

В. К. Волосюк, В. В. Павліков, С. С. Жила

**МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ
У ПАСИВНИХ РАДІОМЕТРИЧНИХ
ПРИСТРОЯХ І СИСТЕМАХ**

Частина 3

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. К. Волосюк, В. В. Павліков, С. С. Жила

МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ
У ПАСИВНИХ РАДІОМЕТРИЧНИХ ПРИСТРОЯХ І СИСТЕМАХ

Частина 3

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. К. Волосюк, В. В. Павліков, С. С. Жила

МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ
У ПАСИВНИХ РАДІОМЕТРИЧНИХ ПРИСТРОЯХ І СИСТЕМАХ

Частина 3

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК 621.3.095.4

В75

Розглянуто основи теорії оптимального оцінювання параметрів просторово-розподілених джерел радіотеплового випромінювання у ширококугових системах апертурного синтезу. Досліджено алгоритми й структури систем оптимального оброблення сигналів радіотеплового випромінювання природних середовищ у багатоелементних просторово-розподілених ширококугових радіометричних системах. Висвітлено теорію і методи оцінювання потенційної точності вимірювання параметрів радіотеплових сигналів у розглянутих засобах їх оброблення.

Для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають курси «Математичні методи оптимізації та прийняття рішень у радіосистемах», «Радіотехнічні системи дистанційного зондування» і суміжні курси.

Рецензенти: д-р техн. наук В. М. Биков,
д-р техн. наук М. В. Руженцев

Волосяк, В. К.

В75 Методи оптимальної обробки сигналів у пасивних радіометричних пристроях і системах [Текст] : навч. посібник : в 3 ч. / В. К. Волосяк, В. В. Павліков, С. С. Жила. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. – Ч. 3. – 89 с.

Розглянуті основи теорії оптимального оцінювання параметрів просторово-розподілених джерел радіотеплового випромінювання в ширококугових системах апертурного синтезу. Досліджені оптимальні алгоритми і структури систем оптимальної обробки сигналів радіотеплового випромінювання природних середовищ у багатоантенних просторово-розподілених ширококугових радіометричних системах. Освітлені теорія й методи оцінок потенційної точності вимірювання параметрів радіотеплових сигналів у розглянутих засобах їх обробки.

Для студентів вищих навчальних закладів, що вивчають курси «Математичні методи оптимізації й прийняття рішень у радіосистемах», «Радіотехнічні системи дистанційного зондування» і суміжні курси.

Іл. 1. Бібліогр. : 18 назв.

УДК 621.3.095.4

© Волосяк В. К., Павліков В. В.,
Жила С. С., 2020

© Національний аерокосмічний
університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2020

ВСТУП

На відміну від активних радіотехнічних систем, які випромінюють зондувальні, а потім приймають і обробляють відбиті сигнали з метою визначення необхідної інформації, пасивні радіометричні приймальні пристрої й системи реєструють власне електромагнітне випромінювання різних об'єктів і природних середовищ. Їх широко застосовують для розв'язку різних задач дистанційного зондування в радіолокації, радіонавігації, радіоастрономії, медицині й ін. Вимоги до якісних показників цих радіоелектронних засобів стають усе більш високими, і їх подальше вдосконалювання можливе лише на шляху застосування сучасних методів статистичної теорії оптимізації й відповідних постановок і розв'язків задач математичного синтезу пристроїв і систем.

Власне електромагнітне випромінювання різних об'єктів і природних середовищ у радіодіапазоні або радіотеплові сигнали – це надширокосмугові випадкові процеси, що є результатом випромінювання значної кількості рухомих зарядів, що входять до складу будь-якої речовини. Статистичні характеристики таких сигналів подібні до статистичних характеристик внутрішніх шумів радіоприймальних обладнань, а їх середня потужність може бути порівнянна з потужністю цих шумів (наприклад, у задачах дистанційного зондування) або на кілька порядків менше (наприклад, у радіоастрономії).

Найпростішими й первинними радіотехнічними засобами реєстрації сигналів радіотеплового випромінювання досліджуваних нагрітих тіл є радіометри. Це радіоприймальні обладнання прямого підсилення або супергетеродинного типу високої чутливості, що містять малOSHумливі підсилювачі із заданими амплітудно-частотними характеристиками. Радіометри як обладнання можуть мати на вході одну антену й вирішувати автономні задачі, наприклад, задачі оцінок яскравісної температури досліджуваного об'єкта і його електрофізичних або інших параметрів, а також можуть входити до складу антенних решіток і складних багатопозиційних і багатоантенних радіометричних систем, розташованих на великих площах.

Радіометричні обладнання й радіометричні системи по спостережуваній суміші корисних шумових сигналів, внутрішніх шумів і зовнішніх перешкод

вирішують задачі виявлення, розпізнавання, розділення, оцінок різних параметрів джерел власного випромінювання, а також формування їх радіояскравістних зображень.

Відомо багато різних ефективних методів обробки радіотеплових шумових сигналів, які реалізовані в радіометрах компенсаційного, модуляційного типів, у кореляційних радіометрах і ін. Більшість із них отримані шляхом евристичних розв'язків або в рамках класичної кореляційної теорії випадкових процесів. Однак у цей час досить актуальні багато важливих питань оптимального синтезу алгоритмів обробки шумових сигналів у радіометричних системах, що базуються на сучасних підходах і статистичних висновках по прийняттю оптимальних рішень і формуванню оптимальних оцінок параметрів випадкових процесів і їх імовірнісних розподілів. Очевидно, що в результаті розв'язку оптимізаційних задач статистичного синтезу методів, алгоритмів, обладнань і радіотехнічних систем будь-якого призначення можна виявити їхні потенційні можливості, знайти шляхи підвищення їх ефективності й добитися більш високих показників точності, що дозволяє покращити роздільну здатність, ймовірності прийняття безпомилкових розв'язків і ін. Слід зазначити, що в розв'язки цих задач входить оптимізаційний синтез не тільки складних радіометричних систем, але й найпростіших пристроїв – радіометрів.

У першій [1] і другій [2] частинах навчального посібника були викладені основи фізики радіотеплового випромінювання і елементарні принципи його приймання, а також необхідний математичний апарат опису радіотеплових полів і сучасні методи статистичної оптимізації обробки сигналів у радіотехнічних системах.

У цій частині посібника розглянуті задачі оптимального синтезу просторово-розподілених радіометричних систем дистанційного зондування. Ці задачі є практичним додатком для навчальних курсів «Математичні методи оптимізації і прийняття рішення у радіосистемах», «Радіотехнічні системи дистанційного зондування» і інших, основою для виконання бакалаврських і дипломних робіт, а також можуть бути використані аспірантами й здобувачами при підготовці й написанні кандидатських дисертацій.

11. ОПТИМАЛЬНІ ОЦІНКИ ПРОСТОРОВО-РОЗПОДІЛЕНИХ ПАРАМЕТРІВ ПРОТЯЖНИХ ДЖЕРЕЛ ВЛАСНОГО РАДІОТЕПЛООВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ В ШИРОКОСМУГОВИХ І НАДШИРОКОСМУГОВИХ СИСТЕМАХ АПЕРТУРНОГО СИНТЕЗУ

Вивчаються можливості синтезування оптимальних і квазіоптимальних алгоритмів оцінки електрофізичних параметрів і статистичних характеристик просторово-протяжних об'єктів у вигляді функцій просторових координат \vec{r} , або напрямних косинусів $\vec{\vartheta}$, тобто $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(\vec{r}) = \|\lambda_k(\vec{r})\|$ або $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}) = \|\lambda_k(\vec{\vartheta})\|$. Такими параметрами можуть бути діелектрична проникність, провідність, вологість і т.п. Оцінюваними статистичними характеристиками можуть бути температура, середньоквадратичні висоти нерівностей рельєфу поверхні, їх радіуси кореляції й ін. Зокрема, ними можуть бути безпосередньо самі радіозображення земних покривів або небесної сфери у вигляді просторових розподілів радіояскравості $B[\vec{r}(\vec{\vartheta})]$ або радіояскравісної температури $T_J[\vec{r}(\vec{\vartheta})]$, зв'язаних між собою формулою Релея – Джинса. Розв'язок цієї задачі приводить до необхідності побудови багатоканальних багатопроменевих систем. Ці алгоритми отримані відповідно до стаціонарних (нерухливих) багатоканальних радіометрів з антенними решітками, спрямованими на досліджувані природні середовища, і обробкою, характерною для систем апертурного синтезу [3–8], що одержали найбільше поширення в радіоастрономії. Такі ж системи й алгоритми їх функціонування можуть бути використані для розв'язку задач дистанційного зондування. Особливістю обробки є застосування перетворень V_F, V_F^{-1} [9] і одержання алгоритмів і структур систем обробки надширокосмугового випромінювання тобто в ситуаціях, коли умова просторово-часової вузькосмуговості (ПЧВ), або, що теж саме, умова квазімонохроматичного наближення (КМН) [9, 10], не виконується.

11.1. Моделі рівнянь спостереження і їх статистичні характеристики

Для випадків приймання полів власного випромінювання поверхонь просторово-розподіленими антенними системами найпростіша модель сукупності прийнятих корисних сигналів і перешкод (рівняння спостереження) має вигляд

$$\begin{aligned}
\vec{u}_\Sigma(t, \vec{r}') &= \|u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')\| = \vec{u}_s(t, \vec{r}', \vec{\lambda}) + \vec{u}_n(t, \vec{r}') + \vec{n}_p(t, \vec{r}'); \\
\vec{u}_s(t, \vec{r}', \lambda) &= \|u_{ks}(t, \vec{r}', \vec{\lambda})\| = \|u_{kD}(t, \vec{r}', \vec{\lambda})\| + \|u_{k\phi}(t, \vec{r}')\|; \\
\vec{u}_n(t, \vec{r}') &= \|u_{kn}(t, \vec{r}')\|; \\
\vec{n}_p(t, \vec{r}') &= \|n_{kp}(t, \vec{r}')\|; \\
\vec{r}' &= (x', y') \in D'; \quad t \in (0, T); \quad k = \overline{1, K}.
\end{aligned} \tag{11.1}$$

Усі процеси, що входять у це рівняння, вважаються статистично незалежними однорідними в просторі і стаціонарними в часі випадковими гаусівськими функціями. Індекс k , як і раніше, може відповідати виду поляризації, номеру частотного піддіапазону й т.п. Кількість зареєстрованих процесів $u_{ks}(t, \vec{r}', \vec{\lambda})$ повинна бути такою, щоб забезпечити розв'язок заданої багатопараметричної задачі, тобто оцінити з необхідною точністю необхідне число параметрів $\vec{\lambda} = \|\lambda_k\|$.

Процеси $u_{ks}(t, \vec{r}', \vec{\lambda})$ містять нероздільні між собою корисне випромінювання $u_{kD}(t, \vec{r}', \vec{\lambda})$ досліджуваного середовища й завадове випромінювання $u_{k\phi}(t, \vec{r}')$, що включає у себе зовнішній фон, шуми підсвічування небом, атмосферою, хмарами й ін. Випромінювання підсвічування, якщо в ньому є корисна інформація про оцінювані параметри поверхні, можна включити в корисну складову випромінювання. Уважаємо, що ці процеси спостерігаються не безпосередньо поблизу або в області розкриття антеної системи, а вже після проходження вхідних лінійних частин приймача (ЛЧП) радіометрів, що обмежують спектр прийнятого випромінювання по частоті коефіцієнтами передачі $\dot{K}_k(j2\pi f)$, а також просторову область приймання деяким сектором кутів, заданим функцією спрямованості $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)$. Обмеження по частоті й напрямкам приймання випромінювання є формальним, але доцільним для полегшення й забезпечення математичної коректності розв'язку розглянутих оптимізаційних задач, що є по своїй природі зворотними. Ширина АЧХ $|\dot{K}_k(j2\pi f)|$ може бути будь-якою, але не нескінченною, і відповідати всім визначенням надширокопasmугових, широкопasmугових, багатопasmугових, багато частотних і вузькопasmугових радіометричних систем. Фізично в реальних системах обмеження прийнятого випромінювання по частоті й кутовим напрямкам завжди має місце.

Випромінювання $u_{ks}(t, \vec{r}', \vec{\lambda})$ в спектральній області будемо характеризувати спектрально-кутовою щільністю комплексної амплітуди

$$\dot{A}_{ks}[\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] = \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \dot{A}_{ok}[\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})], \quad (11.2)$$

де $\vec{\mathcal{G}}_0$ – напрямок максимуму функції спрямованості;

$$\dot{A}_{ok}(\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}) = \dot{A}_{kD}(\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}) + \dot{A}_{k\Phi}(\vec{\mathcal{G}}, f) \quad (11.3)$$

– спектрально-кутова щільність комплексної амплітуди на вході антеною системи, що містить корисні $\dot{A}_{kD}(\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda})$ і завадові $\dot{A}_{k\Phi}(\vec{\mathcal{G}}, f)$ складові. Останні фільтруються по частотних і просторових змінних функціях $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)$ і $\dot{K}_k(j2\pi f)$ разом з корисними сигналами випромінювання. Ширина функції спрямованості $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)$ антенної системи визначає сектор огляду досліджуваного просторово-протяжного об'єкта. Цим об'єктом може бути ділянка земної або іншої поверхні при її дистанційному зондуванні або ділянка небесної сфери при розв'язку задач радіоастрономії. Практично функція спрямованості $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)$ широка й відповідає діаграмі спрямованості одиночної елементарної антени, що входить до складу антеною решітки.

Відповідно спектральні яскравості випромінювання мають вигляд

$$B_{ks}[\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] = \left| \dot{K}_k(i2\pi f) \right|^2 \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2 B_{ok}[\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})], \quad (11.4)$$

$$B_{ok}(\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}) = B_{kD}(\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}) + B_{k\Phi}(\vec{\mathcal{G}}, f). \quad (11.5)$$

Доданки в (11.3) і (11.5) важко розділити, тому що вони перебувають в одній і тій же смузі частот.

Процеси $\vec{u}_n(t, \vec{r}') = \|u_{kn}(t, \vec{r}')\|$ в рівнянні спостереження (11.1) – це моделі внутрішніх дельта-корельованих шумів $n_k(t, \vec{r}')$ вхідних елементів і кіл, що мають кореляційні функції $(N_{ok}/2)\delta(t_1 - t_2)\delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)$, що пройшли вхідні ЛЧП просторово-розподілених приймальних пристроїв із коефіцієнтами передачі $\dot{K}_k(j2\pi f) = F^{-1}[h_k(t)]$ й імпульсними характеристиками $h_k(t)$:

$$u_{kn}(t, \vec{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau, \vec{r}') h(t - \tau) d\tau.$$

Спектральні щільності потужності вихідних процесів ЛЧП $u_{kn}(t, \vec{r}')$ у кожній точці \vec{r}' дорівнюють $(N_{ok}/2) \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2$. Кореляційна функція

$$\begin{aligned}
R_{ku_n}(t_1 - t_2, \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) &= \langle u_{kn}(t_1, \vec{r}'_1) u_{kn}(t_2, \vec{r}'_2) \rangle = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle n(\tau_1, \vec{r}'_1) n(\tau_2, \vec{r}'_2) \rangle h_k(t_1 - \tau_1) h_k(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_{0k}}{2} \delta(\tau_1 - \tau_2) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) h_k(t_1 - \tau_1) h_k(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \frac{N_{0k}}{2} H_k(t_1 - t_2) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2), \tag{11.6}
\end{aligned}$$

де

$$H_k(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t_1 - \tau) h_k(t_2 - \tau) d\tau = F^{-1} \left[|K_k(j2\pi f)|^2 \right]. \tag{11.7}$$

Обмеження по частотах і напрямкам приймання процесів, що входять у рівняння спостереження (11.1), функціями $\dot{K}_k(j2\pi f)$ й $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)$ забезпечує коректність оцінок просторово-розподілених параметрів і статистичних характеристик досліджуваних об'єктів як розв'язків зворотних задач. Для забезпечення коректності цих розв'язків також вводяться в рівняння спостереження (11.1) невеликі регуляризуючі добавки $\vec{n}_p(t, \vec{r}') = \left\| n_{kp}(t, \vec{r}') \right\|$ у вигляді незалежних між собою гаусівських білих шумів з кореляційними функціями

$$R_{kp}(t_1 - t_2) = (N_{0kp}/2) \delta(t_1 - t_2) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2). \tag{11.8}$$

Реально для розв'язку цих задач необхідно застосовувати антенні решітки (АР), тобто дискретні антенні системи. У цьому розділі використовується ідеалізована модель рівняння спостереження поля на суцільному континуальному розриві, що дозволяє умовно здійснювати роздільну обробку сигналів у кожній своїй точці $\vec{r}' \in D'$. Якщо приймання поля здійснюється антеною решіткою, що полягає з наборі однакових елементарних антен, то функція спрямованості $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}, f)$ відповідає діаграмі спрямованості однієї елементарної антени. Якщо замість антеною решітки розглядається її математична ідеалізація – суцільний континуальний розкрив, що дозволяє здійснювати роздільну обробку в кожній точці, то функцію $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)$ в цьому ідеалізованому варіанті можна віднести до кожної такої точки не як ізотропну функцію, а як діаграму спрямованості (ДС) реальної елементарної антени. Ця

ідеалізація дозволяє суми замінити інтегралами, що в багатьох випадках полегшує фізичну інтерпретацію отриманих результатів. На заключному етапі синтезу дискретних антенних систем можна перейти від інтегралів до відповідних сум і до швидких алгоритмів їх реалізації.

Обмеження на ступінь ширококуговості не накладається, тобто з самого початку випромінювання покладається надширококуговим. У значній мірі відсутність такого обмеження пов'язане з можливістю застосування V_F -перетворень, які не вимагають виконання умови ПЧВ (КМН).

Відповідно до результатів третього розділу спектрально-кутові щільності комплексної амплітуди $\dot{A}_{ks}(\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda})$ й спектральні яскравості $B_{ks}(\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda})$ джерел випромінювання, що перебувають у зоні Фраунгофера, зв'язані відповідно із прийнятими сигналами $u_{ks}(t, \vec{r}')$ і їх кореляційними функціями $R_{ku_s}(\Delta\vec{r}', \tau, \vec{\lambda})$ перетвореннями V_F і V_F^{-1} :

$$\begin{aligned} f^{-2} c^2 \dot{A}_{ks} [f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] &= V_F [u_{ks}(t, \vec{r}', \vec{\lambda})] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{ks}(t, \vec{r}', \vec{\lambda}) \exp\{-j2\pi f(t + c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{r}')\} dt d\vec{r}', \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$\begin{aligned} u_{ks}(t, \vec{r}', \vec{\lambda}) &= V_F^{-1} \left\{ \dot{A}_{ks} [f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{ks} [f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] \exp\{j2\pi f(t + c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{r}')\} df d\vec{\vartheta}, \end{aligned} \quad (11.10)$$

$$\begin{aligned} f^{-2} c^2 B_{ks} [\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] &= V_F [R_{ku_s}(\Delta\vec{r}', \tau, \vec{\lambda})] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ku_s}(\Delta\vec{r}', \tau, \vec{\lambda}) \exp\{-j2\pi f(\tau + c^{-1}\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}')\} d\tau d\vec{\rho}', \end{aligned} \quad (11.11)$$

$$\begin{aligned} R_{ku_s}(\Delta\vec{r}', \tau, \vec{\lambda}) &= \langle [u_{ks}(\vec{r}'_1, t_1) u_{ks}(\vec{r}'_2, t_2)] \rangle = V_F^{-1} \left\{ B_{ks} [\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{ks} [\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] \exp\{j2\pi f(\tau + c^{-1}\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}')\} df d\vec{\vartheta}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Зауважимо, що радіояскравість $B_{kD}(\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}) = B_{kD}[\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ може залежати не тільки від параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$ як функцій напрямків $\vec{\mathcal{G}}$, але й безпосередньо від $\vec{\mathcal{G}}$. Наприклад, для плоскої поверхні з порівняно повільною зміною діелектричної проникності $\lambda(\vec{\mathcal{G}}) = \varepsilon(\vec{\mathcal{G}})$ радіояскравісні температури $T_{ЯВ(\Gamma)}[\vec{\mathcal{G}}, \varepsilon(\vec{\mathcal{G}})]$ вертикальної і горизонтальної поляризацій ($B(\Gamma)$), пов'язані з радіояскравостями $B_{kDB(\Gamma)}[\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ формулою Релея – Джинса, можна знайти по формулі

$$T_{ЯВ(\Gamma)}[\vec{\mathcal{G}}, \varepsilon(\vec{\mathcal{G}})] = \left\{ 1 - \left| K_{fB(\Gamma)}[\vec{\mathcal{G}}, \varepsilon(\vec{\mathcal{G}})] \right|^2 \right\} T_0, \quad (11.13)$$

де

$$K_{f\Gamma} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}, \quad K_{fB} = \frac{\varepsilon \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}{\varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}} \quad (11.14)$$

є коефіцієнтами відбиття Френеля від однорідної плоскої поверхні.

У цих формулах $\theta = \theta(\vec{\mathcal{G}})$, і їх можна вважати дійсними при порівняно повільній зміні діелектричної проникності $\varepsilon = \varepsilon(\vec{\mathcal{G}})$.

Функцією напрямних косинусів може бути й термодинамічна температура $T_0 = T_0(\vec{\mathcal{G}})$, яка також може бути невідомим параметром, що підлягає оцінюванню. Помітимо, що зв'язки функцій $u_{ks}(t, \vec{r}', \vec{\lambda})$ і $R_{ku_s}(\Delta \vec{r}', \tau, \vec{\lambda})$ з параметрами $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$ в (11.10) і (11.12) – це оператори, а в окремих випадках фіксованих змінних t , \vec{r}' , $\tau = t_1 - t_2$, $\Delta \vec{r}' = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$ – функціонали.

11.2. Загальний розв'язок оптимізаційної задачі оцінок просторово-розподілених параметрів джерел радіотеплового випромінювання, що підлягають дослідженню

Оптимальні оцінки просторово-розподілених параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$ можна одержати в результаті варіаційних розв'язків рівнянь правдоподібності виду

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^K \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} \frac{\delta R_{k\Sigma}[t_1, t_2, \vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]}{\delta \lambda_j(\vec{\mathcal{G}})} W_{k\Sigma}[t_2, t_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{k=1}^K \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} \frac{\delta W_{k\Sigma}[t_1, t_2, \vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]}{\delta \lambda_j(\vec{\mathcal{G}})} u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2.
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Тут $\delta R_{k\Sigma}/\delta \lambda_j$, $\delta W_{k\Sigma}/\delta \lambda_j$ – варіаційні (функціональні) похідні [11–13]. У правій частині рівняння для спрощення розрахунків доцільно розставити номери індексів у послідовності (t_1, t_2) , (t_2, t_1) , (\vec{r}'_1, \vec{r}'_2) , (\vec{r}'_2, \vec{r}'_1) (у дискретному варіанті, як у діагональних елементах добутку матриць). При переході до різницевих аргументів $\tau = (t_1 - t_2) = -(t_2 - t_1)$, $\Delta \vec{r}' = (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) = -(\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1)$ в експонентах V_F -перетворень це полегшить викладення й інтерпретацію отриманих результатів, хоча принципового значення це не має в силу практичної парності кореляційних функцій.

Права частина рівняння (11.15) – це основа оптимального алгоритму обробки прийнятого випромінювання, що містить операції зваженого інтегрування коливань $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$. Між лівої й правої частинами стоїть не знак рівності, а знак прирівнювання « \Rightarrow ». Ліва частина цього рівняння не дорівнює правій, а є її математичним очікуванням. Тому в деяких випадках, де буде необхідно, будемо підкреслювати увагу, що між лівою й правою частинами рівнянь правдоподібності має місце не рівність, а прирівнювання, будемо ставити знак прирівнювання.

Зворотна кореляційна функція знаходиться з рівняння обернення

$$\begin{aligned}
& \int_T \int_{D'} R_{k\Sigma}[t_1, t_2, \vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] W_{k\Sigma}[t_2, t_3, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] dt_2 d\vec{r}'_2 = \\
& = \delta(t_1 - t_3) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_3).
\end{aligned} \tag{11.16}$$

Вважаючи, що поле випромінювання $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ стаціонарне і однорідне з інтервалом кореляції за змінними t і \vec{r}' значно меншими, ніж просторово-часовий інтервал спостереження $T \times D'$, поширимо межі інтегрування до нескінченності і застосуємо перетворення V_F до кореляційної функції рівняння спостереження (11.1). Оскільки процеси, що входять у рівняння спостереження, взаємно незалежні, то на підставі (11.6), (11.8), (11.12) кореляційна функція поля $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
R_{k\Sigma}[t_1 - t_2, \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] &= R_{ku_s}[t_1 - t_2, \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] + \\
&+ R_{ku_n}(t_1 - t_2, \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) + R_{kn_p}(t_1 - t_2, \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) = \\
&= V_F^{-1} \left\{ B_{ks} \left[\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}) \right] \right\} + \\
&+ \frac{N_{0k}}{2} H_k(t_1 - t_2) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) + \frac{N_{0kp}}{2} \delta(t_1 - t_2) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2). \quad (11.17)
\end{aligned}$$

У результаті після застосування V_F -перетворення отримаємо

$$\begin{aligned}
V_F \left\{ R_{k\Sigma}[t_1 - t_2, \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] \right\} &= \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] = \\
= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{k\Sigma}[\tau, \Delta\vec{r}', \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] \exp \left\{ -j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{\vartheta} \Delta\vec{r}'}{c} \right) \right\} d\tau d\Delta\vec{r}' &= \\
= \frac{c^2}{f^2} B_{ks}[f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] + \frac{N_{0k}}{2} \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 + \frac{N_{0kp}}{2}, \quad (11.18)
\end{aligned}$$

де

$$B_{k\Sigma}[f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] = B_{ks}[f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] + \frac{f^2}{c^2} \frac{N_{0k}}{2} \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 + \frac{f^2}{c^2} \frac{N_{0kp}}{2}, \quad (11.19)$$

$$B_{ks}[f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] = \left| \dot{K}_k(i2\pi f) \right|^2 \left| \dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f) \right|^2 B_{ok} \left[\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}) \right]. \quad (11.20)$$

Зворотну кореляційну функцію $W_{k\Sigma}[t_1 - t_2, \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})]$ шукаємо в структурно подібному вигляді (див. формулу (11.12)) як образ перетворення V_F^{-1} деякої спектрально-кутової щільності $B_{Wk}[\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})]$:

$$W_{k\Sigma}[\tau, \Delta\vec{r}', \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{Wk}[f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})] \exp \left[j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{\vartheta} \Delta\vec{r}'}{c} \right) \right] df d\vec{\vartheta}. \quad (11.21)$$

Підставивши в рівняння обернення (11.16) кореляційну й зворотну до кореляційної функції, виражені через їхні образи V_F^{-1} , одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{k\Sigma}(f_1, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}(\vartheta_1)) B_{W\Sigma}(f_2, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vartheta_2)) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_T \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi f_1 \left[(t_1 - t_2) + \frac{\vec{\mathcal{G}}_1(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] + \right. \\
& \left. + j2\pi f_2 \left[(t_2 - t_3) + \frac{\vec{\mathcal{G}}_2(\vec{r}'_2 - \vec{r}'_3)}{c} \right] \right\} df_1 df_2 d\mathcal{G}_1 d\mathcal{G}_2 dt_2 d\vec{r}'_2 = \\
& = \delta(t_1 - t_3) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_3). \tag{11.22}
\end{aligned}$$

Для випадків, коли інтервали кореляції процесів $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ значно менше просторово-часового інтервалу спостереження $T \times D'$, можна прийняти за змінними t_2, \vec{r}'_2 межі інтегрування нескінченними і

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -j2\pi \left[(f_1 - f_2)t_2 + \frac{(f_1 \vec{\mathcal{G}}_1 - f_2 \vec{\mathcal{G}}_2)}{c} \vec{r}'_2 \right] \right\} dt_2 d\vec{r}'_2 = \\
& = c^2 f^{-2} \delta(f_1 - f_2) \delta(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2). \tag{11.23}
\end{aligned}$$

Тоді рівняння (11.22) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{k\Sigma}(f_1, \mathcal{G}_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})) B_{W\Sigma}(f_2, \mathcal{G}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})) \times \\
& \times \exp \left\{ j2\pi \left[f_1 t_1 - f_2 t_3 + \left(\frac{f_1 \vec{\mathcal{G}}_1 \vec{r}'_1 - f_2 \vec{\mathcal{G}}_2 \vec{r}'_3}{c} \right) \right] \right\} \times \\
& \times \frac{c^2}{f^2} \delta(f_1 - f_2) \delta(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2) df_1 df_2 d\vec{\mathcal{G}}_1 d\vec{\mathcal{G}}_2 = \delta(t_1 - t_3) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_3),
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[\cdot] B_{Wk}[\cdot] \exp \left\{ j2\pi f \left[(t_1 - t_3) + \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_3)}{c} \right] \right\} df d\mathcal{G} = \\
& = \delta(t_1 - t_3) \delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_3).
\end{aligned}$$

Застосуємо до обох частин рівняння (11.22) перетворення V_F . У результаті одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\otimes}[\cdot] \exp \left[j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c} \right) \right] df d\vec{\mathcal{G}} \right\} \times$$

$$\times \exp \left[-j2\pi f_1 \left(\tau + \frac{\bar{\mathcal{G}}_1 \Delta \vec{r}'}{c} \right) \right] d\tau d\Delta \vec{r}' = 1, \quad (11.24)$$

де

$$B_{\otimes}[\cdot] = \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[\cdot] B_{Wk}[\cdot]. \quad (11.25)$$

Змінимо порядок інтегрування в лівій частині (11.24) і скористаємося фільтруючою властивістю дельта-функції:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\otimes}[\cdot] df d\bar{\mathcal{G}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ j2\pi \left[(f - f_1)\tau + \frac{(\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{G}}_1)\Delta \vec{r}'}{c} \right] \right\} d\tau d\Delta \vec{r}' = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\otimes}[\cdot] c^2 f^{-2} \delta(f - f_1) \delta(\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{G}}_1) df d\bar{\mathcal{G}} = \frac{c^2}{f^2} B_{\otimes}[\cdot]. \end{aligned}$$

У результаті одержимо

$$\frac{c^2}{f^2} B_{\otimes}[\cdot] = \frac{c^4}{f^4} B_{k\Sigma}[\cdot] B_{Wk}[\cdot] = 1.$$

Остаточно запишемо:

$$R_{k\Sigma}[\tau, \Delta \vec{r}', \vec{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{k\Sigma}[f, \bar{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})] \exp \left[j2\pi f \left(\tau + \frac{\bar{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c} \right) \right] df d\bar{\mathcal{G}}, \quad (11.26)$$

$$W_{k\Sigma}[\tau, \Delta \vec{r}', \vec{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{W\Sigma}[f, \bar{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})] \exp \left[j2\pi f \left(\tau + \frac{\bar{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c} \right) \right] df d\bar{\mathcal{G}},$$

де

$$B_{Wk}[\cdot] = \frac{f^4}{c^4} B_{k\Sigma}^{-1}[\cdot]. \quad (11.27)$$

Обчислимо варіаційні похідні від кореляційної і зворотної до кореляційної функцій по параметрах $\vec{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})$, $\frac{\delta R_{k\Sigma}(\bar{\mathcal{G}})}{\delta \lambda_j(\bar{\mathcal{G}})}$ і $\frac{\delta W_{k\Sigma}(\bar{\mathcal{G}})}{\delta \lambda_j(\bar{\mathcal{G}})}$,

представивши параметр $\vec{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})$ у вигляді суми деякої оцінки його значення і варіації: $\vec{\lambda}(\bar{\mathcal{G}}) = \hat{\vec{\lambda}}(\bar{\mathcal{G}}) + \underline{A} \vec{\chi}(\bar{\mathcal{G}})$, де α_j - дійсне мале число, $\vec{\chi}_i(\bar{\mathcal{G}})$ - довільна функція. Тоді (див. підрозд. 5.5)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_{k\Sigma}[\tau, \Delta\vec{r}', \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}) + \underline{A}\vec{\chi}(\vec{\mathcal{G}})]}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{A}=0} &= \left(\frac{\delta R_{k\Sigma}(\dots, \vec{\mathcal{G}})}{\delta \lambda_j(\vec{\mathcal{G}})} \chi_j(\vec{\mathcal{G}}) \right) \Big|_{\underline{A}=0} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta R_{k\Sigma}(\dots, \vec{\mathcal{G}})}{\delta \lambda_j(\vec{\mathcal{G}})} \chi_j(\vec{\mathcal{G}}) d\vec{\mathcal{G}} \Big|_{\underline{A}=0}, \end{aligned} \quad (11.28)$$

де дужками () позначений знак скалярного добутку. У скалярному добутку вираз для варіаційної похідної буде при множнику $\chi_j(\vec{\mathcal{G}})$.

Підставляючи у формулу (11.28) вираз (11.26), одержимо

$$\left. \frac{\partial R_{k\Sigma}}{\partial \alpha_j} \right|_{\underline{A}=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]}{\partial \lambda_j} \chi_i(\vec{\mathcal{G}}) \exp \left\{ j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c} \right) \right\} df d\vec{\mathcal{G}}, \quad (11.29)$$

звідки

$$\frac{\delta R_{k\Sigma}(\dots, \vec{\mathcal{G}})}{\delta \lambda(\vec{\mathcal{G}})} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]}{\partial \lambda_j} \exp \left\{ j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c} \right) \right\} df. \quad (11.30)$$

Аналогічно знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_{k\Sigma}(\dots, \vec{\mathcal{G}})}{\delta \lambda(\vec{\mathcal{G}})} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_{W\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]}{\partial \lambda_j} \exp \left\{ j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c} \right) \right\} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4}{c^4} \frac{\partial B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] / \partial \lambda_j(\mathcal{G})}{B_{k\Sigma}^2[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]} \exp \left\{ j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c} \right) \right\} df. \end{aligned} \quad (11.31)$$

У цих виразах δ і ∂ – відповідно знаки варіаційної (функціональної) і звичайної частинної похідних. Знак оцінки « $\hat{}$ » надалі будемо застосовувати тільки там, де необхідно підкреслити його зміст.

Підставимо ці варіаційні похідні в систему варіаційних рівнянь правдоподібності (11.15). У результаті одержимо

$$\sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_1, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_1)]}{\partial \lambda(\vec{\mathcal{G}}_1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\mathcal{G}}_2 \frac{1}{B_{k\Sigma}[f_2, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)]} \frac{f^4}{c^4} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi f_1 \left[(t_1 - t_2) + \frac{\bar{\mathfrak{G}}_1(\bar{\mathbf{r}}'_1 - \bar{\mathbf{r}}'_2)}{c} \right] \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ j2\pi f_2 \left[(t_2 - t_1) + \frac{\bar{\mathfrak{G}}_2(\bar{\mathbf{r}}'_2 - \bar{\mathbf{r}}'_1)}{c} \right] \right\} dt_1 dt_2 d\bar{\mathbf{r}}'_1 d\bar{\mathbf{r}}'_2 = \\
& = (\Rightarrow) = \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4}{c^4} \frac{\partial B_{k\Sigma}[\cdot] / \partial \lambda(\bar{\mathfrak{G}}_1)}{B_{k\Sigma}^2[f_1, \bar{\mathfrak{G}}_1, \bar{\lambda}(\bar{\mathfrak{G}})]} \times \\
& \quad \times \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} u_{k\Sigma}(t_1, \bar{\mathbf{r}}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \bar{\mathbf{r}}'_2) \times \\
& \quad \times \exp \left\{ j2\pi f_1 \left[(t_1 - t_2) + \frac{\bar{\mathfrak{G}}_1(\bar{\mathbf{r}}'_1 - \bar{\mathbf{r}}'_2)}{c} \right] \right\} dt_1 dt_2 d\bar{\mathbf{r}}'_1 d\bar{\mathbf{r}}'_2 df_1. \tag{11.32}
\end{aligned}$$

Розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned}
& \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi f_1 \left[(t_1 - t_2) + \frac{\bar{\mathfrak{G}}_1(\bar{\mathbf{r}}'_1 - \bar{\mathbf{r}}'_2)}{c} \right] \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ j2\pi f_2 \left[(t_2 - t_1) + \frac{\bar{\mathfrak{G}}_2(\bar{\mathbf{r}}'_2 - \bar{\mathbf{r}}'_1)}{c} \right] \right\} dt_1 dt_2 d\bar{\mathbf{r}}'_1 d\bar{\mathbf{r}}'_2 = \\
& = \int_T \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi \left[(f_1 - f_2)t_1 + \frac{(f_1 \bar{\mathfrak{G}}_1 - f_2 \bar{\mathfrak{G}}_2) \bar{\mathbf{r}}'_1}{c} \right] \right\} dt_1 d\bar{\mathbf{r}}'_1 \times \\
& \times \int_T \int_{D'} \exp \left\{ -j2\pi \left[(f_1 - f_2)t_2 + \frac{(f_1 \bar{\mathfrak{G}}_1 - f_2 \bar{\mathfrak{G}}_2) \bar{\mathbf{r}}'_2}{c} \right] \right\} dt_2 d\bar{\mathbf{r}}'_2 = \\
& = \left| \int_T \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi \left[(f_1 - f_2)t + \frac{(f_1 \bar{\mathfrak{G}}_1 - f_2 \bar{\mathfrak{G}}_2) \bar{\mathbf{r}}'}{c} \right] \right\} dt d\bar{\mathbf{r}}' \right|^2 = \\
& = \left| \dot{\Psi}(f_1 - f_2, f_1 \bar{\mathfrak{G}}_1 - f_2 \bar{\mathfrak{G}}_2) \right|^2 = \left| \dot{\Psi}_T(f_2 - f_1) \dot{\Psi}_{D'}(f_1 \bar{\mathfrak{G}}_1 - f_2 \bar{\mathfrak{G}}_2) \right|^2, \tag{11.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}_T(f_1 - f_2) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp[j2\pi(f_1 - f_2)t] dt = \\
&= \frac{\exp\left[j2\pi(f_1 - f_2)\frac{T}{2}\right] - \exp\left[-j2\pi(f_1 - f_2)\frac{T}{2}\right]}{j2\pi(f_1 - f_2)} T = \\
&= Tsinc[\pi(f_1 - f_2)T], \tag{11.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}_{D'}(f_1\vec{\mathcal{G}}_1 - f_2\vec{\mathcal{G}}_2) &= \int_{-\frac{X'_m}{2}}^{\frac{X'_m}{2}} \int_{-\frac{Y'_m}{2}}^{\frac{Y'_m}{2}} \exp\left[j2\pi \frac{(f_1\mathcal{G}_{1x} - f_2\mathcal{G}_{2x})}{c} x'\right] \times \\
&\times \exp\left[j2\pi \frac{(f_1\mathcal{G}_{1y} - f_2\mathcal{G}_{2y})}{c} y'\right] dx' dy'. \tag{11.35}
\end{aligned}$$

Тут

$$\int_{-\frac{X'_m}{2}}^{\frac{X'_m}{2}} \exp\left[j2\pi \frac{(f_1\mathcal{G}_{1x} - f_2\mathcal{G}_{2x})}{c} x'\right] dx' = X'_m \text{sinc}\left[\pi \frac{(f_1\mathcal{G}_{1x} - f_2\mathcal{G}_{2x})}{c} X'_m\right], \tag{11.36}$$

$$\int_{-\frac{Y'_m}{2}}^{\frac{Y'_m}{2}} \exp\left[j2\pi \frac{(f_1\mathcal{G}_{1y} - f_2\mathcal{G}_{2y})}{c} y'\right] dy' = Y'_m \text{sinc}\left[\pi \frac{(f_1\mathcal{G}_{1y} - f_2\mathcal{G}_{2y})}{c} Y'_m\right]. \tag{11.37}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}_{D'}(f_1\vec{\mathcal{G}}_1 - f_2\vec{\mathcal{G}}_2) &= \\
&= X'_m Y'_m \text{sinc}\left[\pi \frac{(f_1\mathcal{G}_{1x} - f_2\mathcal{G}_{2x})}{c} X'_m\right] \text{sinc}\left[\pi \frac{(f_1\mathcal{G}_{1y} - f_2\mathcal{G}_{2y})}{c} Y'_m\right]. \tag{11.38}
\end{aligned}$$

Остаточно запишемо

$$\dot{\Psi}(f_1 - f_2, f_1\vec{\mathcal{G}}_1 - f_2\vec{\mathcal{G}}_2) = \dot{\Psi}_T(f_1 - f_2) \dot{\Psi}_{D'}(f_1\vec{\mathcal{G}}_1 - f_2\vec{\mathcal{G}}_2) =$$

$$= TX'_m Y'_m \text{sinc}[\pi(f_1 - f_2)T] \times \\ \times \text{sinc}\left[\pi \frac{(f_1 \vartheta_{1x} - f_2 \vartheta_{2x})}{c} X'_m\right] \text{sinc}\left[\pi \frac{(f_1 \vartheta_{1y} - f_2 \vartheta_{2y})}{c} Y'_m\right]. \quad (11.39)$$

Функцію $\dot{\Psi}(f_1 - f_2, f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2)$ будемо називати базовою функцією невизначеності, або апаратній функцією радіометричної системи апертурного синтезу. Ця функція визначає спільну роздільну здатність системи по частотах f і напрямкам $\vec{\vartheta}$. У випадку приймання вузькосмугового випромінювання на частоті f_0 функція $\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)]$ відповідає діаграмі спрямованості розкриву D' з постійним у його межах АФР. Роздільна здатність по частотах має порядок $1/T$, де T – час спостереження. Цей час може бути досить великим (сотні мілісекунд, секунди й більше) і потенційна роздільна здатність за частотою може бути дуже великою. Практично реалізувати задачу роздільного спостереження спектральної яскравості по частотах досить складно, але тут цього і не потрібно. Ставиться тільки задача підвищити роздільну здатність зображень і пов'язаних з ними параметрів по напрямках $\vec{\vartheta}$. У результаті її розв'язку з'являться інші функції невизначеності, якість яких (ширина, рівень бічних пелюсток і ін.) буде залежати від робочої ширини смуги пропускання використовуваних частот випромінювання.

З урахуванням (11.33) система варіаційних рівнянь правдоподібності (11.32) прийме наступний вид:

$$\sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_1, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_1)]}{\partial \lambda_j(\vartheta_1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\vartheta}_2 \frac{f_2^4}{c^4} \frac{1}{B_{k\Sigma}[f_2, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)]} \times \\ \times \left| \dot{\Psi}\left(f_1 - f_2, \frac{f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2}{c}\right) \right|^2 = \\ = (\Rightarrow) = \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \frac{f_1^4}{c^4} \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_1, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_1)] / \partial \lambda_j(\vartheta_1)}{B_{k\Sigma}^2[f_1, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_1)]} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f_1 \vec{\vartheta}_1) \right|^2, \quad (11.40)$$

де

$$\left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f_1 \vec{\vartheta}_1) \right|^2 = \left| \int_{TD'} \int u_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \exp\left[\pm j2\pi f \left(t + \frac{\vec{\vartheta} \vec{r}'}{c}\right)\right] dt d\vec{r}' \right|^2 \quad (11.41)$$

– V_F -періодограма, що є узагальненням періодограми Фур'є і результатом застосування V_F -перетворення до функції $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$, усіченої інтервалами спостереження T і D' , і наступного обчислення квадрата модуля.

Праві частини системи (11.40) характеризують основні операції, які необхідно виконати над прийнятим полем, і структуру радіометричної системи. Функціональні (математичні) зв'язки спектральних яскравостей $B_{k\Sigma}$ з параметрами $\vec{\lambda}$ або покладаються відомими з розв'язку відповідних прямих задач розсіювання для обраних електродинамічних моделей, або задані у вигляді регресійних співвідношень, отриманих експериментальних шляхом. Однієї з найбільш істотних операцій є формування V_F -періодограми неспроможною оцінкою, що є, $B_{k\Sigma}$ спектральної яскравості як f функції частоти $\vec{\mathcal{G}}$ й напрямків. Неспроможність проявляється в тому, що ні збільшення інтервалу спостереження T , ні збільшення розмірів розкриву D' не наближають періодограму до дійсної яскравості, яка в спектральній області має вигляд випадкового процесу із середнім, пропорційним $B_{k\Sigma}(f, \vec{\mathcal{G}})$, і кореляційною функцією, ширина якої по змінних Δf і $\Delta \vec{\mathcal{G}}$ обернена до величини інтервалу спостереження T й розмірам розкриву D' . Випадкові сплески яскравості щодо її середнього значення з такими розмірами кореляційної функції називають спеклами. Спекли спотворюють структуру зображення й проявляють себе у вигляді плям. Усунути їх можна, наприклад, інтегруючи (усереднюючи) періодограму по частотах f . Оптимальні операції цього інтегрування представлені правими частинами системи рівнянь (11.40).

Процедура формування V_F -періодограми містить у собі операції фільтрації прийнятих процесів та розділення їх на сукупність спектральних складових по часовим частотам f , фазової затримки кожної зі складових на величину $2\pi f \vec{\mathcal{G}} \vec{r}' / c$ і синфазного додавання затриманих сигналів по всіх елементах розкриву (елементам антеною решітки). Ці операції дозволяють сфокусувати кожну спектральну складову на сукупність заданих напрямків $\vec{\mathcal{G}}$. У результаті формується віяло променів, що покривають обраний сектор огляду, і забезпечується роздільне приймання сигналів з кожного напрямку $\vec{\mathcal{G}}$. Еквівалентними операціями, як буде показано нижче, є операції формування оцінок функцій когерентності з

наступним їхнім перетворенням відповідно до узагальненої теореми Ван Цитерта-Церніке, розглянутої в розд. 3 і 4.

Множник, що стоїть перед періодограмою у правій частині (11.40), – це квадрат АЧХ оптимального декорелюючого фільтра. Він містить функцію, зворотну до спектральної яскравості (знаменник множника), що задає структуру інверсного нелінійного фільтра, у якому здійснюється декореляція коливань $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$. Ширина смуги пропускання цього фільтра залежить від інтенсивності перешкод $n_{kp}(t, \vec{r}')$, заданих в (11.19) і в знаменниках (11.40), що складаються, містять $N_{0kp} / 2$. Фільтр є адаптивним, тому що знаменник $B_{k\Sigma}^2[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ множника, що стоїть перед періодограмою, залежить від параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$. У квазіоптимальном наближенні, вибравши деякі середні значення параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}) \approx \vec{\lambda}_0$, можна виключити адаптацію.

Усереднення декорельованих коливань шляхом їхнього інтегрування по частотах f забезпечує конзистентність оцінок радіояскравісних зображень $B_{0k}(\vec{\mathcal{G}})$ і параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$. З одного боку, декореляція зменшує радіуси кореляції процесів, збільшуючи число їх незалежних відліків у просторово-часовій області за змінною t і координатам \vec{r}' , що підвищує ефективність усереднення при інтегруванні зведених у квадрат декорельованих процесів. З іншого боку, розширення смуги декорелюючих фільтрів, що характеризуються множителем при періодограмі, забезпечує інтегрування більшого числа її некорельованих відліків у спектральній області по частотах f .

Систему рівнянь (11.40) і практичну реалізацію відповідної їй алгоритму можна спростити, якщо врахувати,

що $\partial B_{k\Sigma} / \partial \lambda_j = \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2 \partial B_{0k} / \partial \lambda_j$, і припустити, що в межах смуги частот передатної характеристики $\dot{K}_k(j2\pi f)$ радіометра спектральна яскравість практично не змінюється (або зневажити її несуттєвою зміною, орієнтуючись на середнє значення), тобто $B_{0k}[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] \approx B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ (умова ПЧВ може не виконуватися).

Тоді в (11.40) $\partial B_{0k} / \partial \lambda_j$ можна винести за знаки інтегралів:

$$\sum_{k=1}^K \frac{\partial B_{0k}(f_0, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vartheta))}{\partial \lambda_j} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2^4}{c^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1)|^2 |\dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}(f_2, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vartheta_2))} \times \right. \\ \left. \times \left| \dot{\Psi} \left(f_1 - f_2, \frac{f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2}{c} \right) \right|^2 df_1 df_2 d\vartheta_2 - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1) \dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_1))} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f_1 \vec{\vartheta}_1) \right|^2 df_1 \right\} = 0. \quad (11.42)$$

Враховуючи, що в загальному випадку при дослідженні різних випромінюючих об'єктів з різними електрофізичними параметрами $\vec{\lambda}$ матриця $\|B'_{0kj}\| = \left\| \frac{\partial B_{0k}}{\partial \lambda_j} \right\| \neq 0$, одержимо систему інтегральних рівнянь виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2^4}{c^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1) \dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}(f_2, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vartheta_2))} \left| \dot{\Psi} \left(f_1 - f_2, \frac{f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2}{c} \right) \right|^2 d\vec{\vartheta}_2 df_1 df_2 = \\ = (\Rightarrow) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1) \dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_1))} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f_1 \vec{\vartheta}_1) \right|^2 df_1. \quad (11.43)$$

Праві частини цієї системи рівнянь

$$Y_{\text{вих } k}(\vec{\vartheta}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1) \dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\vartheta}_1, \lambda(\vec{\vartheta}_1))} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f_1 \vec{\vartheta}_1) \right|^2 df_1. \quad (11.44)$$

– це вихідні ефекти передбачуваної системи апертурного синтезу, що є основою цього оптимального алгоритму обробки прийнятого випромінювання, що містить основні операції формування періодограм $\left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f_1 \vec{\vartheta}_1) \right|^2$ і їх зваженого інтегрування. Помітимо ще раз, що в системі рівнянь (11.43) стоїть не знак рівності, а знак прирівнювання « \Rightarrow ». Ліві частини цих рівнянь не рівні правим. Вони є математичними очікуваннями правих. Надалі символами $Y_{\text{вих } k}(\vec{\vartheta}_1)$ будемо позначати достатні вихідні ефекти оптимальної або квазіоптимальної радіометричної системи (достатні статистики), що є правими частинами системи рівнянь правдоподібності, які містять прийняті коливання $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ й виконувані

над ними операції, наприклад формування періодограми і ін. Таким чином, систему рівнянь (11.43), що є одночасно і алгоритмом обробки прийнятого випромінювання, можна записати в такому виді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 \frac{f_2^4}{c^4} \left| \dot{K}_k(j2\pi f_1) \dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f_1) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\vartheta}_2 \frac{|\dot{\Psi}(f_2 - f_1, f_2 \vec{\vartheta}_2 - f_1 \vec{\vartheta}_1)|^2}{B_{k\Sigma}[f_2, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)]} =$$

$$= (\Rightarrow) = Y_{\text{вих } k}(\vec{\vartheta}_1). \quad (11.45)$$

11.3. Спрощені квазіоптимальні алгоритми при високій роздільній здатності в припущенні сталості спектральної яскравості і оцінюваних параметрів у межах функції невизначеності

Розглянемо можливі спрощення системи рівнянь (11.43) як ряд квазіоптимальних розв'язків у плані зростання складності їх алгоритмічної і системотехнічної реалізації.

1. Випадок ідеальної роздільної здатності при визначенні функції невизначеності в нескінченних межах інтегрування.

Нехай для простоти розкрив D' антенної системи – прямокутний з порівняно більшими сторонами прямокутника X'_m, Y'_m , які умовно будемо вважати прагнучими до нескінченності. Час спостереження T також будемо вважати нескінченно більшим. Базову функцію невизначеності (апаратну функцію) у цьому випадку приблизно можна визначити таким виразом:

$$\left| \Psi(f_1 - f_2, f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2) \right|^2 =$$

$$= \lim_{\substack{T/2 \rightarrow \pm\infty \\ D'/2 \rightarrow \pm\infty}} \left| \int_T \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi \left[(f_1 - f_2)t - \frac{(f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2) \cdot \vec{r}'}{c} \right] \right\} dt d\vec{r}' \right|^2 =$$

$$= \lim_{\substack{T/2 \rightarrow \pm\infty \\ D'/2 \rightarrow \pm\infty}} (TX'_m Y'_m)^2 \text{sinc}^2[\pi(f_1 - f_2)T] \text{sinc}^2 \left[\pi \frac{f_1 \vartheta_{1x} - f_2 \vartheta_{2x}}{c} X'_m \right] \times$$

$$\times \text{sinc}^2 \left[\pi \frac{f_1 \vartheta_{1y} - f_2 \vartheta_{2y}}{c} Y'_m \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^2(f_2 - f_1) \delta^2\left(\frac{f_2 \bar{\vartheta}_2}{c} - \frac{f_1 \bar{\vartheta}_1}{c}\right) = \frac{c^4}{f^4} \delta^2(f_2 - f_1) \delta^2(\bar{\vartheta}_2 - \bar{\vartheta}_1) = \\
&= \lim_{\substack{T/2 \rightarrow \pm\infty \\ X'_m, Y'_m/2 \rightarrow \pm\infty}} T \frac{f}{c} X'_m \frac{f}{c} Y'_m \frac{c^4}{f^4} \delta(f_2 - f_1) \delta(\bar{\vartheta}_2 - \bar{\vartheta}_1) \approx \\
&\approx TX'_m Y'_m \frac{c^2}{f^2} \delta(f_1 - f_2) \delta(\vartheta_1 - \vartheta_2). \tag{11.46}
\end{aligned}$$

Підставивши цю функцію невизначеності в (11.43), одержимо таку систему рівнянь для оцінок яскравостей $B_{0k}(f, \bar{\vartheta})$ і параметрів $\vec{\lambda}(\bar{\vartheta})$

$$\begin{aligned}
&TX'_m Y'_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{c^2} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}(f, \bar{\vartheta})|^2}{B_{k\Sigma}[f, \bar{\vartheta}, \vec{\lambda}(\bar{\vartheta})]} df = \\
&= (\Rightarrow) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}(f, \bar{\vartheta})|^2}{B_{k\Sigma}^2[f, \bar{\vartheta}, \vec{\lambda}(\bar{\vartheta})]} |\dot{S}_{KTD}(j2\pi f, \bar{\vartheta})|^2 df = Y_{\text{вих } k}(\bar{\vartheta}). \tag{11.47}
\end{aligned}$$

2. Таку ж точно систему рівнянь одержимо, якщо прийнемо розміри розкриву кінцевими, але, що забезпечують високу розв'язну здатність, що дозволить вважати знаменник $B_{k\Sigma}(f_2, \bar{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\bar{\vartheta}_2))$ у лівій частині рівняння (11.43) практично постійним у межах ширини функції $\dot{\Psi}\left(f_1 - f_2, \frac{f_1 \bar{\vartheta}_1 - f_2 \bar{\vartheta}_2}{c}\right)$. Тоді його можна винести з-під знака інтеграла

при значеннях змінних $f_2 = f_1$, $\bar{\vartheta}_2 = \bar{\vartheta}_1$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} df_1 \frac{f_1^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1) \dot{F}_A(\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}[f_1, \bar{\vartheta}_1, \vec{\lambda}(\bar{\vartheta}_1)]} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_2 d\vartheta_2 \left| \dot{\Psi}\left(f_1 - f_2, \frac{f_1 \bar{\vartheta}_1 - f_2 \bar{\vartheta}_2}{c}\right) \right|^2 = (\Rightarrow) = Y_{\text{вих } k}(\bar{\vartheta}_1). \tag{11.48}
\end{aligned}$$

У цьому випадку немає необхідності вирішувати зворотну задачу визначення спектральної яскравості $B_{0k}[f, \bar{\vartheta}, \vec{\lambda}(\bar{\vartheta})]$ з-під інтеграла по змінній $\bar{\vartheta}_2$ у рівнянні (11.43).

Знайдемо вхідний у виразі (11.48) подвійний інтеграл від базової функції невизначеності з підстановкою в нього формули (11.39):

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_2 d\vec{\vartheta}_2 \left| \dot{\Psi}(f_1 - f_2, \frac{f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2}{c}) \right|^2 = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} T^2 \text{sinc}^2 [\pi(f_1 - f_2)T] df_2 \int_{-\infty}^{\infty} (X'_m)^2 \text{sinc}^2 \left[\pi \frac{f_1 \vartheta_{1x} - f_2 \vartheta_{2x}}{c} X'_m \right] d\vartheta_{2x} \times \\
& \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} (Y'_m)^2 \text{sinc}^2 \left[\pi \frac{f_1 \vartheta_{1y} - f_1 \vartheta_{2y}}{c} Y'_m \right] d\vartheta_{2y}.
\end{aligned}$$

Враховуючи табличні інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin^2 ax / x^2) dx = a\pi \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2(ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin c(ax) dx = \pi/a, \quad (11.49)$$

отримаємо

$$T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2 [\pi(f_2 - f_1)T] df_2 = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2 (\pi f T) df = T^2 \frac{\pi}{\pi T} = T \quad (11.50)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (X'_m)^2 \text{sinc}^2 \left[\pi \frac{f_1 \vartheta_{1x} - f_2 \vartheta_{2x}}{c} X'_m \right] d\vartheta_{2x} &= \left. \begin{array}{l} \frac{f_2 \vartheta_{2x}}{c} = x, \quad d\vartheta_{2x} = \frac{c}{f_2} dx, \\ \alpha = \frac{f_1 \vartheta_{1x}}{c}, \end{array} \right| = \\
&= \frac{c}{f} (X'_m)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2 [\pi(x - \alpha) X'_m] dx = \frac{c}{f} (X'_m)^2 \frac{\pi}{\pi X'_m} = \frac{c}{f} X'_m. \quad (11.51)
\end{aligned}$$

Остаточню

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_2 d\vartheta_2 |\dot{\Psi}(\cdot)|^2 = \frac{c^2}{f^2} T X'_m Y'_m. \quad (11.52)$$

При розрахунках рівнянь (11.46) і (11.52) приходимо до такої системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
& T X'_m Y'_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{c^2} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f)|^2}{B_{k\Sigma}[f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})]} df = \\
& = (\Rightarrow) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f)|^2}{B_{k\Sigma}^2[f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})]} |\dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\vartheta})|^2 df. \quad (11.53)
\end{aligned}$$

Помножимо в лівих частинах чисельник і знаменник на функцію $B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\mathcal{G})]$ і з урахуванням (11.44) запишемо систему рівнянь правдоподібності в такому виді:

$$TX'_m Y'_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2}{B_{k\Sigma}^2[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\mathcal{G})]} B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\mathcal{G})] df = (\Rightarrow) = Y_{\text{вих}_k}(\vec{\mathcal{G}}). \quad (11.54)$$

Праві частини цих рівнянь $Y_{\text{вих}_k}(\vec{\mathcal{G}})$ – вихідні ефекти радіометричної системи, які характеризують основні операції, виконувани над прийнятим полем при оцінках параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$. Періодограма $\left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2$ є неконзистентною оцінкою спектральної яскравості $B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\mathcal{G})]$ як функції частоти f і напрямку $\vec{\mathcal{G}}$. Процедура усереднення цієї періодограми за частотою забезпечує її конзистентність. Однак, як відзначалося, перед усередненням коливання $u(t, \vec{r}')$ піддають декореляції в інверсному фільтрі, частотна характеристика якого визначається множником, що стоїть перед періодограмою. Процедура декореляції зменшує радіуси кореляції процесів за часом t і координатам \vec{r}' , збільшуючи число незалежних відліків процесів, що беруть участь в усередненні по цих змінних. Також за рахунок декореляції розширюється АЧХ фільтра, квадрат якої є множником при періодограмі, що збільшує число незалежних відліків у спектральній області, що беруть участь при інтегруванні по частотах f .

Систему рівнянь (11.53) також можна записати в такому виді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2}{B_{k\Sigma}^2[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]} \left\{ \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\mathcal{G})] - \frac{1}{TX'_m Y'_m} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 \right\} df = 0. \quad (11.55)$$

Прийнявши множник, що стоїть перед дужками, рівним одиниці, виключивши тим самим декореляцію, приходимо до квазіоптимального розв'язку, близькому за принципом дії класичному багатоканальному багатопроменевому радіометру:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\mathcal{G})] - \frac{1}{TX'_m Y'_m} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 \right\} df = 0. \quad (11.56)$$

Припустивши, що яскравість постійна в смузі частот АЧХ $\left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right| B_{0k}[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\mathcal{G})] df \approx B_{0k\Sigma}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$, $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \approx \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0)$, (11.57)

і підставивши в (11.56) формули (11.19) і (11.20), отримаємо наступну систему рівнянь

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] df \approx \\ & \approx B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{f^2} \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 df + \\ & + \frac{N_{0k}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 df = (\Rightarrow) = \frac{I}{TX'_m Y'_m} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df. \quad (11.58) \end{aligned}$$

Після виключення операцій декореляції враховувати регуляризуючу добавку $\frac{f^2}{c^2} \frac{N_{0kp}}{2}$ тут нема сенсу.

Таким чином, у прийнятому квазіоптимальному наближенні зображення досліджуваного об'єкта у вигляді розподілу яскравості $B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ по напрямках $\vec{\mathcal{G}}$ необхідно будувати відповідно до такого алгоритму:

$$\hat{B}_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] = \frac{I}{\Delta f_k TX'_m Y'_m \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df - B_{n_k}(\vec{\mathcal{G}}), \quad (11.59)$$

де $\hat{B}_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ статистичні оцінки $B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$,

$$B_{n_k}(\vec{\mathcal{G}}) = \frac{N_{0k} \Delta f I_k}{2 \Delta f_k \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2},$$

$$\Delta f I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 df, \quad \Delta f_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{c^2} \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 df. \quad (11.60)$$

Як і в компенсаційному радіометрі, тут віднімається потужність $B_{n_k}(\vec{\mathcal{G}})$, обумовлена наявністю в просторово-розподіленій антенній системі внутрішніх шумів $u_{kn}(t, \vec{r}')$.

Функції $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$ перебувають із цього ж алгоритму в результаті подальшого його розв'язку як нелінійного рівняння при відомому аналітичному зв'язку $B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ з параметрами $\vec{\lambda}$. Цей зв'язок задається електродинамічними або регресійними моделями випромінювання.

Алгоритм (11.59) підходить і для вузькосмугової, і для надширокосмугової обробки випромінювання, якщо виконуються умови (11.57).

Для фізичної інтерпретації отриманого алгоритму розглянемо інтеграл від періодограми

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df. \quad (11.61)$$

Сама періодограма з точністю до постійного коефіцієнта c^2 / f^2 є неконзистентною оцінкою енергетичного спектра процесу й відповідно до шуканої яскравості й пов'язаних з нею параметрів досліджуваного об'єкта. Одним з методів забезпечення конзистентності оцінки є інтегрування (усереднення) періодограми по частотам.

По теоремі Парсеваля – Лапласа цей інтеграл відповідає енергії деякого коливання, прийнятого з напрямку $\vec{\mathcal{G}}$. Для з'ясування структури цього коливання з урахуванням (11.41) запишемо отриманий інтеграл у розгорнутому виді:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \int \int u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}_2) \exp \left\{ -j2\pi f \left[(t_1 - t_2) + \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] \right\} dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 df = \\ & = \int \int \int \int u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}_2) dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -j2\pi f \left[(t_1 - t_2) + \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] \right\} df = \\ & = \int \int \int \int u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}_2) \delta \left(t_1 - t_2 + \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right) dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\ & = \int \int \int u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma} \left[\left(t_1 + \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right), \vec{r}_2 \right] dt_1 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2. \end{aligned}$$

Замінімо змінну $t_1 = t - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'_1}{c}$, тоді

$$\int_{T_1 \approx T} \int \int u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'_1}{c}, \vec{r}'_1 \right) u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'_2}{c}, \vec{r}_2 \right) dt d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_T \left[\int_{D'} u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'_l}{c} \right) d\vec{r}'_l \right]^2 dt = \int_T \left[\int_{D'} u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'}{c} \right) d\vec{r}' \right]^2 dt = \\
&= \int_T \left[u_{kD'}(t, \vec{\mathcal{G}}) \right]^2 dt.
\end{aligned}$$

Таким чином, інтеграл по частотах (11.61) від періодограми можна записати в наступному вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df = \int_T \left[u_{kD'}(t, \vec{\mathcal{G}}) \right]^2 dt, \quad (11.62)$$

$$u_{kD'}(t, \vec{\mathcal{G}}) = \int_{D'} u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right) d\vec{r}',$$

де $u_{kD'}(t, \vec{\mathcal{G}})$ — процес, отриманий у результаті інтегрування по розкриву D' (у реальних антенних решітках — у результаті додавання) сигналів, затриманих на виході кожного прийомного елемента з координатами \vec{r}' на величину $\vec{\mathcal{G}} \vec{r}' / c$. Ця затримка вирівнює затримки обумовлені нахилом фронту хвилі $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$, що падає на розкрив D' з напрямку $\vec{\mathcal{G}}$ і забезпечує синфазність коливань $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ у кожній точці \vec{r}' . Синфазне інтегрування забезпечує фокусування радіометричної системи на напрямок $\vec{\mathcal{G}}$.

Зауважимо, що зміна межі інтегрування при такій заміні змінної незначно, $T_l \approx T$, тому що час спостереження T звичайно значно більше часу запізнювання $\vec{\mathcal{G}} \vec{r}' / c$ поля на апертурі антени, $\vec{r}' \in D'$.

Тоді алгоритм (11.59) для оцінки параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$, а також яскравостей $B_{0k}[\vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ запишемо у вигляді

$$\hat{B}_{0k}[f_0, \hat{\vec{\lambda}}(\vec{\mathcal{G}})] = \frac{I}{\Delta f_k T X'_m Y'_m \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2} \int_T \left[u_{kD'}(t, \vec{\mathcal{G}}) \right]^2 dt - B_{n_k}(\vec{\mathcal{G}}). \quad (11.63)$$

Суть цього алгоритму полягає в наступному:

1) затримка коливань $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ у кожному елементі антеною системи з координатами \vec{r}' й формування синфазних (відповідно до нахилу фронту

поля $u_{ks}(t, \vec{r}')$ коливань $u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c} \right)$ для кожного напрямку \vec{g} ;

2) синфазне інтегрування затриманих коливань (для дискретних АР – додавання) і формування сигналів $u_{kD'}(t, \vec{g})$;

3) формування сигналів, пропорційних до середньої потужності синфазно проінтегрованих коливань, отриманих для кожного напрямку \vec{g} окремо.

Зауважимо, що корисна операція затримки поля є тільки для складової $u_{ks}(t, \vec{r}')$ в рівнянні спостереження (11.1). Зсув $B_{n_k}(\vec{g})$ оцінки яскравості $\hat{B}_{0k}[f_0, \vec{\lambda}(\vec{g})]$ може бути усунути. Для того щоб сформувавши зображення $\hat{B}_{0k}[f_0, \vec{\lambda}(\vec{g})]$, необхідно ці операції реалізувати для множини напрямків \vec{g} , тобто синтезована система повинна бути або скануючою, або багатоканальною.

Точність оцінок суттєво підвищується, якщо діяти у відповідності не зі спрощеним алгоритмом (11.56), а з алгоритмом (11.55), де множник

$$\left| \dot{L}_k(j2\pi f, \vec{g}, \vec{\lambda}(\vec{g})) \right|^2 = \frac{f^4 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{g} - \vec{g}_0, f) \right|^2}{c^4 B_{k\Sigma}^2[f, \vec{g}, \vec{\lambda}(\vec{g})]}, \quad (11.64)$$

розміщений перед фігурною дужкою, відповідає дії декореляції прийнятих коливань і відповідно збільшенню числа незалежних відліків, що брав участь в усередненні. Припущення про високу роздільну здатність, що виключає розв'язок зворотної задачі добування $B_{k\Sigma}(f, \vec{g}, \vec{\lambda}(\vec{g}))$ інтегрального оператора з ядром $\left| \dot{\Psi}(f_2 - f_1, f_2 \vec{g}_2 - f_1 \vec{g}_1) \right|^2$, поки залишається.

Праві частини системи рівнянь (11.54) представимо у вигляді

$$\begin{aligned} Y_{\text{вих } k}(\vec{g}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{g} - \vec{g}_0, f) \right|^2}{c^4 B_{k\Sigma}^2(f, \vec{g}, \vec{\lambda}(\vec{g}))} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f \vec{g}) \right|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k(j2\pi f, \vec{g}, \vec{\lambda}(\vec{g})) \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{g}) \right|^2 df, \end{aligned} \quad (11.65)$$

де

$$\left| \dot{L}_k(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})) \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 \quad (11.66)$$

є V_F - періодограмою декорельованого процесу $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ як за часом так і за просторовими координатами.

Декореляція процесу $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ здійснюється фільтром з передатною характеристикою $\dot{L}_k(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}))$, знаменник якої визначає структуру інверсного просторово-тимчасового фільтра, що розширює просторово-часовий спектр поданого на нього процесу шляхом підйому високих частот. Технічна реалізація такої обробки є непростою задачею.

Реалізацію алгоритму (11.54) і відповідно структурної схеми радіометричної системи можна спростити, якщо й тут припустити, що діаграма спрямованості $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)$ незначно змінюється в заданому діапазоні частот, тобто $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \approx \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0)$, і розділити часову й просторову обробку, здійснивши факторизацію (розбивка на співмножники) коефіцієнта передачі просторово-часового декорелюючого фільтра

$$\dot{L}_k(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})) \approx \dot{L}_{k1}(\vec{\mathcal{G}}) \dot{L}_{k2}(j2\pi f). \quad (11.67)$$

Співмножники можна представити у вигляді, структурно подібному коефіцієнтам передачі декорелюючих фільтрів, отриманих для часової обробки, наприклад, у розд. 6, 7, 9 (формули (6.28), (7.34), (9.29)):

$$\begin{aligned} \left| \dot{L}_k(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 &= \frac{f^4}{c^4} \frac{\left| \dot{K}(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2}{\left\{ B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2 + \right.} \\ &\quad \left. + \frac{N_{0k}}{2} \frac{f^2}{c^2} \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 + \frac{N_{0kp}}{2} \frac{f^2}{c^2} \right\}^2} \approx \\ &\approx \left| \dot{L}_{k1}(\vec{\mathcal{G}}) \right|^2 \times \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 \approx \\ &\approx \left\{ \frac{\left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2}{\left[B_{0k}^2[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2 + \alpha \right]^2} \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{f^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f)|^2}{\left[|\dot{K}_k(j2\pi f)|^2 + \beta\right]^2} \right\}. \quad (11.68)$$

Коефіцієнти α і β у загальному випадку є функціями f і $\bar{\mathcal{G}}$, а у квазіоптимальному наближенні їх значення можна вважати постійними. Така факторизація спрощує алгоритм і структуру радіометричної системи, тому що розділяє просторову і часову обробки. У загальному випадку вони нероздільні і є більш складними як в алгоритмічному плані, так і в плані відповідної технічної реалізації.

Тоді праві частини рівнянь (11.53) і (11.54) приймуть такий вид:

$$\begin{aligned} Y_{\text{вих } k}(\bar{\mathcal{G}}) &= \left| \dot{L}_{k1}(\bar{\mathcal{G}}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} df \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ j2\pi f \left[(t_1 - t_2) + \frac{\bar{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] \right\} dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\ &= \left| \dot{L}_{k1}(\bar{\mathcal{G}}) \right|^2 \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) H_{kw} \left[t_1 - t_2 + \frac{\bar{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2, \quad (11.69) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} H_{kw} \left[t_1 - t_2 + \frac{\bar{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 \exp \left\{ j2\pi f \left[(t_1 - t_2) + \frac{\bar{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] \right\} df \quad (11.70) \end{aligned}$$

є автокореляційною функцією імпульсної характеристики $h_{kw}(t)$ декорелюючого фільтру з АЧХ $\dot{L}_{k2}(j2\pi f)$, що відповідає за часову обробку сигналів,

$$\begin{aligned} H_{kw}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} h_{kw}(v) h_{kw}(v + \tau) dv, \quad (11.71) \\ h_{kw}(t) &= F^{-1} \left\{ \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right\}. \end{aligned}$$

Виконаємо заміну змінних в (11.69) і (11.70):

$$t'_1 = t_1 + \frac{\vec{g}\vec{r}'_1}{c}, \quad t'_2 = t_2 + \frac{\vec{g}\vec{r}'_2}{c}$$

і отримаємо

$$\begin{aligned} Y_{\text{вих}_k}(\vec{g}) &= \left| \dot{L}_{k1}(\vec{g}) \right|^2 \times \\ &\times \int_T \int_{T'} \int_{D'} \int_{D'} u_{k\Sigma} \left(t'_1 - \frac{\vec{g}\vec{r}'_1}{c}, \vec{r}'_1 \right) u_{k\Sigma} \left(t'_2 - \frac{\vec{g}\vec{r}'_2}{c}, \vec{r}'_2 \right) H_{kw}(t'_1 - t'_2) dt'_1 dt'_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\ &= \left| \dot{L}_{k1}(\vec{g}) \right|^2 \int_T \int_T H_{kw}(t_1 - t_2) u_{kD'}(t_1) u_{kD'}(t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (11.72)$$

де $u_{kD'}(t)$ визначають по формулі (11.62).

Оскільки ефективна ширина імпульсної характеристики $h_{kw}(t)$ широкосмугового і тим більше надширокосмугового фільтрів, а також час запізнювання поля $t_3 = \frac{\vec{g}\vec{r}'_1}{c}$ навіть у самих крайніх точках розкryву антени значно менше інтервалу спостереження T , і в (11.72) подальшим впливом заміни змінних на межі інтегрування будемо зневажати.

Запишемо автокореляційну функцію $H_{kw}(t_1 - t_2)$ імпульсної характеристики декорелюючого фільтра у вигляді

$$\begin{aligned} H_{kw}(t_1 - t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{kw}(v) h_{kw}(v + (t_1 - t_2)) dv = \\ &= |t = v + t_1, v = t - t_1| = \int_{-\infty}^{\infty} h_{kw}(t - t_1) h_{kw}(t - t_2) dt. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Тоді

$$\begin{aligned} Y_{\text{вих}_k}(\vec{g}) &= \left| \dot{L}_{k1}(\vec{g}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_T \int_T h_{kw}(t - t_1) u_{kD'}(t_1) h_{kw}(t - t_2) u_{kD'}(t_2) dt_1 dt_2 dt = \\ &= \left| \dot{L}_{k1}(\vec{g}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |u_{kD'_w}(t)|^2 dt \approx \left| \dot{L}_{k1}(\vec{g}) \right|^2 \int_T |u_{kD'_w}(t)|^2 dt, \end{aligned} \quad (11.74)$$

де

$$u_{kD'_w}(t) = \int_T h_{kw}(t - \tau) u_{kD'}(\tau) d\tau = \int_T h_{kw}(t - \tau) \int_{D'} u_{k\Sigma} \left(\tau - \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right) d\vec{r}' d\tau =$$

$$= \int_{D'} u_{kw} \left(t - \frac{\bar{\mathcal{G}}\bar{r}'}{c}, \bar{r}' \right) d\bar{r}', \quad (11.75)$$

$$u_{kw} \left(t - \frac{\bar{\mathcal{G}}\bar{r}'}{c}, \bar{r}' \right) = \int_T h_{kw}(t-\tau) u_{k\Sigma} \left(\tau - \frac{\bar{\mathcal{G}}\bar{r}'}{c}, \bar{r}' \right) d\tau. \quad (11.76)$$

Основна відмінність процесів $u_{kw} \left(\tau - \frac{\bar{\mathcal{G}}\bar{r}'}{c}, \bar{r}' \right)$, $u_{kD'_w}(t)$ від процесів $u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\bar{\mathcal{G}}\bar{r}'}{c}, \bar{r}' \right)$, $u_{kD'}(t)$ полягає в тому, що перші піддані декореляції у фільтрі, що обіляє, з інверсним коефіцієнтом $\dot{L}_{k2}(j2\pi f)$ передачі. Процедура декореляції, як відзначалося, підвищує число відліків що беруть участь в усередненні (при оцінці середньої потужності) некоррельованих відліків випадкового процесу й підвищує точність цієї оцінки.

З урахуванням (11.68) запишемо тепер ліві частини рівнянь (11.53) і (11.54) у такому виді:

$$TX'_m Y'_m \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k1}(\bar{\mathcal{G}}) \right|^2 \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[f, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})] df.$$

Прирівнюючи отриману формулу до правої частини (11.74), отримаємо

$$TX'_m Y'_m \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[f, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})] df = \int_T \left| u_{kD'_w}(t) \right|^2 dt.$$

Підставимо в це рівняння вирази (11.19) і (11.20) для радіояскравості $B_{k\Sigma}[f, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})]$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 \frac{c^2}{f^2} B_{k\Sigma}[f, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})] df = \\ & = B_{0k}[f_0, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\lambda}(\bar{\mathcal{G}})] \left| \dot{F}_A(\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{f^2} \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 df + \\ & + \frac{N_{0k}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 df + \frac{N_{0kp}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 df = \\ & = \frac{I}{TX'_m Y'_m} \int_T \left| u_{kD'_w}(t) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Остаточно система рівнянь для оцінки яскравості $B_{0k}(\vec{\vartheta})$ і параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\vartheta})$ прийме такий вид:

$$\hat{B}_{0k}[f_0, \hat{\lambda}(\vec{\vartheta}), \vec{\vartheta}] \approx \frac{I}{T \Delta f_{kw} X'_m Y'_m |\dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f_0)|^2} \int_T |u_{kD_w}(t)|^2 dt - B_{wn_k} - B_{wn_{kp}}, \quad (11.77)$$

де

$$\Delta f_{kw} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{f^2} |\dot{L}_{k2}(j2\pi f)|^2 |\dot{K}(j2\pi f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{c^2} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f)|^4}{\left[|\dot{K}_k(j2\pi f)|^2 + \beta\right]^2} df; \quad (11.78)$$

$$B_{wn_k} = \frac{N_{0k}}{2 \Delta f_{kw} |\dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f_0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{L}_{k2}(j2\pi f)|^2 |\dot{K}_k(j2\pi f)|^2 df; \quad (11.79)$$

$$B_{wn_{kp}} = \frac{N_{0kp}}{2 \Delta f_{kw} |\dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f_0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{L}_{k2}(j2\pi f)|^2 df. \quad (11.80)$$

Тут $B_{wn_k}, B_{wn_{kp}}$ – зсуви в зміщених статистичних оцінках радіояскравості $B_{0k}[f_0, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}), \vec{\vartheta}]$.

Алгоритм (11.77) відповідає багатоканальній схемі радіометра, кожний канал якого, виконаний за компенсаційною схемою, сфокусований на свій напрямок $\vec{\vartheta}$. Алгоритм отриманий у припущенні високої роздільної здатності (сталості спектральної яскравості в межах функції невизначеності радіометричної системи), але з урахуванням квазіоптимальної операції декореляції прийнятих сигналів (на відміну від алгоритму (11.63)). Його можна застосувати й тоді, коли умова сталості яскравості в межах функції невизначеності не виконується і зображення містить більш високочастотні компоненти. У цих випадках зображення просте буде формуватися з тою роздільною здатністю, яка дозволяє забезпечити функція невизначеності.

При використанні дискретного розкриття у вигляді антенної решітки, що складається з набору елементарних антен, цьому алгоритму при оцінці однієї спектральної яскравості $\hat{B}_{0k}(\vec{\vartheta})$ й одного параметра $\hat{\lambda}(\vec{\vartheta})$ відповідає структурна схема, що показана на рис. 11.1.

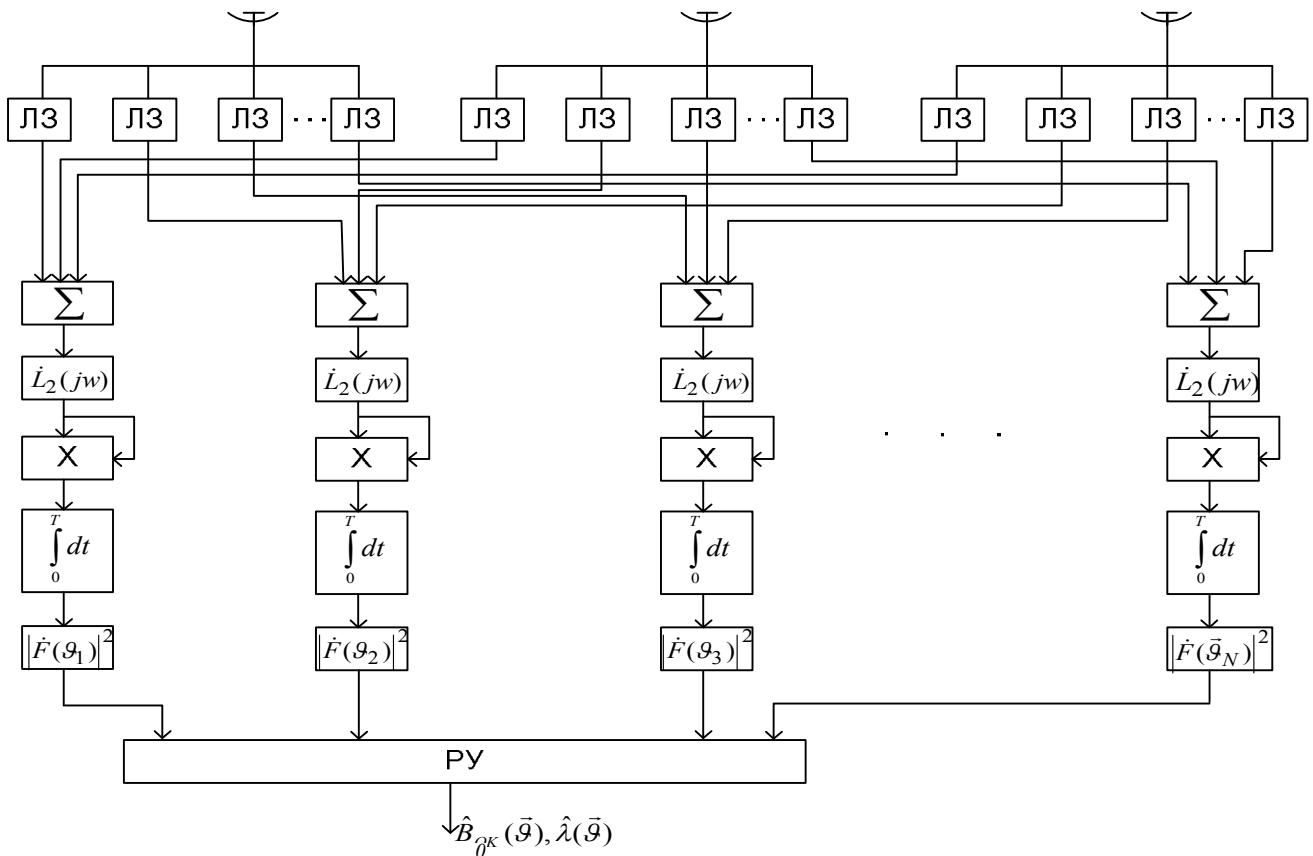


Рис. 11.1. Структурна схема синтезованої системи з антенами решітками

У цій схемі система ліній затримок затримує сигнали відповідно нахилу фронту падаючого поля. У суматорах для кожного з напрямків $\vec{\theta}_j$, обраних з якимсь кроком дискретизації сектору огляду, здійснюється синфазне додавання сигналів (інтегрування $\int_{D'} u_{k\Sigma}(t - \frac{\vec{\theta} \vec{r}'}{c}, \vec{r}') d\vec{r}'$ замінене

додаванням $\sum_{i=1}^M u_{k\Sigma}(t - \frac{\vec{\theta} \vec{r}'_i}{c}, \vec{r}'_i)$, де \vec{r}'_i – координати фазових центрів елементарних антен), що надходять із відповідних виходів елементів антеної решітки. Отримані сигнали $u_{D'}(t)$ декорелюються у фільтрах $\dot{L}_2(j2\pi f)$, і на виходах інтеграторів формуються сигнали, що пропорційні потужності декорельованих сигналів. Після множення отриманих сигналів на функцію $|\dot{F}_A(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0, f_0)|^{-2}$, рівну зворотній діаграмі спрямованості по потужності елементарної антени, що входить до складу антеною решітки, а також після нормування на величину $\Delta f_{kw} TX'_m Y'_m$ і віднімання зсувів

B_{wn_k} і $B_{wn_{kp}}$ маємо оцінку спектральної яскравості $\hat{B}_{0k}(\vec{g})$. З математичної залежності цієї яскравості $\hat{B}_{0k}[\vec{g}_j, \lambda(\vec{g}_j)]$, певною електродинамічною або емпіричною моделлю теплового випромінювання досліджуваного середовища, розв'язавши відповідну систему нелінійних рівнянь [9], знаходимо оцінки параметрів $\hat{\lambda}(\vec{g}_j)$.

Розглянемо тепер інші можливі варіанти формування вихідного ефекту (11.65) за умови факторизації множника (11.68) при періодограмі.

Запишемо вираз (11.72) для вихідного ефекту радіометричної системи з урахуванням (11.73) у такому виді:

$$\begin{aligned}
 Y_{вих_k}(\vec{g}) &= \left| \dot{L}_{kI}(\vec{g}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_T \int_{T'} \int_{D'} \int_{D'} u_{k\Sigma} \left(t_1 - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c} \right) u_{k\Sigma} \left(t_2 - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c} \right) \times \\
 &\quad \times h_{kw}(t-t_1) h_{kw}(t-t_2) dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\
 &= \left| \dot{L}_{kI}(\vec{g}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_T \int_{D'} u_{k\Sigma} \left(t_1 - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c} \right) h_{kw}(t-t_1) d\vec{r}' dt_1 \right|^2 dt. \quad (11.81)
 \end{aligned}$$

У свою чергу, цей вихідний ефект можна представити наступними формулами:

$$\begin{aligned}
 Y_{вих_k}(\vec{g}) &= \left| \dot{L}_{kI}(\vec{g}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{D'} \left\{ \int_T u_{k\Sigma} \left(t_1 - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right) h_{kw}(t-t_1) dt_1 \right\} d\vec{r}' \right|^2 dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{D'} u_{kw} \left(t - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c} \right) d\vec{r}' \right|^2 dt \sim \int_T \left| \sum_{i=1}^M u_{kw} \left(t - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_i}{c}, \vec{r}'_i \right) \right|^2 dt; \quad (11.82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{вих_k}(\vec{g}) &= \left| \dot{L}_{kI}(\vec{g}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_T h_{kw}(t-t_1) \left\{ \int_{D'} u_{k\Sigma} \left(t_1 - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c} \right) d\vec{r}' \right\} dt_1 \right|^2 dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_T h_{kw}(t-t_1) u_{kD'}(t_1) dt_1 \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| u_{kD'_w}(t) \right|^2 dt \approx \int_T \left| u_{kD'_w}(t) \right|^2 dt \square
 \end{aligned}$$

$$\square \int_T \left| \int_T h_{kw}(t-t_l) \left\{ \sum_{i=1}^M u_{k\Sigma} \left(t_l - \frac{\vec{g}\vec{r}'_i}{c}, \vec{r}'_i \right) \right\} dt_l \right|^2 dt. \quad (11.83)$$

Тут

$$u_{kw} \left(t - \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c} \right) = \int_T u_{k\Sigma} \left(t_l - \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c} \right) h_{kw}(t-t_l) dt_l, \quad (11.84)$$

$$u_{kD'}(t, \vec{g}) = \int_{D'} u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right) d\vec{r}' \sim \sum_{i=1}^M u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{g}\vec{r}'_i}{c}, \vec{r}'_i \right). \quad (11.85)$$

Таким чином, наближені реалізації цих алгоритмів при прийманні дискретною антеною системою у вигляді антеною решітки можна представити виразом

$$Y_{\text{вих } k}(\vec{g}) \approx \int_T \left| \sum_{i=1}^M u_{kw} \left(t - \frac{\vec{g}\vec{r}'_i}{c}, \vec{r}'_i \right) \right|^2 dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_T h_{kw}(t-t_l) \sum_{i=1}^M u_{k\Sigma} \left(t_l - \frac{\vec{g}\vec{r}'_i}{c}, \vec{r}'_i \right) \right|^2 dt. \quad (11.86)$$

Розглянемо послідовність алгоритмічних операцій:

1. Відповідно до формули (11.82) і першої частини формули (11.86) виконується затримка $u(t, \vec{r}') \rightarrow u \left(t - \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right)$ і декореляція (формула

(11.84)) у фільтрі $\dot{L}_{k2}(j2\pi f) \div h_{kw}(\tau)$, а потім додавання, піднесення у квадрат і інтегрування;

2. Відповідно до формули (11.83) і другої частини формули (11.86) виконується затримка $u(t, \vec{r}') \rightarrow u \left(t - \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right)$, додавання затриманих

сигналів згідно з формулою (11.85), а потім – декореляція, піднесення у квадрат і інтегрування.

У першому варіанті декорелюючі фільтри необхідно ставити після кожної лінії затримки. Другий варіант більш кращий, тому що фільтри ставляться після суматорів, кількість яких значно менше числа ліній затримок. Очевидно, що декорелюючі фільтри можна ставити і на виході кожної антени (або лінійного тракту приймача). Це можна обґрунтувати математично в такий спосіб.

Коефіцієнт передачі лінії затримки і її імпульсна характеристика будуть такими:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{лз}(j2\pi f) &= e^{-j2\pi f t_3}, \quad t_3 = \frac{\bar{g}\bar{r}'}{c}, \\ h_{лз}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t_3} e^{j2\pi f t} df = \delta(t - t_3). \end{aligned} \quad (11.87)$$

Тоді

$$\begin{aligned} u_{k\Sigma}\left(t - \frac{\bar{g}\bar{r}'}{c}, \bar{r}'\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{k\Sigma}(t - \tau, \bar{r}') h_{лз}(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{k\Sigma}(t - \tau, \bar{r}') \delta\left(\tau - \frac{\bar{g}\bar{r}'}{c}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (11.88)$$

Спочатку затриманий, а потім декорельований сигнал (11.84) можна записати в наступному виді:

$$\begin{aligned} u_{kw}\left(t - \frac{g\bar{r}'}{c}, \bar{r}'\right) &= \int_T u_{k\Sigma}\left(t_1 - \frac{\bar{g}\bar{r}'}{c}, \bar{r}'\right) h_{kw}(t - t_1) dt_1 = \\ &= \int_T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_{k\Sigma}(t_1 - \tau, \bar{r}') \delta\left(\tau - \frac{\bar{g}\bar{r}'}{c}\right) d\tau \right\} h_{kw}(t - t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Цей же сигнал можна представити таким виразом:

$$\begin{aligned} u_{kw}\left(t - \frac{g\bar{r}'}{c}, \bar{r}'\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{kw}(t - \tau) \delta\left(\tau - \frac{\bar{g}\bar{r}'}{c}\right) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_T u_{k\Sigma}(t', \bar{r}') h_{kw}(t - t' - \tau) dt' \right\} \delta\left(\tau - \frac{\bar{g}\bar{r}'}{c}\right) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{kw}(t - \tau) \delta\left(\tau - \frac{\bar{g}\bar{r}'}{c}\right) d\tau, \end{aligned} \quad (11.89)$$

де

$$u_{kw}(t, \bar{r}') = \int_T u_{k\Sigma}(\tau, \bar{r}') h_{kw}(t - \tau) dt \quad (11.90)$$

є сигналом, підданим декореляції після його реєстрації елементом антеною системи в точці \bar{r}' .

З аналізу (11.89) випливає, що спочатку можна виконати декореляцію сигналів, а потім їх затримку з наступним синфазним додаванням від усіх антен для кожного з напрямків, що покривають заданий сектор огляду. Декореляцію можна виконати безпосередньо на виході кожної антени (або

на виході ЛЧП). Можливість комбінування просторової і часової обробок у таких послідовностях пов'язана з факторизацією (11.68).

Розглянемо тепер особливості реалізації алгоритму формування $Y_{\text{вих}_k}(\vec{\mathcal{G}})$ при виконанні умови ПЧВ. У цьому випадку при просторових змінних можна знехтувати зміною частоти f і записати $f \approx f_0$. Для того щоб коректно ввести в показники експонент частоту f_0 , необхідно врахувати двосторонній характер комплексного спектра Фур'є. Розглянемо спочатку вид V_F^{-1} перетворення (11.10) при виконанні умови ПЧВ, враховуючи, що комплексний спектр є двостороннім і вузьким на околицях частот $f = f_0$ і $f = -f_0$:

$$\dot{A}_{ks}(f, \vec{\mathcal{G}}) = \dot{A}_{ks}(f - f_0, \vec{\mathcal{G}}) + \dot{A}_{ks}^*(-f - f_0, \vec{\mathcal{G}}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} u_{ks}(t, \vec{r}') &= V_F^{-1} \left\{ \dot{A}_{ks} [f, \vec{\mathcal{G}}] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{ks} [f, \vec{\mathcal{G}}] \exp\{j2\pi f(t + c^{-1}\vec{\mathcal{G}}\vec{r}')\} df d\vec{\mathcal{G}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\dot{A}_{ks}(f - f_0, \vec{\mathcal{G}}) + \dot{A}_{ks}^*(-f - f_0, \vec{\mathcal{G}}) \right] \exp\{j2\pi f(t + c^{-1}\vec{\mathcal{G}}\vec{r}')\} df d\vec{\mathcal{G}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f_0 c^{-1}\vec{\mathcal{G}}\vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{ks}(f - f_0, \vec{\mathcal{G}}) \exp(j2\pi ft) df d\vec{\mathcal{G}} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f_0 c^{-1}\vec{\mathcal{G}}\vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{ks}^*(f - f_0, \vec{\mathcal{G}}) \exp(j2\pi ft) df d\vec{\mathcal{G}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0,5\dot{u}(t, \vec{\mathcal{G}}) \exp(j2\pi f_0 c^{-1}\vec{\mathcal{G}}\vec{r}') d\vec{\mathcal{G}} + \int_{-\infty}^{\infty} 0,5\dot{u}^*(t, \vec{\mathcal{G}}) \exp(-j2\pi f_0 c^{-1}\vec{\mathcal{G}}\vec{r}') d\vec{\mathcal{G}} = \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(t, \vec{\mathcal{G}}) \exp(j2\pi f_0 c^{-1}\vec{\mathcal{G}}\vec{r}') d\vec{\mathcal{G}} = \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2\dot{A}_{ks}(f - f_0, \vec{\mathcal{G}}) \exp\left[j2\pi\left(ft + f_0 c^{-1}\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'\right)\right] df d\vec{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

Остаточно для сигналу, що задовольняє умові ПЧВ, отримаємо

$$\begin{aligned} u_{ks}(t, \vec{r}') &= \operatorname{Re} \dot{u}_{ks}(t, \vec{r}') = \operatorname{Re} [u_{ks}(t, \vec{r}') + j u_{\perp ks}(t, \vec{r}')] = \\ &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \dot{A}_{ks}(f, \vec{\mathcal{G}}) \exp \left[j 2 \pi (ft + f_0 c^{-1} \vec{\mathcal{G}} \vec{r}') \right] df d\vec{\mathcal{G}}, \end{aligned}$$

де

$$\dot{A}_{ks}(f, \vec{\mathcal{G}}) = \begin{cases} 2 \dot{A}_{ks}(f - f_0, \vec{\mathcal{G}}), & f > 0; \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$

Тут під знаком Re маємо звичайне тривимірне просторово-часове перетворення Фур'є.

Очевидно, що

$$f_0^{-2} c^2 \dot{A}_{ks}(f, \vec{\mathcal{G}}) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{ks}(t, \vec{r}') \exp \left[-j 2 \pi (ft + f_0 c^{-1} \vec{\mathcal{G}} \vec{r}') \right] dt d\vec{r}'.$$

Таким чином, при виконанні умови ПЧВ міняти безпосередньо частоту f на f_0 можна тільки при роботі з аналітичними процесами і їх однобічними спектрами.

Запишемо тепер інтеграл, що входить у періодограму (11.41), у такому виді:

$$\begin{aligned} & \int_{D'} \int_T u_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \exp \left\{ -j 2 \pi f \left(t + \frac{\mathcal{G} \vec{r}'}{c} \right) \right\} dt d\vec{r}' = \\ &= \int_{D'} \exp \left(-j 2 \pi f \frac{\mathcal{G} \vec{r}'}{c} \right) \int_T u_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \exp(-j 2 \pi ft) dt d\vec{r}' \approx \\ & \approx \int_{D'} \dot{S}_{uk\Sigma}(f, \vec{r}') \exp \left(-j 2 \pi f \frac{\mathcal{G} \vec{r}'}{c} \right) d\vec{r}'. \end{aligned}$$

При великому часі спостереження T підінтегральний вираз практично являє собою образ Фур'є, тобто спектральну щільність комплексної амплітуди $\dot{S}_{uk\Sigma}(f, \vec{r}')$ функції часу $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$, спектральні компоненти якої зсунуті по фазі на величину $2\pi f \frac{\mathcal{G} \vec{r}'}{c}$ в кожній точці розкриву $\vec{r}' \in D'$. Цей зсув, що

входить в оптимальний алгоритм обробки, компенсує запізнювання поля по похилому фронту падаючої хвилі на розкриві D' з метою наступного синфазного додавання. Зсув по фазі всіх гармонік у спектрі відповідно до теореми зсуву в перетвореннях Фур'є відповідає проходженню процесу через

лінію затримки на час $t_3(\vec{r}') = \vec{g}\vec{r}'/c$ із коефіцієнтом передачі $\exp(-j2\pi f \vec{g}\vec{r}'/c)$. Якщо процес вузькосмуговий, то можна вважати що $f \approx f_0$. При цьому функція $\exp(-j2\pi f_0 \vec{g}\vec{r}'/c)$ є коефіцієнтом передачі фазообертача. Однак необхідно взяти до уваги, що комплексні спектри Фур'є тут двосторонні, тобто частоти f і f_0 розташовані симетрично в областях позитивних і негативних частот:

$$\dot{S}_{uk\Sigma}(f, \vec{r}') = \dot{S}_{uk\Sigma}(\vec{r}', f - f_0) + \dot{S}_{uk\Sigma}^*(\vec{r}', -f - f_0).$$

Тут перший доданок визначений тільки в області позитивних частот, а друге – негативних. Уважаючи що ці спектри в кожній з областей частот вузькі, можна зробити наближену заміну частоти під знаком експоненти на частоти $f \approx f_0$ і $f \approx -f_0$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_{D'} \dot{S}_{uk\Sigma}(f, \vec{r}') \exp\left(-j2\pi f \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c}\right) d\vec{r}' \approx \\ & \approx \int_{D'} \dot{S}_{uk\Sigma}(\vec{r}', f - f_0) \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c}\right) d\vec{r}' + \\ & + \int_{D'} \dot{S}_{uk\Sigma}^*(\vec{r}', -f - f_0) \exp\left(j2\pi f_0 \frac{\vec{g}\vec{r}'}{c}\right) d\vec{r}'. \end{aligned}$$

Перейдемо від однобічних спектрів до їхніх зворотних образів Фур'є, що мають вид комплексно-сполучених аналітичних процесів:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{u}_{k\Sigma}(\vec{r}', t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{uk\Sigma}(\vec{r}', f - f_0) \exp(j2\pi ft) df = \\ &= \left| f - f_0 = f', f = f' + f_0, df = df' \right| = \\ &= \exp(j2\pi f_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{uk\Sigma}(\vec{r}', f') \exp(j2\pi f't) df' = \\ &= \frac{1}{2} \dot{U}_{0k\Sigma}(\vec{r}', t) \exp(j2\pi f_0 t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{uk\Sigma}^* (\vec{r}', -f - f_0) \exp(j2\pi ft) df = \\
& = |-f - f_0 = f', f = -f' - f_0, df = -df'| = \\
& = \exp(-j2\pi f_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{uk\Sigma}^* (\vec{r}', f') \exp(-j2\pi f' t) df' = \\
& = \frac{1}{2} \dot{U}_{0k\Sigma}^* (\vec{r}', t) \exp(-j2\pi f_0 t).
\end{aligned}$$

Коефіцієнт $1/2$ обумовлений тим, що аналітичний сигнал має подвоєний по величині однобічний спектр. Тоді

$$\begin{aligned}
& \int_{D'} \int_T u_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \exp\left\{-j2\pi f\left(t + \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}\right)\right\} dt d\vec{r}' \approx \\
& \approx 0,5 \int_T \exp(-j2\pi ft) \int_{D'} \dot{u}_{k\Sigma}(\vec{r}', t) \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}\right) dt d\vec{r}' + \\
& + 0,5 \int_T \exp(-j2\pi ft) \int_{D'} \dot{u}_{k\Sigma}^*(\vec{r}', t) \exp\left(j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}\right) dt d\vec{r}' = \\
& = \int_T \exp(-j2\pi ft) \operatorname{Re} \int_{D'} \dot{u}_{k\Sigma}(\vec{r}', t) \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}\right) d\vec{r}' dt = \\
& = \int_T \exp(-j2\pi ft) \operatorname{Re} \int_{D'} \dot{U}_{0k\Sigma}(\vec{r}', t) \exp(j2\pi f_0 t) \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}\right) d\vec{r}' dt. \quad (11.91)
\end{aligned}$$

У результаті вихідний ефект $Y_{\text{вих}k}(\vec{\mathcal{G}})$ у рівнянні (11.53) і представлений у факторизованному виді виразом (11.69) у випадку виконання умови ПЧВ (КМН) прийме такий вид:

$$\begin{aligned}
Y_{\text{вих}k}(\vec{\mathcal{G}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^2}{B_{k\Sigma}^2[f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]} |\dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}})|^2 df \approx \\
& \approx |\dot{L}_{k1}(\vec{\mathcal{G}})|^2 \int_{-\infty}^{\infty} df |\dot{L}_{k2}(j2\pi f)|^2 \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c} \right) \right\} \exp(-j2\pi f t_1) \times \\
& \times \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c} \right) \right\} \exp(j2\pi f t_2) dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\
& = \left| \dot{L}_{kI}(\mathcal{G}) \right|^2 \int_T \int_T \int_{D'} \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c} \right) \right\} \times \\
& \quad \times \int_{D'} \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c} \right) \right\} \times \\
& \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k2}(j2\pi f) \right|^2 e^{j2\pi f(t_2-t_1)} df dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\
& = \left| \dot{L}_{kI}(\mathcal{G}) \right|^2 \int_T \int_T H_{kw}(t_1-t_2) \operatorname{Re} \left[\dot{S}_{kD'}(t_1, \vec{\mathcal{G}}) e^{j2\pi f_0 t_1} \right] \operatorname{Re} \left[\dot{S}_{kD'}(t_2, \vec{\mathcal{G}}) e^{j2\pi f_0 t_2} \right] dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Застосовуючи метод комплексних огинаючих (див. розд. 5.6, формула (5.97)), знаходимо

$$\begin{aligned}
Y_{\text{ввих}k}(\vec{\mathcal{G}}) & \approx 0,5 \operatorname{Re} \left| \dot{L}_{kI}(\mathcal{G}) \right|^2 \times \\
& \times \int_T \int_T H_{kw}(t_2-t_1) \dot{S}_{kD'}(t_1, \vec{\mathcal{G}}) e^{j2\pi f_0 t_1} \dot{S}_{kD'}^*(t_2, \vec{\mathcal{G}}) e^{-j2\pi f_0 t_2} dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Тут

$$\dot{S}_{kD'}(t, \vec{\mathcal{G}}) = \int_{D'} \dot{U}_{0k\Sigma}(\vec{r}', t) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c} \right) d\vec{r}'. \quad (11.92)$$

Формування даної функції є дією фокусування системи на сукупність напрямків $\vec{\mathcal{G}}$. Реалізація цієї операції вимагає підключення до елементів розкриття антени системи з координатами \vec{r}' фазообертачів з коефіцієнтами передачі $\exp(-j2\pi f_0 \mathcal{G}\vec{r}'/c)$ і наступного когерентного (синфазного) додавання комплексних огинаючих сигналів, знятих з кожного елемента $d\vec{r}'$ апертури для кожного $\vec{\mathcal{G}}$ значення із сукупності напрямків, що покривають заданий сектор спостереження за просторово-протяжним об'єктом.

Враховуючи парність функції $H_{kw}(t_1 - t_2)$ і її представлення у вигляді (11.73), маємо

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{вих } k}(\vec{\mathcal{G}}) &= 0,5 \operatorname{Re} \left| \dot{L}_{kI}(\mathcal{G}) \right|^2 \int_T^T \int_T^T H_{kw}(t_1 - t_2) \dot{S}_{kD'}(t_1, \vec{\mathcal{G}}) \dot{S}_{kD'}^*(t_2, \vec{\mathcal{G}}) dt_1 dt_2 = \\
 &= \frac{\operatorname{Re} \left| \dot{L}_{kI}(\mathcal{G}) \right|^2}{2} \int_T^T \int_{-\infty}^{\infty} h_{kw}(t - t_1) h_{kw}(t - t_2) \times \\
 &\quad \times \dot{S}_{kD'}(t_1, \vec{\mathcal{G}}) e^{j2\pi f_0 t_1} \dot{S}_{kD'}^*(t_2, \vec{\mathcal{G}}) e^{-j2\pi f_0 t_2} dt dt_1 dt_2 = \\
 &= 0,5 \operatorname{Re} \left| \dot{L}_{kI}(\mathcal{G}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_T^T h_{kw}(t - t_1) \dot{S}_{kD'}(t_1, \vec{\mathcal{G}}) e^{j2\pi f_0 t_1} dt_1 \times \\
 &\quad \times \int_T^T h_{kw}(t - t_2) \dot{S}_{kD'}^*(t_2, \vec{\mathcal{G}}) e^{-j2\pi f_0 t_2} dt_2 dt = \\
 &= 0,5 \left| \dot{L}_{kI}(\mathcal{G}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_T^T h_{kw}(t - \tau) \dot{S}_{kD'}(\tau, \vec{\mathcal{G}}) d\tau \right|^2 dt \approx \\
 &\quad \approx \left| \dot{L}_{kI}(\mathcal{G}) \right|^2 \int_T^T \left| u_{kD'_w}(t) \right|^2 dt. \tag{11.93}
 \end{aligned}$$

З аналізу отриманих результатів випливає, що структурна схема багатопроменевого вузькосмугового радіометра практично така ж, тільки в ній лінії затримок замінені фазообертачами, що зміщують центральну частоту прийнятого вузькосмугового коливання по фазі на величину

$$\varphi = 2\pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'}{c}.$$

11.4. Алгоритми оцінок радіояскравості і параметрів джерела при довільній роздільній здатності радіометричної системи за кутовими координатами

У підрозд. 11.1-11.3, були розглянуті квазіоптимальні розв'язки й відповідні алгоритми в припущенні високої роздільної здатності системи (яскравість вважалася постійною в межах функції невизначеності) як без операцій декореляції спостережуваних процесів, так і з декореляцією.

Розглянемо випадок, коли роздільна здатність за кутовими напрямками може бути будь-якою. Це найпоширеніший випадок, тому що реальні розміри площ антенних систем кінцеві. Але по частоті f базова функція невизначеності практично завжди є дуже вузькою. Ширина базової функції невизначеності по частоті, як це видно з формул (11.34) і (11.39), обернена до часу спостереження ($\sim 1/T$) і залежно від реального часу спостереження може становити від десятків герців до одиниць герца. Для широкосмугових і надширокосмугових систем, смуги частот яких становлять від сотень мегагерц до декількох гігагерц, така ширина дуже мала і у її межах спектральну яскравість по частоті можна вважати постійною величиною. Практичну реалізацію такої високої роздільної здатності здійснити непросто. Однак у цій роботі задача оцінки спектральної яскравості як функції частоти й відповідної до роздільної здатності не ставиться, а ставиться тільки задача оцінки постійного значення яскравості в робочому діапазоні частот і пов'язаних з нею параметрів протяжного джерела випромінювання як функцій напрямків $\vec{\vartheta}$. Можна вважати також, що ця постійна яскравість збігається із середньою яскравістю або пропорційна інтегральній яскравості (потужності випромінювання) у межах робочої смуги АЧХ радіометричної системи.

Проте, вузька по частоті базова функція невизначеності $\dot{\Psi}\left(f_1 - f_2, \frac{f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2}{c}\right)$ використовується в математичних перетвореннях,

тому що впливає на характер інтегралів, що обчислюються, і результуючий вид системи одержуваних інтегральних рівнянь як алгоритмів обробки спостережуваних сигналів. Таким чином, як видно з алгоритму (11.43), у ньому здійснюється інтегрування по частотах і оцінюється вже не спектральна яскравість, а яскравість, інтегральна по частоті, яка по розмірності дорівнює середній потужності, віднесеної до одиниці тілесного кута. Забезпечення конзистентності її оцінки вимагає усереднення періодограми, яке можна здійснити шляхом інтегрування в межах смуги частот, обумовленої результуючої АЧХ радіометра, причому в межах цієї смуги спектральна яскравість припускається практично постійної, тобто $B_{0k}(f, \dots) = B_{0k}(f_0, \dots)$. Оскільки мова йде про інтегральну по частоті яскравості, то можна приблизно також орієнтуватися не на постійне її значення в межах смуги, а на середнє.

Враховуючи, що в (11.33) для базової функції невизначеності $\dot{\Psi}(f_1 - f_2, f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2) = \dot{\Psi}_T(f_1 - f_2) \dot{\Psi}_D(f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2)$ множник $\dot{\Psi}_T(f_1 - f_2)$, що визначає роздільну здатність по частоті, є вузьким і в його межах функції $B_{k\Sigma}(f_2, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vartheta_2))$, $\dot{\Psi}_D(f_1 \vec{\vartheta}_1 - f_2 \vec{\vartheta}_2)$ і f_2^4 практично постійні, винесемо їх за знак інтеграла по f_2 в точці f_1 . Тоді ліва частина системи рівнянь (11.43) прийме наступний вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1)\dot{F}_A(\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}(f_1, \bar{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vartheta_2))} \left| \dot{\Psi}_{D'} \left[f_1 (\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_2) \right] \right|^2 d\bar{\vartheta}_2 df_1 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{\Psi}_T(f_1 - f_2) \right|^2 df_2.$$

З урахуванням того, що (див. рівняння (11.50))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{\Psi}_T(f_1 - f_2) \right|^2 df_2 = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 [\pi(f_2 - f_1)T] df_2 = T,$$

система рівнянь (11.43) перетвориться в такий спосіб:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1)\dot{F}_A(\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}(f_1, \bar{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vartheta_2))} \left| \dot{\Psi}_{D'} \left[f_1 (\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_2) \right] \right|^2 d\bar{\vartheta}_2 df_1 =$$

$$= (\Rightarrow) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1^4}{c^4} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f_1)\dot{F}_A(\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}^2(f, \bar{\vartheta}_1, \lambda(\bar{\vartheta}_1))} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f_1 \bar{\vartheta}_1) \right|^2 df_1 =$$

$$= \frac{1}{T} Y_{\text{вix}_k}(\bar{\vartheta}_1). \quad (11.94)$$

Множник

$$\frac{f_1^4}{c^4} \frac{|\dot{K}(j2\pi f_1)\dot{F}_A(\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_0, f_1)|^2}{B_{k\Sigma}^2(f, \bar{\vartheta}_1, \lambda(\bar{\vartheta}_1))} = \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \bar{\vartheta}_1, \lambda(\bar{\vartheta}_1)] \right|^2 \quad (11.95)$$

по зовнішньому вигляду такий самий, як і множник (11.64), відповідає за просторово-часову декореляцію спостережуваного процесу. Декореляція є адаптивною, тому що залежить від величин оцінюваних параметрів $\vec{\lambda}(\bar{\vartheta}_1)$.

Знаменник можна спростити, вибравши деяке середнє значення $\vec{\lambda}(\bar{\vartheta}_1) \approx \vec{\lambda}_0$ й виключивши адаптацію.

Для того щоб спростити обробку сигналів, розділивши її на етапи просторової й часової обробки, можна факторизувати цей множник, представивши його у вигляді (11.68). Методика визначення основних алгоритмічних операцій при поділі просторової й часової обробки вже була представлена вище відповідними математичними перетвореннями. Нижче, для стислості, розглянемо алгоритми в більш загальному виді без факторизації множника (11.95).

Помноживши чисельник і знаменник у лівій частині системи (11.94) на $B_{k\Sigma}[f, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)]$ й спростивши знаменники, прийнявши їх рівними $B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\vartheta}_1, \lambda_0)$ і тим самим виключивши адаптацію, отримаємо таку систему рівнянь (алгоритм обробки):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)] \right|^2 B_{k\Sigma}[f, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)] d\vec{\vartheta}_2 df =$$

$$= (\Rightarrow) = \frac{I}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\vartheta}_1) \right|^2 df. \quad (11.96)$$

Для одержання остаточних рівнянь оцінок радіояскравостей $B_{ok}[\vec{\vartheta}, f, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta})]$ і вхідних до них параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\vartheta})$ підставимо в це рівняння вираз (11.19) і (11.20). Як і раніше, вважаємо, що в межах смуги $\dot{K}_k(j2\pi f) = \dot{K}_k[j2\pi(f - f_0)]$ яскравість $B_{ok}(f, \dots) = B_{ok}(f_0, \dots)$. Крім того, функція спрямованості $\dot{F}_A(\vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_0, f) \approx \dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f)$ в межах функції невизначеності, тому що в реальних антенних решітках вона відповідає діаграмі спрямованості елементарної антени, яка значно ширше функції $\dot{\Psi}_{D'}[f_1(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)]$. Тоді отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{ok}[f_0, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f) \right|^2 \left| \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)] \right|^2 df d\vec{\vartheta}_2 +$$

$$+ \frac{N_{ok}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^2}{c^2} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)] \right|^2 d\vec{\vartheta}_2 df +$$

$$+ \frac{N_{okp}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^2}{c^2} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)] \right|^2 d\vec{\vartheta}_2 df =$$

$$= (\Rightarrow) = \frac{I}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\vartheta}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\vartheta}_1) \right|^2 df, \quad (11.97)$$

або

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{ok}[f_0, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)] \Psi_{kw}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2) d\vec{\vartheta}_2 =$$

$$\begin{aligned}
= (\Rightarrow) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1) \right|^2 df - BI_{wn_k} - BI_{wn_{kp}} = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left| uI_{kD'_w}(t, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 dt - BI_{wn_k} - BI_{wn_{kp}}, \quad (11.98)
\end{aligned}$$

де функція $uI_{kD'_w}(t)$ визначається виразами, що аналогічні (11.71) – (11.75) із заміною $\dot{L}_{k2}(j2\pi f)$ на $\dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0]$. Коефіцієнти BI_{wn_k} й $BI_{wn_{kp}}$ – це другий і третій доданок системи рівнянь (11.97). Як і в алгоритмі (11.77), зсув оцінок яскравості $B_{0k}(f_0, \dots)$ може бути видалений. Алгоритм відповідає окремому каналу радіометра, сфокусованому на напрямок $\vec{\mathcal{G}}_1$ і виконаному за схемою компенсаційного радіометра. Доданком $BI_{wn_{kp}}$ можна знехтувати, тому що він пов'язаний з малою регуляризуючою добавкою $n_{kp}(t, \vec{r}')$ в рівнянні спостереження (11.1). Зовні структурна схема радіометра, відповідно до алгоритму (11.98), мало чим відрізняється від схеми, показаної на мал. 11.1. У ній необхідно замінити фільтри $\dot{L}_{k2}(j2\pi f)$ на фільтри $\dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0]$ і виключити блоки $\left| \dot{L}_{k1}(\vec{\mathcal{G}}) \right|^2$.

У лівій частині системи рівнянь (11.97), які можна віднести до класу інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду, внутрішній інтеграл

$$\begin{aligned}
&\Psi_{kw}(\vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\mathcal{G}}_2) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2 \left| \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)] \right|^2 df = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k3}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0) \right|^2 \left| \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)] \right|^2 df, \quad (11.99)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\left| \dot{L}_{k3}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0) \right|^2 &= \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2 = \\
&= \frac{f^4 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^4}{c^4 B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0)}, \quad (11.100)
\end{aligned}$$

дорівнює результуючій (з урахуванням декореляції в правій частині) **функції невизначеності надширокосмугової (широкосмугової) системи** з обробкою, близькою до оптимальної. Вона згладжує по змінній $\vec{\mathcal{G}}$ функції $B_{0k}(\vec{\mathcal{G}})$ і $\lambda(\vec{\mathcal{G}})$, а також визначає якість і, насамперед здатність, що дозволяє, відтворення $B_{0k}(\vec{\mathcal{G}})$ спектральної яскравості. Її дослідження (вид головної пелюстки, рівень бічних пелюсток і ін.) становить особливий інтерес. Завдяки декореляції, пов'язаної із множителем $\left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2$, у системі має місце деяке надрозділення, обумовлене закладеним в алгоритмі розв'язком специфічної зворотної задачі по відновленню функції $B_{0k}(\vec{\mathcal{G}})$ як статистичної характеристики неоднорідного (нестационарного по $\vec{\mathcal{G}}$) випадкового процесу (процесу з мінливою інтенсивністю, пропорційної $B_{0k}(\vec{\mathcal{G}})$). Однак вид інтегрального рівняння (11.98) допускає його додатковий розв'язок як некоректної зворотної задачі визначення функції $B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)]$ з-під знака інтеграла як оператора з ядром $\Psi_{kw}(\vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\mathcal{G}}_2)$.

Визначення виразу (11.99) як функції невизначеності (апаратній функції) надширокосмугової квазіоптимальної радіометричної системи апертурного синтезу відповідає введеному в розд. 4 поняттю діаграми спрямованості надширокосмугової антеної системи (див. формулу (4.59a)). Особливістю цього виразу є те, що ефективна ширина смуги частот під функцією $\left| \dot{L}_{k3}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0) \right|^2$ ширше смуги АЧХ $\left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|$ завдяки введенню інверсної фільтрації, що здійснює декореляцію спостережуваних сигналів. Розширення смуги АЧХ у виразах (4.59a) і (11.99) поліпшує вид діаграми спрямованості і функції невизначеності, роблячи їх головні пелюстки більш вузькими і знижуючи рівень бічних пелюсток.

Слід зазначити, що класичною є функція невизначеності Вудворта, що визначає спільну роздільну здатність радіолокатора по дальності й швидкості і пов'язані з ними тривалість імпульсу і ширину спектра, що перебувають між собою у зворотній залежності. Така функція невизначеності схожа по своєму фізичному змісту на співвідношення невизначеності Гейзенберга у квантовій механіці. Але останнім часом часто функціями невизначеності стали називати апаратні функції, що визначають роздільну здатність систем і по просторовим, зокрема кутовим, координатам, що, можливо, не зовсім коректно. Для функцій, що характеризують роздільну здатність по багатьом змінним (по дальності, швидкості, кутових координатах і ін.), ймовірно, таке визначення може бути прийнятним.

Якщо в заданій смузі частот $\dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2) \approx \dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)$ і $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_2 - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \approx \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_2 - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0)$, то, виносячи за знак інтеграла за змінною f ці множники в (11.97), приходимо до спрощеної системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^4 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_{k4}[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{K}(j2\pi f) \right|^2 df \right\} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)] \left| \dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)] \right|^2 d\vec{\mathcal{G}}_2 + B_{2wn_k} + B_{2wn_{kp}} = \\ & = (\Rightarrow) = \frac{I}{T} \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_{k4}[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1) \right|^2 df. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо такий алгоритм оцінок радіояскравостей $\hat{B}_{ok}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)]$ і параметрів $\hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)$:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{ok}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_{ok}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)] \left| \dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)] \right|^2 d\vec{\mathcal{G}}_2 \approx \\ &\approx \frac{I}{T \Delta F_{kw}(\vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0) \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2} \int_0^T \left| u_{2kD'_w}(t, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 dt - B_{2wn_k} - B_{2wn_{kp}}, \quad (11.101) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta F_{kw}(\vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_{k4}[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{K}(j2\pi f) \right|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4 \left| \dot{K}(j2\pi f) \right|^4}{c^4 B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0)} df, \quad (11.102) \end{aligned}$$

$$\left| \dot{L}_{k4}[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 = \frac{\left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2}{\left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2} = \frac{f^4 \left| \dot{K}(j2\pi f) \right|^2}{c^4 B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0)}. \quad (11.103)$$

Зсув оцінок радіояскравостей B_{2wn_k} і $B_{2wn_{kp}}$ обчислюється в (11.101) із зазначеними вище спрощеннями по тим же формулам, що

й BI_{wn_k} , $BI_{wn_{kp}}$, а $u_{2kD'}(t)$ визначається виразами, аналогічними до (11.75) із заміною $\dot{L}_{k2}(j2\pi f)$ на $\dot{L}_{k4}[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0]$. В алгоритмі (11.101) функція невизначеності $\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)]$ – звичайна (на відміну від заданою формулою (11.99) функції надширокопосмугової системи).

Можна обмежитися в цьому алгоритмі лише формуванням правої частини, що дозволить одержати оцінку яскравості з роздільною здатністю, обумовленою ядром $|\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2$. Однак можна і продовжити задачу визначення функції $B_{ok}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)]$ з-під знака інтеграла відомими методами розв'язку некоректних зворотних задач [14, 15]. Ділення в (11.101) на функцію $|\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^2$ практично є коректним, тому що будучи діаграмою спрямованості елементарного випромінювача в антенній решітці, ця функція досить широка й звичайно містить усе досліджуване зображення в межах своєї головної пелюстки, де практично відсутні її нульові значення.

Основна послідовність операцій, що визначають алгоритмічну структуру квазіоптимального радіометра, містить у собі затримку коливань у різних точках розкриття відповідно до нахилу фронту падаючого поля, що забезпечує їх синфазність для кожного напрямку $\vec{\mathcal{G}}$; додавання; декореляцію; формування сигналів, пропорційних середній потужності декорельованих коливань; розв'язок системи нелінійних рівнянь (11.101) або без визначення з-під знака інтеграла шуканих функцій, або як інтегральних рівнянь із відповідними їхніми оберненнями.

Зовні структурна схема радіометра, що відповідає алгоритму (11.101), мало чим відрізняється від схеми, показаної на рим. 11.1. У ній необхідно замінити фільтри $\dot{L}_{k2}(j2\pi f)$ на фільтри $\dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0]$ і блоки $|\dot{L}_{k1}(\vec{\mathcal{G}})|^2$ на блоки $|\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^2$.

Запишемо тепер систему рівнянь (11.95) у такому виді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0]|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2 B_{k\Sigma}[f, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)] d\vec{\mathcal{G}}_2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{T} |\dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1)|^2 \right\} df = 0. \quad (11.104)$$

Прийнявши в цій системі $\dot{L}[j2\pi f, \vec{\vartheta}, \vec{\lambda}_0] = I$, виключивши тим самим процедуру декореляції, отримаємо більш просту систему рівнянь без використання декорелюючих фільтрів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)]|^2 B_{k\Sigma}[f, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)] d\vec{\vartheta}_2 df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I}{T} |\dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\vartheta}_1)|^2 df. \quad (11.105)$$

Тут становлять інтерес такі наближення: у робочій смузі частот $B_{0k}(f, \dots) = B_{0k}(f_0, \dots) \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)] \approx \dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)]$, $\dot{F}_A(\vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_0, f) \approx \dot{F}_A(\vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_0, f_0)$, умова ПЧВ може не виконуватися.

Підставивши в (11.105) вираження (11.19) і (11.20) для $B_{k\Sigma}[f, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)]$, а також враховуючи рівність (11.62), приходимо до спрощеного алгоритму дії радіометра:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{0k}[f_0, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2)] |\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)]|^2 d\vec{\vartheta}_2 \approx$$

$$\approx \frac{I}{\Delta f I_k T |\dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\vartheta})|^2 df - B3_{n_k}(\vec{\vartheta}) =$$

$$= \frac{I}{\Delta f I_k T |\dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f)|^2} \int_0^T |u_{kD'}(t, \vec{\vartheta})|^2 dt - B3_{n_k}(\vec{\vartheta}), \quad (11.106)$$

де

$$B3_{n_k}(\vec{\vartheta}) = \frac{N_{0k} \Delta f_k}{2 \Delta f I_k |\dot{F}_A(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_0, f)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2)]|^2 d\vec{\vartheta}_2;$$

$$\Delta f I_k = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{K}_k(j2\pi f)|^2 df, \quad \Delta f_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{c^2} |\dot{K}_k(j2\pi f)|^2 df.$$

Доданок з регуляризуючою добавкою $n_{kp}(t)$ тут немає сенсу вводити, тому що в цьому алгоритмі виключені операції інверсної фільтрації. У структурній схемі (див. мал. 11.1) при цьому необхідно виключити фільтри $\dot{L}_2(j\omega)$.

Дані алгоритми відрізняються від раніше отриманих (у припущенні високої роздільної здатності) тим, що праві частини для оцінок радіояскравостей містять згортки дійсних радіояскравостей з функціями невизначеності $\Psi_{kw}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2)$ й $|\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_2)]|^2$. Однак якщо вважати що в робочій смузі частот функція невизначеності $|\dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_2)]|^2$ залежить від частоти, то приходимо до спрощеного алгоритму обробки надширокосмугового випромінювання.

Функція невизначеності $|\dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_2)]|^2$ залежить від частоти, але $B_{0k}(f, \dots) = B_{0k}(f_0, \dots)$, $\dot{F}_A(\vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_0, f) \approx \dot{F}_A(\vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_0, f_0)$. Як відзначалося, функція спрямованості $\dot{F}_A(\vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_0, f_0)$ звичайно дуже широка і мало впливає на зміну зображення, а замість постійної яскравості $B_{0k}(f_0, \dots)$ можна розглядати її деяке середнє (по частотах) значення. Тоді рівняння (11.105) прийме вид

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} B_{0k}[f_0, \vec{\vartheta}_2, \vec{\lambda}(\vec{\vartheta}_2) |\dot{\Psi}_{I_w}[(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_2)]|^2] d\vec{\vartheta}_2 \approx \\ & \approx \frac{I}{T |\dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\vartheta})|^2 df - B_{4n_k}(\vec{\vartheta}) = \\ & = \frac{I}{T |\dot{F}_A(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0, f)|^2} \int_0^T |u_{kD'}(t, \vec{\vartheta})|^2 dt - B_{4n_k}(\vec{\vartheta}), \end{aligned} \quad (11.107)$$

де

$$|\dot{\Psi}_{I_{kw}}[(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_2)]|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{K}_k(j2\pi f) \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_2)]|^2 df \quad (11.108)$$

є функцією невизначеності спрощеної (квазіоптимальної) надширокосмугової радіометричної системи, що практично збігається з визначенням діаграми спрямованості надширокосмугової антени, заданою формулою (4.59а).

Якщо система є вузькосмуговою в околиці частоти f_0 і виконується умова ПЧВ, то всі дії і структурна схема радіометра залишаються такими ж. При цьому обладнаннями затримок є фазообертачі. Синфазне додавання сигналів після зміни їх фаз на величини $2\pi f_0(\vec{\vartheta}\vec{r}/c)$ для різних напрямків еквівалентно формуванню парціальних діаграм —

променів, що покривають заданий сектор огляду. При відсутності операцій декореляції має місце алгоритм, відповідний до принципу дії класичного багатопроменевого радіометра, що формує сигнали, пропорційні середньої потужності коливань, прийнятих по кожному променю.

Алгоритми (11.101) і (11.106) при виконанні умови ПЧВ зовні залишаються такими ж, але інтеграли в правих частинах рівнянь (11.101) і (11.106) при виконанні умови ПЧВ відповідно мають вигляд

$$\int_0^T |u_{kD'_w}(t, \vec{\mathcal{G}})|^2 dt \approx \int_0^T \left| \int_0^T h_{kw}(t-\tau) \dot{S}_{kD'}(\tau, \vec{\mathcal{G}}) d\tau \right|^2 dt, \quad (11.109)$$

$$\int_0^T |u_{kD'}(t, \vec{\mathcal{G}})|^2 dt \approx \int_0^T |\dot{S}_{kD'}(t, \vec{\mathcal{G}})|^2 dt, \quad (11.110)$$

де

$$\dot{S}_{kD'}(\tau, \vec{\mathcal{G}}) = \int_{D'} \dot{U}_{0k\Sigma}(\vec{r}', \tau) \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}\right) d\vec{r}'. \quad (11.111)$$

Формування комплексної функції $\dot{S}_{kD'}(\tau, \vec{\mathcal{G}})$ є результатом дії фокусування системи на сукупність напрямків $\vec{\mathcal{G}}$, тобто приймання сигналів по променях, сформованих антеною системою в цих напрямках. Як і в алгоритмі (11.93), фокусування на заданий напрямок $\vec{\mathcal{G}}$ забезпечується зсувом фаз у фазообертачах з коефіцієнтом передачі $\exp\{-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}\}$ і додаванням синфазних сигналів, отриманих від кожного елемента $d\vec{r}' \in D'$. Інтеграли в (11.109) і (11.110) пропорційні енергії випромінювання, прийнятого з напрямків $\vec{\mathcal{G}}$.

11.5. Особливості використання функцій когерентності широкосмугового і надширокосмугового випромінювання при формуванні вихідного ефекту $Y_{\text{вих } k}(\vec{\mathcal{G}})$

Розглянуті вище алгоритми розглядалися в основному як алгоритми паралельного огляду просторово-протяжних об'єктів, сутність яких полягала у формуванні множини променів, що покривають заданий сектор кутових напрямків і оптимальній оцінці потужності прийнятих сигналів по кожному з них. Ці ж алгоритми можна описати в термінах понять дійсних або комплексних функцій когерентності, що практично збігаються з поняттями дійсних або комплексних просторово-часових кореляційних

функцій або їх статистичних оцінок, що визначаються у процесі вимірювань.

Розглянемо спочатку спрощений квазіоптимальний алгоритм оцінки радіояскравостей $\hat{B}_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ і зосереджених у них параметрів $\hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$, заданий виразом (11.106). У цьому алгоритмі виключена процедура декореляції. Але ніякі обмеження на поведінку по змінній $\vec{\mathcal{G}}$ спектральній яскравості $B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ в межах функції невизначеності $\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)]$, що характеризує роздільну здатність алгоритму, не накладаються, тобто роздільна здатність змін яскравості може бути довільною.

Запишемо вхідну в (11.106) періодограму (11.41) у такому виді:

$$\begin{aligned} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 &= \left| \int_T \int_{D'} u_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \exp \left\{ -j2\pi f \left(t + \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'}{c} \right) \right\} dt d\vec{r}' \right|^2 = \\ &= \int_T \int_{D'} \left\{ \int_T \int_{D'} u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) dt_1 d\vec{r}'_1 \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -j2\pi f \left((t_1 - t_2) + \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right) \right\} dt_2 d\vec{r}'_2. \end{aligned} \quad (11.112)$$

Уведемо заміну змінних:

$$t_2 = t_1 - \tau, \quad dt_2 = -d\tau, \quad \vec{r}'_2 = \vec{r}'_1 - \Delta\vec{r}', \quad d\vec{r}'_2 = -d\Delta\vec{r}'. \quad (11.113)$$

Припустимо, що просторово-часовий інтервал кореляції поля $u(t, r')$ значно менше розміру $T \times D'$. Для прямокутного розкриття його площа $S_{D'} = X'_m Y'_m$. У цьому випадку впливом змін меж інтегрування можна знехтувати і вважати їх практично незмінними. Тоді

$$\begin{aligned} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 &\approx \int_T \int_{D'} \left\{ \int_T \int_{D'} u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_1 - \tau, \vec{r}'_1 - \Delta\vec{r}') dt_1 d\vec{r}'_1 \right\} \times \\ &\times \exp \left[-j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}'}{c} \right) \right] d\tau d\Delta\vec{r}' = \end{aligned}$$

$$= TS_{D'} \int_T \int_{D'} \hat{R}_{uk}(\tau, \Delta\vec{r}') \exp \left[-j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{g}\Delta\vec{r}'}{c} \right) \right] d\tau d\Delta\vec{r}', \quad (11.114)$$

де \hat{R}_{uk} – оцінка кореляційної функції (дійсної функції когерентності),

$$\hat{R}_{uk}(\tau, \Delta\vec{r}') = \frac{1}{TS_{D'}} \int_T \int_{D'} u_{k\Sigma}(t, \vec{r}') u_{k\Sigma}(t - \tau, \vec{r}' - \Delta\vec{r}') dt d\vec{r}'. \quad (11.115)$$

При $T, S_{D'} \rightarrow \infty$

$$\left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{g}) \right|^2 \approx V_F \left(\hat{R}_{uk}(\tau, \Delta\vec{r}') \right). \quad (11.116)$$

Ці формули свідчать про те, що для стаціонарного в часі і однорідного по просторовим координатам ергодичного процесу $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ V_F -періодограма $\left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{g}) \right|^2$ є наближеною оцінкою (неконзистентної) спектральної яскравості $B_{k\Sigma}[f, \vec{g}]$.

Оцінка дійсної функції когерентності перебуває в реальних, тобто кінцевих, межах T, X'_m, Y'_m . Наближене значення цієї функції можна одержати, усереднюючи добуток полів $u_{k\Sigma}(t_l, \vec{r}'_l) u_{k\Sigma}(t_l - \tau, \vec{r}'_l - \Delta\vec{r}')$ тільки за часом:

$$\hat{R}_{uk}(\tau, \Delta\vec{r}') \approx \frac{1}{T} \int_T u_{k\Sigma}(t, \vec{r}') u_{k\Sigma}(t_l - \tau, \vec{r}'_l - \Delta\vec{r}') dt. \quad (11.117)$$

Таким чином, вираз (11.114) – це періодограма (11.41), яка при зазначених перетвореннях практично дорівнює V_F -образу функції когерентності поля й з точністю до постійного коефіцієнта дорівнює неконзистентній оцінці спектральної яскравості $B_{k\Sigma}(f, \vec{g})$, що вимагає усереднення. Усереднення по частотах f природно виявилось при розв'язку розглянутих вище оптимізаційних задач. Це видно в алгоритмах (11.44), (11.47), (11.59), (11.97).

Розглянемо, наприклад, інтеграл від періодограми в (11.106). З одного боку, він дорівнює правій частини рівності (11.62), з іншого боку – слухна рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{g}) \right|^2 df = TS_{D'} \int_T \int_{D'} \hat{R}_{uk}(\tau, \Delta\vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{g}\Delta\vec{r}'}{c} \right) \right\} df d\tau d\Delta\vec{r}' =$$

$$= T S_{D'} \int \int_{T D'} \hat{R}_{uk}(\tau, \Delta \vec{r}') \delta \left(\tau + \frac{\mathcal{G} \Delta \vec{r}'}{c} \right) d\tau d\Delta \vec{r}' = T S_{D'} \int_{D'} \hat{R}_{uk} \left(\tau = -\frac{\mathcal{G} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right) d\Delta \vec{r}'. \quad (11.118)$$

Таким чином, при оцінці спектральної яскравості (11.106) замість операцій (11.62) можна сформулювати оцінку дійсної функції когерентності в точках, що зміщені друг від друга на відстань $\Delta \vec{r}'$ зі зсувом у часі $\tau = -\mathcal{G} \Delta \vec{r}' / c$, а потім отриманий результат додати по всіх елементах антенної решітки для кожного напрямку $\vec{\mathcal{G}}$. Зсув за часом повинен бути зворотним за знаком щодо запізнювання хвиль при їх похилому падінні на елементи антеною системи для забезпечення або синфазного додавання, або максимальної кореляції. Тоді, враховуючи (11.118), алгоритм (11.106) можна представити наступною системою рівнянь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2) |\dot{\Psi}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2 d\vec{\mathcal{G}}_2 \approx [\Delta f I_k T |\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0)|^2]^{-1} \times$$

$$\times \int \int \int_{D' T D'} u_{k\Sigma}(t, \vec{r}') u_{k\Sigma} \left(t + \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c}, \vec{r}' - \Delta \vec{r}' \right) dt d\vec{r}' d\Delta \vec{r}' - B_{3n_k}(\vec{\mathcal{G}}) =$$

$$= \frac{S_{D'}}{\Delta f I_k |\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^2} \int_{D'} \hat{R}_{uk} \left(\tau = -\frac{\mathcal{G} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right) d\Delta \vec{r}' - B_{3n_k}(\vec{\mathcal{G}}). \quad (11.119)$$

На підставі вираження (11.38) функцію $|\dot{\Psi}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2$ можна записати у вигляді

$$|\dot{\Psi}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2 = S_{D'}^2 |\dot{\Psi}_H[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2, \quad (11.120)$$

де $\dot{\Psi}_H$ – нормована ($|\dot{\Psi}_H| = 1$) функція невизначеності, і відповідно врахувати в цій системі рівнянь множник $S_{D'}$.

Помітимо також, що оцінку \hat{R}_{uk} , обумовлену по формулі (11.115), можна приблизно замінити оцінкою (11.117) $\hat{R}_{uk}(\tau, \Delta \vec{r}')$.

Для дискретного розкриття у вигляді антенної решітки з фазовими центрами антен, розташованими в точках з координатами \vec{r}'_i з інтервалами дискретизації $\Delta x'$, $\Delta y'$, запишемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2) |\dot{\Psi}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2 d\vec{\mathcal{G}}_2 \approx [\Delta f I_k T |\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0)|^2]^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_T u_{k\Sigma}(t, \vec{r}'_i) u_{k\Sigma} \left(t + \frac{\vec{g} \Delta \vec{r}'_j}{c}, \vec{r}'_i - \Delta \vec{r}'_{ij} \right) dt (\Delta \vec{r}')^2 - B \mathcal{Z}_{n_k}(\vec{g}) = \\
& = \frac{I}{\Delta f I_k \left| \dot{F}_A(\vec{g} - \vec{g}_0, f_0) \right|^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{R}_{ukij} \left(\tau = -\frac{\vec{g} \Delta \vec{r}'_{ij}}{c}, \Delta \vec{r}'_{ij} \right) (\Delta \vec{r}')^2 - B \mathcal{Z}_{n_k}(\vec{g}), \quad (11.121) \\
& \Delta \vec{r}' = \Delta x' \Delta y'.
\end{aligned}$$

Фізична сутність цього алгоритму полягає у вирівнюванні затримок сигналів в елементах антеною системи по фронту падіння хвилі, формуванні речовинних функцій когерентності отриманих сигналів щодо всіх пар елементів антеною системи, які після вирівнювання затримок по фронту їх падіння стають між собою максимально корельованими, а також у додаванні всіх отриманих результатів розрахунків парних кореляцій.

Тепер розглянемо в різних аспектах особливості використання функцій когерентності в алгоритмі загального виду (11.98) при довільній роздільній здатності і при наявності вибілюючих (декорелюючих) фільтрів.

Запишемо алгоритм (11.98) у такому виді:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} B_{0k}[f_0, \vec{g}_2, \vec{\lambda}(\vec{g}_2)] \Psi_{kw}(\vec{g}_1, \vec{g}_2) d\vec{g}_2 = \\
& = (\Rightarrow) = \frac{I}{T} Y_{\text{вблх}_k}(\vec{g}_1) - B I_{\text{wn}_k} - B I_{\text{wn}_{kp}}, \quad (11.122)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Y_{\text{вблх}_k}(\vec{g}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{g}, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{g}) \right|^2 df = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{g}, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \int_T \int_{T'} \int_{D'} \int_{D'} u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) \times \\
&\times \exp \left\{ -j2\pi f \left[(t_1 - t_2) + \frac{\vec{g}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] \right\} df dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\
&= \int_T \int_{T'} \int_{D'} \int_{D'} u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) H I_{kw} \left[t_1 - t_2 + \frac{\vec{g}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2. \quad (11.123)
\end{aligned}$$

Виконавши заміну змінних в (11.113), отримаємо

$$Y_{\text{вблх}_k}(\vec{g}) \approx \int_T \int_{D'} H I_{kw} \left(\tau + \frac{\vec{g} \Delta \vec{r}'}{c} \right) \int_T \int_{D'} u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_1 - \tau, \vec{r}'_1 - \Delta \vec{r}') d\vec{r}'_1 dt_1 d\Delta \vec{r}' d\tau =$$

$$= TS_{D'} \int_T \int_{D'} HI_{kw} \left(\tau + \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c} \right) \hat{R}_{uk}(\tau, \Delta \vec{r}') d\Delta \vec{r}' d\tau.$$

Уводячи заміну змінних $\tau + \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c} = \tau'$ і зневажаючи в умовах великої міри $T \times D'$ впливом цієї заміни на межі інтегрування, знаходимо

$$\begin{aligned} Y_{\text{вих}_k}(\vec{\mathcal{G}}) &\approx TS_{D'} \int_{D'} \left\{ \int_T HI_{kw}(\tau') d\tau' \hat{R}_{uk} \left(\tau' - \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right) d\tau' \right\} d\Delta \vec{r}' = \\ &= TS_{D'} \int_{D'} \hat{R}_{Wuk} \left(\tau = \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right) d\Delta \vec{r}', \end{aligned} \quad (11.124)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{R}_{Wuk} \left(\tau = \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right) &= \int_T HI_{kw}(\tau') \hat{R}_{uk} \left(\tau' - \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right) d\tau', \\ HI_{kw}(\tau, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0] \right|^2 e^{j2\pi f \tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} h_{l_{kw}}(v) h_{l_{kw}}(v + \tau) dv \end{aligned} \quad (11.125)$$

- автокореляційна функція імпульсної характеристики декорелюючого фільтру.

Таким чином, тут на відміну від (11.119) використовується не функція когерентності $\hat{R}_{uk}(\tau = -\mathcal{G} \Delta \vec{r}' / c, \Delta \vec{r}')$ затриманих процесів $u_{k\Sigma} \left(\tau - \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c} \right)$,

а $\hat{R}_{Wuk} \left(\tau = \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right)$ – взаємна кореляція функції $\hat{R}_{uk} \left(\tau' - \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right)$ з

функцією $HI_{kw}(\tau, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0)$ (згортка з) $HI_{kw}(-\tau, \cdot)$. Функція \hat{R}_{Wuk} є дійсною функцією когерентності випромінювання, декорельованого у фільтрах $\dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0]$.

Розглянемо тепер особливості застосування функцій когерентності при реалізації алгоритму (11.98) у такому аспекті. Запишемо (11.123) і (11.124) у наступному виді:

$$\begin{aligned}
Y_{\text{ввix}_k}(\vec{\mathcal{G}}) &= \int \int \int \int u_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) u_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) \times \\
&\times Hl_{kw} \left[t_1 - t_2 + \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 \approx \left| t' = t + \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'}{c} \right| \approx \\
&\approx \int \int \int \int u_{k\Sigma} \left(t'_1 - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'_1}{c}, \vec{r}'_1 \right) u_{k\Sigma} \left(t'_2 - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'_2}{c}, \vec{r}'_2 \right) Hl_{kw}(t'_1 - t'_2) dt'_1 dt'_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \int \int \int u_{k\Sigma} \left(t'_1 - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'_1}{c}, \vec{r}'_1 \right) u_{k\Sigma} \left(t'_2 - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'_2}{c}, \vec{r}'_2 \right) \times \\
&\quad \times hl_{kw}(t - t'_1) hl_{kw}(t - t'_2) dt'_1 dt'_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \int u l_{kw} \left(t - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c}, \vec{r}'_1 \right) u l_{kw} \left(t - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c}, \vec{r}'_2 \right) d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\
&= \int_{D'} d\vec{r}'_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{D'} u l_{kw} \left(t - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c}, \vec{r}'_1 \right) u l_{kw} \left(t - \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c}, \vec{r}'_2 \right) d\vec{r}'_1 dt \approx \\
&\quad \approx TS_{D'} \int_{D'} \hat{I}_{uw_k} \left(\tau = \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c}, \Delta\vec{r}' \right) d\Delta\vec{r}'. \tag{11.127}
\end{aligned}$$

У цьому виразі

$$Hl_{kw}(t'_1 - t'_2) = \int_{-\infty}^{\infty} hl_{kw}(t - t'_1) hl_{kw}(t - t'_2) dt \tag{11.128}$$

– автокореляційна функція імпульсної характеристики декорелюючого фільтру з коефіцієнтом передачі $\dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0]$;

$$\begin{aligned}
&u l_{kw} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right) = \\
&= \int_T hl_{kw}(t - \tau) u_{k\Sigma} \left(\tau - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right) d\tau \approx hl_{kw}(t) \otimes u_{k\Sigma} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right) \tag{11.129}
\end{aligned}$$

– декорельований процес $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$, затриманий на часовий проміжок $\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'/c$, відповідний до випередження часу падіння ділянок похилого фронту хвилі на розкрив антеної системи, що і забезпечує подальше з

однаковою затримкою в часі, тобто синфазне додавання всіх гармонік прийнятих надширокопasmових сигналів;

$$\begin{aligned} & \hat{F}_{uw_k} \left(\tau = \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c}, \Delta\vec{r}' \right) \approx \\ & \approx \frac{I}{TS_{D'}} \int_{D'} \int_{-\infty(\approx T)}^{\infty} uI_{kw} \left(\tau - \frac{\vec{\mathcal{G}}\vec{r}'_l}{c}, \vec{r}'_l \right) uI_{kw} \left(\tau - \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_l - \Delta\vec{r}')}{c}, \vec{r}'_l - \Delta\vec{r}' \right) d\tau d\vec{r}'_l; \quad (11.130) \\ & \hat{F}_{uw_k} \left(\tau = \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c}, \Delta\vec{r}' \right) - \text{оцінка функції когерентності,} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{uw_k}(\tau, \Delta\vec{r}') = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ S_{D'} \rightarrow \infty}} \frac{I}{TS_{D'}} \int_T \int_{D'} uI_{kw}(t, \vec{r}') uI_{kw}(t - \tau, \vec{r}' - \Delta\vec{r}') dt d\vec{r}', \quad (11.131)$$

сформована тепер вже для декорельованих сигналів із взаємними затримками $\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'/c$, що компенсують відповідні зсуви в часі елементів, що рухаються, фронту хвилі щодо різних точок антенної системи, що і забезпечують у такий спосіб максимальні значення взаємних кореляційних функцій.

Межі інтегрування за часом в (11.130) можна вважати кінцевими, тому що вони реально обмежені інтервалом часу спостереження $(0, T)$. Інакше кажучи, як і при оцінці (11.118), необхідно сформулювати функцію когерентності, але вже вибілених процесів, для точок, що відстоять друг від друга на $\Delta\vec{r}'$ зі зсувами у часі $\tau = \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c}$, а потім отриманий результат проінтегрувати (додати) по всіх елементах антеною решітки для кожного напрямку $\vec{\mathcal{G}}$.

Остаточно алгоритм (11.98), виражений через операції формування функцій когерентності, прийме вид

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)] \Psi_{kw}(\vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\mathcal{G}}_2) d\vec{\mathcal{G}}_2 = \\ & (\Rightarrow) = \frac{I}{T} Y_{\text{вих } k}(\vec{\mathcal{G}}_1) - BI_{wn_k} - BI_{wn_{kp}}, \quad (11.132) \end{aligned}$$

де

$$Y_{\text{вих } k}(\vec{\mathcal{G}}) = TS_{D'} \int_{D'} \hat{\Gamma}_{uw_k} \left(\tau = \vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}' / c, \Delta\vec{r}' \right) \approx$$

$$\begin{aligned}
&\approx \int_{D'} \int_T \int_{D'} u l_{kw} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'}{c}, \vec{r}' \right) u l_{kw} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}} (\vec{r}' - \Delta \vec{r}')}{c}, \vec{r}'_i - \Delta \vec{r}' \right) dt d\vec{r}' d\Delta \vec{r}' \approx \\
&\approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_T u l_{kw} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'_i}{c}, \vec{r}'_i \right) u l_{kw} \left(t - \frac{\vec{\mathcal{G}} (\vec{r}'_i - \Delta \vec{r}'_{ij})}{c}, \vec{r}'_i - \Delta \vec{r}'_{ij} \right) dt (\Delta \vec{r}')^2 = \\
&= T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{F}_{uwki} \left(\tau = -\frac{\mathcal{G} \Delta \vec{r}'_j}{c}, \Delta \vec{r}'_j \right) (\Delta \vec{r}')^2. \quad (11.133)
\end{aligned}$$

Тут функція \hat{F}_{uwki} , як і функція (11.117), визначається інтегралом за часом, $\Delta \vec{r}'$ – інтервал просторової дискретизації континуального розкриву, реально відповідний до мінімальної відстані між елементами АР.

В інтегральній формі отриманий вираз для вихідного ефекту $Y_{\text{блх}k}(\vec{\mathcal{G}})$ справедливо для ідеалізованого континуального розкриву, а у формі сум – для дискретного, тобто антенної решітки.

Зіставляючи вираз (11.127) з виразом (11.98), знаходимо, що

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} Y_{\text{блх}k}(\vec{\mathcal{G}}) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1) \right|^2 df \approx \\
&\approx \frac{1}{T} \int_0^T \left| u l_{kD'_w}(t, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 dt \approx S_{D'} \int_{D'} \hat{F}_{uwk} \left(\tau = \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c}, \Delta \vec{r}' \right) d\Delta \vec{r}'. \quad (11.134)
\end{aligned}$$

Ці інтеграли приблизно дорівнюють середній потужності декорельованих сигналів, прийнятих з кожного з напрямків $\vec{\mathcal{G}}$, що охоплюють сектор, у якому перебуває просторово-протяжний випромінюючий об'єкт, у результаті фокусування антеною системи на ці напрямки.

На закінчення відзначимо, що в цьому розділі розглядалися тільки оцінки спектральної яскравості і функціонально зв'язаних параметрів у припущенні, що в межах АЧХ радіометричної системи ця яскравість, що є функцією напрямків $\vec{\mathcal{G}}$, не залежить від частоти, тобто постійна. Таке припущення забезпечило конзистентність її оцінки внаслідок інтегрування (усереднення) періодограми по частоті. Отримані оцінки залежності яскравості $B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$ від $\vec{\mathcal{G}}$ по суті стали оцінками інтенсивності (потужності) прийнятих коливань у вигляді зображень випромінюючих об'єктів. Для того щоб одержати алгоритми оцінок яскравості не тільки у вигляді функцій $\vec{\mathcal{G}}$, але і частоти, тобто $B_{0k}[f, \vec{\mathcal{G}}, \dots]$, необхідно здійснювати варіаційне диференціювання і по змінній f . Отримані оцінки при розв'язку такої

оптимізаційної задачі будуть пропорційні тільки лише декорельованій періодограмі без інтегрування по частоті. Такі оцінки неконзистентні. Для підвищення ступеня їх конзистентності можна застосовувати традиційні методи вторинної обробки періодограми для оцінки спектральної щільності потужності (СПМ) [16] – методи згладжування Уелча, Данієлла, Бартлетта, параметричні методи і ін. Однак у даній роботі оцінки спектральної яскравості як функції частоти не розглядаються.

11.6. Особливості використання комплексних функцій когерентності і теореми Ван Циттерта – Цернике при виконанні умови ПЧВ (КМН)

Проведені вище дослідження показали, що відновлення радіозображень здійснюється шляхом застосування до дійсних просторово-часових кореляційних функцій або до їхніх оцінок V_F -перетворення. При виконанні умови ПЧВ (КМН) можна обмежитися просторовою функцією когерентності. Безпосереднє застосування до дійсної просторової функції кореляції перетворення Фур'є відновлює два зображення: основне і дзеркальне. Для відновлення тільки лише основного (однобічного) зображення перетворення Фур'є необхідно застосовувати до комплексної кореляційної функції аналітичних процесів, яку звичайно називають комплексною функцією когерентності. Уявну частину вузькосмугового аналітичного сигналу можна сформулювати шляхом зсуву фази прийнятого дійсного сигналу на величину $\pi/2$.

Відновлення радіояскравісного зображення на основі застосування перетворення Фур'є тільки до просторової функції когерентності можна проілюструвати кожним з наведених вище спрощених алгоритмів відновлення радіояскравісного зображення.

Розглянемо спрощений алгоритм (11.106) у припущенні, що виконується умова просторово-часової вузькосмуговості. З урахуванням (11.91) запишемо інтеграл від періодограми в такому виді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \bar{\mathcal{G}}) \right|^2 df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_T \exp(-j2\pi ft) \operatorname{Re} \int_{D'} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'}{c}\right) \right\} dt d\vec{r}' \right|^2 df =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_T \int_{D'} \int_{D'} \int_{D'} \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c} \right) \right\} \exp(-j2\pi f t_1) \times \\
&\times \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c} \right) \right\} \exp(j2\pi f t_2) dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 df = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_T \int_T \exp[j2\pi f(t_2 - t_1)] \int_{D'} \int_{D'} \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c} \right) \right\} = \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c} \right) \right\} dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 df \approx \\
&\approx 0,5 \int_T \operatorname{Re} \int_{D'} \int_{D'} \dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}'_1) \dot{u}_{k\Sigma}^*(t, \vec{r}'_2) \exp \left\{ -j2\pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right\} d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 dt.
\end{aligned}$$

Останній вираз отримано з урахуванням

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi f(t_2 - t_1)] df = \delta(t_2 - t_1)$$

і на основі методу комплексних огинаючих, відповідно до якого інтеграл від першого доданку (див. розд. 5.6) у порівнянні з інтегралом від другого у формулі (5.97) практично дорівнює нулю. Подвійний інтеграл у цьому виразі є просторовою періодограмою Фур'є, що дорівнює добутку двох однакових комплексно-сполучених функцій. Тому знак дійсної частини Re можна вилучити і перейти від аналітичних процесів $\dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}') = \dot{U}(t, \vec{r}') e^{j2\pi f_0 t}$ до їх комплексних огинаючих $\dot{U}(t, \vec{r}')$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df \approx \\
&\approx 0,5 \int_T \int_{D'} \int_{D'} \dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}'_1) \dot{u}_{k\Sigma}^*(t, \vec{r}'_2) \exp \left\{ -j2\pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right\} d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 dt = \\
&= 0,5 \int_T \int_{D'} \int_{D'} \dot{U}_{k\Sigma}(t, \vec{r}'_1) \dot{U}_{k\Sigma}^*(t, \vec{r}'_2) \exp \left\{ -j2\pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right\} d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 dt. \quad (11.135)
\end{aligned}$$

Увівши заміну просторових змінних (11.113) у припущенні великих розмірів $T \times D'$, що перевищують відповідні інтервали кореляцій, отримаємо

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df \approx \\
& \approx 0,5 \int_T \int_{D'} \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\Delta\vec{r}'}{c}\right) \int_{D'} \dot{U}_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \dot{U}_{k\Sigma}^*(t, \vec{r}' + \Delta\vec{r}') d\vec{r}' d\Delta\vec{r}' dt = \\
& = 0,5 TS_{D'} \int_{D'} \hat{\Gamma}_{uk}(0, \Delta r') \exp\left[-j2\pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c}\right] d\Delta\vec{r}', \quad (11.136)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{uk}(0, \Delta r') &= \frac{1}{TS_{D'}} \int_T \int_{D'} \dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \dot{u}_{k\Sigma}^*(t, \vec{r}' + \Delta\vec{r}') d\vec{r}' dt = \\
&= \frac{1}{TS_{D'}} \int_T \int_{D'} \dot{U}_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \dot{U}_{k\Sigma}^*(t, \vec{r}' + \Delta\vec{r}') d\vec{r}' dt \quad (11.137)
\end{aligned}$$

- оцінка комплексної функції просторової когерентності.

Тоді алгоритм (11.106) набуде такого виду:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2) \left| \dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_2)] \right|^2 d\vec{\mathcal{G}}_2 \approx \\
& \approx \frac{S_{D'}}{2\Delta f I_k \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^2} \int_{D'} \hat{\Gamma}_{uk}(0, \Delta r') \exp\left[-j2\pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c}\right] d\Delta\vec{r}' - B_{3n_k}(\vec{\mathcal{G}}). \quad (11.138)
\end{aligned}$$

Тут формується оцінка комплексної функції просторової когерентності ($\tau = 0$), а потім береться від неї просторовий образ Фур'є.

Тепер розглянемо алгоритм (11.98) загального виду при довільній роздільній здатності й при наявності вибілюючих (декорелюючих) фільтрів.

Якщо виконується умова просторово-часової вузькосмуговості, то замість (11.134) і (11.124) отримаємо

$$\begin{aligned}
Y_{\text{ввлх}_k}(\vec{\mathcal{G}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \times \\
& \times \left| \int_T \exp(-j2\pi ft) \operatorname{Re} \int_{D'} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}'_1) \exp(-j2\pi f_0 \mathcal{G}\vec{r}'_1 / c) \right\} dt d\vec{r}'_1 \right|^2 df =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c} \right) \right\} \times \\
&\quad \times \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{k\Sigma}(t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c} \right) \right\} \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0] \right|^2 \exp[j2\pi f(t_2 - t_1)] df dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 \approx \\
&\approx 0,5 \operatorname{Re} \int_{D'} \int_{D'} \int_T \int_T \dot{u}_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) \dot{u}_{k\Sigma}^*(t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right) \times \\
&\quad \times Hl_{kw} [t_2 - t_1, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0] dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2. \tag{11.139}
\end{aligned}$$

Після заміни просторових змінних у формулі (11.113) у припущенні значного перевищення розмірів $T \times D'$ інтервалів кореляцій процесів $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ знаходимо, що

$$\begin{aligned}
&Y_{\text{ввих } k}(\vec{\mathcal{G}}) = \\
&= 0,5TS_{D'} \int_{D'} \exp \left\{ -j2\pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c} \right\} \int_T Hl_{kw} [\tau, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0] \hat{I}(\tau, \Delta\vec{r}') d\tau d\Delta\vec{r}', \tag{11.140}
\end{aligned}$$

де

$$\hat{I}(\tau, \Delta\vec{r}') = \frac{1}{TS_{D'}} \int_T \int_{D'} \dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}') \dot{u}_{k\Sigma}^*(t + \tau, \vec{r}' + \Delta\vec{r}') d\vec{r}' dt$$

– оцінка комплексної просторово-часової функції когерентності.

В (11.140) перетворення Фур'є береться не від функції когерентності $R_{u_k}(0, \Delta\vec{r}')$, як в (11.138), а від комплексного інтеграла $\int_T Hl_{kw} [\tau, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0] \hat{I}(\tau, \Delta\vec{r}') d\tau$. Тут знак дійсної частини Re можна вилучити.

Фізичну сутність цього інтеграла можна пояснити в такий спосіб. Перетворимо вираз (11.139) з урахуванням (11.128) до такого виду:

$$Y_{\text{ввих } k}(\vec{\mathcal{G}}) \approx 2 \operatorname{Re} \int_{D'} \int_{D'} \int_T \int_T \dot{u}_{k\Sigma}(t_1, \vec{r}'_1) \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_1}{c} \right) \dot{u}_{k\Sigma}^*(t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(j2\pi f_0 \frac{\mathcal{G}\vec{r}'_2}{c} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times Hl_{kw} \left[t_2 - t_1, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0 \right] dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{Re} \int_{D' T} \int_{D' T} h l_{kw} (t - t_1) \dot{u} (t_1, \vec{r}'_1) \exp \left(-j 2 \pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'_1}{c} \right) dt_1 d\vec{r}'_1 \times \\
& \quad \times \operatorname{Re} \int_{D' T} \int_{D' T} h l_{kw} (t - t_2) \dot{u}^* (t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(j 2 \pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'_2}{c} \right) dt_2 d\vec{r}'_2 = \\
& \approx 0,5 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{D' T} \int_{D' T} h l_{kw} (t - t_1) \dot{u} (t_1, \vec{r}'_1) \exp \left(-j 2 \pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'_1}{c} \right) dt_1 d\vec{r}'_1 \times \\
& \quad \times \int_{D' T} \int_{D' T} h l_{kw} (t - t_2) \dot{u}^* (t_2, \vec{r}'_2) \exp \left(j 2 \pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'_2}{c} \right) dt_2 d\vec{r}'_2 = \\
& = 0,5 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{D'} \dot{u} l_{kw} (t, \vec{r}'_1) \exp \left(-j 2 \pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'_1}{c} \right) d\vec{r}'_1 \times \\
& \quad \times \int_{D'} \dot{u}^* l_{kw} (t, \vec{r}'_2) \exp \left(j 2 \pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \vec{r}'_2}{c} \right) d\vec{r}'_2.
\end{aligned}$$

Добуток двох комплексно-сполучених інтегралів являє собою просторову періодограму декорельованого аналітичного процесу

$$\dot{u} l_{kw} (t, \vec{r}') = \int_T h l_{kw} (t - t_1) \dot{u} (t_1, \vec{r}') dt_1, \quad (11.141)$$

що є позитивною величиною. Тому знак Re можна вилучити. Тоді

$$\begin{aligned}
Y_{\text{вих } k} (\vec{\mathcal{G}}) & \approx 0,5 \int_{D'} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{D'} \dot{u} l_{kw} (t, \vec{r}'_1) \dot{u} l_{kw}^* (t, \vec{r}'_1 + \Delta \vec{r}') d\vec{r}'_1 dt \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left(-j 2 \pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c} \right) d\Delta \vec{r}'_1 \approx \\
& \approx 0,5 T S_{D'} \int_{D'} \hat{I}_{uw_k} (0, \Delta \vec{r}') \exp \left(-j 2 \pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}} \Delta \vec{r}'}{c} \right) d\Delta \vec{r}'. \quad (11.142)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{uw_k}(\tau, \Delta\vec{r}') &= \hat{I}_{uw_k}(\tau, \Delta\vec{r}') \Big|_{\tau=0} = \\
&= \frac{1}{TS_{D'}} \int_T \int_{D'} \dot{u}l_{kw}(t, \vec{r}') \dot{u}l_{kw}^*(t + \tau, \vec{r}' + \Delta\vec{r}') d\vec{r}' dt \Big|_{\tau=0} = \\
&= \frac{1}{TS_{D'}} \int_T \int_{D'} \dot{U}l_{kw}(t, \vec{r}') \dot{U}l_{kw}^*(t, \vec{r}' + \Delta\vec{r}') d\vec{r}' dt \quad (11.143)
\end{aligned}$$

Тут $\dot{U}l_{kw}(t, \vec{r}')$ – комплексна огинаюча декорелюючого процесу $ul_{kw}(t, \vec{r}')$,

$$ul_{kw}(t, \vec{r}') = \text{Re} \dot{u}l_{kw}(t, \vec{r}') = \text{Re} \dot{U}l_{kw}(t, \vec{r}') e^{j\omega_0 t}.$$

Таким чином, алгоритм (11.98) оцінок $B_{0k}(\vec{\mathcal{G}})$ і $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$ при виконанні умови ПЧВ буде мати такий вид:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} B_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)] \Psi_{kw}(\vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\mathcal{G}}_2) d\vec{\mathcal{G}}_2 = (\Rightarrow) = \\
&= \frac{S_{D'}}{2} \int_{D'} \hat{I}_{uw_k}(0, \Delta\vec{r}') \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\vec{\mathcal{G}}\Delta\vec{r}'}{c}\right) d\Delta\vec{r}' - B_{l_{wn_k}} - B_{l_{wn_{kp}}}. \quad (11.144)
\end{aligned}$$

Інакше кажучи, як і в алгоритмі(11.138), спектральна яскравість як функція змінної $\vec{\mathcal{G}}$ є образом Фур'є від функції когерентності. Відмінність полягає в тому, що в (11.144) функція когерентності розраховується для декорельованих («вибіленних») комплексних процесів $\dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$, що пройшли фільтри $\dot{L}_k[j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\lambda}_0]$, причому, як і в (11.138), по часовій змінній зсув між процесами $ul_{kw}(t, \vec{r}')$ повинен бути нульовим. Декорельовані процеси $\dot{u}l_{kw}(t, \vec{r}')$ мають більш широкий спектр у порівнянні із процесами $\dot{u}_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$, але покладається, що і для них зберігається умова ПЧВ.

Для кращого розуміння особливостей застосування комплексної функції когерентності при виконанні умови ПЧВ розглянемо деякі співвідношення в спрощеному виді.

Будемо вважати для простоти, що $B_{k\Sigma}(f, \vec{\mathcal{G}}) = B_{ks}(f, \vec{\mathcal{G}})$, тобто завадові компоненти спектральної яскравості відсутні. Спектральна

яскравість $B_{ks}(f, \vec{\mathcal{G}})$ пов'язана із просторово-часовою кореляційною функцією $R_{ku_s}(\Delta\vec{r}', \tau, \vec{\lambda})$ прийнятих сигналів $u_{ks}(t, \vec{r}')$ V_F -перетворенням:

$$f^{-2} c^2 B(\vec{\mathcal{G}}, f) = V_F \{ R(\tau, \Delta\vec{r}') \};$$

$$R(\tau, \Delta\vec{r}') = \langle u(t, \vec{r}') u(t - \tau, \vec{r}' - \Delta\vec{r}') \rangle.$$

Нижні індекси в позначеннях прийнятих сигналів $u_{ks}(t, \vec{r}')$, спектральної яскравості і кореляційної функції для простоти надалі вилучимо.

Спектрально-кутову щільність потужності $B(f, \vec{\mathcal{G}})$ після фільтрації надширокосмугового випромінювання в вузькосмуговому тракті приймача з коефіцієнтом передачі $\dot{K}(j2\pi f)$ можна записати у вигляді двох вузьких дзеркальних по відношенню друг до друга функцій частоти f :

$$B(f, \vec{\mathcal{G}}) = B(\vec{\mathcal{G}}, f - f_0) + B(\vec{\mathcal{G}}, -f - f_0). \quad (11.145)$$

На відміну від однобічного реального спектра двосторонній спектр у два рази менше, що автоматично враховане в комплексній формі інтеграла Фур'є. Відповідно до теореми Хінчина – Вінера кореляційна функція випромінювання, прийнятого з напрямку $\vec{\mathcal{G}}$,

$$R(\tau, \vec{\mathcal{G}}) = \int_{-\infty}^{\infty} B(f, \vec{\mathcal{G}}) e^{j2\pi f\tau} df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [B(\vec{\mathcal{G}}, f - f_0) + B(\vec{\mathcal{G}}, -f - f_0)] e^{j2\pi f\tau} df =$$

$$= R_0(\tau, \vec{\mathcal{G}}) e^{j2\pi f_0\tau} + R_0(\tau, \vec{\mathcal{G}}) e^{-j2\pi f_0\tau} =$$

$$= 2R_0(\tau, \vec{\mathcal{G}}) \cos(2\pi f_0\tau),$$

$$R_0(\tau, \vec{\mathcal{G}}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\vec{\mathcal{G}}, f) e^{j2\pi f\tau} df, \quad (11.146)$$

де $B_0(\vec{\mathcal{G}}, f)$ й $R_0(\tau, \vec{\mathcal{G}})$ – енергетичний спектр і кореляційна функція огинаючої вузькосмугового процесу $u(t, \vec{r}')$. При $\tau = 0$ одержуємо

інтенсивність (середню потужність, інтегральну яскравість) випромінювання, прийнятого з напрямку $\vec{\mathcal{G}}$,

$$\begin{aligned}
 I(\vec{\mathcal{G}}) &= R(\tau, \vec{\mathcal{G}}) \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} B(f, \vec{\mathcal{G}}) df = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [B(\vec{\mathcal{G}}, f - f_0) + B(\vec{\mathcal{G}}, -f - f_0)] df = \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\vec{\mathcal{G}}, f) df = 2R_0(0, \vec{\mathcal{G}}) = 2I_0(\vec{\mathcal{G}}), \quad (11.147)
 \end{aligned}$$

де $I_0(\vec{\mathcal{G}})$ – інтенсивність огинаючої вузькосмугового процесу після переносу його спектра на частоту $f_0 = 0$, що дорівнює половині інтенсивності випромінювання, прийнятого радіометром з напрямку $\vec{\mathcal{G}}$. У випадку вузькосмугового сигналу відновлення спектрально-кутової щільності потужності $B(\vec{\mathcal{G}}, f)$ і зображень $I(\vec{\mathcal{G}})$ (або $I_0(\vec{\mathcal{G}})$) також можна здійснити по дійсній функції когерентності $R(\Delta\vec{r}', \tau)$ шляхом застосування до неї операцій V_F -перетворення і інтегрування (додавання) по частотах. Застосування V_F -перетворення не вимагає обмеження на ступінь широкосмуговості сигналу.

Але при виконанні умови ПЧВ сформувавши зображення $I_0(\vec{\mathcal{G}})$ можна, використовуючи тільки лише просторову функцію когерентності комплексно-сполучених аналітичних сигналів.

При вузьких спектральних функціях $B(\vec{\mathcal{G}}, f - f_0)$ і $B(\vec{\mathcal{G}}, -f - f_0)$, що задовольняють умові ПЧВ, можна вважати, що в показнику експоненти $\exp\{j2\pi f c^{-1} \vec{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}'\}$ відповідно $f \approx f_0$ і $f \approx -f_0$. Тоді

$$\begin{aligned}
 R(\Delta\vec{r}', \tau) &= V_F^{-1} [B(\vec{\mathcal{G}}, f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(f, \vec{\mathcal{G}}) \exp\{j2\pi f (\tau + c^{-1} \vec{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}')\} df d\vec{\mathcal{G}} \approx \\
 &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} B(\vec{\mathcal{G}}, f - f_0) e^{j2\pi f \tau} df \right\} \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \vec{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}'\} d\vec{\mathcal{G}} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} B(\bar{\mathcal{G}}, -f - f_0) e^{j2\pi f \tau} df \right\} \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta \bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}} = \\
& = e^{j2\pi f_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau, \bar{\mathcal{G}}) \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta \bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}} + \\
& + e^{-j2\pi f_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau, \bar{\mathcal{G}}) \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta \bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}}, \quad (11.148)
\end{aligned}$$

де $G_0(f)$ и $R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(f) e^{j2\pi f \tau} df$ - енергетичний спектр і

кореляційна функція огинаючої вузькосмугового за часом процесу $u(t, \bar{r}')$.

Таким чином, просторова кореляційна функція $R(\Delta \bar{r}', 0)$ буде складатися із двох комплексно-сполучених просторових функцій когерентності:

$$R(\Delta \bar{r}', \tau) \Big|_{\tau=0} = \dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}') + \dot{R}_{I_0}(-j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}'),$$

або

$$\begin{aligned}
& R(\Delta \bar{r}', 0) = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\bar{\mathcal{G}}) \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta \bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}} + \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\bar{\mathcal{G}}) \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta \bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}}. \quad (11.149)
\end{aligned}$$

Просторове перетворення Фур'є від цього виразу буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
& F_{\bar{r}'}[R(\Delta \bar{r}', 0)] = F_{\bar{r}'} \left\{ \dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}') + \dot{R}_{I_0}(-j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}') \right\} = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\bar{\mathcal{G}}_1) \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}}_1 \Delta \bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}}_1 \right\} \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta \bar{r}'\} d\Delta \bar{r}' + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\bar{\mathcal{G}}_1) \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}}_1 \Delta \bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}}_1 \right\} \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta \bar{r}'\} d\Delta \bar{r}' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c^2}{f_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\bar{\mathcal{G}}_1) \delta(\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{G}}_1) d\bar{\mathcal{G}}_1 + \frac{c^2}{f_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\bar{\mathcal{G}}_1) \delta(\bar{\mathcal{G}} + \bar{\mathcal{G}}_1) d\bar{\mathcal{G}}_1 = \\
&= \frac{c^2}{f_0^2} I_0(\bar{\mathcal{G}}) + \frac{c^2}{f_0^2} I_0(-\bar{\mathcal{G}}). \tag{11.150}
\end{aligned}$$

Таким чином, застосування перетворення Фур'є до дійсної функції когерентності відновлює суму основного і дзеркального зображень.

Для розуміння сутності доданків в (11.149) відзначимо, що на підставі формул (3.34) для вузькосмугового сигналу зі спектральною однобічною щільністю потужності, що задовольняє умові ПЧВ

$$B(f, \bar{\mathcal{G}}) = B(\bar{\mathcal{G}}, f - f_0),$$

комплексна просторово-часова функція когерентності має такий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{I}(\Delta\vec{r}', \tau) &= \left\langle \left[\dot{u}(\vec{r}'_1, t_1) \dot{u}^*(\vec{r}'_2, t_2) \right] \right\rangle = V_F^{-1} \left[4B(\bar{\mathcal{G}}, f) \right] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} 4B(f, \bar{\mathcal{G}}) \exp\{j2\pi f (\tau + c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}')\} df d\bar{\mathcal{G}} \approx \\
&\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} 4B(f - f_0, \bar{\mathcal{G}}) \exp(j2\pi f \tau) df \right\} \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}'\} d\bar{\mathcal{G}} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 4R_0(\tau, \bar{\mathcal{G}}) e^{j2\pi f_0 \tau} \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}'\} d\bar{\mathcal{G}}.
\end{aligned}$$

При $\tau = 0$ отримуємо таку формулу для просторової комплексної функції когерентності:

$$\dot{I}(\Delta\vec{r}', 0) = \left\langle \dot{u}(\vec{r}'_1, t) \dot{u}^*(\vec{r}'_2, t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 4I_0(\bar{\mathcal{G}}) \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}'\} d\bar{\mathcal{G}}.$$

Тоді, зрозуміло, що

$$\dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta\vec{r}') = \frac{1}{4} \dot{I}(\Delta\vec{r}', 0). \tag{11.151}$$

Застосовуючи просторове перетворення Фур'є, знаходимо зображення випромінюючого об'єкта $I_0(\bar{\mathcal{G}})$:

$$F_{\Delta\vec{r}'} \left[\dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta\vec{r}') \right] = F_{\Delta\vec{r}'} \left[\frac{1}{4} \dot{I}(\Delta\vec{r}', 0) \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \dot{I}(\Delta\vec{r}', 0) \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \vec{g} \cdot \Delta\vec{r}'\} d\vec{\rho}' = \frac{c^2}{f_0^2} I_0(\vec{g}).$$

Ця формула становить зміст класичної теореми Ван Цитерта – Церніке, де затверджується, що зображення випромінюючого джерела у вигляді залежності інтенсивності випромінювання $I_0(\vec{g})$ від напрямку \vec{g} пов'язане з комплексною функцією просторової когерентності $\dot{I}(\Delta\vec{r}', 0)$, спостережуваної стосовно джерела в далекій зоні Фраунгофера, парю перетворень Фур'є.

Розглянемо найпростіший алгоритм (11.56), у якому покладається, що спектральна яскравість практично постійна в межах функції невизначеності (ідеальна роздільна здатність), а також що відсутні узгоджена і декорелююча фільтрації прийнятого випромінювання.

Представимо алгоритм (11.56) у такому виді:

$$TX'_m Y'_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{f^2} B_{ks}(f, \vec{g}) df \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{g})|^2 df. \quad (11.152)$$

Права частина цього виразу розкриває основні операції, які необхідно виконати над прийнятим сигналом. Такими операціями є формування V_F -періодограми і її усереднення шляхом інтегрування по частотах. Без такого інтегрування з точністю до множника $f^{-2}c^2$ періодограма є неконзистентною оцінкою спектральної яскравості $B(f, \vec{g})$. Відповідно до теореми Парсеваля – Лапласа такий алгоритм рівносильний алгоритму оцінки середньої потужності випромінювання, прийнятого з напрямку \vec{g} після відповідного фокусування антеної системи на цей напрямок. Ліва частина (11.152) є математичним очікуванням правої. Знайдемо середнє значення періодограми. Вважаємо, що величини T , X'_m , Y'_m є більшими (практично нескінченними), тоді

$$\begin{aligned} & \left\langle \left| \dot{S}_{kTD'} \left(j2\pi f, \frac{f\vec{g}}{c} \right) \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| \int_T \int_{D'} u(t, \vec{r}') e^{-j2\pi f(t + \vec{g}\vec{r}'/c)} dt d\vec{r}' \right|^2 \right\rangle = \\ & = \left\langle \int_T \int_{D'} u(t_1, \vec{r}'_1) e^{-j2\pi f \left(t_1 + \frac{\vec{g}\vec{r}'_1}{c} \right)} dt_1 d\vec{r}'_1 \int_T \int_{D'} u(t_2, \vec{r}'_2) e^{j2\pi f \left(t_2 + \frac{\vec{g}\vec{r}'_2}{c} \right)} dt_2 d\vec{r}'_2 \right\rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{T/2}^{T/2} \int_{D'} \int_{T/2}^{T/2} \int_{D'} \langle u(t_1, \vec{r}'_1) u(t_2, \vec{r}'_2) \rangle e^{-j2\pi f \left(t_1 - t_2 + \frac{\vec{g}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right)} dt_1 d\vec{r}'_1 dt_2 d\vec{r}'_2 = \left. \begin{aligned} &t_1 - t_2 = \tau \\ &\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \Delta\vec{r}' \\ &dt_1 = d\tau \\ &d\vec{r}'_1 = d\Delta\vec{r}' \end{aligned} \right| \approx \\
&\approx \int_{T/2}^{T/2} \int_{D'} \int_{T/2}^{T/2} \int_{D'} R(\tau, \Delta\vec{r}') e^{-j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{g}\Delta\vec{r}'}{c} \right)} d\tau d\Delta\vec{r}' dt_2 d\vec{r}'_2 = \\
&= TX'_m Y'_m \int_{T/2}^{T/2} \int_{D'} R(\tau, \Delta\vec{r}') e^{-j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{g}\Delta\vec{r}'}{c} \right)} d\tau d\Delta\vec{r}'.
\end{aligned}$$

При $T/2 \rightarrow \pm\infty$, $X'_m/2 \rightarrow \pm\infty$, $Y'_m/2 \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{T/2 \rightarrow \pm\infty \\ D'/2 \rightarrow \pm\infty}} TX'_m Y'_m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau, \Delta\vec{r}') e^{-j2\pi f \left(\tau + \frac{\vec{g}\Delta\vec{r}'}{c} \right)} d\tau d\Delta\vec{r}' = \\
&= \lim_{\substack{T/2 \rightarrow \pm\infty \\ D'/2 \rightarrow \pm\infty}} TX'_m Y'_m V_F [R(\tau, \Delta\vec{r}')] = \lim_{\substack{T/2 \rightarrow \pm\infty \\ D'/2 \rightarrow \pm\infty}} TX'_m Y'_m \frac{c^2}{f^2} B(f, \vec{g}).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\frac{c^2}{f^2} B(f, \vec{g}) = \lim_{\substack{T/2 \rightarrow \pm\infty \\ D'/2 \rightarrow \pm\infty}} \frac{1}{TX'_m Y'_m} \left\langle \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{g}) \right|^2 \right\rangle. \quad (11.153)$$

Основною операцією в алгоритмі (11.56), (11.152) є інтеграл від періодограми. Оскільки в ньому права частина є математичним очікуванням лівої, а ліву можна вважати статистичною оцінкою правої, поставимо між ними знак наближеної рівності і з урахуванням (11.114) запишемо (11.152) у такому виді:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{g}) \right|^2 df = \\
&= TS_{D'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{T/2}^{T/2} \int_{D'} \hat{R}(\tau, \Delta\vec{r}') \exp j2\pi \left\{ -f \left(\tau + \frac{\vec{g}\Delta\vec{r}'}{c} \right) \right\} d\tau d\Delta\vec{r}' df \approx \\
&\approx TS_{D'} \int_{-\infty}^{\infty} V_F \left\{ \hat{R}(\tau, \Delta\vec{r}') \right\} df \approx TS_{D'} \int_{-\infty}^{\infty} f^{-2} c^2 B_{ks}(\vec{g}, f) df. \quad (11.154)
\end{aligned}$$

Для з'ясування фізичної сутності операції формування періодограми і її інтегрування в частотній області розглянемо структуру правої частини.

З одного боку,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{-2} c^2 B_{ks}(\bar{\mathcal{G}}, f) df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^{-2} c^2 \left[B(\bar{\mathcal{G}}, f - f_0) + B(\bar{\mathcal{G}}, -f - f_0) \right] df \approx 2(f_0^{-2} c^2) I_0(\bar{\mathcal{G}}).$$

З іншого боку, враховуючи (11.148),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{-2} c^2 B(\bar{\mathcal{G}}, f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta\bar{r}', \tau) \exp\{-j2\pi f (\tau + c^{-1}\bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}')\} d\tau d\Delta\bar{r}' df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{j2\pi f_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau, \bar{\mathcal{G}}) \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}} + \right.$$

$$\left. + e^{-j2\pi f_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau, \bar{\mathcal{G}}) \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}} \right\} \times$$

$$\times \exp\{-j2\pi f (\tau + c^{-1}\bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}')\} d\tau d\Delta\bar{r}' df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{j2\pi f_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau, \bar{\mathcal{G}}) \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}} + \right.$$

$$\left. + e^{-j2\pi f_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau, \bar{\mathcal{G}}) \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}'\} d\bar{\mathcal{G}} \right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j2\pi f (\tau + c^{-1}\bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}')\} df d\tau d\Delta\bar{r}'.$$

Застосовуючи фільтруючу властивість дельта-функції

$$\delta(\tau + c^{-1}\bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j2\pi f (\tau + c^{-1}\bar{\mathcal{G}} \Delta\bar{r}')\} df,$$

знаходимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau = c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}', \bar{g}) \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'\} d\bar{g} + \right. \\ \left. + e^{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau = -c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}', \bar{g}) \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'\} d\bar{g} \right\} d\Delta \bar{r}'.$$

Тут

$$R_0(\tau = -c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}', \bar{g}) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\bar{g}, f) e^{j2\pi f \tau} df \Big|_{\tau = -c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'} = R_0(0, \bar{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} B(f, \bar{g}) df = I_0(\bar{g}).$$

Оскільки поле падає на розкрив із запізнюванням $t = -c^{-1} \bar{g} \bar{r}'$, то максимум кореляційної функції $R_0(0, \bar{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} B(f, \bar{g}) df = I_0(\bar{g})$ буде спостерігатися через зсув в часі $\tau = -c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{-2} c^2 B_{ks}(\bar{g}, f) df = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\bar{g}) \exp\{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'\} d\bar{g} + \right. \\ \left. + e^{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\bar{g}) \exp\{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'\} d\bar{g} \right\} d\Delta \bar{r}' = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'} \dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}') + \right. \\ \left. + e^{j2\pi f_0 c^{-1} \bar{g} \Delta \bar{r}'} \dot{R}_{I_0}^*(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}') \right\} d\Delta \bar{r}' = \\ = F_{\Delta \bar{r}'} \left[\dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}') \right] + \left\{ F_{\Delta \bar{r}'} \left[\dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}') \right] \right\}^* = \\ = 2F_{\Delta \bar{r}'} \left[\dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta \bar{r}') \right].$$

Тут і основне, і сполучені доданки є дійсними. Зображення можна відновити по кожному з них, наприклад по першому, що відповідає теоремі Ван Циттерта – Цернике. Застосувавши просторове перетворення Фур'є, отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{I}{TS_{D'}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df \approx \\ & \approx \int_{-\infty}^{\infty} f^{-2} c^2 B_{ks}(\vec{\mathcal{G}}, f) df \approx 2F_{\Delta\vec{r}'} \left[\dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta\vec{r}') \right] = 2(f_0^{-2} c^2) I_0(\vec{\mathcal{G}}). \end{aligned}$$

Замінімо у формулі (11.151) комплексну функцію когерентності $\dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta\vec{r}')$ її оцінкою:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta\vec{r}') &= \frac{I}{4} \dot{\Gamma}(\Delta\vec{r}', 0) \approx \hat{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta\vec{r}') = \frac{I}{4} \hat{\Gamma}(\Delta\vec{r}', 0) = \\ &= \frac{I}{TS_{D'}} \int_T \int_{D'} \dot{u}(t, \vec{r}') \dot{u}^*(t - \tau, \vec{r}' - \Delta\vec{r}') dt d\vec{r}' \Big|_{\tau=0}, \end{aligned}$$

звідси

$$\begin{aligned} I_0(\vec{\mathcal{G}}) &\approx \frac{I}{2TS_{D'}} \frac{f_0^2}{c^{-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}_{kTD'}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}) \right|^2 df \approx \\ &\approx \frac{f_0^2}{c^{-2}} F_{\Delta\vec{r}'} \left[\hat{R}_{I_0}(j2\pi f_0 c^{-1} \Delta\vec{r}') \right] = \frac{I}{4} \frac{f_0^2}{c^{-2}} F_{\Delta\vec{r}'} \left[\hat{\Gamma}(\Delta\vec{r}', 0) \right], \quad (11.155) \end{aligned}$$

де

$$F_{\Delta\vec{r}'} \left[\hat{\Gamma}(\Delta\vec{r}', 0) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Gamma}(\Delta\vec{r}', 0) e^{-j2\pi f_0 c^{-1} \vec{\mathcal{G}} \Delta\vec{r}'} d\Delta\vec{r}'.$$

У випадку, коли в рівнянні спостереження враховуються завадові доданки, алгоритм (11.59), що впливає з рівняння (11.56), при виконанні умови ПЧВ приймає такий вид:

$$I_0(\vec{\mathcal{G}}) \approx \frac{I}{2 \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^2} F_{\Delta\vec{r}'} \left[\hat{\Gamma}(\Delta\vec{r}', 0) \right] - B_{n_k}(\vec{\mathcal{G}}) \Delta f_k, \quad (11.156)$$

де $I_0(\vec{\mathcal{G}}) = \hat{B}_{0k}[f_0, \vec{\mathcal{G}}, \hat{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})] \Delta f_k$.

11.7. Розрахунки граничних похибок оцінок параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$

Особливістю цього розрахунків є те, що в ньому розглядаються похибки оцінок параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$, що враховують не окремі числові значення у вигляді невідомих констант, а, що є функціями, аргументи яких – просторові змінні $\vec{\mathcal{G}}$. Основні положення методики розрахунків похибок оцінювання параметрів у вигляді функцій просторових змінних наведені в підрозд. 10.4.

Граничні похибки знаходимо в результаті обернення оператора Фішера з елементами:

$$\Phi_{\mu, \vec{\mathcal{G}}_1, \nu, \vec{\mathcal{G}}_2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \iiint_T \iiint_{T'} \int \frac{\delta W_{k\Sigma}[t_1, t_2, \vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]}{\delta \lambda_{\mu}(\vec{\mathcal{G}}_1)} \times \\ \times \frac{\delta R_{k\Sigma}[t_2, t_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]}{\delta \lambda_{\nu}(\vec{\mathcal{G}}_2)} d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 dt_1 dt_2. \quad (11.157)$$

Зазначимо, що всі процеси $u_{k\Sigma}(t, \vec{r}')$ в рівнянні спостереження (11.1) покладалися статистично незалежними, стаціонарно однорідними, з кореляційними функціями, що залежать від різницевого аргументів.

Застосувавши V_F^{-1} -перетворення і представивши варіаційні похідні в спектральній формі (11.30) і (11.31), отримаємо для оператора Фішера такий вираз:

$$\Phi_{\mu, \vec{\mathcal{G}}_1, \nu, \vec{\mathcal{G}}_2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 \frac{f_1^4}{c^4} \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_1, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_1)] / \partial \lambda_{\mu}(\vec{\mathcal{G}}_1)}{B_{k\Sigma}^2[f_1, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_1)]} \times \\ \times \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_2, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)]}{\partial \lambda_{\nu}(\vec{\mathcal{G}}_2)} \int_T \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi f_1 \left[(t_1 - t_2) + \frac{\vec{\mathcal{G}}_1(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] \right\} \times \\ \times \int_T \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi f_2 \left[(t_2 - t_1) + \frac{\vec{\mathcal{G}}_2(\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1)}{c} \right] \right\} dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 \frac{f_1^4}{c^4} \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_1, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_1)] / \partial \lambda_{\mu}(\vec{\mathcal{G}}_1)}{B_{k\Sigma}^2[f_1, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_1)]} \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_2, \vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2)]}{\partial \lambda_{\nu}(\vec{\mathcal{G}}_2)} \times \\ \times \int_T \int_T \int_{D'} \int_{D'} \exp \left\{ j2\pi \left[(f_1 - f_2)(t_1 - t_2) + \frac{(f_1 \vec{\mathcal{G}}_1 - f_2 \vec{\mathcal{G}}_2)(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{c} \right] \right\} dt_1 dt_2 d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2. \quad (11.158)$$

Беручи до уваги розрахунки (11.33) – (11.39), а також покладаючи, що час спостереження T великий і тому базова функція невизначеності

вузька і роздільна здатність по змінній f висока ($B_{k\Sigma}(f_1 \dots) \approx B_{k\Sigma}(f_2 \dots)$), одержуємо

$$\Phi_{\mu, \bar{g}_1, \nu, \bar{g}_2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \frac{f_1^4}{c^4} \frac{1}{B_{k\Sigma}^2[f_1, \bar{g}_1, \bar{\lambda}(\bar{g}_1)]} \times \\ \times \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_1, \bar{g}_1, \bar{\lambda}(\bar{g}_1)]}{\partial \lambda_{\mu}(\bar{g}_1)} \frac{\partial B_{k\Sigma}[f_1, \bar{g}_2, \bar{\lambda}(\bar{g}_2)]}{\partial \lambda_{\nu}(\bar{g}_2)} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\Psi}(f_1 - f_2, f_1 \bar{g}_1 - f_2 \bar{g}_2)|^2 df_2. \quad (11.159)$$

Враховуючи вирази (11.19) і (11.20) для $B_{k\Sigma}$ і приймаючи, що яскравість у межах смуги $\dot{K}(j2\pi f)$ практично постійна $B_{0k}(f \dots) \approx B_{0k}(f_0 \dots)$, а також (на підставі (11.50)), що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\Psi}(f_1 - f_2, f_1 \bar{g}_1 - f_2 \bar{g}_2)|^2 df_2 \approx \\ \approx |\dot{\Psi}_{D'}[f_1(\bar{g}_1 - \bar{g}_2)]|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Psi}_T(f_1 - f_2) df_2 = T |\dot{\Psi}_{D'}[f_1(\bar{g}_1 - \bar{g}_2)]|^2, \quad (11.160)$$

одержуємо

$$\Phi_{\mu, \bar{g}_1, \nu, \bar{g}_2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4}{c^4} \frac{|\dot{K}(j2\pi f)|^4 |\dot{F}_A(\bar{g}_1 - \bar{g}_0, f)|^2 |\dot{F}_A(\bar{g}_2 - \bar{g}_0, f)|^2}{B_{k\Sigma}^2[f, \bar{g}_1, \bar{\lambda}(\bar{g}_1)]} \times \\ \times \frac{\partial B_{0k}(f_0, \bar{\lambda}(\bar{g}_1))}{\partial \lambda_{\mu}(\bar{g}_1)} \frac{\partial B_{0k}(f_0, \bar{\lambda}(\bar{g}_2))}{\partial \lambda_{\nu}(\bar{g}_2)} T |\dot{\Psi}_{D'}(f(\bar{g}_1 - \bar{g}_2))|^2 df = \\ = \frac{1}{2} T \Psi_{kw}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \sum_{k=1}^K \frac{\partial B_{0k}(f_0, \bar{\lambda}(\bar{g}_1))}{\partial \lambda_{\mu}(\bar{g}_1)} \frac{\partial B_{0k}(f_0, \bar{\lambda}(\bar{g}_2))}{\partial \lambda_{\nu}(\bar{g}_2)}. \quad (11.161)$$

Тут функція $\Psi_{kw}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ є в загальному випадку функцією невизначеності синтезованої надширокосмугової радіометричної системи. Визначається ця функція виразом (11.99).

Розглянемо спочатку методику обчислення граничних похибок для вузько смугових і широкосмугових систем, вважаючи, що в межах робочої смуги частот

$$\dot{\Psi}_{D'}(f(\bar{g}_1 - \bar{g}_2)) \approx \dot{\Psi}_{D'}(f_0(\bar{g}_1 - \bar{g}_2)).$$

У цьому випадку

$$\Psi_{kw}(\vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\mathcal{G}}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k3}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0) \right|^2 \left| \dot{\Psi}_{D'}[f(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)] \right|^2 df \approx \left| \dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)] \right|^2 \Delta F_k.$$

Функція спрямованості $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f)$, як відзначалося, є широкої, і в межах вузької функції невизначеності $\dot{\Psi}_{D'}(f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2))$ можна вважати, що $\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 \dots) \approx \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_2 \dots)$.

Тоді

$$\Phi_{\mu, \vec{\mathcal{G}}_1, \nu, \vec{\mathcal{G}}_2} = \frac{I}{2} T \left| \dot{\Psi}_{D'}(f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)) \right|^2 \sum_{k=1}^K \Delta F_k \frac{\partial B_{0k}(f_0, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_1))}{\partial \lambda_{\mu}(\vec{\mathcal{G}}_1)} \frac{\partial B_{0k}(f_0, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2))}{\partial \lambda_{\nu}(\vec{\mathcal{G}}_2)}, \quad (11.162)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta F_k(\vec{\mathcal{G}}_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{L}_{k3}(j2\pi f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0) \right|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f) \right|^4}{c^4 B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0)} df \approx \\ &\approx \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4 \left| \dot{K}_k(j2\pi f) \right|^4}{c^4 B_{k\Sigma}^2(f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}_0)} df = \Delta F_{kw} \left| \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_0, f_0) \right|^4. \end{aligned} \quad (11.163)$$

Множник $\Delta F_k(\vec{\mathcal{G}})$, пропорційний ефективній ширині частот спектру декорельованого випадкового процесу, у синтезованому радіометрі в загальному випадку повинен бути адаптивним, тобто залежати й від параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$, і від яскравості $B_{k\Sigma}(\vec{\mathcal{G}}, \dots)$. Однак можна для простоти вибрати середню ширину смуги частот $\Delta F_k(\vec{\mathcal{G}}) \approx \Delta F(\vec{\mathcal{G}})$ для деякого середнього значення яскравості $B_{\Sigma cp}$.

Якщо в знаменнику (11.161), тобто в $B_{k\Sigma}^2[f, \vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_1)]$, винести за дужки $B_{ok}[\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]$, то при малих відносинах N_{0k} / B_{0k} і N_{0kp} / B_{0k} можна скористатися наступною формулою для розрахунків елементів $\Phi_{\mu, \vec{\mathcal{G}}_1, \nu, \vec{\mathcal{G}}_2}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu, \vec{\mathcal{G}}_1, \nu, \vec{\mathcal{G}}_2} &= \frac{I}{2} T \left| \dot{\Psi}_{D'}(f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)) \right|^2 \times \\ &\times \sum_{k=1}^K \Delta F'_k \frac{\partial \ln B_{0k}(f_0, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_1))}{\partial \lambda_{\mu}(\vec{\mathcal{G}}_1)} \frac{\partial \ln B_{0k}(f_0, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}_2))}{\partial \lambda_{\nu}(\vec{\mathcal{G}}_2)}, \end{aligned} \quad (11.164)$$

де

$$\Delta F'_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f^4/c^4) |\dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^4}{\left[|\dot{K}_k(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^2 + \frac{f^2 N_{0k}}{c^2} \frac{|\dot{K}_k(j2\pi f)|^2}{2B_{0k}[\vec{\mathcal{G}}, f, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]} + \frac{f^2 N_{0kp}}{c^2} \frac{N_{0kp}}{2B_{0k}[\cdot]} \right]^2} df \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^4}{c^4} \frac{|\dot{K}(j2\pi f)|^4 |\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^4}{\left[|\dot{K}(j2\pi f) \dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^2 + \gamma \right]^2} df \approx \Delta F', \quad \gamma \ll 1. \quad (11.165)$$

Тут два останні невеликі доданки доцільно замінити одним невеликим параметром регуляризації γ і, вважаючи, що АЧХ усіх каналів однакові, тобто $|\dot{K}_k(j2\pi f)| = |\dot{K}(j2\pi f)|$, уважати, що $\Delta F'_k = \Delta F'$. Функцію спрямованості $|\dot{F}_A(\vec{\mathcal{G}} - \vec{\mathcal{G}}_0, f)|^4$ в чисельнику і знаменнику можна винести за знак інтеграла при $f = f_0$.

Ядро зворотного оператора знайдемо, вирішуючи рівняння обернення

$$\int_{\Theta} \underline{\Phi}(\vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\mathcal{G}}_2) \underline{\Phi}^{-1}(\vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\mathcal{G}}_3) d\vec{\mathcal{G}}_2 = \underline{I} \delta(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_3). \quad (11.166)$$

Матрицю $\underline{\Phi}^{-1}(\vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\mathcal{G}}_3)$ запишемо в структурно-подібному виді:

$$\underline{\Phi}^{-1}(\vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\mathcal{G}}_3) = \frac{2}{T \Delta F} \underline{\Phi}_B^{-1}(\vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\mathcal{G}}_3) W_{\Psi}(\vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\mathcal{G}}_3), \quad (11.167)$$

де

$$\underline{\Phi}_B^{-1}(\vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\mathcal{G}}_3) = \left\| \sum_{k=1}^K \frac{\partial B_{0k}}{\partial \lambda_{\mu}(\vec{\mathcal{G}}_1)} \frac{\partial B_{0k}}{\partial \lambda_{\nu}(\vec{\mathcal{G}}_2)} \right\|^{-1}, \quad (11.168)$$

або визначимо з (11.163), а функцію $W_{\Psi}(\vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\mathcal{G}}_3)$ – з інтегрального рівняння обернення:

$$\int_{\Theta} |\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2 W_{\Psi}(\vec{\mathcal{G}}_2, \vec{\mathcal{G}}_3) d\vec{\mathcal{G}}_2 = \delta(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_3). \quad (11.169)$$

Звичайно ширина функції невизначеності $|\dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)]|^2$ значно менше сектору огляду Θ . У цьому випадку функцію W_{Ψ} можна знайти

методом перетворення Фур'є, уважаючись приблизно межі інтегрування нескінченними:

$$W_{\Psi}(\bar{\vartheta}_2 - \bar{\vartheta}_3) = \int_{-\infty}^{\infty} G_W(\bar{\omega}) \exp[j\bar{\omega}(\bar{\vartheta}_2 - \bar{\vartheta}_3)] d\bar{\omega}, \quad (11.170)$$

де

$$\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y), \quad G_W(\bar{\omega}) = \left\{ F \left[\left| \dot{\Psi}_{D'}(\Delta \bar{\vartheta}) \right|^2 \right] \right\}^{-1} = \left\{ G_{\Psi}(\bar{\omega}) \right\}^{-1}. \quad (11.171)$$

Повна помилка визначається як дискретна і континуальна (інтеграл) суми діагональних елементів ядра зворотнього оператора Фішера при співпадаючих напрямках ($\bar{\vartheta}_1 = \bar{\vartheta}_2$):

$$\rho = \frac{2}{\Delta F T} \int_{\Theta} \text{spur} \underline{\Phi}_B^{-1}(\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2) W_{\Psi}(\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2) d\bar{\vartheta}_1 \Big|_{\bar{\vartheta}_1 = \bar{\vartheta}_2}. \quad (11.172)$$

Для кожного параметра окремо гранична похибка, усереднена по напрямках $\bar{\vartheta}$, визначається відповідними діагональними елементами матриці $\underline{\Phi}^{-1}$:

$$\sigma_{\lambda\mu}^2 \approx \frac{2}{\Theta \Delta F T} \int_{\Theta} \varphi_{\mu\mu}^{-1}(\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2) W_{\Psi}(\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2) d\bar{\vartheta}_1 \Big|_{\bar{\vartheta}_1 = \bar{\vartheta}_2}. \quad (11.173)$$

Якщо похідні $\partial B_{0k} / \partial \lambda_{\mu}$ незначно змінюються в межах функції невизначеності, що залежить від різниці аргументу, то

$$\sigma_{\lambda\mu}^2 \approx \frac{2}{\Theta \Delta F T} \varphi_{\mu\mu}^{-1}(\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2) \int_{\Theta} W_{\Psi}(0) d\bar{\vartheta} = \frac{2}{\Delta F T} \varphi_{\mu\mu}^{-1}(\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2) W_{\Psi}(0), \quad (11.174)$$

де $\varphi_{\mu\mu}^{-1}$ – окремий діагональний елемент зворотної матриці $\underline{\Phi}_B^{-1}$ при $\bar{\vartheta}_1 = \bar{\vartheta}_2$.

Неважко показати (див. підрозд. 10.4), що $W_{\Psi}(0) = F^{-1} [G_{\Psi}(\bar{\omega})] \Big|_{\Delta \bar{\vartheta} = 0} = \infty$.

Таким чином, ρ і $\sigma_{\lambda\mu}^2$ дорівнюють нескінченності, що обумовлене некоректністю розв'язку задачі відновлення параметрів $\vec{\lambda}(\bar{\vartheta})$ і спектральних яскравостей $B_{0k}(\bar{\vartheta})$, згладжених функцією

невизначеності $\left| \dot{\Psi}_{D'} [f_0(\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_2)] \right|^2$, що є ядром оператора, що згладжує,

задовільняє $\int_{\Theta} \left| \dot{\Psi}_{D'} [f_0 \Delta \bar{\vartheta}] \right|^2 d\Delta \bar{\vartheta} < \infty$ умові. Інакше кажучи, отримані

дисперсії як діагональні елементи дискретно-континуального оператора

Фішера припускають у неявному виді повний розв'язок зазначеної зворотної задачі, але без залучення методів регуляризації або апіорних відомостей.

На практиці часто обмежуються тільки згладженими оцінками у вигляді лівих частин рівнянь (11.101), (11.106), (11.107) без відповідних операцій обернення.

Регуляризовані розв'язки з оберненням інтегральних рівнянь (11.98), (11.101), (11.119) і інших далі можна шукати різними способами [9, 14, 15] і, зокрема, методом максимуму апостеріорної ймовірності (МАВ). У методичному змісті ці розв'язки мало чим відрізняються від аналогічних розв'язків, розглянутих у попередніх розділах, при синтезі скануючи і рухомих радіометричних систем. Тут же необхідно відзначити, що нормовані значення

$\sigma_{\lambda_\mu}^2 / W_\Psi(0) = \frac{2}{T\Delta F} \phi_{\mu\mu}^{-1}$ кінцеві. Дослідження цих показників має сенс, тому

що їхня якісна поведінка залежно від умов проведення експериментів (напрямків орієнтації антенних систем, поляризацій і ін.), як і поведінка аналогічних похибок (6.37) – (6.45) при оцінці постійних параметрів $\vec{\lambda} = const$, дозволяє вибрати ці умови так, щоб забезпечити найменші або задані умови.

До цих же результатів приведуть і зосереджені оцінки (див. підрозд. 10.4), обумовлені діагональними елементами зворотних операторів Фішера в співпадаючих напрямках ($\vec{\mathcal{G}}_1 = \vec{\mathcal{G}}_2$). Тоді

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu,\nu,\vec{\mathcal{G}}} &= \left\langle \frac{\delta^2 \ln p[\vec{u}(t) | \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})]}{\partial \lambda_\mu(\vec{\mathcal{G}}) \partial \lambda_\nu(\vec{\mathcal{G}})} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{2} T \Delta F \left| \dot{\Psi}(f_0(\Delta \vec{\mathcal{G}} = 0)) \right|^2 \sum_{k=1}^K \frac{\partial B_{0k}(f_0, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}))}{\partial \lambda_\mu(\vec{\mathcal{G}})} \frac{\partial B_{0k}(f_0, \vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}}))}{\partial \lambda_\nu(\vec{\mathcal{G}})}, \quad (11.155) \end{aligned}$$

де відповідно до (11.38) $\left| \dot{\Psi}_{D'}(f_0(\Delta \vec{\mathcal{G}} = 0)) \right|^2 = (S_{D'})^2 = (X'_m, Y'_m)^2$.

Без залучення процедури обернення оператора, але при наявності апіорних відомостей про обмеженість спектрів оцінюваних функцій $\vec{\lambda}(\vec{\mathcal{G}})$, отримані розв'язки по максимуму правдоподібності приведуть до певних динамічних (обумовлених згладжуванням або втратою роздільної здатності оцінюваних функцій) і флуктуаційних помилок кінцевої величини. Методика їх розрахунків аналогічна тієї, яка була розглянута в підрозд. 10.5 при синтезі скануючих радіометрів.

Оцінка граничних похибок надширокосмугових систем на основі аналізу оператора Фішера (11.141) за своєю методикою практично така ж, як і наведена в цьому розділі методика для вузькосмугових і широкосмугових систем. Усі наведені формули і міркування тут залишаться такими ж, якщо

ввести заміну функції $\left| \dot{\Psi}_{D'}[f_0(\vec{\mathcal{G}}_1 - \vec{\mathcal{G}}_2)] \right|^2$ на $\Psi_{kw}(\vec{\mathcal{G}}_1, \vec{\mathcal{G}}_2)$. При цьому слід урахувати, що смуги ΔF_k і $\Delta F'_k$ входять неявно в останню функцію.

Висновки по розділу

У розділі синтезовані алгоритми оптимальної й квазіоптимальної обробки шумових процесів радіотеплового випромінювання просторово-протяжних об'єктів з метою формування радіояскравісних зображень і оцінки їх параметрів і статистичних характеристик як функцій просторових координат стосовно до розв'язку задач радіоастрономії і дистанційного зондування.

Ці алгоритми, характерні для застосування в системах апертурного синтезу, отримані в рамках методу максимальної правдоподібності, у припущенні, що спектральна яскравість випромінювання в межах АЧХ приймача постійна, але як зображення випромінюючого об'єкта залежить від просторових (кутових) координат його елементів. Якщо спектральна яскравість у межах АЧХ як функція частоти змінюється, то можна вважати, що отримані алгоритми приблизно слушні в межах робочої смуги частот для середньої яскравості і відповідної їй середньої потужності, що є тільки функціями просторових координат. Особливістю вирішених задач є використання спектральних V_F -перетворень, що не вимагають виконання умови ПЧВ (КМН), що і дозволяють розв'язати задачу синтезу алгоритмів обробки широкосмугових і надширокосмугових процесів.

У методичному плані спочатку синтезовані і розглянуті спрощені алгоритми в припущенні високої роздільної здатності, коли яскравість як функція просторових координат постійна в межах базової функції невизначеності. Алгоритми отримані як з урахуванням, так і без декореляції випадкових процесів, як для випадків приймання широкосмугового і надширокосмугового випромінювання, так і для випадків приймання вузькосмугового випромінювання при виконанні умови ПЧВ.

Після спрощених алгоритмів розглянуті алгоритми без обмежень на роздільну здатність у вигляді інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду, у яких передбачається некоректна процедура їх обігу. Ці алгоритми отримані як із застосуванням процедури декореляції, так і без неї і у надширокосмуговому, і у вузько смуговому варіантах.

Процедура декореляції забезпечує підвищення числа некорельованих відліків, що брав участь в усередненні, і тим самим зменшує погрішність оцінки параметра або шуканої статистичної характеристики. Крім того, у цій процедурі частково закладені операції розв'язку некоректної зворотної задачі відновлення радіояскравості джерела як функції просторових координат.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Волосюк, В. К. Методы оптимальной обработки сигналов в пассивных радиометрических устройствах и системах [Текст] : учеб. пособие : в 3 ч. / В. К. Волосюк, В. В. Павликов, С. С. Жила. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2013. – Ч. 1. – 200 с.
2. Волосюк, В. К. Методы оптимальной обработки сигналов в пассивных радиометрических устройствах и системах [Текст] : учеб. пособие : в 3 ч. / В. К. Волосюк, В. В. Павликов, С. С. Жила. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2014. – Ч. 2. – 210 с.
3. Караваев, В. В. Основы теории синтезированных антенн [Текст] / В. В. Караваев, В. В. Сазонов. – М. : Сов. радио, 1974. – 168 с.
4. Томпсон, А. Р. Интерферометрия и синтез в радиоастрономии [Текст] : монография / А. Р. Томпсон, Д. М. Моран, Д. У. Свенсон ; пер. с англ. под ред. А. И. Матвеевко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2003. – 624 с.
5. Есепкина, Н. А. Радиотелескопы и радиометры [Текст] / Н. А. Есепкина, Д. В. Корольков, Ю. Н. Парийский. – М. : Наука, 1973. – 416 с.
6. Христиансен, У. Радиотелескопы [Текст] / У. Христиансен, И. Хегбом ; пер. с англ. под ред. А. А. Пистолькорса. – М. : Мир, 1988. – 304 с.
7. Уилсон, Т. Л. Инструменты и методы радиоастрономии [Текст] : монография / Т. Л. Уилсон, К. Рольфс, С. Хюттемейстер ; пер. с англ. под ред. С. А. Трушкина. – М. : Физматлит, 2013. – 568 с.
8. Ван Схонвелд, К. Построение изображений в астрономии по функциям когерентности [Текст] / К. Ван Схонвелд ; пер. с англ. под ред. Л. Р. Когана, В. И. Костенко. – М. : Мир, 1982. – 318 с.
9. Волосюк, В. К. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации [Текст] : монография / В. К. Волосюк, В. Ф. Кравченко ; под ред. В. Ф. Кравченко. – М. : Физматлит, 2008. – 704 с.
10. Фалькович, С. Е. Основы статистической теории радиотехнических систем [Текст] : учеб. пособие / С. Е. Фалькович, П. Ю. Костенко. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2005. – 390 с.
11. Коллатц, А. Функциональный анализ и вычислительная математика [Текст] / А. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 448 с.

12. Кляцкин, В. И. Стохастические уравнения глазами физика (основные положения, точные результаты и асимптотические приближения) [Текст] / В. И. Кляцкин. – М. : Физматлит, 2001. – 528 с.
13. Дубков, А. А. Современные методы статистического анализа процессов переноса в биологических системах [Текст] : учеб.-метод. материал по программе повышения квалификации «Хранение и обработка информации в биологических системах» / А. А. Дубков. – Н. Новгород : [б. и.], 2007. – 92 с.
14. Василенко, Г. И. Восстановление изображений [Текст] / Г. И. Василенко, А. М. Тараторин. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.
15. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 285 с.
16. Бондарев, В. Н. Цифровая обработка сигналов: методы и средства [Текст] : учеб. пособие / В. Н. Бондарев, Г. Трёстер, В. С. Чернега ; Мин-во образования и науки Украины. – Харьков : Конус, 2001. – 398 с.
17. Караваев, В. В. Статистическая теория пассивной локации [Текст] / В. В. Караваев, В. В. Сазонов. – М. : Радио и связь, 1987. – 240 с.
18. Шифрин, Я. С. Антенны [Текст] : учеб. пособие / Я. С. Шифрин. – Харьков : Изд-во ВИРТА им. Л. А. Говорова, 1976. – 408 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
11. Оптимальні оцінки просторово-розподілених параметрів протяжних джерел власного радіотеплового випромінювання в широкосмугових і надширокосмугових системах апертурного синтезу.....	5
11.1. Моделі рівнянь спостереження і їх статистичні характеристики	5
11.2. Загальний розв'язок оптимізаційної задачі оцінок просторово-розподілених параметрів джерел радіотеплового випромінювання, що підлягають дослідженню	10
11.3. Спрощені квазіоптимальні алгоритми при високій роздільній здатності в припущенні сталості спектральної яскравості і оцінюваних параметрів у межах функції невизначеності.....	22
11.4. Алгоритми оцінок радіояскравості і параметрів джерела при довільній роздільній здатності радіометричної системи за кутовими координатами.....	44
11.5. Особливості використання функцій когерентності широкосмугового і надширокосмугового випромінювання при формуванні вихідного ефекту $Y_{вих\ k}(\vec{\vartheta})$	54
11.6. Особливості використання комплексних функцій когерентності і теореми Ван Циттерта – Цернике при виконанні умови ПЧВ (КМН)	63
11.7. Розрахунки граничних похибок оцінок параметрів $\vec{\lambda}(\vec{\vartheta})$	78
Висновки по розділу	84
Бібліографічний список	85

Навчальне видання

Волосюк Валерій Костянтинович
Павліков Володимир Володимирович
Жила Семен Сергійович

**МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ У ПАСИВНИХ
РАДІОМЕТРИЧНИХ ПРИСТРОЯХ І СИСТЕМАХ**

(Українською мовою)

Частина 3

Технічний редактор С. С. Жила

Зв. план, 2020

Підписано до видання 09.11.2020

Електронний ресурс

Ум. друк. арк. 4,9. Обл.-вид. арк. 5,5. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001