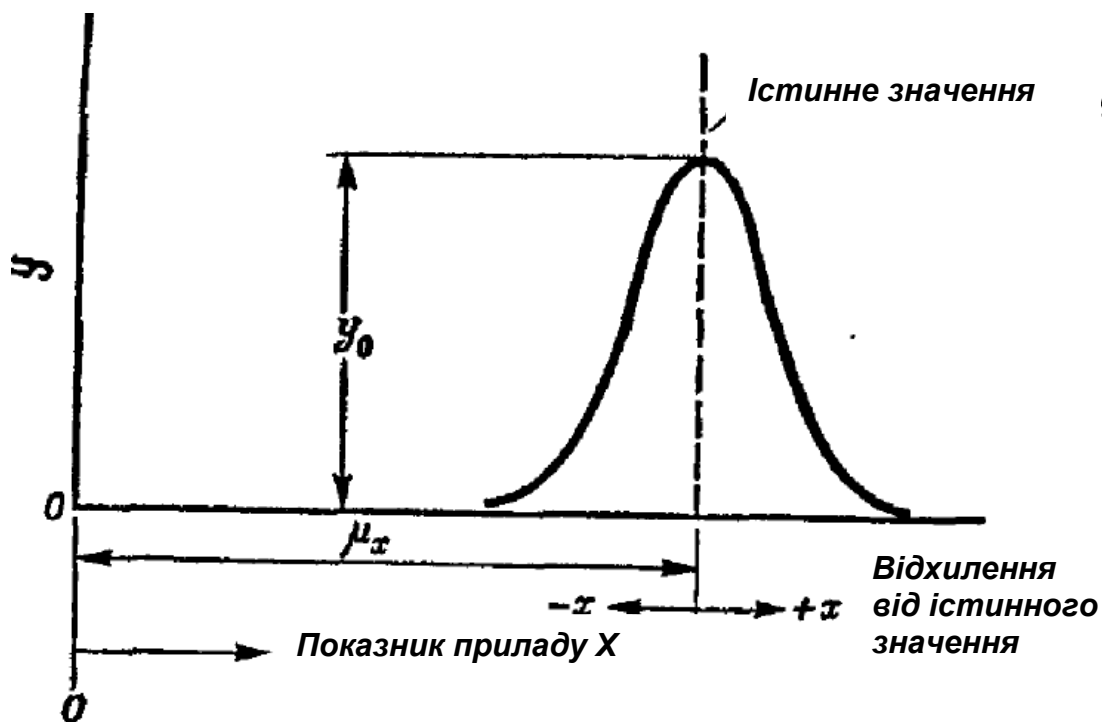


Рисунок 3.1 – Крива щільності нормального розподілу показань вимірювального приладу

Цей досить складний визначний інтеграл можна обчислити або знайти в таблиці інтегралів. Площа дорівнює  $A = \frac{\sqrt{\pi}}{\eta} y_0$ .

З причин, які будуть указані нижче, зручно прийняти цю площу такою, що дорівнює одиниці. Тоді  $y_0 \sqrt{\pi} / \eta = 1$  і  $y_0 = \eta / \sqrt{\pi}$ .

Унаслідок цього нормування формула (3.1) набуває такого вигляду:

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 x^2}. \quad (3.3)$$

У цьому випадку  $y$  має розмірність  $\eta$ , а розмірність  $\eta$  обернена розмірності  $x$ . Якщо, наприклад, для тахометра  $x$  має розмірність об/хв, то  $y$  матиме розмірність об/хв<sup>-1</sup>.

Однак  $y$  не є величиною, зручною для використання. Майже в усіх випадках необхідно знати ймовірність появи відхилення будь-якої даної величини. Сумарна площа під кривою залежності  $y$  від  $x$  охоплює всі відхилення для даного приладу і її числове значення дорівнює одиниці. Тоді ймовірність  $P$  появи відхилення, що лежить в інтервалі від  $-x$  до  $+x$ , дорівнює площі під кривою нормального розподілу, обмеженою інтервалом  $\pm x$ , як показано на рисунку 3.2. Математично ця ймовірність виражається формулою

$$P = \int_{-x}^{+x} \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 x^2} dx. \quad (3.4)$$



Рисунок 3.2 – Крива щільності нормованого (нормального) розподілу

Площа, обмежена інтервалом  $\pm x$ , дорівнює ймовірності того, що вимірювана величина знаходиться в цих межах.

Формула (3.4) виражає ймовірність появи будь-якого даного відхилення за умови, що: 1) відхилення показань цього приладу розподілені за нормальним законом; 2) для цього приладу можна знайти значення  $\eta$ . На жаль, інтеграл ймовірності помилки обчислити важко і зазвичай доводиться звертатися до таблиць.

Щоб таблиця була компактною, формулу (3.4) можна переписати в такому вигляді:

$$P_{\eta x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta x}^{+\eta x} e^{-\eta^2 x^2} d(\eta x), \quad (3.5)$$

де  $P_{\eta x}$  – ймовірність того, що дане відхилення буде в інтервалі від  $-\eta x$  до  $+\eta x$ . Значення інтеграла ймовірності, обчислені за формулою (3.5), наведено в таблиці 3.1.



Таблиця 3.1 – Імовірність знаходження відліку в інтервалі  $\pm x$

$\eta x$	$P\eta x$	$\eta x$	$P\eta x$	$\eta x$	$P\eta x$
0,00	0,000	0,477	0,500( $\phi$ )	0,90	0,797
0,05	0,056	0,50	0,521	0,95	0,821
0,10	0,113	0,55	0,563	1,00	0,843
0,15	0,168	0,60	0,604	1,1	0,880
0,20	0,223	0,65	0,642	1,2	0,910
0,25	0,276	0,70	0,678	1,3	0,934
0,30	0,329	0,707	0,682( $a$ )	1,4	0,952
0,35	0,379	0,75	0,711	1,5	0,966
0,40	0,428	0,80	0,742	2,0	0,995
0,45	0,476	0,85	0,771	2,1	1,000

### 3.4 Найбільш імовірне значення вимірюваної величини і оцінювання точності вимірювань

Припустимо, що для визначення істинного значення  $X$  вимірюваної величини було зроблено  $n$  рівноточних вимірювань з результатами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Природно, що ряд цих чисел буде більше  $X$ , інші – менше  $X$  і неясно, яке з цих чисел найбільше відповідає  $X$ .

Уявімо результати вимірювань у вигляді очевидних рівностей:

$$a_1 = X - \Delta x_1; a_2 = X - \Delta x_2; \dots; a_n = X - \Delta x_n.$$

Природно, що справжні абсолютні помилки  $\Delta x_i$  можуть набувати як позитивних, так і негативних значень.

Підсумовуючи ліві і праві боки рівностей, отримаємо

$$\sum_{i=1}^n a_i = nX - \sum_{i=1}^n \Delta x_i.$$

Поділимо обидві частини рівності на кількість вимірів  $n$  і отримаємо

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}{n}.$$

Величина  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$  є середньоарифметичним величини  $X$ . Якщо число  $n$

достатньо велике, то згідно з четвертою властивістю випадкових похибок

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0.$$

Це ж видно і за кривою Гаусса (рисунок 3.1), де будь-якій позитивній похибці відповідає така негативна, що дорівнює їй.

З викладеного випливає, що  $X = a$  при  $n \rightarrow \infty$ , тобто при нескінченній кількості вимірювань істинне значення вимірюваної величини дорівнює середньоарифметичному значенню результатів усіх вимірювань. При обмеженій кількості вимірювань істинне значення буде відрізнятися від середньоарифметичного, і тому необхідно оцінити величину цієї розбіжності:

$$X = a \pm \Delta x.$$

Слід ще раз підкреслити, що середньоарифметичне значення, яке приймається за істинне значення вимірюваної величини, є найбільш вірогідним значенням. Серед значень  $a_1$  можуть виявитися значення, які в дійсності ближче до істинного значення.

Відхилення  $\Delta x$  можливих значень  $a$  від його істинного значення  $X$  називають істинною абсолютною помилкою.

Для ряду рівноточних вимірювань  $a_1, a_2, \dots, a_n$  визначимо його середньоарифметичне значення  $a$  і складемо різниці  $(a - a_1), (a - a_2), \dots, (a - a_n)$ . Кожну з цих різниць називають імовірністю помилки окремого вимірювання ( $V_i$ ). Імовірні помилки, як і справжні помилки  $\Delta x_i = (X - a_i)$ , бувають позитивні, негативні, нульові. Розглянемо

$$\sum_{i=1}^n V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_n = na - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 0,$$

тобто алгебраїчна сума ймовірних помилок дорівнює нулю при будь-якій кількості вимірів. Справжні випадкові помилки такої властивості не мають.

Імовірні помилки  $V_i$  лежать в основі математичної обробки результатів вимірювань: саме за ними обчислюють граничну абсолютну помилку  $\Delta a_i$  – середньоарифметичного  $a$  й тим самим оцінюють точність результату вимірювань.

Середня справжня випадкова помилка (інакше - середнє відхилення окремого вимірювання) визначається так:  $(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) / n$ .

Величина  $\left[ (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2 \right] / n$  являє собою середній квадрат випадкової помилки або дисперсію  $S^2$  вибірки (при обмеженому  $n$ ) або генеральної сукупності  $\sigma^2$  (при нескінченному  $n$ ). Середня квадратична

помилка окремого вимірювання  $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n}}$  є найкращим критерієм точності, ніж середня випадкова помилка, оскільки не відбувається

компенсації позитивних і негативних помилок  $\Delta x_i$  і більше враховують дію великих помилок.

Оскільки справжнє значення  $X$  вимірюваної величини невідоме, то невідомі і справжні випадкові помилки  $\Delta x_i$ . Для визначення середньої квадратичної помилки  $S$  використовується положення теорії випадкових помилок, що при великій кількості  $n$  вимірів справедлива рівність

$$S = \sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}{n}} = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n-1}}.$$

Різні знаменники пояснюються тим, що величини  $\Delta x_i$  є незалежними, а з  $n$  величин  $V_i$  незалежними є  $n - 1$ , оскільки у величину  $V_i$  входить  $a$ , що визначається з цих же  $n$  вимірів.

Важливо, що, не знаючи самих справжніх випадкових помилок, удається обчислити середню квадратичну помилку певного виміру:

$$S = \pm \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n-1}}.$$

Оцінимо тепер похибку результату серії експерименту, тобто визначимо величину  $\Delta x = X - a$ .

Для цього проведемо перетворення виразу:

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - a_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - a + a - a_i)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x + V_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 + \frac{2\Delta x}{n} \sum_{i=1}^n (V_i)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i^2 = \\ &= (\Delta x_i)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i^2, \text{ тобто } S_n^2 = (\Delta x_i)^2 + \frac{n-1}{n} S^2. \end{aligned}$$

Якщо повторити серії по  $n$  вимірів у кожній  $N$  раз, можна отримати середні значення  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , похибки результатів вимірів

$$(\Delta x)_1 = (X - a_1); (\Delta x)_2 = (X - a_2); \dots; (\Delta x)_N = (X - a_N)$$

і середню середньоквадратичну похибку серії

$$S_a^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2 = (\Delta x_i)^2.$$

При великій кількості серій експериментів  $N$  середня квадратична похибка окремого виміру буде прагнути до дисперсії всього досліджу  $S_a^2 = \sigma_a^2$ :

$$\sigma_a^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} S_a^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta x)_i^2.$$

Усереднюючи вираз  $S_n^2$  за кількістю серій  $N$ , отримуємо

$$S_a^2 = (\Delta x)^2 = S_n^2 - \frac{n-1}{n} S^2.$$

З огляду на те, що при великому  $S_a^2 \rightarrow \sigma_a^2$  отримуємо шуканий зв'язок між дисперсіями всього досліджу та окремого експерименту

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 - \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

тобто дисперсія  $\sigma_a^2$  результату серії з  $n$  вимірів у  $n$  разів менше дисперсії окремого виміру. При обмеженій кількості  $n$  вимірів наближеним виразом  $\sigma_a^2$  буде

$$S_a^2 = \frac{S^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i^2}{n(n-1)}.$$

Вирази  $\sigma_a^2$  і  $S_a^2$  відображують фундаментальний закон збільшення точності при збільшенні кількості спостережень. З нього випливає, що, бажаючи підвищити точність вимірювань у два рази, ми повинні зробити замість одного чотири виміри; щоб підвищити точність у три рази, потрібно збільшити кількість вимірювань у дев'ять разів, і т. д.

### 3.5 Поняття довірчого інтервалу і довірчої ймовірності

Як було встановлено раніше, істинне значення вимірюваної величини  $X$  відрізняється від середньоарифметичного  $a$  на деяку величину  $\Delta x$ .

Ясно, що випадкові величини  $a_1, a_2, a_3$  зумовлюють випадковий характер абсолютної похибки  $\Delta x$  результату серії вимірювань, яка буде розподілена за законом Гаусса

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma_a^2}}.$$

Тоді замість виразу  $X = a \pm \Delta x$  можна записати  $a - \Delta x \leq X \leq a + \Delta x$ .

Інтервал  $(a - \Delta x, a + \Delta x)$ , у який за визначенням потрапляє істинне значення  $X$ , називають *довірчим інтервалом*. *Надійністю (рівнем*

значущості) результату серії вимірів називається ймовірність  $\alpha$  того, що істинне значення  $X$  вимірюваної величини потрапить у довірчий інтервал. Ймовірність  $\alpha$  виражається в частках одиниці або відсотках. Графічно надійність відображується площею під кривою нормального розподілу в межах довірчого інтервалу, віднесеною до загальної площі. Вибір надійності визначається характером проведених вимірювань. Наприклад, до деталей літака ставляться більш жорсткі вимоги, ніж до човнового мотора, а до останнього значно більші, ніж до ручної тачки. При звичайних вимірах обмежуються довірчою ймовірністю 0,90 або 0,95. Для будь-якої величини довірчого інтервалу (вираженого в частках  $\sigma$ ) за формулою Гауса може бути прорахована відповідна довірна ймовірність [1].

Величина абсолютної похибки  $\Delta x$  може бути подана у вигляді  $K \cdot \sigma_a$ , де  $K$  – деякий числовий коефіцієнт, що залежить від надійності  $\alpha$ .

Однак це справедливо лише для великого (нескінченного) числа  $n$ . При малих  $n$  цим коефіцієнтом користуватися не можна, оскільки величина  $\sigma_a$  не відома.

Для того щоб отримати оцінку границь довірчого інтервалу, при малому  $n$  вводиться новий коефіцієнт  $t_a$ . Цей коефіцієнт запропонований англійським математиком і хіміком В. С. Госсетом, який публікував свої роботи під псевдонімом "Стюдент", тому коефіцієнт  $t_\alpha$  назвали коефіцієнтом Стюдента.

Коефіцієнт Стюдента виражає розподіл випадкової величини  $t = \frac{\Delta x}{S_a}$

при різному  $n$ . При  $n \rightarrow \infty$  (практично при  $n > 20$ ) розподіл Стюдента переходить у нормальний розподіл. Значення коефіцієнта Стюдента також наводяться практично в усій літературі з теорії ймовірності.

Знаючи величину  $t_\alpha$ , можна визначити величину абсолютної похибки  $\Delta x = t_a \cdot S_a$ .

Слід зазначити, що величина абсолютної похибки ще не визначає точність вимірювань. Точність вимірювань характеризує відносна похибка  $e$ , що дорівнює відношенню абсолютної похибки  $\Delta x$  результату виміру до результату вимірів  $a$ :  $e = \pm \Delta x / a$ .

### **3.6 Правила округлення чисел і порядок оброблення результатів вимірювань**

Величина похибки результату вимірів фізичної величини дає уявлення про те, які цифри в числовому значенні вимірюваної величини сумнівні. Тому результати вимірів слід округляти перед тим, як виконувати з ними подальші обчислення.

Округляти числове значення результату вимірів слід відповідно до числового розряду значущої цифри похибки. При цьому виконують

загальні правила округлення.

Зайві цифри в цілих числах замінюють нулями, а в десяткових дробах відкидають (як і зайві нулі). Наприклад, якщо похибка вимірювання дорівнює 0,001 мм, то результат 1,07005 округлюють до 1,070.

Якщо перша цифра, що змінюється, замінюється нулями, то відкидаються цифри менше 5, цифри, що залишаються, не змінюються. Наприклад, число 148 935, точність вимірювання дорівнює 50, округлення – 148900.

Якщо перша цифра, що замінюється нулями або дорівнює 5, а за нею не слідує ніякі цифри або йдуть нулі, то округлення проводиться до найближчого парного числа. Наприклад, число 123,50 округлюється до 124.

Якщо перша цифра, що замінюється нулями чи більше 5 або дорівнює 5, але за нею йде значуща цифра, то остання залишається цифра яка збільшується на одиницю. Наприклад, число 6783,6 округлюється до 6784.

## 4 МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

### 4.1 Вибірковий метод для визначення властивостей генеральної сукупності

В основі теорії експерименту лежать ідеї і методи математичної статистики, зокрема її основні розділи - оцінювання параметрів і перевірка статистичних гіпотез.

Математична статистика дозволяє обчислювати ймовірності складних подій за ймовірностями простих подій, визначати на основі дослідних або експериментальних даних вигляд і числові характеристики розподілів випадкових величин (математичні очікування і дисперсії).

Безліч елементів, що підлягають вивченню методами математичної статистики, прийнято називати генеральною сукупністю (ГС). Розрізняють фізичні й гіпотетичні сукупності. Вони характеризуються однією  $X$  або декількома  $X, Y, Z, \dots$  ознаками, які являють собою одну випадкову величину або систему таких величин. Властивості генеральної сукупності досліджуються на основі певної її частини, що називається вибіркою  $n$ . Вибірка організовується так, щоб кожен елемент мав одну і ту ж ймовірність попадання до її складу. У цьому випадку вибірка називається репрезентативною, або представницькою, а метод - вибірковим методом.

### 4.2 Статистичний розподіл параметрів

Цікава для дослідника ознака ГС (безперервна випадкова величина  $Y$ ) описується деякою щільністю ймовірності  $\varphi(\mu_y, \sigma_y, \dots)$ , в якій  $\mu_y, \sigma_y \dots$  - невідомі параметри.

Параметри розподілу прийнято позначати буквами грецького алфавіту, а їх оцінки - буквами латинського алфавіту або такою ж буквою грецького алфавіту, але з ризикою вгорі. Наприклад,  $\mu_y$  - математичне очікування, а  $\bar{y}$  - його оцінка (ризика зверху означає усереднення за множиною).

Наближене визначення невідомих параметрів розподілу за даними вибірки називається точковим оцінюванням.

Вибіркові або експериментальні дані  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  є випадковими величинами, оскільки в кожній вибірці вони можуть набувати різних невідомих значень. Тому будь-яка точкова оцінка є випадковою величиною. Як і будь-яка випадкова величина, точкова оцінка характеризується законом або параметрами розподілу.

Оцінка  $\alpha$  називається *спроможною*, якщо при необмеженому збільшенні обсягу вибірки  $n$  її значення сходиться за ймовірністю з оцінюваним параметром  $\alpha$ :

$$a : \lim_{n \rightarrow \infty} P(|a - \&|) = 1,$$

де  $\varepsilon$  – як завгодно мале наперед задане позитивне число. Властивість спроможності означає, що математичне очікування оцінки  $M[\&]$  прагне до оцінюваного параметра  $\alpha$ , а її дисперсія  $D[\&] = \sigma^2$  – до нуля, коли обсяг вибірки прагне до нескінченності ( $n \rightarrow \infty$ ).

Оцінка  $\alpha$  називається незміщеною, якщо при будь-якому обсязі вибірки  $n$  її математичне сподівання дорівнює оцінюваному параметру  $a : M[\&] = a$ .

Для незміщеної оцінки відсутня систематична похибка, що залежить від обсягу вибірки  $n$ .

Оцінка  $\alpha$  називається ефективною, якщо серед інших оцінок параметра  $\alpha$  вона має найменшу дисперсію:  $D[\alpha] = \sigma^2 = \min$ . Зазначені властивості має оцінка математичного очікування - середнє вибіркове

$$\bar{y} = \&_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (4.1)$$

коли випадкова величина  $Y$  підпорядковується нормальному закону розподілу з математичним очікуванням  $\mu_y$  і середньоквадратичним відхиленням (СКВ)  $\sigma_y : Y \in N(\mu_y, \sigma_y)$ .

У разі  $n$  незалежних, рівноточних і однаково розподілених дослідів  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  – дисперсія середнього вибіркового,  $\bar{y}$  – величина  $\sigma \frac{2}{y}$  обернено пропорційна обсягу вибірки  $n$ .

Вираз (4.1) для  $\bar{y}$  є зваженою сумою незалежних випадкових величин (з вагою  $1/n$ ). Згідно з теоремою про дисперсії суми випадкових величин  $D[\bar{y}] = \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{n^2} (\sigma_{y^1}^2 + \sigma_{y^2}^2 + \dots + \sigma_{y^n}^2)$ .

З урахуванням цих спостережень  $\sigma_{y^1}^2 = \sigma_{y^2}^2 = \dots = \sigma_{y^n}^2 = \sigma_y^2$  вираз для дисперсії середнього має вигляд  $\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma_y^2 = \sigma_y^2 / n$ .

Зазначена формула показує, що чим більше використовується дослідних даних для отримання точкової оцінки, тим менше її дисперсія і вище достовірність, або інформативність. Це дозволяє установити зв'язок між СКВ і вибірковим середнім і одним спостереженням  $\sigma_y$ . Винесемо квадратний корінь з обох частин рівності:



$$\sigma_{\bar{y}} = \sigma_y / \sqrt{n}.$$

З виразу видно, що помилка СКВ середнього в  $\sqrt{n}$  разів менше помилки СКВ одного дослідів або спостереження.

За вибірковими даними можуть бути визначені точкові оцінки й інших параметрів розподілу, зокрема, спроможна і незміщена оцінки невідомої дисперсії генеральної сукупності

$$S_y^2 = \sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^2,$$

де величина  $n - 1$  називається кількістю ступенів свободи і позначається символом  $f_y : n - 1 = f_y$ .

### 4.3 Нормальний розподіл параметрів у математичній статистиці

Випадкова величина  $Y$ , підпорядкована нормальному закону, описується щільністю ймовірності

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \quad (4.2)$$

Нормальний розподіл визначається двома параметрами - математичним очікуванням  $\mu_y$  і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_y$ .

Величина  $z = (y - \mu_y) / \sigma_y$  має математичне очікування  $\mu_z = 0$ , дисперсію  $\sigma_z^2 = 1$ , СКО  $\sigma_z = 1$  і її називають нормованою нормально розподіленою випадковою величиною. Її щільність вірогідності

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

і позначається символом  $z \sim N(0,1)$ . Вигляд цього розподілу показано на рисунку 4.1, де по осі  $Oz$  відкладено поодиначні відрізки  $\sigma_z = 1$ . Числа 0,02; 0,14; 0,34 позначають приблизні ймовірності попадання випадкової величини у відповідні одиничні відрізки. Ймовірність попадання в інтервал  $(-3,3)$  довжиною  $6\sigma_z$  дорівнює 0,9973.

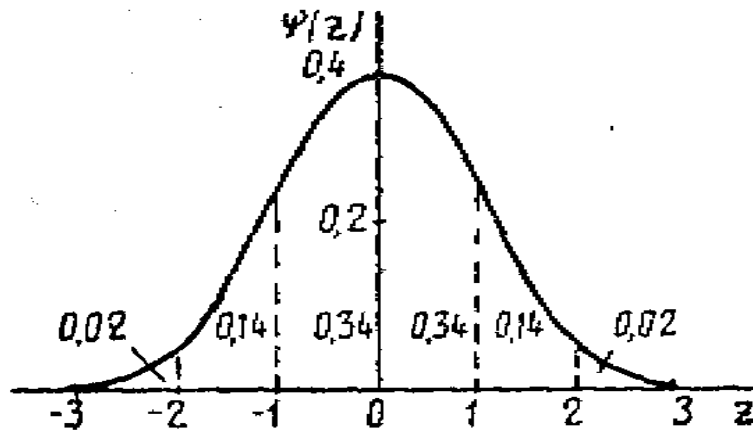


Рисунок 4.1 – Щільність вірогідності нормованої, нормально розподіленої випадкової величини

У більшості практичних задач таку ймовірність можна прийняти за одиницю. Це дорівнює припущенням, що весь розподіл укладено в інтервалі  $(-3,3)$ .

Широке застосування нормального розподілу починається з центральної граничної теореми теорії ймовірностей: при підсумовуванні досить великої кількості незалежних або слабокорельованих величин закон розподілу суми необмежено наближається до нормального розподілу всіх окремих складових. До такого роду розподілів належать  $\chi^2$ -квадрат Стьюдента та ряд інших.

### 4.3 Розподіл $\chi^2$

Цей розподіл застосовується для побудови довірчих інтервалів, перевірки відповідності емпіричного розподілу деякої теоретичної залежності і для визначення інших розподілів.

Нехай є  $n$  незалежних, нормованих, нормально розподілених випадкових величин

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \text{ тобто } M[z_i] = 0; \sigma_{z_i}^2 = 1; i = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді сума квадратів утворює нову випадкову величину  $\chi_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$ , яка називається величиною  $\chi_i$ -квадрат із  $n$  ступенями свободи і позначається символом  $\chi_n^2$ . Кількість ступенів свободи дорівнює кількості незалежних доданків у сумі. Якщо на складові накладено один зв'язок, то кількість ступенів свободи дорівнюватиме  $n - 1$ .

Розподіл  $\chi_i$ -квадрат повністю визначається кількістю ступенів свободи і не залежить від інших параметрів. Щільність розподілу для

різних  $n$  показано на рисунку 4.2. При  $n = 1, n = 2$  вона монотонна, а при  $n > 2$  - унімодальна і несиметрична.

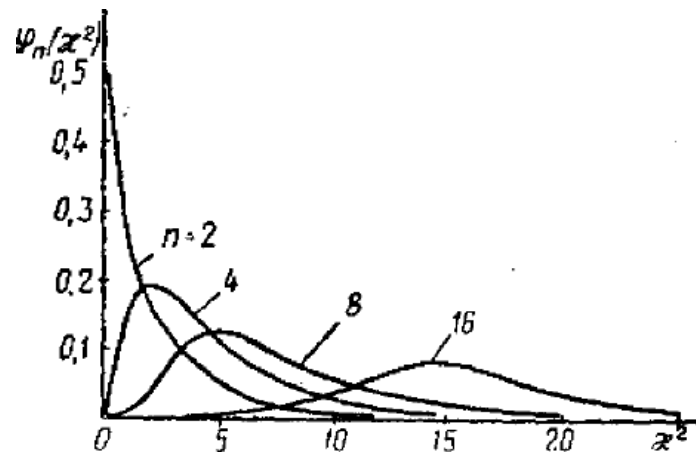


Рисунок 4.2 – Щільність розподілу  $\chi_n^2$  для різних ступенів свободи

#### 4.4 Розподіл Стьюдента

Для побудови довірчих інтервалів і для перевірки статистичних гіпотез широко використовується t-розподіл, або статистика Стьюдента:

$$t = (\bar{y} - \mu_y) / S_{\bar{y}}$$

Розподіл Стьюдента визначається кількістю ступенів свободи  $f_t = n - 1$ , є симетричним, унімодальним і асимптотично нормальним (рисунок 4.3). При  $f_t > 30$  воно практично збігається з нормальним.

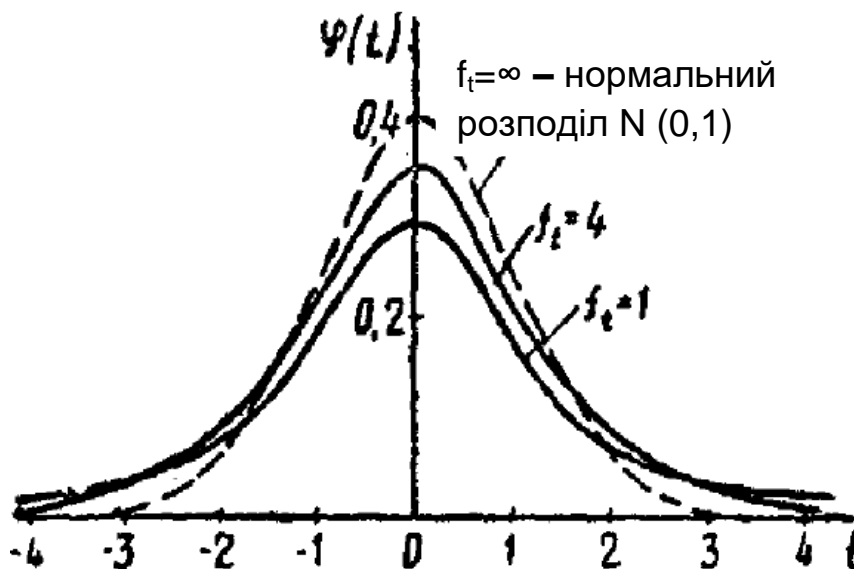


Рисунок 4.3 – Розподіл Стьюдента для ступенів свободи  $f_t = 1, f_t = 4$  і нормований нормальний розподіл  $N(0,1)$

## 4.5 Розподіл за Фішером

Цей розподіл, як і два попередніх, використовується при аналізі вибірових даних, отриманих з нормальною генеральною сукупністю  $Y \in N(\mu_y, \sigma_y)$ , зокрема для перевірки однорідності вибірових дисперсій.

За визначенням, F-статистика (критерій Фішера)

$$F_{f_1 f_2} = \frac{\chi_{f_1}^2 / f_1}{\chi_{f_2}^2 / f_2}, \quad (4.3)$$

де  $\chi_{f_1}^2, \chi_{f_2}^2$  -статистики  $\chi^2$  з кількістю ступенів свободи  $f_1, f_2$  відповідно, причому величина в чисельнику повинна бути більше величини в знаменнику.

Статистику (4.3) шляхом тотожних перетворень легко привести до відношення двох оцінок дисперсій деякої випадкової величини  $Y$ . Нехай на основі двох вибірок обсягом  $n_1, n_2$  отримані оцінки дисперсії  $\sigma_y^2$ -статистики  $S_1^2, S_2^2$  з кількістю ступенів свободи  $f_1 = n_1 - 1, f_2 = n_2 - 1$ .

Тоді з допомогою співвідношення можна записати

$$\begin{aligned} f_1 S_1^2 / \sigma_y^2 &= \chi_{f_1}^2; f_2 S_2^2 / \sigma_y^2 = \chi_{f_2}^2, \\ S_1^2 / \sigma_y^2 &= \chi_{f_1}^2 / f_1; S_2^2 / \sigma_y^2 = \chi_{f_2}^2 / f_2. \end{aligned}$$

З виразу маємо  $F_{f_1 f_2} = S_1^2 / S_2^2$ .

Передбачається, що  $S_1^2 > S_2^2$ ...F-розподіл визначається двома параметрами - кількістю ступенів свободи більшої дисперсії чисельника  $f_1$  і меншою дисперсією знаменника  $f_2$ .

Критичні значення F-розподілу, що відповідають рівню значущості  $\alpha = 0,05$  для різних кількостей ступенів свободи  $f_1$  і  $f_2$  дано в додатках. Таблиця з трьома входами ( $\alpha, f_1, f_2$ ) містить значення  $F_{\text{кр}} = F_{\text{табл}}$ , які задовольняють умову  $P(F < F_{\text{кр}}) = 1 - \alpha$ .

Зауважимо, що зі зменшенням рівня значущості  $\alpha$  значення  $F_{\text{кр}}$  збільшується.

## 5 РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ ДЛЯ ОДНОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ І ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ

### 5.1 Побудова регресійної моделі

Рівнянням регресії називають функціональну залежність математичного очікування випадкової величини  $Y$  від однієї  $X_1$  або декількох  $X_1, X_2, \dots, X_k$  невідповідних величин, тобто залежність вигляду  $M[Y] = \eta = \varphi_1(X_1)$  або  $\eta = \varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_k)$ . Процедура побудови рівняння регресії або регресійної моделі є завданням регресійного аналізу. Це роблять методом найменших квадратів, а аналіз отриманого рівняння виконують за допомогою апарату математичної статистики. Регресійний аналіз містить операції оцінювання невідомих параметрів моделі і перевірки їх статистичної значущості, перевірки адекватності моделі, побудови довірчих областей та ін. Виглядом рівняння регресії задаються завчасно виходячи з фізичної сутності досліджуваного явища, або з характеру наявного статистичного матеріалу, або на основі інших апріорних даних. Метод найменших квадратів дає найбільш ймовірні (максимально правдоподібні) оцінки параметрів у тому випадку, коли результати експерименту є вибіркою з нормального розподілу. У цьому приватному, але поширеному випадку МНК збігається з більш загальним статистичним методом максимальної правдоподібності (ММП).

Побудову рівняння регресії і його аналіз у разі, коли залежна змінна в ідеальних умовах є лінійною функцією однієї змінної для експерименту в п'яти дослідних точках  $u = 1 - 5$ , показано на рисунку 5.1.

Числові значення зведені в таблицю 5.1, де  $u$  - номер дослідної точки;  $n_u$  - кількість повторюваних дослідів у  $u$ -й дослідній точці;  $y_{uj}$  - результат  $j$ -го дослідів в  $u$ -й дослідній точці. Дані таблиці 5.1 можуть бути описані лінійним рівнянням або моделлю вигляду

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_1 X. \quad (5.1)$$

За результатами експерименту можна знайти оцінки параметрів  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  і отримати оцінку моделі - рівняння регресії

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 X,$$

де  $a_0$ ,  $a_1$  – точкові оцінки параметрів  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  відповідно;  $y$  – точкова оцінка  $\eta$ .

Зазвичай проводять експеримент з великою кількістю дослідів. Це забезпечує знаходження невідомих коефіцієнтів. Тому система лінійних рівнянь виявляється перевизначеною, коли кількість рівнянь більша кількості невідомих; виникає також суперечливість - коли деякі з рівнянь несумісні одне з одним.

Тільки якщо всі експериментальні точки лежать на прямій, то система

стає відповідною і має єдине рішення.

МНК має властивість, що він робить відповідною будь-яку довільну систему рівнянь. У ньому кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів.

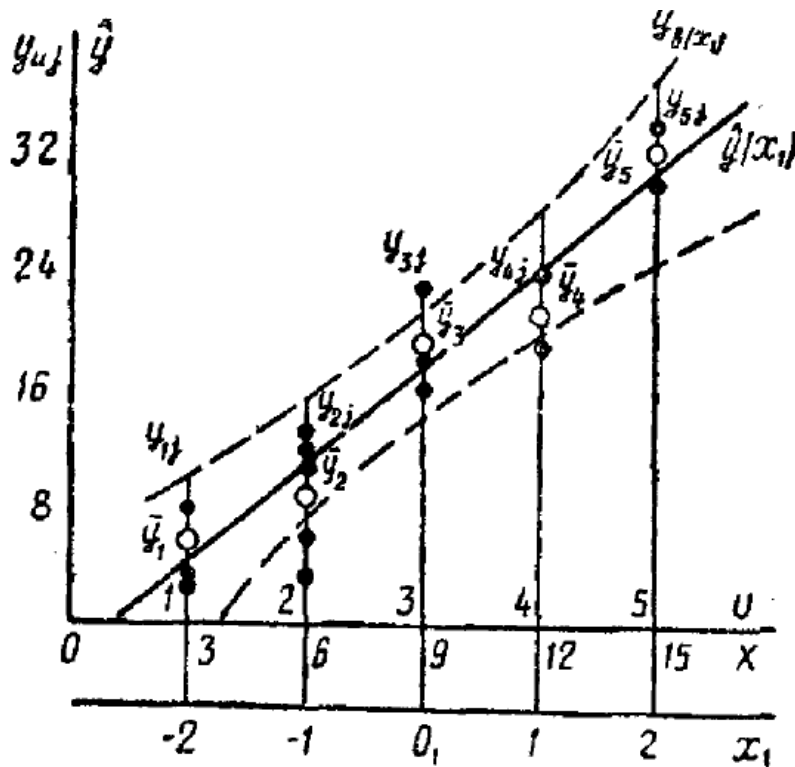


Рисунок 5.1 – Експериментальні дані  $y_{uj}$ , середні та пряма регресії

Для простого випадку з одним фактором наше наведене вище рівняння регресії має два невідомих коефіцієнти.

Неоднорідна лінійна відносно невідомих  $a_0$ ,  $a_1$  система рівнянь називається системою нормальних рівнянь:

$$a_0 \sum w_u X_{0u}^2 + a_1 \sum w_u X_{0u} X_u = \sum w_u \bar{y}_u X_{0u}$$

$$a_0 \sum w_u X_{0u} X_u + a_1 \sum w_u X_u^2 = \sum w_u \bar{y}_u X_u .$$

У загальному випадку система нормальних рівнянь може бути вирішена, наприклад, за правилом Крамера  $a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}$ ;  $a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum w_u X_{0u}^2 & \sum w_u X_{0u} X_u \\ \sum w_u X_{0u} X_u & \sum w_u X_u^2 \end{vmatrix} .$$

Для обчислень за цими формулами, крім даних таблиці 5.1, треба мати вагові коефіцієнти  $w_u$ , які визначаються за формулою

$$Wu = \frac{\sigma^2}{\sigma_{y_u}^2},$$

що своєю чергою потребує знання дисперсій вимірювання відгуку в дослідних точках:

$$u = 1, 2, \dots, N.$$

Таблиця 5.1– Значення відгуку  $y_u$  і результати обчислень

$\sum_{i=1}^5$	5	4	3	2	1	u
	3	4	3	5	5	$n_u$
	15	12	9	6	3	$X_u$
	2	1	0	-1	-2	$x_u$
	32	20	10	6	10	$y_{u1}$
	30	24	23	11	3	$y_{u2}$
	34	19	16	12	8	$y_{u3}$
	-	21	*	3	4	$y_{u4}$
	-	-	-	13	5	$y_{u5}$
	96	84	57	45	30	$\sum y_{uj}$
	32	21	19	9	6	$y_u=(10)/(12)$
	3072	1764	1083	405	180	$n_u y^2 u$
	3080	1778	1109	479	214	$\sum y^2$
	8	14	26	74	34	$(13)-(12)$
	4,0	4,67	13,0	18,5	8,5	$Su2=(14)/(nu-1)$
	1,333	1,1667	4,3333	3,7000	1,7000	$Sy_u^2=S_u/n_u$
2,6958	0,7500	0,8571	0,2308	0,2703	0,5882	$1/S^2_{y_u}$
1	0,2781	0,3179	0,0856	0,1002	0/2182	$w_u=S^2/S^2_{y_u}$

Примітка. Округлення до чотирьох знаків після коми.

## 5.2 Максимальне правдоподібне визначення параметрів МНК

Ці методи застосовуються в математичній статистиці й теорії експерименту при знаходженні математичного очікування і дисперсії.

Метод максимальної правдоподібності можна використовувати при будь-яких розподілах випадкової величини, а метод найменших квадратів впливає з ММП тільки в разі нормального розподілу. Однак у ряді досліджень показано, що МНК дає хороші результати і при значущих відхиленнях закону розподілу від нормального. Тому жоден метод оброблення дослідів не може конкурувати за популярністю і наочністю, за широтою додатків з методом найменших квадратів (МНК), який був розвинений зусиллями Лежандра і Гаусса понад 150 років тому.

Для випадку планування експерименту, коли в лінійній моделі діє один фактор, то функція відгуку (рівняння регресії) має вигляд

$$y = b_0 + b_1 x_1.$$

Для того щоб побудувати графік прямої лінії, необхідно на основі експериментів обчислити невідомі коефіцієнти  $b_0$  і  $b_1$ .

### **5.3 Однофакторний експеримент – рівняння регресії і лінійна модель**

Якби всі експериментальні точки лежали строго на прямій лінії, то для кожної з них була б справедлива рівність

$$y_i - b_0 - b_1 x_{i1} = \xi_i,$$

де  $i = 1, 2, \dots, N$  - номер дослідів.

Разом з тим на практиці, як видно з рисунка 5.1, ця рівність порушується і доводиться враховувати

$$y_i - b_0 - b_1 x_{i1} = 0,$$

де  $\xi_i$  - різниця між експериментальним і розрахунковим за рівнянням регресії значеннями  $y$  в  $i$ -й експериментальній точці. Цю величину іноді називають нев'язкою.

Дійсно, нев'язка виникає з двох причин: через помилки експерименту і через неповну адекватність моделі. Причому ці причини змішані і ми не можемо, не отримавши додаткової інформації, сказати, яка з них переважає.

Можна постулювати, що модель придатна. Тоді нев'язка буде породжуватися лише помилкою дослідів, і ми хочемо знайти такі коефіцієнти регресії, при яких нев'язки будуть мінімальні. Цю вимогу можна записати по-різному. Залежно від цього ми будемо отримувати різні оцінки коефіцієнтів. Ось один з можливих записів

$$U = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \min,$$

який призводить до методу найменших квадратів.



Зазвичай проводять експеримент з великою кількістю дослідів. Це забезпечує знаходження невідомих коефіцієнтів. Тому система лінійних рівнянь

$$\xi_i = y_i - b_0 - b_1 x_{li}$$

виявляється перевизначеною, коли кількість рівнянь більше кількості невідомих; виникає також суперечливість - коли деякі з рівнянь несумісні один з одним.

Тільки якщо всі експериментальні точки лежать на прямій, то система стає відповідною і має єдине рішення.

МНК має ту дивовижну властивість, що він робить відповідною будь-яку довільну систему рівнянь, тобто кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів. Для простого випадку з одним фактором наведено вище рівняння регресії має два невідомих коефіцієнти. Значить, застосовуючи МНК, можна отримати два рівняння:

$$U = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \min,$$

$$U = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{li})^2_{\min}.$$

З курсу математики відомо, що мінімум деякої функції, якщо він існує, досягається при одночасній рівності нулю окремих похідних за всіма невідомими, тобто

$$\frac{dU}{db_0} = 0, \quad \frac{dU}{db_1} = 0.$$

Ці рівняння служать для визначення коефіцієнтів

$$-2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{li}) = 0, \quad -2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{li}) x_{li} = 0.$$

Для зручності обчислень треба розкрити дужки і провести прості перетворення, які дають

$$N b_0 + \sum_{i=1}^N x_{li} b_1 = \sum_{i=1}^N y_i, \quad \sum_{i=1}^N x_{li} b_0 + \sum_{i=1}^N x_{li}^2 b_1 = \sum_{i=1}^N y_i x_{li}.$$

Остаточні формули для обчислення коефіцієнтів регресії, які зручно знаходити за допомогою визначників, мають вигляд

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_{li}^2 - \sum_{i=1}^N y_i x_{li} \sum_{i=1}^N x_{li}}{N \sum_{i=1}^N x_{li}^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_{li} \right)^2}; \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_{li} - \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_{li}}{N \sum_{i=1}^N x_{li}^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_{li} \right)^2}.$$

Можливі два способи перевірки. Перший – за умови формули

$$\sum_{i=1}^N (x_{li} + y_i)^2 = \sum_{i=1}^N x_{li}^2 + 2 \sum_{i=1}^N y_i x_{li} + \sum_{i=1}^N y_i^2.$$

Другий спосіб використовує умову  $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1$ .

Друга перевірка є найбільш повною, найбільш точною. Вона перевіряє не тільки обчислення сум, а й обчислення коефіцієнтів.

Нанесемо вихідні дані і отримане рівняння на графік (рисунок 5.2). Виділимо для зручності розгляду кілька експериментальних точок і відрізків нашого рівняння в більшому масштабі (рисунок 5.3).

Ми вибрали п'ять експериментальних точок, які пронумерували цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Четверта точка виявилася такою, що лежить на лінії. МНК полягає в тому, щоб мінімізувати суму квадратів відрізків, що характеризують розбіжність між експериментальними точками і отриманим рівнянням при мінімізації суми квадратів пунктирних відрізків.

Усі неточності (нев'язки) по осі у можна мінімізувати за рахунок суми квадратів вертикальних відрізків. Обидві лінії збіжаться тільки в тому випадку, якщо всі невідповідності дорівнюватимуть нулю, тобто якщо всі експериментальні точки лежать точно на прямій лінії.

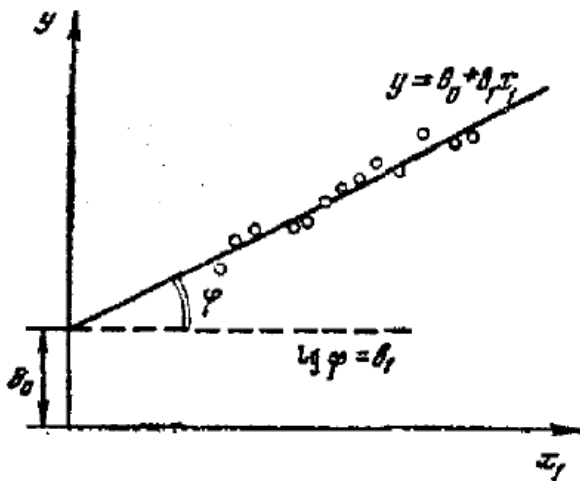


Рисунок 5.2 – Зображення вихідних даних та рівняння

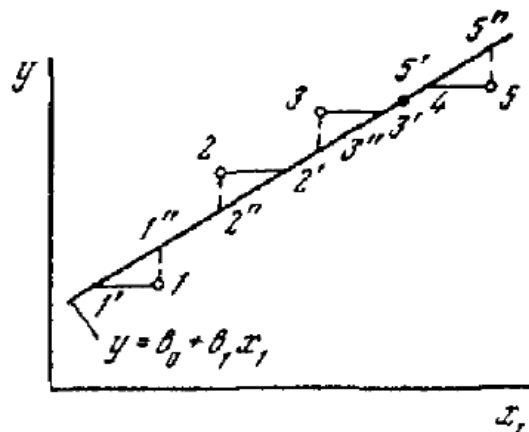


Рисунок 5.3 – Графічне зображення методу найменших квадратів

Можемо обчислити суму квадратів невідповідностей (будемо називати її остаточною сумою квадратів). Для цього треба обчислити за рівнянням значення у в умовах кожного дослідження. Будемо називати таке значення передбаченим і позначати рівнянням, показаним на рисунку 5.3. Потім треба знайти усі невідповідності (відрізки), звести їх у квадрат згідно з рисунками 5.2 і 5.3, а в разі визначення вагових коефіцієнтів потрібно користуватися співвідношеннями для таких оцінок:

$$w_u = S^2 / S_{y_u}^2; S_{y_u}^2 = S_u^2 / n_u;$$

$$S^2 = \frac{1}{1/S_{y_u}^2 + 1/S_y^2 + \dots + 1/S_{y_N}^2}.$$

Таким чином, вирішення завдання мінімізації суми квадратів відхилень деякої функціональної залежності  $y \in (x)$  від емпіричних даних і становить сутність методу найменших квадратів.

## 5.4 Побудова лінійного рівняння регресії

Дотепер ми користувалися МНК як обчислювальним прийомом. Нам ніде не доводилося згадувати про статистику. Але як тільки ми починаємо перевіряти будь-які гіпотези про придатність моделі або про значущість коефіцієнтів, доводиться згадувати про статистику. І з цього моменту МНК перетворюється в регресійний аналіз [3, 19].

Регресійний аналіз, як будь-який статистичний метод, застосовний при певних припущеннях, постулатах.

Перший постулат. Параметр оптимізації  $y$  - є випадкова величина з нормальним законом розподілу. Дисперсія відтворюваності, яку ми навчилися знаходити в сьомому розділі, - одна з характеристик цього закону розподілу.

У цьому випадку, як і відносно будь-яких інших постулатів, нас цікавлять два питання: як перевірити його здійсненність і до чого призводять його порушення?

При наявності великого експериментального матеріалу (десятки паралельних дослідів) гіпотезу про нормальний розподіл можна перевірити стандартними статистичними тестами (наприклад,  $\chi$ -критерію). На жаль, експериментатор рідко має у своєму розпорядженні такі дані, тому доводиться приймати цей постулат на віру. (Крім тих випадків, коли наперед відомо, що на це не так і потрібен спеціальний розгляд. Ми не будемо на них зупинятися).

У тому, що  $y$  - випадкова величина, зазвичай сумніватися не доводиться.

Які наслідки пов'язані, на вашу думку, з порушенням першого постулату?

При порушенні нормальності ми позбавляємося можливості встановлення ймовірностей, за якими справедливі ті чи інші висловлювання. У цьому криється велика небезпека. Ми ризикуємо заігнотизувати себе кількісними оцінками і можливостями, за якими нічого не стоїть. Ось чому треба дуже уважно ставитися до можливих порушень передумов.

Другий постулат. Дисперсія  $u$  не залежить від абсолютної величини  $u$ . Здійсненність цього постулату перевіряється за допомогою критеріїв однорідності дисперсій в різних точках факторного простору. Порушення цього постулату неприпустимо. Якщо однорідність дисперсій все ж відсутня, то необхідне таке перетворення  $u$ , яке робить дисперсії однорідними. На жаль, його не завжди легко знайти. Досить часто допомагає логарифмічне перетворення, з якого зазвичай починають пошуки.

Третій постулат. Значення факторів та суті невинуватих величин. Це певною мірою несподіване твердження практично означає, що встановлення кожного фактора на заданий рівень і його підтримка істотно точніші, ніж помилка відтворюваності.

Порушення цього постулату призводить до труднощів при реалізації матриці планування. Тому воно зазвичай легко виявляється експериментатором.

Існує ще четвертий постулат, який накладає обмеження на взаємозв'язок між значеннями факторів. У нас він виконується автоматично в силу ортогональності матриці планування.

Застосуємо співвідношення МНК для вирішення завдання апроксимації експериментальних даних (див. рисунок 5.1 і таблицю 5.1) за допомогою рівняння регресії (5.3). Вагові коефіцієнти отримані за формулами і наведені в таблиці 5.1, їх сума дорівнює одиниці і використовується для контролю правильності обчислень.

## **6. ФАКТОРИ ВПЛИВУ. ОРГАНІЗАЦІЯ БАГАТОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Після того як обрані об'єкт дослідження і функція відгуку, потрібно включити до розгляду всі істотні фактори, які можуть впливати на процес. Якщо будь-який істотний фактор виявиться неврахованим, то це може призвести до неприємних наслідків. Отже, якщо неврахований фактор довільного флуктування використовував випадкові значення, які експериментатор не контролював, то це значно збільшує похибку дослідження. При підтримці фактора на деякому фіксованому рівні може бути отримано неправильне уявлення про оптимум, оскільки немає гарантії, що фіксований рівень є оптимальним.

«Ну, а як же подолати велику кількість дослідів? Чим більше факторів, тим більше дослідів». Дійсно, кількість дослідів зростає за показовою функцією. Розмірність факторного простору збільшується, і математики в таких випадках говорять про «прокляття розмірності».

Якщо кількість факторів більше п'ятнадцяти, потрібно звернутися до методів відсіювання неістотних факторів. Тут можна скористатися формалізацією апріорної інформації, методом випадкового балансу,

планами Плаккета - Бермана тощо. Іноді ці плани застосовуються і при меншій кількості факторів.

## **6.1 Визначення фактора**

Фактором називається вимірювана змінна величина, що набуває в деякий момент часу певного значення. Фактори відповідають способам впливу на об'єкт дослідження.

Кожен фактор має область визначення. Ми будемо вважати фактор заданим, якщо разом з його назвою вказана область його визначення. Під областю визначення розуміється сукупність усіх значень, яких в принципі може набувати даний фактор. Ясно, що сукупність значень фактора, яка використовується в експерименті, є підмножиною з множини значень, що утворюють область визначення.

Область визначення може бути безперервною і дискретною. Однак у тих завданнях планування експерименту, які ми збираємося розглядати, завжди використовуються дискретні області визначення. Так, для факторів з безперервною областю визначення, таких, як температура, час, кількість речовини тощо, завжди вибираються дискретні множини рівнів. У практичних завданнях області визначення факторів, як звичайно, обмежені. Обмеження можуть мати принциповий або технічний характер.

Зробимо класифікацію факторів залежно від того, чи є фактор змінною величиною, яку можна оцінювати кількісно: вимірювати, зважувати, титрувати і т. п., або ж він - деяка змінна, що характеризується якісними властивостями.

Ви вже знаєте, що фактори поділяються на кількісні і якісні. Кількісні - фактори, які є фізичними величинами і можуть бути виміряні.

Якісні - фактори, які не можуть бути виражені кількісно (сорт або клас деякого продукту, кваліфікація оператора, радіоелементи різних партій або заводів-виготовлювачів).

Хоча якісним чинникам не відповідає числова шкала в тому сенсі, як це розуміється для кількісних факторів, однак можна побудувати умовну порядкову шкалу, яка ставить у відповідність рівням якісного фактора числа натурального ряду, тобто чинить кодування. Порядок рівнів може бути довільний, але після кодування він фіксується.

У ряді випадків межа між поняттям якісного і кількісного факторів дуже умовна.

## **6.2 Вимоги, що ставляться до факторів при плануванні експерименту**

При плануванні експерименту фактори повинні бути керованими. Це означає, що експериментатор, указавши потрібне значення фактора, може його підтримувати постійним протягом усього дослідження, тобто може керувати фактором. У цьому полягає особливість «активного»

експерименту. Планувати експеримент можна тільки в тому випадку, якщо рівні факторів підпорядковуються волі експериментатора.

Уявіть собі, що Ви вивчаєте процес синтезу аміаку на відкритому майданчику. Чи є температура повітря фактором, який можна включити до планування експерименту?

Температура повітря - фактор некерований. Ми ще не навчилися робити погоду на замовлення, а в плануванні можуть брати участь тільки ті фактори, якими можна управляти - встановлювати і підтримувати на їх обраному рівні протягом досліду або змінювати за заданою програмою. Температурою навколишнього середовища в цьому випадку управляти неможливо. Її можна тільки контролювати.

Щоби точно визначити фактор, потрібно вказати послідовність дій (операцій), за допомогою яких встановлюються його конкретні значення (рівні). Таке визначення фактора будемо називати операційним. Так, якщо фактором є тиск в деякому апараті, то абсолютно необхідно вказати, в якій точці і за допомогою якого приладу воно вимірюється і як воно встановлюється. Уведення операційного визначення забезпечує однозначне розуміння фактора.

З операційним визначенням пов'язані вибір розмірності фактора і точність його фіксування. Ми звикли вважати, що вибір розмірності фактора не становить особливих труднощів. Експериментатор добре орієнтується в тому, яку розмірність потрібно використовувати. Це дійсно так в тих випадках, коли існує усталена традиція, побудовані вимірювальні шкали, прилади, створені еталони, відбувається вимірювання температури, часу, тиску тощо. Але трапляється, що вибір розмірності перетворюється в дуже важку проблему вибору вимірювальних шкал.

Заміна однієї вимірювальної шкали іншою називається перетворенням шкал. Цей процес може бути використаний для спрощення моделі об'єкта.

Точність вимірювання факторів повинна бути якомога вищою. Ступінь точності визначається діапазоном зміни факторів. При вивченні процесу, який триває десятки годин, немає необхідності враховувати частки хвилини, а в швидких процесах необхідно враховувати навіть і частки секунди.

Фактори повинні бути безпосередніми впливами на об'єкт і повинні бути однозначними. Важко керувати фактором, який є функцією інших факторів. Але в плануванні можуть брати участь складні фактори, такі, як співвідношення між компонентами, їх логарифми тощо.

Необхідність уведення складних факторів виникає при бажанні подати динамічні особливості об'єкта в статичній формі. Нехай, наприклад, потрібно знайти оптимальний режим підвищення температури в реакторі. Якщо температура повинна наростати лінійно, то як фактор замість функції (у цьому випадку лінійної) можна використовувати тангенс кута нахилу, тобто градієнт. Положення ускладнюється, коли вихідна

температура не зафіксована. Тоді її доводиться вводити як ще один фактор.

### **6.3 Вимоги до сукупності факторів**

При плануванні експерименту зазвичай одночасно змінюється кілька факторів. Тому дуже важливо сформулювати вимоги, які ставляться до сукупності факторів.

Перш за все висувається вимога сумісності. Сумісність факторів означає, що всі комбінації здійсненні і безпечні. Це – дуже важлива вимога. Уявіть собі, що Ви вчинили легковажно, не звернули уваги на вимогу сумісності факторів і запланували такі умови досвіду, які можуть призвести до вибуху установки. Погодьтеся, що такий результат дуже далекий від цілей оптимізації.

Несумісність факторів може спостерігатися на межах областей їх визначення. Позбутися її можна скороченням областей. Положення ускладнюється тим, якщо несумісність виявляється всередині областей визначення. Одне з можливих рішень – розбиття областей на підобласті і вирішення двох окремих завдань.

При плануванні експерименту важлива незалежність факторів, тобто можливість встановлення фактора на будь-якому рівні незалежно від рівнів інших факторів. Якщо ця умова нездійсненна, то неможливо планувати експеримент. Отже, ми підійшли до другої вимоги - відсутності кореляції між факторами. Вимога некорельованості не означає, що між значеннями факторів немає ніякого зв'язку. Досить, щоб зв'язок не був лінійним.

### **6.4 Вибір моделі. перевірка адекватності моделі**

Під моделлю будемо розуміти вигляд функції відгуку  $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

Вибрати модель – означає, вибрати вигляд цієї функції, записати її рівняння. Тоді залишиться спланувати і провести експеримент для оцінювання числових значень констант (коефіцієнтів) цього рівняння. Але як вибрати модель?

Щоб поступово просуватися до відповіді на це питання, давайте спочатку побудуємо геометричний аналог функції відгуку - поверхню відгуку. Будемо для наочності розглядати випадок з двома факторами.

Зауважимо, що в разі багатьох факторів геометрична наочність утрачається. Ми потрапляємо в абстрактний багатовимірний простір, де у нас немає досвіду орієнтування. Доводиться переходити на мову алгебри.

Ми хочемо зобразити геометрично можливі стани «чорної скриньки» з двома входами. Для цього достатньо мати площину зі звичайною декартовою системою координат. По одній осі координат будемо

відкладати в деякому масштабі значення (рівні) одного фактора, а по іншій осі - другого. Тоді кожному стану «скриньки» буде відповідати точка на площині.

Але для факторів існують області визначення. Це означає, що у кожного фактора є мінімальне і максимальне можливі значення, між якими він може змінюватися або безперервно, або дискретно. Якщо фактори сумісні, то межі утворюють на площині деякий прямокутник, усередині якого лежать точки, що відповідають стану «чорної скриньки». Пунктирними лініями позначені межі областей визначення кожного з факторів, а суцільними - межі їх спільної області визначення. Щоб вказати значення параметра оптимізації, потрібна ще одна вісь координат. Якщо її побудувати, то поверхня відгуку буде виглядати так, як показано на рисунку 6.1. Простір, в якому будується поверхня відгуку (рисунок 6.2), ми будемо називати факторним простором. Воно задається координатними осями, за якими відкладаються значення факторів і параметра оптимізації (іноді під факторним простором розуміється простір, утворений тільки осями факторів).

Розмірність факторного простору залежить від кількості факторів. При багатьох факторах поверхню відгуку вже не можна зобразити наочно і доводиться обмежуватися тільки алгебраїчною мовою (рисунок 6.3).

Але для двох факторів можна навіть не переходити до тривимірного простору, а обмежитися площиною. Для цього досить зробити перетин поверхні відгуку площинами, паралельними площині  $X_1OX_2$ , і отримані в перетинах лінії спроектувати на цю площину. Так будують, наприклад, зображення гір і морських западин на географічних картах.

Точка М на рисунку - це і є та оптимальна точка, яку ми шукаємо. Кожна лінія відповідає постійному значенню параметра оптимізації. Така лінія називається лінією рівного відгуку. Існує відповідність між станом «ящика» і значенням параметра оптимізації: кожному можливому стану «ящика» відповідає одне значення параметра оптимізації. Однак зворотне неправильно: одному можливому значенню параметра оптимізації може відповідати і одне, і кілька, і скільки завгодно станів «скриньки».

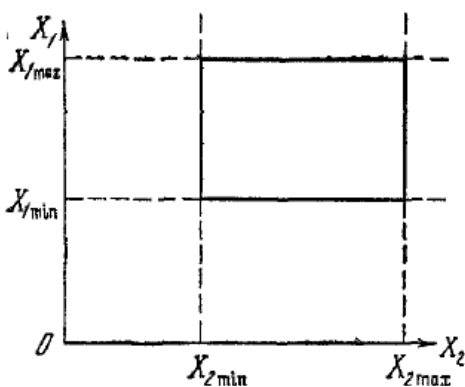


Рисунок 6.1 – Область визначення факторів

Тепер, коли ми можемо уявити собі поверхню відгуку, пора повернутися до основного запитання: як ставити експеримент, щоб знайти оптимум при мінімумі витрат? Це перш за все питання стратегії.



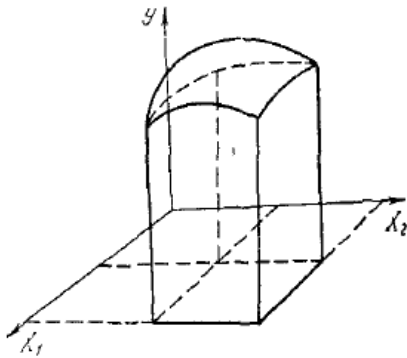


Рисунок 6.2 – Поверхня відгуку

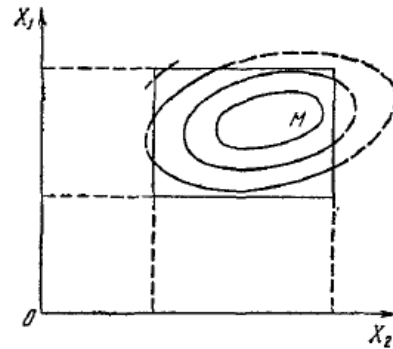


Рисунок 6.3 – Проекція перерізів поверхні відгуку на площину

Якби ми мали таблицю, в якій містилися б всі можливі стани об'єкта і відповідні їм відгуки, то особливої необхідності в побудові математичної моделі не було б. Просто ми б вибрали той (або ті) стан, який відповідає найкращому відгуку. Але ми вже знаємо, наскільки великий перебір можливих станів, і повинні відмовитися від практичної реалізації цієї можливості.

Інша можливість - випадковий вибір деякої кількості станів і визначення відгуків у них, сподіваючись, що серед цих станів попадуться оптимальні або принаймні близькі до нього стану.

Нарешті, третя можливість - будувати математичну модель, щоб з її допомогою передбачати значення відгуків у тих станах, які не вивчались експериментально.

Якщо не можемо виміряти відгук у кожному стані, то зуміємо хоч передбачати результат, причому навіть не в кожному стані, а тільки в найбільш цікавих, у тих, які наближають нас до оптимуму.

Як вибрати модель? Моделі бувають різні. Моделей буває багато. Щоб вибрати одну з них, треба зрозуміти, що ми хочемо від моделі, які вимоги ми до неї ставимо.

Очевидно, що головна вимога до моделі - це здатність передбачати напрям подальших дослідів, причому передбачати з необхідною точністю. Оскільки до отримання моделі ми не знаємо, який напрям нам знадобиться, то природно потребувати, щоб точність передбачення в усіх можливих напрямках була однаковою.

Це означає, що в деякій підобласті, до якої належать і координати виконаних дослідів, передбачене за допомогою моделі значення відгуку не повинно відрізнятися від фактичного більше, ніж на деяку заздалегідь задану величину. Модель, яка задовольняє таку або будь-яку аналогічну вимогу, називається адекватною. Перевірка здійсненності цієї вимоги називається перевіркою адекватності моделі. Розроблено спеціальні статистичні методи, за допомогою яких перевіряється адекватність.

Якщо кілька різних моделей відповідають необхідним вимогам, то слід віддати перевагу тій з них, яка є найпростішою.

Якщо розглянути логарифмічну функцію на деякому відрізку  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , вона з задовільною точністю описується двома рівняннями:

$$y = \log b x,$$
$$y = b x.$$

У другому рівнянні  $b$  - коефіцієнт, який ми можемо оцінити, наприклад, за результатами експерименту. Яке з рівнянь, на Вашу думку, простіше? Якщо Ви заздалегідь не сформулюєте точно, що називається простим, а що складним, то неможливо зробити вибір. Ось чому на наше запитання не було ніякої іншої відповіді, крім «не знаю».

На майбутнє ми домовимося, що за інших рівних умов ми завжди будемо надавати перевагу степеневим рядам. Точніше, відрізки степеневих рядів - алгебраїчні поліноми. При такій угоді можна сказати, що друге рівняння простіше.

Фактично ми зробили вибір класу моделей. Ми сказали, що завжди, коли це можливо, будемо шукати модель серед поліномів. Побудова полінома можлива навколо будь-якої точки факторного простору, оскільки ми припустили, що функція є аналітичною.

Вибрати – значить, порівняти. А як порівняти між собою класи моделей, якщо властивості об'єкта заздалегідь невідомі? Залишається припускати, що нам будуть рідко зустрічатися завдання, в яких вихідні постулати виявляться істотно неправильним.

Якщо це так, то ми дійсно вибрали найбільш простий, зручний і математично розроблений клас моделей. Можливо, що хтось заздалегідь вибрав для нашої задачі конкретну модель. Тоді теж виникає необхідність в плануванні експерименту для оцінювання її коефіцієнтів. Але ми не будемо розглядати завдання цього типу.

Давайте випишемо поліноми для випадку двох факторів. Вони будуть відрізнятися за максимальними степенями змінних, що входять до них:

поліном нульового степеня:  $y = b_0$ ;

поліном першого степеня:  $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ ;

поліном другого степеня:  $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_{12} + b_{22} x_{22}$ .

Отже, ми подали невідому нам функцію відгуку поліномом. Операція заміни однієї функції іншою в деякому сенсі еквівалентною функцією називається апроксимацією. Значить, ми апроксимували невідому функцію поліномом.

Але поліноми бувають різних ступенів. Який взяти на першому кроці?

Експеримент потрібен тільки для того, щоб знайти числові значення коефіцієнтів полінома. Тому чим більше коефіцієнтів, тим більше дослідів виявляться необхідними. А ми прагнемо скоротити їх кількість. Значить, треба знайти такий поліном, який містить якомога менше коефіцієнтів, але задовольняє вимоги, що ставляться до моделі. Чим нижчий ступінь полінома при заданій кількості факторів, тим менше в ньому коефіцієнтів.

Ми хочемо, щоб модель добре передбачала напрям найшвидшого поліпшення параметра оптимізації. Такий напрям називається напрямом градієнта. Ясно, що рух у цьому напрямку приведе до успіху швидше, ніж рух у будь-якому іншому напрямку (це означає, що буде досягнута економія кількості дослідів).

Як Ви думаєте, чи можна в цьому зв'язку завжди використовувати поліном першого ступеня?

З одного боку, він містить інформацію про спрямування градієнта, з іншого - в ньому мінімально можлива кількість коефіцієнтів при даній кількості факторів. Єдине побоювання в тому, що не ясно, чи буде лінійна модель завжди адекватною.

Питання в тому, як вибрати підобласть у факторному просторі, щоб лінійна модель виявилася адекватною. Умова аналітичності функції відгуку гарантує нам цю можливість. Завжди існує така околиця будь-якої точки (точніше, майже будь-якої точки), у якій лінійна модель адекватна. Розмір такої області заздалегідь не відомий, але адекватність, як Ви пам'ятаєте, можна перевіряти за результатами експерименту. Значить, вибравши спочатку довільну підобласть, ми, рано чи пізно, знайдемо її необхідні розміри. І як тільки це станеться, скористаємося рухом за градієнтом.

На наступному етапі ми будемо шукати лінійну модель уже в іншій підобласті. Цикл повторюється доти, доки рух по градієнту не перестане давати ефект. Це означає, що ми потрапили в область, близьку до оптимуму. Така область називається «майже стаціонарною». Тут лінійна модель уже не потрібна: або попаданням у майже стаціонарну область задача вирішена, або треба переходити до поліномів вищих ступенів, наприклад другого ступеня, щоб докладніше описати область оптимуму.

Удалий вибір підобласті має, як Ви бачите, велике значення для успіху всієї роботи. Він пов'язаний з інтуїтивними рішеннями, які приймає експериментатор на кожному етапі.

Крім завдання оптимізації, іноді виникає завдання побудови інтерполяційної моделі. У цьому випадку нас не цікавить оптимум. Просто ми хочемо передбачати результат з необхідною точністю в усіх точках деякої заздалегідь заданої області.

Тут не доводиться вибирати підобласть. Необхідно послідовно збільшувати ступінь полінома доти, доки модель не виявиться адекватною (рисунок 6,4).

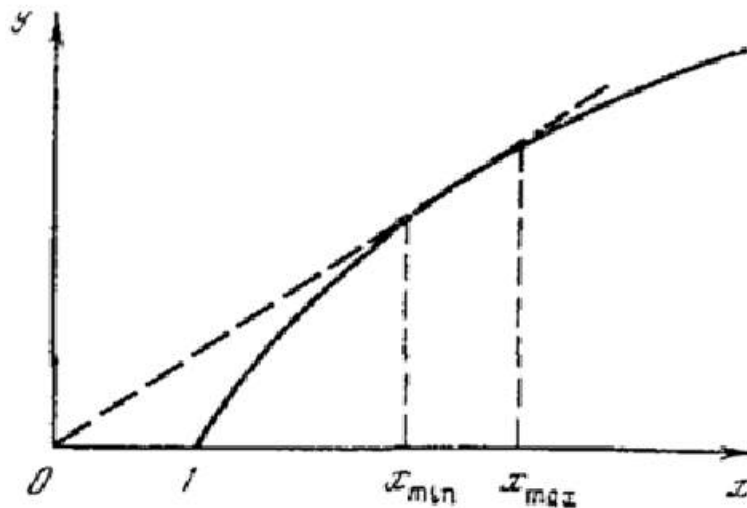


Рисунок 6.4 – Графік логарифмічної функції

Якщо адекватною виявляється лінійна, або неповна квадратна модель (без членів, що містять квадрати факторів), то її побудова аналогічна тому, що потрібно для оптимізації.

### 6.5. Матриця планування при повному факторному експерименті (ПФЕ)

Кожній точці факторного простору відповідає певний набір значень факторів, які є координатами цієї точки. Якщо в k-вимірному просторі фактор  $X_1$  може приймати  $l_1$  рівнів, фактор  $X_2$  -  $l_2$  рівнів, фактор  $X_k$  -  $l_k$  рівнів, то k факторів утворює

$$N = l_1 l_2 \dots l_k = \prod_{i=1}^k l_i$$

наборів, або точок. У кожній точці повинен бути проведений один або кілька паралельних дослідів. Якщо всі фактори приймають одну і ту ж кількість рівнів  $l$ , кількість наборів

$$N_1 = 1^k.$$

Це число навіть при  $1=3\dots 5$  і  $k=5\dots 10$  дуже велике. Тому намагаються кількість рівнів факторів брати якомога меншою. Для побудови моделей без урахування квадратів факторів досить брати  $1=2$  з урахуванням квадратів факторів кількість рівнів факторів має бути не менше трьох і т. д.

При варіюванні всіх  $k$  факторів на двох рівнях маємо ПФЕ  $2^k$ .

У цьому експерименті кількість точок факторного простору, де вимірюється відгук, визначається як  $N=2^k$ . Набори факторів, які реалізуються в експерименті, зазвичай записуються у вигляді таблиці або матриці, яка називається матрицею планування і позначається символом  $X_n$ . Розглянемо процедуру побудови матриці планування ПФЕ для різних значень кількості факторів  $k$ .

Матриця планування зазвичай записується не в фізичних  $X_i$ , а в кодованих  $x_i$ -змінних. На рисунку 6.5 показано системи координат і чотири набори факторів – точки 1 – 4. Початок кодованих координат  $0_1$  поміщується в центрі області експерименту  $\omega$ . Чотири набори факторів у кодованій системі координат мають такі координати:

$$1(-1, -1); 2(+1, -1); 3(-1, +1); 4(+1, +1).$$

Кодовані змінні  $x_{iu}$  набувають  $\pm 1$  і як фізичні змінні приймають тільки верхнє і нижнє значення. Матрицю планування можна подати у вигляді таблиці 6.8, у якій номер рядка відповідає номеру набору  $u$ . В індексації факторів  $x_{iu}$  перший індекс відповідає номеру фактора, другий - номеру рядка в матриці планування або номеру набору. Праворуч від таблиці записана матриця планування.

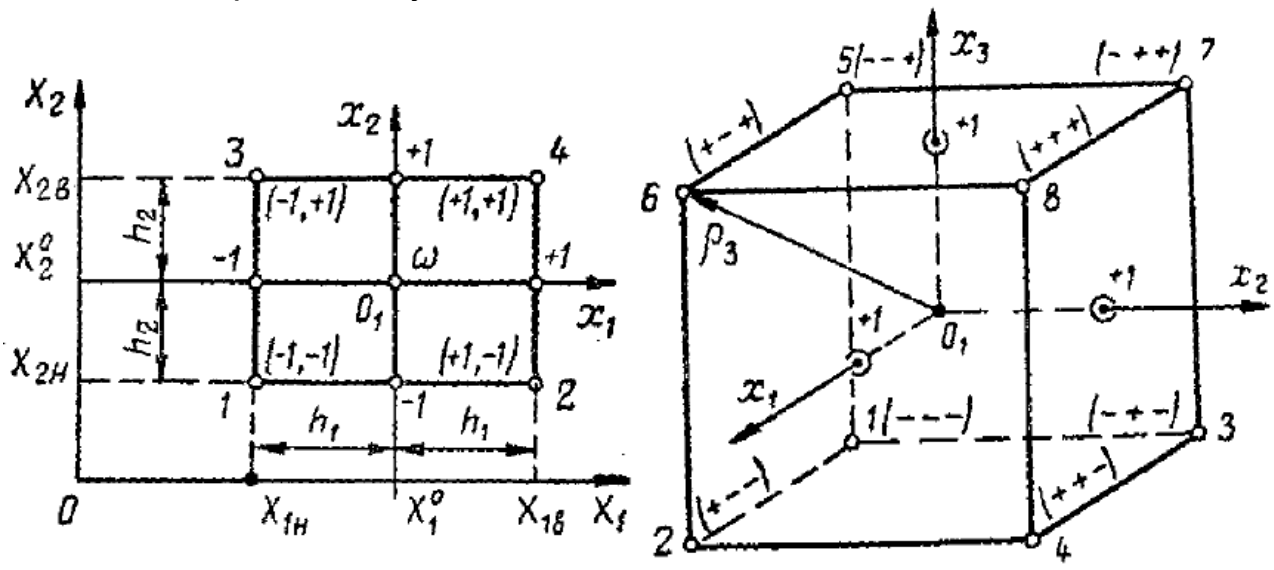


Рисунок 6.5 – Зображення набору факторів у різних площинах

Таблиця 6.8 – План ПФЕ  $2^2$  і матриця

Номер набору $u$	Координата	
	$x_{1u}$	$x_{2u}$
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

або записуємо  $x_{1u}x_{2u}$  у вигляді таблиці 6.8, або у вигляді матриці:

$$x_n = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ x_{13} & x_{23} \\ x_{14} & x_{24} \end{bmatrix}.$$

Треба зазначити, що складені описаним способом матриці планування і їх геометричні образи (див. рисунок 6.5) мають три важливі властивості: симетрію, нормування та ортогональність стовпців.

Властивість симетрії полягає в тому, що всі набори чинників (точки плану) симетричні щодо центру плану або сума елементів будь-якого стовпця матриці планування дорівнює нулю:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0, \quad i=1,2,\dots,k,$$

Властивість нормування має вигляд

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N, \quad i=0,1,\dots,k.$$

тобто сума квадратів елементів будь-якого стовпця дорівнює кількості рядків  $N$ .

Нагадаємо, що властивість ортогональності полягає в тому, що сума добутків елементів будь-яких двох стовпців дорівнює нулю:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j=1,2,\dots,k.$$

Таким чином, матриці планування показують, у яких точках факторного простору треба провести вимірювання відгуку, тобто провести досліди.

## 6.6 Дробний факторний експеримент

Почнемо з найпростішого - повного факторного експерименту  $2^2$ . Напишемо ще раз матрицю планування.

Номер досліду	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$y$
1	+1	-1	-1	+1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4$

Користуючись таким плануванням, можна обчислити чотири коефіцієнти і подати результати експерименту у вигляді неповного квадратного рівняння

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2.$$

Якщо є підстави вважати, що в зазначених інтервалах варіювання процес може бути описаний лінійною моделлю, то достатньо визначити три коефіцієнти:  $b_0, b_1, b_2$ . Залишається одна ступінь свободи. Вживемо її для мінімізації кількості дослідів. При лінійному наближенні  $b_{12} \rightarrow 0$  і вектор-стовпець  $x_1 x_2$  можна використовувати для нового фактора  $x_3$ . Поставимо цей фактор у дужках над взаємодією  $x_1 x_2$  і подивимося, яке буде оцінювання коефіцієнтів. Тут уже не буде тих роздільних оцінок, які ми мали в повному факторному експерименті  $2^k$ . Оцінки змішаються таким чином:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Але нас це не повинно засмучувати. Адже ми вибираємо лінійну модель, і, отже, усі парні взаємодії незначущі. Головне – ми знайшли засіб мінімізувати кількість дослідів: замість восьми дослідів для вивчення трьох чинників виявляється можна поставити чотири. При цьому матриця планування не втрачає своїх оптимальних властивостей (ортогональності, ротатабельності і т. п.), у чому Ви можете самостійно переконатися.

Знайдене правило можна сформулювати так: щоб скоротити кількість дослідів, потрібно новому фактору присвоїти вектор-стовпець матриці, що належить взаємодії, якою можна знехтувати. Тоді значення нового фактора в умовах дослідів визначається знаками цього стовпчика.

Подивіться, будь ласка, на три матриці, наведені нижче. Ці матриці пропонуються замість повного факторного експерименту  $2^3$ , що потребує, як Ви знаєте, восьми дослідів.

Яким би з них Ви скористалися?

Номер досліду	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	Y
1	+1	-1	-1	+1	$Y_1$
2	+1	+1	+1	-1	$Y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$Y_3$
4	+1	+1	-1	+1	$Y_4$
Номер досліду	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	Y
1	+1	-1	-1	+1	$Y_1$
2	+1	+1	+1	+1	$Y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$Y_3$
Номер досліду	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	Y
1	+1	-1	-1	+1	$Y_1$
2	+1	+1	+1	+1	$Y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$Y_3$
4	+1	+1	-1	-1	$Y_4$

Перевіримо властивості першої матриці. Кожен вектор-стовпець матриці, крім першого, містить однакове число +1 і -1. Це означає, що виконується умова нормування  $\sum_{i=1}^N x_{ij} = 0$ .

Тепер перемножимо кожен пару вектор-стовпців і подивимося, чи буде сума дорівнювати 0. На жаль,  $\sum_1^4 x_{2i}x_{3i} = -4$ , тобто вийшла якась помилка у виборі матриці. Знайдемо її. Вектор-стовпці для  $x_1$  і  $x_2$  не викликають сумніву. Адже ця частина матриці - повний факторний експеримент  $2^2$ . А як побудований вектор-стовпець для  $x_3$ ? Елементи цієї матриці протилежні за знаком елементів сусіднього стовпчика  $x_2$ . Два цих стовпці виявилися взаємозв'язаними:  $x_3 = -x_2$ . При цьому  $b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_2$  і  $b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_3$ . У такому плануванні не можуть бути окремо оцінені основні ефекти. Значить, ми втратили інформацію про два лінійних коефіцієнти нашої моделі. Таким плануванням скористатися неможливо.

У таблиці другого досліду містяться усього три досліди. Трьох дослідів недостатньо для оцінки чотирьох коефіцієнтів:  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$ . Крім того, жодна з властивостей, притаманних повному факторному експерименту, тут не виконується, за винятком нормування.

У таблиці третього досліду зберігаються всі властивості повного факторного експерименту. Вона дає можливість оцінити вільний член  $b_0$  і



три коефіцієнти при лінійних членах, тому що для  $x_3$  використаний вектор-стовпець  $x_1x_2$  повного факторного експерименту  $2^2$ .

Якщо ми на додаток до стовпців матриці № 3 обчислимо ще стовпці для виразів  $x_1x_3$  і  $x_2x_3$ , то побачимо, що елементи стовпця  $x_1x_3$  співпадутъ з елементами стовпчика  $x_2$ , а елементи стовпчика  $x_2x_3$  - з елементами стовпчика  $x_1$ . Знайдені нами коефіцієнти будуть оцінками для спільних ефектів:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Таке планування нас цілком влаштовує. Ми змішали ефекти взаємодії з основними ефектами. (Але всі основні ефекти оцінюються окремо один від одного). Так як постулюється лінійна модель, то передбачається, що ефекти взаємодії близькі до нуля, і тому  $b_1 \approx \beta_1$ ;  $b_2 \approx \beta_2$ ;  $b_3 \approx \beta_3$ . Ми розглянули найпростіший випадок: матрицю з чотирьох дослідів для трифакторного планування. Зі збільшенням кількості факторів питання про мінімізацію кількості дослідів перетворюється в досить складну задачу. Розглянемо її детально. При цьому нам не обійтися без нових визначень і понять.

Поставивши чотири досліди для оцінювання впливу трьох чинників, ми скористалися половиною повного факторного експерименту  $2^3$ , або «напіврепліки». Якби ми значення  $x_3$  прирівняли до  $-x_1x_2$ , то отримали б другу половину матриці  $2^3$ . У цьому випадку  $b_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{23}$ ;  $b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{13}$ ;  $b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}$ . При реалізації обох «напівреплік» можна отримати роздільні оцінки для лінійних ефектів і ефектів взаємодії, як і в повному факторному експерименті  $2^3$ .

Об'єднання цих двох «напівреплік» і є повним факторним експериментом  $2^3$ .

Матриця з восьми дослідів для чотирифакторного планування буде «напівреплікою» від повного факторного експерименту  $2^4$ , а для п'ятифакторного планування – «чверть реплікою» від  $2^5$ . В останньому випадку два лінійних ефекти прирівнюються до ефектів взаємодії. Для позначення дробових реплік, в яких  $p$  лінійних ефектів прирівняні до ефектів взаємодії, зручно користуватися умовним позначенням  $2^{k-p}$ . Так, «напіврепліка» від  $2^6$  запишеться у вигляді  $2^{6-1}$ , а «чверть репліка» від  $2^5$  - у вигляді  $2^{5-2}$ .

Таким чином, спосіб скорочення кількості експериментів можна сформулювати у вигляді загального правила.

Щоб скоротити кількість дослідів, потрібно додатково ввести в експеримент фактор і варіювати як вектор-стовпець матриці відповідної взаємодії, яким можна знехтувати. Тоді зміна рівнів нового фактора визначиться знаками цього вектор-стовпця.

При виборі дрібних реплік необхідно визначити і проаналізувати з урахуванням апріорної інформації схему заміщення оцінок коефіцієнтів моделі. З цією метою слід обчислити генеруючі співвідношення, які показують, з яким з ефектів змішаний даний ефект.

У завданнях з великою кількістю факторів вибір взаємодії для насичення плану вирішується непросто. Слід пам'ятати, що основне положення при виборі взаємодій в загальному випадку полягає у такому. При введенні в експеримент нових факторів слід виділяти їм стовпці матриці, що належать взаємодій з більш високим порядком. Так, уводячи 4-й фактор у план  $2^3$ , слід варіювати  $x_4$  як стовпець матриці з взаємодією третього порядку  $x_1x_2x_3$ , тобто  $X_4 = x_1x_2x_3$ , оскільки припущення про відсутність взаємодії  $x_1x_2x_3$  більш реально порівнянні, наприклад з взаємодією  $x_1x_2$ .

### 6.7 Рототабельний центральний композиційний план

При дослідженні екстремальної області часто інтерес являє оцінка не коефіцієнтів отриманої регресійної моделі, а самої функції відгуку. Крім того, на практиці часто можна значно спростити регресійну модель шляхом повороту координатних осей, тобто перетворенням координат. Рототабельне планування, що забезпечує похибку передбачення вихідної величини за рівнянням регресії, залежить лише від відстані точки факторного простору до центру експерименту і дозволяє прогнозувати з однаковою точністю значення функції відгуку, а отже, перетворювати систему координат з метою спрощення рівняння регресії.

Основною умовою рототабельності планів є інваріантність нормованої інформаційної матриці ( $\Phi$ ) і кореляційної матриці ( $\Phi^{-1}$ ) до обертання прямокутних осей щодо початку координат, зведеного в базову точку. Виходячи з умови інваріантності матриць до обертання системи координат, точність оцінювання коефіцієнтів регресії при обертанні також не змінюватиметься. Слід при цьому зазначити, що зміна моменту масштабу вхідних змінних призводить до втрати властивості рототабельності. Таким чином, необхідно підтримувати сталість масштабу завдання незалежних змінних при проведенні всього експерименту.

Нормована матриця ( $\Phi$ ) повинна мати деякі властивості, щоб бути інваріантною до ортогонального перетворення (обертання).

Рототабельні плани - це плани, у яких точки плану розташовуються на колі (сфері, гіперсфері). У рототабельного плану першого порядку точки плану розташовуються на одному колі (сфері, гіперсфері) радіусом  $R$ :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{iV}^2} = \text{const} = R,$$

де  $V=1, \dots, N$  – номер точки плану;  $i=1, \dots, n$  – номер фактора.

У такому випадку точність оцінювання функції відгуку по будь-якому напрямку факторного простору (для всіх точок плану) однакова.

## 6.8 Експерименти з симплекс-плануванням

Для визначення експериментальної області можуть використовуватися геометричні фігури, відмінні від квадрата, куба і гіперкуба, що застосовуються в ортогональних планах  $2^k$ . У симплекс-плануванні розміщення дослідів експерименту здійснюється у вершинах регулярного (правильного) симплекса.

Симплекс - це безліч  $k+1$  незалежних точок, що утворюють опуклу фігуру в  $k$ -вимірному просторі. Симплекс називається регулярним, якщо відстані між вершинами фігури однакові між собою.

Для двох незалежних змінних регулярний симплекс – рівносторонній трикутник, для трьох змінних – тетраедр і т. д.

Насичені ортогональні плани  $2^{3-1}$ ,  $2^{7-4}$ ,  $2^{15-11}$ , ... утворюють регулярні симплекси.

Процедура побудови матриці симплекс-плану може бути пояснена на прикладі двох незалежних змінних. Рівносторонній трикутник у площині кодованих змінних  $x_1$  і  $x_2$  можна розташувати так, щоб для вектор-стовпців, елементами яких є координати вершин, виконувалися умови симетричності і ортогональності:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & b \\ 0 & -2b \end{bmatrix}.$$

Значення  $a$  і  $b$  можуть бути обчислені з умови нормування  $\sum_{i=1}^N x_{i1}^2 = \sum_{i=1}^N x_{i2}^2 = N$ , при якому оцінювання коефіцієнтів  $b_j$  лінійної моделі будуть мати однакові дисперсії. З урахуванням цієї умови для стовпців матриці отримаємо  $2a^2=6b^2=3$  і, отже, матрицю незалежних змінних  $x_1, x_2$ :

$$\begin{bmatrix} 1,288 & 0,707 \\ -1,288 & 0,707 \\ 0 & -1,414 \end{bmatrix}.$$

Для зручності слід провести масштабування елементів матриці з тим, щоб отримати правильний симплекс, вписаний в коло одиничного радіуса.

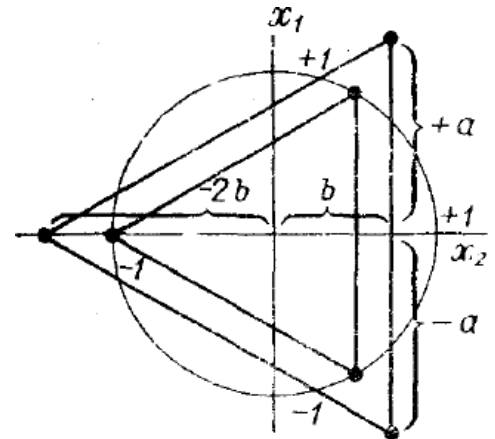


Рисунок 6.6 – Геометричне зображення симплекса

Після поділу всіх елементів на 1,414 отримуємо матрицю симплекс-планування:

Номер досліджу	Матриця симплекс-плану			Вихід $y_i$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	
1	+1	+0,866	0,500	$y_1$
2	+1	-0,866	0,500	$y_2$
3	+1	0	-1,000	$y_3$

Геометрична інтерпретація симплекса показана на рисунку 6.6. Для чотирьох змінних вихідна матриця симплекса матиме вигляд

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & -2a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & -3a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -4a_4 \end{bmatrix}.$$

З умови нормування отримаємо  $2a_1^2 = 6a_2^2 = 12a_3^2 = 20a_4^2 = 5$ , звідки  $a_1=1,580$ ,  $a_2=0,912$ ,  $a_3=0,644$ ,  $a_4=0,500$ .

Визначивши значення  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  після масштабування розподілом усіх елементів на 2,00, отримуємо таку матрицю планування:

Номер досліджу	Матриця симплекс-плану					Вихід $y_i$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
1	+1	0,790	0,456	0,322	0,250	$y_1$
2	+1	-0,790	0,456	0,322	0,250	$y_2$
3	+1	0	-0,912	0,322	0,250	$y_3$
4	+1	0	0	-0,966	0,250	$y_4$
5	+1	0	0	0	-1,000	$y_5$

Матриця центрованого K-симплекса, вписаного в сферу одиничного радіуса, може бути записана в загальному вигляді:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k \\ -a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k \\ 0 & -2a_2 & a_3 & \dots & a_k \\ 0 & 0 & -3a_3 & \dots & a_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -ka_k \end{bmatrix}.$$

Зважаючи на властивості ортогональності, симетричності і нормування матриці симплекс-плану обчислення коефіцієнтів лінійної регресійної моделі, аналіз її придатності для опису результатів експерименту проводяться за аналогією з повним факторним експериментом. Симплекс-планування є досить ефективним засобом досягнення областей екстремуму. Відзначимо переваги і недоліки послідовного симплексного методу.

Переваги:

- використовується мінімальна кількість дослідів для визначення напрямку руху порівняно з іншими планами. Введення нового фактора потребує постановки тільки одного додаткового дослідів;
- метод має просту обчислювальну процедуру;
- досить легко враховуються обмеження на область зміни змінних;
- процедура методу дозволяє легко включати або виключати з розгляду ті чи інші змінні;
- напрям руху визначається тільки співвідношенням величин функції відгуку в вершинах симплекса, а не їх абсолютними значеннями;
- метод працездатний в умовах дрейфу характеристик об'єкта.

Недоліки:

- реалізація методу не дає інформації про вплив кожної змінної на функцію відгуку;
- рух за правилами симплексного методу дає обмежене уявлення про рельєф поверхні відгуку.

## 7. ЗАСТОСУВАННЯ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Продуктивність програмного забезпечення (ПЗ) є важливим аспектом у розробленні будь-якого програмного продукту. Актуальність питання пояснюється постійно зростаючою складністю і важливістю програмних засобів. Особливу увагу продуктивності програмного забезпечення приділяють:

- в інженерних і наукових розробках, де часто проводяться складні тривалі обчислення, а процесорний час на кластерних системах – дорогий і обмежений;
- у web-додатках, в яких час генерації сторінки критичний для користувача і безпосередньо залежить від обсягів серверних потужностей;
- у вбудованих програмних продуктах і т. д.

Ретельний аналіз продуктивності програмного продукту може істотно скоротити вартість самого устаткування і витрати на підтримку працездатності, збільшити лояльність користувачів ПЗ.

Поняття продуктивності з точки зору ПЗ означає або продуктивність, або реактивність:

- продуктивність - обсяг інформації, що обробляється системою в одиницю часу;
- реактивність - час між наданням системі вхідних даних і появою відповідної вихідної інформації.

Розглянемо як продуктивність ПЗ – реактивність. Такий вибір не є принциповим і єдино можливим, а зроблений лише для спрощення вимірювань в експериментах. Розгляд продуктивності потребує ускладнення процедури проведення тестів, оскільки вимірювання обсягів оброблюваної інформації можливі не завжди. Оцінювання часу оброблення даних системою набагато простіше в реалізації, у тому числі і при автоматизації процесу тестування.

При аналізі ПЗ найбільш очевидним і логічним завданням, що стоїть перед дослідником, буде збільшення продуктивності. Формально, ми маємо задачу оптимізації, а саме – завдання мінімізації часу оброблення вхідної інформації програмною системою. Таким чином, критерієм оптимізації є деяка функція

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min, \quad (7.1)$$

де  $y$  – час оброблення посередньої інформації;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - усі параметри (фактори), які прямо або непрямо можуть впливати на продуктивність системи;

$x_i \in [a_i, b_i]$  – область визначення  $i$ -го фактора, що є обмеженням завдання.

Вибір усієї сукупності факторів, що впливають на продуктивність програми, не є очевидною проблемою. Як правило, сучасне ПЗ – це надзвичайно складна система з величезною кількістю зв'язків і залежностей. І справа не тільки в складності самого програмного продукту. Будь-яка програма має середовище виконання мови програмування (runtime), функціонує в операційній системі, взаємодіє з іншими сервісами і ПЗ - усі ці елементи також є окремими складними системами з не меншою кількістю внутрішніх зв'язків і залежностей. Якщо ж додати ще й взаємні залежності факторів (які можуть бути не тільки лінійними), то отримуємо неймовірну кількість усіляких комбінацій факторів.

Для прикладу розглянемо програму, що працює з базою даних (БД) і проводить статистичну обробку інформації, що зберігається в цій базі. Прикладами впливу на продуктивність факторів можуть бути:

- обсяг оперативної пам'яті комп'ютера;
- швидкість доступу до жорсткого диска;
- максимальна частота роботи і середнє завантаження процесора;
- настройки СУБД і т. д.

Можливість залежностей між цими факторами очевидна.

Наприклад, збільшення обсягу оперативної пам'яті призводить до уповільнення необхідності частого доступу до жорсткого диска, а отже, зменшення впливу відповідного фактора.

Для пошуку оптимальних значень факторів, що діють на продуктивність факторів, тобто для вирішення задачі оптимізації (7.1) можна запропонувати такі варіанти:

- повний перебір усіх можливих комбінацій значень факторів, що впливають на продуктивність факторів;
- випадковий вибір деякої кількості комбінацій і подальший вибір найкращого варіанта;
- аналітичне дослідження системи;
- застосування спеціалізованих програмних засобів;
- використання математичних моделей.

Усі перелічені варіанти мають свої переваги і недоліки. Використовуючи повний аналіз, можна стверджувати, що шукані параметри будуть знайдені, однак при великій кількості факторів і варіантів їх значень кількість усіх можливих комбінацій може бути занадто велика, а проведення експериментів займе дуже багато часу. Кількість усіх можливих комбінацій  $N$  можна знайти за комбінаторними правилами: вже при 5 факторах і 5 можливих значеннях кожного фактора одержимо 3125 комбінацій.

При випадковому виборі оптимальної комбінації велика ймовірність того, що отримане рішення буде далеко від глобального оптимуму.

Аналітичне дослідження системи часто або складне або неможливе при аналізі вже існуючих продуктів, без вихідного коду. До того ж подібний підхід потребує повного розуміння дослідником усіх використовуваних у ПЗ алгоритмів, зв'язків і залежностей компонентів.

Спеціальні програмні засоби дозволяють отримати лише деяку статистичну інформацію про виконання програмного коду: кількість викликів методів, середній час виконання методів і т. д. Оптимізація у цьому випадку зводиться до виявлення так званих «вузьких місць» і оптимізації використовуваних алгоритмів. Подібний підхід є досить популярним, але не дозволяє отримати шукане рішення задачі.

Таким чином, основними недоліками запропонованих методів вирішення є:

- надмірно великий час проведення вимірювань;
- спостереження чи здатність дослідника, що робить висновки на основі аналізу програми;
- складність застосування та використання.

Для подолання перелічених вище складнощів і вирішення поставленого завдання пропонується використовувати апарат, розроблений в теорії математичного планування експерименту (МПЕ).

Зупинимось докладніше на питанні застосування МПЕ до аналізу продуктивності ПЗ. Одна з основних ідей планування експерименту полягає у використанні для досліджуваного об'єкта кібернетичної абстракції «чорної скриньки».

Така абстракція передбачає відмову від розгляду внутрішніх механізмів досліджуваного явища або об'єкта через велику складність. Аналіз явища зводиться до аналізу вхідних параметрів, що впливають на об'єкт (фактори) і вихідні характеристики (відгуки).

Для застосування МПЕ необхідне дотримання ряду умов:

- відтворюваності дослідів;
- керованості факторів;
- вимірності вихідних характеристик і можливості висловити її одним числом;
- однозначності і сумісності факторів, і т. д.

Проаналізувавши аналогії, можна зробити висновок про можливість розгляду програмної системи як «чорної скриньки». Тоді при виконанні зазначених вище вимог для дослідження продуктивності можна використовувати весь існуючий апарат МПЕ.

Як приклад для відпрацювання методики використання МПЕ при аналізі продуктивності програмної системи розглянемо web-додаток, що є частиною проекту «Професійні клуби».

### **Етап 1.** Аналіз апріорної інформації.

При аналізі апріорної інформації про програмний продукт стало відомо:

- ПЗ є web-додатком, написаним мовою програмування PHP;
- ПЗ виконується на web-сервері Apache, інтерпретатор PHP підключений як модуль;
- ПЗ використовує СУБД MySQL для зберігання даних;



- існує можливість включення кешування даних засобами самого додатка.

Як математичну модель експерименту будемо використовувати найпростішу - лінійну модель без залежностей між факторами. Тоді ця задача зводиться до відшукування значень коефіцієнтів  $k_i$  рівняння регресії:

$$y = k_0 + k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + k_5x_5. \quad (7.2)$$

Фактори з найбільшими значеннями будуть найсильніше впливати на вихідну характеристику.

### Етап 2. Вибір діючих факторів.

У таблиці 7.1 наведено набір діючих факторів, обраних унаслідок аналізу апріорної інформації про ПЗ.

Таблиця 7.1 – Опис ПЗ із зазначенням факторів

Фактор	Опис
$x_1$	MySQL key_buffer_size місткість пам'яті, виділеної для зберігання індексів [6]
$x_2$	MySQL table_cache кількість постійно відкритих таблиць бази даних [6]
$x_3$	MySQL query_cache_limit Параметр налаштування СУБД, що визначає максимальну місткість пом'яти для кешування результатів запитів [6]
$x_4$	Кешування даних додатком Може бути або увімкнено або вимкнено
$x_5$	Web-сервер і метод запуску інтерпретатору PHP. Досліджуваний додаток здатний запускатися двома способами: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Web-сервер Apache + модуль PHP</li> <li>• Web-сервер Nginx + php-fpm/</li> </ul>

### Етап 3. Вибір верхнього і нижнього рівнів для факторів.

Тепер необхідно вибрати верхній і нижній рівні для кожного фактора. Тут і далі будемо використовувати позначення, прийняті в МПЕ:

- +1 відповідає верхньому рівню фактора;
- -1 відповідає нижньому рівню фактора.

Таблиця 7.2 – Аналіз ПЗ за факторами

Фактор	Верхній рівень	Нижній рівень
$x_1$	265 Мб	16 Мб
$x_2$	300	64
$x_3$	64 Мб	1 Мб
$x_4$	Кеш включений	Кеш вимкнутий
$x_5$	Nginx + php – fpm	Apache + mod_php

**Етап 4.** Складання матриці планування і проведення експериментів.  
У таблиці 7.3 дано результати проведення серії експериментів.

Таблиця 7.3 – Результати серії експериментів

№ п/п	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	y	№ п/п	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	y
1	-1	-1	-1	-1	-1	6,909456902	17	+1	-1	-1	-1	-1	6,956250343
2	-1	-1	-1	-1	+1	6,265920885	18	+1	-1	-1	-1	+1	6,27117213
3	-1	-1	-1	+1	-1	1,046864681	19	+1	-1	-1	+1	-1	1,049605346
4	-1	-1	-1	+1	+1	0,959287777	20	+1	-1	-1	+1	+1	0,960128005
5	-1	-1	+1	-1	-1	6,922491238	21	+1	-1	+1	-1	-1	6,94905457
6	-1	-1	+1	-1	+1	6,292138541	22	+1	-1	+1	-1	+1	6,288483698
7	-1	-1	+1	+1	-1	1,047327693	23	+1	-1	+1	+1	-1	1,048429732
8	-1	-1	+1	+1	+1	0,959178464	24	+1	-1	+1	+1	+1	0,959984639
9	-1	+1	-1	-1	-1	6,947828159	25	+1	+1	-1	-1	-1	6,944574752
10	-1	+1	-1	-1	+1	6,269961421	26	+1	+1	-1	-1	+1	6,281574535
11	-1	+1	-1	+1	-1	1,047032595	27	+1	+1	-1	+1	-1	1,047937875
12	-1	+1	-1	+1	+1	0,960076244	28	+1	+1	-1	+1	+1	0,960813348
13	-1	+1	+1	-1	-1	6,954160943	29	+1	+1	+1	-1	-1	6,952602925
14	-1	+1	+1	-1	+1	6,278223336	30	+1	+1	+1	-1	+1	6,284795263
15	-1	+1	+1	+1	-1	1,048019483	31	+1	+1	+1	+1	-1	1,047952991
16	-1	+1	+1	+1	+1	0,960559206	32	+1	+1	+1	+1	+1	0,960591927

**Етап 5.** Аналіз результатів.

Коефіцієнти рівняння регресії (7.3) можуть бути знайдені як

$$k_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji}y_i}{N} \quad j = 1, \dots, k. \quad (7.3)$$

Результат визначення коефіцієнтів наведено в таблиці 7.4 і показано на рисунку 7.1.

Таблиця 7.4 – Отриманий результат

$k_0$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
3,97361211	0,0519711	0,0245041	0,0034686	-2,9182692	-0,2483070

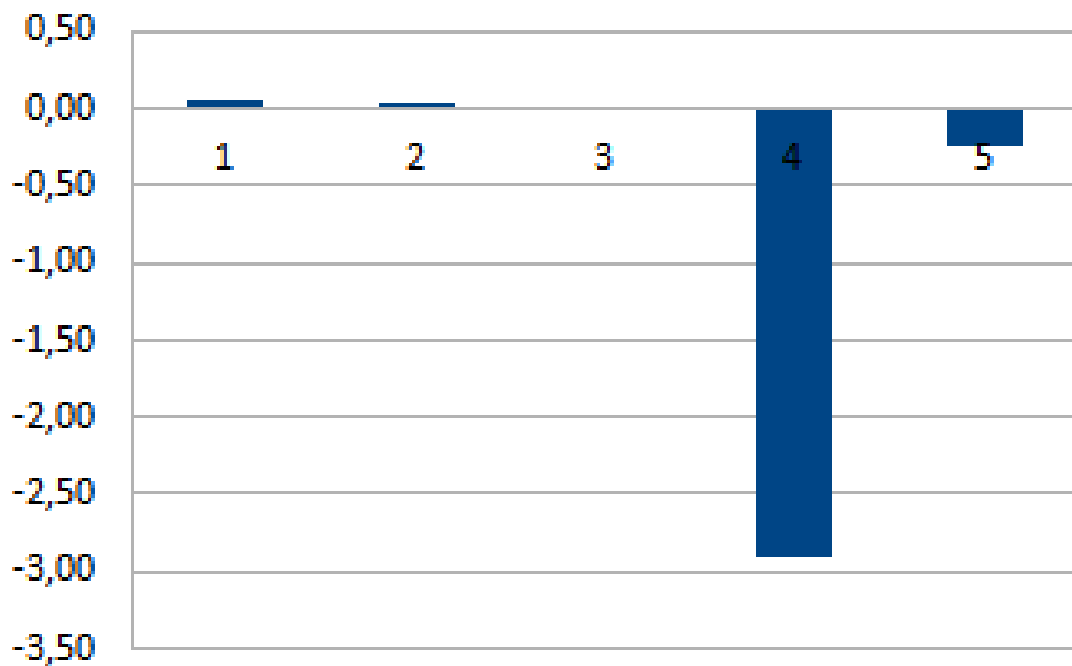


Рисунок 7.1 – Коефіцієнти рівняння регресії

#### **Етап 6.** Висновок.

З рисунка 7.1 видно, що основний внесок у час генерації web-сторінки робить чинник  $x_4$ , що характеризує кешування даних у додатку. Негативне значення коефіцієнта регресії  $b_4$  означає, що цей параметр зменшує функцію відгуку «чорної скриньки». У нашому прикладі це означає зменшення часу генерації сторінки.

## 8. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАХОДІВ

(згідно з робочою програмою)

з дисципліни «Основи планування експерименту»

### **Змістовний модуль 1:**

1. Основні визначення і терміни планування експерименту.
2. Розкрити термін «експеримент».
3. Описати необхідні умови для опису об'єкта дослідження.
4. Математична модель, розкрити термін.
5. Який експеримент називається активним і керованим.
6. Розкрити терміни «змінна» і «дані».
7. Які бувають вимірювання, умови.
8. Розкрити поняття «непрямої вимір», їх умови.
9. Перерахувати типи похибок вимірювань.
10. Розкрити правила округлення чисел. Навести порядок оброблення результатів вимірювань.
11. Абсолютна похибка, гранична абсолютна похибка.
12. Відносна похибка.
13. Випадкові помилки. Записати чотири властивості випадкових помилок.
14. Грубі помилки, розкрити поняття.
15. Нормальна крива помилок. Навести допущення.
16. Середньоквадратичні помилки.
17. Показник точності, розкрити термін.
18. Найбільш імовірне значення вимірюваної величини і оцінювання точності вимірювань.
19. Розкрити поняття «довірчий інтервал» і «довірча ймовірність».
20. Фактори, які вони бувають.
21. Адекватність математичної моделі. Розкрити поняття.
22. Матриця планування експерименту, які властивості вона повинна мати. Записати їх.
23. Занотувати всі записи математичного сподівання.
24. Властивості математичного сподівання.
25. Що таке «щільність розподілу»?

### **Змістовний модуль 2:**

1. Нормальний розподіл параметрів у математичній статистиці.
2. Математичне сподівання.
3. Описати  $\chi^2$ -розподіл.
4. Описати розподіл Стюдента.
5. F-розподіл. Розкрити суть.
6. Властивості однофакторного експерименту.

7. Рівняння регресії і поняття лінійної моделі.
8. Побудова лінійного рівняння регресії.
9. Метод найменших квадратів.
10. Максимальне правдоподібне визначення параметрів МНК.
11. Основні положення багатофакторного експерименту.
12. Об'єкт з одним відгуком, вимоги до відгуку.
13. Вимоги до сукупності факторів.
14. Поверхня відгуку і завдання оптимізації.
15. Багатофакторний експеримент.
16. Оброблення багатофакторного експерименту.
17. Послідовність оброблення даних багатофакторного експерименту.
18. Порядкове середнє значення і дисперсія.
19. Перевірка однорідності дисперсій.
20. Обчислення  $b$ -коефіцієнта.
21. Які умови повинні бути виконані при перевірці адекватності моделі.
22. Дробовий факторний експеримент.
23. Експерименти з симплекс-плануванням.
24. Організація експерименту для пошуку оптимальних умов.
25. Аналіз продуктивності програмного забезпечення з урахуванням основ планування експерименту.

## ВИСНОВКИ

Автори запропонованого навчального посібника з основ планування експерименту переслідували основну мету – надбання і зміцнення знань і навичок при вивченні статистичних методів побудови емпіричних формул на базі теорії вірогідності і статистики як прикладних наук, необхідних при розробленні програмного забезпечення для виконання розрахункових та експериментальних завдань у проектуванні технічних систем.

Основним завданням вивчення дисципліни «Основи планування експерименту» було освоєння теоретичних засад планування експерименту, видів експериментів, проведення експерименту, оброблення результатів експериментальних даних за допомогою електронних таблиць і спеціалізованих статистичних пакетів.

Унаслідок вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати:

- види та вимоги до планування експерименту, методи планування експерименту;
- задачі з декількома вхідними даними, перетворення приватних відгуків і їх узагальнені структури, шкала бажаності;
- види помилок при обробленні вимірювань і результатів спостережень;
- закони розподілу випадкових величин і методи їх вживання;
- етапи побудови моделей, процесів і систем, властивості моделей, методи інтерполяції і апроксимації;
- методи регресійного і кореляційного аналізу;

уміти:

- будувати математичні моделі різних структур з використанням методів системного аналізу та синтезу;
- виконувати експерименти на діючих об'єктах за заданими методикам і обробляти результати із застосуванням сучасних інформаційних технологій і технічних засобів;
- використовувати основні прийоми оброблення та подання експериментальних даних.

мати уявлення:

- про певні математичні методи (оптимізації, інтегрування тощо) для розв'язання задач проектування і випробування;
- про використання електронних таблиць і спеціалізованих статистичних пакетів.

**Міждисциплінарні зв'язки:** дисципліні передують курси «Теорія вірогідності», «Емпіричні методи програмної інженерії», «Методи оптимізації й дослідження операцій». Дисципліна потрібна для подальшого написання магістерської роботи та застосування методів оброблення результатів усіх видів експериментальних досліджень.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Шенк, Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М. : Изд-во «Мир», 1972. – 381 с.
2. Барабашук, В. И. Планирование эксперимента в технике / В. И. Барабашук, Б. П. Креденцер, В. И. Мирошниченко. – Киев : Техника, 1984. – 200 с.
3. Бородок, В. П. Статистические методы в инженерных исследованиях (лаб. практи.) : учеб. пособие / В. П., Бородок, А. П., Воцинин, А. З. Иванов / под ред. К. Г. Круга. – М. : Высш. шк., 1983. – 216 с.
4. Тихонов, А. Н. Статистическая обработка результатов экспериментов : учеб. пособие / А. Н. Тихонов, М. В. Уфимцев. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 174 с.
5. Спиринов, Н. А. Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента : консп. лекций (отдельные главы из учебника для вузов) / Н. А. Спиринов, В. В. Лавров / под общ. ред. Н. А. Спирина. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2004. – 257 с.
6. Основы моделирования сложных систем : учеб. пособие для студентов вузов / под. общ. ред. И. В. Кузьмина. – Киев : Высш. шк., 1981. – 300 с.
7. Горянов, В. Б. Математическая статистика : учебник для вузов / В. Б. Горянов, И. В. Павлов, Г. М. Цветкова и др. / М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 424 с.
8. Львовский, Е. Н. Статистические методы построения эмпирических формул : учебник для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. / Е. Н. Львовский. – М. : Высш. шк., 2008. – 239 с.
9. Новицкий, П. В. Оценка погрешностей результатов измерений : / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л. : Энергоатомиздат, 2011. – 304 с.
10. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : / Е. С. Вентцель. – М. : Физматгиз, 2000. – 464 с.
11. Математическая статистика : учебник / В. М. Иванова, В. Н. Калинина, Л. А. Нешумова и др. – М. : Высш. шк., 2011. – 371 с.
12. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М. : Мир, 1994. – 408 с.
13. Вардзинский, Р. Статистические вычисления в среде Excel / Р. Вардзинский. – СПб. : Питер, 2008. – 608 с.
14. Херхагер, М. Mathcad 2000 : полное руководство : пер. с нем. / М. Херхагер, Х. Партолль. – Киев : изд. группы ВНУ, 2000. – 416 с.
15. Левин, С. В. Анализ временных рядов. Модели авторегрессии : метод. указания к выполнению домашнего задания по курсу «Эмпирические методы программной инженерии» / С. В. Левин, О. В. Лучшева. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т «Харьков. авиац. ин-т». 2010. – 20 с.
16. Левин, С. В. Эмпирические методы программной инженерии : консп. лекций / С. В. Левин, О. В. Лучшева. 2012. – 50 с.

Навчальне видання

**Сінченко Світлана Володимирівна  
Шпілінська Ольга Леонідівна**

## **ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Редактор С. П. Гевло

Зв. план, 2020

Підписано до видання

Ум. друк. арк. 4. Обл.-вид. арк. 4,5. Електронний ресурс

---

Видавець і виготовлювач  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
<http://www.khai.edu>  
Видавничий центр «ХАІ»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001



**С. В. Сінченко, О. Л. Шпільнська**

**ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ**

2020