

В. М. Вартанян,
В. П. Гатило,
А. В. Кононенко

Моделювання та прогнозування економічних процесів і явищ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. М. Вартанян, В. П. Гатило, А. В. Кононенко

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ
ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ЯВИЩ**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК 338.2 : 004.942 (075.8)
В64

Рецензенти: канд. економ. наук В. В. Манівчук,
канд. техн. наук О. Ф. Авраменко

Вартанян, В. М.

В64 Моделювання та прогнозування економічних процесів і явищ [Електронний ресурс] : навч. посіб. / В. М. Вартанян, В. П. Гатило, А. В. Кононенко. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. – 102 с.

Розглянуто приклади задач моделювання та прогнозування економічних процесів і явищ. Наведено порядок розрахунків і візуалізації даних, виконаних у математичних пакетах MS EXCEL, MAPLE.

Для викладачів, магістрів, аспірантів економічних спеціальностей.

Іл. 48. Табл. 20. Бібліогр.: 14 назв

УДК 338.2 : 004.942 (075.8)

© Вартанян В. М., Гатило В. П.,
Кононенко А. В., 2020

© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2020

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник містить практикуми з дисципліни «Моделювання та прогнозування економічних процесів і явищ», яка відповідає освітньо-науковій програмі підготовки здобувачів вищої освіти на третьому (освітньо-науковому) рівні за фахом 051 «Економіка», спеціалізацією «Економіка підприємства», галуззю знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» (кількість кредитів ECTS – 8).

Предметом вивчення дисципліни є моделі й методи аналізу і прогнозування соціально-економічних процесів і явищ.

Міждисциплінарні зв'язки: сучасна економічна теорія, сучасні математико-статистичні методи економічних досліджень, соціально-економічна діагностика діяльності підприємства в умовах глобалізації.

Метою навчального посібника є освоєння методології і практичне оволодіння прийомами прогнозування соціально-економічних процесів і моделювання складних систем за допомогою математичних методів і моделей, розширення і поглиблення теоретичних знань щодо їх застосування.

Основними завданнями вивчення дисципліни є визначення основних особливостей моделювання і прогнозування складних соціально-економічних систем, ознайомлення з існуючими статистичними методами і моделями, дослідження соціально-економічних процесів за допомогою математичних моделей.

Згідно з вимогами освітньо-наукової програми студенти повинні знати суть математичного моделювання та прогнозування, що використовується для опису й дослідження економічних процесів і явищ, а також уміти застосовувати сучасні методи оброблення економічних даних, розробляти й використовувати сучасні методи і моделі аналізу й прогнозування економічних процесів і явищ, використовувати методики діагностики моніторингу економічних процесів.

1 ФОРМУВАННЯ ПОРТФЕЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ ПІДПРИЄМСТВА

Задача 1.1

Підприємство спеціалізується на виробництві продуктів харчування. Обсяг реалізації продукції в тисячах гривень за останні чотири роки і частку ринку підприємства і сильнішого конкурента по кожному виду продукції подано в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Характеристика портфеля підприємства

Номер групи продукції	Обсяги реалізації продукції, тис. грн				Частка ринку в 2017 р., %	
	2014 р.	2015 р.	2016 р.	2017 р.	підприємства	конкурента
1	2400	2900	2900	2500	34	17
2	510	550	590	649	33	21
3			90	130	5	7
4	1650	1700	1850	2405	11	9
5	200	240	280	448	15	10
6			60	100	1	7
7	900	600	580	348	40	18
8	1000	1000	980	686	16	16
9	1600	1200	900	400	2	4
ЗАГАЛОМ	8260	8190	8230	7666		

Завдання

Використовуючи матрицю БКГ (Бостонської консалтингової групи), сформулювати продуктову стратегію підприємства.

Рекомендації щодо розв'язання задачі

1. При побудові двовимірної матриці БКГ слід використовувати темпи зростання ринку (дані обсягів реалізації продукції) підприємства і відносну частку ринку.

2. Розрахувати темпи зростання ринку, які характеризують рух продукції на ринку, тобто змінення обсягів реалізації (обсягів продажів), і можуть бути визначені по кожному продукту через індекс темпу їх зростання за аналізований період або через середньорічні темпи їх змінення.

Індекс темпу зростання по кожному виду продукції визначається як відношення обсягу реалізації продукції за поточний рік до обсягу її реалізації за попередній рік і виражається у відсотках або коефіцієнтах зростання.

Наприклад, для першої групи продукції темп зростання в 2017 р. становить: $2500:2900 = 0,86$.

Середньорічний темп змінення обсягів реалізації по кожному виду продукції визначається як середнє арифметичне темпів зростання за весь аналізований період і виражається у відсотках або коефіцієнтах зростання.

3. Розрахувати відносну частку, що займає підприємство на ринку (ВЧР), по кожному виду продукції. Відносна частка ринку визначається відношенням частки підприємства на ринку до частки надпотужної фірми-конкурента. Частки ринку знаходяться як відношення обсягу реалізації продукції підприємством до місткості ринку цієї продукції.

Наприклад, ВЧР для першої групи продукції становить: $34:17 = 2$. Це означає, що обсяг реалізації підприємством першої групи продукції перевищує обсяг реалізації аналогічного продукту найсильнішою фірмою-конкурентом у два рази.

4. Розрахувати частку (у відсотках) кожного виду продукції в загальному обсязі реалізації підприємства за період з 2014 р. по 2017 р.

Усі отримані дані рекомендується подати у вигляді таблиці.

5. Побудувати матрицю БКГ. Для масштабу оцінювання окремих видів продукції (середні значення в матриці) використовуються індекс темпів зростання ринку, що дорівнює одиниці, тобто обсяг продажів є постійним, і відносна частка ринку, що дорівнює одиниці: $ВЧР > 1$ мають "лідери" ринку (їхня частка ринку є більшою, ніж найсильнішого конкурента), $ОДР < 1$ – властивість "послідовників". Діаметр кола для зображення продукту вибирається пропорційно частці обсягу продукції в загальному обсязі реалізації підприємства.

6. На основі аналізу матриці БКГ сформулювати продуктову стратегію підприємства. Вона може містити такі стратегічні рішення:

- видалити з продуктового портфеля підприємства;
- збільшити обсяг реалізації, змінюючи структуру продуктового портфеля;
- змінити відносну частку на ринку;
- збільшити інвестування;
- ввести жорсткий контроль за інвестиціями, перерозподілити кошти між окремими видами продукції й т. ін.

При формуванні продуктової стратегії можна користуватися таким набором рішень і принципів створення продуктового портфеля:

- «зірок» оберігати і зміцнювати;
- по можливості позбутися «собак», якщо немає вагомих причин для того, щоб їх зберігати;
- для «дійних корів» необхідними є жорсткий контроль капіталовкладень і передача надлишку грошових надходжень під нагляд менеджерів вищого рівня;
- «дикі кішки» підлягають спеціальному вивченню, щоб встановити, чи не зможуть вони при відомих капіталовкладеннях перетворитися на «зірок»;

- комбінація продуктів «дикі кішки», «зірки» і «дійні корови» призводить до найкращих результатів функціонування – помірної рентабельності, хорошої ліквідності й довгострокового зростання збуту і прибутку;
- комбінація «дикі кішки» і «зірки» призводить до нестійкої рентабельності й поганої ліквідності;
- комбінація «дійні корови» і «собаки» приводить до зменшення продажів і рентабельності.

Розв'язання задачі

Матриця Бостонської консалтингової групи

Основою матриці БКГ, або *матриці зростання/частки ринку*, є модель життєвого циклу товару, відповідно до якої товар у своєму розвитку проходить чотири стадії:

- вихід на ринок (товар – «проблема»);
- зростання (товар – «зірка»);
- зрілість (товар – «дійна корова»);
- спад (товар – «собака»).

При цьому грошові потоки і прибуток підприємства також змінюються: прибуток зі знаком «–» змінюється його зростанням, а потім – поступовим зниженням. Бостонська матриця зосереджується на позитивних і негативних грошових потоках, які асоціюються з різними бізнес-одинацями підприємства або його продуктами.

Номенклатура продукції, що випускається підприємством, аналізується за цією матрицею, тобто визначається, до якої позиції матриці можна віднести кожен вид продукції підприємства. Для цього бізнес-одинаці підприємства класифікуються за показниками відносної частки ринку (ВЧР) і темпами зростання галузевого ринку. Показник ВЧР визначається як частка ринку бізнес-одинаці, поділена на частку ринку сильнішого конкурента.

Зрозуміло, що показник ВЧР ринкового лідера буде більшим за одиницю, а $ВЧР = 2$ означає, що частка ринку ринкового лідера вдвічі більша, ніж найближчого конкурента. З іншого боку, $ВЧР < 1$ відповідає ситуації, коли частка ринку бізнес-одинаці менша, ніж ринкового лідера. Висока частка ринку розглядається як індикатор бізнесу, який генерує грошові потоки прибутків. Це положення ґрунтується на дослідній кривій.

Друга змінна – *темп зростання галузевого ринку* (ТЗР) – оснований на прогнозах продажів продукції галузі й пов'язана з аналізом життєвого циклу галузі. Звичайно, фактичну криву життєвого циклу галузі можна побудувати тільки ретроспективно. Однак керівництво підприємства може експертно оцінити стадію життєвого циклу галузі, в якій воно працює, щоб визначити (спрогнозувати) потребу у фінансах. У галузях з високим темпом зростання необхідні істотні вкладення в дослідження і

розроблення нової продукції, в рекламу, щоб спробувати досягти домінуючого становища на ринку і відповідно позитивних грошових потоків

Для побудови матриці БКГ фіксуємо по горизонтальній осі значення відносної частки ринку, а по вертикальній осі – темпи зростання ринку. Далі, поділивши цю площину на чотири частини, отримуємо шукану матрицю (рисунок 1.1).

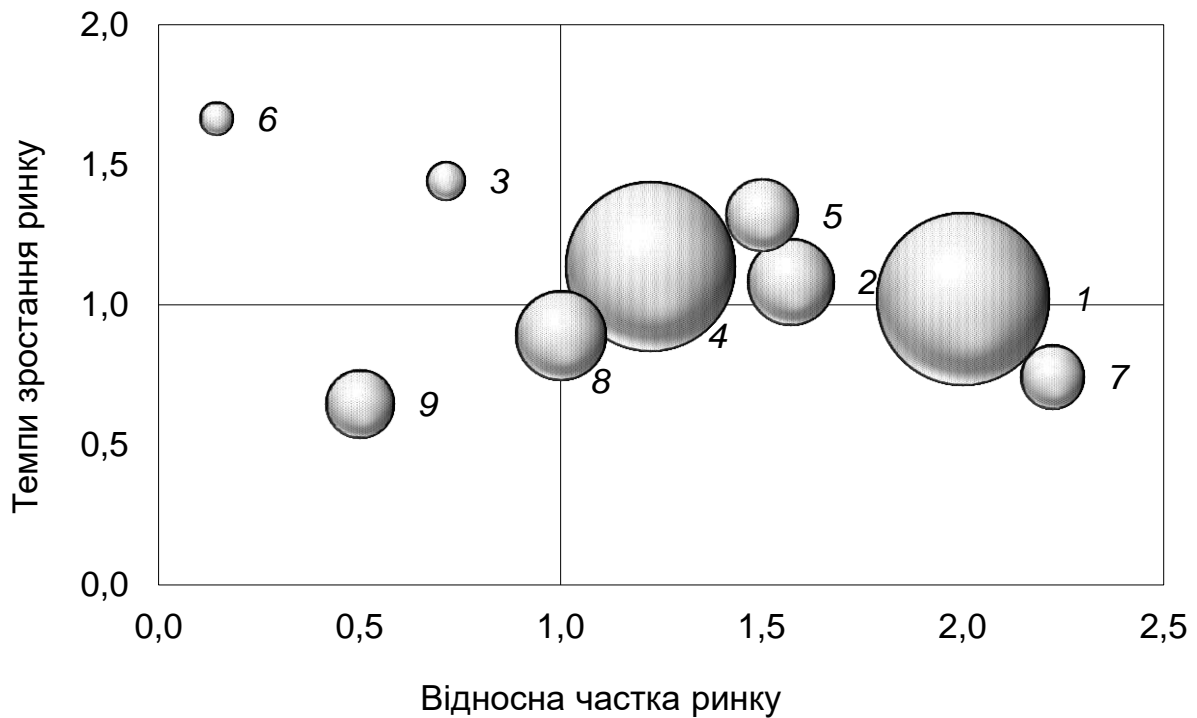


Рисунок 1.1 – Матриця БКГ

Значення змінної ВЧР, що дорівнює одиниці, відокремлює продукти – ринкові лідери – від послідовників. Що стосується другої змінної, то зазвичай темпи зростання галузі 10 % і більше розглядаються як високі. Можна рекомендувати використовувати як базовий рівень, що розділяє ринки з високими і низькими темпами зростання, темп зростання валового національного продукту в натуральних показниках або середньозважене значення темпів зростання різних сегментів галузевого ринку, в яких працює фірма. Вважається, що кожен з квадрантів матриці описує істотно різні ситуації, що потребують особливого підходу з огляду на фінансування і маркетинг.

Кожна бізнес-одиниця підприємства або його продукт потрапляє в один з квадрантів матриці відповідно до темпу зростання галузі, в якій працює підприємство, і відносної частки ринку. При використанні цього методу важливо чітко визначити галузь, в якій працює фірма. Якщо галузь визначено занадто вузько, то фірма може перетворитися на лідера, при широкому визначенні галузі фірма матиме вигляд слабкої.

Графічно позиції продукту або бізнес-одиниці зазвичай відображають кругом, площа якого показує відносну значущість даної структури або

продукту для підприємства, що оцінюється за величиною використовуваних активів або генерованого прибутку. Такий аналіз рекомендується проводити в динаміці, простежуючи розвиток кожного бізнесу в часі.

Матриця зростання / частки ринку має багато спільного з кривою життєвого циклу товару. Однак її перевага або відмінність від простої моделі життєвого циклу товару (галузі) полягає в комплексному розгляді певного набору продуктів, які можуть перебувати на різних стадіях життєвого циклу, і виробленні рекомендацій щодо перерозподілу фінансових потоків між продуктами.

Нові продукти частіше з'являються в галузях, які зростають, і мають статус товару-«проблеми». Такі продукти можуть виявитися дуже перспективними, але вони потребують суттєвої фінансової підтримки центру. Поки ці продукти асоціюються з великими негативними фінансовими потоками, залишається небезпека, що вони не зможуть стати товарами-«зірками». Головне стратегічне питання, що являє собою певну складність, – коли припинити фінансування цих продуктів і виключити їх з корпоративного портфеля? Якщо це зробити занадто рано, то можна втратити потенційний товар-«зірку». До категорії товарів-«зірок» можуть потрапити як нові продукти, так і нові товарні марки продукції підприємства. Ризик фінансових вкладень в цю групу є найбільш великим.

Товари-«зірки» – це ринкові лідери, що знаходяться зазвичай на піку свого продуктового циклу. Вони самі приносять досить коштів, для того щоб підтримувати високу частку ринку, що є динамічною. Але незважаючи на стратегічно привабливу позицію цього продукту, його чистий грошовий дохід є досить низьким, оскільки потрібні істотні інвестиції для забезпечення високих темпів зростання, щоб скористатися дослідною кривою. У менеджерів існує спокуса зменшити інвестиції з метою збільшення поточного прибутку, однак це може виявитися недалекоглядним, оскільки в довгостроковій перспективі даний продукт може перетворитися на товар-«дійну корову». У цьому сенсі важливі майбутні доходи товару-«зірки», а не поточні.

Коли темп зростання ринку сповільнюється, товари-«зірки» стають «дійними коровами». Це продукти, або бізнес-одиниці, що займають позиції лідера на ринку з низьким темпом зростання. Їх привабливість пояснюється тим, що вони не потребують великих інвестицій і забезпечують значні позитивні грошові потоки, основані на дослідній кривій. Такі бізнес-одиниці не тільки окупають себе, але й забезпечують фонди для інвестування в нові проекти, від яких залежить майбутнє зростання підприємства. Для того щоб феномен товарів-«дійних корів» повною мірою використовувався в інвестиційній політиці підприємства, необхідно компетентне управління продуктами, особливо в сфері маркетингу. Конкуренція в галузях, що лідирують, є дуже жорсткою. Тому

необхідні постійні зусилля, спрямовані на підтримку частки ринку і пошук нових ринкових ніш.

Товари-«собаки» – це продукти, які мають низьку частку ринку і не мають можливостей зростання, оскільки знаходяться в непривабливих галузях (зокрема, галузь може бути непривабливою через високий рівень конкуренції). Чисті грошові потоки у таких бізнес-одиниць є нульовими або негативними. Якщо немає особливих обставин (наприклад, даний продукт є таким, що доповнює товар-«дійну корову» або «зірку»), то від цих бізнес-одиниць слід позбавлятися. Однак іноді корпорації зберігають у своїй номенклатурі такі продукти, якщо вони належать до «зрілих» галузей. Місткі ринки «зрілих» галузей певною мірою захищені від різких коливань попиту і великих нововведень, які докорінно змінюють уподобання споживачів, що дає змогу підтримувати конкурентоспроможність продукції навіть в умовах малої частки ринку (наприклад, ринку лез для гоління).

Отже, бажана послідовність розвитку продуктів така:

«Проблема» → «Зірка» → «Дійна корова» [і якщо неминуче] → «Собака».

Реалізація такої послідовності залежить від зусиль, спрямованих на досягнення збалансованого портфеля, яке передбачає в тому числі рішучу відмову від неперспективних продуктів. В ідеалі збалансований номенклатурний портфель підприємства повинен містити 2-3 товари-«корови», 1-2 «зірки», кілька «проблем» як запас на майбутнє і, можливо, невелику кількість товарів-«собак». Типовий незбалансований портфель має зазвичай один товар-«корову», багато «собак», кілька «проблем», але не має товарів-«зірок», здатних зайняти місце «собак». Надлишок товарів, що застаріли («собак»), указує на небезпеку спаду, навіть якщо поточні результати діяльності підприємства відносно хороші. Надлишок нових товарів може призвести до фінансових ускладнень.

Матриця Бостонської консалтингової групи представляє корпорацію у вигляді кількох підрозділів, які майже не залежать один від одного в виробничо-збутовому плані (бізнес-одиниць), які позиціонуються на ринку залежно від значень двох критеріїв.

Суть портфельного аналізу полягає у визначенні того, у яких підрозділів вилучити ресурси (вилучають у «дійної корови») і кому їх передати (віддають «зірці» або «проблемі»).

Основна критика підходу Бостонської консалтингової групи зводиться до такого:

- у матриці передбачено тільки два виміри – зростання ринку і відносна частка ринку, не розглядаються багато інших чинників зростання;
- позиція стратегічної одиниці бізнесу істотно залежить від визначення меж і масштабів ринку;
- на практиці не завжди зрозуміло, як зростання ринку / частки ринку впливає на прибутковість бізнесу; гіпотеза про залежність між відносною

часткою ринку і потенціалом прибутковості може бути застосована лише за наявності дослідної кривої, тобто переважно в галузях масового виробництва;

- ігнорується взаємозалежність господарських одиниць;
- ігнорується певна циклічність розвитку товарних ринків.

Дані для побудови матриці БКГ наведено в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Розрахункові дані для побудови матриці БКГ

Темпи зростання ринків				ВЧР	Частка в загальному обсязі реалізації підприємства
2014 р.	2015 р.	2016 р.	Середнє значення	2017 р.	
1,21	1,00	0,86	1,02	2,00	0,33
1,08	1,07	1,10	1,08	1,57	0,08
–	–	1,44	1,44	0,71	0,02
1,03	1,09	1,30	1,14	1,22	0,31
1,20	1,17	1,60	1,32	1,50	0,06
–	–	1,67	1,67	0,14	0,01
0,67	0,97	0,60	0,74	2,22	0,05
1,00	0,98	0,70	0,89	1,00	0,09
0,75	0,75	0,44	0,65	0,50	0,05
0,99	1,05	0,93	0,98		1

Один з можливих варіантів продуктової стратегії підприємства подано в таблиці 1.3.

Основний напрямок стратегії підприємства – зміна структури продуктового портфеля і перерозподіл наявних коштів.

Таблиця 1.3 – Варіант продуктової стратегії підприємства

Сегмент	Номер продукції	Стратегія
«Дикі кішки»	6, 3	За рахунок інвестицій провести додаткові дослідження і вирішити: чи видалити з продуктового портфеля продукт № 6, чи збільшити частку ринку продукту № 3
	4	Збільшити частку ринку
«Зірки»	5, 2	Збільшити обсяг реалізації, оберігати і зміцнювати за рахунок додаткових інвестицій
«Дійні корови»	7, 1	Збільшити обсяг реалізації продукту № 7. Підтримувати продукт № 1. Надлишок коштів направити на підтримку продуктів № 2, 3, 4, 5
«Собаки»	9	Видалити з продуктового портфеля
	8	Зменшити обсяг реалізації

2 ПРОГНОЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ДІЯЛЬНОСТІ ПІДПРИЄМСТВА ЗА ЧАСОВИМИ РЯДАМИ

В Excel є кілька інструментів для прогнозування економічних показників діяльності підприємства, в яких застосовуються різні математичні моделі:

- ковзне середнє (як прогноз приймається середнє значення спостережуваної величини в декількох останніх вимірах), яке може бути обчислено за допомогою функції **«СРЗНАЧ»** або надбудови **«Скользящее среднее»**;

- лінійний прогноз (до отриманих значень величини наближається пряма лінія, на підставі якої і розраховується прогноз), що виконується за допомогою функції **«ТЕНДЕНЦИЯ»** або надбудови **«Регрессия»**;

- нелінійний прогноз (приймається, що значення величини змінюється нелінійно), який можна отримати за допомогою функції **«РОСТ»**;

- експоненціальне згладжування (приймається середнє значення спостережень, до якого значення останніх спостережень входять з великою вагою порівняно з вагою попередніх спостережень), яке виконується за допомогою надбудови **«Экспоненциальное сглаживание»**.

Застосування методу ковзного середнього

При використанні цього методу прогноз будь-якого періоду являє собою отримання середнього показника декількох результатів спостережень часового ряду. Хоча цей метод є занадто простим для створення точного прогнозу, іноді він може бути більш ефективним, ніж методи, основані на довгострокових спостереженнях. Наприклад, якщо за останні кілька місяців у зміні обсягу продажів намітилася тенденція, відмінна від тієї, яка спостерігалася в попередні два роки, то, використовуючи дані останніх місяців для складання прогнозу на наступний місяць, можна отримати більш точний результат, ніж при використанні даних за два роки.

Одним із способів створення ковзного середнього в Excel є пряме введення формули. Ввести формулу в комірку можна простим набором на клавіатурі після знака **«=»** стандартної функції **«=СРЗНАЧ(СІ:СJ)»**, де С – літерне позначення стовпчика, що містить необхідні комірки; І – номер першої комірки діапазону даних; J – номер останньої комірки діапазону даних.

Можна ввести формулу в комірки, використовуючи вбудований інструмент **«Мастер функций»**. В меню **«Вставка»** виберіть **«Функция»**. У діалоговому вікні в розділі **«Категория»** виберіть **«Статистические»**, у розділі **«Функция»** – **«СРЗНАЧ»**. Після цього виділіть діапазон даних і натисніть **«ОК»**.

Іншим способом створення ковзного середнього є використання надбудови **«Пакет анализа»**. В меню **«Сервис»** виберіть **«Анализ данных»**. З'явиться діалогове вікно **«Анализ данных»**. Із списку виберіть інструмент

аналізу «Скользящее среднее» і натисніть «ОК». З'явиться діалогове вікно «Скользящее среднее». У полі «Входной интервал» укажіть діапазон у робочому аркуші. У полі «Интервал» введіть кількість періодів, які бажаєте включити в підрахунок ковзного середнього. У полі «Выходной интервал» виділіть комірку, з якої бажаєте почати виведення розрахункових значень. Натисніть «ОК».

За допомогою інструментів Excel можна графічно відобразити дані ковзного середнього. Для цього необхідно створити графік, який містить значення базових даних, за допомогою інструмента «Мастер диаграмм». Цей інструмент можна викликати в меню «Вставка» – «Диаграмма» або на стандартній панелі інструментів. Після побудови графіка клацніть на лінії правою кнопкою миші. У контекстному меню виберіть «Добавить линию тренда». У діалоговому вікні клацніть на вкладці «Тип». Виберіть лінію тренду «Линейная фильтрация», а потім – необхідну для розрахунку ковзного середнього кількість періодів за допомогою лічильника «Точки». Натисніть «ОК». На графіку побачите лінію тренду ковзного середнього.

Застосування функцій регресії

Під час прогнозування економічних показників методом регресії можна використовувати стандартні функції Excel «ТЕНДЕНЦИЯ» і «РОСТ». За допомогою методів регресії оцінюють взаємозв'язок між фактичними даними спостережень та іншими параметрами, наприклад, порядковими номерами періодів спостережень або датами спостережень.

Розглянемо застосування функції «ТЕНДЕНЦИЯ». Припустимо, що дані спостережень конкретного показника внесені в робочому аркуші в стовпчику А з 1-ї по 10-ту комірки. Значення порядкових номерів спостережень внесені в стовпчику В, поруч зі значеннями відповідних показників. На підставі наявних даних можна побудувати прогноз досліджуваного показника на наступні періоди часового ряду, за якими ще немає результатів спостережень. Наприклад, є результати десяти спостережень, потрібно визначити прогнозні показники на наступні десять аналогічних періодів часу. У комірках А1:А10 внесені значення показника, а в комірках В1: В10 – порядкові номери спостережень 1, 2, 3 ... 10.

Щоб визначити прогнозне значення одного першого періоду, у комірку В11 внесіть порядковий номер цього періоду – 11. Далі у комірку С11 вставте формулу функції «ТЕНДЕНЦИЯ» таким чином. Виділіть комірку С11. У меню «Вставка» виберіть «Функция». У діалоговому вікні в розділі «Категория» виберіть «Статистические», а в розділі «Функция» – «ТЕНДЕНЦИЯ». Натисніть «ОК». З'явиться діалогове вікно функції «ТЕНДЕНЦИЯ». У рядку «Изн_знач_у» виділіть діапазон комірок А1:А10. У рядку «Изн_знач_х» виділіть діапазон комірок В1:В10. У рядку «Нов_знач_х» виділіть комірку В11. Натисніть «ОК». В комірці С11 з'явиться прогнозне значення показника на одинадцятий період.

Для того щоб визначити прогнозні значення відразу на десять майбутніх періодів, потрібно формулу функції «ТЕНДЕНЦИЯ» ввести в діапазон комірок С11:С20. Для цього внесіть в комірки В11:В20 порядкові номери прогнозованих періодів – 11, 12, 13 ... 20. Виділіть діапазон комірок С11:С20. Натисніть комбінацію клавіш «Ctrl+Shift+Enter» (за допомогою цієї комбінації можна ввести формули масиву) і, не відпускаючи клавішу, виконайте аналогічні дії, які було описувано вище з однією зміною. У рядку «Нов_знач_х» діалогового вікна функції «ТЕНДЕНЦИЯ» виділіть діапазон комірок В11:В20. У комірках С11:С20 з'являться прогнозні значення для десяти майбутніх періодів.

За допомогою функції «ТЕНДЕНЦИЯ» обчислюють прогнози, основані на лінійному зв'язку між результатом спостережень і часом спостережень. Якщо ж взаємозв'язок показників має нелінійний характер, то точний прогноз можна побудувати, застосовуючи функцію Excel «РОСТ».

Використаємо той самий приклад, коли в комірках А1:А10 внесені дані спостережень показника, а в комірках В1:В10 – порядкові номери спостережень. Так само, як і для функції «ТЕНДЕНЦИЯ», введіть у комірки В11:В20 номери прогнозних періодів. Далі виконайте аналогічні дії, тільки в розділі «Функция» у діалоговому вікні «Мастер функций» виберіть функцію «РОСТ». У комірках С11:С20 отримаєте прогнозні значення показника, розраховані з використанням цієї функції.

При проведенні регресійного аналізу на графіку, побудованому за даними спостережень, значення номерів прогнозних періодів можна не вводити в робочий аркуш. Прогноз можна зробити за допомогою графічної лінії тренду.

Клацніть правою кнопкою миші на лінії побудованого графіка. У контекстному меню виберіть «Добавить линию тренда». Виберіть тип лінії тренду «Линейная». Клацніть на вкладці «Параметры». У полі «Вперед на» введіть кількість періодів для прогнозу. Якщо є бажання, можете встановити прапорець «показывать уравнение на диаграмме». Натисніть «ОК». Унаслідок цього на графіку буде побудовано лінію тренду часового ряду, продовжену вперед на вибрану кількість періодів.

Якщо рівняння лінії тренду було виведено на діаграму, то, використовуючи це рівняння, можна розрахувати прогноз досліджуваного показника на будь-який інший період. Для цього необхідно в рівняння замість змінної Х підставити порядковий номер відповідного періоду (або відповідну дату, якщо як параметр регресії використовувалися дати проведення спостережень, а не їх порядкові номери).

Застосування функції експоненціального згладжування

Функція згладжування має свої особливості порівняно з функціями, основаними на регресії. На відміну від функцій «ТЕНДЕНЦИЯ» і «РОСТ», кожен новий прогноз являє собою суму попереднього прогнозу і поправкового коефіцієнта, який і пересуває новий прогноз у напрямку,

який робить попередній результат більш точним.

Згладжування є дуже корисним у тих випадках, коли в часовому ряду спостерігаються істотні відмінності в рівнях даних. За наявності в часовому ряду різкого стрибка показника лінійна лінія тренду не відображає цього явища. При прогнозі, виконаному за допомогою згладжування, фактична базова лінія відображається досить точно.

Excel безпосередньо підтримує один з методів згладжування за допомогою засобу «**Экспоненциальное сглаживание**», який знаходиться у надбудові «**Пакет анализа**».

Для застосування методу експоненціального згладжування введіть дані спостережень конкретного показника в комірки робочого аркуша, наприклад, A1:A10. В меню «**Сервис**» виберіть «**Анализ данных**». У діалоговому вікні виберіть «**Экспоненциальное сглаживание**». У полі «**Входной интервал**» виділіть комірки інтервалу даних, що аналізуються, і додатково захопіть порожні комірки цього ж стовпчика. При цьому кількість порожніх додаткових комірок має відповідати кількості періодів, на які потрібно скласти прогноз, плюс ще одна комірка. Далі в полі «**Фактор затухания**» внесіть показник, наприклад, 0,7. У полі «**Выходной интервал**» виділіть комірку, з якої почнеться запис значень згладженої лінії, наприклад, B1. Натисніть «**ОК**». Якщо ви поставити галочку в полі «**Вывод графика**», то засіб автоматично крім виведення значень згладженої лінії побудує графік згладженої лінії і графік лінії вихідних даних.

Важливим показником, що впливає на точність прогнозу, є фактор згасання. Чим меншим є фактор згасання, тим точніше прогноз відобразатиме останні дані спостережень, а чим більшим – тим сильніше буде відставання прогнозу від цих даних. Хороші результати можна отримати тоді, коли останні результати спостережень відображають випадкові явища, які довго не змінюють загального рівня часового ряду.

Не слід використовувати параметр «**фактор затухания**», який є меншим від значення 0,7. Якщо створюється враження, що при більшому значенні цього показника засіб «**Экспоненциальное сглаживание**» діє значно краще, то, найімовірніше, це відбувається завдяки високому рівню автокореляції в часовому ряду.

Автокореляція – дуже важливий параметр процесу прогнозування. Він характеризує існуючу залежність між даними спостережень, отриманими в певний час, і даними спостережень, отриманими на кілька часових періодів раніше.

Якщо об'єднати кожен результат спостережень з результатом, що безпосередньо передує йому, то можна обчислити кореляцію між цими двома наборами даних.

Для перевірки автокореляції в Excel існує функція «**KORREL**». Скористатися нею можна також двома способами: або введіть у комірку безпосередньо формулу «**=KORREL(A1:A9;A2:A10)**», або в меню «**Вставка**» виберіть «**Функция**». У вікні майстер функцій виберіть категорію

«Статистические» і функцію «КОРРЕЛ». Натисніть «ОК». У вікні функції виділіть відповідні діапазони даних. Другий діапазон зі зсувом на одну комірку.

Якщо показник автокореляції високий, то це означає, що кожен результат більшою мірою залежить від значення спостереження, отриманого безпосередньо перед ним.

Застосування множинної регресії

Відомо, що в господарській діяльності будь-якого підприємства між певними показниками існує значущий зв'язок. Наприклад, зміна обсягу продажів залежить від зміни продажної ціни, якості продукції, а також запланованого рівня витрат на рекламу. Тенденція зміни цін, наприклад, на однокімнатні квартири залежить від зміни цін на двокімнатні квартири і кімнати.

У зв'язку з цим виникає питання: яким чином можна спрогнозувати результат зміни одного показника з урахуванням тенденції зміни інших показників?

Одним з таких методів є використання рівняння множинної регресії, в яке підставляються значення передбачуваних змінних. У загальному вигляді це рівняння можливо записати так:

$$Y = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cdot X_i,$$

де Y – прогнозований показник; A_i – коефіцієнти; X_i – пов'язані передбачувані показники.

В Excel існує вбудована функція, яка дає змогу проводити аналіз множинної регресії, обчислювати значення коефіцієнтів для рівняння множинної регресії і визначати деякі інші характеристики регресії взаємозв'язаних показників (наприклад, значення дисперсії).

Для того щоб скористатися вбудованою функцією, внесіть дані спостережень показника, який збираєтеся прогнозувати, у комірки робочого аркуша Excel, наприклад, у стовпчик А (А2:А10). Дані спостережень пов'язаних показників за аналогічний період часу внесіть у сусідні комірки, у стовпці В, С, D (залежно від кількості пов'язаних показників). Далі в меню «Сервис» виберіть «Анализ данных». У діалоговому вікні виберіть інструмент «Регрессия». Натисніть «ОК». У діалоговому вікні інструмента «Регрессия» введіть вхідний інтервал Y – інтервал з даними спостережень прогнозованого показника (А2:А10). Вхідний інтервал X – повністю весь інтервал з даними спостережень усіх пов'язаних показників, наприклад, В2:D10. Натисніть «ОК». У новому аркуші (якщо виберете параметри виведення – новий робочий аркуш) з'являться підсумки регресійного аналізу взаємозв'язаних показників.

На основі даних отриманого аналізу можна побудувати рівняння множинної регресії. Коефіцієнтами рівняння будуть значення, отримані в

стовпці «Коэффициенты» найнижчої таблиці аналізу: «A0–Y-пересечения», A1–An – значення для відповідних змінних X1–Xn.

Використовуючи отримане рівняння, можна визначити прогнозне значення досліджуваного показника на будь-який майбутній період. Для цього слід підставити замість змінних X1–Xn плановані значення передбачуваних пов'язаних показників.

Задача 2.1

У таблиці 2.1 наведено дані про деякий економічний показник за два роки.

Таблиця 2.1 – Статистика продажів за два роки

Місяці	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й	12-й
1-й рік	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂
2-й рік	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈	X ₁₉	X ₂₀	X ₂₁	X ₂₂	X ₂₃	X ₂₄
1-й рік	58	86	103	74	61	57	61	91	92	91	122	133
2-й рік	95	132	168	119	98	92	98	146	148	131	196	213

Завдання

1. Використовуючи опції «построение тренда», «вывод формулы тренда» MS EXCEL, скласти прогноз на наступний рік.
2. Використовуючи «мастер функций» MS EXCEL, виконати прості обчислення.
3. Побудувати залежність показника від часу.

Рекомендації щодо розв'язання задачі

Адитивну модель прогнозування можна подати у такому вигляді:

$$F = T + S \pm E, \quad (2.1)$$

де F – прогнозоване значення; T – тренд; S – сезонна компонента; E – помилка прогнозу.

Для зменшення помилки прогнозової моделі використовуємо поліноміальний тренд.

Для визначення сезонної компоненти віднімаємо від фактичних значень обсягів продажів значення тренду.

Скорегуємо значення сезонної компоненти таким чином, щоб їх сума дорівнювала нулю. Для цього підсумуємо сезонні компоненти одного й того ж місяця різних років, знайдемо середнє значення сезонної компоненти за кожен місяць і їх суму; цю суму потім поділимо на кількість місяців і отримане значення віднімемо від середнього.

Знаходимо значення параметрів моделі. Для цього середню сезонну компоненту додаємо до значення тренду.

Тепер можна розраховувати помилку моделі як різницю між фактичними значеннями і значеннями моделі.

Знаходимо середньоквадратичну помилку моделі за формулою

$$E = \frac{\sum O^2}{\sum (T + S)^2}, \quad (2.2)$$

де T – трендове значення обсягу продажів; S – сезонна компонента; O – відхилення моделі від фактичних значень.

Розв'язання задачі

Щоб побудувати лінію тренду, необхідно виконати такі дії: відкрити команду «**Діаграма**», вибрати підпункт «**Добавить линию тренда**». У вікні «**Линия тренда**» слід вибрати «**Полиномиальная, степень 6**» (рисунок 2.1). У цьому пункті в підпункті «**Параметры**» виділити рядок «**Показывать уравнение на диаграмме**».

Використовуючи рівняння на діаграмі, робимо обчислення і заповнюємо стовпчик «**Значение тренда**».

Знаходимо величину «**сезонной компоненты**» (див. рисунок 2.1).

На рисунку 2.2 показано розрахунок середніх значень сезонної компоненти.

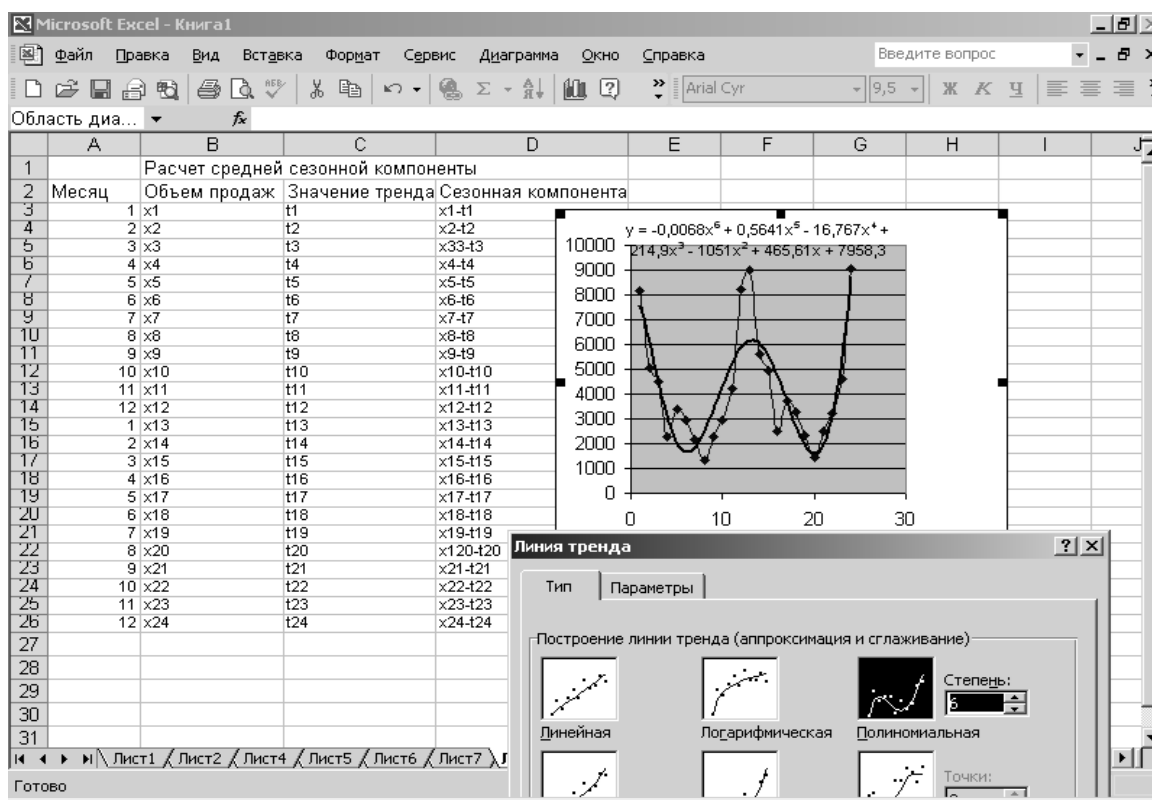


Рисунок 2.1 – Побудова лінії тренду і розрахунок сезонної компоненти

Розраховуємо помилки моделі як різницю між фактичними значеннями і значеннями моделі (рисунок 2.3).

Модель прогнозування обсягу продажів зображено на рисунку 2.4.

Расчет средних значений сезонной компоненты					
Месяцы	1-й сезон	2-й сезон	Итого	Среднее	Сезонная компонента
1	x1-t1	x13-t13	$i1=(x1-t1)+(x13-t13)$	$i1/2$	$i1/2-t1$
2	x2-t2	x14-t14	$i2$	$i2/2$	$i2/2-t1$
3	x3-t3	x15-t15	$i3$	$i3/2$	$i3/2-t1$
4	x4-t4	x16-t16	$i4$	$i4/2$	$i4/2-t1$
5	x5-t5	x17-t17	$i5$	$i5/2$	$i5/2-t1$
6	x6-t6	x18-t18	$i6$	$i6/2$	$i6/2-t1$
7	x7-t7	x19-t19	$i7$	$i7/2$	$i7/2-t1$
8	x8-t8	x120-t20	$i8$	$i8/2$	$i8/2-t1$
9	x9-t9	x21-t21	$i9$	$i9/2$	$i9/2-t1$
10	x10-t10	x22-t22	$i10$	$i10/2$	$i10/2-t1$
11	x11-t11	x23-t23	$i11$	$i11/2$	$i11/2-t1$
12	x12-t12	x24-t24	$i12$	$i12/2$	$i12/2-t1$
			$i=\Sigma i12$		

Рисунок 2.2 – Розрахунок середніх значень сезонної компоненти

Расчет ошибки модели			
Месяц	Объем продаж	Значение модели	Ошибка модели
1	x1	$m1=(i1/2-t1)+t1$	$x1-m1$
2	x2	$m2=(i2/2-t1)+t1$	$x2-m2$
3	x3	$m3=(i3/2-t1)+t1$	$x3-m3$
4	x4	$m4$	$x4-m4$
5	x5	$m5$	$x5-m5$
6	x6	$m6$	$x6-m6$
7	x7	$m7$	$x7-m7$
8	x8	$m8$	$x8-m8$
9	x9	$m9$	$x9-m9$
10	x10	$m10$	$x10-m10$
11	x11	$m11$	$x11-m11$
12	x12	$m12$	$x12-m12$
13	x13	$m13=(i1/2-t1)+t1$	$x13-m13$
14	x14	$m14=(i2/2-t1)+t1$	$x14-m14$
15	x15	$m15$	$x15-m15$
16	x16	$m16$	$x16-m16$
17	x17	$m17$	$x17-m17$
18	x18	$m18$	$x18-m18$
19	x19	$m19$	$x19-m19$
20	x20	$m20$	$x20-m20$
21	x21	$m21$	$x21-m21$
22	x22	$m22$	$x22-m22$
23	x23	$m23$	$x23-m23$
24	x24	$m24$	$x24-m24$

Рисунок 2.3 – Розрахунок помилок

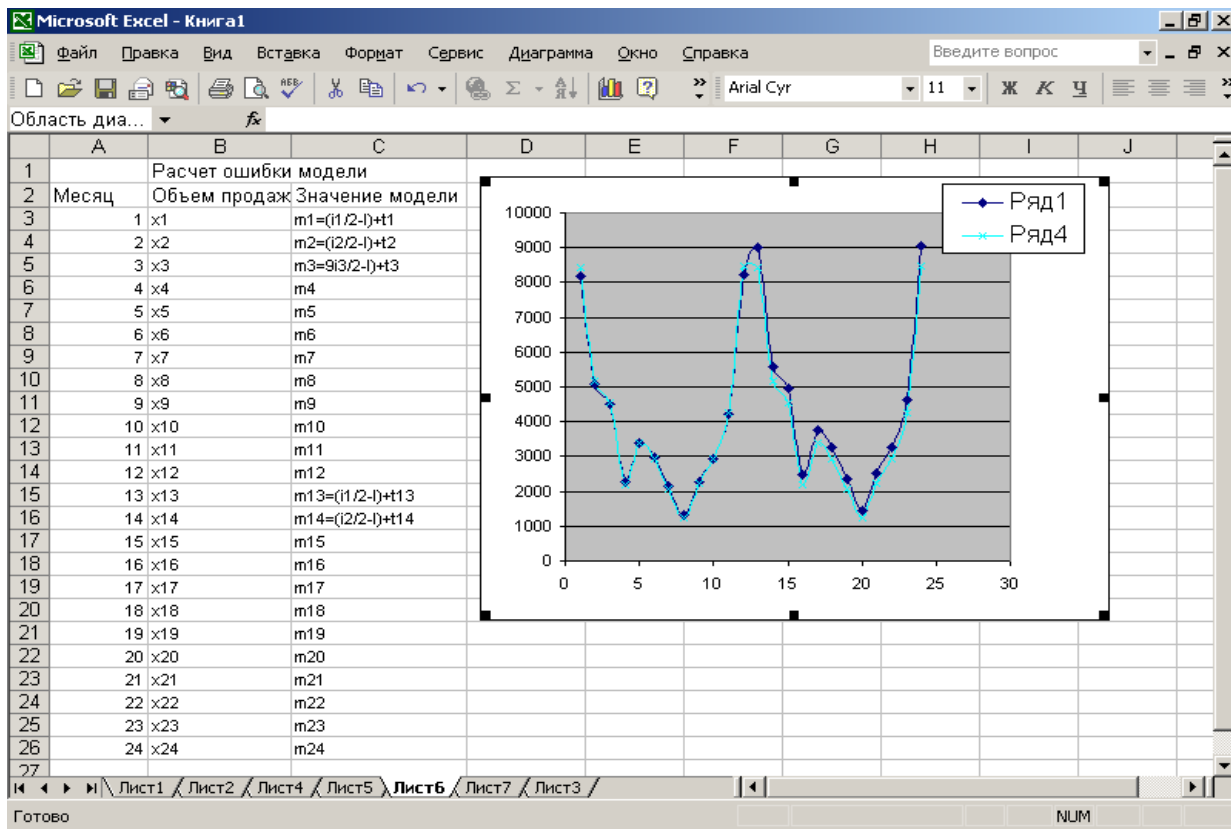


Рисунок 2.4 – Модель прогнозування обсягу продажів

Задача 2.2

Підприємство подало дані про зміну деякого економічного показника за десять періодів (таблиця 2.2).

Таблиця 2.2 – Статистика продажів за 10 місяців

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значення показника	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	F_{11}
Статистика продажів	58	86	103	74	61	57	61	91	92	91	?

Завдання

1. Використовуючи інструмент «**Экспоненциальное сглаживание**» аналізу даних MS EXCEL, зробити прогноз на одинадцятий період.

Рекомендації щодо розв'язання задачі

Передбачається, що спостереження деякої величини T проводилися через однакові проміжки часу. Результат спостережень позначимо T_n , де n – номер спостереження. Прогноз F_{n+1} для наступного моменту часу розраховуємо за формулою

$$F_{n+1} = F_n + (1 - \alpha) \cdot (T_n - F_n), \quad (2.3)$$

де α – фактор загасання, який вибирають зазвичай від 0,7 до 0,8. Менші значення фактора загасання прискорює відгук прогнозу на стрибок процесу, що спостерігається, але можуть призвести до непередбачуваних викидів.

Спочатку, маючи лише один результат спостережень T_1 , коли прогнозу F_1 не має і формулою (2.3) скористатися ще неможливо, як прогноз F_2 слід взяти T_1 :

$$F_{n+1} = \alpha \cdot F_n + (1 - \alpha) \cdot T_n. \quad (2.4)$$

Очевидно, що при зменшенні фактора загасання в прогнозі частка останнього спостереження збільшується, а частка попередніх спостережень зменшується.

Розрахунок прогнозу на одинадцятий місяць:

$$\begin{aligned} F_2 &= \alpha \cdot T_1 + (1 - \alpha) \cdot T_2 \\ F_3 &= \alpha \cdot F_1 + (1 - \alpha) \cdot T_3 \\ &\dots \\ F_{11} &= \alpha \cdot F_{10} + (1 - \alpha) \cdot T_{10} \end{aligned}$$

Розв'язання задачі

Скористаємося інструментом аналізу «**Экспоненциальное сглаживание**». Для цього необхідно зайти в меню «**Сервис**». Якщо у спливному підменю немає команди «**Анализ данных**», то виконується команда «**Сервис, Надстройки**». У вікні «**Надстройки**», що з'явилося (рисунок 2.5), у списку надбудов встановлюємо прапорець зліва від рядка «**Analysis ToolPak-VBA**».

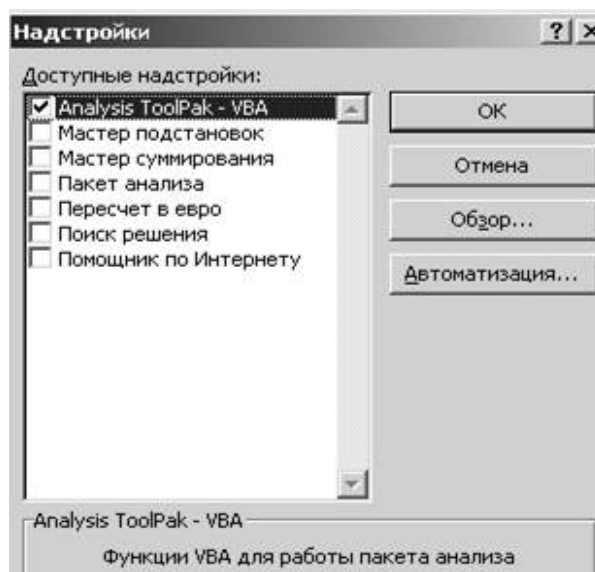


Рисунок 2.5 – Установлення пакета «**Анализ данных**»

Далі необхідно виконати команду «Сервис, Анализ данных». З'явиться вікно «Анализ данных» (рисунок 2.6).

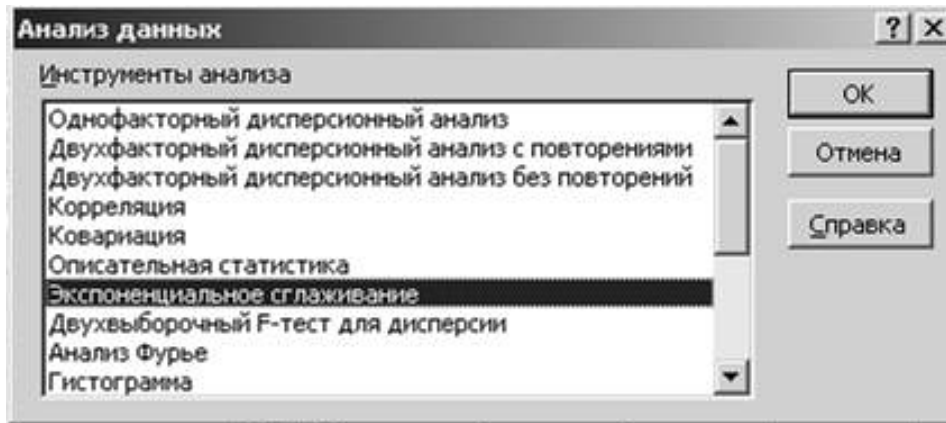


Рисунок 2.6 – Вибір інструмента аналізу

У цьому списку знаходимо інструмент «**Экспоненциальное сглаживание**». Вікно, що з'явилося, потрібно заповнити (рисунок 2.7).

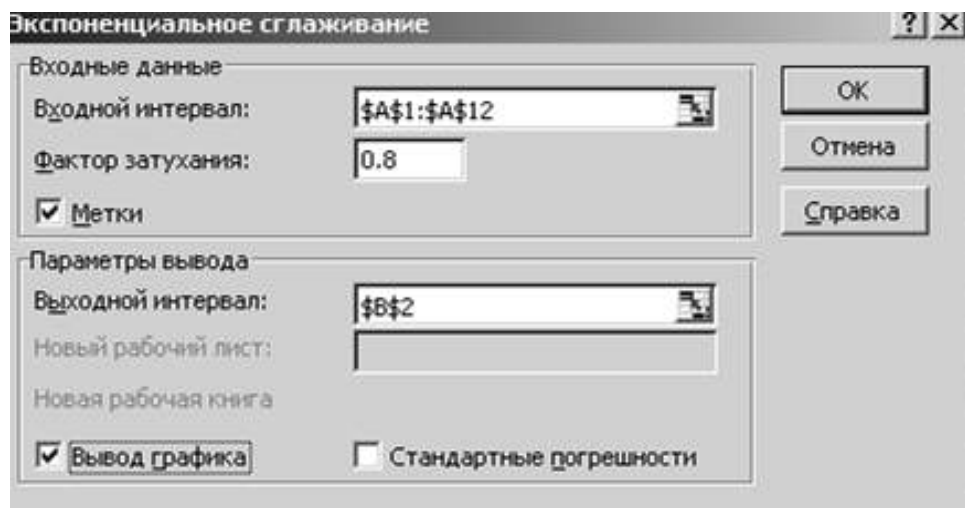


Рисунок 2.7 – Заповнення вікна «**Экспоненциальное сглаживание**»

Прогноз робимо для різних значень фактора загасання, після оцінюємо краще його значення. На практиці параметр згладжування часто визначають з пошуком на сітці. Можливі значення параметра розбивають сіткою з певним кроком. Наприклад, розглядають сітку значень від $\alpha = 0,1$ до $\alpha = 0,9$ з кроком 0,1. Потім вибирають α , для якого сума квадратів (або середніх квадратів) залишків (спостережувані значення мінус прогнози на крок вперед) є мінімальною.

Результат прогнозу наведено на рисунку 2.8.

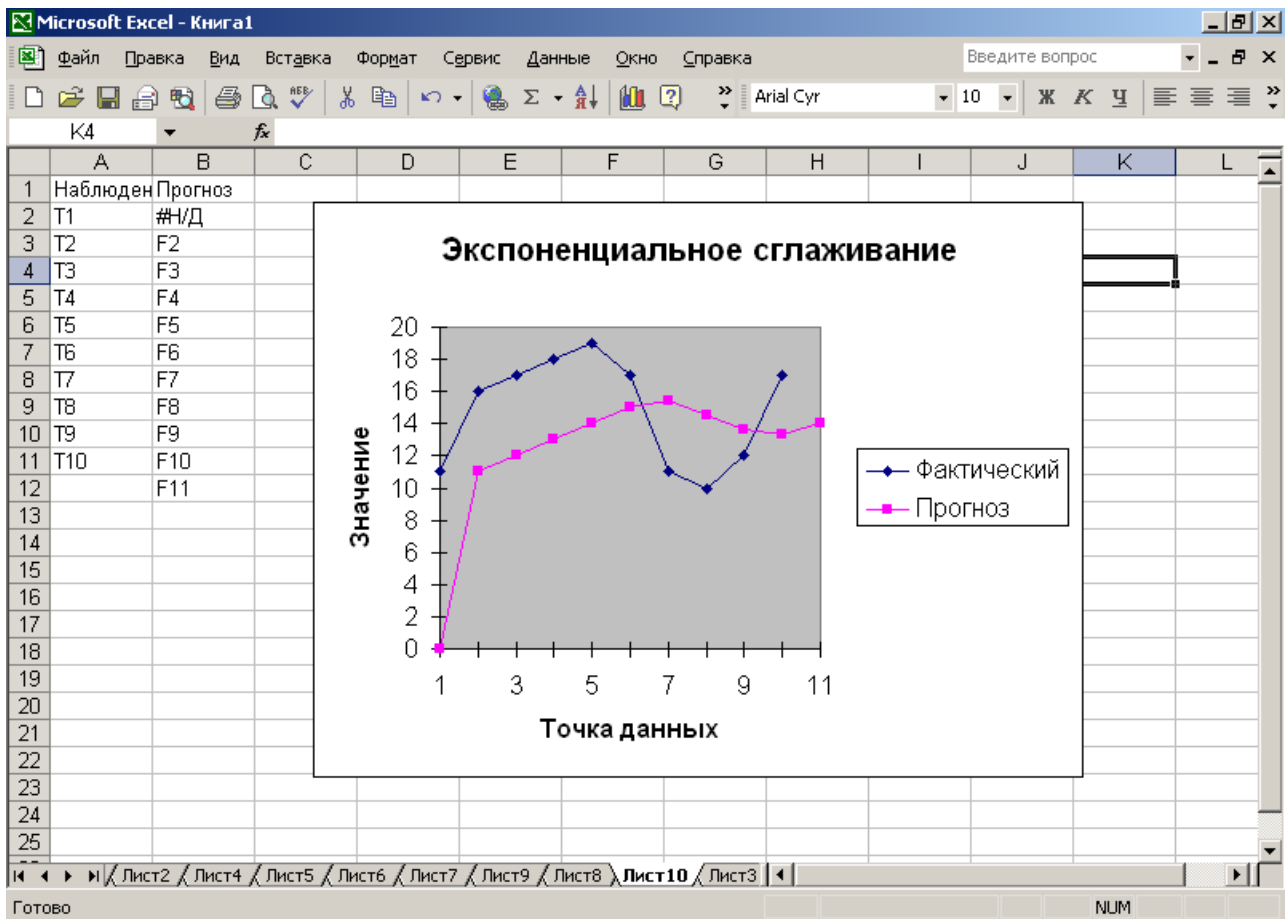


Рисунок 2.8 – Прогноз за методом экспоненциального сглаживания (фактор загасания дорівнює 0,8)

3 ЗАСОБИ ІНФОГРАФІЧНОГО АНАЛІЗУ АГРЕГОВАНИХ ПОКАЗНИКІВ ОБ'ЄКТІВ І СИСТЕМ

Процес прийняття управлінських рішень у сучасних умовах передбачає оброблення та аналіз великої кількості різнорідних даних, які різною мірою характеризують властивості об'єкта управління та зовнішнього середовища. З огляду на сьогоднішній рівень доступності моніторингової інформації різного роду неможливо уявити синтез ефективних управлінських рішень без сучасних методів і засобів оброблення інформації, у тому числі засобів інфографічного аналізу і візуалізації.

Упровадження мобільних інформаційно-комунікаційних пристроїв у життя сучасних менеджерів зсуває інформаційні потреби від текстової до візуальної інформації, що сприяє зростанню актуальності технологій інфографування. Як інструмент ефективного подання інформації з метою забезпечення підтримки й підвищення ефективності процесу прийняття управлінських рішень інфографування має великий потенціал для боротьби з інформаційними перевантаженнями менеджерів. Значення інформаційно-аналітичних засобів підтримки прийняття управлінських рішень збільшується в разі використання комплексних агрегованих показників багатовимірних систем і об'єктів. Агреговані показники являють собою узагальнені синтетичні вимірювачі, які об'єднують в собі багато частинних, що обчислюються за допомогою підсумовування, групування або інших методів зведення частинних показників до узагальнених. Необхідність візуалізації й аналізу подібних показників виникає на багатьох етапах прийняття рішень, зокрема на етапі надання допомоги особі, що приймає рішення (ОПР) при аналізі вихідної інформації, оцінюванні ситуації, обстановки й обмежень, що накладаються зовнішнім середовищем.

Метою дослідження є порівняльний аналіз методів і засобів багатовимірного аналізу комплексних агрегованих показників багатовимірних об'єктів і розроблення рекомендацій для ОПР щодо вибору адекватного засобу моделювання.

Апарат радіальних метричних діаграм

Радіальну метричну діаграму (РМД) задає n -вимірний метричний простір, в якому оцінюється об'єкт, де n – кількість метрик p_i , $i = \overline{1, n}$, що відображаються у вигляді променів діаграми (рисунок 3.1).

У разі, коли побудовано кілька РМД, за якими оцінюють об'єкт у цілому, вони утворюють ієрархічну структуру. Унаслідок згортання окремої РМД нижнього рівня на підставі значень метрик і коефіцієнтів їх вагомості (значущості) формується узагальнений показник, значення якого потім відкладається на відповідному промені комплексної РМД верхнього рівня, як показано на рисунку 3.2. Аналогічним чином для комплексної РМД можна отримати інтегральний показник.

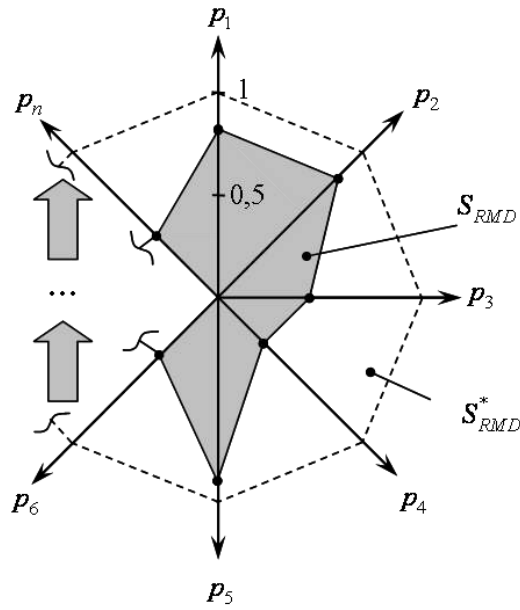


Рисунок 3.1 – Загальний вигляд РМД

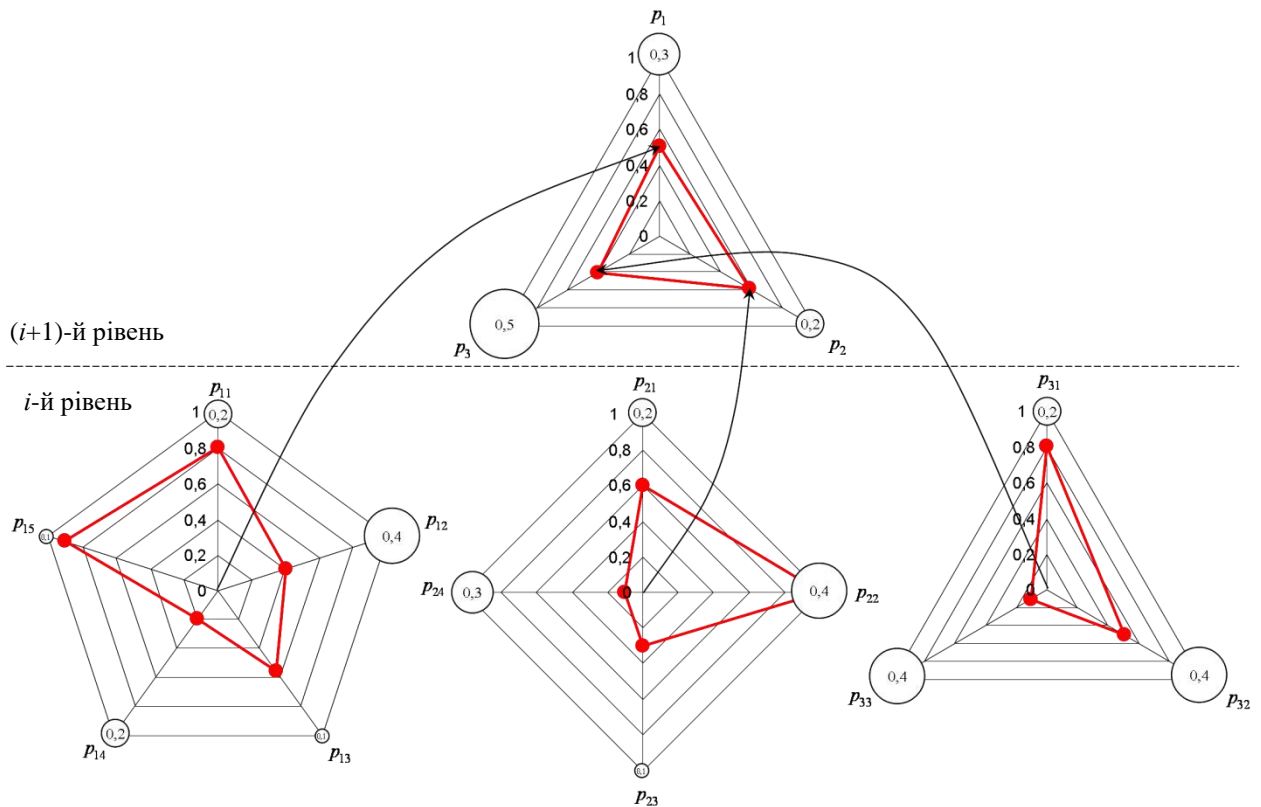


Рисунок 3.2 – Приклад згортання радіальних метричних діаграм

Апарат нормованих діаграм

Лінійна нормована діаграма (ЛНД) являє собою стовпчасту діаграму метрик p_i , $i = \overline{1, n}$, за якими оцінюють об'єкт, причому ширина окремого стовпця чисельно дорівнює відповідному коефіцієнту вагомості α_i i -ї метрики (рисунок 3.3).

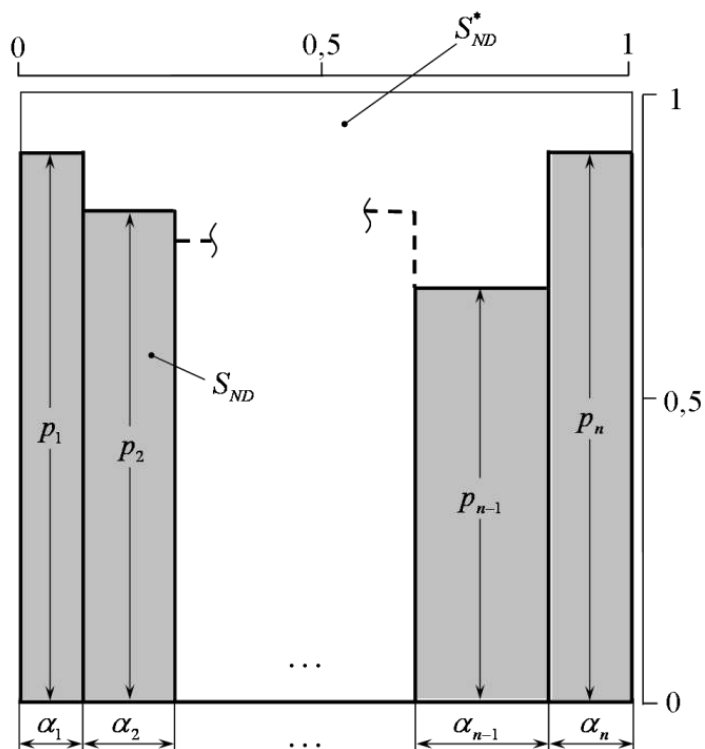


Рисунок 3.3 – Загальний вигляд нормованої діаграми

Як і РМД, ЛНД використовують для опису багаторівневої ієрархічної системи показників (метрик) (рисунок 3.4).

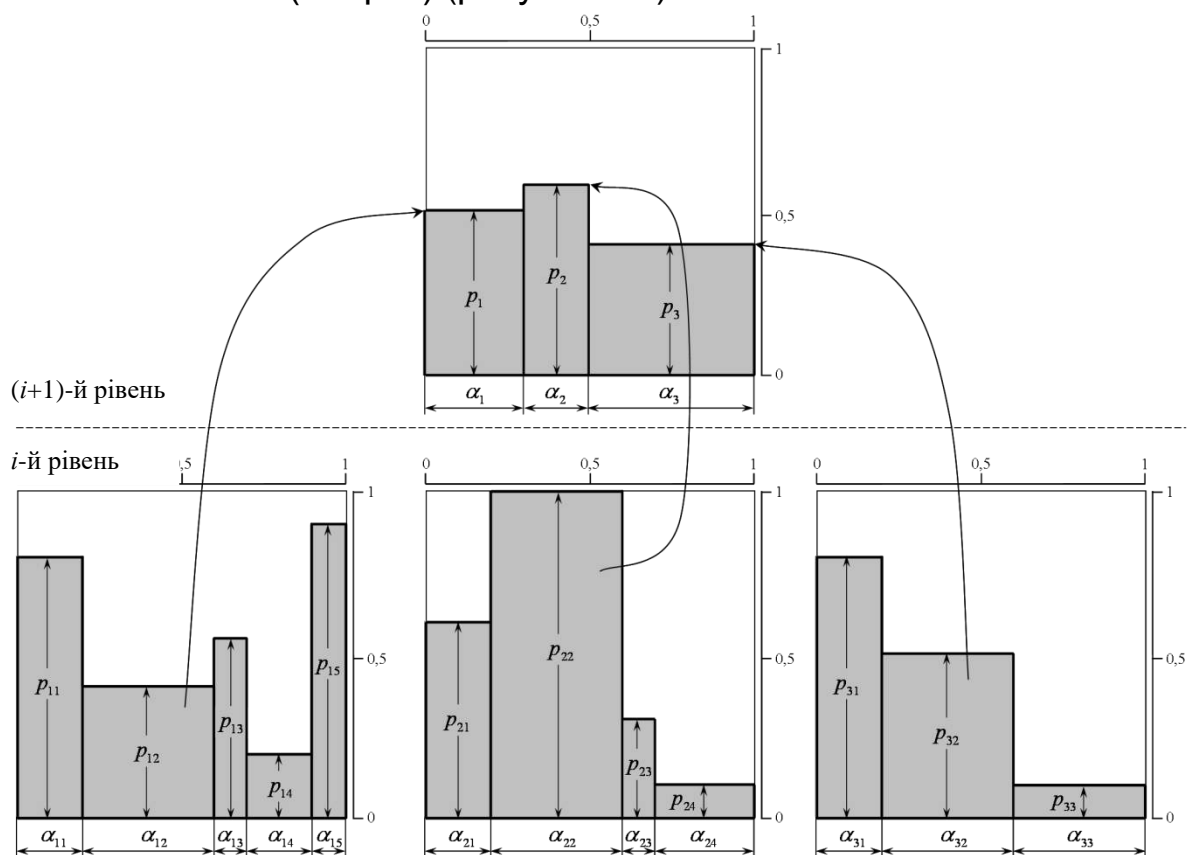


Рисунок 3.4 – Приклад згортання нормованих діаграм

Порівняльний аналіз РМД і ЛНД

Описані вище засоби багатовимірною аналізу агрегованих показників застосовують у задачах контролінгу, стратегічного управління, зокрема для аналізу розривів (GAP-аналізу). При цьому аналізують значення площ фігур, утворених РМД (S_{RMD} на рисунку 3.1) і ЛНД (S_{ND} на рисунку 3.3), максимально можливе значення площі діаграм (S_{RMD}^* на рисунку 3.1 і S_{ND}^* на рисунку 3.3 відповідно), а також їх різницю або співвідношення, яке й інтерпретують як власне розрив між бажаним і дійсним станами об'єкта або системи.

Розглянемо особливості застосування обох видів діаграм більш докладно. Площа фігури, утвореної РМД, є сумою площ окремих пелюсток діаграми (див. рисунок 3.1):

$$S_{RMD} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \times (p_1 p_2 + p_2 p_3 + \dots + p_{n-1} p_n + p_n p_1) = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} (p_1 p_n + \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}). \quad (3.1)$$

Очевидно, що модель РМД є нелінійною, до того ж – неінваріантною до порядку відображення метрик. При цьому площа ідеальної РМД, тобто діаграми з ідеальними значеннями метрик,

$$S_{RMD} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \quad (3.2)$$

і також залежить від кількості метрик n (рисунок 3.5).

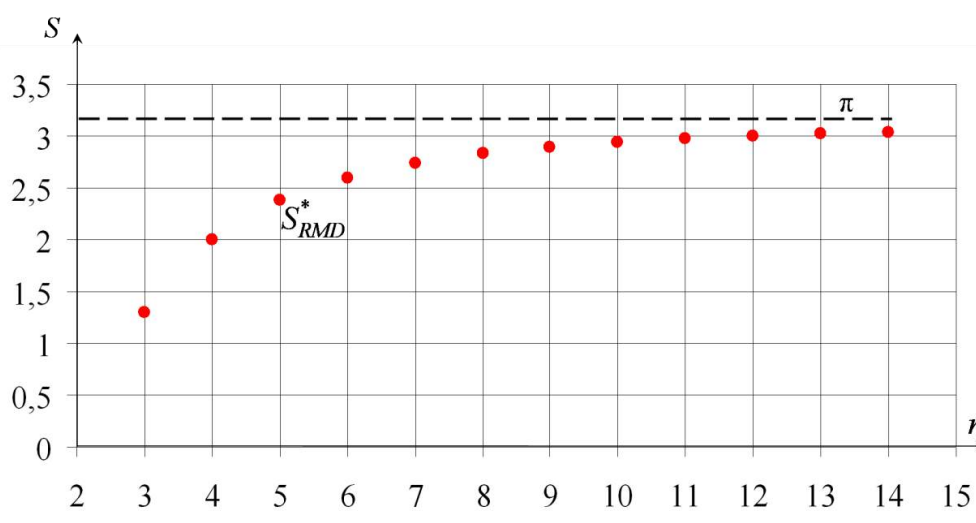


Рисунок 3.5 – Графік залежності площі ідеальної РМД від кількості метрик

Таким чином, незважаючи на те, що на променях РМД відкладаються нормовані значення показників, ні площа S_{RMD} , ні площа S_{RMD}^* , ні їх співвідношення не є нормованими, лінійними відносно до метрик, величинами.

Якщо інтерпретувати розрив R як різницю між ідеальною і поточною РМД, тобто

$$R = S_{RMD}^* - S_{RMD}, \quad (3.3)$$

то величина $\frac{\partial R}{\partial p_i}$ характеризує чутливість моделі до зміни i -ї метрики й багато в чому визначає властивості моделі.

У цьому випадку

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial p_i} &= \frac{\partial S_{RMD}^*}{\partial p_i} - \frac{\partial S_{RMD}}{\partial p_i} = \\ &= -\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} (p_{i-1} + p_{i+1}), \quad i \neq 1, \quad i \neq n, \end{aligned} \quad (3.4)$$

тобто чутливість РМД залежить від загальної кількості метрик і від значень «сусідніх» метрик, що ніяк не можна віднести до переваг моделі.

Аналогічні розрахунки для ЛНД показують дещо інші результати. Площа ідеальної ЛНД завжди дорівнює одиниці:

$$S_{ND}^* = 1, \quad (3.5)$$

оскільки

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (3.6)$$

При цьому площа фігури, утвореної ЛНД, чисельно дорівнює значенню агрегованого показника:

$$S_{ND} = P_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i. \quad (3.7)$$

Вираз для розриву R в цьому випадку має такий вигляд:

$$R = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i, \quad (3.8)$$

а чутливість моделі $\frac{\partial R}{\partial p_i}$ однозначно визначається коефіцієнтом вагомості:

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = -\alpha_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.9)$$

що свідчить про повну відповідність аналітичному і геометричному змісту моделі. Слід зазначити, що ця відповідність є справедливою лише для агрегованих показників вигляду (3.7). Однак саме цю форму агрегування або згортання використовують найчастіше.

Крім описаних графоаналітичних функцій, елементи діаграм можуть бути функціоналом у різного роду задачах оптимізації, що підтверджує їх практичну значущість і розширює діапазон застосування в задачах управління організаційно-технічними системами.

Таким чином, за результатами порівняльного аналізу двох засобів багатовимірного аналізу агрегованих показників організаційно-технічних систем, а саме РМД і ЛНД, можна зробити такі висновки:

1) радіальні метричні і нормовані діаграми є графоаналітичними моделями і дозволяють візуалізувати структуру і значення агрегованих показників організаційно-технічних систем;

2) ЛНД є лінійними (інваріантними), а РМД – нелінійними (неінваріантними) відносно метрик (порядку метрик);

3) при аналізі лінійно-агрегованих показників площа ЛНД на відміну від площі РМД має геометричну інтерпретацію;

4) при аналізі багаторівневих (більше двох) агрегованих показників краще використовувати ЛНД через суворість графоаналітичного апарату і наслідки п. 3.

Приклад. Глобальну систему бізнес-процесів організації подано 10 бізнес-процесами (БП) (таблиця 3.1).

Ієрархічну структуру компонентів бізнес-процесів, їх відносну ефективність, а також відносні коефіцієнти вагомості наведено в таблиці 3.2.

Побудуємо дворівневі РМД і ЛНД відповідно до викладених вище методик (рисунки 3.6 і 3.7). У таблиці 3.3 наведено такі характеристики отриманих моделей:

n – кількість метрик у діаграмі;

$P_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$ – значення агрегованого показника;

S_{RMD} і S_{ND} – значення площ радіальних метричних і нормованих діаграм бізнес-процесів відповідно;

S_{RMD}^* і S_{ND}^* – ідеальні значення площ радіальних метричних і нормованих діаграм бізнес-процесів відповідно;

$\frac{S_{RMD}}{S_{RMD}^*}$ і $\frac{S_{ND}}{S_{ND}^*}$ – відношення поточних та ідеальних значень площ для радіальних метричних і нормованих діаграм бізнес-процесів відповідно;

$R_{RMD} = R_{RMD}^* - R_{RMD}$ і $R_{ND} = R_{ND}^* - R_{ND}$ – значення розривів для радіальних метричних і нормованих діаграм бізнес-процесів відповідно.

Таблиця 3.1 – Система БП організації і відносні коефіцієнти їх вагомості

Номер системи	БП	Відносний коефіцієнт вагомості α_i
1	Організаційна структура управління	0,07
2	Система управління	0,12
3	Маркетинг	0,15
4	Система організації виробництва	0,13
5	Персонал підприємства	0,06
6	НДДКР	0,1
7	Фінанси	0,09
8	Постачання	0,1
9	Збут	0,11
10	Облік	0,07

Таблиця 3.2 – Ієрархічна структура компонентів бізнес-процесів

Бізнес-процес	Компоненти бізнес-процесів	Відносна ефективність компоненти P_{ij}	Відносний коефіцієнт вагомості компоненти α_{ij}
1. Організаційна структура	1.1 Ступінь відповідності плану структури умовам її функціонування	0,9	0,25
	1.2 Чисельність працівників управління	0,8	0,15
	1.3 Ступінь адекватності розподілу працівників управління за рівнями і функціями	0,8	0,25
	1.4 Якість інформаційних зав'язків	0,9	0,35
2. Система управління	2.1 Досвід, кваліфікація і світогляд керівництва організації в управлінській діяльності	0,9	0,16
	2.2 Загальна думка про топ-менеджерів організації як про партнерів в ділових колах	0,8	0,13
	2.3 Система стратегічного планування	1	0,20
	2.4 Здатність швидко реагувати на мінливу ринкову ситуацію	0,8	0,20
	2.5 Рівень інформаційних систем	0,8	0,16
	2.6 Ступінь організації функцій управління	0,8	0,15

Продовження таблиці 3.2

Бізнес-процес	Компоненти бізнес-процесів	Відносна ефективність компоненти P_{ij}	Відносний коефіцієнт вагомості компоненти α_{ij}
3. Маркетинг	3.1 Система організації маркетингу	1	0,18
	3.2 Система дослідження ринку	0,9	0,18
	3.3 Асортиментна політика	0,8	0,16
	3.4 Цінова політика	0,8	0,16
	3.5 Комунікаційна політика	0,7	0,16
	3.6 Розподільна політика	0,8	0,16
4. Система організації виробництва	4.1 Чисельність зайнятих у виробництві	0,8	0,10
	4.2 Основні технології, що використовуються	0,8	0,12
	4.3 Інновації у виробничому процесі	0,8	0,12
	4.4 Ступінь оволодіння існуючими технологіями	0,8	0,13
	4.5 Техніко-технологічна база підприємства	0,9	0,15
	4.6 Система планування виробництва	0,8	0,14
	4.7 Система забезпечення якості продукції	0,8	0,14
	4.8 Продуктивність праці	0,7	0,10
5. Персонал	5.1 Стан кадрової служби підприємства	0,8	0,08
	5.2 Кадрова політика підприємства	0,9	0,19
	5.3 Ступінь укомплектованості співробітниками	0,8	0,17
	5.4 Кваліфікація персоналу	1	0,25
	5.5 Віковий склад персоналу	0,8	0,09
	5.6 Частота трудових конфліктів в організації	0,8	0,10
	5.7 Плинність кадрів	0,8	0,12
6. НДДКР	6.1 Рівень конструкторського відділу (бюро) на підприємстві	0,8	0,15
	6.2 Наявність у штаті великих вчених	0,7	0,30
	6.3 Наукоємність виробництва	0,9	0,15
	6.4 Думка споживачів про якість, науково-технічний рівень виробів	0,8	0,20
	6.5 Ліцензійна робота	0,8	0,06
	6.6 Можливість розроблення нових товарів	0,9	0,14
7. Фінанси	7.1 Фінансова діагностика	0,8	0,07
	7.2 Управління витратами	0,9	0,10
	7.3 Планування прибутку	0,8	0,09
	7.4 Бюджетування і контроль	1	0,07
	7.5 Управління оборотними засобами	0,8	0,12
	7.6 Управління основними засобами	0,8	0,04
	7.7 Інвестиційний портфель	0,8	0,14

Продовження таблиці 3.2

Бізнес-процес	Компоненти бізнес-процесів	Відносна ефективність компоненти P_{ij}	Відносний коефіцієнт вагомості компоненти α_{ij}
7. Фінанси	7.8 Структура капіталу	0,8	0,05
	7.9 Дивідендна політика	0,8	0,04
	7.10 Ліквідність	1	0,13
	7.11 Заборгованість	0,8	0,07
	7.12 Доступність підприємства до інших джерел коштів	0,8	0,08
8. Постачання	8.1 Наявність відділу постачання	0,9	0,22
	8.2 Ступінь його укомплектованості співробітниками	0,8	0,16
	8.3 Кваліфікація співробітників	1	0,18
	8.4 Система стимулювання співробітників	0,9	0,06
	8.5 Сировинна база і основні постачальники	0,8	0,14
	8.6 Партнери у виробничій кооперації	0,8	0,13
	8.7 Витрати системи постачання	0,8	0,11
9. Збут	9.1 Рівень відділу збуту	0,9	0,20
	9.2 Чисельність співробітників відділу збуту	0,8	0,13
	9.3 Кваліфікація співробітників відділу	0,9	0,16
	9.4 Система планування обсягів продажів	1	0,12
	9.5 Система транспортування товарів	0,8	0,11
	9.6 Процедура відпрацювання замовлень	0,8	0,18
	9.7 Витрати збуту	0,8	0,10
10. Облік	10.1 Управлінський облік	0,8	0,33
	10.2 Фінансовий облік	0,8	0,33
	10.3 Контролінг	1	0,34

Таблиця 3.3 – Характеристики інфографічних моделей БП

Моделі БП	Характеристики моделі									
	n	P_{Σ}	S_{RMD}	S_{RMD}^*	S_{RMD}/S_{RMD}^*	R_{RMD}	S_{ND}	S_{ND}^*	S_{ND}/S_{ND}^*	R_{ND}
1	4	0,86	1,445	2	0,723	0,555	0,86	1	0,86	0,14
2	6	0,856	1,871	2,598	0,72	0,727	0,856	1	0,856	0,144
3	6	0,838	1,81	2,598	0,697	0,788	0,838	1	0,838	0,162
4	8	0,805	1,81	2,828	0,64	1,01	0,805	1	0,805	0,195
5	7	0,869	1,939	2,736	0,709	0,797	0,869	1	0,869	0,131
6	6	0,799	1,728	2,598	0,665	0,87	0,799	1	0,799	0,201
7	12	0,85	2,12	3	0,707	0,88	0,85	1	0,85	0,15
8	7	0,864	2,009	2,736	0,734	0,727	0,864	1	0,864	0,136
9	7	0,86	2,009	2,736	0,734	0,727	0,86	1	0,86	0,14
10	3	0,868	0,97	1,299	0,747	0,329	0,868	1	0,868	0,132
Σ	10	0,844	2,108	2,939	0,717	0,831	0,844	1	0,844	0,156

2-й рівень
1-й рівень

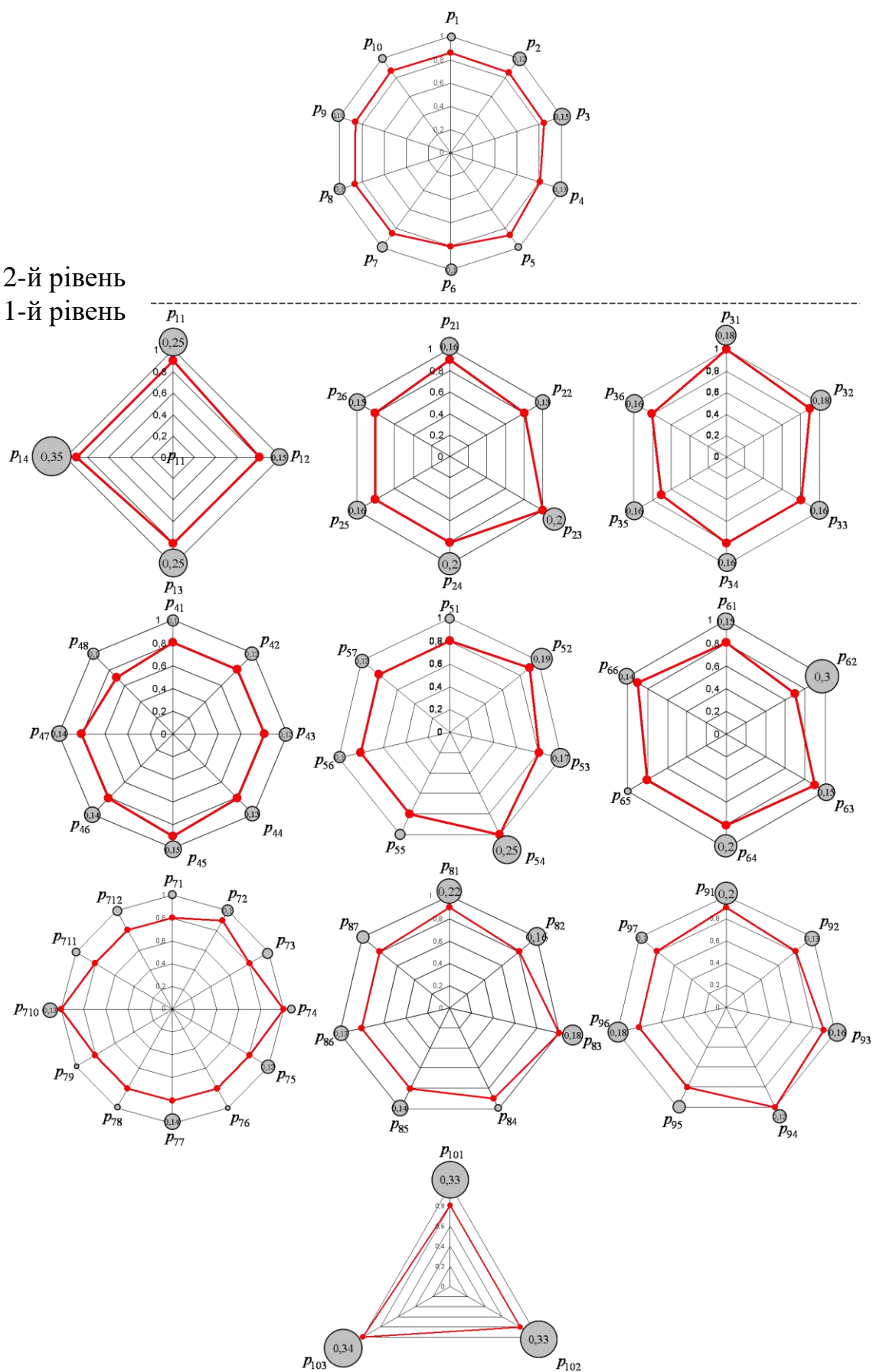


Рисунок 3.6 – Дворівнева РМД системи бізнес-процесів організації

2-й рівень
1-й рівень

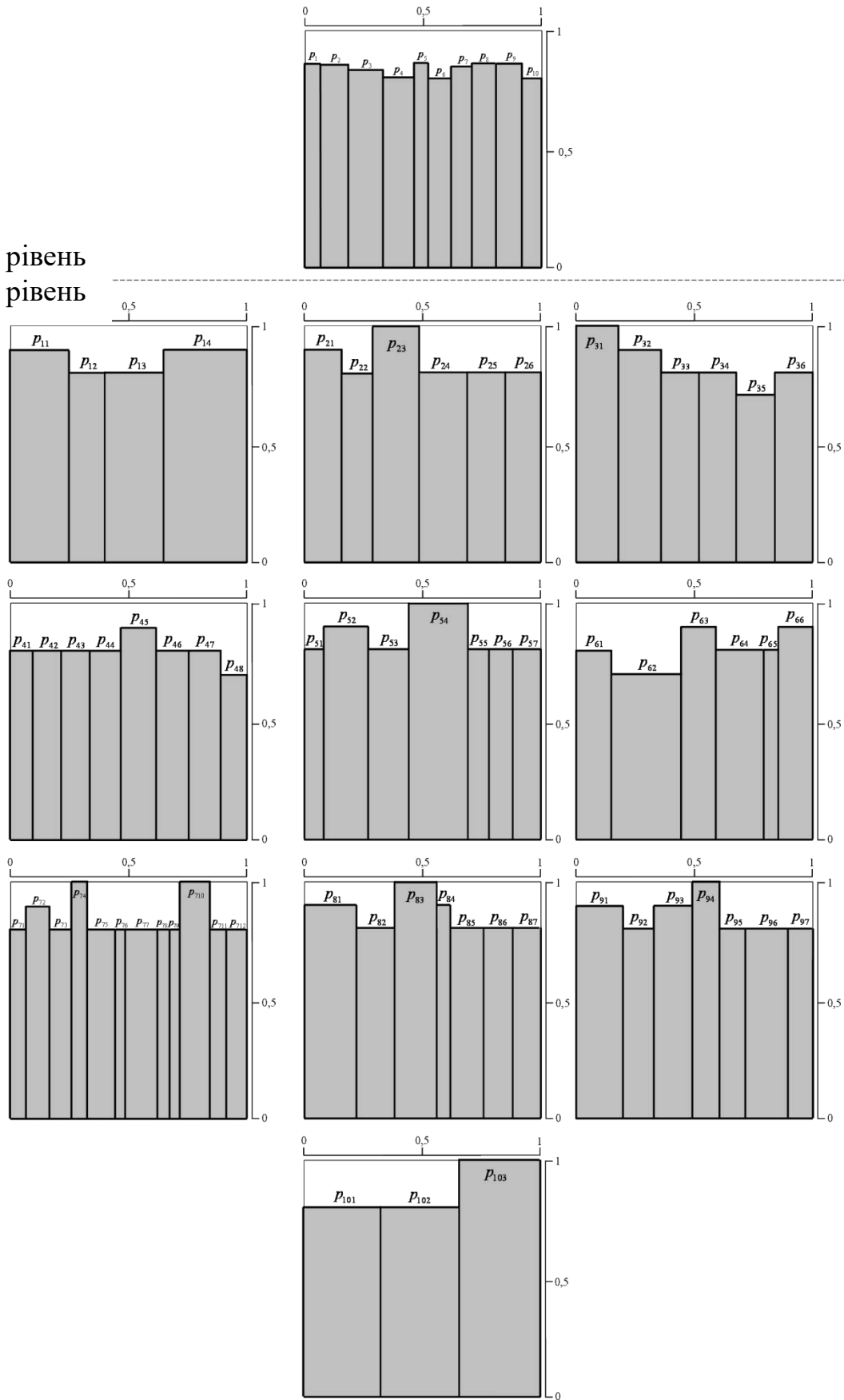


Рисунок 3.7 – Дворівнева ЛНД системи бізнес-процесів організації

4 ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ РИНКУ

Вихідні умови

За спостереженнями було встановлено, що попит на товар залежить від ціни $p(t)$, яка змінюється протягом часу, тобто попит також у кінцевому підсумку залежить від часу і визначається співвідношенням

$$Dem(t) = 2\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) - \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) - p(t) + 15.$$

Пропозиція товару описується формулою

$$S(t) = 3\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) - \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) - p(t) + 15,$$

де $p(t)$ – залежність ціни від часу.

Початкові умови: $p(0) = 3$; $p(1) = 5$.

Нехай пропозиція товару дорівнює попиту на нього ($Dem(t) = S(t)$). Знайдіть залежність ціни від часу, а також еластичність попиту за ціною.

Зміст розрахунків

Побудуйте спільні графіки попиту, ціни та еластичності залежно від часу.

Рекомендації щодо розв'язання задачі

1. Виразіть $Dem(t)$ і $S(t)$ як функції ціни.
2. Надайте змінній W значення виразу, що дорівнює різниці Dem і S , і прирівняйте його нулю (оскільки за умовою $Dem = S$).
3. Розв'яжіть диференціальне рівняння щодо ціни і перетворіть отриманий результат на функцію від часу. Перевірте, як зміниться вираз для попиту після перетворень.
4. Виразіть $Dem(t)$ як повноцінну функцію ціни. Виведіть формулу для ціни після перетворень.
5. Виведіть формулу для попиту після перетворень.
6. Знайдіть еластичність попиту за ціною (зверніть увагу на те, що попит і ціна – функції параметра t).
7. Побудуйте необхідні графіки, використовуючи пакет програми Maple (рисунок 4.1).

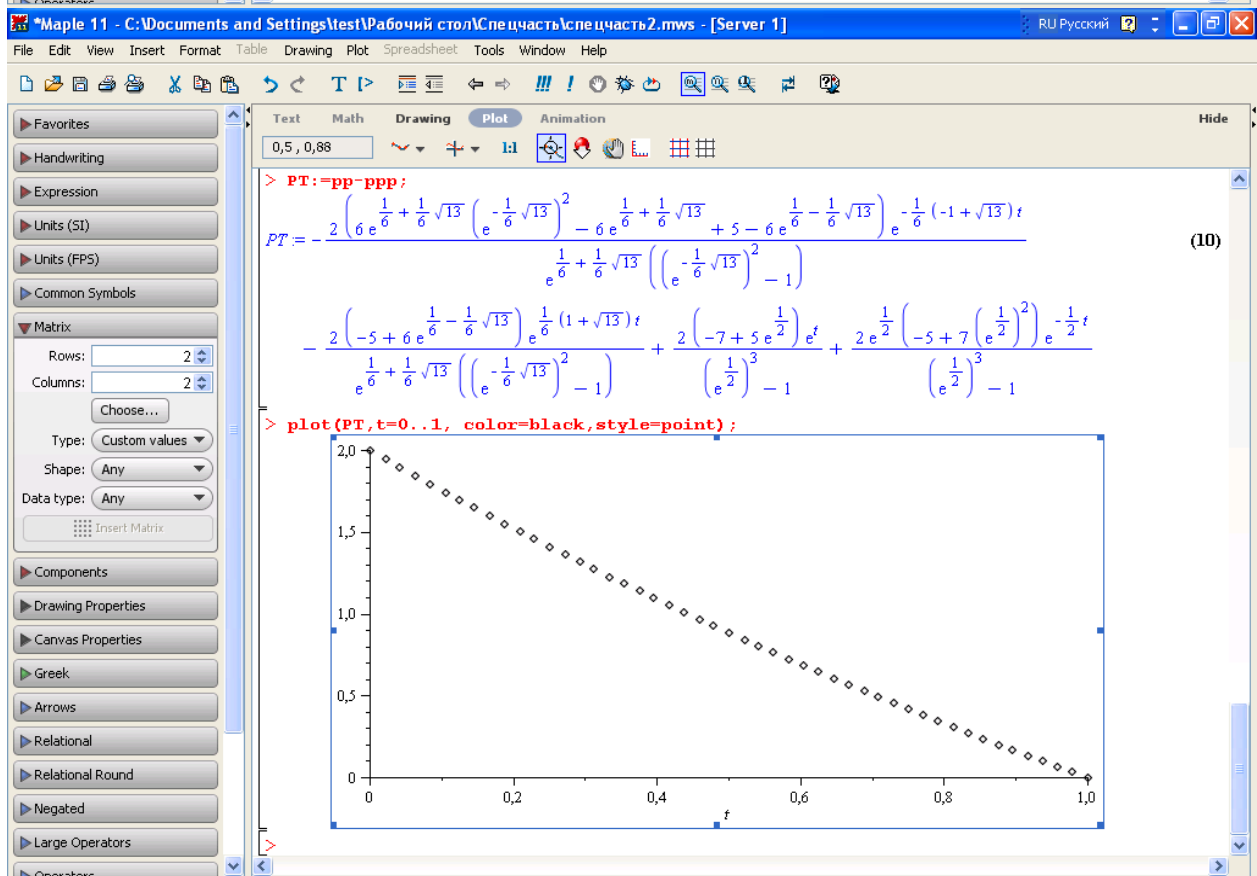
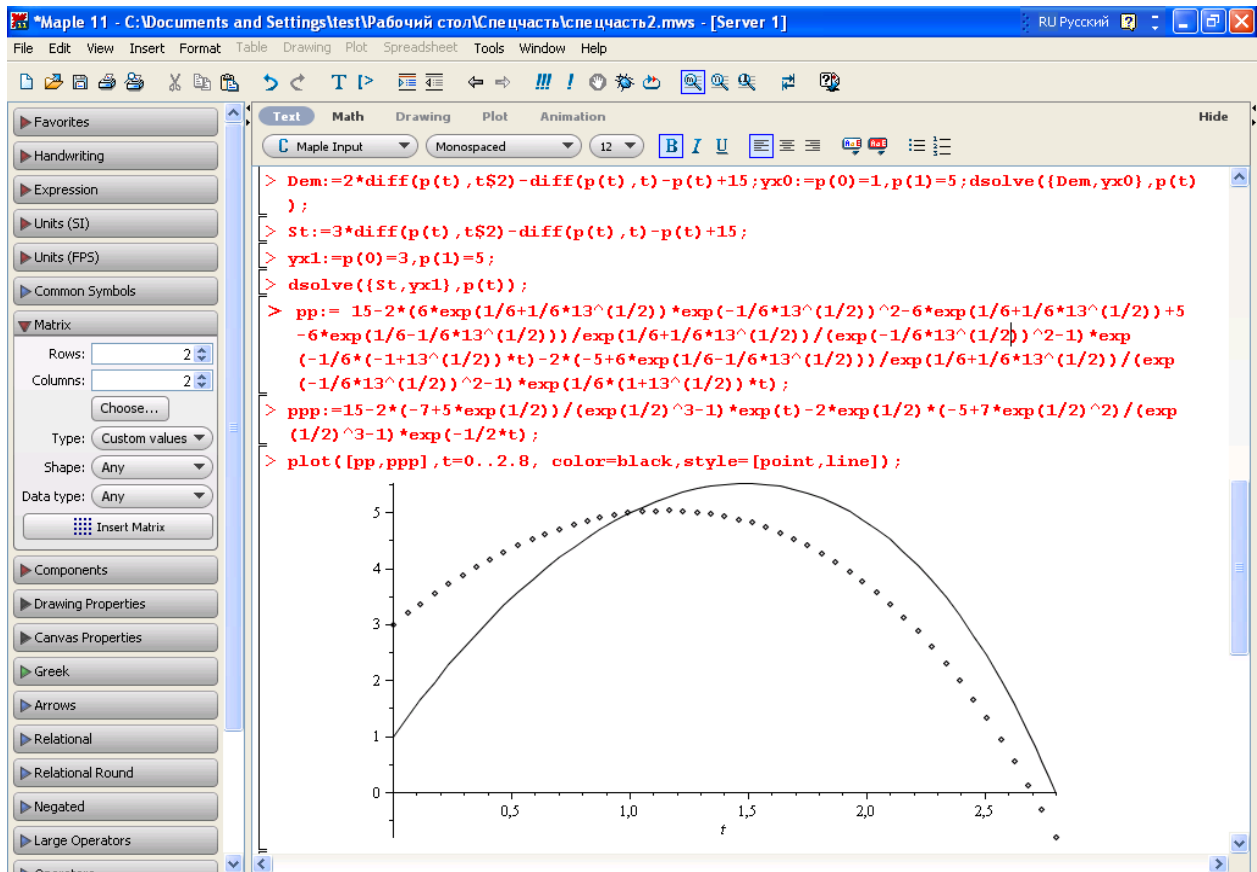


Рисунок 4.1 – Спільні графіки залежності попиту, ціни та еластичності від часу

5 ФУНКЦІЇ ПОПИТУ І ПРОПОЗИЦІЇ, РІВНОВАЖНА ЦІНА

Вихідні умови

Мікроекономіка – розділ економіки, який займається аналізом окремих елементів економічної системи. Мета одного з найважливіших розділів мікроекономіки – вивчення попиту та пропозиції. *Попит* на деякі товари – це потреба в певній кількості товару, обмежена діючими цінами і платоспроможністю (прибутками) споживачів. *Пропозиція* – це кількість товару, яка може бути запропонована для продажу за певною ціною.

Здоровий глузд підказує: збільшення випуску товару потребує додаткових витрат і, для того щоб зацікавити виробника у збільшенні випуску, потрібно запропонувати йому підвищену ціну. Звідси випливає, що *пропозицію* S слід розглядати як зростаючу функцію ціни P . Якщо пропозиція залежить від ціни, то і ціна залежить від пропозиції. Економісти зазвичай саме функцію $P = S(Q)$ називають *функцією пропозиції*, а її графік – *кривою пропозиції*; тут Q – кількість товару, запропонованого для продажу за ціною P .

Той же здоровий глузд підказує: якщо ціна на певний товар починає зростати, то кількість проданого товару буде зменшуватися, тобто залежність попиту Q від ціни P – спадна функція. Економісти називають *функцією попиту* функцію $P = D(Q)$, а її графік – *кривою попиту*, тут Q – кількість товару, придбаного споживачами за ціною P . Хоча будь-яке припущення про вид функціональних залежностей $S(Q)$ і $D(Q)$ буде спрощенням дійсності, дослідження цих функцій дає змогу частково «оцінити» реальну ситуацію. Таким чином, аналізуючи модель, можна оцінювати, прогнозувати зміну досліджуваних величин. Чим ближче модель до реальності, тим вона є складнішою і тим точнішими можуть виявитися прогнози і оцінки.

Економічна модель описує процес формування попиту і пропозиції певного товару або виду послуг на конкурентному ринку. Суть економічної моделі – формалізація економічного закону попиту і пропозиції, який стверджує, що кількість товару, яку можна продати на ринку (тобто попит), змінюється в напрямку, протилежному зміні його ціни; кількість товару, яку продавці доставляють на ринок (тобто пропозиція), змінюється в тому ж напрямку, що і ціна; при цьому реальна ринкова ціна складається на рівні, при якому попит і пропозиція дорівнюють один одному (тобто знаходяться у рівновазі).

Нехай x_t – ціна товару в момент часу t ; $y_t^{(n)}$, $y_t^{(c)}$ – кількість товару, відповідно запропонованого і купленого (що запитується) на ринку в той же момент часу t .

Тоді з урахуванням одного такту часу, необхідного виробникам (продавцям) на те, щоб зреагувати на ціну x , можна запропонувати таку модель:

$$y_t^{(n)} = f(x_{t-1});$$

$$y_t^{(c)} = g(x_t);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x_{t-1}) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(x_t);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \bar{x}_g,$$

де $f(x)$ – деяка монотонно зростаюча функція;

$g(x)$ – монотонно спадна функція від аргумента x (тобто від ціни).

Математичні відношення, що відображають закон попиту/пропозиції, зображено графічно на рисунку 5.1.

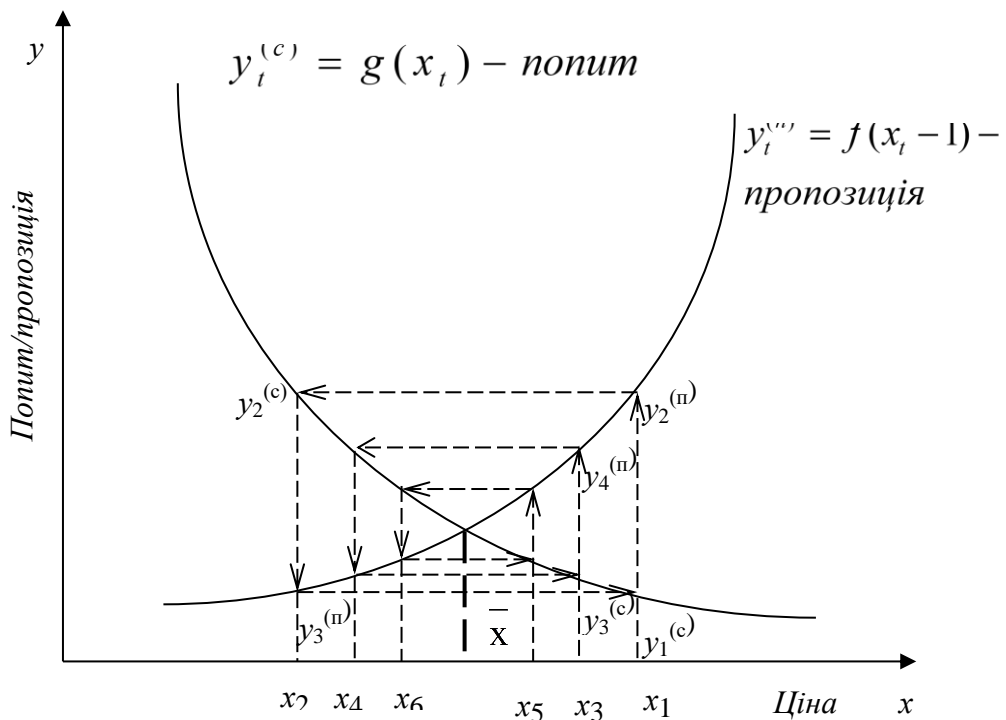


Рисунок 5.1 – Графік процесу формування попиту/пропозиції

Реалістична модель закону попиту/пропозиції є набагато складнішою, тому що $y^{(n)}$ і $y^{(c)}$ залежать не тільки від ціни x .

Нарешті, для того, щоб економічна модель, яка розглядається, могла бути перетворена на економетричну, слід говорити не взагалі про закон попиту/пропозиції, а про конкретну його дію в даному місці, у даний час і стосовно даного конкретного товару (або виду послуг). Відповідно конкретизація виду функцій $f(x)$ і $g(x)$ повинна проводитися на базі вихідних статистичних даних про значення $x_t, y_t^{(n)}, y_t^{(c)}$ за кілька тактів часу (тобто для $t = 1, 2, \dots, n$).

Деякі змістовні висновки про взаємний вплив показників можна зробити, досліджуючи поведінку графіків відповідних функцій.

На рисунку 5.2 зображено графіки функцій попиту і пропозиції, що описуються залежностями $P = D(Q) := -5Q + 150$, $P = S(Q) := Q^2/4 + Q/2 + 70$, побудовані за допомогою системи Maple.

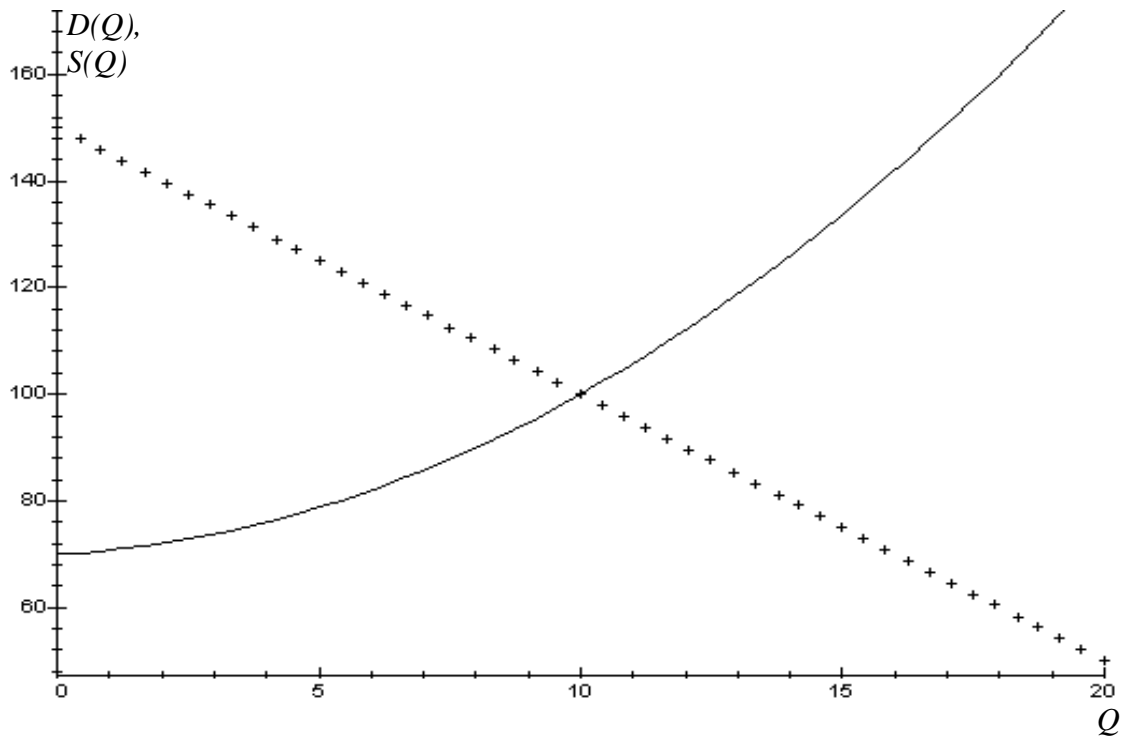


Рисунок 5.2 – Графіки функцій попиту і пропозиції

На рисунку 5.3 показано графіки функцій попиту Торнквіста, які побудовані в Maple і описуються такими залежностями:

$$D0(x) := \frac{\alpha x(x+\beta)}{x^2 + \gamma} \text{ – попит на малоцінні товари;}$$

$$D1(x) := \frac{\alpha x}{x + \beta} \text{ – попит на товари першої необхідності;}$$

$$D2(x) := \frac{\alpha(x-\gamma)}{x + \beta} \text{ – попит на товари другої необхідності (відносна розкіш);}$$

$$D3(x) := \frac{\alpha x(x-\gamma)}{x + \beta} \text{ – попит на предмети розкоші.}$$

Тут α, β, γ – деякі фіксовані параметри

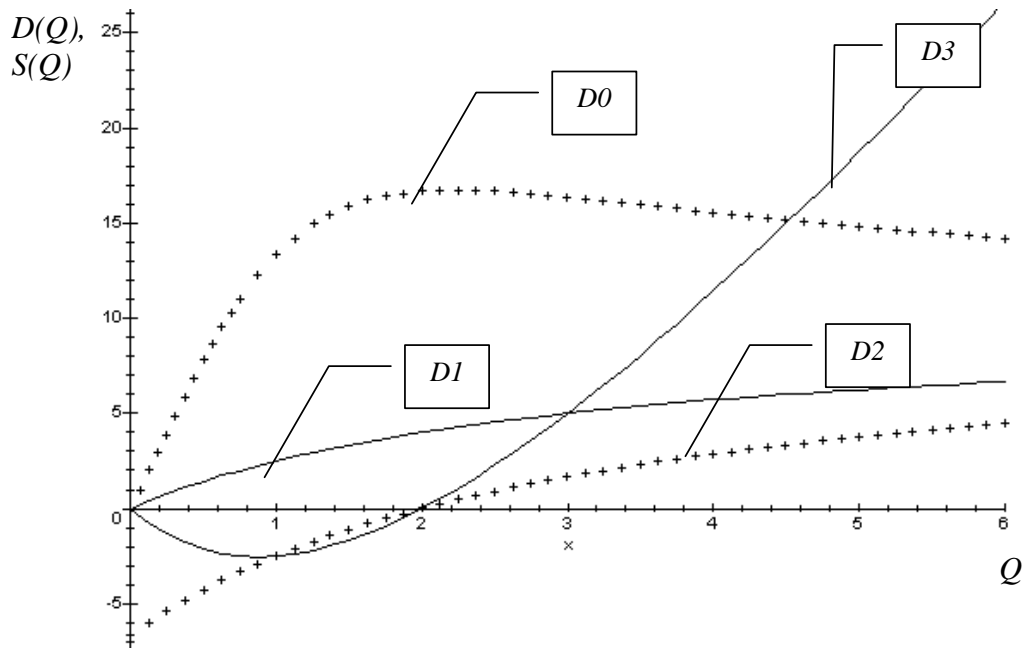


Рисунок 5.3 – Графіки функцій попиту Торнквіста

Із наведених графіків видно, що при $\alpha = 10$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ попит на малоцінні товари зростає при невеликих доходах, а потім зі збільшенням доходів починає падати і прямує до значення α зверху. Попит на товари першої необхідності зростає зі збільшенням доходів і прямує до значення α знизу. Товари другої необхідності й предмети розкоші купують тільки люди з прибутком, який перевищує $\gamma = 2$. При цьому попит на товари другої необхідності відстає від попиту на товари першої необхідності й обмежений зверху значенням α . І тільки попит на предмети розкоші зі збільшенням доходів постійно зростає.

Зміст розрахунків

Побудуйте графік заданої функції попиту. Дослідіть вигляд кривої при різних значеннях параметрів.

Рекомендації щодо розв'язання задачі

1. Визначте функцію попиту як функцію прибутку і параметрів.
2. Побудуйте на одному графіку криві попиту для різних значень параметрів, як зображено на рисунку 5.4.

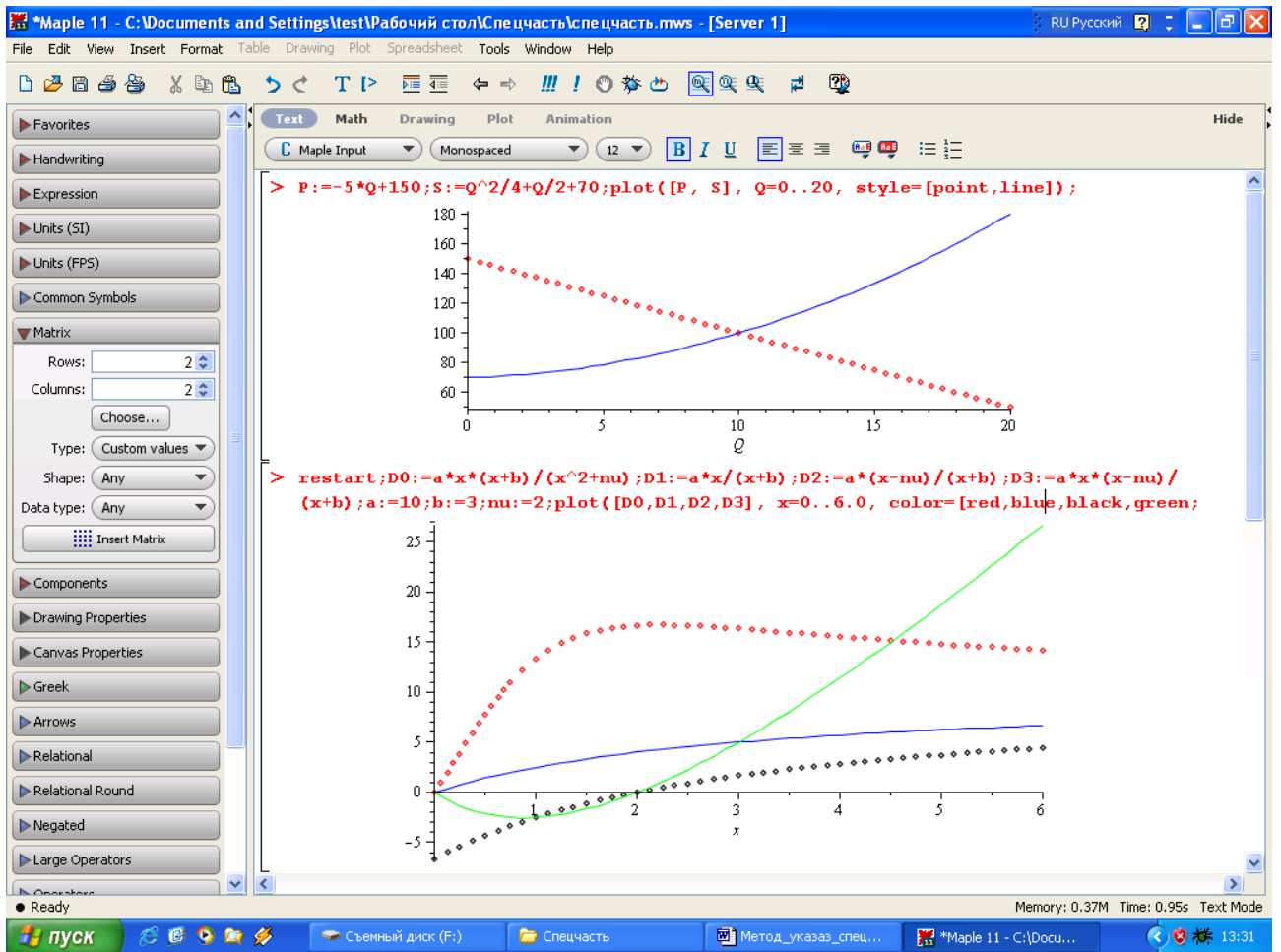


Рисунок 5.4 – Робочі вікна Maple

6 МАКСИМАЛЬНИЙ ПРИБУТОК

Вихідні умови

У найбільш загальному вигляді прибуток π різниця між виручкою підприємства від реалізації продукції R і повними витратами C : $\pi = R - C$.

Оскільки ціна визначається не тим, скільки хоче отримати виробник, а тим, скільки готовий заплатити споживач, повна виручка, отримана від реалізації товару в кількості Q за ціною J , обчислюється за формулою $R = Q \times P(Q)$, де $P = P(Q)$ – відповідна функція попиту.

Повні витрати C поділяють на постійні C_f , які не залежать від обсягу виробництва Q , і змінні C_v – витрати на виробництво одиниці продукції, тобто

$$C = C_f + C_v Q.$$

Задача щодо визначення максимального прибутку полягає у визначенні такого обсягу виробництва Q_{max} , при якому досягається максимальний прибуток, тобто потрібно при заданих значеннях C_f , C_v , і заданій функції попиту $P = P(Q)$ знайти максимум функції:

$$\pi(Q) = QP(Q) - (C_f + C_v Q).$$

На рисунку 6.1 зображено графік залежності прибутку від реалізації продукції R_i для квадратичної функції $P(Q) = 10Q - Q^2$ при $C_f = 70$, $C_v = 0,7$.

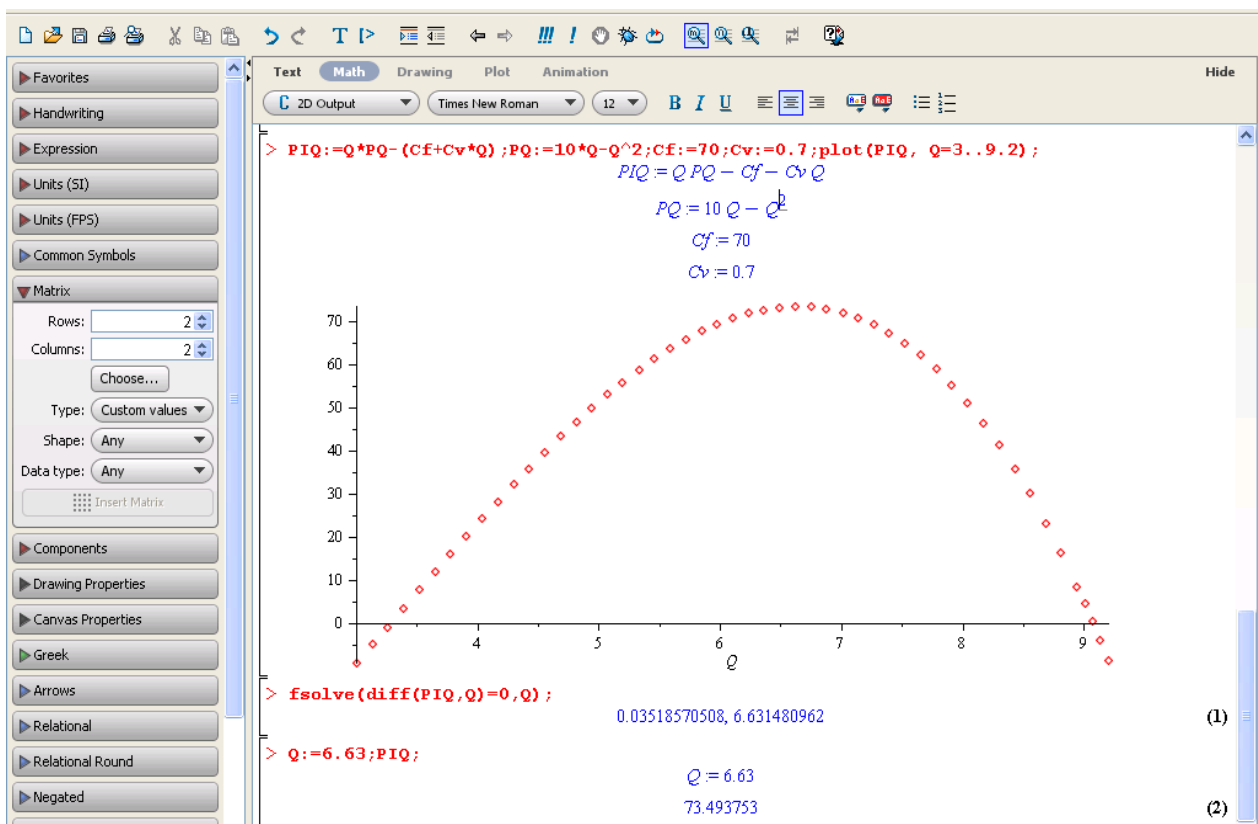


Рисунок 6.1 – Графік залежності прибутку від реалізації продукції R_i побудованого в Maple

Щоб знайти геометрично обсяг випуску продукції Q , при якому досягається максимум прибутку, необхідно зафіксувати покажчик миші на максимумі кривої прибутку. У вікні координат панелі рисунка з'являться значення Q і прибутку, при яких досягається максимум (у цьому прикладі максимум прибутку дорівнює 73,49 при $Q = 6,63$). Із рисунка 6.1 видно, що виробництво буде прибутковим тільки при $Q_1 < Q < Q_2$, де Q_1 і Q_2 – точки перетину графіка прибутку з віссю x , оскільки при таких значеннях Q повна виручка перевищує витрати.

Для аналітичного визначення меж інтервалу, в якому виробництво є рентабельним (прибуток більший від нуля), необхідно розв'язати рівняння

$$Q P(Q) - (C_f + C_v Q) > 0$$

Відносно Q , що можна виконати за допомогою функції **solve** або **fsolve**.

Для аналітичного визначення обсягу виробництва Q , при якому досягається максимальний прибуток, слід розв'язати рівняння

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 0$$

відносно Q . В Maple це можна виконати комбінованою командою **fsoive(diff(QP(Q)-(Cf + Cv Q),Q) = 0,Q);**

Зміст розрахунків

Знайдіть графічно і чисельно максимальний прибуток і межі прибуткового виробництва для заданої функції виручки підприємства і функції витрат. Виконайте обчислення для функції виручки підприємства $R = AQ - Q^2$ і для функції витрат $C = C_f + C_v Q$.

Рекомендації щодо розв'язання задачі

1. Визначіть функцію повного прибутку як функцію обсягу проданого товару Q .
2. Побудуйте на графіку криву повного прибутку.
3. Знайдіть графічно максимальний прибуток і межі прибуткового виробництва.
4. Знайдіть аналітично межу прибуткового виробництва.
5. Знайдіть похідну функції прибутку і точку максимального прибутку.
6. Обчисліть максимальний прибуток

7 ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ В ІНТЕГРОВАНОМУ МАТЕМАТИЧНОМУ ПАКЕТІ MAPLE V

Знаходження екстремумів функцій симплекс-методом

```
> readlib(extrema):  
_EnvExplicit := true:
```

Знаходження екстремумів функції f при додаткових обмеженнях $g1$ і $g2$:

```
> f := (x^2+y^2)^(1/2)-z; g1 := x^2+y^2-16=0; g2 := x+y+z  
= 10;
```

$$\begin{aligned}f &:= \sqrt{x^2 + y^2} - z, \\g1 &:= x^2 + y^2 - 16 = 0, \\g2 &:= x + y + z = 10.\end{aligned}$$

У команді **extrema** четвертим аргументом є ім'я, якому слід присвоїти значення змінних у точках екстремуму:

```
> extrema(f, {g1, g2}, {x, y, z}, 's');  
{-6+4√2, -6-4√2}  
> s;  
{(y=2√2, x=2√2, z=-4√2+10), (y=-2√2, x=-2√2, z=4√2+10)} .
```

Для застосування симплекс-методу необхідно завантажити пакет **simplex**:

```
> restart; with(simplex):  
Warning, new definition for maximize
```

Максимізація функції **obj** при додаткових обмеженнях **cnsts**:

```
> cnsts := {3*x+4*y-3*z <= 23, 5*x-4*y-3*z <= 10,  
7*x+4*y+11*z <= 30};  
obj := -x + y + 2*z;  
maximize(obj, cnsts union {x >= 0, y >= 0, z >= 0});
```

$$\left\{z = \frac{1}{2}, y = \frac{49}{8}, x = 0\right\} .$$

Задача 7.1

У чотирьох пунктах A_1, A_2, A_3, A_4 зосереджено запаси певного виду вантажів у кількостях a_1, a_2, a_3, a_4 одиниць. Три пункти призначення B_1, B_2, B_3 замовили відповідно b_1, b_2, b_3 одиниць вантажу. Загальна сума заявок на доставку дорівнює сумі наявних запасів:

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4. \quad (7.1)$$

Крім того, відома вартість перевезення одиниці вантажу з кожного пункту відправлення A_i до кожного пункту призначення B_j , де i – номер пункту відправлення, а j – номер пункту призначення. Вартість перевезення з i -го пункту в j -й позначимо c_{ij} .

Необхідно скласти план перевезень, тобто визначити, яку кількість вантажу з кожного пункту відправити і куди саме, щоб сумарні витрати з перевезень були мінімальними.

Розв'язання задачі

Складемо математичну модель цієї задачі. Позначимо елементи рішення: x_{ij} – кількість одиниць вантажу, відправленого з A_i -го пункту в B_j -й. Всього отримаємо 12 змінних – елементів рішення:

$$\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}$$

При цьому сумарна вартість перевезень

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33}$$

Обмеження, що накладаються на елементи рішення, будуть двох видів:

- усі заявки повинні бути виконані;
- усі наявні вантажі мають бути вивезені, тобто

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = a_3, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = a_4. \end{array} \quad (7.2)$$

Необхідно вибрати такі невід'ємні значення змінних $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$, щоб виконувалися обмеження (7.1) і (7.2), а лінійна функція цих змінних L перетворилась на мінімум.

Задача 7.2

Для виготовлення двох видів продукції Π_1 і Π_2 використовують три види сировини: c_1 , c_2 і c_3 . Запаси сировини на складі й кількість одиниць сировини, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, наведено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Витрати ресурсів на виготовлення продукції

Вид сировини	Запас сировини	Кількість одиниць сировини на виготовлення одиниці продукції	
		Π_1	Π_2
c_1	20	2	5
c_2	40	8	5
c_3	30	5	6

Прибуток від реалізації одиниці продукції Π_1 становить 50 грошових одиниць (гр. од.), а продукції Π_2 – 40 гр. од.

Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.

Розв'язання задачі

Позначимо через x_1 кількість одиниць продукції Π_1 , а через x_2 – кількість одиниць продукції Π_2 . Тоді з урахуванням кількості одиниць сировини, що витрачається на виготовлення одиниці продукції, а також запасів сировини отримаємо систему обмежень

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &< 20, \\ 8x_1 + 5x_2 &< 40, \\ 5x_1 + 6x_2 &< 30, \end{aligned} \tag{7.5}$$

яка показує, що кількість сировини, що витрачається на виготовлення продукції, не може перевищувати наявні запаси.

Кінцеву мету розв'язуваної задачі – отримання максимального прибутку при реалізації продукції – висловимо як функцію двох змінних x_1 і x_2 . Реалізація x_1 одиниць продукції Π_1 дає $50x_1$ гр. од. прибутку, а реалізація x_2 одиниць продукції Π_2 – $40x_2$ гр. од. прибутку. Сумарний прибуток

$$L = 50x_1 + 40x_2 \text{ (гр. од.)}. \tag{7.6}$$

Необхідно знайти такі невід'ємні значення x_1 і x_2 , при яких функція L досягне максимуму. Умовами не передбачена неподільність одиниці продукції, тому x_1 і x_2 можуть бути і дробовими числами.

Для застосування симплекс-методу необхідно завантажити пакет **simplex**:

```
>restart;with(simplex):
```

```
Warning, new definition for maximize
```

Максимізація функції **obj** при додаткових обмеженнях **cnsts**:

```
>cnsts:={2*x1+5*x2<=20,8*x1+5*x2<=40,5*x1+6*x2<=30}:
```

```
>obj:=50*x1+40*x2:
```

```
>maximize(obj,cnstsunion {x1>=0,x2>=0});
```

```
{x2 = 40/23, x1 = 90/23}
```

Графічна інтерпретація розв'язку (рисунок 7.1):

```
>plots[inequal]({2*x1+5*x2<20,8*x1+5*x2<40,5*x1+6*x2<30},  
x1=0..5,x2=0..5,optionsfeasible=(color=grey),optionsopen=(color=  
=black,thickness=2),optionsclosed=(color=green,thickness=3),optio  
nsexcluded=(color=wite));
```

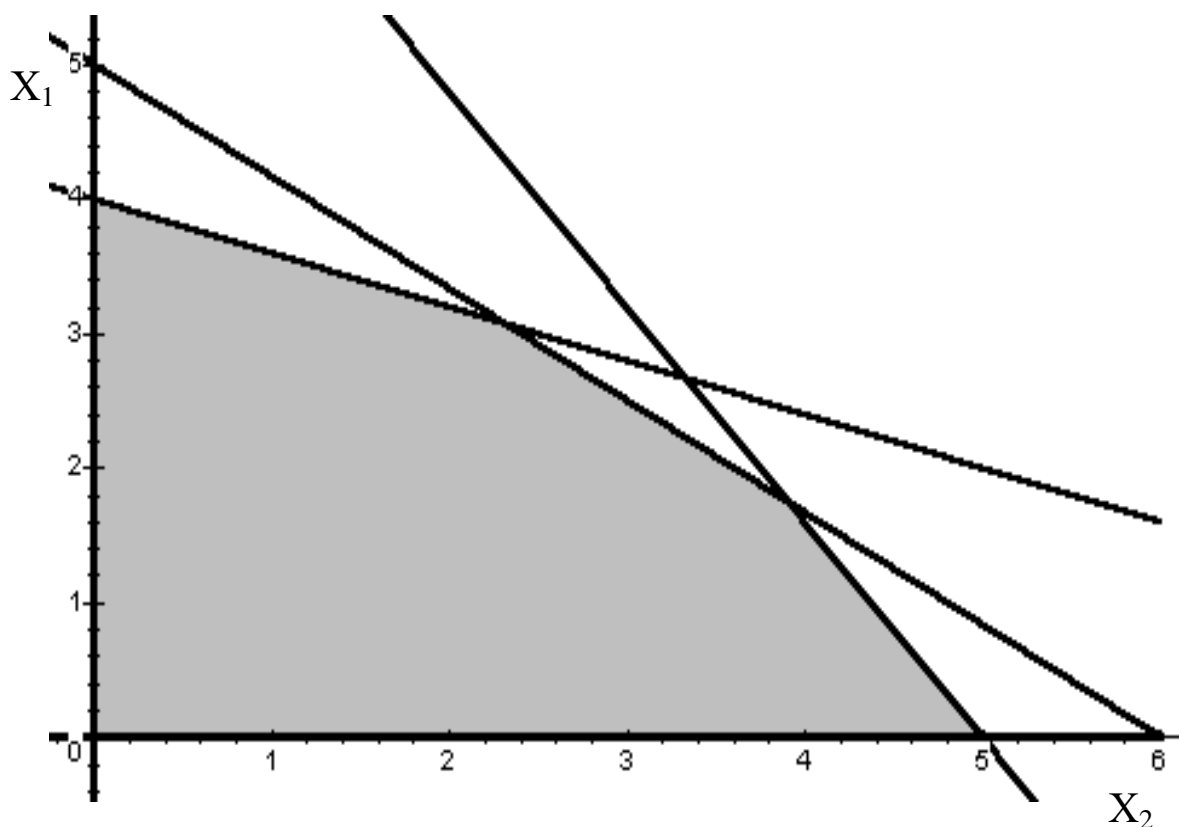


Рисунок 7.1 – Графічна інтерпретація розв'язку

Задача 7.3

Сільськогосподарське підприємство на промисловій основі займається відгодівлею бичків (або свиней, качок тощо).

Для простоти припустимо, що є два види продуктів – $П_1$ і $П_2$. При відгодівлі кожна тварина має щодня отримувати такі поживні речовини:

C_1 – не менше 9 од.;

C_2 – не менше 8 од.;

C_3 – не менше 12 од.

Вміст кількості одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду продуктів наведено в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2 – Вміст одиниць поживних речовин в 1 кг корму

Поживні речовини	Корм $П_1$	Корм $П_2$
C_1	3	1
C_2	1	2
C_3	1	6

Необхідно скласти такий харчовий раціон, тобто визначити таку кількість вихідних продуктів $П_1$ і $П_2$, що входять до нього, щоб задані умови за вмістом у суміші основних поживних речовин були виконані, але при цьому вартість раціону була мінімальною.

Розв'язання задачі

Для складання математичної моделі позначимо через x_1 і x_2 кількість кілограмів корму $П_1$ і $П_2$ в денному раціоні. З урахуванням задоволення необхідної поживності отримаємо систему обмежень

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &> 9, \\ x_1 + 2x_2 &> 8, \\ x_1 + 6x_2 &> 12. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Якщо корм $П_1$ коштує 4 гр. од., а корм $П_2$ – 6 гр. од., то загальну вартість раціону можна виразити у вигляді лінійної функції

$$L = 4x_1 + 6x_2. \quad (7.8)$$

Поставлену задачу зведемо до такого: виберемо такі невід'ємні значення змінних x_1 і x_2 , що задовольняють лінійним нерівностям (7.7), при яких лінійна функція цих змінних (7.8) перетвориться на мінімум.

Задача 7.4

Багато торговельних організацій створюють запаси товарів, що продаються для задоволення майбутнього попиту. Причини, за якими необхідно управляти величиною цих запасів, такі:

- сама процедура поповнення запасів потребує витрачання часових і фінансових ресурсів, отже, не повинна проводитися дуже часто;
- зниження частоти поповнення запасів призводить до утворення надмірно великих запасів, отже, збільшується вартість їх зберігання.

Знаходження оптимального обсягу запасів – класична задача оптимізації, для вирішення якої зручно використовувати математичний пакет Maple V.

Вихідні дані:

v – обсяг запасів, необхідний для задоволення попиту протягом року, шт./рік;

K – вартість процедури одноразового поповнення запасів незалежно від його розміру, гр. од.;

H – вартість зберігання одиниці товару протягом року, гр. од. × шт./рік;

c – вартість одиниці товару, гр. од./шт.;

T – інтервал часу між замовленнями (частина року), який визначається як час, протягом якого вичерпується запас Q (тобто $T = Q/v$), рік.

Знайти оптимальний розмір замовлення (або поставки) Q , шт., якому відповідала б мінімальна сума повних річних витрат.

Необхідні допущення:

- попит задовольняється негайно;
- поповнення здійснюється відразу ж, як тільки запаси вичерпуються.

Розв'язання задачі

Виходячи з умови задачі, аналітичний вираз для функції повних річних витрат має такий вигляд:

$$K + cQ + \frac{1}{2} hTQ = K + cQ + \frac{1/2hQ^2}{v}.$$

Примітка: витрати на зберігання запасів протягом циклу дорівнюють витратам на зберігання $Q/2$ одиниць товару протягом часу T .

Тоді функція повних витрат

$$f(Q):f(Q) = f1$$

Отже,

$$f1: = \frac{vK}{Q} + vc + \frac{1}{2} hQ,$$

$$f'(Q) = f2,$$

$$f2 = \frac{vK}{Q^2} + \frac{1}{2}h,$$

$$f''(Q) = f3,$$

$$f3 = 2 \frac{vK}{Q^3}.$$

Звідси випливає, що $f(Q)$ – опукла функція, і якщо існує додатне значення Q^* , таке, що $f'(Q^*) = 0$, то Q^* мінімізує $f(Q)$.

Вирішивши рівняння $f'(Q) = 0$, отримаємо його корені ($f4 = Q^*$):

$$f4 := \frac{\sqrt{2} \sqrt{hvK}}{h}$$

При цьому T^* – часовий інтервал між замовленнями,

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{hv}}$$

Для наочності побудуємо графік залежності повних річних витрат від вартості процедури поповнення запасів і розміру замовлення (рисунок 7.2). Для інших змінних задано реальні значення: $v = 2000$; $c = 30$; $h = 3,6$.

Щоб остаточно розв'язати задачу, задамо вартість оформлення поставки $K = 225$ і знайдемо найбільш економічний розмір замовлення спочатку графічно, використовуючи графік залежності повних витрат від вартості процедури поповнення запасів і розміру поставки, а потім – у числовому вигляді.

Знайдемо розмір замовлення Q^* , який при заданих умовах мінімізує витрати:

> $f5 := \text{solve}(f2, Q);$

$f5 := 500., -500.$

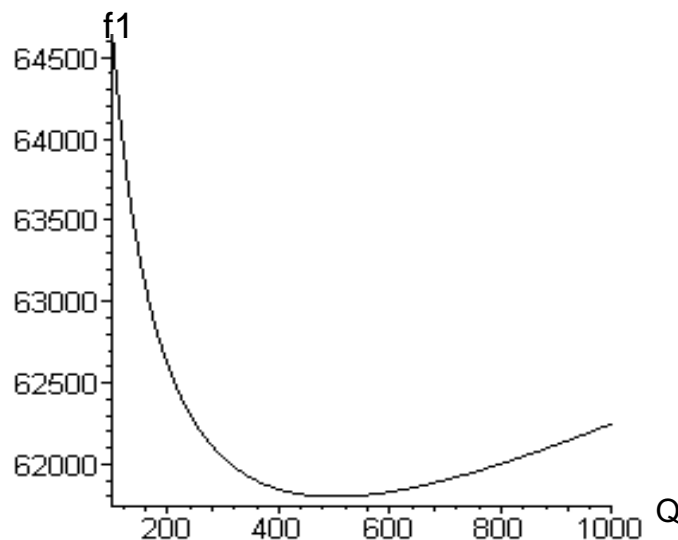


Рисунок 7.2 – Графік залежності повних річних витрат від розміру поставки

1 ФОРМИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Задача 1.1

Предприятие специализируется на производстве продуктов питания. Объем реализации продукции в тысячах гривен за последние четыре года и доля рынка предприятия и сильнейшего конкурента по каждому виду продукции представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Характеристика портфеля предприятия

Номер группы продукции	Объемы реализации продукции, тыс. грн				Доля рынка в 2017 г.,%	
	2014 г.	2015 г.	2016 г.	2017 г.	предприятия	конкурента
1	2400	2900	2900	2500	34	17
2	510	550	590	649	33	21
3			90	130	5	7
4	1650	1700	1850	2405	11	9
5	200	240	280	448	15	10
6			60	100	1	7
7	900	600	580	348	40	18
8	1000	1000	980	686	16	16
9	1600	1200	900	400	2	4
ВСЕГО	8260	8190	8230	7666		

Задание

Используя матрицу БКГ (Бостонской консалтинговой группы), сформировать продуктовую стратегию предприятия.

Рекомендации к решению задачи

1. В качестве критериев при построении двухмерной матрицы БКГ следует рассматривать темпы роста рынка (объемов продаж) предприятия и относительную долю рынка.

2. Рассчитать темпы роста рынка, которые характеризуют движение продукции на рынке, т.е. изменение объемов реализации (объемов продаж), и могут быть определены по каждому продукту через индекс темпа их роста за рассматриваемый период или через среднегодовые темпы их изменения.

Индекс темпа роста по каждому виду продукции определяется как отношение объема реализации продукции за текущий год к объему ее реализации за предыдущий год и выражается в процентах или коэффициентах роста. Например, для первой группы продукции темп роста в 2017 г. составил: $2500:2900 = 0,86$.

Среднегодовой темп изменения объемов реализации по каждому виду продукции определяется как среднее арифметическое темпов роста за весь рассматриваемый период и выражается в процентах или коэффициентах роста.

3. Рассчитать относительную долю, занимаемую предприятием на рынке (ОДР), по каждому виду продукции. Относительная доля рынка определяется отношением доли предприятия на рынке к доле ведущей конкурирующей фирмы. Доли рынка находятся как отношение объема реализации предприятия к емкости рынка данной продукции.

Например, ОДР для первой группы продукции составляет: $34:17 = 2$. Это означает, что объем реализации предприятием первой группы продукции превышает объем реализации аналогичного продукта сильнейшей конкурирующей фирмой в два раза.

4. Рассчитать долю (в процентах) каждого вида продукции в общем объеме реализации предприятия за период с 2014 г. по 2017 г.

Все полученные данные рекомендуется представить в виде таблицы.

5. Построить матрицу БКГ. Для оценки отдельных видов продукции (средние значения в матрице) используются индекс темпов роста рынка, равный единице, т.е. объем продаж постоянен, и относительная доля рынка, равная единице: $ОДР > 1$ имеют "лидеры" рынка (их доля рынка больше, чем сильнейшего конкурента), $ОДР < 1$ – свойство "последователей". Диаметр круга для изображения продукта выбирается пропорционально доле объема продукции в общем объеме реализации предприятия.

6. На основе анализа матрицы БКГ сформировать продуктовую стратегию предприятия по отдельным видам продукции. Эта стратегия может содержать следующие стратегические решения:

- убрать продукт из портфеля предприятия;
- увеличить объем реализации, изменяя структуру продуктового портфеля;
- изменить относительную долю на рынке;
- увеличить инвестирование;
- ввести жесткий контроль за инвестициями, перераспределить денежные средства между отдельными видами продукции и т.п.

При формировании продуктовой стратегии можно пользоваться следующим набором решений и принципов создания продуктового портфеля:

- «звезд» оберегать и укреплять;
- по возможности избавляться от «собак», если нет веских причин для того, чтобы их сохранять;
- для «дойных коров» необходимы жесткий контроль капиталовложений и передача избытка денежной выручки под управление менеджеров высшего уровня;

- «дикие кошки» подлежат специальному изучению, чтобы установить, не смогут ли они при известных капиталовложениях превратиться в «звезд»;

- комбинация продуктов «дикие кошки», «звезды» и «дойные коровы» приводит к наилучшим результатам функционирования – умеренной рентабельности, хорошей ликвидности и долгосрочному росту сбыта и прибыли;

- комбинация «дикие кошки» и «звезды» ведет к неустойчивой рентабельности и плохой ликвидности;

- комбинация «дойные коровы» и «собаки» ведет к уменьшению продаж и снижению рентабельности.

Решение задачи

Матрица Бостонской консалтинговой группы

В основе БКГ, или *матрицы роста/доли рынка*, лежит модель жизненного цикла товара, в соответствии с которой товар в своем развитии проходит четыре стадии:

- выход на рынок (товар – «проблема»);
- рост (товар – «звезда»);
- зрелость (товар – «дойная корова»);
- спад (товар – «собака»).

При этом денежные потоки и прибыль предприятия также изменяются: отрицательная прибыль сменяется ее ростом, а затем – постепенным снижением. Бостонская матрица концентрируется на положительных и отрицательных денежных потоках, которые ассоциируются с различными бизнес-единицами предприятия или его продуктами.

Номенклатура выпускаемой предприятием продукции анализируется на основе данной матрицы, т. е. определяется, к какой позиции указанной матрицы можно отнести каждый вид продукции предприятия. Для этого бизнес-единицы предприятия классифицируются по показателям относительной доли рынка (ОДР) и темпам роста отраслевого рынка. Показатель ОДР определяется как доля рынка бизнес-единицы, деленная на долю рынка крупнейшего конкурента.

Понятно, что показатель ОДР рыночного лидера будет больше единицы, а $ОДР = 2$ означает, что доля рынка рыночного лидера вдвое больше, чем ближайшего конкурента. С другой стороны, $ОДР < 1$ соответствует ситуации, когда доля рынка бизнес-единицы меньше, чем рыночного лидера. Высокая доля рынка рассматривается как индикатор бизнеса, который генерирует положительные денежные потоки, как показатель ожидаемого потока доходов. Это положение основано на опытной кривой.

Вторая переменная – *темп роста отраслевого рынка* (ТРР) – основана на прогнозах продаж продукции отрасли и связана с анализом жизненного цикла отрасли. Конечно, фактическую кривую жизненного

цикла отрасли можно построить только ретроспективно. Однако руководство предприятия может экспертно оценить стадию жизненного цикла отрасли, в которой оно работает, чтобы определить (спрогнозировать) потребность в финансах. В отраслях с высоким темпом роста необходимы существенные вложения в исследования и разработку новой продукции, в рекламу, чтобы попытаться достичь доминирующего положения на рынке и соответственно положительных денежных потоков.

Для построения матрицы БКГ фиксируем по горизонтальной оси значения относительной доли рынка, по вертикальной оси – темпы роста рынка. Далее, разделив данную плоскость на четыре части, получаем искомую матрицу (рисунок 1.1).

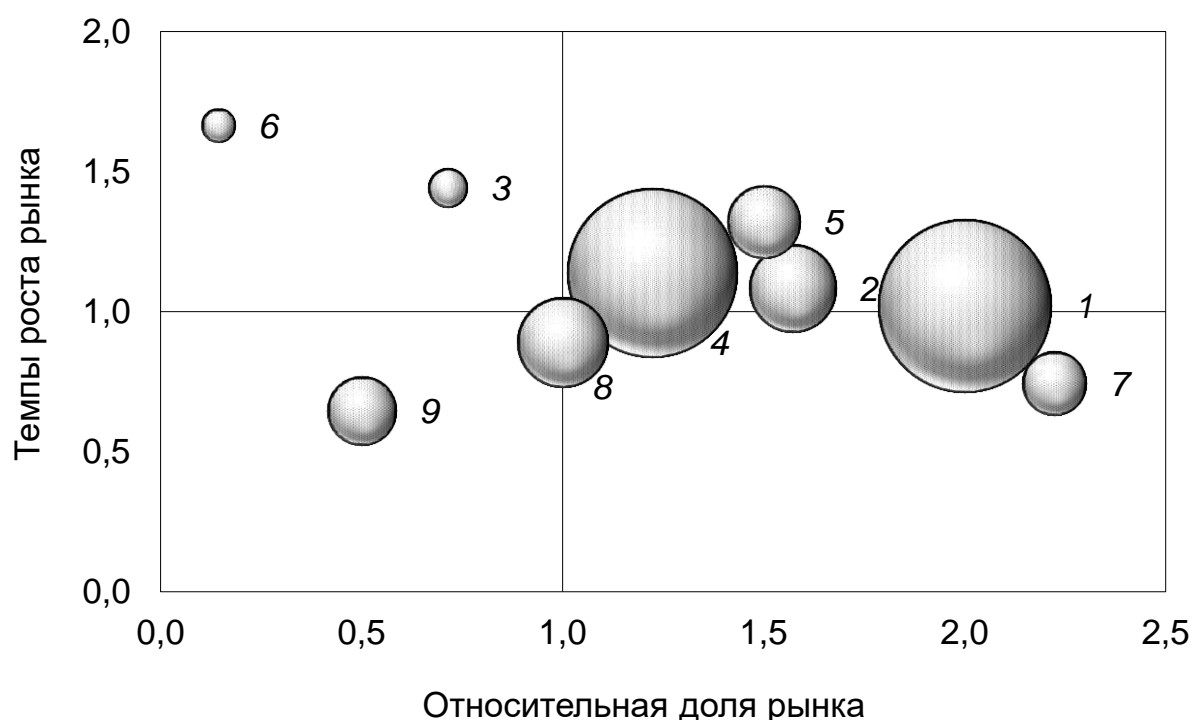


Рисунок 1.1 – Матрица БКГ

Значение переменной ОДР, равное единице, отделяет продукты – рыночные лидеры – от последователей. Что касается второй переменной, то обычно темпы роста отрасли 10% и более рассматриваются как высокие. Можно рекомендовать использовать в качестве базового уровня, разделяющего рынки с высокими и низкими темпами роста, темп роста валового национального продукта в натуральных показателях либо средневзвешенное значение темпов роста различных сегментов отраслевого рынка, в которых работает фирма. Считается, что каждый из квадрантов матрицы описывает существенно различные ситуации, требующие особого подхода с точки зрения финансирования и маркетинга.

Каждая бизнес-единица предприятия или его продукт попадает в один из квадрантов матрицы в соответствии с темпом роста отрасли, в которой

работает предприятие, и относительной долей рынка. В данном методе важно четко определить отрасль, в которой работает фирма. Если отрасль определена слишком узко, то фирма может превратиться в лидера, при широком определении отрасли фирма будет выглядеть слабой.

Графически позиции продукта или бизнес-единицы обычно отображаются кругом, площадь которого показывает относительную значимость данной структуры или продукта для предприятия, оцениваемую по величине используемых активов или генерируемой прибыли. Такой анализ рекомендуется проводить в динамике, прослеживая развитие каждого бизнеса во времени.

Матрица роста/доли рынка имеет много общего с кривой жизненного цикла товара. Однако ее преимущество или отличие от простой модели жизненного цикла товара (отрасли) заключается в комплексном рассмотрении определенного набора продуктов, которые могут находиться на разных стадиях жизненного цикла, и выработке рекомендаций относительно перераспределения финансовых потоков между продуктами.

Новые продукты чаще появляются в растущих отраслях и имеют статус товара-«проблемы». Такие продукты могут оказаться очень перспективными, но они нуждаются в существенной финансовой поддержке центра. Пока эти продукты ассоциируются с большими отрицательными финансовыми потоками, остается опасность, что они не смогут стать товарами-«звездами». Главный стратегический вопрос, представляющим известную сложность, – когда прекратить финансирование этих продуктов и исключить их из корпоративного портфеля? Если это сделать слишком рано, то можно потерять потенциальный товар-«звезду». В категорию товаров-«звезд» могут попасть как новые продукты, так и новые товарные марки продукции предприятия. Риск финансовых вложений в эту группу наиболее велик.

Товары-«звезды» – это рыночные лидеры, находящиеся, как правило, на пике своего продуктового цикла. Они сами приносят достаточно средств, для того чтобы поддерживать высокую долю динамично развивающегося рынка. Но несмотря на стратегически привлекательную позицию данного продукта, его чистый денежный доход достаточно низок, так как требуются существенные инвестиции для обеспечения высоких темпов роста, чтобы воспользоваться опытной кривой. У менеджеров существует искушение уменьшить инвестиции в целях увеличения текущей прибыли, однако это может оказаться нецелесообразным, так как в долгосрочной перспективе данный продукт может превратиться в товар-«дойную корову». В этом смысле важны будущие доходы товара-«звезды», а не текущие.

Когда темп роста рынка замедляется, товары-«звезды» становятся «дойными коровами». Это продукты, или бизнес-единицы, занимающие

лидирующие позиции на рынке с низким темпом роста. Их привлекательность объясняется тем, что они не требуют больших инвестиций и обеспечивают значительные положительные денежные потоки, основанные на опытной кривой. Такие бизнес-единицы не только окупают себя, но и обеспечивают фонды для инвестирования в новые проекты, от которых зависит будущий рост предприятия. Для того чтобы феномен товаров-«дойных коров» в полной мере использовался в инвестиционной политике предприятия, необходимо компетентное управление продуктами, особенно в сфере маркетинга. Конкуренция в лидирующих отраслях очень жесткая. Поэтому необходимы постоянные усилия, направленные на поддержание доли рынка и поиск новых рыночных ниш.

Товары-«собаки» – это продукты, которые имеют низкую долю рынка и не имеют возможностей роста, так как находятся в непривлекательных отраслях (в частности, отрасль может быть непривлекательной из-за высокого уровня конкуренции). Чистые денежные потоки у таких бизнес-единиц нулевые или отрицательные. Если нет особых обстоятельств (например, данный продукт является дополняющим для товара-«дойной коровы» или «звезды»), то от этих бизнес-единиц следует избавляться. Однако иногда корпорации сохраняют в своей номенклатуре такие продукты, если они относятся к «зрелым» отраслям. Емкие рынки «зрелых» отраслей в определенной степени защищены от резких колебаний спроса и крупных нововведений, в корне меняющих предпочтения потребителей, что позволяет поддерживать конкурентоспособность продукции даже в условиях малой доли рынка (например, рынка бритвенных лезвий).

Таким образом, желаемая последовательность развития продуктов следующая:

"Проблема" > "Звезда" > «Дойная корова» [и если неизбежно] > "Собака".

Реализация такой последовательности зависит от усилий, направленных на достижение сбалансированного портфеля, которое предполагает в том числе решительный отказ от неперспективных продуктов. В идеале сбалансированный номенклатурный портфель предприятия должен включать 2–3 товара-«коровы», 1–2 «звезды», несколько «проблем» в качестве задела на будущее и, возможно, небольшое число товаров-«собак». Типичный несбалансированный портфель имеет, как правило, один товар-«корову», много «собак», несколько «проблем», но не имеет товаров-«звезд», способных занять место «собак». Избыток стареющих товаров («собак») указывает на опасность спада, даже если текущие результаты деятельности предприятия относительно хорошие. Избыток новых товаров может привести к финансовым затруднениям.

Матрица Бостонской консалтинговой группы представляет корпорацию в виде ряда подразделений, практически не зависящих друг от друга в производственно-сбытовом плане (бизнес-единиц), которые позиционируются на рынке в зависимости от значений двух критериев.

Суть портфельного анализа заключается в определении того, у каких подразделений изъять ресурсы (изымают у «дойной коровы») и кому их передать (отдают «звезде» или «проблеме»).

Основная критика подхода Бостонской консалтинговой группы сводится к следующему:

- в матрице предусмотрены только два измерения – рост рынка и относительная доля рынка, не рассматриваются многие другие факторы роста;
 - позиция стратегической единицы бизнеса существенно зависит от определения границ и масштабов рынка;
 - на практике не всегда ясно, как рост рынка/доли рынка влияет на прибыльность бизнеса; гипотеза о зависимости между относительной долей рынка и потенциалом прибыльности применима лишь при наличии опытной кривой, т. е. в основном в отраслях массового производства;
 - игнорируется взаимозависимость хозяйственных единиц;
 - игнорируется определенная цикличность развития товарных рынков.
- Данные для построения матрицы БКГ представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Расчетные данные для построения матрицы БКГ

Темпы роста рынков				ОДР	Доля в общем объеме реализации предприятия
2014 г.	2015 г.	2016 г.	Среднее значение	2017 г.	
1,21	1,00	0,86	1,02	2,00	0,33
1,08	1,07	1,10	1,08	1,57	0,08
–	–	1,44	1,44	0,71	0,02
1,03	1,09	1,30	1,14	1,22	0,31
1,20	1,17	1,60	1,32	1,50	0,06
–	–	1,67	1,67	0,14	0,01
0,67	0,97	0,60	0,74	2,22	0,05
1,00	0,98	0,70	0,89	1,00	0,09
0,75	0,75	0,44	0,65	0,50	0,05
0,99	1,05	0,93	0,98		1

Один из возможных вариантов продуктовой стратегии предприятия приведен в таблице 1.3.

Основное направление стратегии предприятия – изменение структуры продуктового портфеля и перераспределение имеющихся денежных средств.

Таблица 1.3 – Вариант продуктовой стратегии предприятия

Сегмент	Номер продукции	Стратегия
«Дикие кошки»	6, 3	За счет инвестиций провести дополнительные исследования и решить: или убрать из продуктового портфеля продукт № 6, или увеличить долю рынка продукта № 3
	4	Увеличить долю рынка
«Звезды»	5, 2	Увеличить объем реализации, оберегать и укреплять за счет дополнительных инвестиций
«Дойные коровы»	7, 1	Увеличить объем реализации продукта № 7. Поддерживать продукт № 1. Избыток денежных средств направить на поддержание продуктов № 2,3,4,5
«Собаки»	9	Убрать из продуктового портфеля
	8	Уменьшить объем реализации

2 ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

В Excel имеется несколько инструментов для прогнозирования экономических показателей предприятия, в которых применяются различные математические модели:

- скользящее среднее (в качестве прогноза принимается среднее значение наблюдаемой величины в нескольких последних измерениях), которые можно вычислить с помощью функции **«СРЗНАЧ»** или надстройки **«Скользящее среднее»**;

- линейный прогноз (к полученным значениям величины приближается прямая линия, на основании которой и рассчитывается прогноз), выполняемый с помощью функции **«ТЕНДЕНЦИЯ»** или надстройки **«Регрессия»**;

- нелинейный прогноз (принимается, что значение величины изменяется нелинейно), который можно получить с помощью функции **«РОСТ»**;

- экспоненциальное сглаживание (принимается усредненное значение наблюдений, в которое значения последних наблюдений входят с большим весом по сравнению с весом старых наблюдений), выполняемое с помощью надстройки **«Экспоненциальное сглаживание»**.

Применение метода скользящего среднего

При использовании этого метода прогноз любого периода представляет собой получение среднего показателя нескольких результатов наблюдений временного ряда. Хотя этот метод слишком прост для создания точного прогноза, иногда он может быть более эффективен, чем методы, основанные на долговременных наблюдениях. Например, если за последние несколько месяцев в изменении объема продаж наметилась тенденция, отличная от той, которая наблюдалась в предыдущие два года, то, используя данные последних месяцев для составления прогноза на следующий месяц, можно получить более точный результат, чем при использовании данных за два года.

Одним из способов создания скользящего среднего в Excel является прямое введение формулы. Ввести формулу в ячейку можно простым набором на клавиатуре после знака **«=»** стандартной функции **«СРЗНАЧ(С1:СJ)»**, где С – буквенное обозначение столбца, содержащего необходимые ячейки; I – номер первой ячейки диапазона данных; J – номер последней ячейки диапазона данных.

Можно ввести формулу в ячейку, используя встроенный инструмент **«Мастер функций»**. В меню **«Вставка»** выберите **«Функция»**. В открывшемся диалоговом окне в разделе **«Категория»** выберите **«Статистические»**, в разделе **«Функция»** – **«СРЗНАЧ»**. После этого выделите диапазон данных и нажмите **«ОК»**.

Другим способом создания скользящего среднего является использование надстройки **«Пакет анализа»**. В меню **«Сервис»** выберите **«Анализ данных»**. Появится диалоговое окно **«Анализ данных»**. Из списка выберите инструмент анализа **«Скользящее среднее»** и нажмите **«ОК»**. Появится диалоговое окно **«Скользящее среднее»**. В поле **«Входной интервал»** укажите диапазон в рабочем листе. В поле **«Интервал»** введите количество периодов, которые хотите включить в подсчет скользящего среднего. В поле **«Выходной интервал»** выделите ячейку, с которой хотите начать вывод расчетных значений. Нажмите **«ОК»**.

С помощью инструментов Excel можно графически представить данные скользящего среднего. Для этого необходимо создать график, содержащий значения базовых данных, с помощью инструмента **«Мастер диаграмм»**. Этот инструмент можно вызвать в меню **«Вставка – Диаграмма»** либо на стандартной панели инструментов. После построения графика щелкните на линии правой кнопкой мыши. В появившемся контекстном меню выберите **«Добавить линию тренда»**. В появившемся диалоговом окне щелкните на вкладке **«Тип»**. Выберите линию тренда **«Линейная фильтрация»**, а затем – необходимое для расчета скользящего среднего количество периодов с помощью счетчика **«Точки»**. Нажмите **«ОК»**. На графике увидите линию тренда скользящего среднего.

Применение функций регрессии

В процессе прогнозирования показателей методом регрессии можно использовать стандартные функции Excel **«ТЕНДЕНЦИЯ»** и **«РОСТ»**. С помощью методов регрессии оценивают взаимосвязь между фактическими данными наблюдений и другими параметрами, например, порядковыми номерами периодов наблюдений или датами наблюдений.

Рассмотрим применение функции «ТЕНДЕНЦИЯ». Предположим, что данные наблюдений конкретного показателя внесены в рабочем листе в столбце А с 1-й по 10-ю ячейки. Значения порядковых номеров наблюдений внесены в столбце В, рядом со значениями соответствующих показателей. На основании имеющихся данных можно построить прогноз исследуемого показателя на последующие периоды временного ряда, по которым еще нет результатов наблюдений. Например, имеются результаты десяти наблюдений, необходимо определить прогнозные показатели на следующие десять аналогичных периодов времени. В ячейках А1:А10 внесены значения показателя, а в ячейках В1:В10 – порядковые номера наблюдений 1, 2, 3 ... 10.

Чтобы определить прогнозное значение одного первого периода, в ячейку В11 внесите порядковый номер этого периода – 11. Далее в ячейку С11 вставьте формулу функции **«ТЕНДЕНЦИЯ»** следующим образом. Выделите ячейку С11. В меню **«Вставка»** выберите **«Функция»**. В появившемся диалоговом окне в разделе **«Категория»** выберите

«Статистические», а в разделе «Функция» – «ТЕНДЕНЦИЯ». Нажмите «ОК». Появится диалоговое окно функции «ТЕНДЕНЦИЯ». В строке «Изм_знач_у» выделите диапазон ячеек A1:A10. В строке «Изм_знач_х» выделите диапазон ячеек B1:B10. В строке «Нов_знач_х» выделите ячейку B11. Нажмите «ОК». В ячейке C11 появится прогнозное значение показателя на одиннадцатый период.

Для того чтобы определить прогнозные значения сразу на десять будущих периодов, нужно формулу функции «ТЕНДЕНЦИЯ» ввести в диапазон ячеек C11:C20. Для этого внесите в ячейки B11:B20 порядковые номера прогнозируемых периодов – 11, 12, 13 ... 20. Выделите диапазон ячеек C11:C20. Нажмите комбинацию клавиш «Ctrl+Shift+Enter» (с помощью этой комбинации можно ввести формулы массива) и, не отпуская клавиши, проделайте аналогичные действия, которые были описаны выше с одним изменением. В строке «Нов_знач_х» диалогового окна функции «ТЕНДЕНЦИЯ» выделите диапазон ячеек B11:B20. В ячейках C11:C20 появятся прогнозные значения для десяти будущих периодов.

С помощью функции «ТЕНДЕНЦИЯ» вычисляют прогнозы, основанные на линейной связи между результатом наблюдений и временем наблюдений. Если же взаимосвязь показателей носит нелинейный характер, более точный прогноз можно построить, применяя функцию Excel «РОСТ».

Используем тот же пример, когда в ячейках A1:A10 внесены данные наблюдений показателя, а в ячейках B1:B10 – порядковые номера наблюдений. Так же, как и для функции «ТЕНДЕНЦИЯ», введите в ячейки B11:B20 номера прогнозных периодов. Далее проделайте аналогичные действия, только в разделе «Функция» диалогового окна «Мастер функций» выберите «РОСТ». В ячейках C11:C20 получите прогнозные значения показателя, рассчитанные с использованием функции «РОСТ».

При проведении регрессионного анализа на графике, построенном по данным наблюдений, значения номеров прогнозных периодов можно не вводить в рабочий лист. Прогноз можно сделать с помощью графической линии тренда.

Щелкните правой кнопкой мыши на линии построенного графика. В появившемся контекстном меню выберите «Добавить линию тренда». Выберите тип линии тренда «Линейная». Щелкните на вкладке «Параметры». В поле «Вперед на» введите количество периодов для прогноза. При желании, можете установить флажок «показывать уравнение на диаграмме». Нажмите «ОК». В результате на графике будет построена линия тренда временного ряда, продленная вперед на то количество периодов, которое было выбрано.

Если уравнение линии тренда было выведено на диаграмму, то, используя это уравнение, можете рассчитать прогноз исследуемого показателя на любой другой период. Для этого необходимо в уравнение

вместо переменной X подставить порядковый номер соответствующего периода (либо соответствующую дату, если в качестве параметра регрессии использовались даты проведения наблюдений, а не их порядковые номера).

Применение функции экспоненциального сглаживания

Функция сглаживания имеет свои особенности по сравнению с функциями, основанными на регрессии. В отличие от функций «ТЕНДЕНЦИЯ» и «РОСТ», каждый новый прогноз представляет собой сумму предыдущего прогноза и поправочного коэффициента, который и передвигает новый прогноз в направлении, делающем предыдущий результат более точным.

Сглаживание является очень полезным в тех случаях, когда во временном ряду наблюдаются существенные различия в уровнях данных. При наличии во временном ряду резкого скачка показателя линейная линия тренда не отображает этого явления. При прогнозе, выполненном с помощью сглаживания, фактическая базовая линия отслеживается довольно точно.

Excel непосредственно поддерживает один из методов сглаживания с помощью средства «Экспоненциальное сглаживание», которое находится в надстройке «Пакет анализа».

Для применения метода экспоненциального сглаживания введите данные наблюдений конкретного показателя в ячейки рабочего листа, например, A1:A10. В меню «Сервис» выберите «Анализ данных». В диалоговом окне выберите «Экспоненциальное сглаживание». В поле «Входной интервал» выделите ячейки интервала анализируемых данных и дополнительно захватите пустые ячейки этого же столбца. При этом количество пустых дополнительных ячеек должно соответствовать количеству периодов, на которые хотите составить прогноз, плюс еще одна ячейка. Далее в поле «Фактор затухания» внесите показатель, например, 0,7. В поле «Выходной интервал» выделите ячейку, с которой начнется запись значений сглаженной линии, например, B1. Нажмите «ОК». Если поставите галочку в поле «Вывод графика», то средство автоматически помимо вывода значений сглаженной линии построит график сглаженной линии и график линии исходных данных.

Важным показателем, влияющим на точность прогноза, является фактор затухания. Чем меньше фактор затухания, тем точнее отражает прогноз последние данные наблюдений, а чем больше – тем сильнее будет отставание прогноза от этих данных. Хорошие результаты можно получить тогда, когда последние результаты наблюдений отражают случайные явления, которые долго не изменяют общего уровня временного ряда.

Следует избегать использования параметра «фактор затухания», который меньше значения 0,7. Если создается впечатление, что при

большем значении этого показателя средство «**Экспоненциальное сглаживание**» действует значительно лучше, то, вероятнее всего, это происходит благодаря высокому уровню автокорреляции во временном ряду.

Автокорреляция – очень важный параметр процесса прогнозирования. Он характеризует существующую зависимость между данными наблюдений, полученными в определенное время, и данными наблюдений, полученными на несколько временных периодов раньше.

Если объединить каждый результат наблюдений с результатом, непосредственно предшествующим ему, то можно вычислить корреляцию между этими двумя наборами данных.

Для проверки автокорреляции в Excel существует функция «**KORPEЛ**». Воспользоваться ею можно также двумя способами: либо введите в ячейку непосредственно формулу «**=KORPEЛ(A1:A9;A2:A10)**», либо в меню «**Вставка**» выберите «**Функция**». В окне мастер функций выберите категорию «**Статистические**» и функцию «**KORPEЛ**». Нажмите «**OK**». В окне функции выделите соответствующие диапазоны данных. Второй диапазон со сдвигом на одну ячейку.

Если показатель автокорреляции высокий, значит, каждый результат в большей степени зависит от значения наблюдения, полученного непосредственно перед этим.

Применение множественной регрессии

Известно, что в хозяйственной деятельности любого предприятия между определенными показателями существует значимая связь. Например, изменение объема продаж зависит от изменения продажной цены, качества продукции, а также планируемого уровня расходов на рекламу. Тенденция изменения цен, например, на однокомнатные квартиры зависит от изменения цен на двухкомнатные квартиры и комнаты.

В связи с этим возникает вопрос: каким образом можно спрогнозировать результат изменения одного показателя с учетом тенденции изменения других показателей?

Одним из таких методов является использование уравнения множественной регрессии, в которое подставляются значения предсказуемых переменных. В общем виде это уравнение можно записать так:

$$Y = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cdot X_i,$$

где Y – прогнозируемый показатель; A_i – коэффициенты; X_i – связанные предсказуемые показатели.

В Excel существует встроенная функция, которая позволяет проводить анализ множественной регрессии, вычислять значения коэффициентов для уравнения множественной регрессии и определять некоторые другие

характеристики регрессии взаимосвязанных показателей (например, значение дисперсии).

Для того чтобы воспользоваться встроенной функцией, внесите данные наблюдений показателя, который собираетесь прогнозировать, в ячейки рабочего листа Excel, например, в столбец А (А2:А10). Данные наблюдений связанных показателей за аналогичный период времени внесите в соседние ячейки, в столбцы В, С, D (в зависимости от количества связанных показателей). Далее в меню **«Сервис»** выберите **«Анализ данных»**. В открывшемся диалоговом окне выберите инструмент **«Регрессия»**. Нажмите **«ОК»**. В диалоговом окне инструмента **«Регрессия»** введите входной интервал Y – интервал с данными наблюдений прогнозируемого показателя (А2:А10). Входной интервал X – полностью весь интервал с данными наблюдений всех связанных показателей, например, В2:D10. Нажмите **«ОК»**. В новом листе (если выберите параметры вывода – новый рабочий лист) появятся итоги регрессионного анализа взаимосвязанных показателей.

На основе данных полученного анализа можно построить уравнение множественной регрессии. В качестве коэффициентов уравнения будут значения, полученные в столбце **«Коэффициенты»** самой нижней таблицы анализа: А0 – **«Y-пересечение»**, А1 – Аn – значения для соответствующих переменных X1 – Xn.

Используя полученное уравнение, можно определить прогнозное значение исследуемого показателя на любой будущий период, подставляя вместо переменных X1 – Xn планируемые значения предсказуемых связанных показателей.

Задача 2.1

В таблице 2.1 приведены данные о некотором экономическом показателе за два года.

Таблица 2.1 – Статистика продаж за два года

Месяцы	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й	12-й
1-й год	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂
2-й год	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈	X ₁₉	X ₂₀	X ₂₁	X ₂₂	X ₂₃	X ₂₄
1-й год	58	86	103	74	61	57	61	91	92	91	122	133
2-й год	95	132	168	119	98	92	98	146	148	131	196	213

1. Используя опции **«построение тренда»**, **«вывод формулы тренда»** MS EXCEL, составить прогноз на следующий год.

2. Используя **«мастер функций»** MS EXCEL, выполнить простые вычисления.

3. Построить зависимость показателя от времени.

Рекомендации к решению задачи

Аддитивную модель прогнозирования можно представить в таком виде:

$$Y = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cdot X_i, \quad (2.1)$$

где F – прогнозируемое значение; T – тренд; S – сезонная компонента; E – ошибка прогноза.

Для уменьшения ошибки прогнозной модели используем полиномиальный тренд.

Для определения сезонной компоненты вычитаем из фактических значений объемов продаж значение тренда.

Скорректируем значение сезонной компоненты таким образом, чтобы их сумма была равна нулю. Для этого просуммируем сезонные компоненты одного и того же месяца разных лет, найдем среднее значение сезонной компоненты за каждый месяц и их сумму, потом эту сумму разделим на количество месяцев и полученное значение вычтем из среднего.

Находим значение параметров модели. Для этого среднюю сезонную компоненту прибавляем к значению тренда.

Теперь можно рассчитывать ошибку модели как разность между фактическими значениями и значениями модели.

Находим среднеквадратическую ошибку модели по формуле

$$E = \frac{\sum O^2}{\sum (T + S)^2}, \quad (2.2)$$

где T – трендовое значение объема продаж; S – сезонная компонента; O – отклонения модели от фактических значений.

Решение задачи

Чтобы построить линию тренда, необходимо выполнить следующие действия: открыть команду **«Диаграмма»**, выбрать подпункт **«Добавить линию тренда»**. В окне **«Линия тренда»** следует выбрать **«Полиномиальная, степень 6»** (рисунок 2.1). В этом пункте в подпункте **«Параметры»** выделить строку **«Показывать уравнение на диаграмме»**.

Используя уравнение на диаграмме, делаем вычисления и заполняем колонку **«Значение тренда»**.

Находим величину **«сезонной компоненты»** (см. рисунок 2.1).

На рисунке 2.2 показан расчет средних значений сезонной компоненты.

Рассчитываем ошибки модели как разность между фактическими значениями и значениями модели (рисунок 2.3).

Модель прогноза объема продаж показана на рисунке 2.4.

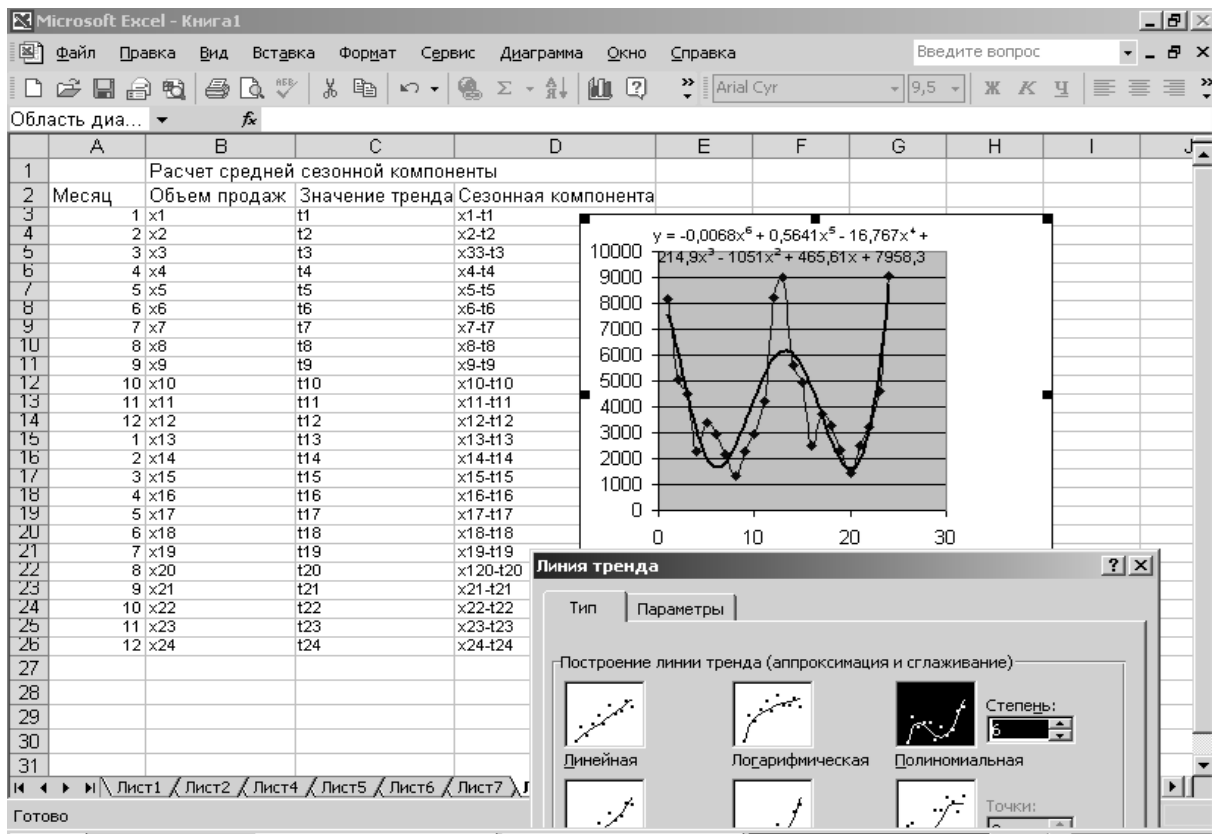


Рисунок 2.1 – Построение линии тренда и расчет сезонной компоненты

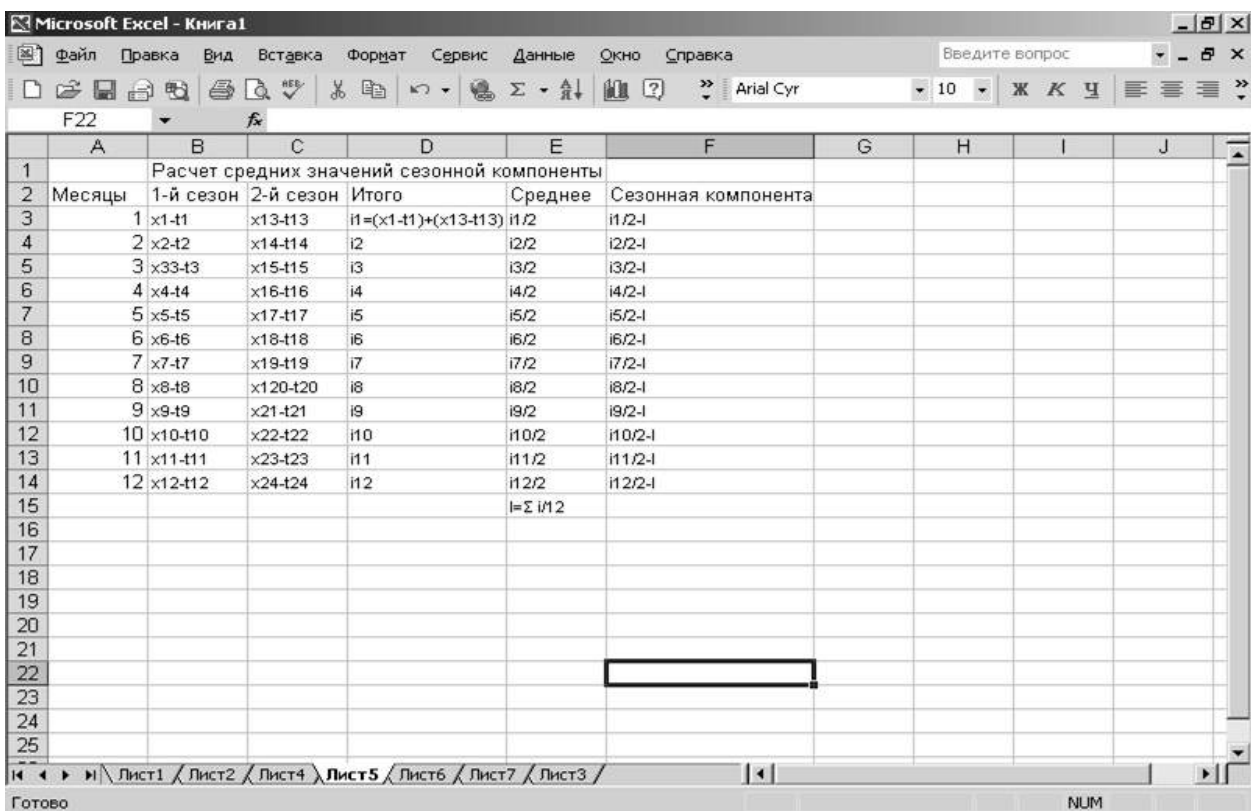


Рисунок 2.2 – Расчет средних значений сезонной компоненты

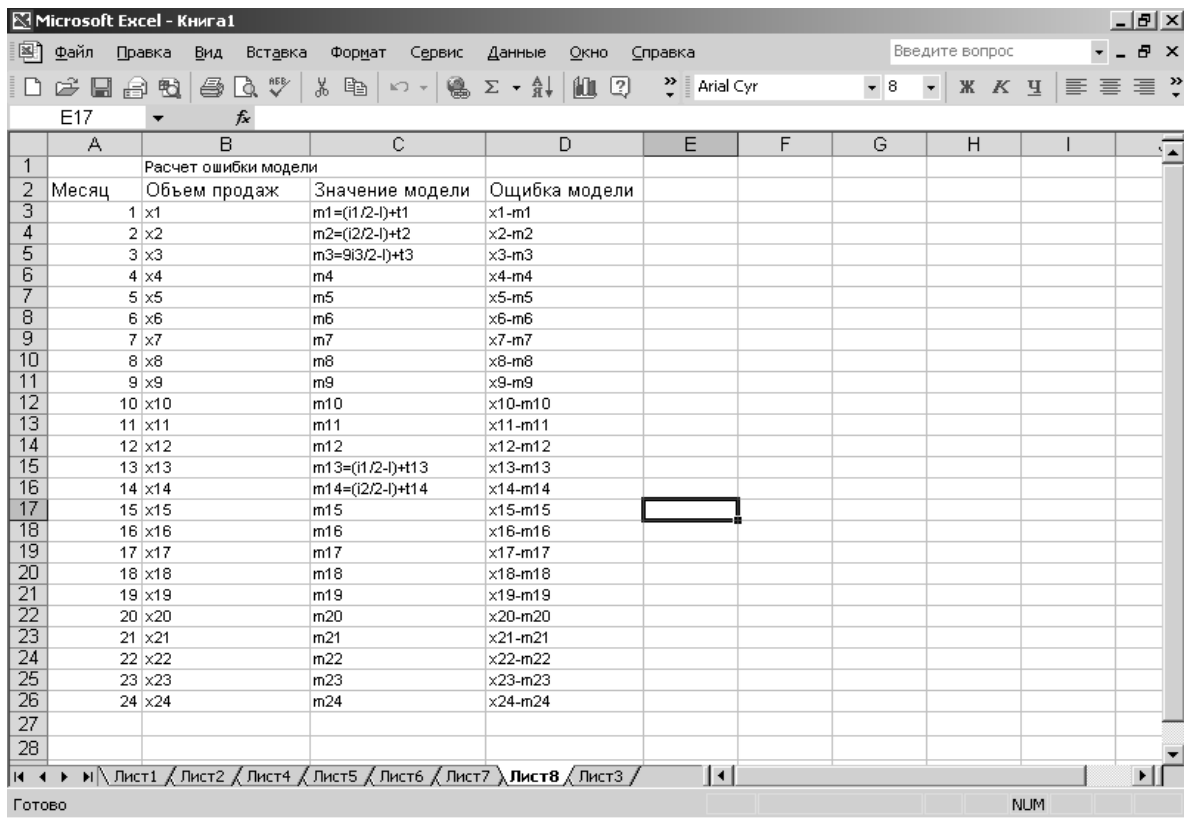


Рисунок 2.3 – Расчет ошибок

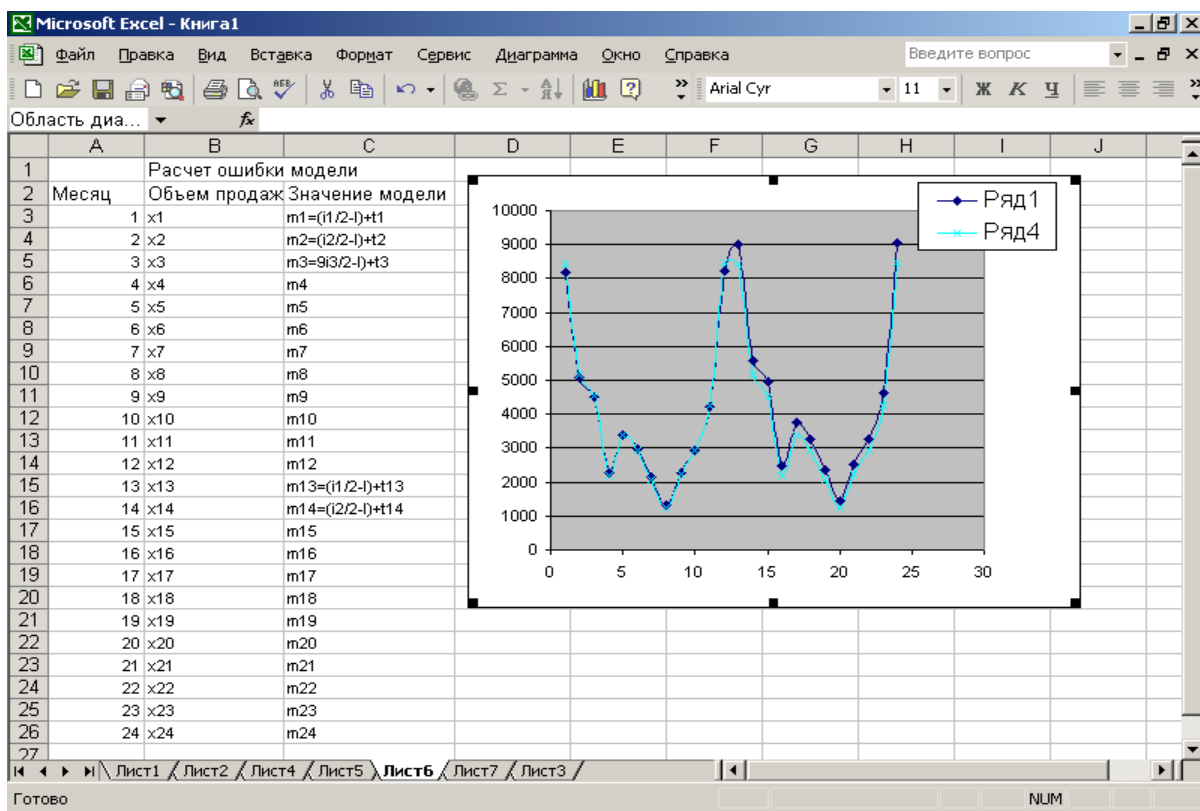


Рисунок 2.4 – Модель прогноза объема продаж

Задача 2.2

Предприятие предоставило данные об изменении некоторого экономического показателя за десять периодов (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Статистика продаж за 10 месяцев

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение показателя	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	F_{11}
Статистика продаж	58	86	103	74	61	57	61	91	92	91	?

Задание. Используя инструмент «Экспоненциальное сглаживание» анализа данных MS EXCEL, сделать прогноз на одиннадцатый период.

Рекомендации к решению задачи

Предполагается, что наблюдение некоторой величины T производится через равные промежутки времени. Результат наблюдений обозначим T_n , где n – номер наблюдения. Прогноз F_{n+1} для следующего момента времени рассчитываем по формуле

$$F_{n+1} = F_n + (1 - \alpha) \cdot (T_n - F_n), \quad (2.3)$$

где α – фактор затухания, выбирается обычно от 0,7 до 0,8. Меньшие значения фактора затухания ускоряют отклик прогноза на скачок наблюдаемого процесса, но могут привести к непредсказуемым выбросам.

Вначале, располагая лишь одним результатом наблюдений T_1 , когда прогноза F_1 нет и формулой (2.3) воспользоваться еще невозможно, в качестве прогноза F_2 следует взять T_1 :

$$F_{n+1} = \alpha \cdot F_n + (1 - \alpha) \cdot T_n. \quad (2.4)$$

Очевидно, что при уменьшении фактора затухания в прогнозе доля последнего наблюдения увеличивается, а доля предыдущих наблюдений убывает.

Выполним прогноз на одиннадцатый месяц:

$$\begin{aligned} F_2 &= \alpha \cdot T_1 + (1 - \alpha) \cdot T_2 \\ F_3 &= \alpha \cdot F_1 + (1 - \alpha) \cdot T_3 \\ &\dots \\ F_{11} &= \alpha \cdot F_{10} + (1 - \alpha) \cdot T_{10}. \end{aligned}$$

Решение задачи

Воспользуемся инструментом анализа «Экспоненциальное сглаживание». Для этого необходимо обратиться к меню «Сервис». Если в всплывающем подменю нет команды «Анализ данных», то выполняется команда «Сервис, Надстройки». В появившемся окне «Надстройки» (рисунок 2.5) в списке надстроек устанавливаем флажок слева от строки «Analysis ToolPak-VBA».

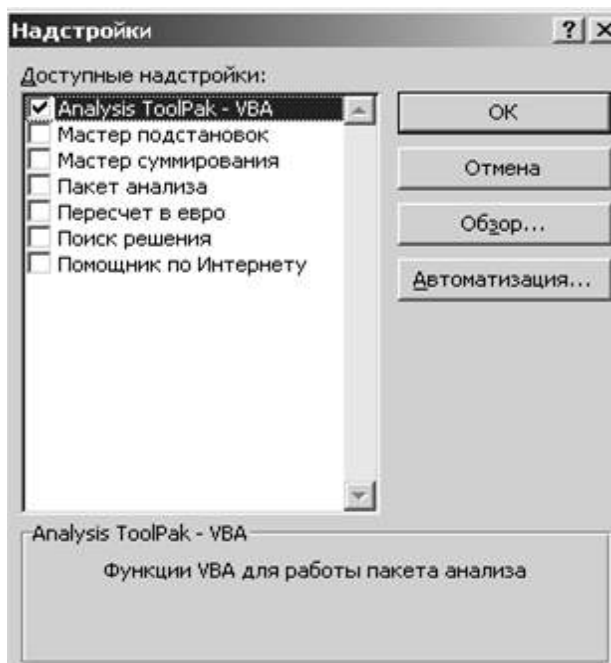


Рисунок 2.5 – Установка пакета «Анализ данных»

Далее необходимо выполнить команду «Сервис, Анализ данных». Появится окно «Анализ данных» (рисунок 2.6).

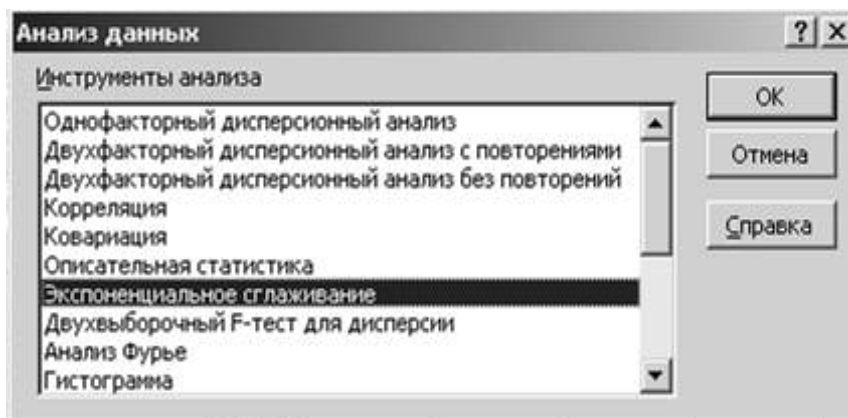


Рисунок 2.6 – Выбор инструмента анализа

В этом списке находим инструмент «Экспоненциальное сглаживание». Появившееся окно необходимо заполнить (рисунок 2.7).

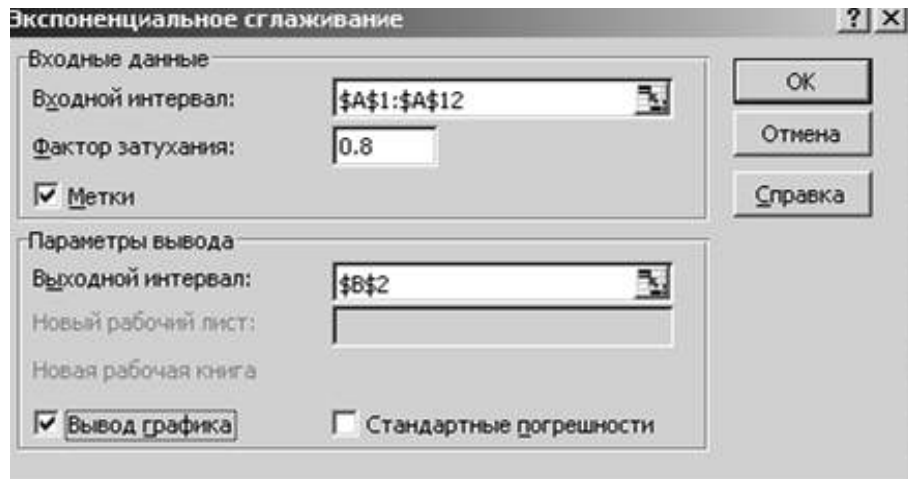


Рисунок 2.7– Заполнение окна «Экспоненциальное сглаживание»

Прогноз производится для различных значений фактора затухания, после чего оценивается лучшее его значение. На практике параметр сглаживания часто ищется с поиском на сетке. Возможные значения параметра разбиваются сеткой с определенным шагом. Например, рассматривается сетка значений от $\alpha = 0,1$ до $\alpha = 0,9$, с шагом 0,1. Затем выбирается α , для которого сумма квадратов (или средних квадратов) остатков (наблюдаемые значения минус прогнозы на шаг вперед) является минимальной.

Результат прогноза представлен на рисунке 2.8.

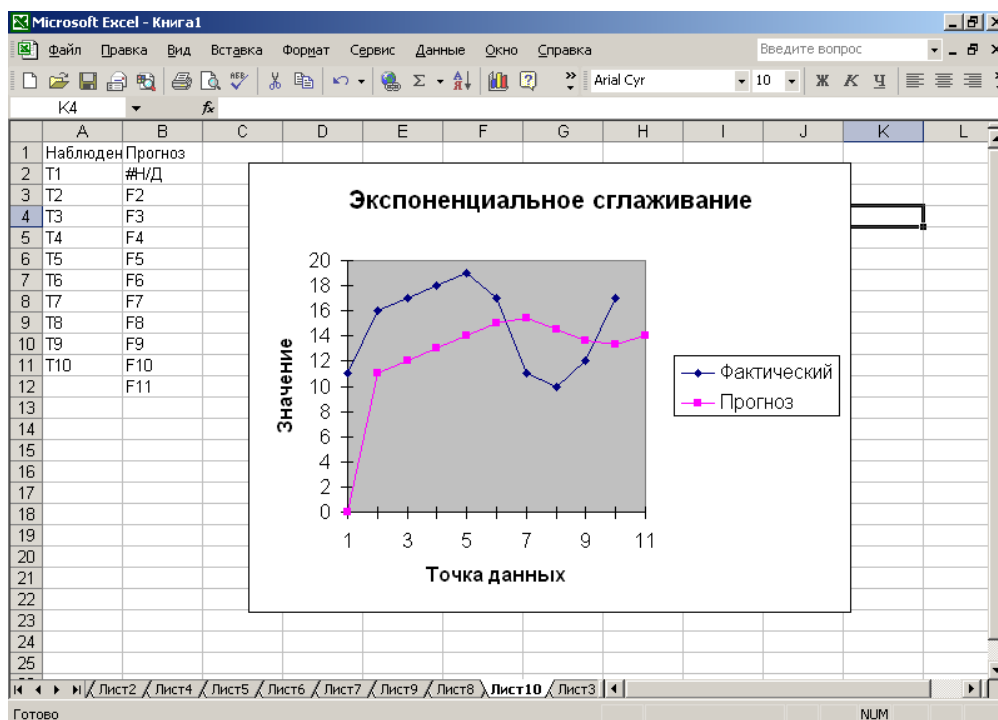


Рисунок 2.8 – Прогноз по методу экспоненциального сглаживания (фактор затухания равен 0,8)

3 СРЕДСТВА ИНФОГРАФИЧЕСКОГО АНАЛИЗА АГРЕГИРОВАННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ

Процесс принятия управленческих решений в современных условиях предполагает обработку и анализ большого объема разнородных данных, которые в разной степени характеризуют свойства объекта управления и внешней среды. Учитывая сегодняшний уровень доступности мониторинговой информации разного рода, невозможно представить синтез эффективных управленческих решений без современных методов и средств обработки информации, в том числе средств инфографического анализа и визуализации.

Внедрение мобильных информационно-коммуникационных устройств в жизнь современных менеджеров смещает информационные потребности от текстовой к визуальной информации, что способствует росту актуальности технологий инфографирования. В качестве инструмента эффективного представления информации в целях обеспечения поддержки и повышения эффективности процесса принятия управленческих решений инфографирование имеет значительный потенциал для борьбы с информационными перегрузками менеджеров. Роль информационно-аналитических средств поддержки принятия управленческих решений увеличивается в случае использования комплексных агрегированных показателей многомерных систем и объектов. Агрегированные показатели представляют собой обобщенные синтетические измерители, объединяющие в себе многие частные, вычисляемые посредством суммирования, группировки или других способов сведения частных показателей к обобщенным. Необходимость визуализации и анализа подобных показателей возникает на многих этапах принятия решений, в частности на этапе оказания помощи лицу, принимающему решение (ЛПР) при анализе исходной информации, оценке сложившейся обстановки и ограничений, накладываемых внешней средой.

Целью исследования является сравнительный анализ методов и средств многомерного анализа комплексных агрегированных показателей многомерных объектов и выработка рекомендаций для ЛПР по выбору адекватного средства моделирования.

Аппарат радиальных метрических диаграмм. РМД задает n -мерное метрическое пространство, в котором осуществляется оценивание объекта, где n – число метрик p_i , $i = \overline{1, n}$, отображающихся в виде лучей диаграммы (рисунок 3.1).

В случае, когда построены несколько РМД, по которым оценивают объект в целом, они образуют иерархическую структуру. В результате свертки отдельной РМД нижнего уровня на основании значений метрик и коэффициентов их весомости (значимости) формируется обобщенный

показатель, значение которого затем откладывается на соответствующем луче комплексной РМД верхнего уровня, как показано на рисунке 3.2. Аналогичным образом для комплексной РМД может быть получен интегральный показатель.

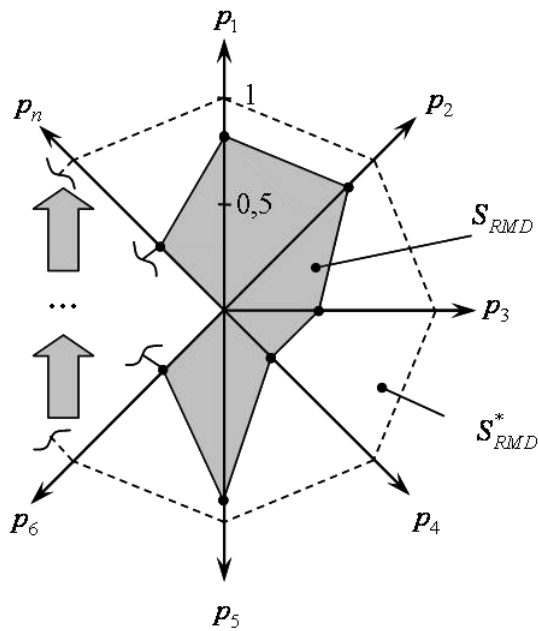


Рисунок 3.1 – Общий вид РМД

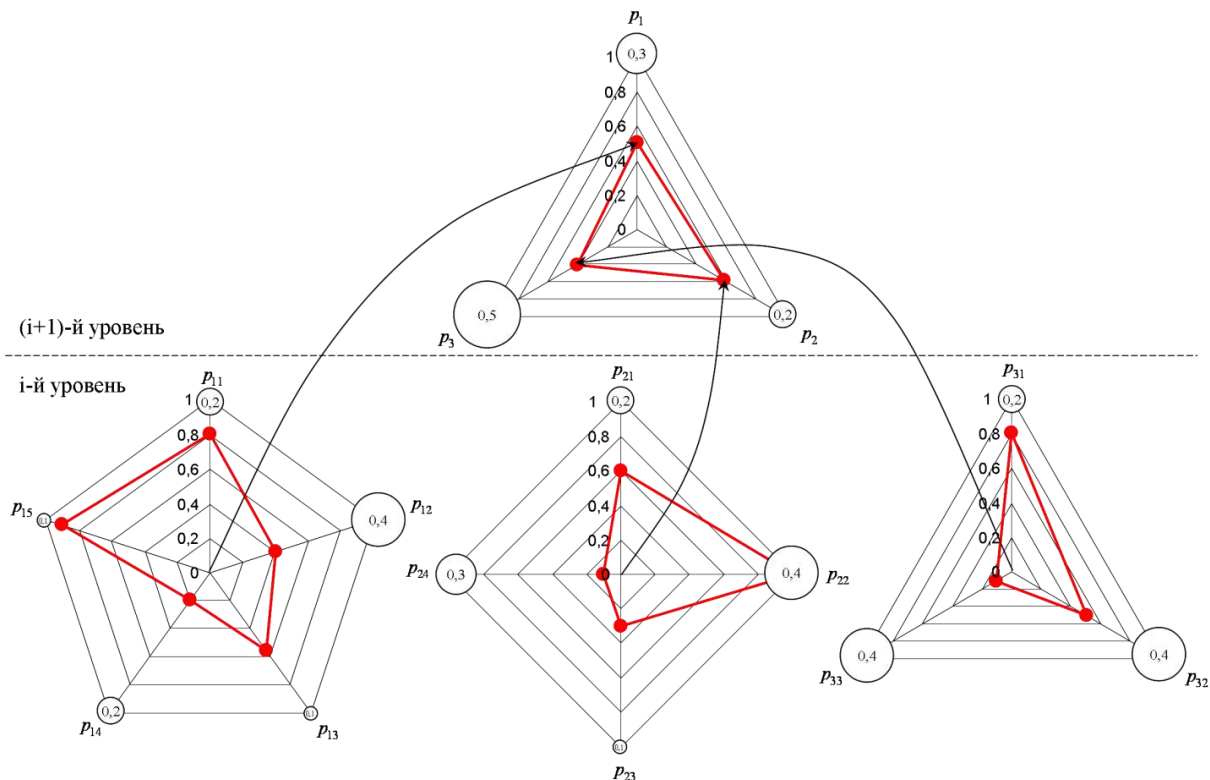


Рисунок 3.2 – Пример свертки радиальных метрических диаграмм

Аппарат линейных нормированных диаграмм. Линейная нормированная диаграмма (ЛНД) представляет собой столбчатую диаграмму метрик $p_{i,j}, i = \overline{1, n}$, по которым оценивается объект, причем

ширина отдельного столбца численно равна соответствующему коэффициенту весомости α_i i -й метрики (рисунок 3.3).

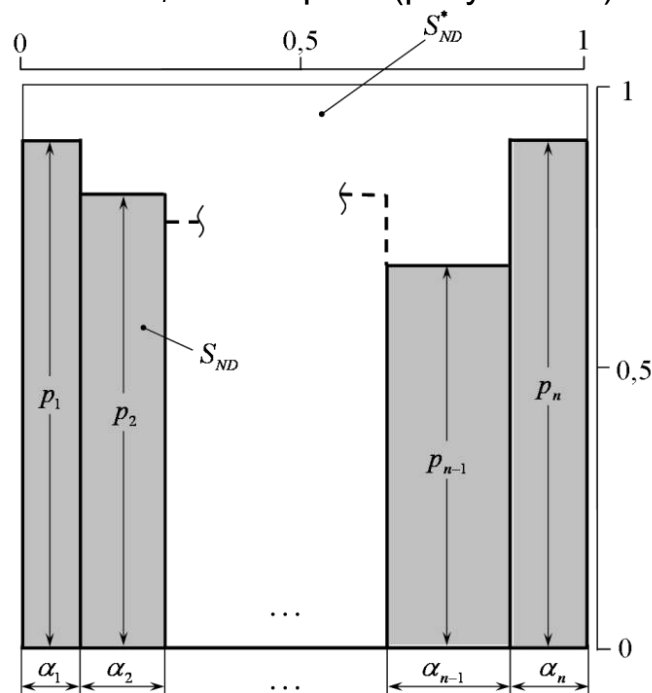


Рисунок 3.3 – Общий вид линейной нормированной диаграммы

По аналогии с РМД, ЛНД могут и призваны описывать многоуровневую иерархическую систему показателей (метрик), как показано на рисунке 3.4.

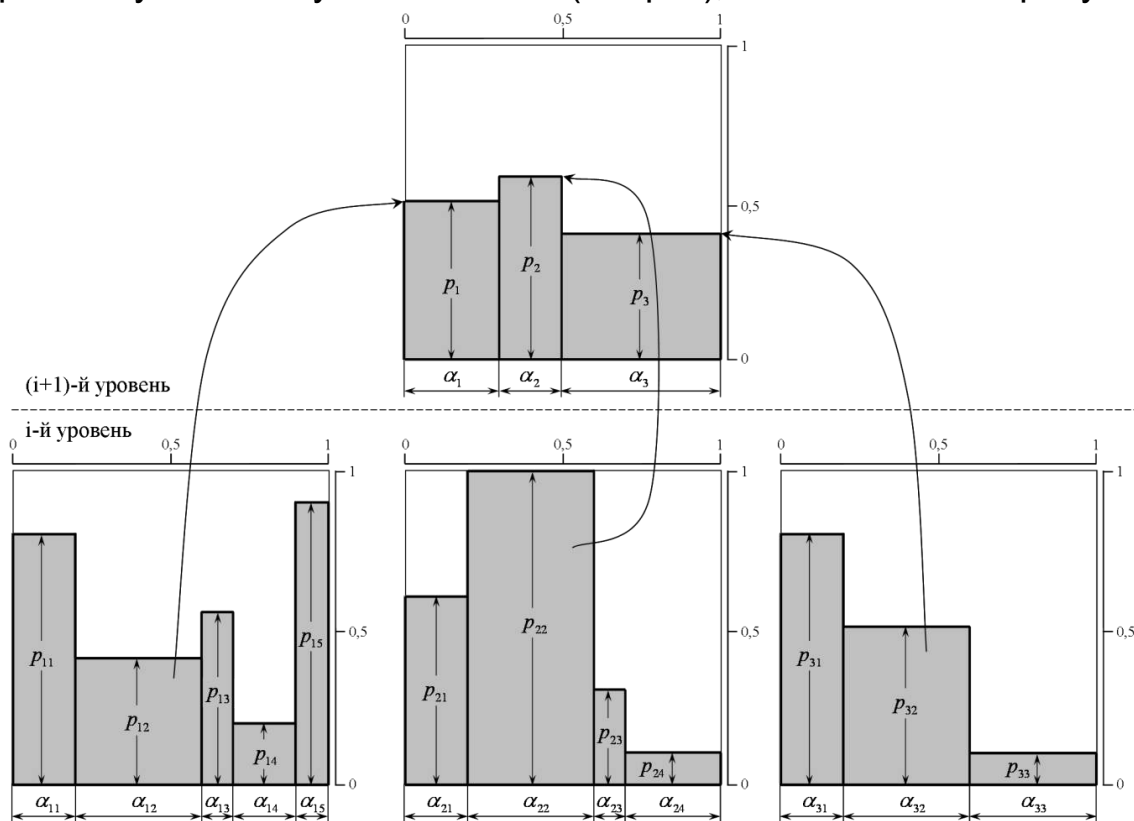


Рисунок 3.4 – Пример свертки линейных нормированных диаграмм

Сравнительный анализ РМД и ЛНД.

Описанные выше средства многомерного анализа агрегированных показателей применяются в задачах контроллинга, стратегического управления, в частности для анализа разрывов (GAP-анализа). При этом анализируют значения площадей фигур, образуемых РМД (S_{RMD} на рисунке 3.1) и ЛНД (S_{ND} на рисунке 3.2), максимально возможное значение площади диаграмм (S_{RMD}^* на рисунке 3.1 и S_{ND}^* на рисунке 3.3 соответственно), а также их разность или соотношение, которое и интерпретируют как собственно разрыв между желаемым и действительным состояниями объекта или системы.

Рассмотрим особенности применения обоих видов диаграмм более подробно. Площадь фигуры, образуемой РМД, есть сумма площадей отдельных лепестков диаграммы (см. рисунок 3.1):

$$S_{RMD} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \times (p_1 p_2 + p_2 p_3 + \dots + p_{n-1} p_n + p_n p_1) = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} (p_1 p_n + \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}). \quad (3.1)$$

Очевидно, что модель РМД нелинейная, к тому же неинвариантная к порядку отображения метрик. При этом площадь идеальной РМД, т.е. диаграммы с идеальными значениями метрик

$$S_{RMD} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \quad (3.2)$$

также зависит от количества метрик n (рисунок 3.5).

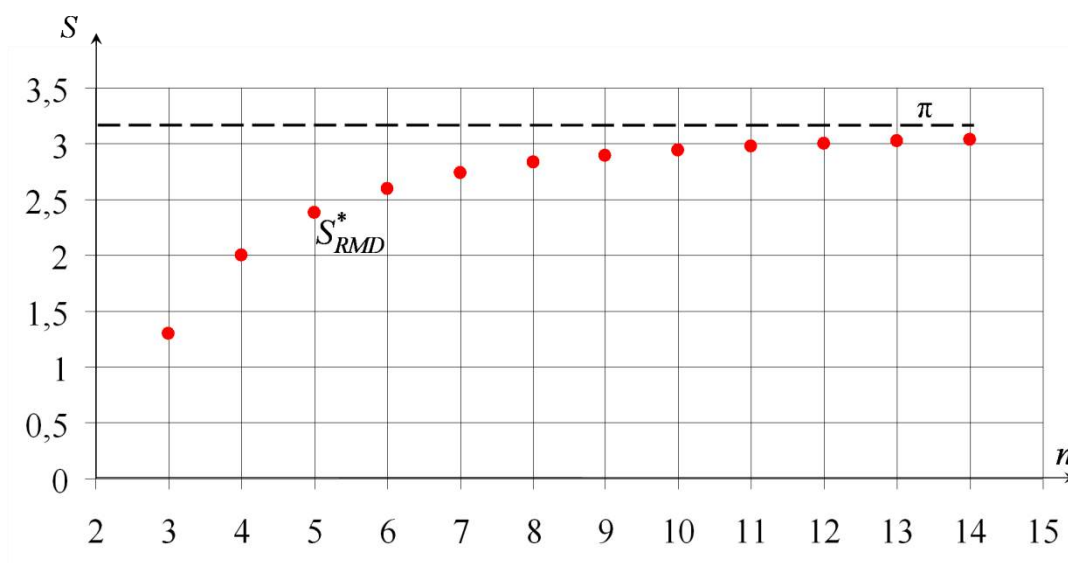


Рисунок 3.5 – График зависимости площади идеальной РМД от количества метрик

Таким образом, несмотря на то, что на лучах РМД откладываются нормированные значения показателей, ни площадь S_{RMD} , ни площадь S_{RMD}^* , ни их соотношения не являются нормированными, линейными по отношению к метрикам, величинами.

Если интерпретировать разрыв R как разницу между идеальной и полученной РМД, т.е.

$$R = S_{RMD}^* - S_{RMD}, \quad (3.3)$$

то величина $\frac{\partial R}{\partial p_i}$ характеризует чувствительность модели к изменению i -й метрики и во многом определяет свойства модели.

В данном случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial p_i} &= \frac{\partial S_{RMD}^*}{\partial p_i} - \frac{\partial S_{RMD}}{\partial p_i} = \\ &= -\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} (p_{i-1} + p_{i+1}), \quad i \neq 1, i \neq n, \end{aligned} \quad (3.4)$$

т.е. чувствительность РМД зависит от общего количества метрик и от значений «соседних» метрик, что никак нельзя отнести к преимуществам модели.

Аналогичные расчеты для ЛНД показывают несколько иные результаты. Площадь идеальной ЛНД всегда равна единице:

$$S_{ND}^* = 1, \quad (3.5)$$

поскольку

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (3.6)$$

При этом площадь фигуры, образуемой ЛНД, численно равна значению агрегированного показателя:

$$S_{ND} = P_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i. \quad (3.7)$$

Выражение для разрыва R в этом случае имеет такой вид:

$$R = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i, \quad (3.8)$$

а чувствительность модели $\frac{\partial R}{\partial p_i}$ однозначно определяется коэффициентом весомости:

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = -\alpha_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.9)$$

что свидетельствует о полном соответствии аналитическому и геометрическому смыслу модели. Следует отметить, что это соответствие справедливо только для агрегированных показателей вида (3.7). Однако именно эта форма агрегирования или свертки используется чаще всего.

Кроме описанных графоаналитических функций, элементы диаграмм могут выступать функционалом в разного рода задачах оптимизации, что подтверждает их практическую значимость и расширяет диапазон применимости в задачах управления организационно-техническими системами.

Таким образом, по результатам сравнительного анализа двух средств многомерного анализа агрегированных показателей организационно-технических систем, а именно РМД и ЛНД, можно сделать следующие выводы:

1) радиальные метрические и нормированные диаграммы являются графоаналитическими моделями и позволяют визуализировать структуру и значение агрегированных показателей организационно-технических систем;

2) ЛНД являются линейными (инвариантными), а РМД – нелинейными (неинвариантными) по отношению к метрикам (к порядку метрик);

3) при анализе линейно-агрегированных показателей площадь ЛНД в отличие от площади РМД имеет геометрическую интерпретацию;

4) при анализе многоуровневых (более двух) агрегированных показателей предпочтительнее использовать ЛНД в силу строгости графоаналитического аппарата и следствий п.3.

Пример. Глобальная система бизнес-процессов организации может быть представлена 10 бизнес-процессами (БП) (таблица 3.1).

Иерархическая структура компонентов бизнес-процессов, их относительная эффективность, а также относительные коэффициенты весомости представлены в таблице 3.2.

Построим двухуровневые РМД и ЛНД в соответствии с изложенными выше методиками (рисунки 3.6 и 3.7). В таблице 3.3 приведены следующие характеристики полученных моделей:

n – число метрик в диаграмме;

$P_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$ – значение агрегированного показателя;

S_{RMD} и S_{ND} – значения площадей радиальных метрических и нормированных диаграмм бизнес-процессов соответственно;

S_{RMD}^* и S_{ND}^* – идеальные значения площадей радиальных метрических и нормированных диаграмм бизнес-процессов соответственно;

$\frac{S_{RMD}}{S_{RMD}^*}$ и $\frac{S_{ND}}{S_{ND}^*}$ – отношения текущих и идеальных значений площадей для

радиальных метрических и нормированных диаграмм бизнес-процессов соответственно;

$R_{RMD} = R_{RMD}^* - R_{RMD}$ и $R_{ND} = R_{ND}^* - R_{ND}$ – значения разрывов для радиальных метрических и нормированных диаграмм бизнес-процессов соответственно.

Таблица 3.1 – Система БП организации и относительные коэффициенты их весомости

Номер системы	Бизнес-процесс организации	Относительный коэффициент весомости α_i
1	Организационная структура управления	0,07
2	Система управления	0,12
3	Маркетинг	0,15
4	Система организации производства	0,13
5	Персонал предприятия	0,06
6	НИОКР	0,1
7	Финансы	0,09
8	Снабжение	0,1
9	Сбыт	0,11
10	Учет	0,07

Таблица 3.2 – Иерархическая структура компонентов БП

БП	Компоненты БП	Относительная эффективность компоненты p_{ij}	Относительный коэффициент весомости компоненты α_{ij}
1. Организационная структура	1.1 Степень соответствия плана структуры условиям ее функционирования	0,9	0,25
	1.2 Численность работников управления	0,8	0,15
	1.3 Степень адекватности распределения работников управления по уровням и функциям	0,8	0,25
	1.4 Качество информационных связей	0,9	0,35

Продолжение таблицы 3.2

БП	Компоненты БП	Относительная эффективность компоненты r_{ij}	Относительный коэффициент весомости компоненты a_{ij}
2. Система управления	2.1 Опыт, квалификация и кругозор руководства организации в управленческой деятельности	0,9	0,16
	2.2 Общее мнение о топ-менеджерах организации как о партнерах в деловых кругах	0,8	0,13
	2.3 Система стратегического планирования	1	0,20
	2.4 Способность быстро реагировать на меняющуюся рыночную ситуацию	0,8	0,20
	2.5 Уровень информационных систем	0,8	0,16
	2.6 Степень организации функций управления	0,8	0,15
3. Маркетинг	3.1 Система организации маркетинга	1	0,18
	3.2 Система исследования рынка	0,9	0,18
	3.3 Ассортиментная политика	0,8	0,16
	3.4 Ценовая политика	0,8	0,16
	3.5 Коммуникационная политика	0,7	0,16
	3.6 Распределительная политика	0,8	0,16
4. Система организации производства	4.1 Численность занятых в производстве	0,8	0,10
	4.2 Основные используемые технологии	0,8	0,12
	4.3 Инновации в производственном процессе	0,8	0,12
	4.4 Степень овладения существующими технологиями	0,8	0,13
	4.5 Технико-технологическая база предприятия	0,9	0,15
	4.6 Система планирования производства	0,8	0,14
	4.7 Система обеспечения качество продукции	0,8	0,14
	4.8 Производительность труда	0,7	0,10
5. Персонал	5.1 Состояние кадровой службы предприятия	0,8	0,08
	5.2 Кадровая политика предприятия	0,9	0,19
	5.3 Степень укомплектованности сотрудниками	0,8	0,17
	5.4 Квалификация персонала	1	0,25
	5.5 Возрастной состав персонала	0,8	0,09

Продолжение таблицы 3.2

БП	Компоненты БП	Относительная эффективность компоненты r_{ij}	Относительный коэффициент весомости компоненты α_{ij}
5. Персонал	5.6 Частота трудовых конфликтов в организации	0,8	0,10
	5.7 Текучесть кадров	0,8	0,12
6. НИОКР	6.1 Уровень конструкторского отдела (бюро) на предприятии	0,8	0,15
	6.2 Наличие в штате крупных ученых	0,7	0,30
	6.3 Научоемкость производства	0,9	0,15
	6.4 Мнение потребителей о качестве, научно-техническом уровне изделий	0,8	0,20
	6.5 Лицензионная работа	0,8	0,06
	6.6 Возможность разработки новых товаров	0,9	0,14
7. Финансы	7.1 Финансовая диагностика	0,8	0,07
	7.2 Управление издержками	0,9	0,10
	7.3 Планирование прибыли	0,8	0,09
	7.4 Бюджетирование и контроль	1	0,07
	7.5 Управление оборотными средствами	0,8	0,12
	7.6 Управление основными средствами	0,8	0,04
	7.7 Инвестиционный портфель	0,8	0,14
	7.8 Структура капитала	0,8	0,05
	7.9 Дивидендная политика	0,8	0,04
	7.10 Ликвидность	1	0,13
	7.11 Задолженность	0,8	0,07
	7.12 Доступ предприятия к другим источникам средств	0,8	0,08
8. Снабжение	8.1 Наличие отдела снабжения	0,9	0,22
	8.2 Степень его укомплектованности сотрудниками	0,8	0,16
	8.3 Квалификация сотрудников	1	0,18
	8.4 Система стимулирование сотрудников	0,9	0,06
	8.5 Сырьевая база и основные поставщики	0,8	0,14
	8.6 Партнеры в производственной кооперации	0,8	0,13
	8.7 Издержки системы снабжения	0,8	0,11

Продолжение таблицы 3.2

БП	Компоненты БП	Относительная эффективность компоненты p_{ij}	Относительный коэффициент весомости компоненты α_{ij}
9. Сбыт	9.1 Уровень отдела сбыта	0,9	0,20
	9.2 Численность сотрудников отдела сбыта	0,8	0,13
	9.3 Квалификация сотрудников отдела	0,9	0,16
	9.4 Система планирования объемов продаж	1	0,12
	9.5 Система транспортировки товаров	0,8	0,11
	9.6 Процедура отработки поступающих заказов	0,8	0,18
	9.7 Издержки сбыта	0,8	0,10
10. Учет	10.1 Управленческий учет	0,8	0,33
	10.2 Финансовый учет	0,8	0,33
	10.3 Контроллинг	1	0,34

Таблица 3.3 – Характеристики инфографических моделей БП

Номер модели БП	Характеристики модели									
	n	P_{Σ}	S_{RMD}	S_{RMD}^*	S_{RMD}/S_{RMD}^*	R_{RMD}	S_{ND}	S_{ND}^*	S_{ND}/S_{ND}^*	R_{ND}
1	4	0,86	1,445	2	0,723	0,555	0,86	1	0,86	0,14
2	6	0,856	1,871	2,598	0,72	0,727	0,856	1	0,856	0,144
3	6	0,838	1,81	2,598	0,697	0,788	0,838	1	0,838	0,162
4	8	0,805	1,81	2,828	0,64	1,01	0,805	1	0,805	0,195
5	7	0,869	1,939	2,736	0,709	0,797	0,869	1	0,869	0,131
6	6	0,799	1,728	2,598	0,665	0,87	0,799	1	0,799	0,201
7	12	0,85	2,12	3	0,707	0,88	0,85	1	0,85	0,15
8	7	0,864	2,009	2,736	0,734	0,727	0,864	1	0,864	0,136
9	7	0,86	2,009	2,736	0,734	0,727	0,86	1	0,86	0,14
10	3	0,868	0,97	1,299	0,747	0,329	0,868	1	0,868	0,132
Σ	10	0,844	2,108	2,939	0,717	0,831	0,844	1	0,844	0,156

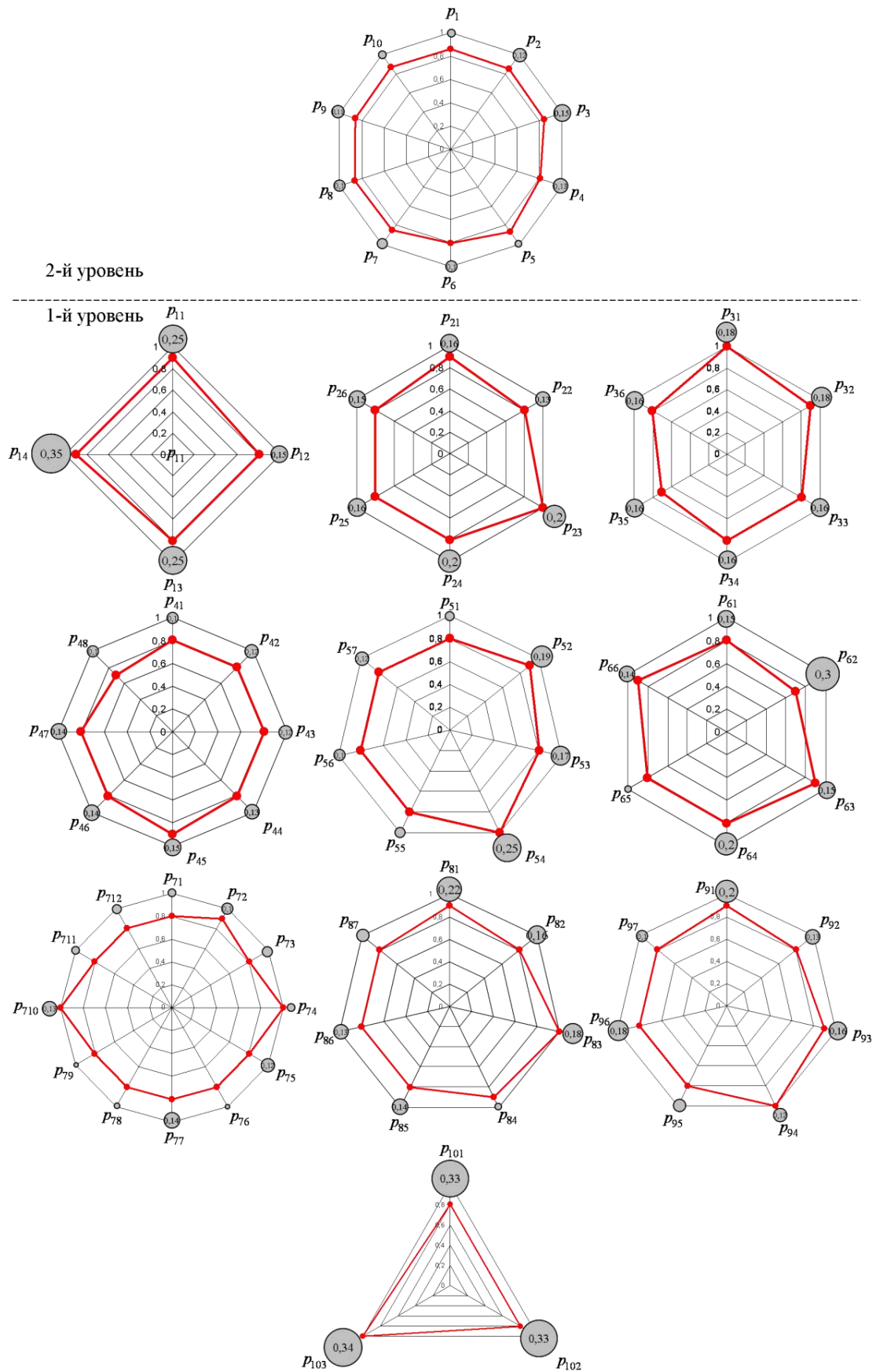


Рисунок 3.6 – Двухуровневая РМД системы бизнес-процессов организации

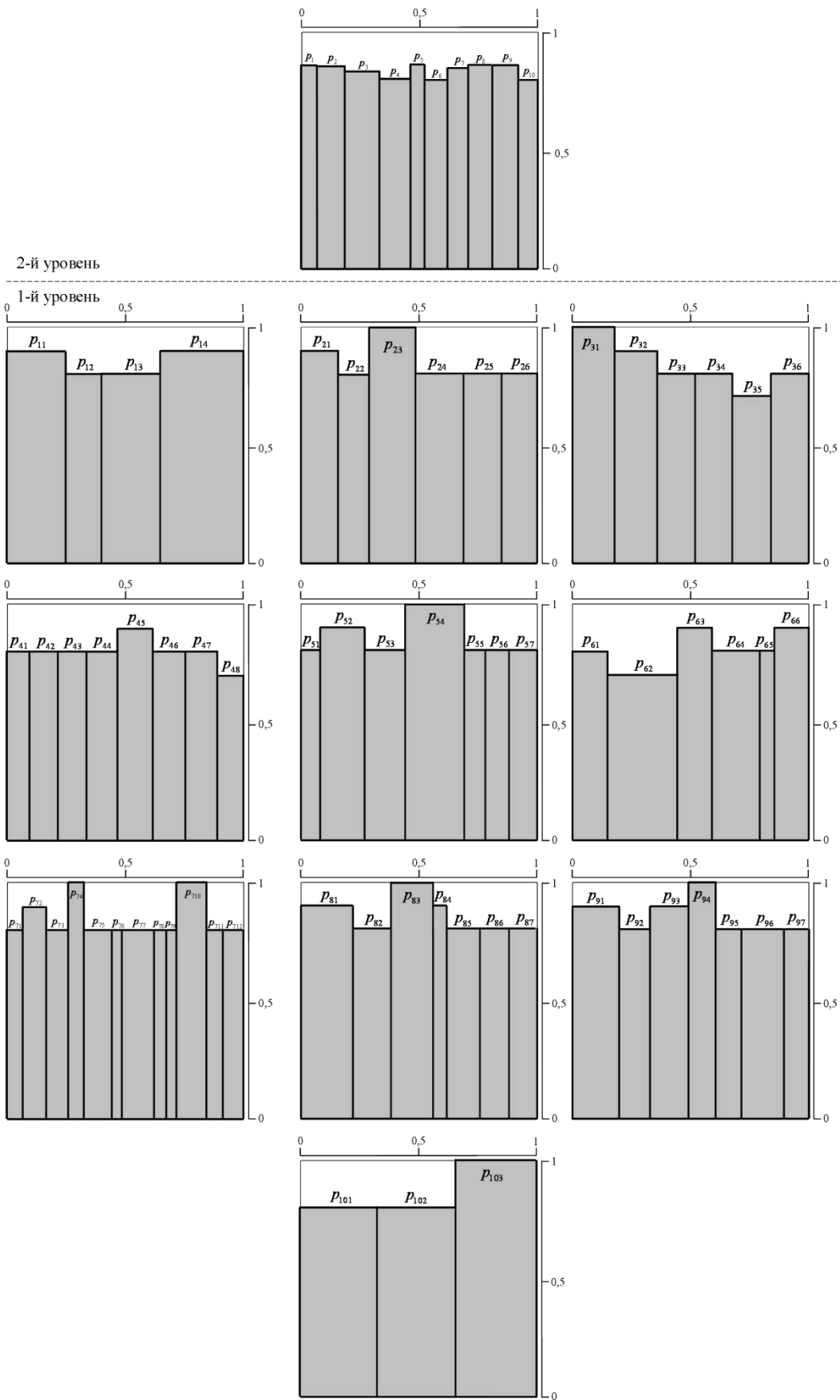


Рисунок 3.7 – Двухуровневая ЛНД системы бизнес-процессов организации

4 ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА

Задача 4.1

Исходные условия

По наблюдениям было установлено, что спрос на товар зависит от цены $p(t)$, которая изменяется во времени, то есть спрос тоже в конечном итоге зависит от времени и определяется соотношением

$$Dem(t) = 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) - p(t) + 15.$$

Предложение товара описывается формулой

$$S(t) = 3 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) - p(t) + 15,$$

где $p(t)$ – зависимость цены от времени.

Начальные условия: $p(0) = 3$; $p(1) = 5$.

В предположении, что предложение товара равно спросу на него ($Dem(t) = S(t)$), найдите зависимость цены от времени, а также эластичность спроса по цене.

Содержание расчетов

Постройте совместные графики спроса, цены и эластичности в зависимости от времени.

Рекомендации к решению задачи

1. Выразите $Dem(t)$ и $S(t)$ как функции цены.
2. Присвойте переменной W значение выражения, равного разности Dem и S , и приравняйте его нулю (так как по условию $Dem = S$).
3. Решите дифференциальное уравнение относительно цены и преобразуйте получившийся результат в функцию от времени. Проверьте, как изменится выражение для спроса после преобразований.
4. Выразите $Dem(t)$ как полновесную функцию цены. Выведите выражение для цены после преобразований.
5. Выведите выражение для спроса после преобразований.
6. Найдите эластичность спроса по цене (обратите внимание на то, что спрос и цена – функции параметра t).
7. Постройте необходимые графики, используя пакет программы MAPLE (рисунок 4.1).

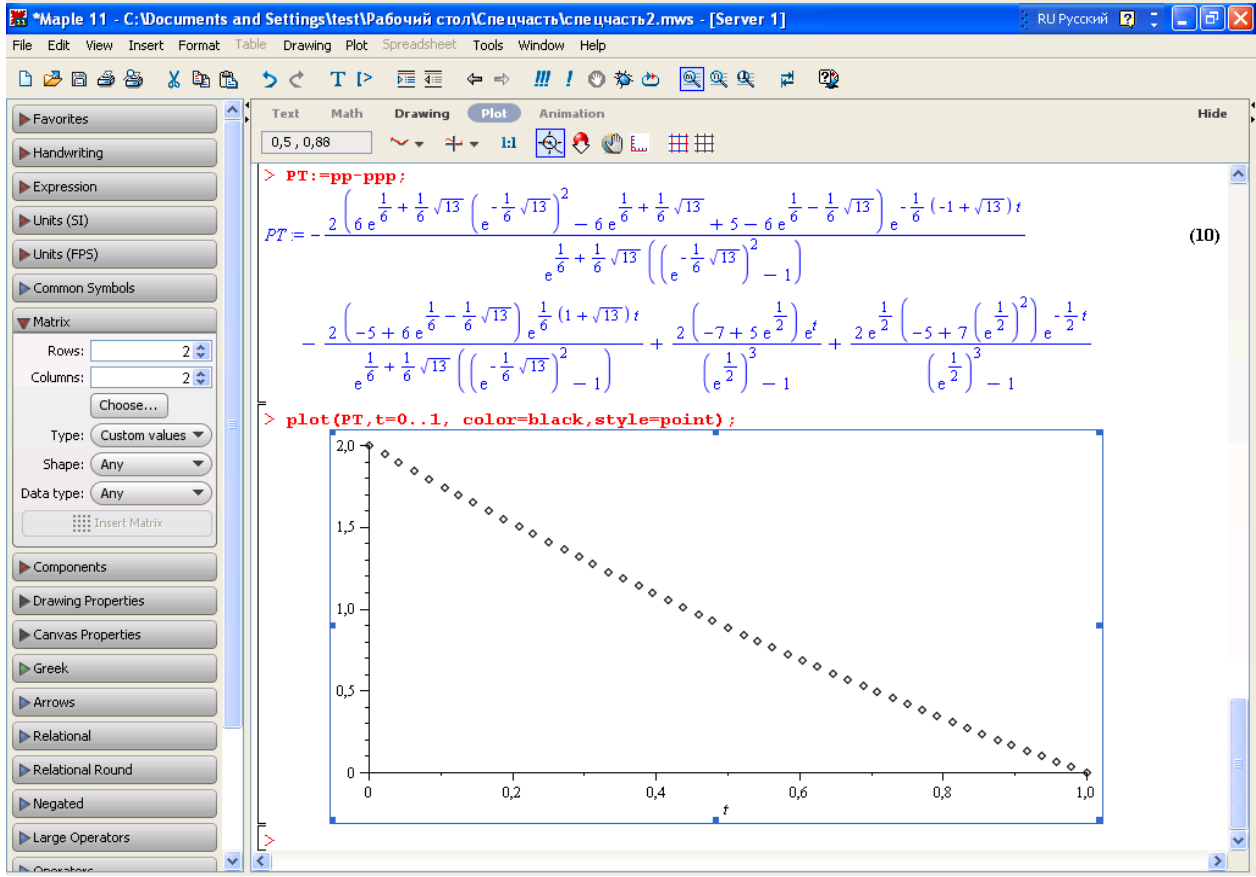
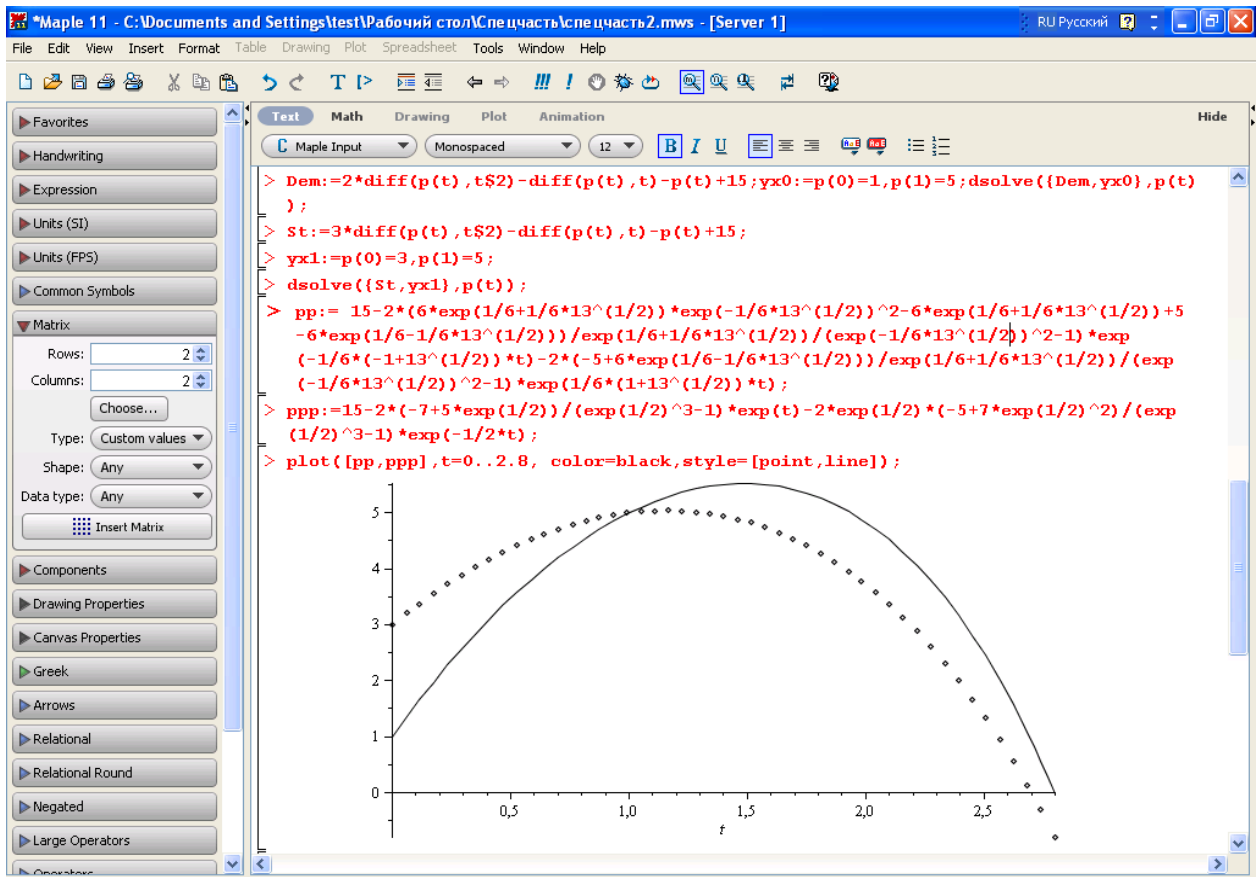


Рисунок 4.1 – Графики зависимости спроса, цены и эластичности от времени

5 ФУНКЦИИ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ, РАВНОВЕСНАЯ ЦЕНА

Исходные условия

Микроэкономика – раздел экономики, который занимается анализом отдельных элементов экономической системы. Цель одного из важнейших разделов микроэкономики – изучение спроса и предложения. *Спрос* на некоторые товары – это потребность в определенном количестве товара, ограниченная действующими ценами и платежеспособностью (прибылями) потребителей. *Предложение* – это количество товара, которое может быть предложено для продажи по данной цене.

Здравый смысл подсказывает: увеличение выпуска требует дополнительных затрат и, для того чтобы заинтересовать производителя в увеличении выпуска, нужно предложить ему повышенную цену. Отсюда вытекает, что *предложение* S нужно рассматривать как возрастающую функцию цены P . Если предложение зависит от цены, то и цена зависит от предложения. Экономисты обычно именно функцию $P = S(Q)$ называют *функцией предложения*, а её график – *кривой предложения*; здесь Q – количество товара, предложенное для продажи по цене P .

Тот же здравый смысл подсказывает: если цена на определенный товар начинает возрастать, то количество проданного товара будет уменьшаться, т.е. зависимость спроса Q от цены P – убывающая функция. Экономисты называют *функцией спроса* функцию $P = D(Q)$, а её график – *кривой спроса*, здесь Q – количество товара, приобретенное потребителями по цене P .

Хотя любое предположение о виде функциональных зависимостей $S(Q)$ и $D(Q)$ будет упрощением действительности, исследование этих функций позволяет частично «оценить» реальную ситуацию. Таким образом, анализируя модель, можно оценивать, прогнозировать изменение исследуемых величин. Чем ближе модель к реальности, тем она сложнее и тем более точными могут оказаться прогнозы и оценки.

Экономическая модель описывает процесс формирования спроса и предложения определенного товара или вида услуг на конкурентном рынке. Суть экономической модели – формализация экономического закона спроса и предложения, утверждающего, что количество товара, которое можно продать на рынке (т.е. спрос), изменяется в направлении, противоположном изменению его цены; количество товара, которое продавцы доставляют на рынок (т.е. предложение), изменяется в том же направлении, что и цена; при этом реальная рыночная цена складывается на уровне, при котором спрос и предложение равны друг другу (т.е. находятся в равновесии).

Пусть: x_t – цена товара в момент времени t ; $y_t^{(n)}$, $y_t^{(c)}$ – количество товара, соответственно предложенного и купленного (спрошенного) на рынке в тот же момент времени t .

Тогда с учетом одного такта времени, необходимого производителям (продавцам) на то, чтобы среагировать на цену x , можно предложить следующую модель:

$$y_t^{(n)} = f(x_{t-1});$$

$$y_t^{(c)} = g(x_t);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x_{t-1}) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(x_t);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \bar{x}_g,$$

где $f(x)$ – некоторая монотонно возрастающая функция;
 $g(x)$ – монотонно убывающая функция от аргумента x (т.е. от цены).

Математические отношения, отражающие закон спроса/предложения, изображены графически на рисунке 5.1.

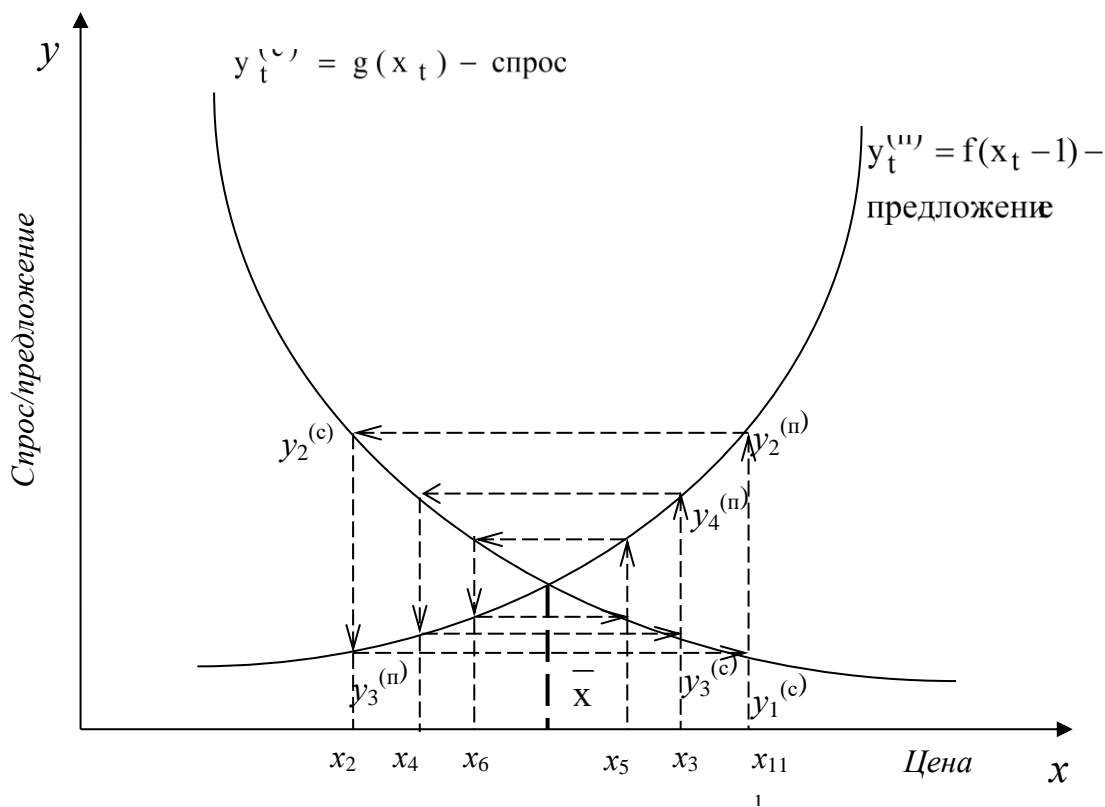


Рисунок 5.1 – График процесса формирования спроса/предложения

Реалистическая модель закона спроса/предложения гораздо сложнее, так как $y^{(n)}$ и $y^{(c)}$ зависят не только от цены x .

Наконец, для того, чтобы рассмотренная экономическая модель могла быть преобразована в эконометрическую, следует говорить не вообще о законе спроса/предложения, а о конкретном его действии в данном месте, в данное время и применительно к данному конкретному товару (или виду

услуг). Соответственно конкретизация вида функций $f(x)$ и $g(x)$ должна производиться на базе исходных статистических данных о значениях x_t , $y_t^{(n)}$, $y_t^{(c)}$ за ряд тактов времени (т.е. для $t = 1, 2, \dots, n$).

Некоторые содержательные выводы о взаимном влиянии показателей можно сделать, исследуя поведение графиков соответствующих функций. На рисунке 5.2 изображены графики функций спроса и предложения, описываемые зависимостями $P = D(Q) := -5Q + 150$, $P = S(Q) := Q^2/4 + Q/2 + 70$, построенные с помощью системы Maple.

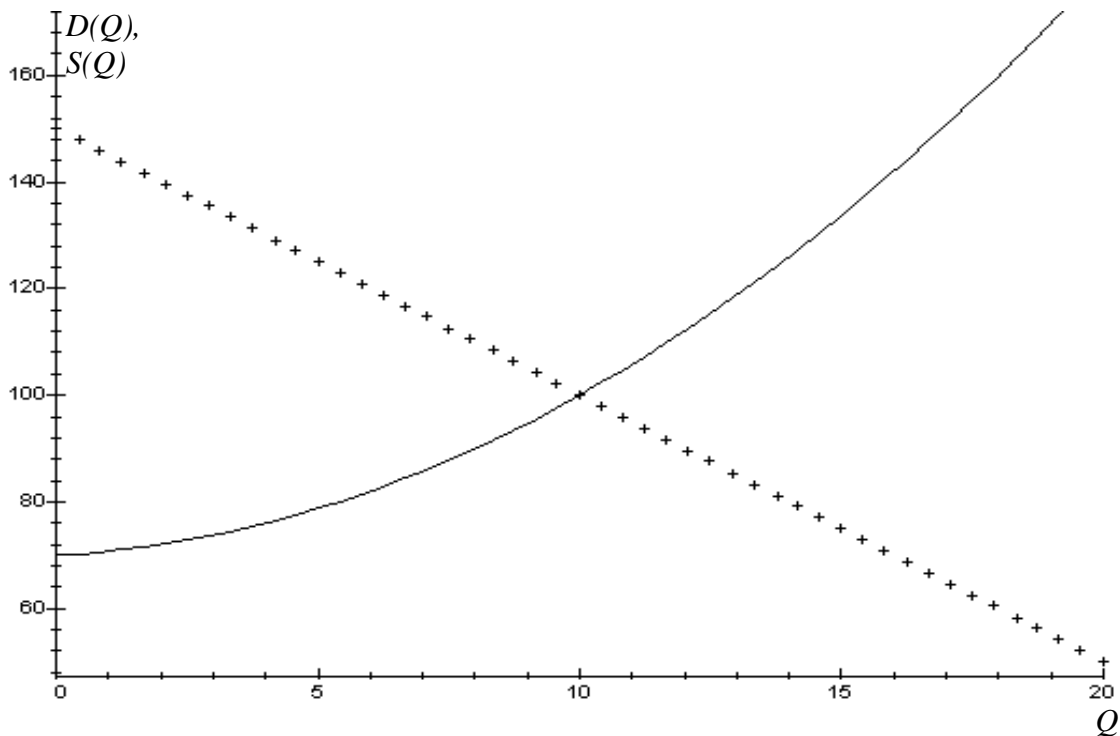


Рисунок 5.2 – Графики функций спроса и предложения

На рисунке 5.3 приведены графики функций спроса Торнквиста, построенные в Maple и описываемые следующими зависимостями:

$$D0(x) := \frac{\alpha x(x+\beta)}{x^2 + \gamma} \quad \text{– спрос на малоценные товары};$$

$$D1(x) := \frac{\alpha x}{x + \beta} \quad \text{– спрос на товары первой необходимости};$$

$$D2(x) := \frac{\alpha(x-\gamma)}{x + \beta} \quad \text{– спрос на товары второй необходимости (относительная роскошь)};$$

$$D3(x) := \frac{\alpha x(x-\gamma)}{x + \beta} \quad \text{– спрос на предметы роскоши.}$$

Здесь α , β , γ – некоторые фиксированные параметры.

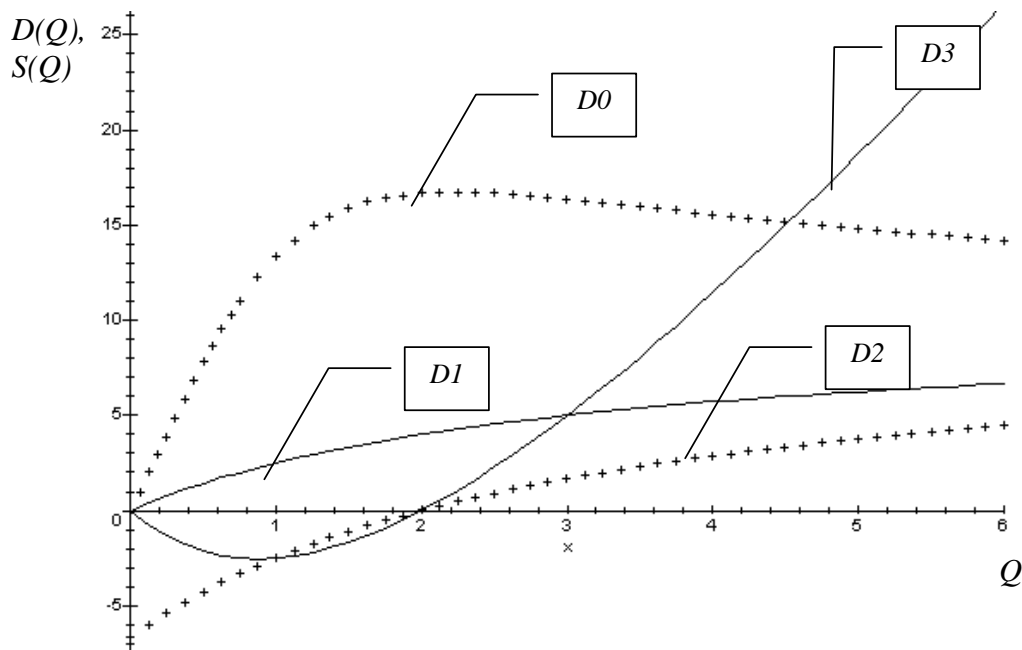


Рисунок 5.3 – Графики функций спроса Торнквиста

Из приведенных графиков видно, что при $\alpha = 10$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ спрос на малоценные товары возрастает при небольших доходах, а потом с возрастанием доходов начинает падать и стремится к значению α сверху. Спрос на товары первой необходимости возрастает с увеличением доходов и стремится к значению α снизу. Товары второй необходимости и предметы роскоши покупают только люди с прибылью, которая превышает $\gamma = 2$. При этом спрос на товары второй необходимости отстает от спроса на товары первой необходимости и ограничен сверху значением α . И только спрос на предметы роскоши с увеличением доходов постоянно возрастает.

Содержание расчетов

Постройте график заданной функции спроса. Исследуйте вид кривой при разных значениях параметров.

Рекомендации к решению задачи

1. Определите функцию спроса как функцию прибыли и параметров.
2. Постройте на одном графике кривые спроса для разных значений параметров как изображено на рисунке 5.4.

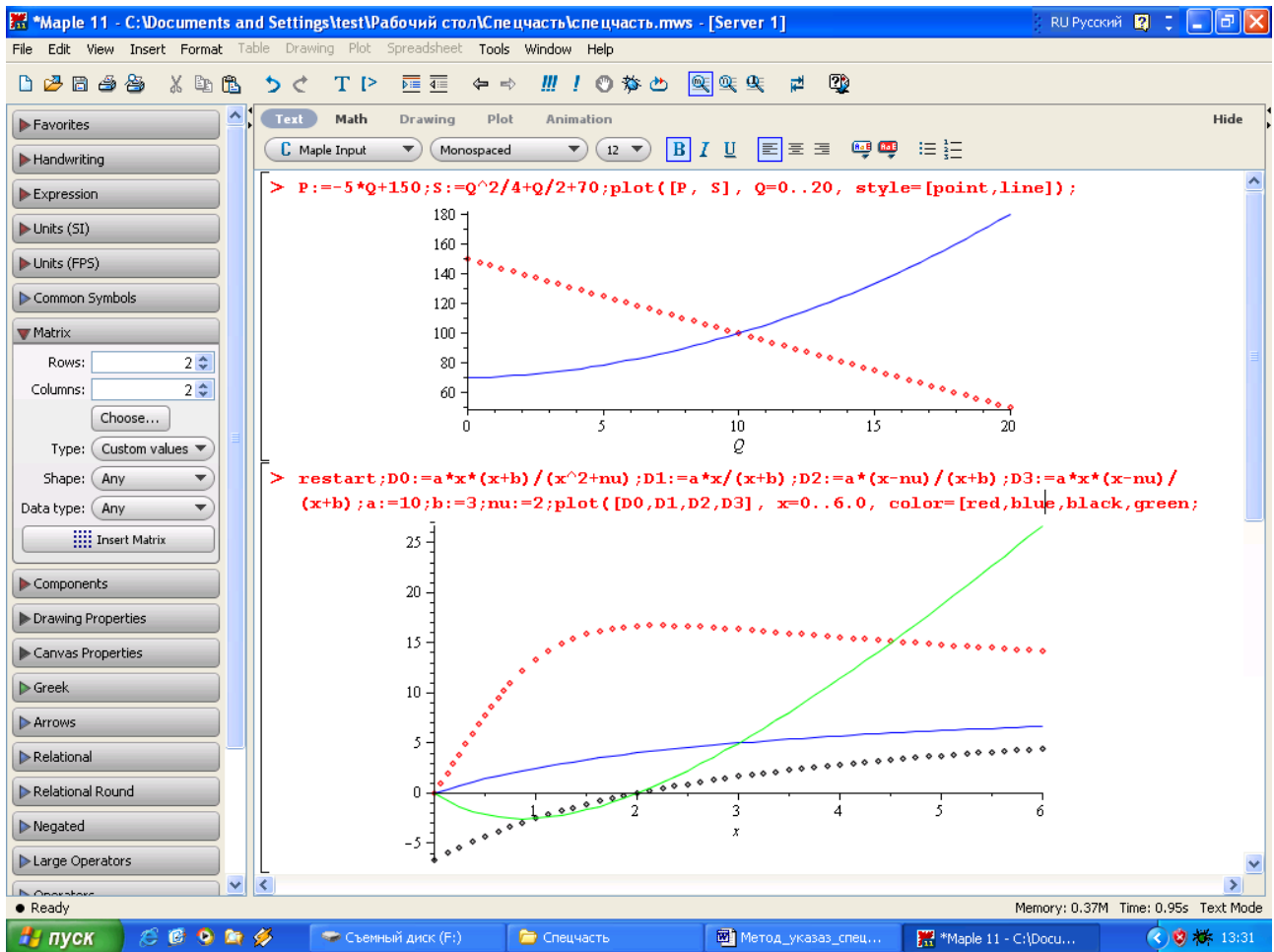


Рисунок 5.4 – Рабочие окна Maple

6 МАКСИМАЛЬНАЯ ПРИБЫЛЬ

Исходные условия

В наиболее общем виде прибыль π – разность между выручкой предприятия от реализации продукции R и полными затратами C : $\pi = R - C$.

Поскольку цена определяется не тем, сколько хочет получить производитель, а тем, сколько готов заплатить потребитель, полная выручка, полученная от реализации товара в количестве Q по цене J , вычисляется по формуле $R = Q \times P(Q)$, где $P = P(Q)$ – соответствующая функция спроса.

Полные затраты C разделяют на постоянные C_f , которые не зависят от объема производства Q , и переменные C_v – затраты на производство единицы продукции, то есть

$$C = C_f + C_v Q.$$

Задача об определении максимальной прибыли заключается в определении такого объема производства Q_{max} при котором достигается максимальная прибыль, то есть нужно при заданных значениях C_f , C_v и заданной функции спроса $P = P(Q)$ найти максимум функции:

$$\pi(Q) = QP(Q) - (C_f + C_v Q).$$

На рисунке 6.1 изображен график зависимости прибыли от реализации продукции R ; для квадратичной функции $P(Q) = 10Q - Q^2$ при $C_f = 70$, $C_v = 0,7$.

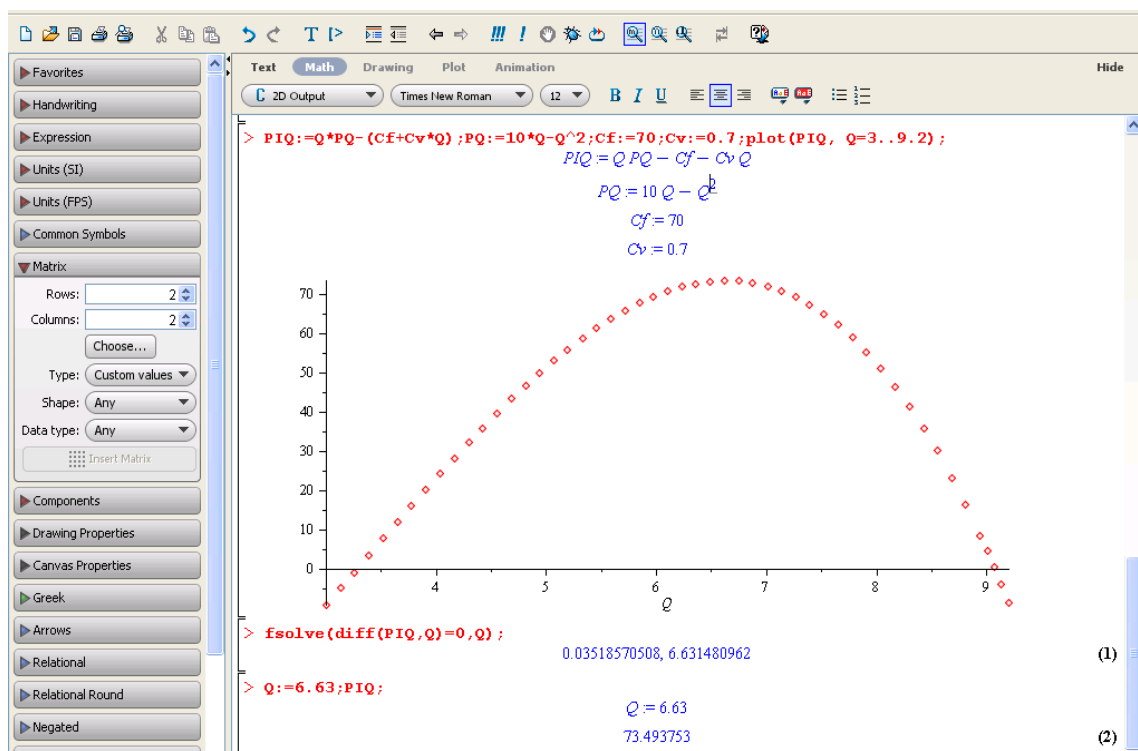


Рисунок 6.1 – График зависимости прибыли от реализации продукции R ; построенный в Maple

Чтобы найти геометрически объем выпуска продукции Q , при котором достигается максимум прибыли, необходимо щелкнуть мышью на максимуме кривой прибыли. В окне координат панели рисунка появятся значения Q и прибыли, при которых достигается максимум (в данном примере максимум прибыли равен 73,49 при $Q = 6,63$). Из рисунка 6.1 видно, что производство прибыльно только при $Q_1 < Q < Q_2$, где Q_1 и Q_2 – точки пересечения графика прибыли оси x , поскольку при таких значениях Q полная выручка превышает затраты.

Для аналитического определения границ интервала, в котором производство рентабельно (прибыль больше нуля), необходимо решить уравнение

$$Q P(Q) - (C_f + C_v Q) > 0$$

относительно Q , что можно выполнить с помощью функции **solve** или **fsolve**.

Для аналитического определения объема производства Q , при котором достигается максимальная прибыль, следует решить уравнение

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 0$$

относительно Q . В Maple это можно выполнить комбинированной командой **>fsolve(diff(QP(Q)-(C_f + C_v Q),Q) = 0,Q)**.

Содержание расчетов

Найдите графически и численно максимальную прибыль и границы прибыльного производства для заданной функции выручки предприятия и функции затрат. Выполните вычисления для функции выручки предприятия $R = AQ - Q^2$ и для функции затрат $C = C_f + C_v Q$.

Рекомендации к решению задачи

1. Определите функцию полной прибыли как функцию объема проданного товара Q .
2. Постройте на графике кривую полной прибыли.
3. Найдите графически максимальную прибыль и границы прибыльного производства.
4. Найдите аналитически границу прибыльного производства.
5. Найдите производную функции прибыли и точку максимальной прибыли.
6. Вычислите максимальную прибыль.

7 ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ИНТЕГРИРОВАННОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ MAPLE V

Нахождение экстремумов функций симплекс-методом

```
> readlib(extrema):  
_EnvExplicit := true:
```

Нахождение экстремумов функции f при дополнительных ограничениях $g1$ и $g2$:

```
> f := (x^2+y^2)^(1/2)-z; g1 := x^2+y^2-16=0; g2 := x+y+z  
= 10;
```

$$\begin{aligned}f &:= \sqrt{x^2+y^2} - z, \\g1 &:= x^2 + y^2 - 16 = 0, \\g2 &:= x + y + z = 10.\end{aligned}$$

В команде **extrema** четвертым аргументом является имя, которому следует присвоить значение переменных в точках экстремума:

```
> extrema(f,{g1,g2},{x,y,z},'s');  
                   $\{-6+4\sqrt{2}, -6-4\sqrt{2}\}$   
> s;  
           $\{(y=2\sqrt{2}, x=2\sqrt{2}, z=-4\sqrt{2}+10), (y=-2\sqrt{2}, x=-2\sqrt{2}, z=4\sqrt{2}+10)\}$ 
```

Для применения симплекс-метода необходимо загрузить пакет **simplex**:

```
> restart;with(simplex):  
          Warning, new definition for maximize
```

Максимизация функции **obj** при дополнительных ограничениях **cnsts**:

```
> cnsts := {3*x+4*y-3*z <= 23, 5*x-4*y-3*z <= 10,  
7*x+4*y+11*z <= 30}:  
obj := -x + y + 2*z:  
maximize(obj,cnsts union {x>=0,y>=0,z>=0});
```

$$\left\{z = \frac{1}{2}, y = \frac{49}{8}, x = 0\right\}.$$

Задача 7.1

В четырех пунктах A_1, A_2, A_3, A_4 сосредоточены запасы определенного вида грузов в количествах a_1, a_2, a_3, a_4 единиц. Три пункта назначения B_1, B_2, B_3 заказали соответственно b_1, b_2, b_3 единиц груза. Общая сумма заявок на доставку равна сумме имеющихся запасов:

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4. \quad (7.1)$$

Кроме того, известна стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления A_i к каждому пункту назначения B_j , где i – номер пункта отправления, а j – номер пункта назначения. Стоимость перевозки из i -го пункта в j -й обозначим c_{ij} .

Необходимо составить план перевозок, т.е. определить, какое количество груза из каждого пункта отправить и куда именно, чтобы суммарные расходы по перевозкам были минимальными.

Решение задачи

Составим математическую модель этой задачи. Обозначим элементы решения: x_{ij} – количество единиц груза, отправленного из A_i -го пункта в B_j -й. Всего получим 12 переменных – элементов решения:

$$\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}$$

При этом суммарная стоимость перевозок

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + a_{11}x_{11} + c_{43}x_{43}.$$

Ограничения, налагаемые на элементы решения, будут двух видов:

- все заявки должны быть выполнены,
- все имеющиеся грузы должны быть вывезены, т.е.

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = a_3, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = a_4. \end{array} \quad (7.2)$$

Необходимо выбрать такие неотрицательные значения переменных $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$, чтобы выполнялись ограничения (7.1) и (7.2), а линейная функция этих переменных L обращалась в минимум.

Независимо от смыслового содержания все задачи математического программирования с формальной точки зрения сводятся к одной и той же проблеме: найти значения переменных x_1, x_2, \dots , которые не превосходят заданные ограничения и при которых целевая функция достигает экстремального (максимального или минимального) значения. В задачах линейного программирования целевая функция имеет вид линейной формы, максимум которой достигается при $x = \infty$, а минимум – при $x = -\infty$. Очевидно, что такой экстремум никогда не может быть достигнут, так как окажутся ограниченными либо переменные состояния (например, из условий безопасности), либо переменные управления, поскольку ресурсы никогда не бывают бесконечно большими.

Таким образом, линейная целевая функция при отсутствии ограничений не имеет конечного оптимума, и ограничения в таких задачах играют принципиальную роль. В реальных задачах, связанных с определением наиболее рациональных способов организации производства, использованием сырья и материалов, распределением функций между различными блоками и модулями аппаратуры и т.д., целевая функция имеет вид линейной зависимости от многих переменных:

$$L = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad (7.3)$$

а ограничения задаются системой m линейно независимых уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Нахождение экстремумов функции f при дополнительных ограничениях **g1** и **g2**:

```
> readlib(extrema):_Explicid:= true:
> f:=(x^2+y^2)^(1/2)-z; g1:=x^2+y^2-16=0; g2:=x+y+z=10;
    f:=sqrt(x^2+y^2)-z,
    g1:=x^2+y^2-16=0,
    g2:=x+y+z=10.
```

В команде **extrema** четвертым аргументом является имя, которому необходимо присвоить значение переменных в точках экстремума:

```
> extrema(f, {g1,g2}, {x,y,z}, 's';
    {-6+4*sqrt(2), -6-4*sqrt(2)}
> s;
    {{z=-4*sqrt(2)+10,y=2*sqrt(2),x=2*sqrt(2)}, {z=4*sqrt(2)+10,y=-2*sqrt(2),x=-2*sqrt(2)}}
```

Задача 7.2

Для изготовления двух видов продукции Π_1 и Π_2 используют три вида сырья: c_1 , c_2 и c_3 . Запасы сырья на складе и количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Затраты ресурсов на изготовление продукции

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья на изготовление единицы продукции	
		Π_1	Π_2
c_1	20	2	5
c_2	40	8	5
c_3	30	5	6

Прибыль от реализации единицы продукции Π_1 составляет 50 денежных единиц (ден. ед.), а продукции Π_2 – 40 ден. ед.

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Решение задачи

Обозначим через x_1 количество единиц продукции Π_1 , а через x_2 – количество единиц продукции Π_2 . Тогда с учетом количества единиц сырья, расходуемого на изготовление единицы продукции, а также запасов сырья получим систему ограничений

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &< 20, \\ 8x_1 + 5x_2 &< 40, \\ 5x_1 + 6x_2 &< 30, \end{aligned} \quad (7.5)$$

которая показывает, что количество сырья, расходуемого на изготовление продукции, не может превышать имеющиеся запасы.

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2 . Реализация x_1 единиц продукции Π_1 дает $50x_1$ ден. ед. прибыли, а реализация x_2 единиц продукции Π_2 – $40x_2$ ден. ед. прибыли. Суммарная прибыль

$$L = 50x_1 + 40x_2 \text{ (ден. ед.)}. \quad (7.6)$$

Необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2 , при которых функция L достигнет максимума. Условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому x_1 и x_2 могут быть и дробными числами.

Для применения симплекс-метода необходимо загрузить пакет `simplex`:

```
> restart;with(simplex):
```

```
Warning, new definition for maximize
```

Максимизация функции `obj` при дополнительных ограничениях `cnsts`:

```
> cnsts:={2*x1+5*x2<=20,8*x1+5*x2<=40,5*x1+6*x2<=30}:
```

```
> obj:=50*x1+40*x2:
```

```
> maximize(obj,cnsts union {x1>=0,x2>=0});
```

```
{x2 = 40/23, x1 = 90/23}.
```

Графическая интерпретация решения (рисунок 7.1):

```
> plots[inequal]({2*x1+5*x2<20,8*x1+5*x2<40,5*x1+6*x2<30},  
x1=0..5,x2=0..5,optionsfeasible=(color=grey),optionsopen=(color=black,thickness=2),optionsclosed=(color=green,thickness=3),optionsexcluded=(color=white));
```

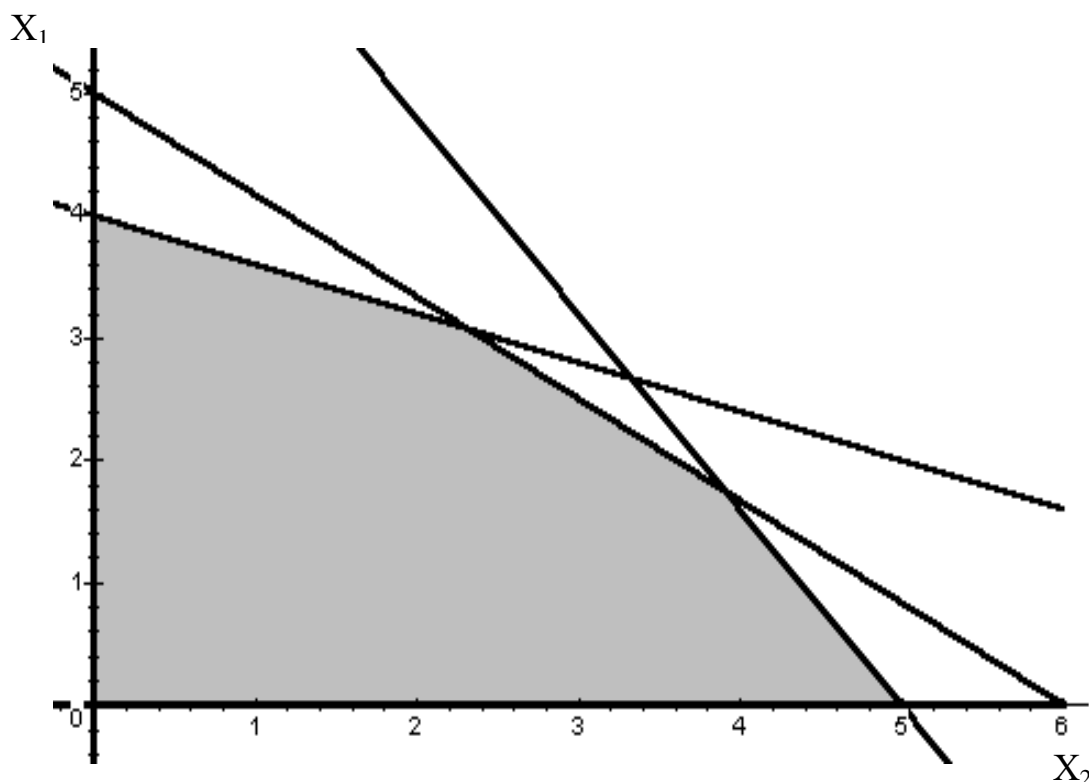


Рисунок 7.1 – Графическая интерпретация решения

Задача 7.3

Сельскохозяйственное предприятие на промышленной основе занимается откормом бычков (или свиней, уток и т.д.).

Для простоты допустим, что имеется два вида продуктов Π_1 и Π_2 . При откорме каждое животное должно ежедневно получать такие питательные вещества: C_1 – не менее 9 ед.; C_2 – не менее 8 ед.; C_3 – не менее 12 ед. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида продуктов приведено в таблице 7.2.

Таблица 7.2 – Содержание единиц питательных веществ в 1 кг корма

Питательные вещества	Корм Π_1	Корм Π_2
C_1	3	1
C_2	1	2
C_3	1	6

Необходимо составить такой пищевой рацион, т.е. определить такое количество входящих в него исходных продуктов Π_1 и Π_2 , чтобы заданные условия по содержанию в смеси основных питательных веществ были выполнены, но при этом стоимость рациона была минимальной.

Решение задачи

Для составления математической модели обозначим через x_1 и x_2 количество килограммов корма Π_1 и Π_2 в дневном рационе. С учетом удовлетворения требуемой питательности получим систему ограничений

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &> 9, \\ x_1 + 2x_2 &> 8, \\ x_1 + 6x_2 &> 12. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Если корм Π_1 стоит 4 ден. ед., а корм Π_2 – 6 ден. ед., то общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции

$$L = 4x_1 + 6x_2. \quad (7.8)$$

Поставленную задачу сведем к следующему: выберем такие неотрицательные значения переменных x_1 и x_2 , удовлетворяющие линейным неравенствам (7.7), при которых линейная функция этих переменных (7.8) обратится в минимум.

Задача 7.4

Многие торгующие организации создают запасы продаваемых товаров для удовлетворения будущего спроса. Причины, по которым необходимо управлять величиной этих запасов, следующие:

– сама процедура пополнения запасов требует расходования временных и финансовых ресурсов, поэтому не должна производиться слишком часто;

– снижение частоты пополнения запасов ведет к образованию чрезмерно больших запасов, следовательно, увеличивается стоимость их хранения.

Нахождение оптимального объема запасов – классическая задача оптимизации, для решения которой удобно использовать математический пакет Maple V.

Исходные данные:

v – объем запасов, необходимый для удовлетворения спроса в течение года, шт./год;

K – стоимость процедуры однократного пополнения запасов, независимо от его размера, ден. ед.;

h – стоимость хранения единицы товара в течение года, ден. ед.;

c – стоимость единицы товара, ден. ед.;

T – интервал времени между заказами (часть года), определяемый как время, в течение которого истощается запас Q (т.е. $T = Q/v$), год.

Найти оптимальный размер заказа (или поставки) Q , шт., которому соответствует минимальная сумма полных годовых затрат.

Необходимые допущения:

– спрос удовлетворяется немедленно;

– пополнение осуществляется сразу же, как только запасы иссякают.

Решение задачи

Исходя из условия задачи, аналитическое выражение для функции полных годовых затрат имеет вид

$$K + cQ + \frac{1}{2} hTQ = K + cQ + \frac{1/2hQ^2}{v}.$$

Примечание: затраты на хранение запасов в течение цикла равны затратам на хранение $Q/2$ единиц товара в течение времени T .

Тогда функция полных затрат

> $f(Q)$: $f(Q) = f1$.

Следовательно,

$$f1 := \frac{vK}{Q} + vc + \frac{1}{2}hQ.$$

$$f'(Q) = f2,$$

$$f2 = \frac{vK}{Q^2} + \frac{1}{2}h,$$

$$f''(Q) = f3,$$

$$f3 = 2 \frac{vK}{Q^3}.$$

Отсюда следует, что $f(Q)$ – выпуклая функция, и если существует положительное значение Q^* , такое, что $f'(Q^*) = 0$, то Q^* минимизирует $f(Q)$.
 Решив уравнение $f'(Q) = 0$, получим его корни ($f4 = Q^*$):

$$f4 := \frac{\sqrt{2}\sqrt{hvK}}{h}.$$

При этом T^* – временной интервал между заказами,

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{hv}}.$$

Для наглядности решения построим график зависимости полных годовых затрат от стоимости процедуры пополнения запасов и размера заказа (рисунок 7.2). Для остальных переменных заданы реальные значения: $v = 2000$, $c = 30$, $h = 3,6$.

Чтобы окончательно решить задачу, зададимся стоимостью оформления поставки $K=225$ и найдем наиболее экономичный размер заказа сначала графически, используя график зависимости полных затрат от стоимости процедуры пополнения запасов и размера поставки, а потом – в численном виде.

Найдем размер заказа Q^* , который при заданных условиях минимизирует затраты:

> $f5 := \text{solve}(f2, Q);$

$f5 := 500., -500.$

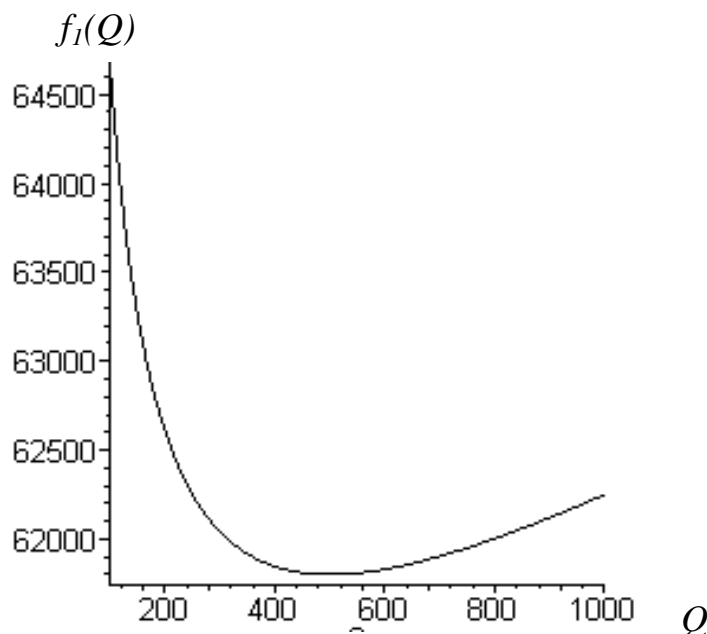


Рисунок 7.2 – График зависимости полных годовых затрат от размера поставки

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Вартанян, В. М. Моделювання й аналіз економічних процесів з використанням інтегрованих пакетів Excel і Maple [Текст] : навч. посіб. / В. М. Вартанян, О. О. Воляк, А. В. Артьомова. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2013. – 207 с.
2. Вартанян, В. М. Экономико-математическое моделирование [Текст] : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / В. М. Вартанян, Е. А. Воляк, В. Л. Петрик. – Харьков: Нац. аерокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т», 2014. – 141 с.
3. Вітлінський, В. В. Математичні моделі та методи ринкової економіки [Текст] / В. В. Вітлінський, О. В. Піскунова. – Київ: КНЕУ, 2010. – 531 с.
4. Економіко-математичне моделювання [Текст] : навч. посіб. до самост. вивчення дисципліни / В. М. Вартанян, О. О. Воляк. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2011. – 128 с.
5. Касьяненко, В. О. Моделювання та прогнозування економічних процесів [Текст] : навч. посіб. / В. О. Касьяненко, Л. В. Старченко. – Суми: ВТД "Університетська книга", 2006. – 185 с.
6. Козак, Н. Л. Організація наукової діяльності в університеті: навч. посіб. для студ. вищих навч. закладів / Н. Л. Козак, І. М. Шоробура // Університетська освіта. – Львів, 2011. – С. 56 – 59.
7. Кулявець, В. О. Прогнозування соціально-економічних процесів [Текст] : навч. посіб. / В. О. Кулявець. – Київ: Кондор, 2009. – 194 с.
8. Математичні методи і моделі ринкової економіки [Текст] : навч. посіб. / Т. С. Клебанова, М. О. Кизим, О. І. Черняк та ін. – Харків: ВД «ІНЖЕК», 2010. – 456 с.
9. Математичні методи моделювання [Текст] : підручник / за ред. О. Л. Становського. – Одеса: ПАЛЬМИРА, 2011. – 500 с.
10. Мокий, В. С. Методология научных исследований: учеб. для магистратуры / М. С. Мокий, А. Л. Никифоров, В. С. Мокий; под ред. М. С. Мокия. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 255 с.
11. Основи методології та організації наукових досліджень: навч. посіб. для студентів, курсантів, аспірантів і ад'юнтів / за ред. А. Є. Конверського. – Київ: Центр учбової літ., 2010. – 352 с.
12. Тихонов, В. А. Научные исследования: концептуальные, теоретические и практические аспекты: учеб. пособие для вузов / В. А. Тихонов, В. А. Ворона.– 2-е изд., стереотип. – М.: Горячая линия-Телеком, 2017. – 296 с.
13. Товканець, Р. В. Науково-дослідна діяльність студентів: навч.-метод. посіб. / Р. В. Товканець.– Київ: Кондор, 2011. – С. 51 – 60.
14. Томашевський, В. М. Моделювання систем [Текст] / В. М. Томашевський. – Київ: Вид. група BHV, 2005. – 352 с.

ЗМІСТ

Передмова.....	3
1 Формування портфельної стратегії підприємства.....	4
2 Прогнозування економічних показників діяльності підприємства за часовими рядами.....	11
3 Засоби інфографічного аналізу агрегованих показників об'єктів і систем	23
4 Динамічна модель ринку.....	34
5 Функції попиту і пропозиції, рівноважна ціна	36
6 Максимальний прибуток	41
7 Оптимізаційні задачі в інтегрованому математичному пакеті MAPLE V	43
1 Формирование портфельной стратегии предприятия	51
2 Прогнозирование экономических показателей деятельности предприятия по временным рядам	59
3 Средства инфографического анализа агрегированных показателей объектов и систем	71
4 Динамическая модель рынка	83
5 Функции спроса и предложения, равновесная цена	85
6 Максимальная прибыль.....	90
7 Оптимизационные задачи в интегрированном математическом пакете MAPLE V	92
Бібліографічний список.....	100

Навчальне видання

**Вартанян Василь Михайлович
Гатило Валентина Петрівна
Кононенко Антоніна Вікторівна**

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ
ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ЯВИЩ**

Редактор А. М. Ємленінова

Зв. план, 2020

Підписано до видання 14.05.2020

Ум. друк. арк. 5,7. Обл.-вид. арк. 6,38. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001