

С. М. Фірсов, С. Б. Кочук, Ю. В. Білоконська

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

С. М. Фірсов, С. Б. Кочук, Ю. В. Білоконська

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник для самостійної роботи

Харків «ХАІ» 2019

УДК 681.5.01
Ф62

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. О. Я. Ніконов,
канд. техн. наук А. В. Чумаченко

Фірсов, С. М.

Ф62 Спеціальні розділи теорії автоматичного керування [Електронний ресурс] : навч. посіб. для самост. роботи / С. М. Фірсов, С. Б. Кочук, Ю. В. Білоконська. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2019. – 134 с.

Розглянуто основні принципи й характеристики спеціальних систем автоматичного керування, таких як оптимальні, адаптивні й нечіткі. Наведено методи синтезу алгоритмів керування складними динамічними об'єктами.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» (освітня програма «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси та виробництва»).

Іл. 51. Табл.1. Бібліогр.: 17 назв

УДК 681.5.01

© Фірсов С. М., Кочук С. Б.,
Білоконська Ю. В., 2019
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2019

1. ОПТИМАЛЬНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Одним із видів автоматичного керування є *оптимальне керування*, яке застосовують у технічних системах для підвищення ефективності виробничих процесів і в системах організаційного керування для вдосконалення діяльності підприємств та організацій. Ідея оптимізації останніми десятиріччями була центральною, яка визначала розвиток теорії керування [1].

Слово «оптимальний» походить від латинського *optimus*, що означає «найкращий», «досконалий». *Оптимізація* – це отримання найкращого можливого рішення.

Сучасну постановку задачі оптимального керування (з точністю до термінології) виконав російський учений Д. Є. Охоцимський у роботі «К теории движения ракет» (1946 р.). Теорію *оптимальної швидкодії* вперше виклав О. А. Фельдбаум, який у 1953–1956 роках запровадив поняття оптимальних за швидкодією процесів. Видатна роль у розвитку теорії оптимального керування належить академіку Л. С. Понтрягіну, який 1956 року сформулював *принцип максимуму*, що являє собою єдиний математичний апарат теорії оптимальних за швидкодією процесів для систем з декількома керувальними органами у разі обмежених за модулем координат керування. Роботи Понтрягіна та його школа привели до канонізації методів і мови в теорії оптимального керування.

Розвиток теорії оптимального керування пов'язаний як з підвищенням вимог до швидкодії й точності систем регулювання, так і з переходом до ринкової економіки. Збільшення швидкодії є можливим лише при правильному розподілі обмежених ресурсів керування, і тому врахування обмежень на керування стало одним із центральних у теорії оптимального керування. З іншого боку, будівництво систем регулювання високої точності привело до необхідності врахування під час синтезу регуляторів

взаємовпливу окремих частин (каналів) системи. Синтез таких складних багатовимірних (багатозв'язних) систем також є предметом теорії оптимального керування. Сьогодні побудовано математичну теорію оптимального керування. На її основі розроблено способи будівництва оптимальних за швидкістю систем і процедури аналітичного конструювання оптимальних регуляторів [2]. Аналітичне конструювання регуляторів разом з теорією оптимальних спостерігачів (оптимальних фільтрів) утворюють сукупність методів, які широко використовуються під час проектування сучасних складних систем регулювання. Складність завдань теорії оптимального керування потребує більш широкої математичної бази для її будівництва. У цій теорії використовуються варіаційне обчислення, теорія диференціальних рівнянь, теорія матриць.

Розвиток оптимального керування на цій базі привело до перегляду багатьох розділів теорії автоматичного керування, і тому теорію оптимального керування іноді називають сучасною теорією керування. Хоча це й перебільшення значення лише одного з розділів, проте розвиток теорії автоматичного керування визначається останні десятиліття багато в чому розвитком цього розділу.

У розвиток теорії оптимального керування зробили свій великий внесок російські вчені Л. С. Понтрягін, М. М. Красовський, А. А. Красовський, А. М. Летов, В. Г. Болтянський, В. Ф. Кротов, В. І. Гурман, М. М. Моїсєєв, А. А. Фельдбаум, В. І. Зубов, А. Я. Дубовицький, А. А. Мілютін, А. Д. Іоффе, В. М. Тихомиров, Ю. Г. Євтушенко і зарубіжні – Р. Є. Калман, М. Атанс, П. Л. Фолб, Е. Б. Чи, Л. М. Маркус і Р. Беллман.

У широкому тлумаченні «оптимальний» означає найкращий, вважаючи на деякий критерій ефективності. При такому тлумаченні будь-яка науково обґрунтована техніко-економічна система є оптимальною, тому що при виборі будь-якої системи мається на увазі, що вона в будь-якому разі є кращою за інші. Критерії, з допомогою яких здійснюється вибір (критерії

оптимальності), є різними. Цими критеріями можуть бути якість динаміки процесів керування, надійність системи, енергоспоживання, її вага й габарити, вартість тощо або сукупність цих критеріїв з деякими ваговими коефіцієнтами.

У подальшому термін «оптимальний» використовується у вузькому значенні, коли система автоматичного керування (САК) оцінюється лише якістю динамічних процесів і при цьому критерієм (мірою) цієї якості є інтегральний показник якості. Такий опис критеріїв якості дає змогу використовувати для знаходження оптимального керування добре розроблений в математиці апарат варіаційного обчислення [3].

Далі розглядаються два класи систем: системи програмного керування, у керувальному впливі яких не використовується інформація про поточний стан об'єкта, і системи автоматичного регулювання (системи стабілізації програмного руху), що працюють за принципом зворотного зв'язку. Викладення починається з розгляду варіаційних задач, що виникають під час будівництва оптимальних систем програмного й стабілізуючого керування. Потім викладається математична теорія оптимального керування (принцип максимуму Л. С. Понтрягіна і метод динамічного програмування Р. Беллмана). Ця теорія є фундаментом для будівництва оптимальних систем і має великий обсяг інформації про структуру оптимального керування. Разом з тим практичне застосування теорії стикається з труднощами обчислювального характеру. Справа в тому, що математична теорія оптимального керування дає змогу звести процес будівництва оптимального керування до розв'язання крайової задачі для диференціальних рівнянь (звичайних або в частиних похідних). Труднощі числового розв'язання крайових задач приводять до того, що будівництва оптимальних керувань для кожного класу об'єктів керування є самостійним творчим завданням, вирішення якого потребує врахування специфічних особливостей об'єкта, досвіду та інтуїції розробника.

1.1 Значення методів теорії оптимальних процесів

У загальному процесі проектування технічних систем можна виокремити проблеми таких типів:

1. Проектування системи керування, спрямованого на досягнення поставленого завдання (формування траєкторій, режимів, вибір методів керування, що реалізують траєкторії, і т. д.). Це коло завдань можна назвати проектуванням рухів.

2. Проектування конструктивних схем і схем міцності (вибір геометричних, аеродинамічних, конструктивних та інших параметрів), що забезпечують виконання загальних характеристик і конкретних режимів роботи. Це коло завдань проектування пов'язане з вибором ресурсів, необхідних для реалізації поставлених завдань.

Проектування рухів (змінення технологічних параметрів) тісно пов'язане з проблемами другого типу, оскільки інформація, що отримується під час проектування рухів, є вихідною (багато в чому визначальною) для вирішення цих проблем. Однак і в тих випадках, коли є вже готова технічна система (тобто наявні ресурси визначено), під час його модифікації може бути здійснено оптимізувальні прийоми.

Проблеми першого типу вирішуються сьогодні найбільш ефективно і тільки на основі загальних методів математичної теорії оптимальних процесів керування. Значення математичної теорії оптимальних процесів керування полягає в тому, що з її допомогою створено єдину методологію вирішення широкого кола завдань оптимального проектування й керування, можна усунути суттєві недоліки попередніх окремих методів, отримати нові результати і методи в суміжних областях.

Теорія оптимальних процесів дає змогу вирішувати широке коло практичних завдань у досить загальній постановці з урахуванням більшості обмежень технічного характеру, що накладаються на

технологічні процеси. Значення методів теорії оптимальних процесів особливо зросло останніми роками у зв'язку з широким упровадженням ЕОМ у процес проектування [4].

1.1.1 Загальна задача оптимального керування

Задача керування може формулюватися в змістовних (неформальних) термінах, які часто мають розпливчастий характер. Для застосування математичних методів необхідне чітке формулювання завдань, яке б усувало можливі невизначеності й двозначності й одночасно робило б задачу математично коректною. З цією метою для спільної справи необхідним є адекватне їй математичне формулювання – математична модель задачі оптимізації.

Математична модель (ММ) – досить повний математичний опис динамічної системи й процесу керування в межах вибраного ступеня наближення й деталізації.

ММ подає вихідну задачу у вигляді математичної схеми, у підсумку – деякої системи чисел. У ній, з одного боку, явно вказуються усі відомості, без яких неможливо почати аналітичне або числове дослідження задачі, а з іншого – ті додаткові відомості, які впливають із суті завдання і відображають певну вимогу до її характеристик.

Повна ММ загальної задачі оптимізації керування складається з кількох окремих ММ [5]:

- процесу керованого руху;
- наявних ресурсів і технічних обмежень;
- показника якості процесу керування;
- керувальних впливів.

Таким чином, математична модель загальної задачі керування характеризується сукупністю певних математичних співвідношень між її

елементами (диференціальних рівнянь, обмежень типу рівностей і нерівностей, функцій якості, початкових і граничних умов і т. д.). У теорії оптимальних процесів (ОП) установлюються загальні умови, яким мають задовольняти елементи ММ, щоб відповідна математична задача оптимізації була би чітко визначеною і мала би сенс (не містила умов, що призводять до відсутності розв'язку).

Зазначимо, що формулювання задачі і синтезування її ММ під час дослідження не залишаються незмінними, а взаємодіють одна з одною (рисунок 1.1).

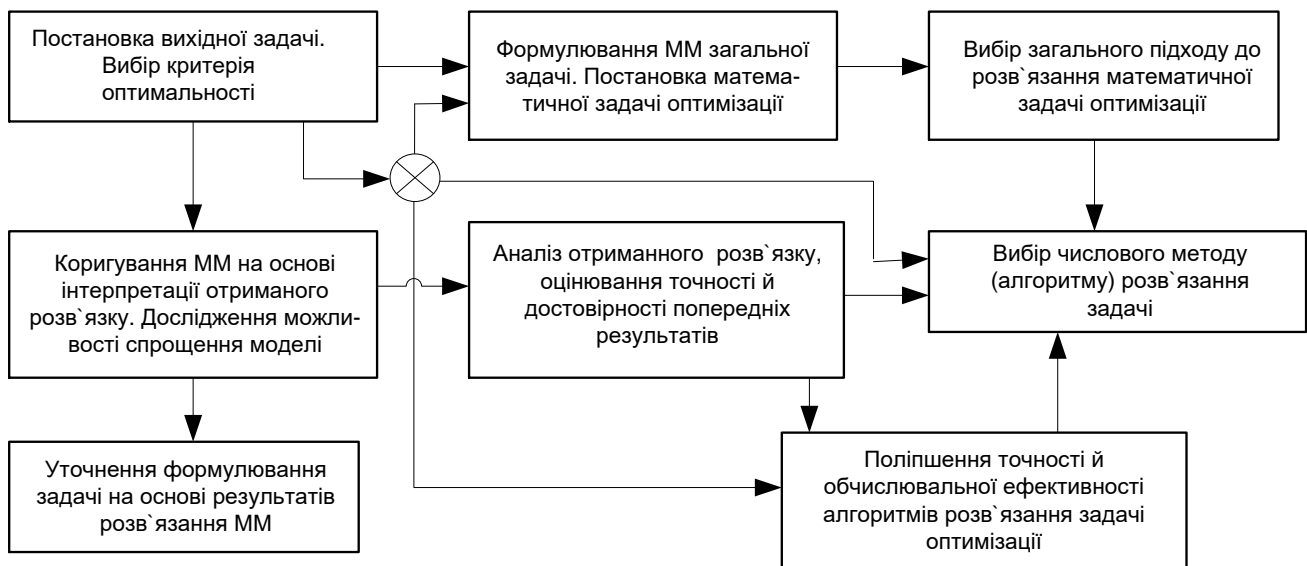


Рисунок. 1.1 – Алгоритм розв'язання задачі оптимізації

Зазвичай початкове формулювання задачі і її ММ значно змінюються наприкінці дослідження. Таким чином, будовання адекватної ММ нагадує ітераційний процес, під час якого уточнюється як постановка самої загальної задачі, так і формулювання ММ. Важливо підкреслити, що для однієї і тієї ж задачі ММ може бути неєдиною (різні системи координат, ступінь опису процесу керування і т. д.). Тому необхідним є пошук такого варіанта ММ, для якої розв'язання й аналіз задачі були б найбільш прости-

ми.

Важливим кроком у постановці й розв'язанні загальної задачі керування є вибір критерію оптимальності. Цей вибір є неформальним актом, його можна довести через будь-яку теорію, критерій визначається змістом завдання. У деяких випадках при формальному вираженні оптимальності системи допускається кілька еквівалентних (або майже еквівалентних) формулювань.

У таких випадках успіх і простота розв'язання залежать від вибраної форми критерію оптимальності (за умови, що в усіх випадках за цим критерієм досить повно можна визначити вимоги завдання до системи). Після будівництва ММ процесу керування подальше її дослідження й оптимізація проводиться математичними методами.

1.1.2 Класифікація методів теорії оптимальних процесів

Методи теорії оптимальних процесів (ТОП) можна умовно поділити на прямі й непрямі [5].

Непрямі методи зводять задачу оптимізації динамічних характеристик системи, які є функціоналами, до вирішення відомих математичних проблем.

До непрямих методів належать:

1 Принцип максимуму Понтрягіна і метод множників Лагранжа класичного варіаційного обчислення. Принцип максимуму зводить розв'язання задачі оптимізації функціоналів до розв'язання відомих задач – максимізації або мінімізації деякої спеціальної функції кінцевої кількості змінних у поєднанні з розв'язанням крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку. У класичному варіаційному обчисленні (ВО) задача оптимізації функціоналу зводиться до розв'язання крайової задачі для системи ЗДР. Принцип максимуму є

особливо зручним для розв'язання оптимізаційних задач, оскільки дає змогу найбільш просто врахувати різні обмеження на величини керувальних і фазових змінних (змінних стану). Класичне варіаційне обчислення є зручнішим у задачах, що описуються ЗДР більш загального вигляду (зокрема, не розв'язаних відносно похідних) і не містять обмежень у вигляді нерівностей на керувальні й фазові змінні.

2 Принцип оптимальності, покладений в основу динамічного програмування Беллмана і метод Гамільтона – Якобі класичного варіаційного обчислення. У цих методах задача оптимізації функціоналу зводиться до розв'язання системи нелінійних ДР у частинних похідних першого порядку з відповідними граничними умовами.

3 Деякі методи, у яких використовуються результати функціонального аналізу (наприклад, метод моментів).

Прямі методи ТОП зводять задачу оптимізації функціоналу до будування мінімізаційної (або максимізувальної) послідовності, на основі якої з допомогою граничного переходу можна отримати точний розв'язок задачі (В. Ф. Кротов, В. І. Гурман). До прямих методів належать такі, що базуються на зведенні задач оптимізації функціоналів до задач на умовний екстремум функцій кінцевої кількості змінних, різні варіанти градієнтних методів (Е. Полак, Б. Т. Поляк), методи типу Ритца – Гальоркіна та ін.

При застосуванні як непрямих методів, так і прямих остаточне розв'язання задачі оптимізації може мати або аналітичну, або числову форму.

Розв'язок у квадратурі (за винятком рідкісних випадків, таких як лінійні системи з квадратним критерієм якості) можна знайти лише для задач у спрощеній формі. З їх допомогою можна досліджувати якісні особливості оптимального керування. Якщо аналітичне розв'язання є не надто громіздким, то з нього можна отримати необхідні техніко-економічні

висновки. Розв'язання задач в квадратурі не залежать від конкретних числових значень параметрів системи й граничних умов. Однак у задачах, постановка яких наближається до реальних техніко-економічних ситуацій, отримання розв'язків у замкнутій формі зазвичай або є неможливим, або призводить до досить складних виразів. У цьому випадку слід звернутися до числових методів розв'язання.

При використанні числових методів виникають певні проблеми, пов'язані з оцінюванням швидкості збіжності, стійкості, помилками заокруглень, обмеженою розрядністю і т. д.

1.1.3 Необхідні умови оптимальності керування, достатні умови оптимальності й проблема існування оптимального керування

Розглянуті в цьому посібнику необхідні умови оптимальності керування для різного типу задач оптимізації, отримані з використанням аналітичних непрямих методів оптимізації, утворюють сукупність функціональних співвідношень, яким обов'язково має задовольняти екстремальний розв'язок.

При їх виведенні було отримано істотне для подальшого застосування припущення про існування оптимального керування (оптимального розв'язку). Іншими словами, якщо оптимальний розв'язок існує, то він обов'язково задовольняє наведені (необхідні) умови. Однак ці самі необхідні умови можуть задовольняти й інші розв'язки, які не є оптимальними (подібно до того, як необхідну умову $\frac{df}{dx} = 0$ для мінімуму функції однієї змінної задовольняють, наприклад, точки максимуму й перегину функції $f(x)$). Тому, якщо знайдений розв'язок задовольняє необхідні умови оптимальності, то це ще не означає, що він є оптимальним.

Використання одних лише необхідних умов дає змогу в принципі знайти всі розв'язки, що їх задовольняють, і відібрати потім серед них ті, які дійсно є оптимальними. Однак практично знайти всі розв'язки, що задовольняють необхідні умови, найчастіше не є можливим через трудомісткість такого процесу. Тому після того як знайдено який-небудь розв'язок, який задовольняє необхідні умови, доцільно перевірити, чи є він дійсно оптимальним стосовно вихідної постановки завдання.

Аналітичні умови, виконання яких для отриманого розв'язку гарантує його оптимальність, називають достатніми умовами. Формулювання цих умов і особливо їх практична (наприклад, обчислювальна) перевірка часто виявляється досить трудомістким завданням.

У загальному випадку застосування необхідних умов оптимальності було би більш обґрунтованим, якби для цієї задачі можна було встановити факт існування або існування та єдиності оптимального керування. Це питання є математично складним.

Проблема існування, єдиність оптимального керування складається з таких питань:

1 Існування допустимого керування (тобто керування, що належить заданому класу функцій), яке задовольняє заданим обмеженням і переводить систему із заданого початкового стану в заданий кінцевий стан. Іноді граничні умови задачі вибрано так, що система через обмеженість її енергетичних (фінансових, інформаційних) ресурсів не може їх задовольнити. У цьому випадку не існує розв'язку задачі оптимізації.

2 Існування в класі допустимих керувань оптимального і єдиного керування.

Для нелінійних систем загального вигляду ці питання ще не вирішено з достатньою для додатків повнотою. Проблема ускладнюється також тим, що з єдиності оптимального керування не випливає єдиності керування,

яка задовольняє необхідні умови. До того ж зазвичай задовольняється будь-яка одна, найбільш важлива необхідна умова (найчастіше – принцип максимуму).

Перевірка подальших необхідних умов може бути досить громіздкою. Це відображає важливість будь-якої інформації про єдиність керувань, які відповідають необхідним умовам оптимальності, а також про конкретні властивості таких керувань. Не слід робити висновки про існування оптимального керування на основі того, що вирішується «фізична» задача. Насправді, у методах теорії ОП використовується математична модель. Необхідною умовою адекватності опису фізичного процесу ММ якраз і є існування розв'язку для математичної моделі. Оскільки при формуванні математичної моделі вводяться різні спрощення, вплив яких на існування розв'язків важко передбачити, доказ існування є окремою математичною проблемою.

Отже, можна зробити такі висновки:

- з існування оптимального керування (ОК) випливає існування, принаймні, одного керування, що задовольняє необхідні умови оптимальності; з існуванням керування, що задовольняє необхідні умови оптимальності, не випливає існування оптимального керування;
- з існування ОК і єдиності керування, що задовольняє необхідні умови, випливає єдиність оптимального керування; з існування і єдиності ОК не випливає єдиності керування, що задовольняє необхідні умови оптимальності.

1.1.4 Загальна характеристика результатів, які можна отримати з допомогою методів теорії оптимального керування

ТОП є основою єдиної методології проектування оптимальних рухів, технічних, економічних та інформаційних систем [6]. Унаслідок

застосування методів ТОП до завдань конструювання різних систем може бути отримано:

1) оптимальні за тими чи іншими критеріями часові програми змінення керівних впливів та оптимальні значення постійних керівних (проектних, налагоджувальних) параметрів з урахуванням різних обмежень на їх значення;

2) оптимальні траєкторії, режими з урахуванням обмежень на область їх розташування;

3) оптимальні закони керування у формі зворотного зв'язку, що визначають структуру контуру системи керування (розв'язання задачі синтезу керування);

4) граничні значення деяких характеристик або інших критеріїв якості, які потім можна використовувати як еталон для порівняння з іншими системами;

5) розв'язки крайових задач потрапляння з однієї точки фазового простору до іншої, зокрема задача потрапляння до заданої області;

6) оптимальні стратегії потрапляння до деякої рухомої області.

1.1.5 Умова раціонального застосування методів оптимізації

Методи оптимізації керування раціонально застосувати:

1) у складних техніко-економічних системах, де пошук допустимих розв'язків на основі досвіду є важким. Оптимізація малих підсистем може призводити до великих утрат в критерії якості об'єднаної системи; краще наближено розв'язати задачу оптимізації системи в цілому, ніж точно для окремої підсистеми;

2) у нових завданнях, у яких немає досвіду формування задовільних характеристик процесу керування; у таких випадках формулювання оптимальної задачі часто дає змогу встановити якісний характер керування;

3) на ранній стадії проектування, коли є велика свобода вибору; після визначення великої кількості проектних розв'язків система стає недостатньо гнучкою, і подальша оптимізація може не дати істотного виграшу;

4) якщо необхідно визначити напрямок змінення керування й параметрів, що дають найбільше змінення критерію якості (визначення градієнта якості).

Слід зазначити, що для добре вивчених систем, які довго експлуатувалися, методи оптимізації можуть давати невеликий виграш, оскільки знайдені з досвіду практичні розв'язки зазвичай наближаються до оптимальних.

У деяких практичних задачах спостерігається певна «грубість» оптимальних керувань і параметрів, тобто великим локальним змінам керувань і параметрів відповідають малі зміни критерію якості. Це дає іноді привід для ствердження, що на практиці «грубі» методи оптимізації не завжди потрібні. Насправді «грубість» керування спостерігається лише у випадках, коли оптимальне керування відповідає стаціонарній точці критерію якості. У цьому випадку змінення керування на величину ε призводить до відхилення критерію якості на величину ε^2 .

Для керувань, що знаходяться на межі допустимої області, зазначена «грубість» може й не мати місця. Ця властивість має досліджуватися для кожної задачі спеціально. Крім того, у деяких задачах навіть невеликі поліпшення критерію якості завдяки оптимізації можуть мати суттєве значення.

1.2 Основні поняття і визначення математичної теорії оптимальних процесів керування

1.2.1 Математичні моделі. Змінні стану (фазові координати) керованого процесу

У ТОП керування зазвичай застосовують ММ задач оптимізації процесу керування фізичними системами. ММ є досить повним зведенням функціональних співвідношень, що описують основні властивості фізичних об'єктів, процеси їх функціонування і керування у межах вибраного ступеня наближення й деталізації і відображає всі істотні вимоги до конкретних технічних характеристик системи.

Математична модель задачі оптимізації процесу керування складається з кількох окремих математичних моделей, включаючи ММ керованого процесу, математичну модель обмежень на величини керівних впливів і можливе розташування на траєкторії, математичний опис показника ефективності (критерію якості) процесу керування і т. д. Математична задача оптимізації процесу керування вважається повністю визначеною (коректно поставленою), якщо точно описано всі елементи ММ.

Основою ММ задачі оптимізації процесу керування є ММ керованого процесу. Ця модель ґрунтується на понятті змінних стану (фазових координат), які вводяться в задачу таким чином.

Нехай керовану систему S можна ідеалізувати так, що в кожен фіксований момент часу спостереження $t = t'$ на інтервалі $T = [t_0, t_1]$, $t' \in T$, її властивості може бути описано кінцевою множиною дійсних чисел $x_1(t'), x_2(t'), \dots, x_n(t')$, які розглядаються як компоненти деякого вектора $x(t') = (x_1(t'), x_2(t'), \dots, x_n(t'))^T$.

При зміні моменту часу спостереження змінюється і вектор x . Ця зміна може бути викликана доданими до об'єкта впливами. Якщо при $t > t'$ властивості системи як і раніше повністю описуються вектором

$$x(t') = (x_1(t'), x_2(t'), \dots, x_n(t'))^T$$

і якщо n – найменша кількість величин $x_i(t')$, з допомогою яких можна передбачити значення $x(t)$ при всіх $t > t'$ за відомими значеннями $x(t')$, то вектор $x(t)$ називають *вектором стану* детермінованої системи S у момент t .

Величини x_i називають *компонентами вектора стану*, або фазовими координатами.

Множина всіх можливих станів $x = (x_1(t'), x_2(t'), \dots, x_n(t'))^T$ у різні моменти часу $t \in T$ перетворюється на n -вимірний простір станів $X^n \subset R^n$ (n -вимірний фазовий простір), точка $x \in X^n$ є *точкою зображення* цього простору.

1.2.2 Постановка й класифікація задач оптимізації

Під час розроблення автоматичних систем насамперед ставиться завдання виконання функціонального призначення системи, що визначається метою керування. Більш складним є завдання розроблення системи з найкращими показниками якості – *оптимальної системи*. Оцінку досяжності мети під час керування об'єктом, яку подано у формалізованому вигляді, називають *критерієм оптимальності*, або *цільовою функцією* [7]. Розроблення оптимальної системи – це задача синтезу, або оптимізації.

Розв'язання цієї задачі починають з її *постановки*, яка містить опис заданих реальних елементів системи математичними співвідношеннями (складення математичної моделі системи), визначення наявих обмежень

для координат системи й аналіз характеристики сигналів зовнішніх впливів, а також складення математичного виразу заданого критерію якості. Далі задачу розв'язують відповідними математичними методами, унаслідок чого знаходять функцію керування за умови мінімуму або максимуму показника якості, що визначає оптимальний режим роботи об'єкта.

Обмеження фазових координат і керувань

Об'єкт керування можна подати у вигляді, показаному на рис. 1.2. Величини $u_1(t), \dots, u_m(t)$ зручно вважати координатами деякого вектора $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ у m -вимірному просторі керування. Вектор u називають *вектором керування*, або *керуванням*.

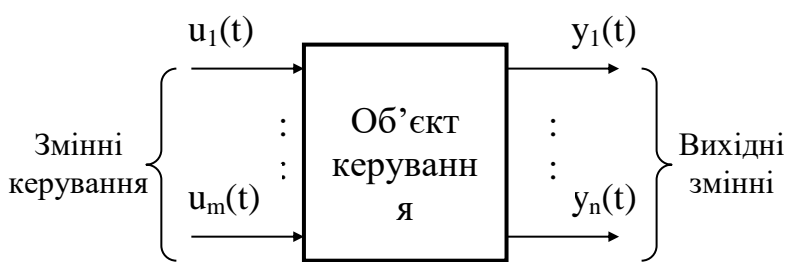


Рисунок 1.2 – Об'єкт керування

Величини $y_1(t), \dots, y_n(t)$ розглядають як координати вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$ у n -вимірному просторі, який називають *фазовим простором* розглядуваного об'єкта.

Вектор y називають *фазовим вектором* або *вектором стану*, який визначає стан об'єкта у певний момент часу. Якщо стан об'єкта характеризується двома фазовими координатами, то кажуть про фазову площину. Розмірність векторів u і y може бути однаковою або відрізнятись одна від одної ($m \leq n$). Пару векторних функцій $[u(t), y(t)]$ називають *процесом керування*, або просто *процесом*.

Під час розроблення оптимальних систем автоматичного керування необхідно враховувати різні обмеження, що накладають на координати й показники якості процесу.

Усі обмеження координат і керувань можна поділити на два типи:

природні й умовні.

Природні обмеження фазових координат зумовлені принципом роботи об'єкта. Наприклад, частота обертання асинхронного електродвигуна не може бути більшою за синхронну частоту; вихідні сигнали підсилювача є обмеженими через явище насичення і т. д.

Умовні обмеження координат вводять свідомо. Наприклад, величину струму якоря електродвигуна постійного струму обмежують умовами нормальної комутації на колекторі, нагрівом струмопровідних частин, граничною температурою ізоляції обмоток. Наявність умовних обмежень координат зазвичай зумовлює введення обмежень на керування.

Іншими словами, вектори $u(t)$ і $y(t)$ можуть змінюватися лише в деякій допустимій зоні:

$$u(t) \in G_u; y(t) \in G_y. \quad (1.1)$$

Першу умову називають *обмеженням на керування*, другу – *фазовим обмеженням*. G_u і G_y – деякі задані множини. Множину G_u називають *областю керування*. Її вказують у математичному описі об'єкта. Наприклад, якщо параметри u_1 і u_2 характеризують на площині векторну величину, модуль якої не перевищує одиниці, а напрямок є довільним, то ці параметри підпорядковуються умові $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, а область керування G_u являє собою коло одиничного радіуса (рисунок 1.2).

У загальному випадку область керування може мати геометрично більш складний характер, оскільки через конструкцію об'єкта між керувальними параметрами u_i можуть існувати зв'язки, що виражаються рівняннями вигляду

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0. \quad (1.2)$$

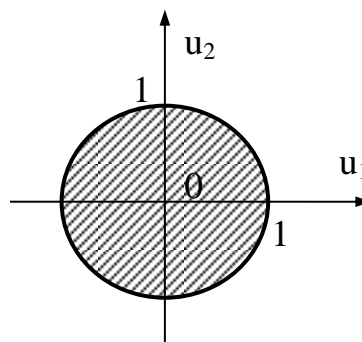


Рисунок 1.3 – Приклад області керування

Для технічних систем особливо важливою і характерною є замкнена множина G_u , тобто коли точка може знаходитися не тільки всередині цієї множини, а й на її межі.

Значення керувальних параметрів можуть змінюватися стрибком, тобто ці параметри є *безінерційними*. Тому необхідно розглядати не тільки безперервні, а й *кусково-безперервні* керування.

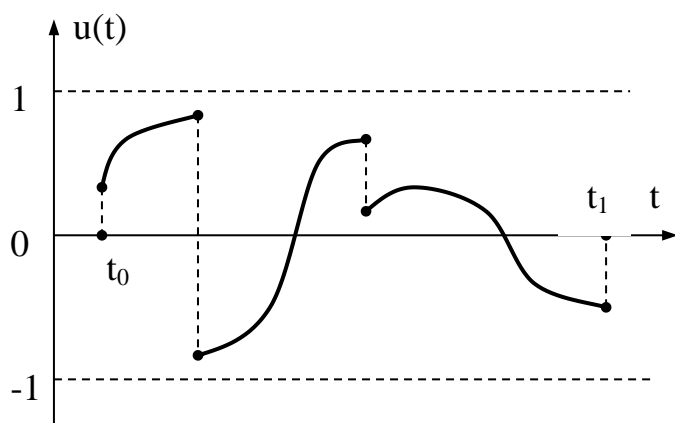


Рисунок 1.4 – Приклад кусково-безперервної функції

Функцію $u(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$ називають *кусково-безперервною*, якщо вона складається зі скінченної кількості безперервних кусків за винятком лише скінченної кількості моментів, де функція $u(t)$ може мати розрив першого роду (рисунок 1.4).

Кусково-безперервні керування дають змогу отримати для великої кількості прикладів точний математичний розв'язок оптимальної задачі та є досить наочними й зручними для технічної реалізації.

1.2.3 Критерії оптимальності

Важливим етапом під час розроблення оптимальних систем є формулювання мети оптимізації, яка математично виражається як вимога забезпечення мінімуму або максимуму деякого показника якості (критерію оптимальності). Як критерій оптимальності можна взяти різні технічні й техніко-економічні показники й оцінки [8]. Наприклад, критерій може відображати техніко-економічну вигоду (продуктивність, коефіцієнт корисної дії тощо), при цьому оптимальне керування має забезпечувати *максимум* критерію оптимальності, а також утрати (витрату енергії,

палива, коштів і т. д.), у цьому випадку оптимальне керування забезпечує *мінімум* критерію.

Цільову функцію необхідно подати у формі, при якій допускається використання будь-якого відомого методу синтезу оптимальних систем. Під час розроблення найпростіших локальних систем керування зазвичай розглядають задачу оптимізації за критеріями, що характеризують *якість* функціонування системи (точність, швидкодію), а інші критерії не враховують.

У теорії автоматичного керування найбільш поширеними є *функціонали*, що характеризують якість системи.

Змінну величину $I[x(t)]$ називають функціоналом, що залежить від функції $x(t)$, якщо кожній функції $x(t)$ відповідає число I .

У загальному випадку функціонал залежить від фазових координат $y_i(t)$, координат керування $u_j(t)$, збурювальних впливів $z_k(t)$, і його можна подати в такому вигляді:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F[y, u, z] dt, \quad (1.3)$$

де $[t_0, t_1]$ – розглядуваний проміжок часу; F – визначена функція, яка відображає показник якості; y, u, z – вектори фазових змінних, керувань і збурень відповідно.

Набуття максимального або мінімального (екстремального) значення цього функціоналу свідчить про оптимальну роботу або стан системи.

Розглянемо деякі типи критеріїв оптимальності найпростіших об'єктів і систем керування складними процесами.

Час перехідного процесу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} 1(t) dt = t_1 - t_0 = T. \quad (1.4)$$

Отримана при цьому система є *оптимальною за швидкодією*, якщо забезпечує мінімум інтегралу (1.4) з урахуванням обмежень координат.

Інтегральне оцінювання якості перехідного процесу:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon^2(t) dt; \quad (1.5)$$

$$I = \bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt; \quad (1.6)$$

$$I = \bar{y}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt, \quad (1.7)$$

де $\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t)$ – відхилення вихідної змінної $y(t)$ від заданого значення $y^*(t)$; $\bar{\varepsilon}^2$ – середнє значення квадрата помилки системи; \bar{y}^2 – середнє значення квадрату вихідної координати.

За умови забезпечення мінімуму інтегралу (1.5) система є *оптимальною за точністю у динамічних режимах* при ступінчастому задавальному впливі.

За умови забезпечення мінімуму функціоналів (1.6) і (1.7) система є *оптимальною за точністю в статичному розумінні*.

Для визначення коливальності перехідного процесу, тобто характеру його проходження, застосовують *узагальнений інтегральний квадратичний критерій*

$$I = \int_0^{\infty} \left[y^2 + r_1 \dot{y}^2 + \dots + r_n (y^{(n)})^2 \right] dt, \quad (1.8)$$

де r_1 – вагові коефіцієнти.

Перший доданок у цьому виразі мінімізує відхилення вихідної координати y , а інші – її похідні. Тому мінімуму (1.8) відповідають досить швидкоплинні й плавні перехідні процеси.

Зазначимо, що в інтегральних критеріях (1.5) – (1.8) не враховується що в системі можуть мати місце обмеження потужності сигналу керування. Крім того, система сама може мати обмежені енергетичні ресурси. Ці обмеження враховано у функціоналі

$$I = \int_0^{\infty} [y^2(t) + cu^2(t)] dt. \quad (1.9)$$

Перший доданок у цьому виразі має той самий смисл, що й у виразі (1.8). Другий доданок, з одного боку, означає досягнення оптимальності згасання збурювального руху за умови обмеження витрат енергії на керування [2], а з іншого – забезпечує пошук оптимального керування серед множини допустимих лінійних функцій.

Витрати енергії на керування

$$I = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} ru^2(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} Ri^2(t)dt, \quad (1.10)$$

де $u(t)$ та $i(t)$ – напруга і струм навантаження; $r = 1/R$ – коефіцієнт пропорційності; R – опір електричного ланцюга.

Цей критерій також використовують при керуванні від джерел енергії, що є обмеженими за потужністю.

У механічних системах для оцінювання енергії керування іноді беруть функціонал вигляду

$$I = \int_{t_0}^{t_1} u(t)\dot{y}(t)dt, \quad (1.11)$$

де $u(t)$ – координата керування; $\dot{y}(t) = dy/dt$ – похідна вихідної змінної об'єкта.

Витрати палива

$$I = \int_{t_0}^{t_1} r |u(t)| dt. \quad (1.12)$$

За умови мінімуму цього інтегралу отримуємо систему, *оптимальну за витратами палива*.

У випадках, коли необхідно забезпечити найкращу роботу системи за найгірших можливих умов, застосовують *мінімаксний* критерій оптимальності.

Формування критерію оптимальності, що визначає мету оптимізації, – це інженерна й інженерно-економічна задача, яку розв'язують на основі глибокого й всебічного вивчення об'єкта, яким керують.

Якщо необхідно врахувати різні показники якості, то задача вибору критерію оптимальності ускладнюється, оскільки вимоги до системи зазвичай є суперечними. У зв'язку з цим як основний беруть критерій якості функціонування.

Класифікація задач оптимізації

Для того щоб повністю задати рух об'єкта, необхідно знати його фазовий стан у початковий момент часу t_0 і вибрати керування $u(t)$.

Цей вибір здійснюють за таких умов:

- задано крайові умови (початковий $y(t_0)$ і кінцевий $y(t_k)$ стани об'єкта);
- оптимальність керування оцінено за максимумом або мінімумом функціоналу (1.3);
- на керування й змінні стану накладено обмеження (1.1).

Конкретизація всіх цих умов породжує різні типи задач оптимізації, які можна поділити на три групи за способом задання:

- функціоналу I ;
- обмежень;
- крайових умов.

Різні види функціоналу I було розглянуто вище.

За *способом задання обмежень* задачі поділяють на такі [1]:

- з обмеженням на керування;
- з обмеженням на фазові змінні;
- зі спільним обмеженням на керування й фазові змінні.

За способом задання крайових умов задачі можна поділити на такі:

- з фіксованими кінцями (задано значення $y(t_0)$ і $y(t_k)$, а також моменти часу t_0 і t_k);
- з вільними кінцями (якщо $y(t_0)$ або $y(t_k)$ не задано, то маємо задачу з вільним лівим або правим кінцем відповідно);
- з рухомими кінцями (у цьому випадку значення t_0 і t_k зафіксовано, а вектори стану $y(t_0)$ і $y(t_k)$ задано деякими множинами G_{t_0} і G_{t_k}).

Крім наведених ознак класифікації задачі можна поділити за видами змінних і залежностей між ними. За видом дії над змінними залежності можуть бути алгебричними й диференціальними. Задачі, що містять диференціальні залежності у функції часу, називають задачами *динамічної оптимізації*, або *оптимального керування*. Саме цим задачам приділяється основна увага в цьому розділі.

1.3 Класичні методи варіаційного обчислення

Методи варіаційного обчислення можна умовно поділити на класичні й сучасні. До класичних належать методи, що ґрунтуються на рівняннях Ейлера, Лагранжа, Якобі, Вейєрштрасса. Їх доцільно застосовувати до задач, у яких області змін $u(t)$ і $y(t)$ не містять обмежень. Це має місце, коли розглядають малі відхилення $u(t)$ і $y(t)$ від усталених станів. Сучасні методи ґрунтуються на принципі максимуму Понтрягіна і методі динамічного програмування Беллмана [2]. Їх перевагами є можливість урахування обмежень на керування й змінні стану, а також придатність до застосування ЕОМ.

Варіаційна задача із закріпленими межовими точками. Рівняння Ейлера

Під час вивчення перехідних процесів систем керування характер динаміки можна оцінювати величиною визначеного інтегралу. Наприклад, для одновимірних об'єктів

$$I = \int_{t_0}^{t_k} F(y, \dot{y}, t) dt, \quad (1.13)$$

де $y = y(t)$, $\dot{y} = dy(t)/dt$ – траєкторії координати виходу та її першої похідної за часом.

Технічна задача оптимізації динаміки об'єкта зводиться до математичної задачі знаходження екстремуму функціоналу (1.13). При цьому шукана функція має задовольняти крайові умови: $y(t_0) = y_0$; $y(t_k) = y_k$, де y_0, y_k – задані числа.

Таку задачу називають варіаційною задачею із закріпленими межовими точками (із закріпленими кінцями) (рисунок 1.5).

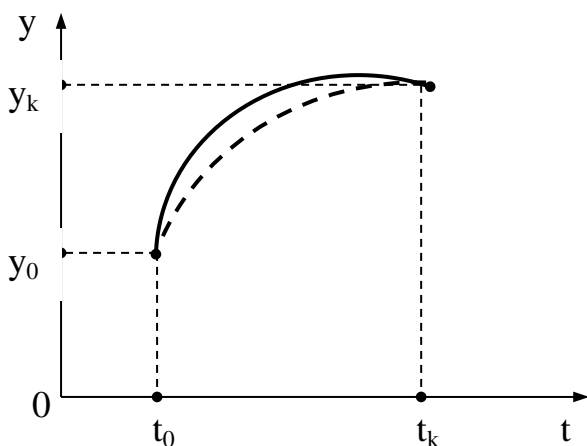


Рисунок 1.5 – До задачі із закріпленими кінцями

Умова екстремуму інтегралу (1.13) при фіксованих граничних значеннях і відсутності обмежень на координати записується у вигляді рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F(y, \dot{y}, t)}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(y, \dot{y}, t)}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Криві, на яких реалізується екстремум функціоналу (*екстремалі*), є інтегральними кривими цього рівняння. Для з'ясування, чи відповідає знайдена екстремаль мінімуму функціоналу, необхідно перевірити виконання додаткових умов. Оскільки

це є досить складною процедурою, на практиці іноді обмежуються числовою перевіркою значення функціоналу біля знайденої екстремалі.

Приклад 1.1 Знайти криву $y^*(t)$, що проходить у фіксовані моменти часу t_0 і t_k через задані точки y_0 і y_k , на якій досягає екстремуму функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} (y^2 + k^2 \dot{y}^2) dt, \quad (1.15)$$

де k – задане число ($k > 0$).

У цьому випадку $F(y, \dot{y}, t) = y^2 + k^2 \dot{y}^2$, тому $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 2k^2 \dot{y}$.

Рівняння Ейлера для екстремалей функціоналу (1.15) має вигляд

$$2y - 2k^2 \ddot{y} = 0, \text{ або } \ddot{y} - y/k^2 = 0. \quad (1.16)$$

Розв'язок цього рівняння запишемо у вигляді

$$y^*(t) = C_1 e^{t/k} + C_2 e^{-t/k}. \quad (1.17)$$

Для визначення C_1 і C_2 використаємо граничні умови

$$y_0 = C_1 e^{t_0/k} + C_2 e^{-t_0/k}; \quad y_k = C_1 e^{t_k/k} + C_2 e^{-t_k/k}.$$

Тоді отримаємо

$$C_1 = \frac{y_0 e^{-t_k/k} - y_k e^{-t_0/k}}{e^{(t_0-t_k)/k} - e^{-(t_0-t_k)/k}}; \quad C_2 = \frac{y_k e^{-t_0/k} - y_0 e^{-t_k/k}}{e^{(t_0-t_k)/k} - e^{-(t_0-t_k)/k}}. \quad (1.18)$$

У задачах оптимізації динаміки об'єктів у загальному випадку функціонал (1.13) може містити похідні вищих порядків. Необхідну умову наявності екстремуму такого функціоналу визначає *рівняння Ейлера – Пуассона* (при фіксованих граничних умовах і відсутності обмежень на координати)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial^n F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0. \quad (1.19)$$

Слід зазначити, що рівняння (1.14) і (1.19) застосовують для знаходження екстремумів відповідних функціоналів тільки тоді, коли

координати $y(t)$ є безперервними гладкими функціями й не мають обмежень типу нерівностей.

Ці рівняння є вираженням *першої необхідної умови екстремуму*. Однак залишається неясним, є отримані екстремалі максимумом чи мінімумом функціоналу. Відповідь на це запитання дає теорема *Лежандра*, яка виражає *другу необхідну умову екстремуму*.

Для того щоб функціонал (1.13) у задачі із закріпленими кінцями набував на кривій мінімуму (максимуму), необхідно, щоб уздовж цієї кривої виконувалась умова

$$\frac{\partial^2 F(y, \dot{y}, t)}{\partial \dot{y}^2} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F(y, \dot{y}, t)}{\partial \dot{y}^2} < 0 \right) \quad (1.20)$$

Так, для прикладу 1.1 маємо

$$\frac{\partial^2 F(y, \dot{y}, t)}{\partial \dot{y}^2} = 2k^2 > 0,$$

отже, на кривій (1.17) функціонал (1.15) становить мінімум.

Варіаційні задачі на умовний екстремум. Рівняння Ейлера – Лагранжа

Задачі синтезу алгоритмів оптимального керування об'єктами в динаміці при вибраному функціоналі критерію якості мають додаткові (умовні) обмеження у вигляді рівнянь математичної моделі динаміки об'єкта. Екстремум функціоналу, що визначається при додаткових умовах (функціональних обмеженнях), називають *умовним екстремумом* [7]. Задачі на умовний екстремум при визначенні оптимальних керувань об'єктом у динаміці зумовлені тим, що траєкторія виходу $y(t)$ є наслідком змінення координати керування й залежить від виду диференціального рівняння об'єкта.

Таким чином, задача оптимізації об'єкта керування у динаміці, яку розв'язують класичним варіаційним обчисленням, має таке формулювання:

- математичну модель об'єкта задано у формі рівняння
-

$$\dot{y} = \varphi(y, u, t); \quad (1.21)$$

- задано граничні умови: $y(t_0) = y_0; y(t_k) = y_k;$
- необхідно визначити оптимальне керування $u^o(t)$, що забезпечує мінімум функціоналу

$$I = \int_{t_0}^{t_k} F(y, \dot{y}, u, \dot{u}, t) dt. \quad (1.22)$$

Цю задачу називають *задачею Лагранжа*. Перші задачі на умовний екстремум було поставлено й розв'язано засновниками класичного варіаційного обчислення Бернуллі, Ейлером і Лагранжем.

Розв'язувати задачу на умовний екстремум можна методом *множників Лагранжа*. Для цього введемо до розгляду новий функціонал:

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_k} \bar{F}(y, \dot{y}, u, \dot{u}, \lambda, t) dt = \int_{t_0}^{t_k} [F(y, \dot{y}, u, \dot{u}, t) + \lambda(\dot{y} - \varphi(y, u, t))] dt, \quad (1.23)$$

де λ – множник Лагранжа;

$\bar{F}(y, \dot{y}, u, \dot{u}, \lambda, t)$ – функція Лагранжа;

$\dot{y} - \varphi(y, u, t) = 0$ – функція зв'язку.

З допомогою множників Лагранжа задача на умовний екстремум функціоналу (1.22) зводиться до задачі на безумовний екстремум функціоналу (1.23). Рівняння Ейлера при цьому складають для функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{y}} \right) = 0; \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{u}} \right) = 0; \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{\lambda}} \right) = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Ці рівняння називають *рівняннями Ейлера – Лагранжа*. Вони характеризують умову стаціонарності функціоналу (1.23). Після розв'язання цих рівнянь з урахуванням математичної моделі об'єкта й граничних умов отримаємо оптимальне керування $u^*(t)$ об'єктом у динаміці.

Приклад 1.2 Визначити оптимальне керування об'єктом, заданим рівнянням

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t), \quad (1.25)$$

під час переходу об'єкта з фіксованого початкового стану у фіксований кінцевий стан: $y(t_0) = y_0$; $y(t_k) = y_k = 0$ за умови мінімуму функціоналу

$$I = \int_{t_0}^{t_k} (qy^2 + u^2) dt. \quad (1.26)$$

Запишемо рівняння об'єкта (об'єкт описується аперіодичною ланкою першого порядку) у вигляді

$$\dot{y}(t) = \frac{k}{T} u(t) - \frac{1}{T} y(t) = ay(t) + bu(t),$$

де $a = -1/T$; $b = k/T$.

Складаємо функцію Лагранжа:

$$\bar{F} = qy^2 + u^2 + \lambda(\dot{y} - ay - bu), \quad (1.27)$$

тобто допоміжний функціонал має вигляд

$$I = \int_{t_0}^{t_k} [qy^2 + u^2 + \lambda(\dot{y} - ay - bu)] dt. \quad (1.28)$$

З урахуванням того, що

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 2qy - \lambda a; \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} = 2u - \lambda b; \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \lambda} = \dot{y} - ay - bu; \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{y}} = \lambda; \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{\lambda}} = 0,$$

запишемо рівняння Ейлера – Лагранжа:

$$\begin{cases} 2qy - \lambda a - \dot{\lambda} = 0; \\ 2u - \lambda b = 0; \\ \dot{y} - ay - bu = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

З другого рівняння маємо $u = \lambda b/2$, тоді можна записати систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} 2qy - \lambda a - \dot{\lambda} = 0; \\ \dot{y} - ay - \lambda b^2/2 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dot{\lambda} = 2qy - \lambda a; \\ \dot{y} = ay + \lambda b^2/2. \end{cases} \quad (1.30)$$

З другого рівняння $\lambda = 2(\dot{y} - ay)/b^2$, тоді отримаємо рівняння другого порядку:

$$\ddot{y} = a\dot{y} + \dot{\lambda}b^2/2 = a\dot{y} + b^2(2qy - \lambda a)/2 = a\dot{y} + b^2qy - a\dot{y} + a^2y = y(b^2q + a^2),$$

або

$$\ddot{y} - y(b^2q + a^2) = 0. \quad (1.31)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y(t) = C_1 e^{t/\tau} + C_2 e^{-t/\tau},$$

де $\tau = 1/\sqrt{a^2 + qb^2}$.

Умовам стійкості й вимозі $y(t_k) = 0$ задовольняє тільки від'ємний корінь, тому маємо

$$y(t) = C_1 e^{-t/\tau} = C_1 e^{-t\sqrt{a^2 + qb^2}}. \quad (1.32)$$

З урахуванням граничних умов $C_1 = y(0) = y_0$.

$$\text{Далі знаходимо: } \dot{y}(t) = -\frac{C_1}{\tau} e^{-t/\tau}; \quad \lambda = \frac{2\left(-\frac{C_1}{\tau} e^{-t/\tau} - aC_1 e^{-t/\tau}\right)}{b^2} = C_1 e^{-t/\tau} \frac{2(-1/\tau - a)}{b^2}.$$

Тоді $u = \frac{\lambda b}{2} = C_1 e^{-t/\tau} \frac{(-1/\tau - a)}{b} = C_2 e^{-t/\tau}$, де $C_2 = C_1 \frac{(-1/\tau - a)}{b}$. Шукане оптимальне

керування $u^*(t) = C_1 e^{-t/\tau} \frac{(-1/\tau - a)}{b}$, або з урахуванням (1.32)

$$u^*(y) = y(t) \frac{(-1/\tau - a)}{b} = k_0 y(t), \quad (1.33)$$

де

$$k_0 = \frac{(-1/\tau - a)}{b} = \frac{-\sqrt{a^2 + qb^2} - a}{b}. \quad (1.34)$$

Рівняння (1.33) визначає структуру оптимального регулятора для заданого об'єкта керування й вибраного функціоналу (1.26). Мінімум цього функціоналу гарантує мінімальні відхилення $y(t)$ і $u(t)$ у період перехідного процесу. Вираз (1.34) визначає оптимальне значення коефіцієнта k_0 .

Слід нагадати, що при використанні класичного варіаційного обчислення шукані функції оптимальних процесів є неперервними і на координати виходу й керувань не накладають обмеження.

Під час розв'язання задач оптимального керування ці умови не завжди дотримуються. По-перше, керівні впливи, що належать до функціоналів, можуть бути кусково-неперервними (див. рисунок 1.4). За деяких умов координати об'єкта також мають розрив, отже, порушуються умови неперервності, що робить розв'язання задачі дуже складним або неможливим. По-друге, у практичних системах на координати й керування

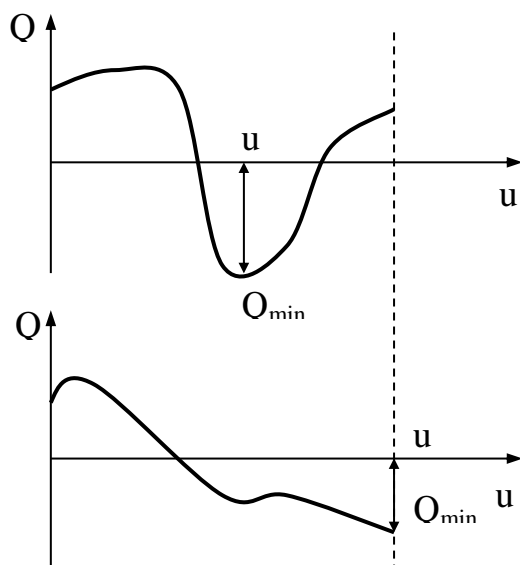


Рисунок 1.6 – Визначення мінімуму функції у замкнутій області керувань

завжди накладаються обмеження. Це відповідає тому, що координати й керування можуть змінюватись у деяких замкнених зонах, а також знаходитися на межах цих зон.

Проілюструємо це з допомогою рисунка 1.6. У першому випадку рівняння $\partial Q / \partial u = 0$ допомагає знайти оптимальне значення $u = u^*$, при якому $Q = Q_{min}$, а в другому маємо мінімум і при невиконанні цієї умови.

Таким чином, порушення умов, на яких ґрунтується класичне варіаційне обчислення, не дає змоги розв'язувати цими методами задачі теорії автоматичного керування. Ці труднощі можна подолати з допомогою нових методів розв'язання задач теорії оптимальних систем – методу динамічного програмування й принципу максимуму.

1.4 Метод динамічного програмування Беллмана

У техніці існує клас об'єктів і процесів, керування якими здійснюється на основі обмеженої кількості розв'язків, що існують у деякі фіксовані моменти часу. Для розв'язання задач оптимізації таких об'єктів американський учений Р. Беллман запропонував метод, який отримав назву *динамічного програмування* [1].

З допомогою динамічного програмування можна розв'язувати задачі, що є дискретними за своєю природою. Це має велике значення для найрізноманітніших галузей техніки й економіки, пов'язаних з дискретними процесами виробництва.

Основою методу є *принцип оптимальності*. Відповідно до цього принципу оптимальне керування визначається кінцевою метою керування і станом системи в певний момент часу незалежно від того, яким чином система набула цього стану, тобто від «передісторії» системи. Це означає, що для будь-якої оптимальної траєкторії кожна ділянка, яка зв'язує будь-яку проміжну точку цієї траєкторії з кінцевою, також є оптимальною траєкторією. Іншими словами, друга ділянка оптимальної траєкторії є оптимальною траєкторією.

Пояснимо метод динамічного програмування на простому прикладі керування об'єктом, рух якого описується рівнянням (1.21), причому на керівний вплив накладено обмеження $u(t) \in G_u$, а також задано початкові умови: $y(t_0) = y_0$.

Необхідно мінімізувати функціонал

$$I = \int_0^T F(y, u) dt + \Phi[y(T)], \quad (1.35)$$

де $\Phi[y(T)]$ – деякий функціонал, що залежить від значення вихідної координати у кінці проміжку часу T , тобто значення критерію під час останнього кроку на ділянці dt (без урахування попередніх).

Для розв'язання задачі Беллман застосував прийом, що полягає в просуванні від кінця процесу ($t = T$) до його початку ($t = 0$). Унаслідок цього було отримано рівняння динамічного програмування в неперервній формі, яке в найпростішому випадку для системи першого порядку з однією керувальною дією має вигляд

$$\min_{u \in G_u} \left\{ F(y_0, u_0) + \frac{dS(y)}{dy} \varphi(y_0, u_0) \right\} = 0, \quad (1.36)$$

де y_0, u_0 – початкові значення вихідної координати й керування; S – мінімальне значення функціоналу (1.35), яке залежить від початкових умов.

Для отримання мінімуму рівняння (1.36) необхідно здиференціювати за керуванням u . Тоді умову мінімуму (1.36) можна замінити системою

$$\begin{cases} F(y, u) + \frac{dS(y)}{dy} \varphi(y, u) = 0; \\ \frac{\partial F(y, u)}{\partial u} + \frac{\partial \varphi(y, u)}{\partial u} \frac{dS(y)}{dy} = 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

де y, u – поточні значення вихідної координати й керування.

З другого рівняння системи (1.37) визначають $dS(y)/dy$, а потім з першого рівняння знаходять шукану залежність $u = f(y)$.

У випадку, коли система має n вихідних координат і m керувань, рівняння (1.37) матимуть вигляд

$$\begin{cases} F(\bar{y}, \bar{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{dS(\bar{y})}{dy_i} \varphi_i(\bar{y}, \bar{u}) = 0; \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{u})}{\partial u_j} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\bar{y})}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_i(\bar{y}, \bar{u})}{\partial u_j} = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Наведена система рівнянь є найпоширенішою формою запису рівнянь Беллмана. При цьому функція $S(\bar{y})$ має бути неперервною й диференційованою за y_i , а dS/dy_i має те саме значення, що й множник λ у задачі на умовний екстремум. Функція φ є аналогічною рівнянню зв'язку (1.21).

Приклад 1.3 Розв'язати задачу (див. приклад 1.2) методом динамічного програмування.

Маємо рівняння об'єкта $\dot{y}(t) = \varphi(y, u, t) = ay(t) + bu(t)$ і функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} (qy^2 + u^2) dt = \int_{t_0}^{t_k} F(y, u) dt. \text{ Тоді система (1.37) набуде вигляду}$$

$$\begin{cases} qy^2 + u^2 + (ay + bu) \frac{dS}{dy} = 0; \\ 2u + b \frac{dS}{dy} = 0. \end{cases} \quad (1.39)$$

Звідси $dS/dy = -2u/b$, $qy^2 + u^2 + (ay + bu)(-2u/b) = 0$, або $bu^2 + 2ayu - qby^2 = 0$.

Отримано квадратне рівняння відносно u , корені якого є шуканими керуваннями:

$$u_1 = -\frac{a + \sqrt{a^2 + qb^2}}{b} y; \quad u_2 = -\frac{a - \sqrt{a^2 + qb^2}}{b} y.$$

Другий корінь відкидаємо як такий, що не відповідає умовам стійкості, й остаточно запишемо:

$$u^*(y) = k_0 y = -\frac{a + \sqrt{a^2 + qb^2}}{b} y,$$

що збігається з розв'язками (1.33) і (1.34).

З рівнянь (1.39) можна виключити u , і тоді визначити функцію S .

Приклад 1.4 Розв'язати задачу з обмеженням: $\dot{y}(t) = \varphi(y, u, t) = ay(t) + bx$, де $x = f(u)$ – нелінійна функція з обмеженням (рисунок 1.7).

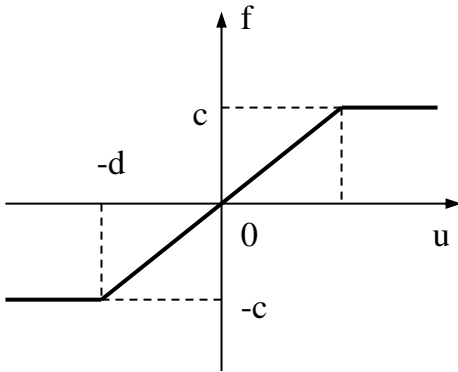


Рисунок 1.7 – Нелінійна функція $f(u)$ (обмеження лінійності за виходом)

Функціонал, що мінімізується, має вигляд

$$I = \int_{t_0}^{t_k} (qy^2 + x^2) dt.$$

У цьому випадку

$$F(y, u) = qy^2 + x^2 = qy^2 + f^2(u);$$

$$\varphi(y, u) = ay + bx = ay + bf(u).$$

Тоді рівняння Беллмана набудуть вигляду

$$\begin{cases} qy^2 + f^2(u) + [ay + bf(u)] \frac{dS(y)}{dy} = 0; \\ \frac{\partial f(u)}{\partial u} 2f(u) + b \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{dS(y)}{dy} = 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

З другого рівняння отримуємо $\frac{\partial f(u)}{\partial u} = 0$; $2f(u) + b \frac{dS(y)}{dy} = 0$.

Тоді

$$\frac{dS(y)}{dy} = -\frac{2f(u)}{b}; \quad qy^2 + f^2(u) - \frac{2f(u)}{b} [ay + bf(u)];$$

$$bf^2(u) + 2ayf(u) - qby^2 = 0.$$

Отримано рівняння, аналогічне рівнянню з попереднього прикладу, розв'язок якого має вигляд $u^*(y) = k_0 y$. Розв'язок рівняння $\frac{\partial f(u)}{\partial u} = 0$ дає константу $f(u) = const$. З урахуванням обмежень маємо $|f(u)| = C$.

1.5 Принцип максимуму Понтрягіна

1956 року в роботах академіка Л. С. Понтрягіна та його учнів було обґрунтовано принцип максимуму як необхідна й достатня ознака оптимального процесу для лінійних систем і необхідна ознака для нелінійних систем [1].

Між принципом максимуму й принципом оптимальності Беллмана існує прямий зв'язок.

Розглянемо спочатку матеріальну точку масою $m = 1$, яка вільно й без тертя рухається по горизонтальній прямій і має двигун, що розвиває силу F_{∂} . Тоді рівняння руху точки мають вигляд

$$dS/dt = V; dV/dt = a; a = F_{\partial}, \quad (1.41)$$

де S , V , a – переміщення, швидкість і прискорення точки відповідно.

Уведемо такі позначення:

$$y_1 = S; y_2 = V; u = F_{\partial},$$

тоді рівняння (1.41) запишемо у вигляді

$$\dot{y}_1 = dy_1/dt = y_2 = \varphi_1; \quad \dot{y}_2 = dy_2/dt = u = \varphi_2. \quad (1.42)$$

Знайдемо оптимальне керування точкою, при якому вона перейде з початкового S_n у кінцеве S_k положення за мінімальний час, тобто $I = T = \min$ (функціонал (1.4)).

На керування накладають такі обмеження:

$$|a| \leq a_{\max}; \quad |V| \leq V_{\max}. \quad (1.43)$$

Зінтегрувавши рівняння (1.41), отримаємо

$$V = at + V_n; \quad S = at^2/2 + V_n t + S_n, \quad (1.44)$$

де S_n , V_n – початкові умови.

Для виконання умови $T = \min$ необхідно, щоб середня швидкість руху на відрізку $[S_n, S_k]$ була якомога більшою, тобто $|a| = a_{\max}; \quad |V| = V_{\max}$.

Побудуємо діаграми змінення a , V , S з урахуванням (1.43) і (1.44) за умови, що $V_n = 0$, $S_n = 0$ (рисунок 1.8). Для точного влучення в точку S_k необхідно правильно вибрати точку початку гальмування. Визначимо для цього шлях гальмування S_e з умов

$$V_k = -a_{\max} t_e + V_{n2} = 0;$$

$$S_k = -a_{\max} t_e^2 / 2 + V_{n2} t_e + S_{n2},$$

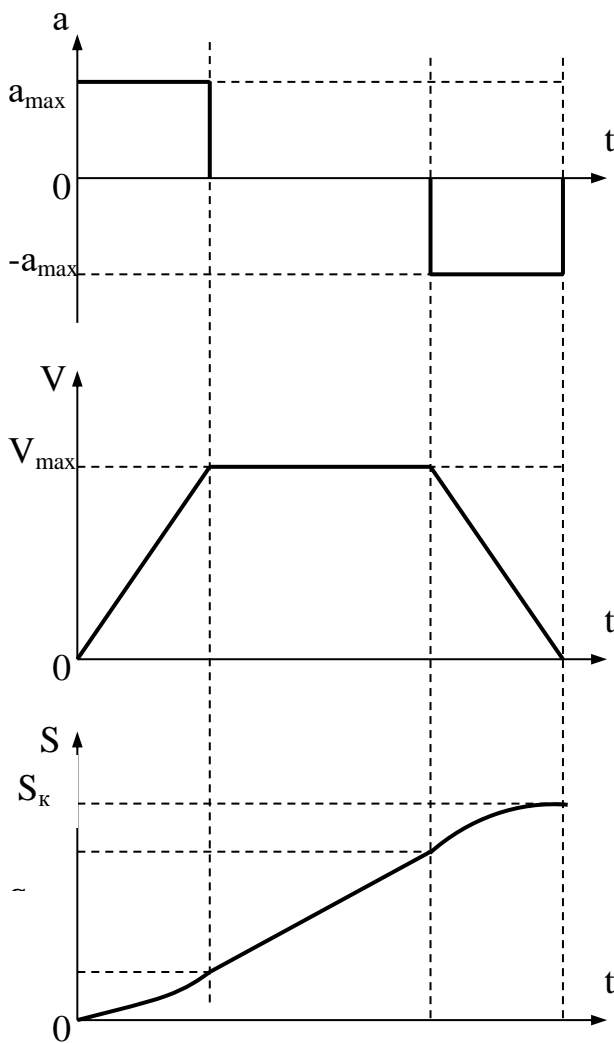


Рисунок 1.8 – Діаграми змінення a , V , S

де t_z , S_{nz} , V_{nz} – час гальмування, переміщення й швидкість точки на початку гальмування. Тоді

$$S_z = S_k - S_{nz} = V_{nz} t_z - a_{\max} t_z^2 / 2.$$

Оскільки $t_z = V_{nz} / a_{\max}$, то

$$S_z = \frac{V_{nz}^2}{a_{\max}} - \frac{a_{\max} V_{nz}^2}{2a_{\max}^2} = \frac{V_{nz}^2}{2a_{\max}}. \quad (1.45)$$

Це є рівнянням параболи.

Якщо записати замість S_{nz} , V_{nz} відповідно S , V – поточні координати початку гальмування, то рівняння (1.45) можна записати у вигляді

$$S - S_k = \pm \frac{V^2}{2a_{\max}}. \quad (1.46)$$

Знак «мінус» ставиться при $V > 0$, знак «плюс» – при $V < 0$.

Побудуємо залежність $S = f(V)$ на фазовій площині з урахуванням обмежень $|V| \leq V_{\max}$ (рисунок 1.9).

Початок координат відповідає кінцевій точці S_k (зупинка руху).

Якщо матеріальна точка знаходиться на ділянці фазової траєкторії 1–0–1', то для того, щоб вона потрапила в задане положення, необхідно почати гальмування з максимальним сповільненням.

Якщо матеріальна точка знаходиться на ділянці 2–1 або 2–1', то гальмування слід починати тільки після досягнення положення 1 (1'). До цього моменту швидкість має залишатися максимальною і постійною.

Якщо гальмування починати, наприклад, у точці 3 (3'), то матеріаль-

на точка «проскочить» задане положення, потрапивши в точку 4 (4'). Тоді точку слід розігнати на ділянці 4–5 (4'–5'), а потім гальмувати по лінії 5–0 (5'–0').

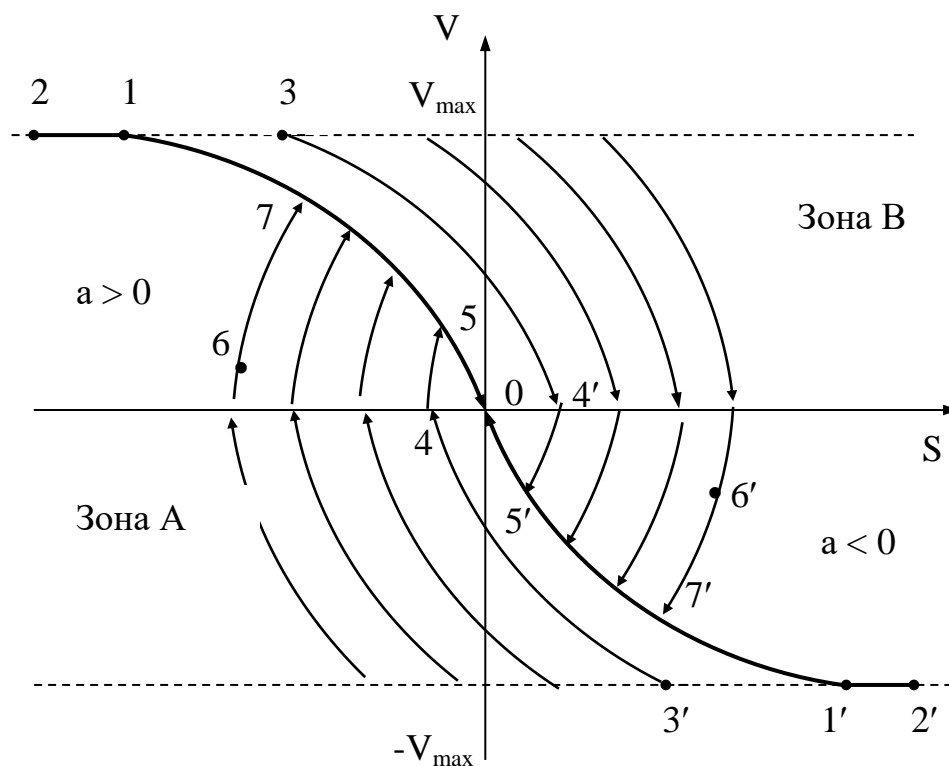


Рисунок 1.9 – Фазовий портрет системи

Якщо в початковий момент часу матеріальна точка знаходиться в точці 6 (6'), то її слід спочатку розігнати до точки 7 (7'), а потім гальмувати по лінії 7–0 (7'–0).

Таким чином, для досягнення максимальної швидкодії необхідно працювати на межі можливостей (за реальних умов це не завжди так, якщо запас енергії є обмеженим).

Отже, фазовий портрет можна поділити на дві зони:

- зона А, у якій швидкість V збільшується, тобто $a > 0$;
- зона В, у якій швидкість V зменшується, тобто $a < 0$.

Межу, що розділяє ці зони, називають *лінією перемикання*. За відомими рівняннями цієї лінії та станом системи X (швидкість V і положення відносно S_k) можна завжди визначити керувальний вплив

$$u = \pm a_{\max} = F_{\delta.\max}.$$

Рівняння (1.45) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} 2a_{\max}(S - S_{\kappa}) &= \pm V^2 \text{ нпу } |V| > V_{\max}, \text{ або} \\ 2a_{\max}(S - S_{\kappa}) + V^2 \text{sign} V &= 0 \text{ нпу } |V| < V_{\max}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

де

$$\text{sign} V = \begin{cases} +1 \text{ нпу } V > 0, \\ -1 \text{ нпу } V < 0. \end{cases} \quad (1.48)$$

Для зон А і В відповідно виконуються такі умови:

$$\begin{aligned} 2a_{\max}(S - S_{\kappa}) + V^2 \text{sign} V &= X < 0, \\ 2a_{\max}(S - S_{\kappa}) + V^2 \text{sign} V &= X > 0. \end{aligned}$$

Тоді сигнал керування набуде вигляду

$$\begin{cases} u = -a_{\max} \text{sign} X, \text{ нпу } |V| < V_{\max}, \\ u = 0, \text{ нпу } |V| \geq V_{\max}. \end{cases} \quad (1.49)$$

Умова (1.49) відображає алгоритм керування, що реалізує оптимальні за швидкодією процеси в системі.

З аналізу фазового портрета впливає, що для переміщення з будь-якої точки S_n до заданої точки S_{κ} керування змінюється щонайбільше один раз або має одне перемикання (два інтервали). У точках перемикання $u(t)$ має розрив першого роду. Такі керування належать до класу допустимих.

Розглянемо тепер принцип максимуму. Скористаємося рівнянням (1.36). Позначимо $\bar{\psi} = -\frac{\partial S(\bar{y})}{\partial y_i}$, тоді вектор $\bar{\psi}$ запишемо в такому вигляді:

$$\bar{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \left(-\frac{\partial S}{\partial y_0}; -\frac{\partial S}{\partial y_1}; -\frac{\partial S}{\partial y_2}; \dots; -\frac{\partial S}{\partial y_n} \right).$$

Оскільки $\max(-y) = -\min(y)$ (рисунок 1.10), можна записати

$$\min_{\bar{u} \in G_u} \left\{ \sum_{i=0}^n \frac{\partial S(\bar{y})}{\partial y_i} \varphi_i(\bar{y}, \bar{u}) \right\} = 0,$$

або

$$\max_{\bar{u} \in G_u} \left\{ \sum_{i=0}^n -\frac{\partial S(\bar{y})}{\partial y_i} \varphi_i(\bar{y}, \bar{u}) \right\} = 0. \quad (1.50)$$

Отже, умову мінімуму інтегралу (1.35) запишемо у вигляді

$$\max_{\bar{u} \in G_u} \left\{ \sum_{i=0}^n \varphi_i \psi_i \right\} = \max_{\bar{u} \in G_u} (\bar{\varphi} \cdot \bar{\psi}) = 0, \quad (1.51)$$

де $\bar{\varphi} \cdot \bar{\psi}$ – скалярний добуток двох векторів.

Отриманий вираз (1.51) є математичним записом принципу максимуму Понтрягіна.

Зазначимо, що під час застосування методу динамічного програмування в загальному випадку необхідно попередньо знайти функцію S , що пов'язано з розв'язанням диференціальних рівнянь у частинних похідних. Щоб використати принцип максимуму, необхідно знайти вектор $\bar{\psi}$ на оптимальній траєкторії. Однак його можна знайти простіше, розв'язавши так звані спряжені рівняння вигляду

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{\varphi} \bar{\psi}}{\partial y_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.52)$$

Часто рівняння (1.51) і (1.52) записують у більш компактній формі, позначивши скалярний добуток векторів $\bar{\varphi} \cdot \bar{\psi}$ через H . Тоді отримаємо

$$\max_{\bar{u} \in G_u} H(\bar{\psi}, \bar{y}, \bar{u}) = 0, \quad (1.53)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad (1.54)$$

де $H = \bar{\varphi} \cdot \bar{\psi} = \sum_{i=0}^n \psi_i \varphi_i = \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{dy_i}{dt}$ (з урахуванням того, що $\dot{y} = \varphi(y, u, t)$).

Узявши частинну похідну H за ψ_i , отримаємо рівняння руху об'єкта:

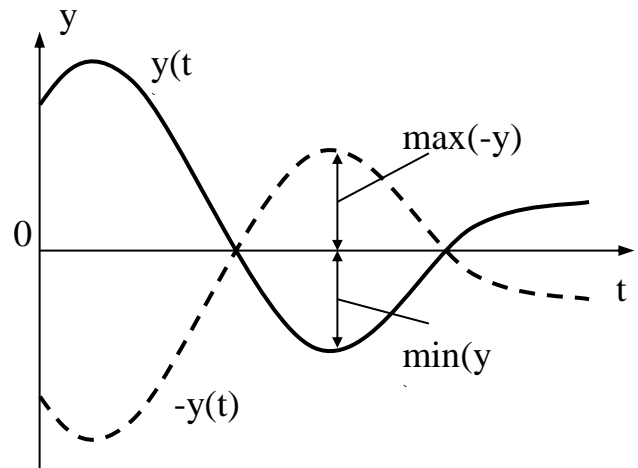


Рисунок 1.10 – До пояснення виразу $\max(-y) = -\min(y)$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}. \quad (1.55)$$

Із виразу (1.53) можна зробити такі висновки:

- якщо процес є оптимальним, то в будь-який момент часу t оптимальне керування $u(t)$ буде таким, що максимізує величину H ;
- у будь-якій точці оптимальної траєкторії максимальне значення величини H буде одним і тим самим (дорівнювати нулю).

Функцію H , яка має певний фізичний смисл, називають *функцією Гамільтона* [7]. Зокрема, для консервативних механічних систем функція H є повною енергією системи, яка має залишатися постійною і максимальною під час керування. Функція ψ_i є імпульсом і задає напрямок руху. Для неконсервативних систем, наприклад електричних, функція H – потужність.

Звідси випливає *фізичний смисл оптимального керування*: необхідно надавати об'єкту таку кількість енергії, що забезпечувала б його рух, при якому функціонал, вибраний за критерій оптимальності, набував би екстремального значення при обмеженнях, накладених на фазові координати й керування. Ця енергія надається з допомогою керування u , тому H є функцією також і від u .

Таким чином, принцип максимуму в загальному випадку можна сформулювати так: *для отримання оптимальної системи, з огляду на мінімум функціоналу I необхідним є існування таких ненульових неперервних функцій $\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)$, які є розв'язанням системи $\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$, що при будь-якому t з інтервалу $0 \leq t \leq T$ функція H змінних u_1, \dots, u_r у заданій зоні їх припустимих значень набуває максимуму відповідно до умови*

$$\max_{\bar{u} \in G_u} H(\bar{\psi}, \bar{y}, \bar{u}) = 0.$$

Принцип максимуму є найдоцільнішим з усіх методів знаходження

оптимальних керувань при розв'язанні задач про швидкодію.

Задачу розв'язують у такій послідовності.

1. Складають функцію Гамільтона H , що дорівнює скалярному добутку векторів $\bar{\varphi}$ і $\bar{\psi}$, тобто $H = \varphi_1 \cdot \psi_1 + \varphi_2 \cdot \psi_2 + \dots + \varphi_n \cdot \psi_n$, причому $\varphi_i = \varphi_i(\bar{y}, \bar{u})$.

2. Беруть частинні похідні H за керуванням u_i , які визначають екстремум функції H . У разі лінійної залежності H від u_i частинна похідна $\partial H / \partial u_i$ є функцією однієї або декількох складових вектора $\bar{\psi}$. При цьому для набуття додатного максимуму H необхідно, щоб $u_i = +u_{max}$ при $\psi_i(t) > 0$ і $u_i = -u_{max}$ при $\psi_i(t) < 0$, тобто

$$u_i = u_{max} \text{sign } \psi_i(t). \quad (1.56)$$

Таким чином, у цьому випадку керувальний вплив стрибком набуває значення $+u_{max}$ або $-u_{max}$. Момент змінення знаку називають *моментом перемикання*.

У разі нелінійної залежності H від u_i частинну похідну $\partial H / \partial u_i$ прирівнюють нулю і з отриманого рівняння визначають u_i , при якому максимізується H .

3. Для знаходження допоміжної функції $\psi_i(t)$, яка визначає керування, складають і розв'язують систему спряжених рівнянь (1.54).

4. Для замкнутої системи обчислюють залежність керування від вихідних координат системи, що визначають оптимальну траєкторію: $u = f(\bar{y})$. При цьому моменти перемикання визначаються автоматично при відхиленні фактичної траєкторії від оптимальної.

Для розімкнутої системи обчислюють кількість змін знака $\psi_i(t)$, тобто визначають, скільки разів $\psi_i(t)$ переходить через нуль, або, інакше, скільки коренів має функція $\psi_i(t)$. Моменти перемикання можна обчислити розв'язанням диференціальних рівнянь зі знакозмінною правою частиною.

Приклад 1.5 Систему задано рівняннями

$$\dot{y}_1 = dy_1/dt = y_2 = \varphi_1; \quad \dot{y}_2 = dy_2/dt = u = \varphi_2, \text{ або } d^2y_1/dt^2 = u.$$

Необхідно розв'язати задачу про максимальну швидкодiю, тобто знайти оптимальне керування u^* , при якому перехiд системи з початкового стану в кiнцевий (рiвноважний) відбувався б за мiнимальний час. При цьому на керування накладається обмеження $|u| \leq u_{\max}$.

Запишемо функцiю Гамiльтона: $H = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 = y_2\psi_1 + u\psi_2$.

Оскiльки функцiя H є лiнійною вiдносно u , для визначення її максимуму необхідно знайти ψ_2 . Запишемо систему спряжених рiвнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_1} = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_2} = -\psi_1. \end{aligned}$$

Звiдси випливає:

$$\psi_1 = C_1,$$

$$\psi_2 = -\int \psi_1 dt = -C_1 \int dt = -C_1 t + C_2,$$

де C_1, C_2 – сталi iнтегрування.

Для набуття максимуму H необхідно, щоб ψ_2 i u мали однаковий знак:

$$u = u_{\max} \text{sign} \psi_2. \quad (1.57)$$

Оскiльки функцiя $\psi_2 = -C_1 t + C_2$ має один корiнь $t_1 = C_2/C_1$, керування u має одну

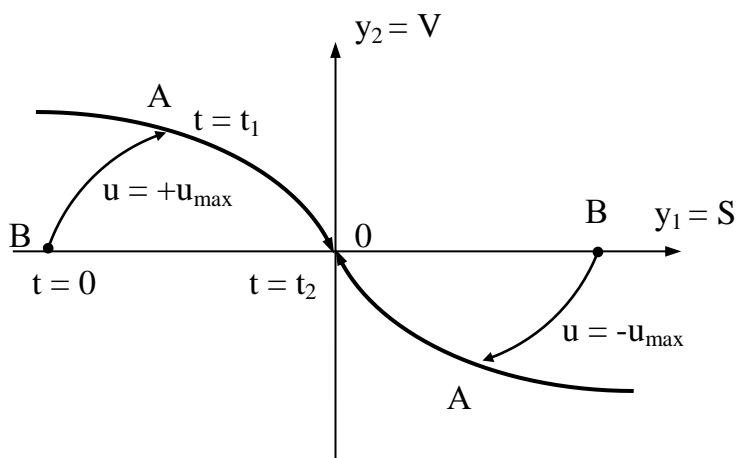


Рисунок 1.11 – Фазова траекторiя об'єкта

змiну знака (два iнтервали керування), що збiгається з ранiше отриманим результатом (див. рисунок 1.9). Пiсля закинчення керування $u = \dot{y}_2 = 0$ (рисунок 1.11).

Принцип максимуму вiдображає тiльки якiсну сторону змiни керувальної

дії, тобто з його допомогою можна визначити кількість інтервалів керування, і не можна кількісно оцінити закон керування, оскільки сталі C_1 і C_2 є невідомими через невідомі початкові умови для функції $\psi(t)$. Це є його суттєвим недоліком.

Для конструювання оптимального регулятора цього недостатньо. Необхідно обов'язково знати моменти перемикання керувальної дії.

У цьому прикладі для замкненої системи це можна зробити, якщо знайти рівняння лінії перемикання:

$$u = f(y_1, y_2) = f(S, V) = 2u_{\max} S + V^2 \operatorname{sign} V = 0, \text{ або } 2u_{\max} y_1 + y_2^2 \operatorname{sign} y_2 = 0.$$

$$\text{При цьому } u = \begin{cases} +u_{\max} & \text{при } f < 0, \\ -u_{\max} & \text{при } f > 0. \end{cases}$$

Для розімкненої системи моменти перемикання знаходять за методом стикування розв'язків диференціальних рівнянь. У прикладі 1.5 маємо два інтервали часу (два інтервали керування). Тому необхідно знайти моменти часу:

t_1 – момент змінення знака керування;

$T = t_2$ – момент закінчення керування.

Нехай у початковий момент часу ($t = t_0 = 0$) тіло знаходиться в точці B (рисунок 1.11), тобто $S(t_0) = -S_0 = -y_{10}$; $V(t_0) = \dot{y}_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$.

Кінцеві значення координат: $S(t_2) = y_1(t_2) = 0$; $V(t_2) = \dot{y}_1(t_2) = y_2(t_2) = 0$.

При цьому з рисунка 1.11 видно, що перший інтервал керування є додатним ($u = +u_{\max}$), а другий – від'ємним ($u = -u_{\max}$).

Диференціальне рівняння $\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \pm u$ має знакозмінну праву частину,

його розв'язок має вигляд

$$y_1 = \pm \frac{u_{\max}}{2} t^2 + C_1 t + C_2, \quad (1.58)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Після диференціювання отримаємо

$$\dot{y}_1 = y_2 = \pm u_{\max} t + C_1. \quad (1.59)$$

Запишемо рівняння (1.58) і (1.59) для різних моментів часу:

– для $t = t_0 = 0$ (початок першого інтервалу)

$$\begin{cases} y_1(t_0) = +\frac{u_{\max}}{2} t_0^2 + C_{10} t_0 + C_{20} = -y_{10}; \\ \dot{y}_1(t_0) = y_2(t_0) = +u_{\max} t_0 + C_{10} = 0, \end{cases} \quad (1.60)$$

звідки $C_{10} = 0$, $C_{20} = -y_{10}$;

– для $t = t_1$ (кінець першого, початок другого інтервалів); оскільки функції y_1 і \dot{y}_1 є неперервними, можна виконати стикування розв'язків на межі першого й другого інтервалів:

$$\begin{cases} \frac{u_{\max}}{2} t_1^2 + C_{10} t_1 + C_{20} = -\frac{u_{\max}}{2} t_1^2 + C_{11} t_1 + C_{21}; \\ u_{\max} t_1 + C_{10} = -u_{\max} t_1 + C_{11}, \end{cases} \quad (1.61)$$

звідки отримуємо $C_{11} = 2u_{\max} t_1$; $C_{21} = -u_{\max} t_1^2 - y_{10}$;

- для $t = t_2 = T$ (кінець другого інтервалу):

$$\begin{cases} y_1(t_2) = -\frac{u_{\max}}{2} t_2^2 + C_{11} t_2 + C_{21} = 0; \\ \dot{y}_1(t_2) = -u_{\max} t_2 + C_{11} = 0, \end{cases} \quad (1.62)$$

звідки $C_{11} = u_{\max} t_2$; $C_{21} = -\frac{u_{\max}}{2} t_2^2$.

Прирівнюємо вирази для C_{11} і C_{21} . Тоді отримуємо відповідно

$$2u_{\max} t_1 = u_{\max} t_2, \text{ або } t_2 = T = 2t_1;$$

$$-u_{\max} t_1^2 - y_{10} = -\frac{u_{\max}}{2} t_2^2.$$

Після підстановки першого рівняння в друге отримуємо

$$u_{\max} t_1^2 - y_{10} = 0.$$

Звідси знаходимо:

- момент перемикавання керування $t_1 = \sqrt{y_{10} / u_{\max}}$;
- момент закінчення руху $t_2 = T = 2t_1 = 2\sqrt{y_{10} / u_{\max}}$.

У цьому прикладі було розглянуто систему другого порядку й отримано рівняння лінії перемикавання. Розв'язуючи задачу для систем більш високих порядків, отримуємо рівняння поверхні перемикавання в багатовимірному фазовому просторі. При цьому кількість перемикавань визначається відповідно до *теорема про n-інтервали*, яку 1953 року довів у своїх роботах О. А. Фельдбаум: *якщо характеристичне рівняння системи n-го порядку має тільки дійсні недодатні корені (від'ємні та нульові), процес керування матиме не більше (n – 1) перемикавань; якщо є комплексні корені (включаючи чисто уявні), то перемикавань може бути більше залежно від початкових умов [2].*

Можна зробити висновок, що оптимальна за швидкодією система має релейний перемикальний елемент, що керується з допомогою спеціального обчислювального пристрою. При цьому необхідно безперервно вимірювати всі n фазових координат, тобто регульовану величину і $(n – 1)$ її похідних, і подавати інформацію на вхід обчислювального пристрою.

Оскільки ідеальні диференціювальні ланки фізично не реалізуються, для систем високого порядку можна здійснити лише близькі до оптимальних системи. Крім того, для систем високого порядку знаходження поверхонь перемикавання є досить складною задачею, яку розв'язано лише для окремих випадків.

Приклад 1.6 Визначити закон змінення струму в якорі двигуна постійного струму з незалежним збудженням, що забезпечує кутове переміщення θ_0 протягом мінімального часу T при обмеженні струму якоря $|i| \leq i_{\max}$ і статичному моменті $M_c = 0$.

Рівняння, що описують динаміку двигуна, мають вигляд

$$d\omega/dt = ci/J; \quad d\theta/dt = \omega,$$

де ω – кутова швидкість двигуна; c – струмова стала двигуна; J – момент інерції

електропривода.

Уведемо такі позначення: $\omega = y_1$, $\theta = y_2$, $i = u$. Тоді рівняння двигуна матимуть вигляд

$$\begin{cases} dy_1 / dt = \varphi_1 = cu / J; \\ dy_2 / dt = \varphi_2 = y_1. \end{cases} \quad (1.63)$$

при початкових умовах $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$ і при кінцевих значеннях змінних $y_1(T) = 0$, $y_2(T) = \theta_0$.

Складаємо функцію Гамільтона: $H = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 = \frac{cu}{J} \psi_1 + y_1 \psi_2$.

Функція H є лінійною відносно u . Запишемо систему спряжених рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_2} = 0. \end{cases} \quad (1.64)$$

звідки отримуємо $\psi_2 = C_2$; $\psi_1 = -C_2 t + C_1$, де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Щоб функція H набула максимуму, необхідно, щоб ψ_1 і u мали однаковий знак, тобто

$$u = u_{\max} \text{sign} \psi_1 = i_{\max} \text{sign} \psi_1 = i_{\max} \text{sign}(C_1 - C_2 t).$$

Функція ψ_1 має один корінь $t_1 = C_1 / C_2$, тому знак керування u змінюється один раз:

$$u(t) = \begin{cases} i_{\max} & \text{при } t < t_1; \\ -i_{\max} & \text{при } t \geq t_1. \end{cases} \quad (1.65)$$

Визначимо момент перемикання t_1 , для чого використаємо перше рівняння системи (1.63). На першій ділянці при $t < t_1$ керування $u = i_{\max}$, тому $dy_1/dt = ci_{\max}/J$. При початкових умовах $y_1(0) = 0$ отримуємо розв'язок цього рівняння:

$$y_1 = \frac{c}{J} i_{\max} t.$$

При $t = t_1$ швидкість у кінці першої ділянки обчислюємо за формулою

$$y_1(t_1) = \frac{c}{J} i_{\max} t_1. \quad (1.66)$$

На другій ділянці при $t \geq t_1$ керування $u = -i_{\max}$, тому $dy_1/dt = -ci_{\max}/J$.

Розв'язок цього рівняння знаходимо за формулою

$$y_1 = -\frac{c}{J} i_{\max} t + C_3.$$

Сталу інтегрування C_3 визначимо за умови, що функція $y_1(t)$ при $t = t_1$ є неперервною і на другій ділянці справджується формула (1.66). Тоді отримаємо

$$C_3 = \frac{2c}{J} i_{\max} t_1; \quad y_1 = -\frac{c}{J} i_{\max} t + \frac{2c}{J} i_{\max} t_1.$$

При $t = T$ маємо $y_1(T) = 0$, тобто $0 = -\frac{c}{J} i_{\max} T + \frac{2c}{J} i_{\max} t_1$, звідки $t_1 = T/2$.

Час T визначимо за умови, що кутове переміщення за цей час дорівнює θ_0 . Тоді з другого рівняння системи (1.63) маємо

$$y_2 = \int_0^T y_1(t) dt = \theta_0, \quad \text{або} \quad \int_0^{T/2} \frac{c}{J} i_{\max} t dt + \int_{T/2}^T \left(-\frac{c}{J} i_{\max} t + \frac{2c}{J} i_{\max} t_1 \right) dt = \theta_0,$$

звідки знаходимо

$$T = 2 \sqrt{\frac{J \theta_0}{c i_{\max}}}.$$

Запишемо закони змінення струму якоря і кутової швидкості під час відпрацювання двигуном заданого переміщення:

$$i(t) = \begin{cases} +i_{\max} & \text{нпу } t < T/2; \\ -i_{\max} & \text{нпу } T/2 < t \leq T. \end{cases} \quad \omega(t) = \begin{cases} \frac{c}{J} i_{\max} t & \text{нпу } t < T/2; \\ \frac{c}{J} i_{\max} (T-t) & \text{нпу } T/2 < t \leq T. \end{cases}$$

Закон змінення напруги на якорі можна визначити з рівняння

$$u_{\text{я}} = iR + c\omega.$$

Цей закон має вигляд

$$u_{\text{я}}(t) = \begin{cases} i_{\max} R + \frac{c^2}{J} i_{\max} t & \text{нпу } t < T/2; \\ -i_{\max} R + \frac{c^2}{J} i_{\max} (T-t) & \text{нпу } T/2 < t \leq T. \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація оптимального керування

Вище було зазначено, що функція ψ_i є імпульсом і задає напрямок руху системи. Розглянемо розімкнену систему керування об'єктом, що

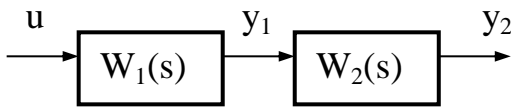


Рисунок 1.12 – Структурна схема об'єкта керування

являє собою послідовне з'єднання двох аперіодичних ланок першого порядку (рисунок 1.12).

Запишемо рівняння ланок у нормальній формі Коші:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{k_1 u - y_1}{T_1} = \varphi_1; \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{k_2 y_1 - y_2}{T_2} = \varphi_2. \quad (1.67)$$

Функція Гамільтона має вигляд

$$H = \psi_1 \varphi_1 + \psi_2 \varphi_2 = \left(\frac{k_1}{T_1} u - \frac{y_1}{T_1} \right) \psi_1 + \left(\frac{k_2}{T_2} y_1 - \frac{y_2}{T_2} \right) \psi_2. \quad (1.68)$$

Зі спряжених рівнянь

$$\dot{\psi}_1 - \frac{1}{T_1} \psi_1 = -\frac{k_2}{T_2} \psi_2; \quad \dot{\psi}_2 - \frac{1}{T_2} \psi_2 = 0. \quad (1.69)$$

знаходимо

$$\psi_2 = C_2 e^{t/T_2}; \quad \psi_1 = C_0 e^{t/T_1} - C_1 e^{t/T_2}. \quad (1.70)$$

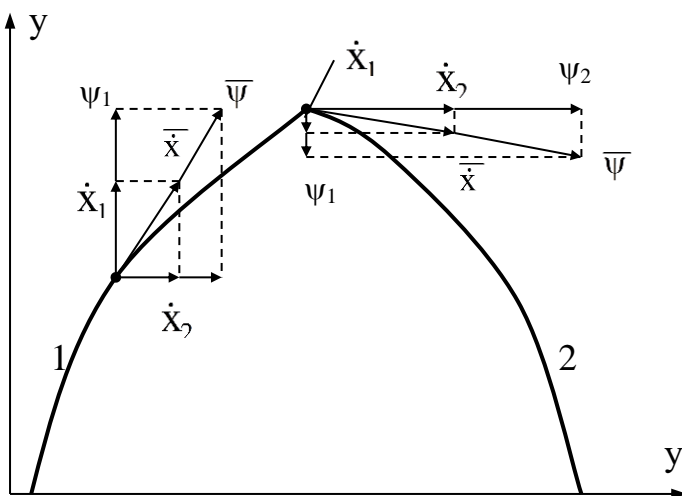


Рисунок 1.13 – До геометричної інтерпретації оптимального керування

Для розглядуваного об'єкта керування визначається вектором $\bar{\psi}$, складова якого ψ_1 змінює знак один раз, а складова ψ_2 знака не змінює.

Розглянемо оптимальне керування на фазовій площині $(y_1; y_2)$ (рисунок 1.13). Виходячи з початкових умов, припустимо, що

перший інтервал є додатним, отже, і функції ψ_1 і ψ_2 також є додатними, оскільки вони задають напрямок розгону. Побудуємо на фазовій площині ділянку фазової траєкторії 1, що відповідає розгону. Вектор фазової швидкості \bar{y} буде спрямованим по дотичній до траєкторії зі складовими (1.67) $\dot{y}_1 = \varphi_1, \dot{y}_2 = \varphi_2$. Для набуття функції H максимуму необхідно, щоб знаки \dot{y}_1, ψ_1 і \dot{y}_2, ψ_2 збігалися, тобто вектори $\bar{\varphi}$ і $\bar{\psi}$ були паралельними. У деякий момент часу функція ψ_1 змінює свій знак на від'ємний (1.70). Тому необхідно, щоб змінився знак і складової вектора фазової швидкості \dot{y}_1 . Це можна зробити тільки шляхом змінення знака керувальної дії з $+u$ на $-u$. При цьому рух буде відбуватися по траєкторії 2 (гальмування). Таким чином, і після змінення знака вектори $\bar{\varphi}$ і $\bar{\psi}$ залишаються паралельними. Це і є ознакою оптимальності фазової траєкторії.

1.6 Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів

Аналітичним конструюванням регуляторів (АКР) називають методику синтезу оптимального регулятора для заданого об'єкта при заданих обмеженнях і критерії оптимальності у квадратичній інтегральній формі вигляду

$$I = \int_0^{\infty} \left[y^2 + r_1 \dot{y}^2 + \dots + r_n (y^{(n)})^2 \right] dt.$$

АКР вперше запропонували О. М. Люттов і Р. Калман [1].

Суть задачі АКР полягає у визначенні варіаційними методами керувальної дії, яка мінімізує функціонал, що характеризує відхилення траєкторії справжнього руху системи від бажаного. Під час аналітичного конструювання регуляторів обчислюють закон керування в його аналітичній формі як деяку функцію фазових координат початкової системи. Таким чином, спочатку для заданого об'єкта керування при

наявних обмеженнях обчислюють оптимальну траєкторію руху системи, а потім шляхом АКР визначають диференціальне рівняння (алгоритм керування) регулятора, що гарантує мінімальне відхилення траєкторії руху об'єкта керування від знайденої оптимальної траєкторії.

Узагалі рівняннями, що описують поведінку керувального пристрою, можуть бути рівняння Ейлера, але вони мають певні обмеження. Крім того, ці рівняння мають неприємну властивість: якщо час процесу керування у неперервній системі є скінченним, то рівняння Ейлера, що розглядають разом з рівняннями об'єкта, відповідають нестійкій системі регулювання. Так, для лінійного об'єкта і квадратичного функціонала рівняння Ейлера є лінійними, причому серед коренів характеристичного рівняння обов'язково є як ліві, так і праві.

Якщо приєднання регулятора робить систему нестійкою, то це приєднання не може бути тривалим. Якщо відомо, що процес оптимального керування має спорадичний (одиничний, від випадку до випадку) характер, то можна використовувати нестійку систему, вмикаючи її лише в той момент, коли виникла потреба здійснити оптимальне керування, і обов'язково вимикаючи її після завершення керування. У тих випадках, коли регулятор має бути весь час підімкненим до об'єкта, необхідно вжити заходів щодо забезпечення стійкості системи.

Цю задачу можна розв'язати шляхом відкидання у розв'язку рівняння складових, що відповідають додатним кореням. При цьому час керування стає нескінченно великим, проте функціонал набуває найменше з усіх можливих значення для різних T .

Розглянемо окремі випадки такого роду систем і знайдемо рівняння екстремалі, що реалізує екстремум функціоналу (1.8) для цих випадків.

Нехай критерієм якості роботи системи є функціонал вигляду

$$I_1 = \int_0^{\infty} (y^2 + r_1 \dot{y}^2) dt. \quad (1.71)$$

Для знаходження екстремалі складаємо рівняння Ейлера (1.14). У цьому випадку $F = y^2 + r_1 \dot{y}^2$, а отже,

$$\frac{\partial F(y, \dot{y}, t)}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(y, \dot{y}, t)}{\partial \dot{y}} \right) = 2y - 2r_1 \ddot{y} = 0, \text{ або } y - r_1 \ddot{y} = 0. \quad (1.72)$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$1 - r_1 s^2 = (1 + s\sqrt{r_1})(1 - s\sqrt{r_1}) = 0. \quad (1.73)$$

Для знаходження екстремалі необхідно враховувати тільки корені рівняння $1 + s\sqrt{r_1} = 0$, інакше система буде нестійкою. Таким чином рівняння $1 + s\sqrt{r_1} = 0$, інакше система буде нестійкою. Таким чином, розв'язок рівняння (1.72) для стійкої системи має вигляд

$$y = Ce^{s_1 t}, \text{ де } s_1 = -1/\sqrt{r_1}.$$

Сталу C визначають із початкових умов ($t = 0, y = y_0$):

$$y = y_0 e^{s_1 t}. \quad (1.74)$$

Рівняння (1.74) є рівнянням екстремалі. Зазначимо, що екстремаль відповідає розв'язку диференціального рівняння першого порядку: $T\dot{y} + y = 0$ з характеристичним рівнянням $Ts + 1 = 0$, де T – постійна часу. Вагову константу r_1 можна подати через цю постійну часу, якщо прирівняти поліноми:

$$1 + s\sqrt{r_1} = 1 + Ts.$$

Звідси $r_1 = T^2$, і тоді рівняння екстремалі набуде вигляду

$$y = y_0 e^{-t/T}. \quad (1.75)$$

Таким чином, при мінімізації функціоналу вигляду (1.71) структуру або параметри системи слід підбирати так, щоб перехідний процес у системі наближався до аперіодичного (1.75). Оскільки величину T можна взяти різною, отримаємо поле екстремалей (рисунок 1.14), з яких вибира-

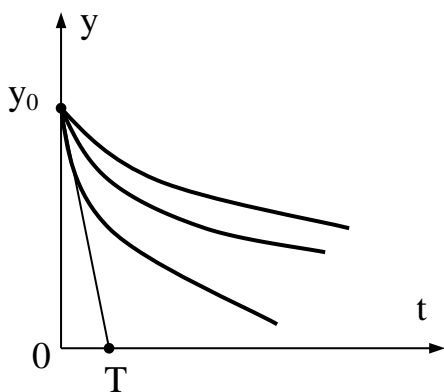


Рисунок 1.14 – Поле екстремалей

ємо таку, що найбільш повно відповідає вимогам до системи.

Наприклад, якщо $|\dot{y}| \leq \dot{y}_{np}$, то при $t = 0$

$|\dot{y}_0| = |\dot{y}_{max}| \leq \dot{y}_{np}$. Тоді $\dot{y}_{np} = \frac{|y_0|}{T}$; $T = \frac{|y_0|}{\dot{y}_{np}}$, де

\dot{y}_{np} – допустиме значення похідної від вихідної координати.

Зазначимо, що при $T = 0$ отримуємо звичайний квадратичний інтегральний критерій

$$I_2 = \int_0^{\infty} y^2 dt. \quad (1.76)$$

У цьому випадку рівнянням екстремалі є $y = 0$. Фізично це означає, що при ступінчастому змінненні керувальної дії вихідна координата y має змінитися стрибком від y_0 до $y = 0$. Зрозуміло, що в інерційній системі такий режим не можна реалізувати. Зазначимо також, що намагання прискорити зміннення вихідної координати призводить до різкого збільшення коефіцієнта підсилення в ланцюгу зворотного зв'язку, що, зі свого боку, сприяє збільшенню коливальності процесу.

З'ясуємо на конкретному прикладі різницю синтезу систем за критеріями (1.71) і (1.76).

Приклад 1.7 Розглянемо слідкувальну систему заданої структури (рисунок 1.15), яка описується диференціальним рівнянням другого порядку.

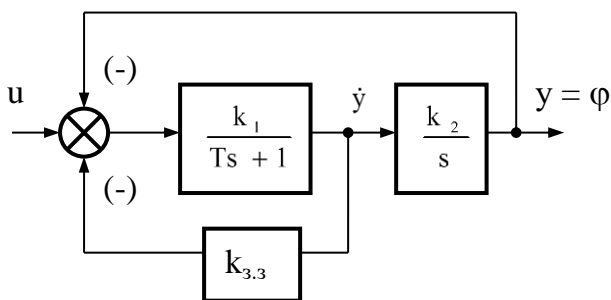


Рисунок 1.15 – Структурна схема системи

яка описується диференціальним рівнянням другого порядку. Для поліпшення якості перехідного процесу виконавчий механізм охоплено жорстким від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю. Необхідно визначити

оптимальне значення коефіцієнта зворотного зв'язку $k_{3.3}$, при якому критерії I_1 та I_2 набувають мінімального значення.

Передавальна функція розімкненої системи має вигляд

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)},$$

де
$$W_1(s) = \frac{k_1}{Ts + 1 + k_1 k_{3.3}} \frac{k_2}{s},$$

а диференціальне рівняння –

$$T\ddot{y} + (1 + k_1 k_{3.3})\dot{y} + k_0 y = k_0 u, \text{ де } k_0 = k_1 k_2. \quad (1.77)$$

Нехай вхідний сигнал змінюється стрибком від u до 0, тоді, узявши

$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ і позначивши $\frac{1 + k_1 k_{3.3}}{k_0} = a_1, \frac{T}{k_0} = a_0$, отримаємо:

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + y = 0. \quad (1.78)$$

Визначимо величини I_1 та I_2 через коефіцієнти диференціального рівняння. Для цього помножимо (1.78) почергово на y і \dot{y} . Тоді отримаємо

$$\begin{cases} a_0 y \ddot{y} + a_1 y \dot{y} + y^2 = 0, \\ a_0 \dot{y} \ddot{y} + a_1 \dot{y}^2 + \dot{y} y = 0. \end{cases} \quad (1.79)$$

Ураховуючи, що $y(\infty) = \dot{y}(\infty) = 0$, обчислимо такі інтеграли:

$$\int_0^{\infty} y \ddot{y} dt = y \dot{y} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \dot{y}^2 dt = -y_0 \dot{y}_0 - I_{11} = -I_{11} \text{ (інтегрування частинами);}$$

$$\int_0^{\infty} y \dot{y} dt = \int_{y_0}^{y_{\infty}} y dy = -y_0^2 / 2 = -1/2; \quad \int_0^{\infty} \dot{y} \ddot{y} dt = \int_{\dot{y}_0}^{\dot{y}_{\infty}} \dot{y} d\dot{y} = -\dot{y}_0^2 / 2 = 0.$$

Тоді після інтегрування системи (1.79) отримаємо

$$\begin{cases} -a_0 I_{11} - a_1 / 2 + I_2 = 0, \\ a_1 I_{11} - 1/2 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$I_{11} = \frac{1}{2a_1}; \quad I_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{2a_1} = \frac{1}{2a_1} (a_1^2 + a_0);$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} (y^2 + r_1 \dot{y}^2) dt = I_2 + r_1 I_{11} = \frac{1}{2a_1} (a_1^2 + a_0 + r_1),$$

або

$$I_1 = \frac{k_0}{2(1+k_1 k_{3.3})} \left[\left(\frac{1+k_1 k_{3.3}}{k_0} \right)^2 + \frac{T}{k_0} + r_1 \right]$$

Для знаходження $k_{3.3}$, що відповідає $I_1 = \min$, запишемо:

$$\frac{\partial I_1}{\partial k_{3.3}} = \frac{1}{k_0} - \frac{(a_0 + r_1)k_0}{(1+k_1 k_{3.3})} = 0.$$

Звідси оптимальне значення $k_{3.3}$ буде таким: $k_{3.3_1} = \frac{(k_0 \sqrt{a_0 + r_1} - 1)}{k_1}$. За умови, що

коефіцієнт, який відповідає $I_2 = \min$ і $r_1 = 0$,

$$k_{3.3_2} = \frac{(k_0 \sqrt{a_0} - 1)}{k_1}.$$

Візьмемо, наприклад, $T = 0,5$ с, $k_1 = 200$, $k_2 = 0,25$ с⁻¹, тоді $k_0 = 50$ с⁻¹, $a_0 = T/k_0 = 0,5/50 = 0,01$ с².

Оцінку I_1 знаходимо, задаючи r_1 . Поставимо вимогу, щоб перехідний процес наближався до експоненти з постійною часу $T = 0,1$ с, тоді $r_1 = T^2 = 0,01$ с², відповідні коефіцієнти зворотного зв'язку мають такі значення:

$$k_{3.3_1} = \frac{(50\sqrt{0,01+0,01}-1)}{200} = 0,03; \quad k_{3.3_2} = \frac{(50\sqrt{0,01}-1)}{200} = 0,02.$$

Якість перехідного процесу визначається коефіцієнтом демпфірування ξ , який за умови (1.78) є таким:

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} = \frac{1+k_1 k_{3.3}}{2\sqrt{k_0 T}}.$$

З урахуванням значень $k_{3.3_1}$ і $k_{3.3_2}$ отримаємо відповідні значення коефіцієнта демпфірування: $\xi_1 = 0,7$; $\xi_2 = 0,5$.

На рисунку 1.16 показано результати моделювання перехідного процесу з допомогою пакета Matlab для обох випадків. З графіків видно, що перерегулювання в першому випадку ($k_{3.3_1} = 0,03$; $\xi_1 = 0,7$; неперервна лінія) не

перевищує 5 %, а в другому ($k_{3.3_1} = 0,02$; $\xi_1 = 0,5$; пунктирна лінія) – становить майже 20 %, тобто вибір $k_{3.3}$ за критерієм I_1 (1.71) забезпечує менше r_1 приведе до перерегулювання, ніж за критерієм I_2 (1.76). Подальше збільшення r_1 приведе до збільшення $k_{3.3_1}$ і відповідно ξ_1 . При цьому зменшиться перерегулювання, але збільшиться час перехідного процесу.

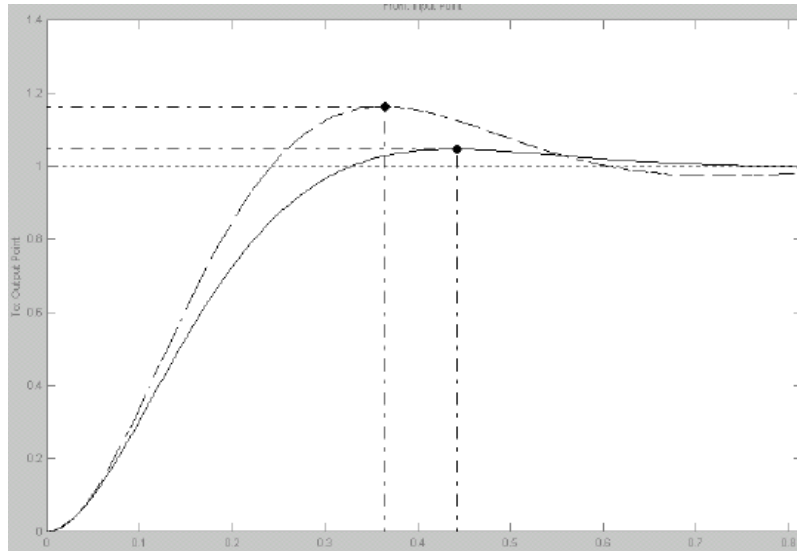


Рисунок 1.16 – Перехідні процеси у системі при $k_{3.3_1} = 0,03$ (неперервна лінія) і $k_{3.3_2} = 0,02$ (пунктирна лінія)

Таким чином, при заданій структурі об’єкта немає змоги реалізувати оптимальний перехідний процес, що мінімізує критерії I_1 та I_2 при будь-яких $k_{3.3_1}$ і $k_{3.3_2}$. Це зумовлено інерційністю об’єкта керування, що залишає можливість реалізації процесу, лише близького до оптимального.

Для врахування обмежень керувального сигналу $u(t)$ за потужністю й величиною часто застосовують критерій вигляду

$$I = \int_0^{\infty} [y^2(t) + cu^2(t)] dt.$$

Мінімізація цього інтеграла мінімізує величини y і u з урахуванням вагового коефіцієнта c .

Приклад 1.8 Об'єкт керування описується лінійним диференціальним рівнянням вигляду

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + y = ku. \quad (1.80)$$

Знайти закон керування u , який забезпечує мінімум функціоналу (1.9) під час переходу з початкового стану y_0, \dot{y}_0 у кінцевий $y(\infty) = \dot{y}(\infty) = 0$.

Маємо варіаційну задачу Лагранжа на умовний екстремум – знаходження мінімуму функціоналу (1.9) за наявності рівняння зв'язку, яке отримуємо з рівняння об'єкта:

$$\varphi = a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + y - ku = 0. \quad (1.81)$$

Складемо допоміжну функцію:

$$\bar{F} = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(y, \dot{y}, \ddot{y}, u) = y^2 + cu^2 + (a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + y - ku)\lambda,$$

де λ – множник Лагранжа.

Оскільки допоміжна функція містить першу й другу похідні, а також дві змінні y і u , рівняння екстремалі знайдемо як розв'язок системи рівнянь Ейлера – Пуассона (1.19):

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \ddot{y}} \right) = 2y + \lambda - a_1\dot{\lambda} + a_0\ddot{\lambda} = 0; \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{u}} \right) = 2cu - k\lambda = 0. \end{cases} \quad (1.82)$$

З другого рівняння отримуємо $u = k\lambda / 2c$, тобто для визначення оптимального керування u необхідно знайти λ .

Додамо до рівнянь (1.82) рівняння зв'язку (1.81) і запишемо систему в зображеннях за Лапласом:

$$\begin{cases} 2y + \lambda - a_1\lambda s + a_0\lambda s^2 = 0; \\ 2cu - k\lambda = 0; \\ a_0s^2y + a_1sy + y - ku = 0. \end{cases} \quad (1.83)$$

Виключивши з цієї системи λ і u , отримаємо

$$c(a_0s^2 + a_1s + 1)(a_0s^2 - a_1s + 1)y + k^2y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$s^4 + \left(\frac{2}{a_0} - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) s^2 + \frac{1}{a_0^2} \left(1 + \frac{k^2}{c} \right) = 0. \quad (1.84)$$

Таке саме характеристичне рівняння отримаємо й під час розв'язання системи (1.83) відносно λ .

Поліном (1.84) можна розкласти на два із симетричним розташуванням коренів у правій і лівій півплощинах. Оскільки система передбачається стійкою, враховуємо тільки ліві корені s_1 і s_2 . Тоді розв'язок для λ і y буде таким:

$$\lambda = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}; \quad y = C_3 e^{s_1 t} + C_4 e^{s_2 t}.$$

Здиференціюємо останнє рівняння:

$$\dot{y} = C_3 s_1 e^{s_1 t} + C_4 s_2 e^{s_2 t}.$$

Тоді можна записати систему

$$\begin{cases} \lambda = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}; \\ y = C_3 e^{s_1 t} + C_4 e^{s_2 t}; \\ \dot{y} = C_3 s_1 e^{s_1 t} + C_4 s_2 e^{s_2 t}. \end{cases}$$

Із останніх двох рівнянь знаходимо $e^{s_1 t}$ і $e^{s_2 t}$ як функції координат y і \dot{y} (ці функції є лінійними) і, підставивши їх у перше рівняння, отримуємо лінійну залежність координати λ від координат y і \dot{y} :

$$\lambda = b_{11} y + b_{22} \dot{y}. \quad (1.85)$$

Тоді оптимальне керування має вигляд

$$u = \frac{k}{2c} \lambda = \frac{k}{2c} (b_{11} y + b_{22} \dot{y}) = b_1 y + b_2 \dot{y}. \quad (1.86)$$

Відповідна передавальна функція керувального пристрою буде такою:

$$W_{kn}(s) = b_1 + b_2 s, \quad \text{де } b_1 = \frac{k}{2c} b_{11}; \quad b_2 = \frac{k}{2c} b_{22}. \quad (1.87)$$

Таким чином, квадратичному критерію оптимальності вигляду (1.9) відповідає лінійний оптимальний закон керування (1.86), для здійснення якого необхідно мати зворотні зв'язки за всіма змінними стану системи. При цьому замкнена система залишається лінійною (рисунок 1.17). Це можливо тільки при невеликих відхиленнях координат системи від положення рівноваги. Саме тому метод синтезу регулятора за квадратичним критерієм іноді називають *опти-*

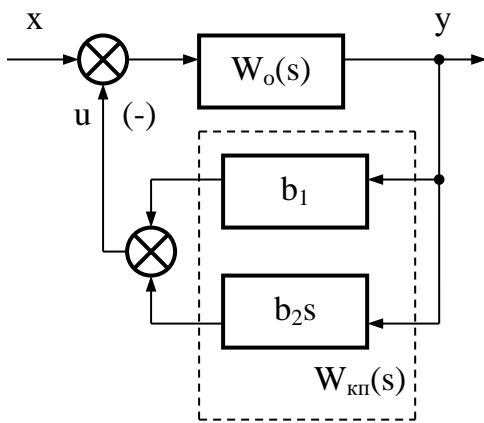


Рисунок 1.17 – Структурна схема системи

мальною стабілізацією. Зазначимо також, що функціонали, відмінні від квадратичних, зумовлюють нелінійні закони керування.

Визначити коефіцієнти b_1 і b_2 можна так. Оскільки характеристичне рівняння замкненої системи є рівнянням другого порядку і має корені s_1 і s_2 , його можна подати в такому вигляді:

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1s_2 = 0. \quad (1.88)$$

Тут s_1 і s_2 – корені характеристичного рівняння об'єкта (1.80) з урахуванням закону оптимального керування $u = \kappa\lambda / 2c$.

З іншого боку, розв'язавши разом рівняння об'єкта (1.80) і регулятора (1.86), отримаємо

$$a_0\ddot{y} + (a_1 - kb_2)\dot{y} + (1 - kb_1)y = 0.$$

Тоді характеристичне рівняння матиме вигляд

$$s^2 + \frac{a_1 - kb_2}{a_0}s + \frac{1 - kb_1}{a_0} = 0. \quad (1.89)$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях у рівняннях (1.88) і

(1.89) і отримуємо $s_1 + s_2 = -\frac{a_1 - kb_2}{a_0}$; $s_1s_2 = \frac{1 - kb_1}{a_0}$.

Звідси знаходимо $b_1 = \frac{1 - a_0s_1s_2}{k}$; $b_2 = \frac{a_1 + a_0(s_1 + s_2)}{k}$.

Визначивши з (1.84) корені s_1 і s_2 , можна знайти числові значення коефіцієнтів b_1 і b_2 .

Аналогічно можна розв'язувати задачу і для об'єктів більш високих порядків, але обчислення стають більш громіздкими.

Кількість методів аналітичного конструювання регуляторів з поширенням на різні випадки обмежень останнім часом суттєво збільшилися. Розв'язання загальних задач АКР лінійних об'єктів зведено до рівнянь для визначення коефіцієнтів оптимальних керувань. Більш

глибоко проблему аналітичного конструювання регуляторів розглянуто в спеціальному курсі «Системи оптимального керування».

2 АДАПТИВНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

2.1 Адаптивні системи

Під час проектування автоматичних систем їх параметри розраховують за припущеннями, що статичні й динамічні характеристики об'єкта керування й усіх елементів системи є відомими й не змінюються протягом терміну експлуатації та при змінненні зовнішніх умов. Однак характеристики об'єкта й деяких елементів системи бувають відомими лише приблизно, змінюються через фізичне застарівання і, крім того, залежать від зовнішніх умов. Завдяки запасам стійкості система керування буде задовільно працювати й у тому разі, коли практичні характеристики об'єкта трохи відрізняються від розрахункових. Однак у деяких випадках діапазон змінення статичних і динамічних характеристик є настільки великим, що керування об'єктом з допомогою найпростішої системи з постійними параметрами виявляється або незадовільним, або зовсім неможливим (утрата стійкості). У таких випадках можна застосувати систему керування зі змінними властивостями.

Процес змінення властивостей системи, що дає змогу їй досягти найкращого або принаймні задовільного функціонування за змінних умов називають *адаптацією*. Системи, що здійснюють процес адаптації, називають *адаптивними* [2]. Отже, адаптивна САК – це система, яка під час виконання основної задачі керування шляхом змінення параметрів і структури регулятора поповнює нестачу інформації про об'єкт керування і зовнішні збурення, що діють на нього, і тим самим поліпшує якість свого функціонування. Пристрій, що реалізує алгоритм адаптації, називають *адаптером*.

Особливість структури адаптивних системи полягає в наявності додаткового контуру – *контур адаптації* (рисунок 2.1), призначеного для

для перероблення інформації про змінні умови роботи й подальшого впливу на регулятор основного контуру керування. Адаптер у загальному випадку отримує інформацію про вхідну дію x , збурення f , вихідну величину y і діє на керувальний пристрій основного контуру.

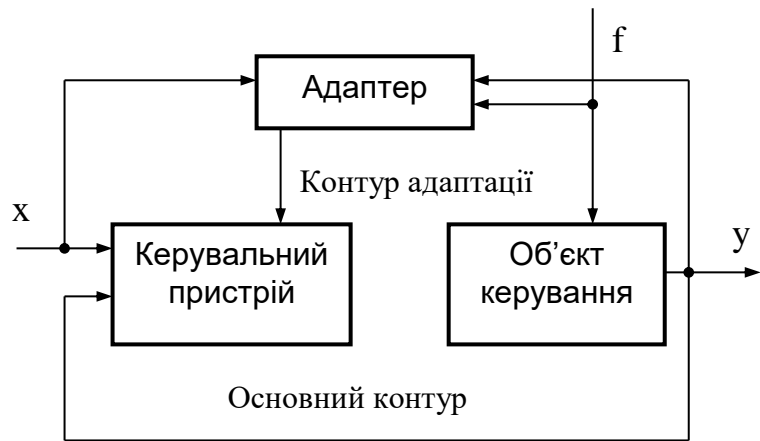


Рисунок 2.1 – Функціональна схема адаптивної системи

Отже, для контуру адаптації об'єктом керування є вся основна САК.

Слід зазначити, що адаптивні системи давно існують у природі. Властивість адаптації чітко виявляється, наприклад, у тому, що живі організми додержують свої параметри (наприклад, температуру) в припустимих фізіологічних межах при значному зміні умов, у яких існує організм.

Характерною ознакою адаптивних систем є відсутність повної апріорної (такої, що відома наперед) інформації про об'єкт керування, зовнішні збурення й граничні умови, тобто адаптивній системі властива невизначеність. Функціонування системи спрямоване на розкриття цієї невизначеності, тобто знаходження такого стану, при якому задовольняється певний критерій.

Розкриття невизначеності адаптивних систем забезпечується завдяки такому:

- надмірність (складність) системи, яка виявляється у багатоступеневості, багатоконтурності й т. д.;
- логічність її дії подібно до логічного мислення людини;

– прогнозування стану системи й аналіз накопиченої інформації з метою самонавчання.

Оптимальне функціонування системи може розраховуватись на основі аналізу інформації про її стан. Такі системи називають *аналітичними*, якщо оптимальний режим роботи визначається внаслідок пошуку умов екстремуму критерію ефективності, то системи називають *пошуковими* [8]. У цьому випадку система ніби ставить серії експериментів і отримує з них дані, необхідні для поліпшення своєї якості.

Стан системи можна змінювати шляхом змінення керувальних впливів, параметрів настроєння й структури системи. Ці зміни називають *контрольованими*.

Залежно від обсягу цих змін адаптивні системи поділяють на такі:

- *екстремальні*, у яких можна змінювати лише керувальні впливи;
- *самоналагоджувані*, у яких також змінюються параметри системи;
- *самоорганізовані*, у яких крім керувальних впливів і параметрів змінюється ще й структура системи;
- *научувані*, у яких до того ж може змінюватись алгоритм роботи, а в разі самонавчання – і критерій ефективності.

За способом здійснення контрольованих змін адаптивні системи поділяють на такі:

- пасивні, у яких зміни здійснюються за наперед розробленою програмою, наприклад, оброблення початкової інформації (висота, швидкість, атмосферні умови та ін.) у системі керування автопілотом;
- активні, у яких контрольовані зміни наперед не визначено, а зумовлено ситуацією, що склалася.

Зазначимо також, що адаптивні системи можуть працювати за замкненими і розімкненими циклами: у першому випадку контрольовані зміни аналізуються, у другому – не аналізуються. Звичайно, що найдосконалішими є аналітичні активні замкнені научувані системи.

2.2 Екстремальні системи керування

Історично першими адаптивними системами були системи екстремального керування (СЕК). Початок теорії екстремальних систем поклали 1948 року російські вчені В. В. Козакевич і Ю. С. Хлебцевич [2].

Системою екстремального керування називають систему, у якій автоматично відшукується й підтримуються режим роботи, що характеризується максимально (мінімально) можливим значенням показника якості. Цей показник називають також *показником екстремуму*, або *цільовою функцією*. У загальному випадку під час екстремального керування визначають екстремум статичної характеристики нелінійного нестационарного інерційного об'єкта, на який діють збурення, що змінюють положення екстремуму в просторі керувальних дій.

Нехай статична характеристика об'єкта має екстремум

$$I = f(u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (2.1)$$

де I – показник екстремуму; u_i – керувальні параметри.

Тоді система екстремального керування має виводити й утримувати робочу точку в глобальному екстремумі.

Нехай об'єкт має статичну характеристику $I = f(u)$ з явно вираженим екстремумом, координати якого змінюються (дрейфують) з часом. Якщо значення $u = u^*$, при якому набувається екстремум, є фіксованим, тобто має місце тільки вертикальний дрейф статичної характеристики (рисунок 2.2, а), або це значення змінюється за наперед заданим законом, то достатньо застосувати систему або стабілізації, або програмного керування.

Якщо крім вертикального спостерігається також горизонтальний дрейф статичної характеристики (рисунок 2.2, б), спричинений змінням

зовнішніх і внутрішніх збурень за наперед невідомим законом, то ці системи не зможуть забезпечити підтримку екстремального значення I . Саме в цьому випадку і необхідно застосовувати СЕК, що змінюють керувальні впливи, при яких забезпечиться рух системи до екстремуму критерію та утримання її в точці екстремуму.

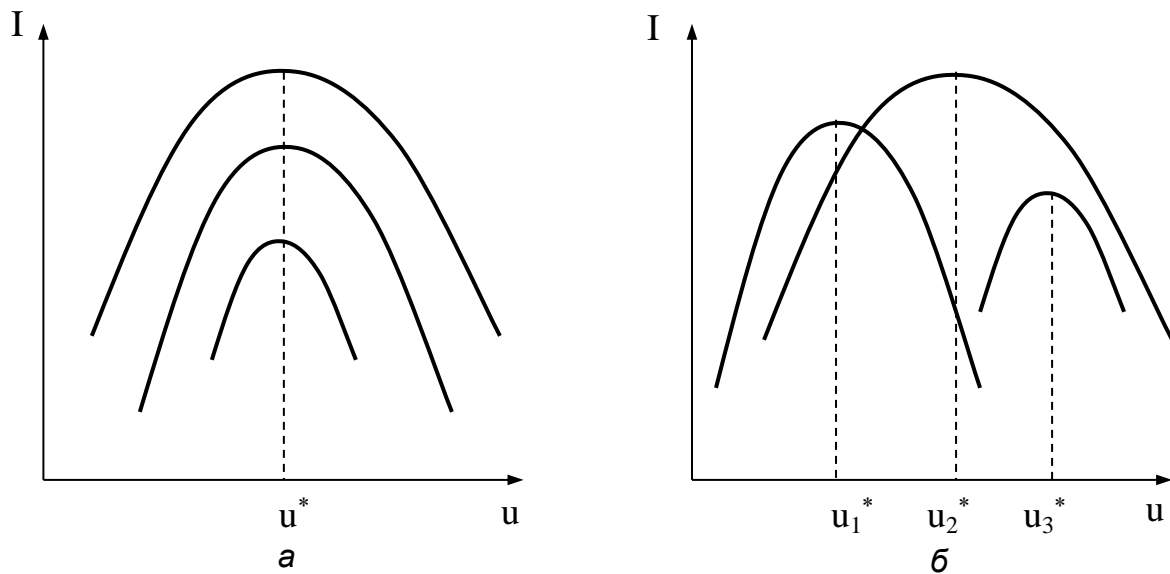


Рисунок 2.2 – Статичні характеристики об'єкта: а – з вертикальним дрейфом екстремуму; б – з вертикальним і горизонтальним дрейфом екстремуму

Прикладом об'єкта з екстремальною характеристикою може бути топкова установка. За каналом «витрата повітря на горіння» статична характеристика установки має екстремум, схожий з наведеним на рисунку 2.2. При $u < u^*$ має місце неповне згорання палива, при $u > u^*$ надлишок повітря знижує температуру топкових газів. При зміні витрати, або якості палива значення u , при якому $I = \max$, змінюється. Задача СЕК у цьому випадку полягає у зміні подачі повітря до значень, що забезпечують найкращі умови згорання палива.

Об'єкти екстремального керування можна класифікувати за такими ознаками: кількість керувальних параметрів, кількість екстремумів

характеристики об'єкта, обсяг апріорної інформації про об'єкт, інерційність об'єкта.

Якщо в об'єкті всього один керувальний параметр ($m = 1$), то його називають *однопараметричним*, якщо їх кілька ($m > 1$), – *багатопараметричним*.

У найпростішому випадку об'єкт екстремального керування є однопараметричним, однокрестимальним, а його статична характеристика – неперервною і неперервно диференційованою функцією. Інерційність об'єкта часто не враховують, оскільки головним у системах екстремального керування є відслідковування дрейфу екстремуму статичної характеристики об'єкта. Тому екстремальні системи часто називають *статичними самоналагоджувальними*.

Екстремальні системи можна класифікувати за такими ознаками [9]:

– за способом формування пошукового сигналу: з безпосереднім вимірюванням похідної, із запам'ятовуванням екстремуму, крокового типу, із зовнішнім пошуковим сигналом та ін;

– за видом сигналів: безперервні й дискретні, детерміновані й стохастичні;

– за кількістю керувальних впливів: одно-, дво- і багатоканальні.

Найбільшого поширення набули одноканальні СЕК завдяки відносній простоті реалізації й різкому поліпшенню динамічних показників якості роботи системи. Розглянемо принципи дії деяких систем.

Системи екстремального керування з безпосереднім вимірюванням похідної

У цих системах необхідно вимірювати похідні dl/du або dl/dt або принаймні визначати знак похідної dl/du .

Як приклад розглянемо дизель-генератор, що працює паралельно з енергосистемою. Необхідно забезпечити таке керування цим агрегатом, щоб його коефіцієнт корисної дії η був завжди максимальним. Унаслідок випадкової зміни параметрів установки залежність η від витрати палива q , що подається до дизеля, $\eta = f(q)$ є нестабільною. Екстремальним значення

Як приклад розглянемо дизель-генератор, що працює паралельно з енергосистемою. Необхідно забезпечити таке керування цим агрегатом, щоб його коефіцієнт корисної дії η був завжди максимальним. Унаслідок випадкової зміни параметрів установки залежність η від витрати палива q , що подається до дизеля, $\eta = f(q)$ є нестабільною. Екстремальним значення η буде за умови $d\eta/dq = 0$. Тому для забезпечення екстремального керування дизель-генератором необхідно обчислити η , визначити його похідну за q і так здійснювати керування, щоб ця похідна завжди дорівнювала нулю. Функціональну схему СЕК для цього випадку

зображено на рисунку 2.3.

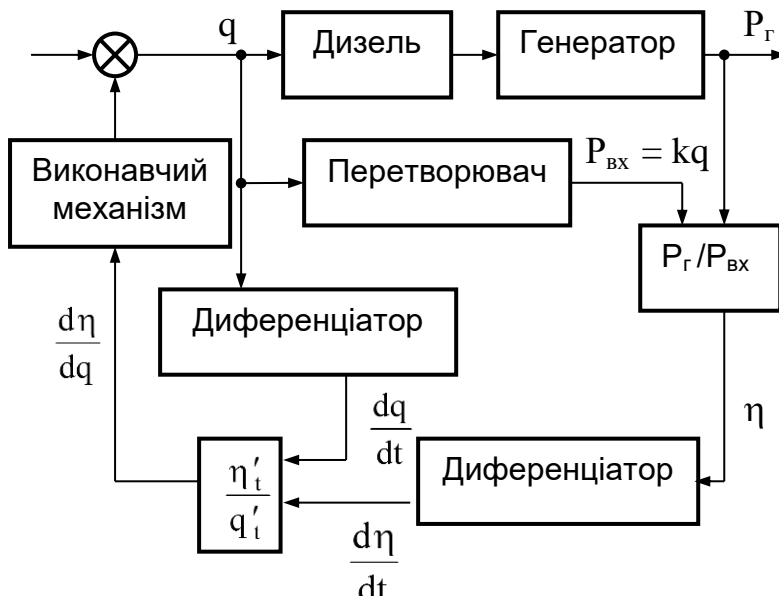


Рисунок 2.3 – Функціональна схема СЕК з безпосереднім вимірюванням похідної

Інформація про вхідну потужність $P_{вх}$, яка є пропорційною до витрат палива q , і потужність генератора P_e дає змогу безперервно вимірювати ККД установки: $\eta = P_e / P_{вх}$. Диференціюванням величин η і q за часом з подальшим діленням похідних можна визначити

похідну $d\eta/dq$, пропорційну до керувальної дії, що надходить на виконавчий механізм, який відповідно до знака і величини похідної $d\eta/dq$ змінює витрату палива. Оскільки швидкість змінення q є пропорційною до

похідної $d\eta/dq$, такі СЕК іноді називають *системами з пропорційним керуванням*.

Зазначимо, що при вимірюванні похідної $d\eta/dt$ замість $d\eta/dq$ функціонування системи не зміниться, якщо об'єкт є безінерційним.

Системи екстремального керування із запам'ятовуванням екстремуму

Принцип дії цих систем ґрунтується на безперервному порівнянні поточного значення критерію ефективності з його екстремальним значенням, що зберігається у запам'ятовувальному пристрої [9]. Функціональну схему системи, у якій реалізується метод запам'ятовування екстремуму, показано на рисунку 2.4.

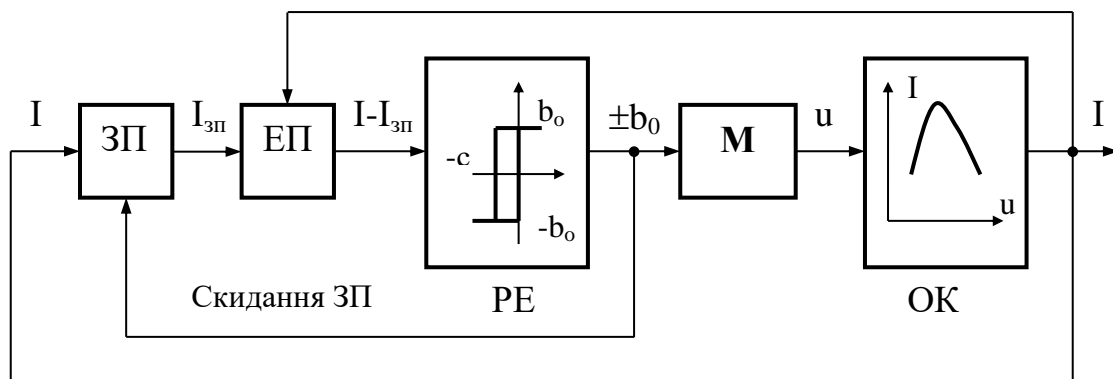


Рисунок 2.4 – Функціональна схема СЕК із запам'ятовуванням екстремуму

Вихідна величина I об'єкта керування (ОК) подається на вхід запам'ятовувального пристрою (ЗП), який фіксує лише додатні прирощення I . Для формування керувальної дії використовують різницю $I - I_{зп}$, що визначається елементом порівняння (ЕП). Статичну характеристику об'єкта й часові діаграми, які відповідають пошукам максимуму, зображено на рисунку 2.5. Припустимо, що в момент часу t_1 стан об'єкта характеризується параметрами I_1, u_1 (рисунок 2.5, а), які відповідають точці M_1 (рисунок 2.5, б), і екстремальний регулятор увімкнено так, що значення

керувальної дії збільшується, тобто система віддаляється від точки екстремуму. Оскільки значення I зменшується, сигнал на виході запам'ятовувального пристрою не змінюється, тому абсолютна величина різниці сигналів $I - I_{зп}$ на вході релейного елемента РЕ збільшується (рисунок 2.5, в).

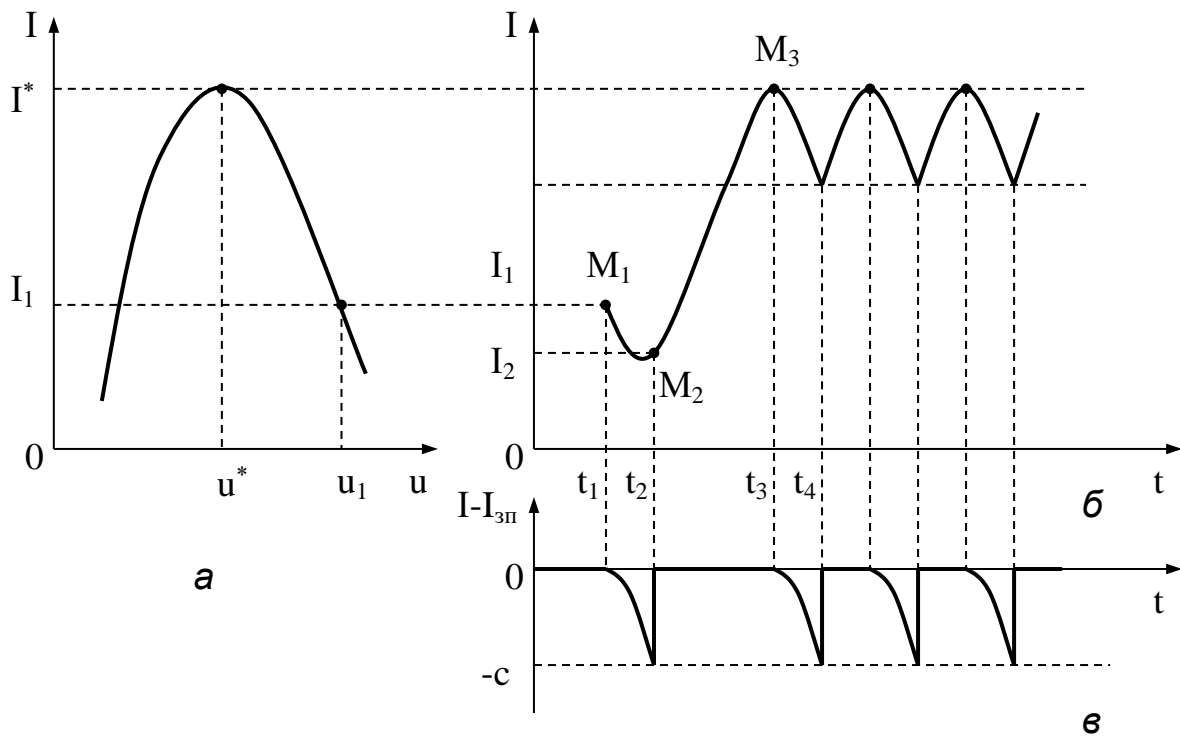


Рисунок 2.5 – Статична характеристика об'єкта (а) і часові діаграми пошуку екстремуму (б, в) для системи із запам'ятовуванням екстремуму

У момент часу t_2 ця різниця набуває значення $|c|$, релейний елемент перемикається, виконавчий механізм реверсується, керувальна дія u починає зменшуватися, тобто після точки M_2 система починає рухатися в бік максимуму. При цьому значення I_1 , запам'ятоване в ЗП у момент часу t_1 , скидається і ЗП запам'ятовує значення I_2 .

Після набуття максимуму (точка M_3) керувальна дія u продовжує зменшуватися, унаслідок чого I також зменшується, а $I_{зп}$ не змінюється. Тому абсолютна величина різниці $I - I_{зп}$ збільшується і в момент t_4 релейний елемент спрацьовує, виконавчий механізм реверсується і знову

починається рух системи в бік максимуму. Цей процес триває безперервно, і в системі встановлюються автоколивання поблизу екстремуму регульованої величини. Амплітуда автоколивань визначається зоною нечутливості релейного елемента.

Системи екстремального керування крокового типу

Принцип дії систем цього типу базується на тому, що через певні інтервали часу, які називають кроками, вимірюють значення екстремального показника [9]. Потім їх порівнюють на початку й наприкінці кожного кроку. Якщо протягом розглядуваного періоду екстремальний показник зменшується, то в системі здійснюється реверс керувальної дії. У протилежному випадку реверс не відбувається. Функціональну схему покрокової системи зображено на рисунку 2.6. У цій схемі величина, пропорційна критерію I , подається на

вхід блока усереднення (БУ), який видає середнє за крок значення $I_{сер.i}$. Наприкінці кожного кроку це значення подається на пристрій порівняння (ПП) і блок пам'яті (БП). З виходу ПП знімається різниця $\Delta I = I_{сер.i} - I_{сер.i-1}$. При $\Delta I > 0$ напрямом обертання виконавчого механізму (ВМ) не змінюється. При $\Delta I < 0$ перемикальний пристрій (ПерП)

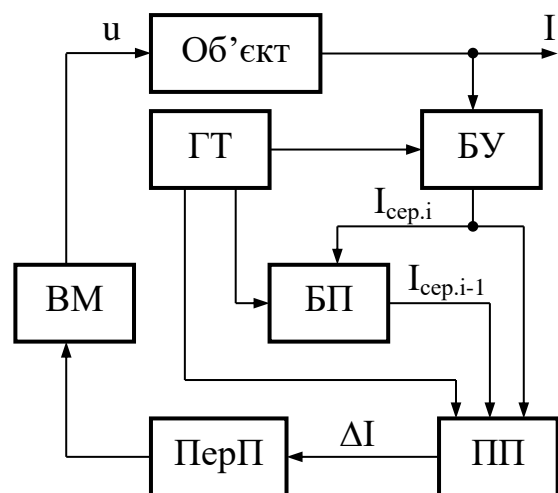


Рисунок 2.6 – Функціональна схема покрокової системи

подає команду на реверс ВМ. Для керування виконавчим механізмом застосовується елемент з релейною характеристикою. Крок квантування за часом τ визначається тактовим генератором (ГТ). За умови досить великого кроку змінювання керувальної дії Δu вимірювання критерію ефективності можна здійснювати дискретно – на початку й наприкінці

цього кроку, тоді $\Delta I_n = I_n - I_{n-1}$. При цьому забезпечується достатня завадостійкість системи за відсутності блока усереднення.

Величина кроку квантування за часом τ обмежується тим, що при великому кроці у системі можуть виникнути помилки через наявність дрейфу екстремальної характеристики. З іншого боку, при занадто малому кроці τ на правильність роботи системи можуть впливати високочастотні завади. У кроковій системі пошук екстремуму здійснюється дослідженням впливу керувальної дії u на критерій ефективності I . Разом з тим визначення положення системи відносно екстремальної точки можна здійснити і з допомогою спеціального пошукового сигналу.

Системи екстремального керування із зовнішнім генератором пошукових сигналів

Функціональну схему системи для цього випадку зображено на рисунку 2.7. Подамо на вхід системи з допомогою генератора пошукових сигналів (ГПС) синусоїдальний сигнал u_n з невеликою амплітудою U_{nmax} і постійною частотою ω_0 .

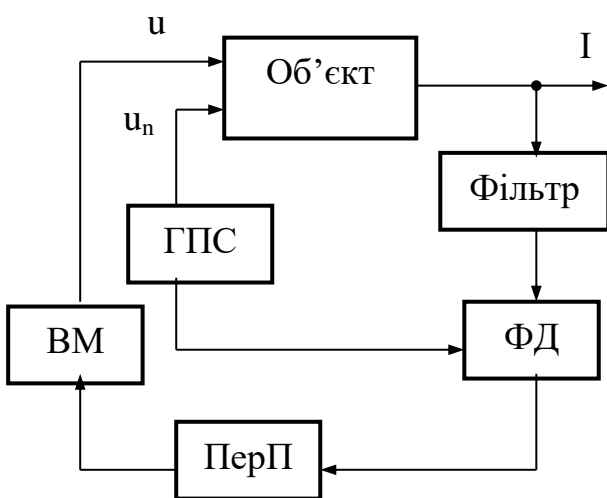


Рисунок 2.7 – Функціональна схема системи з генератором пошукових сигналів

Якщо система знаходиться на лівій частині екстремальної характеристики (рисунок 2.8), то фази коливань, викликані пошуковим сигналом, на вході й виході об'єкта (1 і 1') збігаються, а якщо на правій – то ці коливання (3 і 3') знаходяться у протифазі. В екстремальній точці отримаємо на виході об'єкта сигнал (2') подвійної частоти.

Якщо на виході об'єкта поставити фільтр, що пропускає тільки частоту пошукового сигналу u_n , то, порівнюючи з допомогою фазового детектора (ФД) фазу вихідної гармоніки з вхідною, можна дізнатися, на якій частині характеристики працює система і відповідно в якому напрямку необхідно змінювати керувальну дію u , щоб досягти екстремальної точки. Реверс виконавчого механізму (ВМ) здійснюється при зміні фазі вихідних коливань з допомогою перемикального пристрою (ПерП).

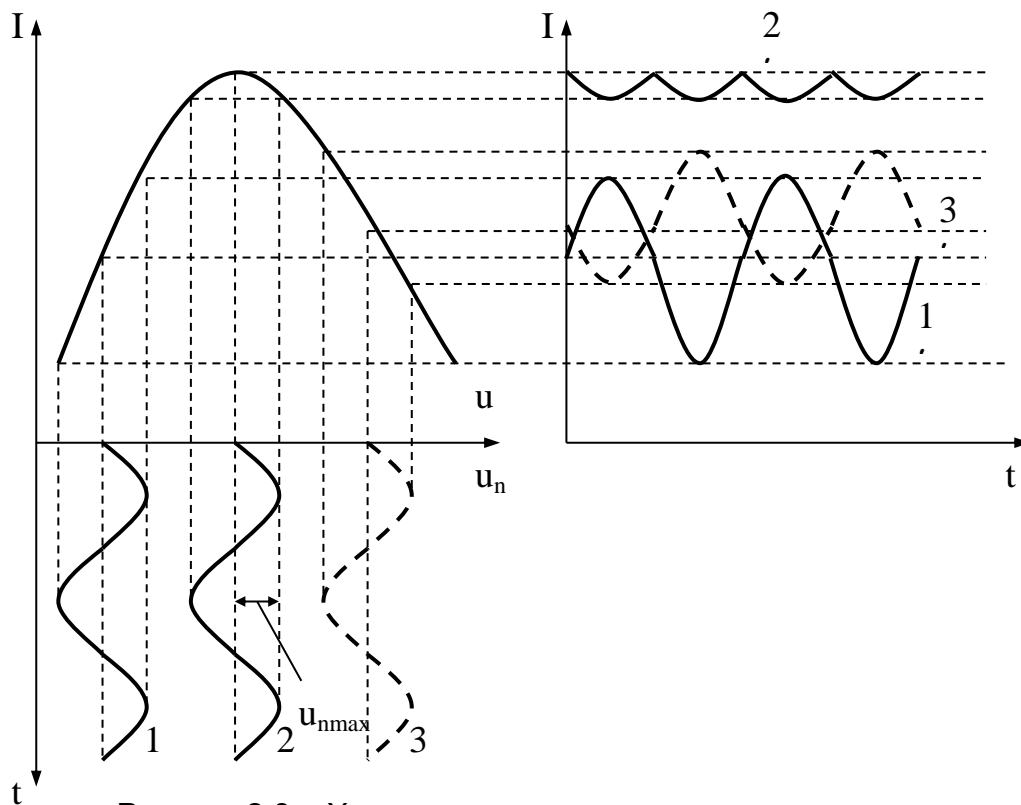


Рисунок 2.8 – Характеристики системи з генератором пошукових сигналів

Якщо як перемикальний пристрій використовувати трипозиційне реле, то наявність зони нечутливості дає змогу при досить малих відхиленнях системи від точки екстремуму не вмикати виконавчий механізм. Ця властивість використовується при застосуванні низькочастотного пошукового сигналу, для якого майже неможливо побудувати ефективні фільтри.

Зазначимо, що амплітуда коливань вихідного пошукового сигналу ϵ

пропорційною величині похідної I'_n , що дає змогу побудувати екстремальні системи з пропорційним керуванням.

Під час розглядання принципу дії цієї системи не враховували інерційність об'єкта керування, яка зумовлює зсув фаз між вхідним і вихідним пошуковими сигналами (якщо цей зсув становитиме 180° , то система втратить стійкість). Зменшити вплив цього явища можна шляхом або доповнення системи фазозсувальним пристроєм, або зменшення частоти пошукового сигналу. Зазначимо також, що для ефективної фільтрації частота пошукового сигналу має бути значно вищою за частоту вхідних сигналів.

Системи з пошуковим сигналом мають велику завадостійкість порівняно із системами, що вимірюють похідну, оскільки не потребують диференціальних ланок, які збільшують вплив завад. Крім того, такі системи можна застосовувати при різкому дрейфі екстремальної характеристики, оскільки при цьому в них, на відміну від систем крокового типу, не виникають помилкові сигнали.

2.3 Диференціальні системи екстремального керування

Такі системи працюють за розімкнутим циклом, і тому іноді їх називають безпошуковими [2]. Керувальна дія в таких системах формується з допомогою аналізу різниці двох величин. Це й обумовило їх назву.

Функціональну схему диференціальної СЕК показано на рисунку 2.9, а. Керувальну дію u і збурення f прикладено не тільки до об'єкта керування, але й до двох його моделей M . Крім того, на ці моделі діють

однакові й постійні за модулем, але різні за знаком додаткові керувальні дії Δu , унаслідок чого статичні екстремальні характеристики моделей $I_1(u)$ і $I_2(u)$ зміщуються відносно характеристики об'єкта $I(u)$ (рисунк 2.9, б).

Нехай на вхід обох моделей і об'єкта подається керування u_1 . Тоді вихідна величина першої моделі становить I_1 , другої – I_2 , а різниця

$\Delta I = I_2 - I_1 > 0$. Можна показати, що в разі параболічної залежності $I(u)$ різниця ΔI буде пропорційною відстані до екстремальної точки u^* . У точці екстремуму u^* ця різниця дорівнює нулю, а надалі при переході на праву частину характеристики вона змінює свій знак.

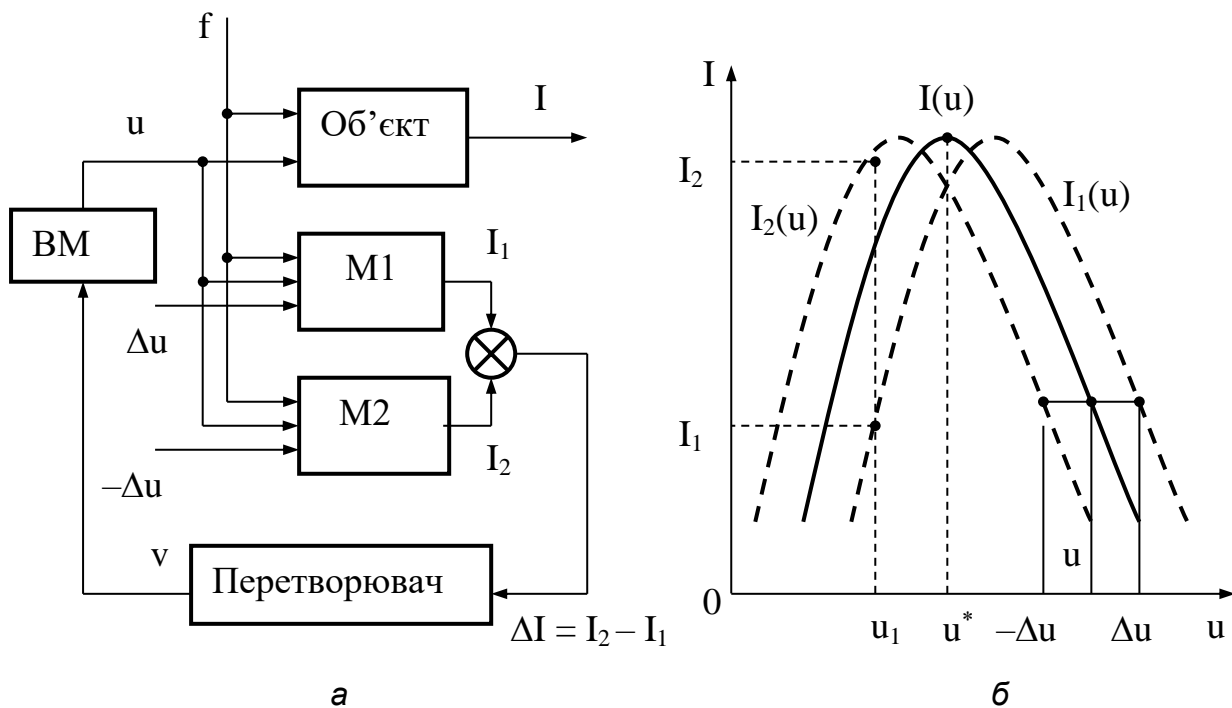


Рисунок 2.9 – Функціональна схема диференціальної СЕК (а) і статичні екстремальні характеристики об'єкта і моделей (б)

Таким чином, формуючи змінення керувальної дії u пропорційно до різниці ΔI (або відповідно до його знака), можна забезпечити роботу системи в екстремальній точці. Оскільки на модель діють ті самі збурення, що й на об'єкт, дрейф характеристики об'єкта не змінює відносного

розташування вихідних характеристик моделей і характеристики об'єкта і не порушує роботоздатності системи.

Суттєвим обмежувальним моментом застосування диференціальних СЕК є необхідність апріорного знання моделі об'єкта, яка є невідомою для широкого класу об'єктів.

Якщо функція $I(u)$ має мінімум, то шляхом віднімання її від постійної величини A отримаємо криву, яка має максимум. Завдяки цьому екстремальний регулятор, призначений для пошуку максимуму функції $I_1(u)$, можна використовувати й для пошуку мінімуму функції $I(u) = A - I_1(u)$.

Розглянуті методи пошуку екстремуму стосуються одноканальних систем. Якщо показник екстремуму є функцією кількох керувальних параметрів $I(u_1, u_2, \dots, u_m)$ (багатоканальних систем), то необхідною умовою набуття екстремуму є рівність нулю частинних похідних показника якості зі всіх керувальних параметрів:

$$\partial I / \partial u_1 = 0, \partial I / \partial u_2 = 0, \dots, \partial I / \partial u_m = 0. \quad (2.2)$$

Методи пошуку екстремуму для таких систем поділяються на два види:

- детерміновані (метод градієнта, метод найшвидшого спуску, метод Гаусса – Зейделя);
- випадкові (метод випадкових сліпих пошуків, статистичного градієнта та статистичного найшвидшого спуску).

Метод градієнта

Градієнтом скалярної функції $I(u_1, u_2, \dots, u_m)$ називають вектор з координатами $\partial I / \partial u_1, \partial I / \partial u_2, \dots, \partial I / \partial u_m$, тобто

$$\text{grad}I = k_1 \partial I / \partial u_1 + k_2 \partial I / \partial u_2 + \dots + k_m \partial I / \partial u_m, \quad (2.3)$$

де k_1, k_2, \dots, k_m – одиничні вектори, напрямки яких збігаються з напрямками

осей u_1, u_2, \dots, u_m .

Цей вектор є спрямованим у бік найбільшого зростання функції I . У точці екстремуму $\text{grad } I = 0$.

Метод градієнта реалізується на основі дискретного або безперервного принципу роботи контуру адаптації.

При безперервному принципі роботи метод градієнта полягає в тому, що швидкості змінення параметрів u_i беруть пропорційними до відповідних компонентів миттєвого значення градієнта, тобто

$$du_i / dt = c_i \partial I / \partial u_i, \quad (2.4)$$

де c_i – коефіцієнт пропорційності, $c_i > 0$ – для випадку екстремуму-мінімуму; $c_i < 0$ – для випадку екстремуму-максимуму.

При покроковому пошуку після вимірювання поточного градієнта виконують крок, складові якого за осями координат є пропорційними до відповідних компонентів градієнта у початковій точці пошуку:

$$\Delta u_i = c_i \partial I / \partial u_i. \quad (2.5)$$

Далі знову визначають градієнт, виконують наступний крок у напрямку вектора градієнта і т. д.

Залежності (2.4) і (2.5) використовують для формування робочих сигналів екстремальної системи, що забезпечують рух до екстремуму вихідної величини I .

Перевагою методу градієнта є плавний характер руху до точки екстремуму і в разі крокового пошуку – відносно малий розмах коливань. До недоліків належить необхідність визначення градієнта в кожній точці фазової траєкторії, що збільшує час пошуку.

Метод найшвидшого спуску

За цим методом напрямок градієнта визначають у початковій точці, а потім здійснюють рух у цьому напрямку доти, доки похідна вздовж цього

напрямку dl/dt не дорівнюватиме нулю. Потім знову визначають напрямок градієнта і здійснюють рух за новим напрямком до наступного нульового значення похідної і т. д.

Метод найшвидшого спуску характеризується відносно малим часом набуття екстремуму при великих кроках на початковому етапі пошуків.

Приклад 2.1 Задано показник екстремуму:

$$I = u_1^2 + u_2^2 + u_1 u_2. \quad (2.6)$$

Визначити мінімум функції $I(u_1, u_2)$ методом найшвидшого спуску з початкової точки $u_{10} = 4$; $u_{20} = 6$.

Функції $I(u_1, u_2)$ відповідає сім'я еліпсів для різних $I = const$ (рисунок 2.10). Початковий стан визначається точкою M_1 .

Знайдемо напрямок градієнта в початковій точці. Частинні похідні для цієї точки є такими:

$$\begin{cases} \partial I / \partial u_1 = 2u_{10} + u_{20} = 2 \cdot 4 + 6 = 14; \\ \partial I / \partial u_2 = 2u_{20} + u_{10} = 2 \cdot 6 + 4 = 16. \end{cases} \quad (2.7)$$

Через те, що необхідно відшукати мінімум функції I , будемо рухатись у

напрямку, зворотному до градієнта, і визначимо координати u_{11} , u_{21} такої точки:

$$\begin{cases} u_{11} = u_{10} - L(\partial I / \partial u_1) = 4 - L \cdot 14; \\ u_{21} = u_{20} - L(\partial I / \partial u_2) = 6 - L \cdot 16. \end{cases} \quad (2.8)$$

де L – поки ще невідомий крок переходу з точки (u_{10}, u_{20}) до точки (u_{11}, u_{21}) .

Для визначення кроку L підставимо знайдені значення u_{11} , u_{21} у вираз (11.6):

$$I = (4 - 14L)^2 + (6 - 16L)(4 - 14L)^2 + (4 - 14L)(6 - 16L) = 676L^2 - 452L + 76.$$

Прирівняємо до нуля похідну $\partial I / \partial L$:

$$\partial I / \partial L = 1352L - 452 = 0,$$

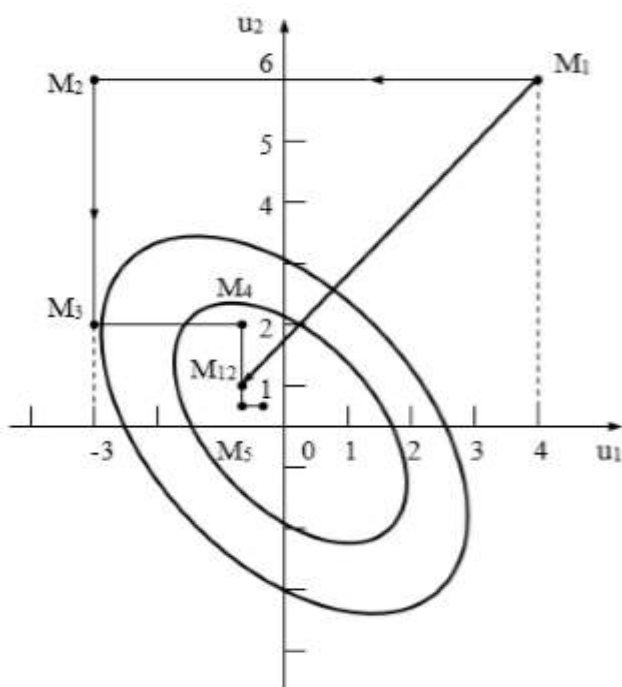


Рисунок 2.10 – Площина керувань до прикладів 2.1, 2.2

звідки $L = 0,334$. Підставимо це значення у вираз (2.8) і визначимо координати u_{11} і u_{21} : $u_{11} = -0,68$; $u_{21} = 0,65$ (точка M_{12} на рисунку 2.10).

Виконавши аналогічні обчислення для наступного кроку за умови, що вихідним станом системи є стан, якого вона набула наприкінці першого кроку, отримаємо $u_{12} = 0,0229$, $u_{22} = 0,0362$. Отже, майже за два кроки система опиниться у точці, досить близькій до точки мінімуму.

Метод Гаусса – Зейделя (метод почергового змінення параметрів)

За цим методом рух уздовж кожної координати відбувається по черзі. Спочатку здійснюється рух уздовж координати u_1 , а інші координати u_2, u_3, \dots, u_m залишаються незмінними. Цей рух триває доти, доки похідна функції I за координатою u_1 не дорівнюватиме нулю, тобто $\partial I / \partial u_1 = 0$. З останньої умови визначаємо u_1 . Після цього координата u_1 та інші координати, крім u_2 , залишаються незмінними, а координату u_2 змінюємо доти, доки не буде виконано умову $\partial I / \partial u_2 = 0$. З цієї умови визначаємо u_2 . Потім змінюємо координату u_3 і т. д. У такий спосіб визначаємо частинні екстремуми по всіх координатах. Після цього виконуємо повторний цикл змінення координат по черзі, починаючи з u_1 . Процес пошуку триває доти, доки всі частинні похідні не дорівнюватимуть нулю (доки всі похідні не будуть меншими за поріг чутливості системи) [1].

Приклад 2.2 Розв'язати задачу (приклад 2.1) методом Гаусса – Зейделя.

Початковий стан об'єкта визначається точкою M_1 (див. рисунок 2.10). Починаємо пошук, змінюючи координату u_1 при $u_2 = 6$. Тоді

$$I(u_1, 6) = u_1^2 + 36 + 6u_1.$$

Визначимо частинну похідну цієї функції за u_1 і прирівняємо її до нуля:

$$\partial I(u_1, 6) / \partial u_1 = 2u_1 + 6 = 0,$$

звідки для першого частинного екстремуму $u_1 = -3$. Йому відповідає точка M_2 з координатами $u_1 = -3$, $u_2 = 6$.

Фіксуємо параметр $u_1 = -3$ і змінюємо координату u_2 :

$$I(-3, u_2) = 9 + u_2^2 - 3u_2; \quad \partial I(-3, u_2) / \partial u_2 = 2u_2 - 3 = 0; \quad u_2 = 1,5.$$

Цьому значенню координати u_2 відповідає точка M_3 .

Повторимо обчислення для координати u_1 при $u_2 = 1,5$:

$$I(u_1; 1,5) = u_1^2 + 2,25 + 1,5u_1; \quad \partial I(u_1; 1,5) / \partial u_1 = 2u_1 + 1,5 = 0; \quad u_1 = -0,75.$$

Отримаємо точку $M_4(-0,75; 1,5)$.

Наступний цикл:

$$I(-0,75; u_2) = 0,5625 + u_2^2 - 0,75u_2; \quad \partial I(-0,75; u_2) / \partial u_2 = 2u_2 - 0,75 = 0; \quad u_2 = 0,375.$$

Цьому циклу відповідає точка M_5 .

Отже, пошукові рухи становлять ламану лінію, яка складається зі взаємно перпендикулярних відрізків. Точки зламу є точками дотику цих відрізків до кривих $I(u_1, u_2) = const$.

Метод змінення параметрів є зручним, тому що для його реалізації можна застосовувати відомі типи однопараметричних екстремальних систем, якщо додати пристрій, що перемикає канали параметрів u_1, u_2, \dots, u_m . Проте, як видно з рисунка 2.10, рух системи до екстремуму відбувається не найкоротшим шляхом.

Метод випадкових сліпих пошуків

Суть методу полягає в пошуку екстремуму шляхом випадкового змінення параметрів u_i . У початковому стані системи координатам u_i дають випадковий приріст і визначають приріст функції I . Якщо він є від'ємним (при пошуках максимуму), то система повертається в початковий стан, і роблять наступний пробний крок. Так повторюють доти, доки не буде отримано додатного приросту. Тоді систему переводять у цей новий стан, з якого роблять нові випадкові кроки .

Метод статистичного градієнта

Цей метод полягає в тому, що з початкового стану системи роблять кілька пробних випадкових кроків і для кожного з них знаходять приріст функції I й визначають напрямок найбільш інтенсивного змінення функції I . У цьому напрямку виконують робочий крок, а потім цикл пошуків повторюють.

Метод статистичного найшвидшого спуску

Початок пошуків є таким самим, як у попередньому методі, але після визначення напрямку роблять не один крок, а рух відбувається доти, доки не зміниться знак приросту I .

Під час випадкових пошуків немає потреби визначати залежність I від кожної координати u_i окремо. Це особливо важливо при великій кількості координат, тому що при збільшенні їх кількості на відміну від розглянутих детермінованих методів пошуку процедура пошуків не ускладнюється. Доведено, що при $i > 3$ випадкові пошуки перевершують детерміновані за швидкістю набуття екстремуму.

Іншою перевагою методу випадкових пошуків є можливість відшукати глобальний екстремум при наявності кількох екстремумів, а також особливих точок, для яких $grad I = 0$. Детерміновані методи, що базуються на пошуках точки з нульовим градієнтом, у цих випадках є непридатними, тому що система може припинити пошуки на будь-якому локальному екстремумі або в особливій точці.

У деяких випадках найефективніше об'єднувати різні методи пошуків. Зокрема, на початку пошуків далеко від точки екстремуму можна застосувати метод найшвидшого спуску, а поблизу екстремуму перейти до градієнтного методу.

2.4 Динаміка екстремальних систем

Екстремальні системи мають задовольняти таким вимогам [7]:

- стійкість, під якою розуміють збіжність процесу пошуку в деякому околі екстремуму;
- точність – забезпечення заданого відхилення критерію ефективності від екстремального значення в усталеному режимі;
- швидкодія – забезпечення якомога меншого часу пошуку екстремуму.

Під час дослідження динаміки СЕК керований об'єкт можна апроксимувати послідовним з'єднанням трьох ланок з коефіцієнтом підсилення, що дорівнює одиниці. Візьмемо, що кожен інерційну ланку описують лінійним диференціальним рівнянням першого порядку (рисунок 2.11, а).

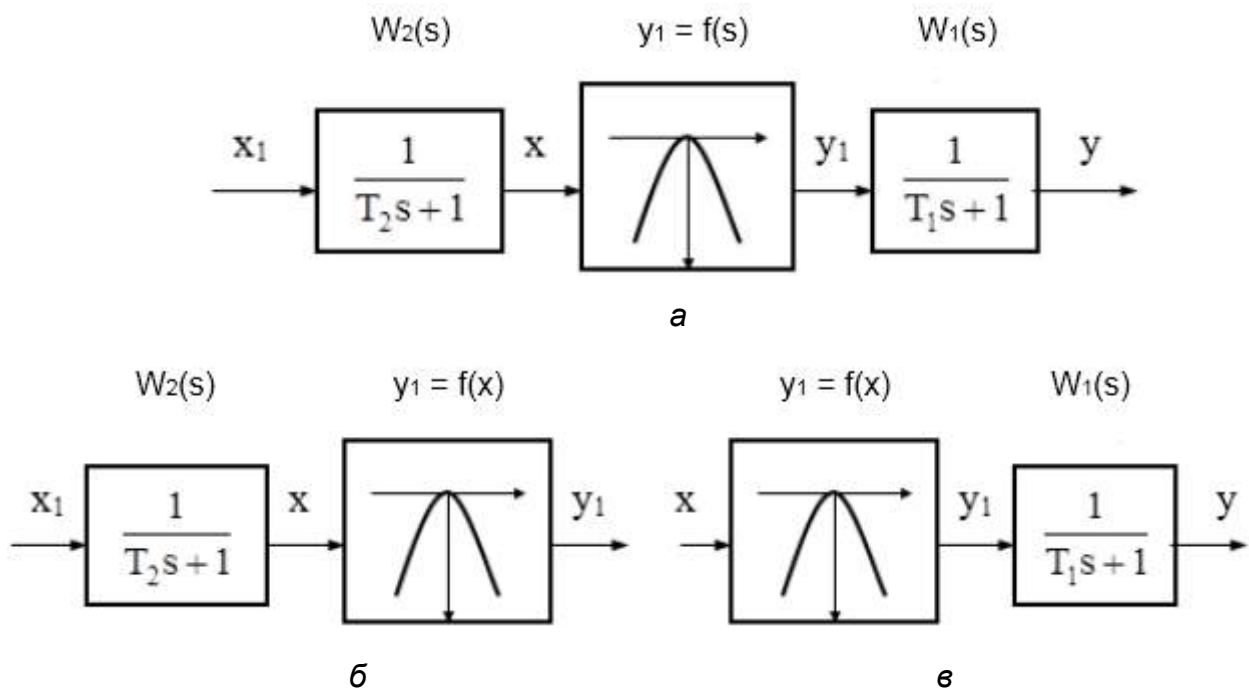


Рисунок 2.11 – Подання об'єкта керування послідовним з'єднанням ланок

У цьому випадку об'єкт описують системою рівнянь:

$$\begin{cases} T_2 \frac{dx}{dt} + x = x_1; \\ y_1 = f(x); \\ T_1 \frac{dy}{dt} + y = y_1. \end{cases} \quad (2.9)$$

де x_1 – вхідна координата об'єкта; y – вихідна координата об'єкта.

Інерційна ланка зі сталою часу T_2 (на вході об'єкта) зазвичай виникає у структурній схемі об'єкта керування тоді, коли виконавчий механізм діє на об'єкт оптимізації через інерційну ланку, наприклад, якщо входом x об'єкта, що оптимізується, є температура, а виконавчий механізм діє на неї через теплообмінник.

Якщо стала часу виходу об'єкта є значно меншою за сталу часу на його вході ($T_1 \ll T_2$), то інерцією виходу об'єкта можна знехтувати, а об'єкт апроксимувати послідовним з'єднанням двох ланок (рисунок 2.11, б).

Якщо $T_2 \ll T_1$, то можна знехтувати інерцією входу, і тоді структурна схема матиме вигляд, показаний на рисунку 2.11, в. Диференціальне рівняння такого об'єкта можна записати у вигляді

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = y_1 = f(x). \quad (2.10)$$

Динаміка безперервних екстремальних систем

Для характеристики якості роботи системи зазвичай використовують такі показники (рисунок 2.12):

– параметри автоколивань у зоні екстремуму: період T_a і амплітуда a , причому розмах коливань ΔI називають *зоною пошуку на виході*, а розмах коливань Δu – *зоною пошуку на вході*;

– різниця між екстремальним I^* і середнім $I_{сер}$ значеннями критерію на виході об'єкта, яку називають *утратою на пошук* P , що характеризує точність роботи системи;

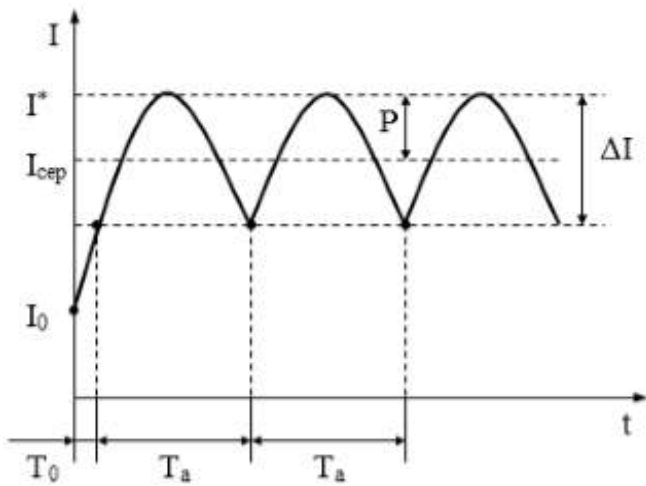


Рисунок 2.12 – Показники якості роботи безперервної СЕК

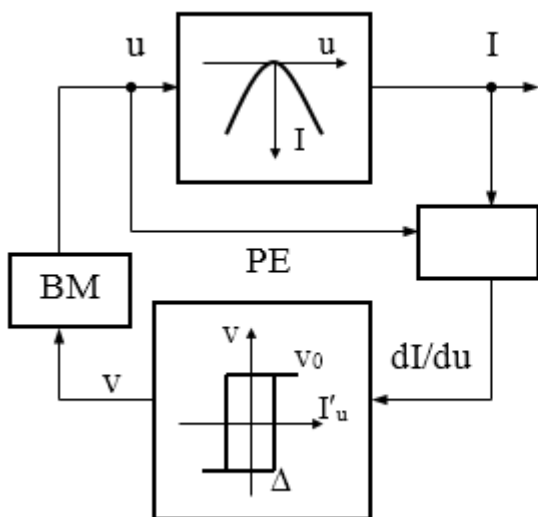
– час T_0 виходу системи з початкового стану I_0 до першого екстремуму (рисунок 2.12), що характеризує швидкість системи.

Розглянемо деякі методи розрахунку показників якості СЕК. Знехтуємо спочатку інерційністю об'єкта керування ($T_1 \approx T_2 \approx 0$). Тоді функціональна схема СЕК із вимірюванням знака похідної

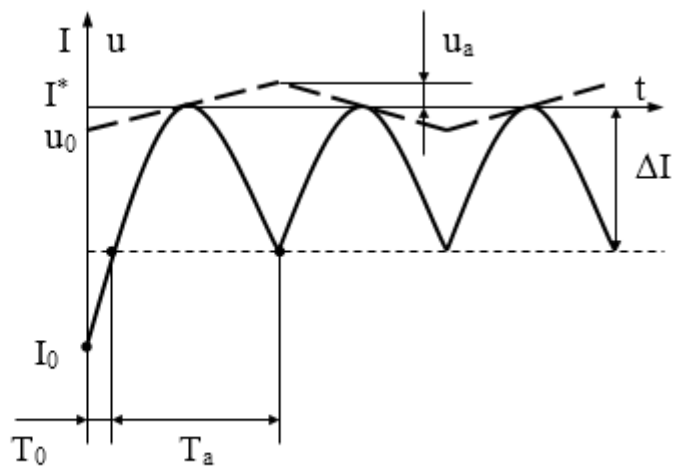
буде мати вигляд, зображений на рисунку 2.13, а.

Обчислювальний пристрій (ОП) визначає похідну dI/du , яка подається на вхід релейного елемента (РЕ) і далі – на вхід виконавчого механізму (ВМ), що працює з постійною швидкістю v_0 . Статична характеристика об'єкта апроксимується параболою

$$I = -ku^2. \quad (2.11)$$



а



б

Рисунок 2.13 – Функціональна схема СЕК з вимірюванням похідної (а) і показники якості її роботи (б)

Оскільки РЕ має характеристику, еквівалентну петльовій, у системі встановляться симетричні відносно точки екстремуму автоколивання. Визначимо основні показники якості роботи системи для цього випадку (рисунок 2.13, б).

Зони пошуку екстремуму на вході й виході визначаємо таким чином.

Маємо $dl/du = -2ku$. З іншого боку, у момент подання команди на реверс $dl/du = -\Delta$, де Δ – зона нечутливості РЕ. Отже, у цей момент $2ku_a = \Delta$, $u_a = \Delta/2k$, а зона пошуку на вході буде такою:

$$\Delta u = 2u_a = \Delta/k. \quad (2.12)$$

Зону пошуку на виході з урахуванням (2.11) визначимо з виразу

$$\Delta l = l^* - l(u_a) = 0 - [(-k) \Delta^2 / (2k)^2] = \Delta^2 / (4k). \quad (2.13)$$

Тут ураховано, що при статичній характеристиці (2.11) екстремальне значення критерію l^* дорівнює нулю.

Період автоколивань T_a з урахуванням того, що $u = v_0 t$, визначимо зі співвідношення

$$u_a = \Delta/2k = v_0 T_a / 2; \quad \text{звідки } T_a = \Delta / (v_0 k). \quad (2.14)$$

Визначимо втрати на пошук:

$$P = l^* - l_{\text{сер}} = -\frac{2}{T_a} \int_0^{T_a/2} l(t) dt = \frac{2}{T_a} \int_0^{T_a/2} k(v_0 t)^2 dt = \frac{k}{3} \left(\frac{v_0 T_a}{2} \right)^2.$$

Тоді з урахуванням (2.13) і (2.14) маємо

$$P = \frac{\Delta^2}{12k} = \frac{\Delta l}{3}. \quad (2.15)$$

Час виходу системи в зону екстремуму з урахуванням (2.12)

$$T_0 = \frac{|u_0| - |u_a|}{v_0} = \frac{1}{v_0} \left(|u_0| - \frac{\Delta}{2k} \right). \quad (2.16)$$

Збільшення Δ призводить до збільшення втрат на пошук P і зони пошуку на виході Δl , тобто до погіршення точності роботи системи.

Підвищення швидкості виконавчого механізму v_0 зменшує період автоколивань T_a і час T_0 . На якісні показники роботи системи впливає і крутість статичної характеристики, яка визначається коефіцієнтом k : збільшення k знижує величини P і Δl .

Розглянемо об'єкти, що мають інерційність. Нехай об'єкт має структуру, показану на рисунку 2.11, б. Тоді рівняння ланок СЕК з пропорційним керуванням (рисунок 2.14) можна записати в такому вигляді:

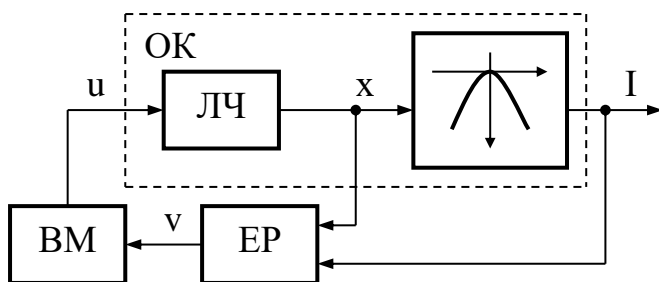


Рисунок 2.14 – Функціональна схема СЕК з інерційним об'єктом

– лінійна частина об'єкта (ЛЧ)

$$T \frac{dx}{dt} + x = k_1 u; \quad (2.17)$$

– нелінійна частина об'єкта

$$I = -k_2 x^2; \quad (2.18)$$

– екстремальний регулятор (ЕР)

$$v = dl / dx = l'_t / x'_t; \quad (2.19)$$

– виконавчий механізм (ВМ)

$$du / dt = k_3 v. \quad (2.20)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо

$$T\ddot{x} + \dot{x} + kx = 0, \quad (2.21)$$

де $k = 2k_1 k_2 k_3$.

Рівняння (2.21) є лінійним диференціальним рівнянням, і подальший аналіз перехідних процесів у системі можна виконувати звичайними методами лінійної теорії автоматичного керування.

Наприклад, при $4kT > 1$, що відповідає коливальній ланці ($\xi < 1$), розв'язок рівняння (2.21) має вигляд

$$x = A e^{-\frac{t}{2T}} \sin(\omega t + \phi), \quad (2.22)$$

де $\omega = \frac{\sqrt{4Tk-1}}{2T}$; A і ϕ – сталі інтегрування. На рисунку 2.15 показано залежності $x(t)$ і $l(t)$, обчислені за формулами (2.22) і (2.18). З рисунку видно,

що при ступінчастому збуренні ($I = I_0$) система здійснює загальні коливання навколо екстремальної точки ($I^* = 0$). Зона пошуку на виході ΔI , а отже, і втрати на пошук P у цій системі в усталеному режимі дорівнюють нулю.

У разі використання для керування виконавчим механізмом релейного елемента рівняння системи матиме вигляд

$$T\dot{x} + \dot{x} + kF(x) = 0. \quad (2.23)$$

Рівняння (2.23) є нелінійним, і його можна дослідити з допомогою нелінійної теорії автоматичного керування.

Нехай тепер об'єкт має структуру, як показано на рисунку 2.11, в, а екстремальний регулятор здійснює пошук із запам'ятовуванням екстремуму (рисунок 2.16). Рівняння окремих ланок мають такий вигляд:

– лінійна частина об'єкта (ЛЧ)

$$T \frac{dx}{dt} + x = k_1 I; \quad (2.24)$$

– нелінійна частина об'єкта

$$I = -k_2 u^2; \quad (2.25)$$

– виконавчий механізм (ВМ)

$$du / dt = k_3 v; \quad (2.26)$$

– екстремальний регулятор (ЕР)

$$v = F(x, u) = \begin{cases} +v_0, & \Delta x \operatorname{sign} \Delta u > \Delta; \\ -v_0, & \Delta x \operatorname{sign} \Delta u < -\Delta. \end{cases} \quad (2.27)$$

Після сумісного розв'язання рівнянь об'єкта (2.24) і (2.25) отримаємо

$$T \frac{dx}{dt} + x = -k_1 k_2 u^2, \text{ або } T \frac{dx}{du} \frac{du}{dt} + x = -k_1 k_2 u^2,$$

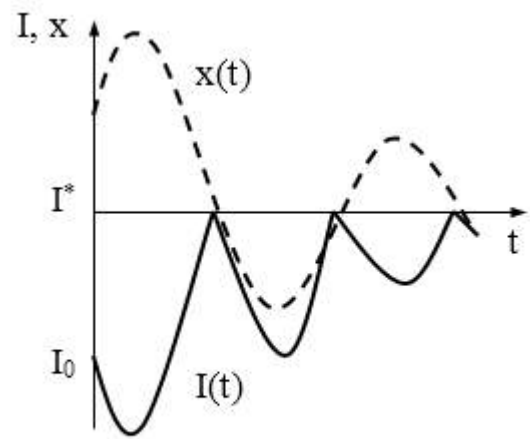


Рисунок 2.15 – Перехідні процеси у СЕК

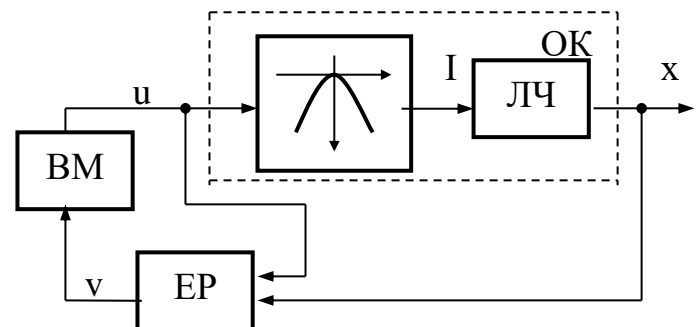


Рисунок 2.16 – Функціональна схема СЕК з інерційним об'єктом

а з урахуванням (2.26) $k_3 T v \frac{dx}{du} + x = -k_1 k_2 u^2$.

Позначимо $\frac{1}{k_3 T v_0} = a$, $\frac{k_1 k_2}{k_3 T v_0} = b$, тоді з урахуванням, що $v = \pm v_0$, маємо

$$\frac{dx}{du} \pm ax = \mp bu^2. \quad (2.28)$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням фазової траєкторії

в координатах «вхід об'єкта u – його вихід x ». Нехай початкове значення координат об'єкта буде $u_0, x_0 = k_1 I_0$ (рисунок 2.17, а) і при цьому $v_0 > 0$. Якщо об'єкт є безінерційним, то $x = k_1 I$ і фазова траєкторія $x(u)$ при $k_1 = 1$ збігається зі статичною характеристикою $I(u)$. У разі наявності інерційності рівняння фазової траєкторії є розв'язком рівняння (2.28):

$$x = Ce^{-au} - \frac{b}{a} u^2 + \frac{2b}{a^2} u - \frac{2b}{a^3}. \quad (2.29)$$

Сталу C визначимо з початкових умов при $t = 0$: $u = u_0, x = x_0$. Тоді

$$C = \left(x_0 + \frac{b}{a} u_0^2 - \frac{2b}{a^2} u_0 + \frac{2b}{a^3} \right) e^{-au_0}. \quad (2.30)$$

Відповідно до (2.29) на рисунку 2.17, а побудовано фазову траєкторію $x = f(u)$. Після того як траєкторія перетне статичну характеристику об'єкта, координата x почне зменшуватись, отже, знак Δx буде від'ємним. Це видно з рівняння лінійної частини

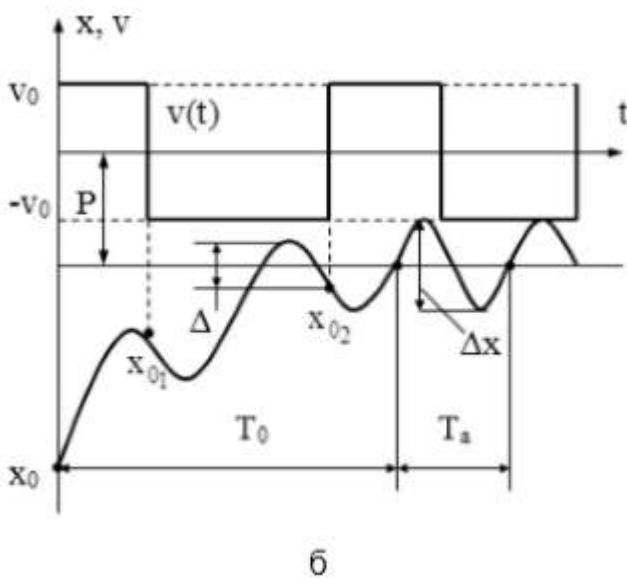
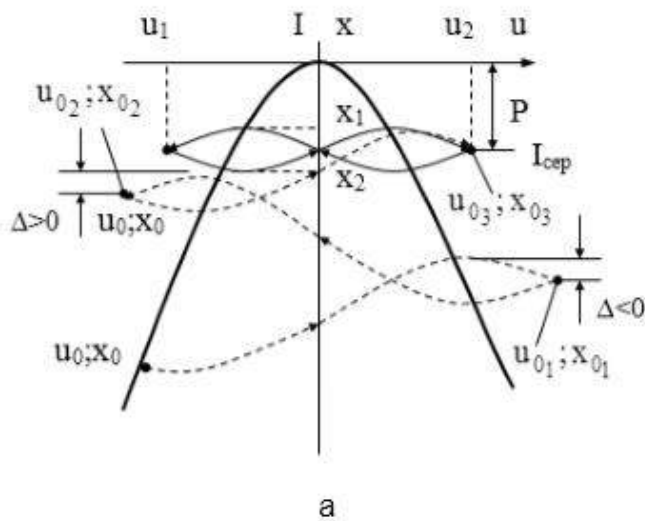


Рисунок 2.17 – Фазова траєкторія (а) і перехідний процес (б) у СЕК

власності, отже, знак Δx буде від'ємним. Це видно з рівняння лінійної частини

об'єкта (2.24): при $k_1 = 1$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{T}(l - x)$, отже, при $l = x$ похідна dx/dt змінює свій знак, а це означає, що в цій точці значення x є максимальним.

При $\Delta x \text{ sign} \Delta u < -\Delta$ (точка $u_0; x_0$) релейний елемент спрацьовує і відбувається реверс ВМ. Рівняння фазової траєкторії зберігає той самий вигляд, однак, оскільки в цьому випадку $v_0 < 0$, коефіцієнти a і b у рівняннях (2.29) і (2.30) змінюють свій знак, а в рівнянні (2.30) також замість u_0 і x_0 необхідно підставити u_0, x_0 . У точці з координатами $(u_0; x_0)$ знову відбудеться реверс і т. д.

Граничний цикл (безперервна лінія на рисунку 2.17, а) характеризує усталені симетричні автоколивання в системі.

За фазовою траєкторією і граничним циклом можна визначити якісні показники системи.

Зона пошуку на вході $\Delta u = |u_1| + |u_2|$, а на виході визначається різницею між мінімальним і максимальним значеннями вихідного параметра x , тобто $\Delta x = x_1 - x_2 = 2\Delta$. Період автоколивань з урахуванням того, що швидкість виконавчого механізму становить $k_3 v_0$, можна визначити зі співвідношення

$$T_a = \frac{\Delta u}{k_3 v_0}.$$

Оскільки автоколивання є симетричними, то втрати на пошук

$$P = \frac{|x_1| + |x_2|}{2}.$$

Час виходу до екстремуму визначимо як суму інтервалів часу, за які система проходить певні ділянки фазової траєкторії:

$$T_0 = \sum_{i=0}^n \Delta t_i = \sum_{i=0}^n \frac{|u_{0_i}| + |u_{0_{i+1}}|}{k_3 v_0},$$

де n – кількість ділянок фазової траєкторії до виходу на граничний цикл.

Приклад 2.3 Нехай об'єкт керування описується рівнянням

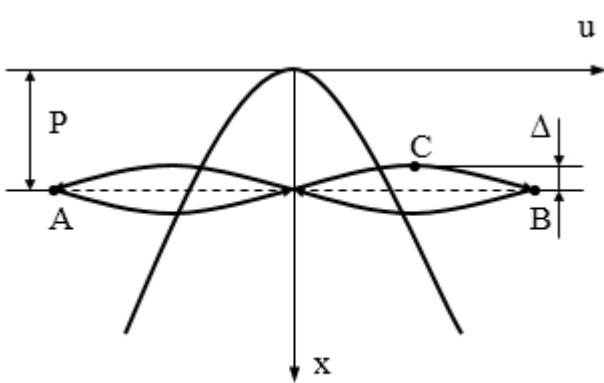
$$T \frac{dx}{dt} + x = -k_1 k_2 u^2,$$

а рівняння виконавчого механізму з урахуванням екстремального регулятора з релейним елементом має вигляд $du/dt = \pm k_3 v_0$.

Значення параметрів: $T = 1$ с; $k_1 = k_2 = 1$; $v_0 = 1$; $k_3 = 1$ с⁻¹; $\Delta = 0,2$.

Визначити період автоколивань і втрату на пошук.

Знаходимо координати точок реверсу $A(u_a, x_a)$ і $B(u_b, x_b)$. Записуємо



рівняння (2.29) з урахуванням (2.30) для додатного ($v_0 > 0$) півциклу автоколивань у точці B (рисунок 2.18). Коефіцієнти a і b для заданих параметрів системи дорівнюють одиниці, тоді

$$x_b = (x_a + u_a^2 - 2u_a + 2)e^{u_a - u_b} - u_b^2 + 2u_b - 2.$$

Ураховуючи, що при усталених автоколиваннях $x_a = x_b$ і $u_b = -u_a$,

отримаємо

$$x_b = \frac{(u_b^2 + 2u_b + 2)e^{-2u_b} - u_b^2 + 2u_b - 2}{1 - e^{-2u_b}}. \quad (2.31)$$

Друге рівняння, що зв'язує координати x_b і u_b , отримаємо так. Оскільки $k_1 = 1$, то точка C , що відповідає максимальному значенню x , знаходиться на статичній характеристиці. Отже,

$$x_c = -u_c^2, \quad x_b = -u_c^2 - \Delta, \quad (2.32)$$

звідки

$$u_c = \sqrt{x_b + \Delta} = \sqrt{x_b + 0,2}. \quad (2.33)$$

Запишемо (2.29) для точки C :

$$x_c = (x_b + u_b^2 + 2u_b + 2)e^{-(u_c + u_b)} - u_c^2 + 2u_c - 2.$$

З урахуванням (2.32) і (2.33) отримаємо

$$(x_b + u_b^2 + 2u_b + 2)e^{-(\sqrt{x_b + 0,2} + u_b)} = 2 - 2\sqrt{x_b + 0,2}. \quad (2.34)$$

З рівнянь (2.31) і (2.34) можна визначити шукані x_b і u_b . Оскільки отримана система є трансцендентною, розв'язати її можна числовими або графічними методами.

Результати розрахунків для цього прикладу є такими: $u_b = 1$, $x_b = -0,4$. Період автоколивань $T_a = 2u_b/(k_3v_0) = 2$ с; утрати на пошук $P = I^* - x_b = 0,4$.

Динаміка дискретних екстремальних систем

До цього типу належать крокові й кроково-імпульсні екстремальні системи. В останньому разі виконавчий механізм рухається не безперервно, а імпульсно, причому період проходження імпульсів T_0 зазвичай є набагато більшим за тривалість імпульсу τ .

Розглянемо кроково-імпульсну систему (рисунок 2.19). Рівняння ланок системи мають такий вигляд:

– об'єкт керування (ОК)

$$T \frac{dx}{dt} + x = k_1 u; \quad (2.35)$$

$$I = -k_2 x^2; \quad (2.36)$$

– виконавчий механізм (ВМ)

$$du / dt = k_3 v_i; \quad (2.37)$$

– екстремальний регулятор (ЕР)

$$v_n = v_0 \operatorname{sign} v_{n-1} \operatorname{sign}(\Delta I + \Delta); \quad (2.38)$$

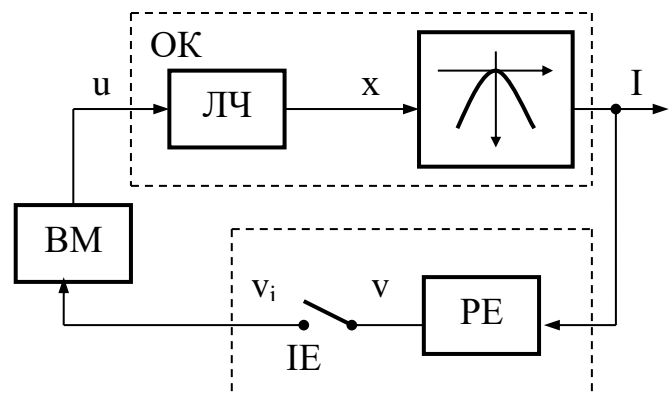


Рисунок 2.19 – Функціональна схема кроково-імпульсної СЕК

$$v_i = \begin{cases} v_0 \operatorname{sign} v_n & \text{при } nT_0 < t < nT_0 + \tau; \\ 0 & \text{при } nT_0 + \tau < t < (n+1)T_0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Якщо $v_0 = \text{const}$ і $\tau = \text{const}$, то крок при будь-якому n є величиною постійною.

Характер руху кроково-імпульсної системи можна визначити методом фазової площини в координатах «вихідна величина I – її перша різниця

ΔI ». Рівняння фазової траєкторії $I = f(\Delta I)$ можна визначити з допомогою z-перетворення.

У цьому випадку передавальна функція лінійної частини

$$W_n(s) = \frac{x(s)}{v_i(s)} = \frac{k_1 k_3}{(Ts + 1)s}. \quad (2.40)$$

Тоді імпульсна перехідна функція матиме вигляд

$$w(t) = L^{-1}\{W_n(s)\} = k_1 k_3 (1 - e^{-t/T}). \quad (2.41)$$

Дискретна передавальна функція розглядуваного імпульсного фільтра

$$W(z) = Z\{w(t)\} = \frac{k_1 k_3 (1 - e^{-T_0/T})z}{(z-1)(z - e^{-T_0/T})}. \quad (2.42)$$

З виходу релейного елемента знімається постійний сигнал $v = \pm v_0$, z-перетворення якого за умови $v > 0$ має вигляд

$$v(z) = \frac{v_0 z}{z-1}. \quad (2.43)$$

Тоді з урахуванням коефіцієнта передачі реального імпульсного елемента $k_i = \gamma T_0$, де $\gamma = \tau/T_0$ – відносна тривалість імпульсів, z-перетворення вихідного сигналу

$$x(z) = k_i W(z) v(z) = \frac{k_i k_1 k_3 v_0 (1 - e^{-T_0/T}) z^2}{(z-1)^2 (z - e^{-T_0/T})}. \quad (2.44)$$

Розкладемо (2.44) на прості дроби й позначимо: $k_i k_1 k_3 v_0 = k$, $e^{-T_0/T} = d$. Тоді отримаємо

$$x(z) = k \left[\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{(z-d)} \frac{d}{(1-d)} - \frac{z}{(z-1)} \frac{d}{(1-d)} \right]. \quad (2.45)$$

З урахуванням властивості лінійності z-перетворення з допомогою оберненого z-перетворення отримаємо

$$x(n) = kn + \frac{kd^{n+1}}{1-d} - \frac{kd}{1-d}. \quad (2.46)$$

Перша різниця Δx матиме вигляд

$$\Delta x = x(n+1) - x(n) = k + \frac{kd^{n+1}(d-1)}{1-d} = k(1-d^{n+1}). \quad (2.47)$$

Звідси $d^n = \frac{k - \Delta x}{kd}$. З урахуванням того, що $d = e^{-T_0/T}$,

$$e^{-nT_0/T} = \frac{k - \Delta x}{ke^{-T_0/T}}; \quad n = \frac{T}{T_0} \ln \frac{k}{k - \Delta x} - 1. \quad (2.48)$$

Підставимо останній вираз у (2.46) і отримаємо рівняння фазової траєкторії $x = f(\Delta x)$:

$$x = \frac{kT}{T_0} \ln \frac{k}{k - \Delta x} - k + \frac{k}{1-d} e^{-\ln \frac{k}{k - \Delta x}} - \frac{kd}{1-d} = \frac{kT}{T_0} \ln \frac{k}{k - \Delta x} - \frac{\Delta x}{1-d} + c, \quad (2.49)$$

де c – стала, у якій урахувано ненульові початкові умови $x = x_0$, $\Delta x = \Delta x_0$.

Тоді

$$c = x_0 + \frac{\Delta x_0}{1-d} - \frac{kT}{T_0} \ln \frac{k}{k - \Delta x_0}. \quad (2.50)$$

Зазначимо, що при $\nu < 0$ коефіцієнт k буде від'ємним, отже, знак перед k у виразах (2.49) і (2.50) зміниться на протилежний. Для знаходження рівняння лінії перемикання, на якій змінюється знак екстремального регулятора ν , використаємо рівняння регулятора (2.38).

Урахуємо, що $\Delta l = l(n) - l(n-1) = -k_2 x^2(n) + k_2 x^2(n-1)$, або

$$\Delta l = -k_2 x^2(n) + k_2 [x(n) \mp \Delta x]^2 = k_2 \Delta x^2 \mp 2k_2 x(n) \Delta x. \quad (2.51)$$

З (2.38) видно, що змінення знака ν_0 має місце тільки при $\Delta l + \Delta = 0$, тобто $\Delta l = -\Delta$. Тоді з (2.51) отримаємо рівняння лінії перемикання на різницевій фазовій площині:

$$x(n) = \frac{k_2 \Delta x^2 + \Delta}{\pm 2k_2 \Delta x}. \quad (2.52)$$

Як і в безперервних екстремальних, у дискретних системах, розрахованих з допомогою різницевої фазової площини, важко встановити зв'язок між параметрами системи та її якістю. Тому для отримання заданих

показників якості доводиться кілька разів виконувати розрахунки, змінюючи параметри екстремальної системи.

На закінчення зазначимо, що інерційність, розташована до екстремального об'єкта (див. рисунок 2.11, б), сповільнює рух системи до екстремальної точки, а інерційність, розташована після об'єкта (див. рисунок 2.11, в), сповільнює час вимірювання екстремуму, а отже, і визначення його положення.

Наведені вище аналітичні розрахунки СЕК базуються на досить повній інформації про об'єкт. Оскільки ця інформація зазвичай є лише приблизною, остаточний висновок про доцільність застосування СЕК можна зробити лише після випробувань системи в промислових умовах.

2.5 Самоналагоджувані системи керування

До класу самоналагоджуваних систем керування (СНС) належать системи, у яких окрім керувальних дій змінюються також параметри системи [7].

Розглянемо постановку задачі створення СНС. Припустимо, що основний контур керування складається з об'єкта керування (ОК) і пристрою керування (ПК), який містить коригувальний пристрій (КП) (рисунок 2.20). Нехай об'єкт описується векторним диференціальним рівнянням

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Y} \{ \bar{y}(t); \bar{u}_0(t); \bar{f}_0[\bar{b}_f(t); \bar{a}(t) \}, \quad (2.53)$$

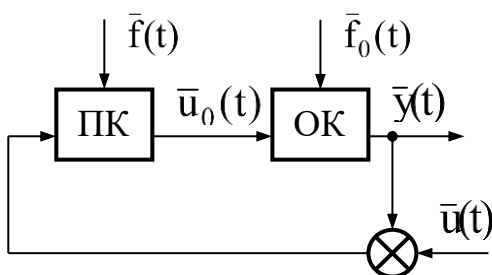


Рисунок 2.20 – Основний контур керування СНС

де \bar{Y} – вектор вихідних координат об'єкта; \bar{u}_0 – вектор керувань об'єкта; \bar{f}_0 – вектор збурень об'єкта, що залежить від деякого вектора параметрів \bar{b}_f ; \bar{a} – вектор параметрів об'єкта.

Пристрій керування також описується-

ся векторним диференціальним рівнянням

$$\frac{d\bar{u}_0}{dt} = \bar{U}_0 \{ \bar{u}[\bar{b}_u(t), t]; \bar{f}[\bar{b}_f(t), t]; \bar{u}_0(t); \bar{b}(t) \}, \quad (2.54)$$

де \bar{U} – вектор керувань основного контуру, що залежить від деякого вектора параметрів \bar{b}_u ; \bar{f} – вектор збурень пристрою керування, який залежить від деякого вектора параметрів \bar{b}_f ; \bar{b} – вектор параметрів пристрою керування.

Рівняння об'єкта в загальному випадку є нелінійним, параметри об'єкта $\bar{a}(t)$, а також параметри зовнішніх впливів $\bar{b}_f(t), \bar{b}_u(t), \bar{b}(t)$ є випадковими й змінюються у часі. Крім того, ці параметри й параметри керування об'єкта апіорі є повністю невідомими. Задача синтезу СНС полягає у визначенні структури пристрою керування й алгоритму змінення його контрольованих параметрів $\bar{b}(t)$.

При цьому критерій ефективності I , що є функціоналом змінних параметрів системи, має набувати екстремального значення. Як критерій ефективності можуть бути точність, швидкодія, величина середньоквадратичної помилки, стабільність динамічних характеристик, інваріантність системи до зовнішніх збурень тощо.

Мета керування $I = extr$ у СНС зазвичай реалізується з допомогою *пошукових* або *аналітичних* (безпошукових) алгоритмів. У першому випадку СНС змінює параметри коригувального пристрою на основі аналізу реакції системи на пошукові дії. Пошукові системи з екстремальним самоналагоджуванням параметрів є одними з найдосконаліших, але велика кількість змінних параметрів ускладнює їх реалізацію. Пошукові СНС – це поєднання багатоканального екстремального регулятора, розглянутого вище, і коригувального пристрою, який шляхом змінення параметрів системи компенсує вплив зовнішніх і внутрішніх збурень на властивості системи.

Аналітичні самоналагоджувані системи здійснюють контрольовані змінення параметрів $\bar{b}(t)$ коригувального пристрою з допомогою обчислювальних операцій, тобто визначають і розв'язують рівняння

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \bar{B}\{\bar{u}_n[\bar{b}_u(t), t]; \bar{f}_n[\bar{b}_f(t), t]; \bar{f}_{0n}[\bar{b}_{f0}(t), t]; \bar{u}_0(t); \bar{b}(t), \bar{a}(t)\}, \quad (2.55)$$

де індексом «н» позначено спостережувані дії, що вимірюються системою спеціальних пристроїв.

Знаходження рівняння пристрою керування без урахування зв'язку між параметрами ПК і зовнішніми і внутрішніми змінами системи становлять так звану задачу *первинної оптимізації*. Унаслідок розв'язання цієї задачі визначаються оптимальна або ідеальна модель системи, структура й ідеальні параметри КП.

Якщо ідеальні параметри системи залежать від невідомих параметрів зовнішніх і внутрішніх дій, то наближення до ідеальної моделі може бути реалізовано лише з допомогою принципу самоналагодження.

Порівнюючи аналітичні й пошукові СНС, необхідно зазначити таке: аналітичні системи потребують значно більшої апріорної інформації для своєї успішної роботи й не потребують часу на пошук. Пошукові СНС не потребують такої інформації, але витрачають час на пошук, що робить їх малоприсадними у разі порівняно швидкого змінення параметрів системи.

Аналітичні самоналагоджувані системи

Функціональну схему аналітичної СНС, яка складається з основного контуру й контуру самоналагодження, зображено на рисунку 2.21. *Основний контур* містить об'єкт керування, що складається з трьох динамічних елементів I, II, III, і коригувальний пристрій (КП). Припускається, що при від'єданому контуру самоналагодження основний контур може працювати як звичайна система автоматичного керування, у

якій контрольоване змінення параметрів не відбувається. *Контур самоналагодження* містить елементи основного контуру, динамічні характеристики яких зазнають непередбачених наперед змін, коригувальний пристрій (КП) і керувальний обчислювальний пристрій (КОП), що виробляє керувальну дію $u_c(t)$ у вигляді змінення параметрів КП або введення додаткової дії до ланцюга основного контуру.

Керування $u_c(t)$ виробляється на основі апріорної та поточної інформації про зовнішні й внутрішні умови роботи системи, критерію ефективності, що визначає мету керування, і критерію самоналагодження, який характеризує відхилення справжніх характеристик системи від заданих.

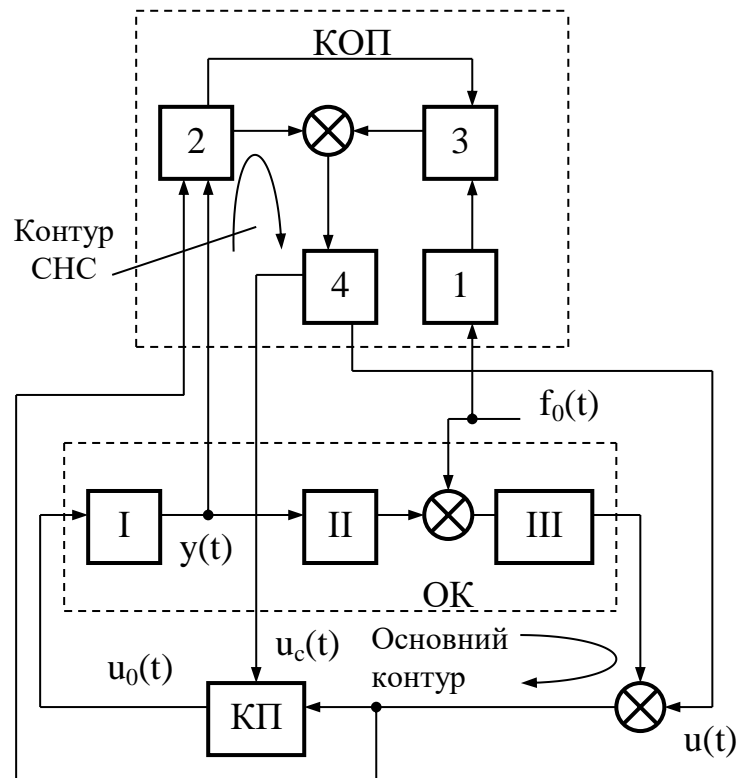


Рисунок 2.21 – Функціональна схема аналітичної СНС

До складу КОП можуть входити такі функціональні елементи:

- аналізатор зовнішніх умов 1, що визначає характеристики зовнішніх дій $f_0(t)$;
- аналізатор внутрішніх умов 2, який визначає поточні динамічні характеристики системи;
- обчислювач оптимальних умов роботи системи 3, що розв'язує задачу первинної оптимізації;
- обчислювач 4, який виробляє керувальну дію в контурі самоналагодження.

Робота КОП відбувається так. Обчислювач 3 на основі вибраного критерію ефективності, заданих обмежень та інформації, що надходить на вхід від аналізаторів 1 і 2, визначає оптимальні характеристики системи й параметри, вибрані для кількісного описання цих характеристик.

Оптимальні значення параметрів порівнюються з їх поточними справжніми значеннями, що визначаються аналізатором 2. При цьому отримуються сигнали розузгодження, які надходять до обчислювача 4. Обчислювач виробляє керувальний сигнал $u_c(t)$, що через коригувальний пристрій змінює динамічні характеристики основного контуру таким чином, щоб вони незначно відрізнялися від оптимальних характеристик. У цьому випадку здійснюється так звана *вторинна оптимізація*. Якщо справжні характеристики не відрізняються від оптимальних, то сигнали розузгодження дорівнюють нулю і контрольовані зміни у системі не відбуваються.

Таким чином, у загальному випадку робота аналітичної самоналагоджуваної системи складається з повторюваних один за одним циклів, кожен з яких може поділятися на такі етапи:

- визначення початкових зовнішніх і внутрішніх умов роботи системи;
- визначення поточних оптимальних умов роботи системи з урахуванням обмежень (первинна оптимізація) і керування системою відповідно до цих оптимальних значень;
- визначення справжніх внутрішніх умов;
- порівняння оптимальних умов зі справжніми з огляду на прийнятий критерій самоналагодження;
- налагодження або корекція динамічних властивостей основного контуру (вторинна оптимізація).

У наведеній СНС контур самоналагодження виробляє керувальну дію $u_c(t)$ залежно від зовнішніх і внутрішніх умов роботи системи.

Деякі СНС використовують інформацію тільки про зовнішні дії. У цьому випадку визначення оптимальних динамічних характеристик здійснюється без урахування внутрішніх умов роботи системи, тобто зв'язку між аналізатором 2 і обчислювачем 3 немає. Однак і в цьому випадку система має замкнутий цикл налагодження. Якщо аналізатора 2 немає зовсім, то налагодження відбувається за розімкнутим циклом.

Існують також СНС, що самоналагоджуються тільки за динамічними характеристиками [9]. У цьому разі немає й аналізатора 1. Динамічні властивості можуть визначатися або тільки для об'єкта керування, або для ланцюга, що містить крім ОК також послідовний коригувальний пристрій. У першому випадку система самоналагоджується за розімкненим циклом, у другому – за замкненим.

Розглянемо СНС з розімкнутим циклом налагодження, яка використовує інформацію про зовнішні дії й здійснює цілеспрямоване змінення параметрів коригувального пристрою (КП) для забезпечення виконання задачі керування.

Під час роботи під впливом зовнішніх дій властивості об'єкта змінюються, у зв'язку з чим передавальна функція об'єкта $W_o(s)$ буде відрізнятися від початкової $W_{оп}(s)$. Якщо СНС призначено для стабілізації динамічних властивостей системи, то має виконуватись умова

$$W(s) = \frac{W_k(s) \cdot W_o(s)}{1 + W_k(s) \cdot W_o(s)} = const, \quad (2.56)$$

де $W(s)$ – передавальна функція замкненої системи;

$W_k(s)$ – передавальна функція коригувального пристрою.

Для виконання умови (2.56) необхідно, щоб справджувалася рівність

$$W_k(s)W_o(s) = W_{кп}(s)W_{оп}(s). \quad (2.57)$$

де $W_{кп}(s)$ – початкова передавальна функція коригувального пристрою.

З (2.57) запишемо

$$W_k(s) = \frac{W_{ку}(s)W_{оу}(s)}{W_o(s)}. \quad (2.58)$$

У реальних системах зазвичай обмежуються приблизним відтворенням умови (2.58), оскільки реалізація $W_k(s)$ з високою точністю, а також отримання повної інформації про збурювальні дії та визначення їх впливу на параметри об'єкта є завданням, що технічно важко виконується.

Прикладом системи, що є самоналагоджуваною за динамічними характеристиками об'єкта, може бути СНС з послідовним з'єднанням коригувального пристрою, бажаної моделі (M) прямого ланцюга й оберненої моделі (ОМ) об'єкта керування. Задача ланцюга самоналагодження полягає в тому, щоб обчислити поточні динамічні характеристики об'єкта, знайти й вивести до коригувального пристрою параметри оберненої моделі об'єкта. При цьому передавальна функція прямого ланцюга основного контуру буде такою:

$$W_n(s) = W_M(s) \cdot W_{OM}(s) \cdot W_o(s), \quad (2.59)$$

де $W_M(s)$ – передавальна функція еталонної моделі;

$W_{OM}(s)$ – передавальна функція оберненої моделі об'єкта керування.

З урахуванням того, що внаслідок самоналагодження $W_{OM}(s)W_o(s) \approx 1$ ($W_{OM}(s) = 1/W_o(s)$ за визначенням), маємо $W_n(s) \approx W_M(s)$, тобто справжня передавальна функція прямого ланцюга системи приблизно дорівнює бажаній передавальній функції.

Таким чином, розглянута СНС стабілізує динамічні властивості системи. Зазначимо, що в цьому випадку помилки, які можуть виникати в ланцюгах самоналагодження, не компенсуються системою. Тому цю систему відносять до класу розімкнутих.

До систем з еталонною моделлю можуть також входити аналізатори поточних характеристик об'єкта керування. Однак вони мають допоміжний характер, оскільки визначають поточні характеристики об'єкта, які призначено лише для більш точного визначення помилок ланцюгів самоналагодження за замкненим циклом.

Розглянемо спосіб стабілізації динамічних характеристик системи з допомогою введення глибокого від'ємного зворотного зв'язку. Структурну схему СНС для цього випадку показано на рисунку 2.22, а. Передавальна функція системи після нескладних структурних перетворень (рисунок 2.22, б) матиме вигляд

$$W(s) = \frac{W_k(s)W_o(s)}{1 + kW_k(s)W_o(s)} [1 + kW_M(s)], \quad (2.60)$$

де k – коефіцієнт підсилення ланцюга зворотного зв'язку.

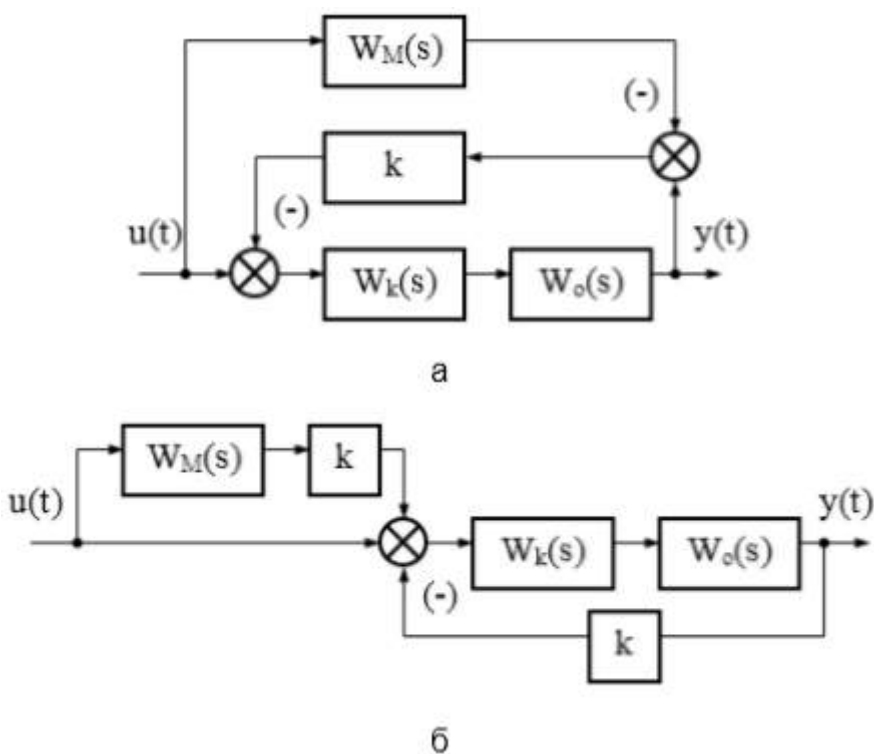


Рисунок 2.22 – Структурні схеми СНС з глибоким від'ємним зворотним зв'язком: а – початкова; б – перетворена

Перепишемо (2.60) у такому вигляді:

$$W(s) = \frac{W_k(s)W_o(s)}{1/k + W_k(s)W_o(s)} [1/k + W_M(s)],$$

звідки видно, що за умови $k \rightarrow \infty$ права частина цього виразу наближається до $W_M(s)$, тобто біля межі маємо

$$W(s) = W_M(s). \quad (2.61)$$

У реальних системах величина k обмежується умовами стійкості системи і рівність (2.61) виконується лише приблизно.

З розглянутих прикладів випливає, що для успішного функціонування самоналагоджуваних систем керування зазвичай необхідна інформація про поточні параметри зовнішніх сигналів і об'єкта керування, тобто слід розв'язувати задачу *ідентифікації* об'єкта під час експлуатації системи.

2.6 Ідентифікація об'єктів керування

Під *ідентифікацією* (математичним описом) об'єкта керування розуміють визначення математичної моделі, за якою встановлюють з відомою точністю зв'язок між вхідними й вихідними змінними об'єкта [1].

Досконалим засобом отримання *рівнянь статки* як лінійного, так і нелінійного об'єкта є експериментальні методи, що ґрунтуються на обробленні дослідних матеріалів, які зібрано безпосередньо на діючому об'єкті. Найбільшого поширення набули методи, що ґрунтуються на використанні штучних збурень, які подаються на об'єкт за наперед спланованою програмою. Якщо ці збурення призводять до недопустимих режимів роботи, то обмежуються реєстрацією контрольованих параметрів у режимі нормальної роботи об'єкта. Результати експерименту зазвичай обробляють за методом найменших квадратів, що дає найкраще узгодження кривої $y = f(x)$ та експериментальних точок за умови

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \min, \quad (2.62)$$

де x_i , y_i – експериментальні значення вхідної й вихідної змінних; n – загальна кількість дослідів; $f(x)$ – апроксимувальний вираз.

Під час вибору залежності $y = f(x)$ можливі два варіанти:

– залежність $f(x)$ є відомою наперед на основі теоретичних міркувань; задача полягає в пошуку оптимальних параметрів залежності, щоб виконувалась умова (2.62);

– залежність $f(x)$ є невідомою наперед; у цьому випадку її найчастіше задають у вигляді полінома певного степеня. Тоді пошук оптимальних значень параметрів можна виконувати шляхом розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь, які отримують після підстановки $y = f(x)$ у вираз (2.62) і дорівнювання нулю частинних похідних за шуканими параметрами.

Зазначимо, що в разі залежності вихідної величини y від кількох вхідних сигналів x_i апроксимувальний поліном містить також добутки цих сигналів, у яких ураховано їх взаємний вплив. Наприклад, для двох вхідних сигналів і другого степеня апроксимувального полінома маємо

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2.$$

Існують методи визначення *динамічних властивостей* об'єктів. Специфіка ідентифікації в СНС зумовлена вимогою не тільки точності, але й недопустимості великих запізнь при видачі математичного опису об'єкта.

Відомо, що динамічні властивості лінійного об'єкта керування визначено, якщо знайдено його перехідну $h(t)$ чи імпульсну перехідну (вагову) $w(t)$ функції або передавальну $W(s)$ чи частотну передавальну $W(j\omega)$ функції.

Найпростішою є ідентифікація об'єкта за *частотним методом*, що ґрунтується на фізичному змісті частотних характеристик [10].

Розглянемо одновимірний стаціонарний об'єкт з невідомими параметрами, який описується рівнянням

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = & b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \\ & + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (2.63)$$

де $y(t)$ – вихідна координата системи; $u(t)$ – відома (вимірювана) керувальна дія; a_i і b_j – невідомі параметри, причому $n > m$.

Метою ідентифікації є визначення невідомих параметрів a_i і b_j .

Дія $u(t)$ становить випробувальну гармонічну дію:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n B_k \sin \omega_k t, \quad (2.64)$$

де B_k і ω_k – відомі амплітуда й частота гармонічних складових випробувальної дії, необхідні для обчислення значень частотних функцій об'єкта при частотах $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Якщо на вхід лінійного об'єкта подається гармонічна дія (2.64), то вихідний сигнал $y(t)$ також можна подати у вигляді суми:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n B_k A(\omega_k) \sin[\omega_k t + \phi(\omega_k)], \quad (2.65)$$

де $A(\omega_k)$, $\phi(\omega_k)$ – значення амплітудної й фазової частотних функцій при частоті ω_k .

Згідно з рівнянням (2.63) передавальна функція об'єкта має вигляд

$$W_o(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} = \frac{R(s)}{Q(s)}. \quad (2.66)$$

Тоді частотна передавальна функція

$$W_o(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)}. \quad (2.67)$$

Звідси з урахуванням правил множення двох комплексних чисел знаходимо

$$\begin{aligned} U_R(\omega) + jV_R(\omega) &= [U(\omega) + jV(\omega)] \cdot [U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)] = \\ &= U(\omega)U_Q(\omega) - V(\omega)V_Q(\omega) + j[U(\omega)V_Q(\omega) + V(\omega)U_Q(\omega)]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Порівнявши дійсні й уявні частини цього виразу, одержимо два рівняння:

$$\begin{cases} U_R(\omega) = U(\omega)U_Q(\omega) - V(\omega)V_Q(\omega); \\ V_R(\omega) = U(\omega)V_Q(\omega) + V(\omega)U_Q(\omega). \end{cases} \quad (2.69)$$

Якщо для n частот від ω_1 до ω_n експериментально визначити $U(\omega_k)$ і $V(\omega_k)$, то з рівнянь (2.69) одержимо $2n$ лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} U_R(\omega_k) = U(\omega_k)U_Q(\omega_k) - V(\omega_k)V_Q(\omega_k); \\ V_R(\omega_k) = U(\omega_k)V_Q(\omega_k) + V(\omega_k)U_Q(\omega_k). \end{cases} \quad (2.70)$$

Експериментально $U(\omega_k)$ і $V(\omega_k)$ визначаємо так. На вхід об'єкта подаємо пробну дію $u(t) = 1\sin(\omega_1 t)$. Після закінчення перехідного процесу на виході об'єкта отримуємо усталений сигнал $y(t) = A(\omega_1) \sin [\omega_1 t + \phi(\omega_1)]$. Амплітуда й фаза цього сигналу пов'язані з дійсною й уявною частотними функціями об'єкта співвідношеннями

$$\begin{aligned} U(\omega_1) &= A(\omega_1) \cos \phi(\omega_1); \\ V(\omega_1) &= A(\omega_1) \sin \phi(\omega_1). \end{aligned}$$

Сигнал з виходу об'єкта подаємо на фільтр Фур'є, який множить $y(t)$ на $\sin(\omega t)$ і $\cos(\omega t)$ та усереднює цілу кількість періодів. Отже, на виході фільтра отримуємо

$$U(\omega_1) = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(\omega_1 t) dt, \quad V(\omega_1) = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(\omega_1 t) dt.$$

Аналогічно визначаємо $U(\omega)$ і $V(\omega)$ для всіх n частот.

Приклад 2.4 Об'єкт другого порядку описується передавальною функцією

$$W_0(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}.$$

Параметри b_0 , a_2 , a_1 є невідомими. Для частот $\omega_1 = 1 \text{ c}^{-1}$ і $\omega_2 = 10 \text{ c}^{-1}$ експериментально знайдено значення дійсної та уявної частотних функцій:

$U(1) = 21,2$; $U(10) = -2,12$; $V(1) = -4,7$; $V(10) = -0,47$. За цими даними знайти параметри передавальної функції об'єкта.

Відповідно до (2.67) для заданої передавальної функції маємо $U_R(\omega) = b_0$; $V_R(\omega) = 0$; $U_Q(\omega) = 1 - a_2 \omega^2$; $V_Q(\omega) = a_1 \omega$. Тому система рівнянь (2.70) для частот ω_1 і ω_2 матиме вигляд

$$\begin{cases} b_0 = U(\omega_1)(1 - a_2\omega_1^2) - V(\omega_1)a_1\omega_1; \\ 0 = U(\omega_1)a_1\omega_1 + V(\omega_1)(1 - a_2\omega_1^2); \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = U(\omega_2)(1 - a_2\omega_2^2) - V(\omega_2)a_1\omega_2; \\ 0 = U(\omega_2)a_1\omega_2 + V(\omega_2)(1 - a_2\omega_2^2), \end{cases}$$

або після підстановки числових значень

$$\begin{cases} b_0 = 21,2(1 - a_2) + 4,7 a_1; \\ 0 = 21,2 a_1 - 4,7(1 - a_2); \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = -2,12(1 - 100a_2) + 4,7 a_1; \\ 0 = -2,12 a_1 - 0,47(1 - 100a_2). \end{cases}$$

Другі рівняння цих систем не залежать від b_0 . Розв'язавши їх, знайдемо: $a_2 = 0,1$; $a_1 = 0,2$. Тоді з будь-якого першого рівняння знаходимо $b_0 = 20$. Отже, передавальна функція об'єкта має вигляд

$$W_0(s) = \frac{20}{0,1s^2 + 0,2s + 1}.$$

Оптимізація динамічного стану системи при повній ідентифікації об'єкта призводить до збільшення часу самоналагодження. Тому для підвищення швидкодії намагаються використовувати часткову інформацію, яка, хоча і є неповною, дає досить повне уявлення про змінення динаміки системи. Методи визначення таких часткових характеристик отримали назву *методів непрямой ідентифікації*. Відомим є, наприклад, непряме оцінювання коефіцієнта демпфірування ξ через частоту ω . Так, для згасальних коливальних процесів можна використовувати залежність

$\omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$. Як непряма оцінка динамічних властивостей системи може

також бути величина амплітуди автоколиваний на виході системи, що залежить від коефіцієнта підсилення розімкненої системи. Відхилення амплітуди від заданого значення є сигналом розузгодження, який відпрацьовується системою.

3. НЕЧІТКА ЛОГІКА

3.1 Загальні відомості

Найбільш вражаючою властивістю людського інтелекту є здатність приймати правильні рішення в умовах неповної і нечіткої інформації. Будування моделей, які відтворюють мислення людини, і використання їх у комп'ютерних системах сьогодні є однією з найважливіших проблем науки.

Основи нечіткої логіки було закладено наприкінці 60-х років у працях відомого американського математика Латфі Заде. Подібні дослідження було викликано щораз більшим незадоволенням експертними системами. «Штучний інтелект», що легко розв'язував задачі керування складними технічними комплексами, був безпорадним у простих життєвих ситуаціях типу «якщо машиною перед тобою керує недосвідчений водій, то тримайся від неї подалі» [11].

Для створення дійсно інтелектуальних систем, що можуть адекватно взаємодіяти з людиною, був потрібен новий математичний апарат, який перекладає й неоднозначні життєві твердження на мову чітких математичних формул.

Першим серйозним кроком у цьому напрямку була теорія нечітких множин, розроблена доктором Латфі Заде. Його роботу «Fuzzy Sets» було опубліковано 1965 року в журналі «Information and Control». Ця теорія заклала основи моделювання інтелектуальної діяльності людини й стала поштовхом до розвитку нової області науки – fuzzy logic (fuzzy – нечіткий, розмитий, м'який) [12].

Хоча тоді його стаття не одержала підтримки з боку деяких кіл академічної спільноти, подальші роботи професора Л. Заде і його послідовників заклали міцний фундамент нової теорії і створили передумови для впровадження методів нечіткого керування в інженерну

практику. Сьогодні методи нечіткої логіки стали одним із інструментів, що використовують інженери при проектуванні вимірально-контрольних систем.

Доктор Лотфі Заде, якого вважають батьком-засновником нечіткої логіки, народився 1921 року. Закінчивши 1942 року Тегеранський університет і отримавши ступінь з електротехніки, він виїхав до США, де навчався в Массачусетському технологічному інституті (1946 р.) і в Колумбійському університеті (1949 р.), де пізніше викладав теорію систем.

Існує легенда про те, яким чином було створено теорію нечітких множин. Одного разу Заде мав довгу дискусію зі своїм другом відносно того, чия з дружин є більш привабливою. Термін «приваблива» є невизначеним і внаслідок дискусії вони не змогли дійти єдиної думки. Це змусило Заде сформулювати концепцію, яка може подати нечітке поняття типу «приваблива» у числовій формі.

Чіткі рішення нечіткої логіки

Епіменід Кносський з острова Крит – напівміфічний поет і філософ, який жив у VI ст. до н. е., одного разу заявив: «Усі критяни – брехуни!». Оскільки він і сам був критянином, то його пам'ятають як винахідника так званого критського парадоксу.

У термінах аристотелевої логіки, у якій твердження не може бути одночасно істинним і хибним, подібні самозаперечення не мають сенсу. Якщо вони істинні, то вони помилкові, але якщо вони помилкові, то вони істинні.

У нечіткій логіці змінні можуть бути частковими членами множин. Істинність або хибність перестають бути абсолютними – твердження можуть бути частково істинними й частково помилковими. Використання подібного підходу дає змогу строго математично довести, що парадокс Епіменіда є на 50 % правдивим і на 50 % хибним.

Нечітка логіка в самій своїй основі є несумісною з аристотелевою логікою, особливо щодо закону Tertium non datur (від лат. третього не дано), який звучить так: якщо твердження не є істинним, то воно є хибним.

Теорія нечітких множин

Наочним прикладом нечіткої логіки можна навести відповіді людей на запитання: «Чи холодно вам зараз?». У більшості випадків люди розуміють, що не йдеться про абсолютну температуру за шкалою Цельсія, а про особисте сприйняття температури. Для багатьох людей $+15^{\circ}$ буде цілком теплою, для інших така температура буде трактуватися як прохолодна.

На відміну від людей машини не можуть проводити таку тонку градацію. Якщо стандартом визначення холоду буде «температура нижче $+15^{\circ}\text{C}$ », то $+14,99^{\circ}\text{C}$ буде розцінюватися як холод, а $+15^{\circ}\text{C}$ – не буде.

Базові концепції нечіткої логіки є доволі простими [13]. На рисунку 3.1 зображено графік, що допомагає зрозуміти те, як людина сприймає температуру. Температуру $+10^{\circ}\text{C}$ людина сприймає як холод, а температуру $+30^{\circ}\text{C}$ – як спеку. Температура в $+15^{\circ}\text{C}$ одним здається низькою, іншим – досить комфортною. Назвемо цю групу означень функцією належності до множин, які описують суб'єктивне сприйняття

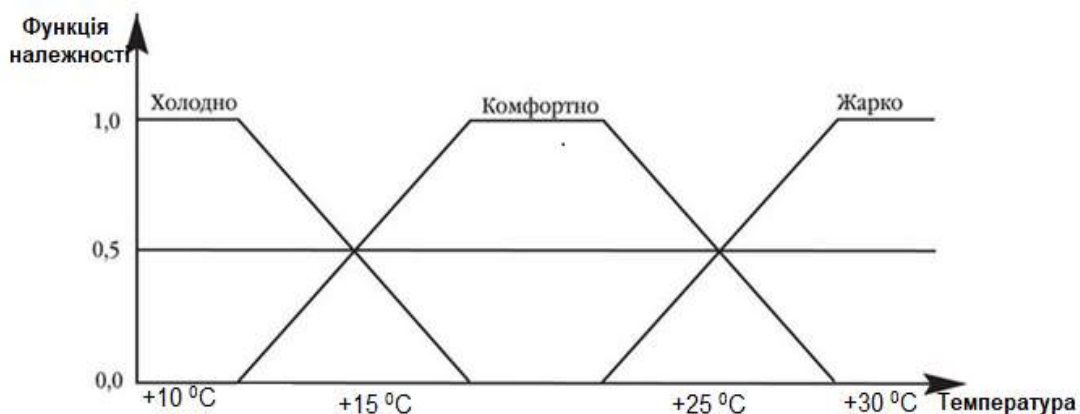


Рисунок 3.1. Нечітке визначення температури

температури людиною.

Аналогічно можна створити додаткові множини, що описують сприйняття температури людиною. Наприклад, можна додати такі множини, як «дуже холодно» і «дуже жарко». Можна описати подібні функції для інших концепцій, наприклад для станів «відкрито» і «закрито», температури в охолоджувачі або температури в теплиці.

Іншими словами, нечіткі системи можна використовувати як універсальний апроксиматор (усереднювач) дуже широкого класу лінійних і нелінійних систем. Це не лише робить більш надійними стратегії контролю в нелінійних випадках, але й дає змогу використовувати оцінки фахівців-експертів для будування схем комп'ютерної логіки.

Нечіткі множини

Нехай E – універсальна множина, x – елемент цієї множини E , а R – певна властивість. Звичайна (чітка) підмножина A універсальної множини E , елементи якої задовольняють властивості R , визначається як множина впорядкованої пари $A = \{mA(x)/x\}$, де $m_A(x)$ – характеристична функція, що набуває значення 1, якщо x задовольняє властивість R , і 0 – в іншому випадку.

Нечітка підмножина відрізняється від звичайної тим, що для елементів x з множини E немає однозначної відповіді «ні» відносно властивості R . У зв'язку з цим нечітка підмножина A універсальної множини E визначається як множина впорядкованої пари $A = \{mA(x)/x\}$, де $m_A(x)$ – характеристична функція належності (ФН) (або просто функція належності), що набуває значення в деякій упорядкованій множині M (наприклад, $M = [0, 1]$).

Функція належності відображає ступінь (або рівень) належності елемента x до підмножини A . Множину M називають множиною

належностей. Якщо $M = \{0, 1\}$, тоді нечітка підмножина A може розглядатися як звичайна, або чітка, множина.

Розглянемо множину X усіх чисел від 0 до 10. Визначимо підмножину A множини X усіх дійсних чисел від 5 до 8: $A = [5, 8]$.

Покажемо функцію належності множині A . Ця функція ставить у відповідність число 1 або 0 кожному елементу в множині X , залежно від того, належить цей елемент підмножині A чи ні. Результат показано на рисунку 3.2.

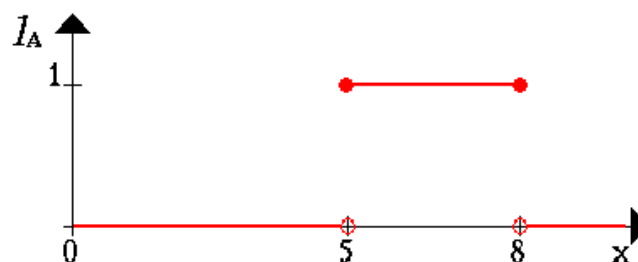


Рисунок 3.2 – Функція належності множині A

Можна інтерпретувати елементи, яким поставлено у відповідність 1, як такі, що належать множині A , а елементи, яким поставлено у відповідність 0, як елементи, що не належать множині A .

Ця концепція використовується в багатьох областях застосувань. Однак можна легко знайти ситуації, у яких цій концепції буде бракувати гнучкості.

Наприклад, опишемо множину молодих людей. Формально можна записати так: $B = \{\text{молоді люди}\}$.

Оскільки вік починається з 0, то нижня межа цієї множини має бути нулем. Верхню межу визначити набагато складніше. Спочатку встановимо верхню межу, наприклад, 20 років. Таким чином, маємо B як чітко обмежений інтервал, буквально: $B = [0, 20]$. Постає запитання: чому людина в двадцятирічний ювілей – молода, а наступного дня вже немоло-

да? Очевидно, це – структурна проблема, і якщо пересунути верхню межу в іншу точку, то можна поставити таке ж запитання.

Більш природний шлях отримання множини B полягає в менш строгому поділі на молодих і немолодих (рисунок 3.3).

Для цього зробимо не лише чіткі судження типу

- Так**, він належить до множини молодих людей,
- Ні**, він не належить до множини молодих людей,

але й більш гнучкі формулювання:

- Так**, він належить до досить молодих людей,
- Ні**, він не дуже молодий.

Розглянемо, як з допомогою нечіткої множини визначити вираз «він ще молодий».

У першому прикладі кодували всі елементи множини з допомогою 0 або 1. Простим способом узагальнити цю концепцію є введення значення між 0 і 1. Реально можна навіть допустити нескінченну кількість значень між 0 і 1, в одиничному інтервалі $I = [0, 1]$.

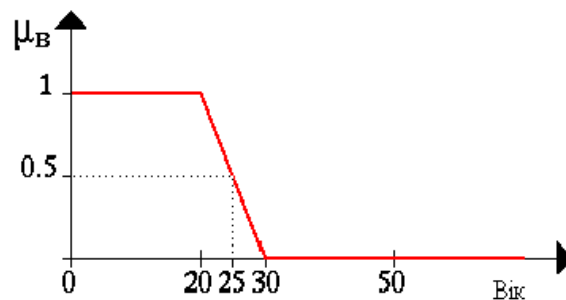


Рисунок 3.3 – Функція множини людей

Інтерпретація чисел при співвідношенні всіх елементів множини стає тепер більш складною. Зазвичай, число 1 знову ставиться у відповідність до того елемента, що належить множині B , а 0 означає, що елемент точно не належить множині B . Усі інші значення визначають ступінь належності до множини B .

Для наочності наведемо характеристичну функцію множини молодих людей, як і в першому прикладі.

Нехай $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0, 1]$; A – нечітка множина, для якої

$$m_A(x_1) = 0,3; m_A(x_2) = 0; m_A(x_3) = 1; m_A(x_4) = 0,5; m_A(x_5) = 0,9.$$

Тоді A можна подати у вигляді

$$A = \{0,3/x_1; 0/x_2; 1/x_3; 0,5/x_4; 0,9/x_5\},$$

або

$$A = 0,3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0,5/x_4 + 0,9/x_5$$

(знак «+» є операцією не додавання, а об'єднання),

або

ФН	x1	x2	x3	x4	x5
A =	0,3	0	1	0,5	0,9

Методи будування функцій належності нечітких множин

У наведених вище прикладах використано прямі методи, коли експерт або просто задає для кожного $x \in E$ значення $m_A(x)$, або визначає функцію належності. Зазвичай прямі методи задання функції належності використовуються для вимірних понять, таких як швидкість, година, відстань, тиск, температура тощо, тобто коли видокремлюються полярні значення.

У багатьох задачах для характеристики об'єкта можна виокремити набір ознак, і для кожної з них визначити полярні значення, що відповідають значенням функції належності (0 або 1).

Наприклад, у задачі розпізнавання обличчя можна виокремити такі пункти (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1 – Ознака об'єкта у задачі розпізнавання обличчя

Фп	Ознака об'єкта	0	1
x1	Висота чола	Низький	Високий
x2	Профіль носа	Кирпатий	Горбатий
x3	Довжина носа	Короткий	Довгий
x4	Розріз очей	Вузькі	Широкі
x5	Колір очей	Світлі	Темні
x6	Форма підборіддя	Гостра	Квадратна
x7	Товщина губ	Тонкі	Товсті
x8	Колір обличчя	Темний	Світлий
x9	Обрис обличчя	Овальне	Квадратне

Для конкретного обличчя A експерт, виходячи з наведеної шкали, задає $m_A(x) \in [0, 1]$, формуючи векторну функцію належності $\{m_A(x_1), m_A(x_2), \dots, m_A(x_9)\}$.

Непрямі методи обчислення значень функції належності використовуються у випадках, коли немає елементарних вимірних властивостей, через які визначається необхідна нечітка множина. Зазвичай це методи попарних порівнянь. Якщо значення функцій належності є відомими, наприклад, $m_A(x_i) = w_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, то попарні порівняння можна подати матрицею відношень $A = \{a_{ij}\}$, де $a_{ij} = w_i/w_j$ (операція ділення).

Нечіткі оператори

Щоб застосувати алгебру для роботи з нечіткими значеннями, необхідно визначити оператори, які будуть використовуватися. Зазвичай у

булевій логіці використовується лише обмежений набір операторів, з допомогою яких і проводиться виконання інших операцій: AND (оператор «І»), OR (оператор «АБО»), NOT (оператор «НІ»). Можна дати багато означень для операторів. Наведемо три базових із них:

AND	0	1
0	0	1
1	1	1

OR	0	1
0	0	0
1	0	1

A	0	1
NOT A	1	0

У булевій логіці значення FALSE («ХИБНІСТЬ») є еквівалентним значенню «0», а значення TRUE («ІСТИНА») – значенню «1». Аналогічно в нечіткій логіці ступінь істинності може змінюватися в діапазоні від 0 до 1, тому значення «Холод» є правильним у степені 0,1, а операція NOT («Холод») – у степені 0,9.

Операції над нечіткими множинами показано на рисунках 3.4 – 3.8.

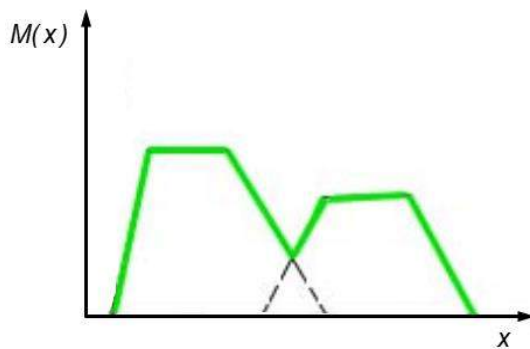


Рисунок 3.4 – Об'єднання

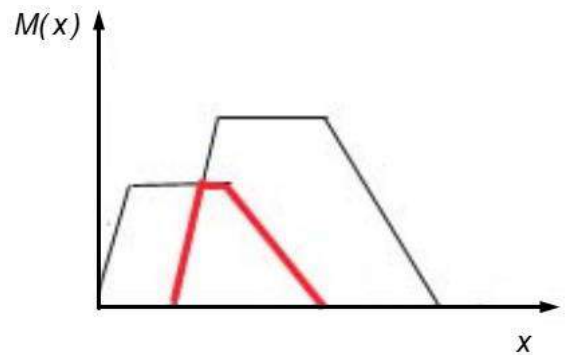


Рисунок 3.5 – Перетин

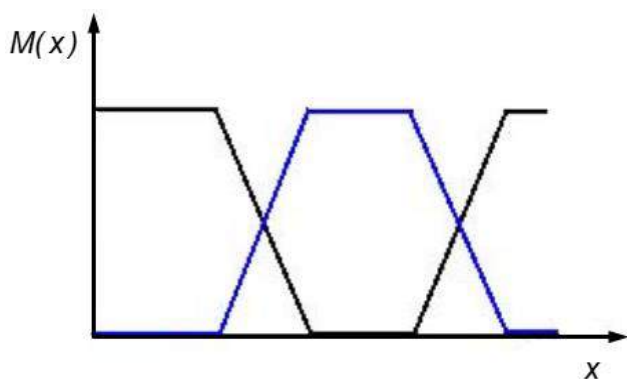


Рисунок 3.6 – Доповнення

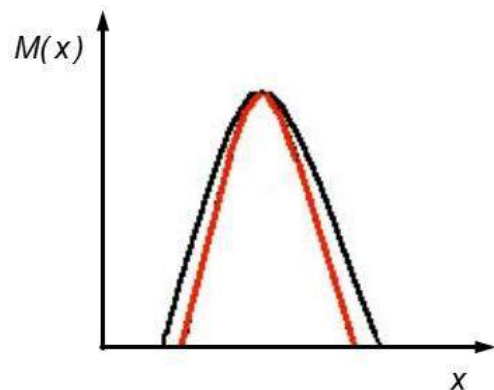


Рисунок 3.7 – Концентрація

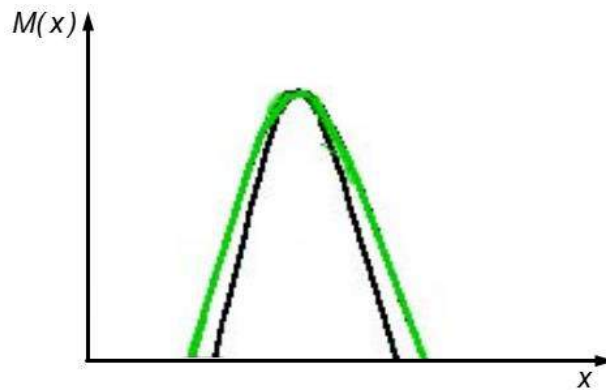


Рисунок 3.8 – Розмивання

Нечіткі множини в системах керуванн

Вдалим застосуванням теорії нечітких множин є контролери нечіткої логіки. Їх функціонування дещо відрізняється від роботи звичайних контролерів: для опису системи замість диференціальних рівнянь використовуються знання експертів. Ці знання може бути виражено з допомогою лінгвістичних змінних, які описано нечіткими множинами.

3.2 Інтеграція з інтелектуальними парадигмами

Гібридизація методів інтелектуального оброблення інформації – девіз, під яким пройшли 90-ті роки у західних та американських дослідників. Унаслідок об'єднання кількох технологій штучного інтелекту виник спеціальний термін – «м'які обчислення» (soft computing), який увів Л. Заде 1994 року. Сьогодні м'які обчислення об'єднують такі області, як нечітка логіка, штучні нейронні мережі, імовірнісні міркування й еволюційні алгоритми [14]. Ці області доповнюють одна одну і використовуються в різних комбінаціях для створення гібридних інтелектуальних систем.

Вплив нечіткої логіки виявився найбільшим. Подібно до того, як нечіткі множини розширили межі класичної математичної теорії множин, нечітка логіка «вторглася» майже в більшість методів Data Mining, надавши їм

нової функціональності. Нижче наведено найбільш цікаві приклади таких об'єднань.

Нечіткі нейронні мережі

Нечіткі нейронні мережі (НМ) (fuzzy-neural networks) роблять висновки на основі апарату нечіткої логіки, проте параметри функцій належності настроюються з використанням алгоритмів навчання НМ. Тому для підбору параметрів таких мереж застосуємо метод зворотного поширення помилки, спочатку запропонований для навчання багатошарового персептрона. Для цього модуль нечіткого керування подамо у формі багатошарової мережі. Нечітка нейронна мережа зазвичай складається з чотирьох шарів: шару фазифікації вхідних змінних, шару агрегування значень активації умови, шару агрегування нечітких правил і вихідного шару [15].

Найбільшого поширення сьогодні набули архітектури нечіткої НМ типу ANFIS і TSK. Доведено, що такі мережі є універсальними апроксиматорами.

Швидкі алгоритми навчання й інтерпретація накопичених знань – ці фактори зробили сьогодні нечіткі нейронні мережі одним із найперспективніших і ефективніших інструментів м'яких обчислень.

Адаптивні нечіткі системи

Класичні нечіткі системи мають такий недолік, що для формулювання правил і функцій належності необхідно залучати експертів тієї чи іншої предметної області, а це не завжди вдається забезпечити. Адаптивні нечіткі системи (adaptive fuzzy systems) вирішують цю проблему. У таких системах параметри нечіткої системи підбираються під час навчання на

експериментальних даних. Алгоритми навчання адаптивних нечітких систем є відносно трудомісткими і складними порівняно з алгоритмами навчання нейронних мереж і зазвичай складаються з двох стадій [15]:

- генерація лінгвістичних правил;
- коригування функцій належності.

Перша задача належить до задачі переборного типу, друга – до оптимізації в безперервних просторах. При цьому виникає певне протиріччя: для генерації нечітких правил необхідні функції належності, а для проведення нечіткого виводу – правила. Крім того, при автоматичній генерації нечітких правил необхідно забезпечити їх повноту й несуперечність.

Значна частина методів навчання нечітких систем використовує генетичні алгоритми. В англійській літературі цьому відповідає спеціальний термін – Genetic Fuzzy Systems.

Значний внесок у розвиток теорії і практики нечітких систем з еволюційною адаптацією зробила група іспанських дослідників на чолі з Ф. Херрера (F. Herrera).

Нечіткі запити

Нечіткі запити до баз даних (fuzzy queries) є перспективним напрямом у сучасних системах оброблення інформації. Цей інструмент дає змогу формулювати запити на природній мові, наприклад: «Вивести список недорогих пропозицій при оренді житла, що знаходиться близько до центру міста», що неможливо при використанні стандартного механізму запитів. Для цієї мети розроблено нечітку реляційну алгебру і спеціальні розширення мов SQL для нечітких запитів. Велика частина досліджень у цій області належить західноєвропейським ученим Д. Дюбуа і Г. Праде [16].

Нечіткі асоціативні правила

Нечіткі асоціативні правила (fuzzy associative rules) – інструмент для вилучення з баз даних закономірностей, які формулюються у вигляді лінгвістичних висловлювань. Тут уведено спеціальні поняття нечіткої транзакції, підтримки й достовірності нечіткого асоціативного правила.

Нечіткі когнітивні карти

Нечіткі когнітивні карти (fuzzy cognitive maps), які запропонував Б. Коско 1986 р., використовуються для моделювання причинних взаємозв'язків, виявлених між концептами деякої області. На відміну від простих когнітивних карт, нечіткі когнітивні карти являють собою нечіткий орієнтований граф, вузли якого є нечіткими множинами. Спрямовані ребра графа не тільки відображають причиново-наслідкові зв'язки між концептами, а й визначають ступінь впливу (вагу) концептів пов'язаних між собою. Активне використання нечітких когнітивних карт зумовлено можливістю наочного уявлення аналізованої системи й легкістю інтерпретації причиново-наслідкових зв'язків між концептами. Основні проблеми пов'язані з процесом будівництва когнітивної карти, який не піддається формалізації. Крім того, необхідно довести, що побудована когнітивна карта є адекватною реальній моделі системи. Для вирішення цих проблем розроблено алгоритми автоматичного будівництва когнітивних карт на основі вибірки даних.

Нечітка кластеризація

Нечіткі методи кластеризації на відміну від чітких (наприклад, нейронні мережі Кохонена), дають змогу одному й тому самому об'єкту належати

одночасно кільком кластерам, але з різним ступенем. Нечітка класифікація в багатьох ситуаціях є більш «природною», ніж чітка, наприклад, для об'єктів, розташованих на межі кластерів. Найбільш поширеними є алгоритм нечіткої самоорганізації c-means і його узагальнення у вигляді алгоритму Густафсона – Кесселя [12].

Список можна продовжити й далі: нечіткі дерева рішень, нечіткі мережі Петрі, нечітка асоціативна пам'ять та інші гібридні методи.

Застосування принципів оптимальності й адаптації в техніці дає змогу створювати найбільш досконалі автоматичні системи. Однак адаптивні системи при різних коефіцієнтах і зовнішніх впливах можуть давати різні результати, тому перед розробником постає проблема вибору найбільш ефективного методу адаптації при конкретних умовах. Робота системи автоматичного керування на базі нечіткої логіки дає змогу моделювати роботу адаптивних регуляторів, отримувати кількісні та якісні характеристики для прийняття рішення про вибір відповідного алгоритму.

Нечітка логіка в деяких найпростіших випадках дає змогу поліпшити якість керування об'єктами. Вирішальну роль в оптимізації показників ефективності відіграють експерти, які визначають кількість вхідних і вихідних змінних, кількість термів для кожної змінної, види функцій належності, оскільки змінення цих параметрів приводить до поліпшення або погіршення процесу керування об'єктом.

Переваги використання нечіткої логіки:

- збереження параметрів роботи під час змінення параметрів моделі;
- зменшення впливу зовнішніх збурень.

Найважливішим недоліком нечіткої логіки є відсутність єдиного методу моделювання систем, тобто для кожного випадку доводиться заново проектувати нечітку підпрограму, визначаючи крок за кроком усі параметри і будуючи свою таблицю розв'язків.

Найпопулярнішим методом моделювання є алгоритм, розроблений 1975 року англійським математиком Е. Мамдані (Ebrahim Mamdani) [14]. Він запропонував його як метод для керування паровим двигуном. Запропонований алгоритм, що базується на нечіткому логічному висновку, дав змогу уникнути занадто великого обсягу обчислень і був гідно оцінений фахівцями. Сьогодні він набув найбільшого практичного застосування в задачах нечіткого моделювання.

Порівнянно з іншими алгоритм Мамдані має кілька переваг. В алгоритмі Цукамото не передбачається наявність терміну «середнє» для вихідного універсуму через виникнення немонотонності. До того ж він є менш точним, ніж алгоритм Мамдані.

Алгоритм Сугено [12] застосовується, коли відомою є не форма функції відповідності вихідного параметра, а вагові коефіцієнти, через які вхідні параметри впливають на роботу системи. Щоб побудувати нечіткий логічний контролер Сугено, коли вагові коефіцієнти є невідомими, експериментально змінюють кожен вхідний параметр окремо, зафіксувавши інші, і дивляться, як змінюється вихідний параметр. Знаходять інтервал, у якому змінення вихідного параметра можна апроксимувати лінійною залежністю від вхідного параметра в межах прийнятної похибки. Це дуже громіздка й непотрібна робота.

Алгоритм Ларсена застосовується в тих же випадках, що й алгоритм Мамдані, і є іноді більш точним за нього (при немонотонності вхідних нечітких множин), але потребує більше операцій множення.

Алгоритм Мамдані математично можна описати таким чином:

– нечіткість: знаходять ступень істинності для передумов кожного правила $A_1(x_0), A_2(x_0), B_1(y_0), B_2(y_0)$;

– нечіткий висновок: знаходять однакові «відсікання» для передумов кожного з правил (з використанням операції *min*):

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0),$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0);$$

де \wedge – операція логічного мінімуму; потім знаходять усічені функції належності:

$$C'_1(z) = \alpha_1 \wedge C_1(z),$$

$$C'_2(z) = \alpha_2 \wedge C_2(z);$$

– композиція: з використанням операції *max* об'єднують знайдені усічені функції, завдяки чому отримують підсумкову нечітку підмножину для змінної виходу з функцією належності

$$\mu_{\Sigma}(z) = C'(z) = C'_1(z) \vee C'_2(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z)) \vee (\alpha_2 \wedge C_2(z));$$

– зведення до чіткості.

Алгоритм Мамдані показано на рисунку 3.9.

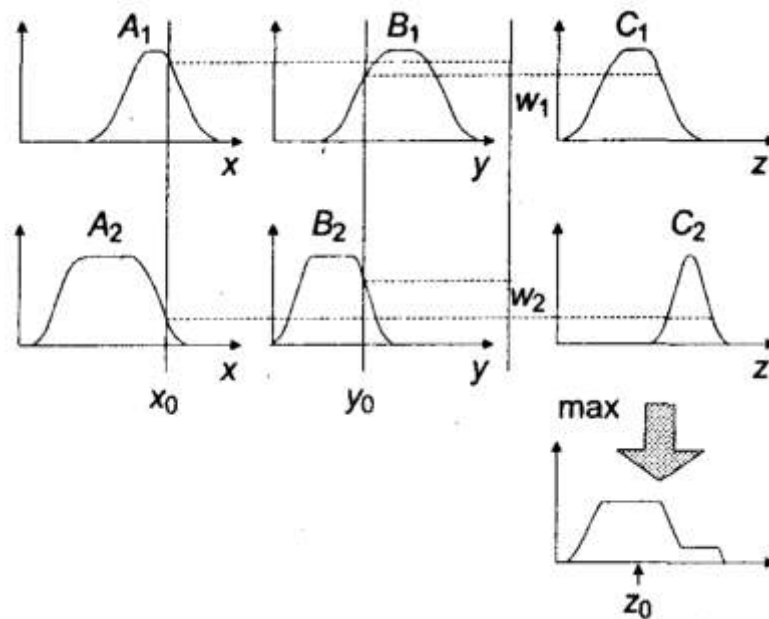


Рисунок 3.9 – Ілюстрація алгоритму Мамдані

Нечіткий регулятор вводиться для отримання нормальних результатів роботи системи керування. До базових понять фази-логіки належать «нечітка множина» й «лінгвістична змінна».

Відомо, що класична (чітка) теорія множин є розділом математики, у якому вивчають загальні властивості множин, поняття яких не мають означень, а лише пояснюються на прикладах (множина книг на полиці, множина точок на прямій і т. д.). Те, що певий елемент x належить множині X , записують у такому вигляді: $x \in X$. Факт належності елемента до множини визначається з допомогою функції належності, яка для чітких множин набуває значення 1, якщо елемент належить множині, і 0, якщо не належить йому.

Нечітка множина на відміну від чіткої характеризується безперервною функцією належності, яка може набувати будь-яких проміжних значень від 0 до 1. Функції належності, що характеризують нечіткі множини, можна задати аналітично або графічно. Ці функції найчастіше мають нелінійний характер, але на практиці апроксимуються кусково-лінійними залежностями.

Лінгвістичною змінною називають змінну, задану на кількісній шкалі базисної змінної, яка набуває значень у вигляді слів або словосполучень. Окремі значення лінгвістичної змінної, що називають лінгвістичним термом, задаються не у вигляді конкретного числа, а з допомогою функцій належності. Іншими словами, кожному терму відповідає певна множина.

Загальну структуру нечіткої САК зображено на рисунку 3.10. Тут X – вхідні параметри системи, Y – вихідні, R – зворотний зв'язок. Вихідні пара-



Рисунок 3.10 – Загальна структура нечіткої САУ

метри Y деяким чином обробляються, перш ніж потрапити на вхід мікроконтролера.

При проектуванні нечітких мікроконтролерів зручно користуватися поняттям блоку. Тоді можна виокремити такі блоки:

- попереднього оброблення;
- фазифікації;
- виведення рішення;
- дефазифікації;
- остаточного оброблення.

Взаємодію зазначених блоків у апаратно-реалізованому нечіткому мікроконтролері показано на рисунку 3.11. Такий зв'язок блоків можна назвати послідовним. Тут X – дані, що надходять ззовні (наприклад, з під'єднаних датчиків або пульта керування), $f(X)$ – оброблені дані (з урахуванням зворотного зв'язку), $f(X)^*$ – нечіткі значення оброблених вхідних даних, Y^* – нечіткі значення вихідних даних, Y – чіткі значення вихідних даних, $f(Y)$ – оброблені вихідні дані (керувальні сигнали).

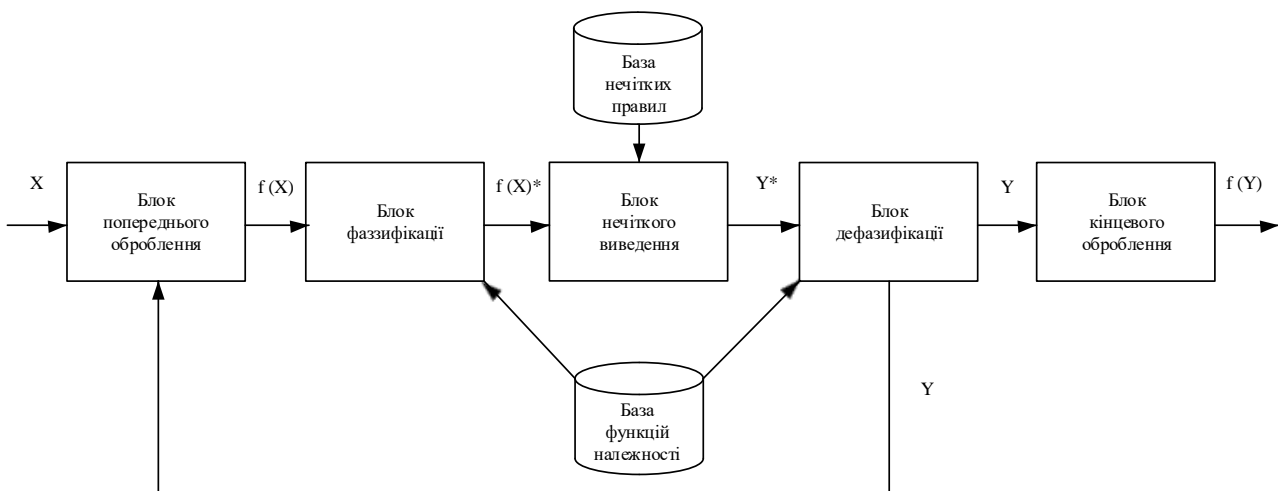


Рисунок 3.11 – Послідовний зв'язок блоків у нечіткому МК

При апаратній реалізації перелічені блоки реалізуються як незалежні мікроелектронні пристрої, пов'язані один з одним. Однак така схема

мікроконтролера не забезпечує необхідної гнучкості й дає змогу використовувати лише стандартну послідовність нечіткого виведення. Такі рішення можуть використовуватися в спеціальних завданнях, у яких не планується подальша модифікація.

При програмній реалізації такі блоки виконуються як незалежні програмні модулі, тобто є віртуальними. У контексті того, що зазначені блоки-модулі можуть використовуватися алгоритмом функціонування мікроконтролера, записаного в пам'ять програм у довільному порядку, схему нечіткого мікроконтролера можна подати по-іншому (рисунок 3.12). Такий зв'язок блоків можна назвати централізованим.

Зі схеми, зображеної на рисунку 3.12, видно, що алгоритм функціонування керувальної системи пов'язаний з блоками, які реалізують основні етапи нечіткого виведення, і може з їх допомогою генерувати необхідне рішення. Кожен описаний блок задає деяку підмножину нечітких операцій, що описують алгоритм.

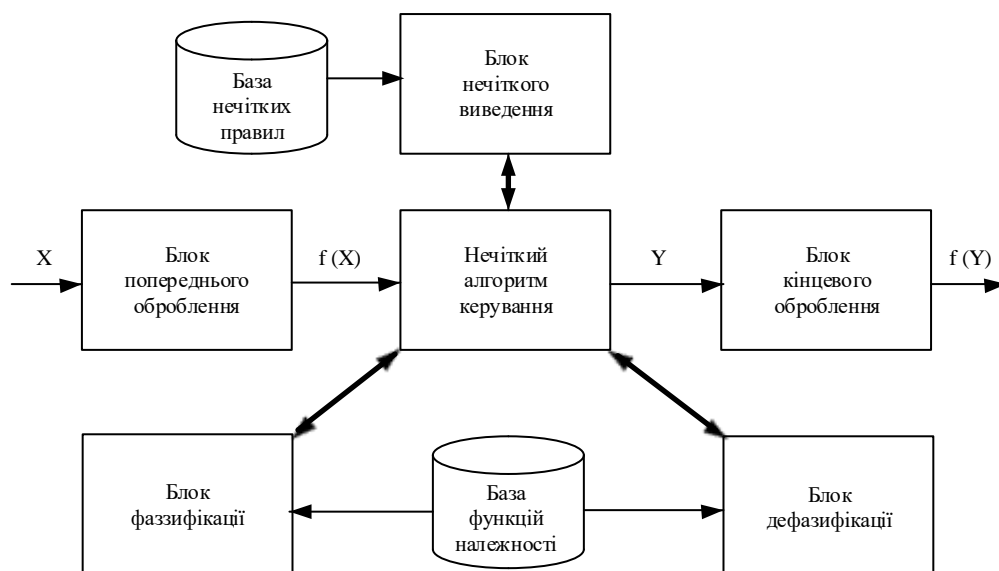


Рисунок 3.12 – Централізований зв'язок блоків нечіткого МК

3.3 Етапи нечіткого виведення, реалізація нечіткого алгоритму

Щоб задати необхідні нечіткі операції, слід реалізувати відповідні блоки. Нечіткий висновок містить чотири основних етапи. Проте другий і третій етап можна об'єднати в один:

- фаззифікація (обчислення значень лінгвістичних змінних);
- логічний висновок і композиція;
- дефаззифікація (отримання чітких значень вихідних характеристик).

Програмна реалізація нечіткого мікроконтролера має містити три модулі, що реалізують ці етапи й задають необхідні операції.

Етап фаззифікації

На цьому етапі відбувається переведення з чіткого значення деякого параметра в нечітке значення деякої лінгвістичної змінної. Для того щоб здійснити такий перехід, необхідна функція належності, що задає конкретну лінгвістичну змінну. Виберемо функцію належності у вигляді трикутника.

Будь-яка лінгвістична змінна визначається на деякій нечіткій множині. Ступінь належності до кожного терму задається функцією належності. Таким чином, функція належності – це сукупність трикутників, кожен з яких задає належність до конкретного терму. Для економії пам'яті трикутник доцільно задавати трьома абсцисами, тому координати відповідних точок завжди одні й ті самі – 0, 1, 0.

Тоді процес фаззифікації полягає в перегляді всіх трикутників з метою визначення факту входження значення x , яке фаззифікується, до відповідного інтервалу, а при знаходженні такого інтервалу – визначення ступеня належності μ . Для будь-якого терму можливі три випадки:

- x не потрапив до області визначення трикутника, тоді $\mu = 0$;
- x потрапив до середнього інтервалу, тоді $\mu = 1$;

– x потрапив до лівого або правого інтервалу, знаходимо перетин основних прямих.

Таким чином, під час фазифікації може виникнути до N поділів, де N – кількість термів. Інші операції є простими (займають 1–2 такти) – послідовний прохід по пам'яті й арифметичні порівняння.

Логічний висновок

Мета логічного висновку – вивести з допомогою заданої бази правил і відомих значень лінгвістичних змінних невідомі значення лінгвістичних змінних. Для опису знань може бути застосовано продукційну модель або логіку предикатів. У цій роботі взято продукційну модель як таку, що найбільше відповідає природній мові та ідеї нечіткої логіки. Правила задаються в такому форматі:

- «Якщо антецедент, то консеквент»;
- «Консеквент = вибір терму»;
- «Антецедент = вибір терму {«&» Вибір терму}»;
- «Вибір терму = лінгвістична змінна «=» Терм».

У цій роботі мету виведення (цільова лінгвістична змінна) принципово видалено з початкових передумов. Це не порушує спільності міркувань, оскільки мета логічного висновку у разі використання нечіткої логіки полягає не в доказі або спростуванні будь-якого твердження, а в знаходженні значення цільової лінгвістичної змінної. Це означає, що в базі правил є щонайменше одне правило, до складу консеквента якого входить шукана ЛЗ і всі ЛЗ з його антецедента, видалені з початкових передумов.

Продукційне виведення здійснюється зворотним методом (пошук у глибину) – на вхід процедури логічного висновку подається ім'я шуканої лінгвістичної змінної і список початкових передумов. Процедура переглядає праві частини правил у пошуку необхідного консеквента. Якщо

всі ЛЗ з відповідного антецедента належать до списку початкових передумов, то до всіх умов антецедента застосовується Т-норма; до результату й наявного значення консеквента застосовується S-норма.

За Т-норму взято операцію мінімуму, а за S-норму – операцію взяття максимуму. Якщо якась ЛЗ з антецедента не належать до списку початкових передумов, то вона стає поточною метою виведення. Для цього в стеку запам'ятовується поточний стан виведення (позиція в базі правил, що виводиться ЛЗ) і виведення починається спочатку, але з новою метою. Виведення закінчується, коли всю базу правил переглянуто, а поточна мета виведення дорівнює початковій.

Дефаззифікація

Основна мета дефаззифікації – зведення значення ЛЗ назад до понять чіткості. Для цього застосовуються різні способи: за середнім значенням центру, за сумою центрів, метод центру ваги, максимуму функції належності. Досі висновок здійснювався згідно з дещо адаптованим методом Мамдані. У методі Мамдані для дефаззифікації традиційно використовується метод центру ваги (центроїда):

$$\bar{y}B = \frac{\int y \max \mu_{B_k} - (y)}{\int \max \mu_{B_k} - (y)}$$

де B_k – функція належності k -го терму.

Переваги нечітких систем:

- можливість оперувати вхідними даними, заданими нечітко, наприклад такими, що неперервно змінюються в часі (динамічні задачі), значеннями, що неможливо задати однозначно (результати статистичних опитувань, рекламні кампанії);

- можливість нечіткої формалізації критеріїв оцінювання і порівняння, оперування критеріями «більшість», «можливо», «переважно» тощо;
- можливість як проведення якісного оцінювання вхідних даних, так і виведених результатів: значення даних, їх ступінь достовірності та їх розподіл;
- можливість проведення швидкого моделювання складних динамічних систем та їх порівняльний аналіз із заданим ступенем точності, оперуючи принципами поводження системи, описаними fuzzy-методами: можна швидко з'ясувати точні значення змінних і скласти правила для їх опису; можна оцінити різні варіанти вихідних значень.

Практичне застосування нечіткої логіки

Коли тільки виникла теорія нечіткої логіки, у наукових журналах можна було знайти статті про можливі області її застосування. У міру просування розроблення цієї теорії кількість практичних застосувань для нечіткої логіки почала швидко збільшуватися. Сьогодні цей перелік був би надто довгим, але наведемо кілька прикладів, які допоможуть зрозуміти, наскільки широко нечітка логіка використовується в системах керування й експертних системах.

Сьогодні елементи нечіткої логіки можна знайти в багатьох промислових виробках – від систем керування електропоїздами й бойовими вертольотами до побутової техніки [17]. Без застосування нечіткої логіки неможливі сучасні ситуаційні центри керівників західних країн, у яких приймаються ключові політичні рішення і моделюються різні кризові ситуації.

Активними споживачами нечіткої логіки є банкіри й фінансисти, а також фахівці в області політичного й економічного аналізу, задачі яких потрубують щоденного прийняття правильних рішень у складних умовах

непередбаченого ринку. Вони використовують нечіткі системи для створення моделей різних економічних, політичних, біржових ситуацій.

Слідом за фінансистами когнітивними нечіткими схемами зацікавилися промислові гіганти США. Motorola, General Electric, Otis Elevator, Pacific Gas & Electric, Ford і інші на початку 90-х почали інвестувати в розроблення виробів, у яких використовується нечітка логіка. Маючи солідну фінансову «підтримку», фірми, що спеціалізуються на нечіткій логіці, отримали можливість адаптувати свої розробки для широкого кола застосувань [14]:

- пристрої для автоматичної підтримки швидкості руху автомобіля і збільшення ефективності й стабільності роботи автомобільних двигунів (компанії Nissan, Subaru);
- системи розпізнавання рукописного тексту в PDA (компанія Sony);
- поліпшення систем безпеки для атомних реакторів (компанії Hitachi, Bernard, Nuclear Fuel Div);
- управління роботами (компанії Toshiba, Fuji Electric, Omron);
- промислові системи керування (компанії Apronix, Omron, Meiden, Sha, Micom, Nisshin-Denki, Mitsubishi, Oku-Electronics та ін.).

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп ; пер. с англ. В. И. Копылова. — М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. — 832 с.
2. Справочник по теории автоматического управления / А. Г. Александров и др. ; под ред. А. А. Красовского. — М. : Наука, 1987. — 712 с.
3. Власов, К. П. Теория автоматического управления : учеб. пособие / К. П. Власов. — Харьков : Гуманитарный центр, 2007. — 526 с.
4. Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1 / Д. П. Ким. — М. : Физматлит, 2016. — 311с.
5. Теория автоматического управления. Ч. 1 : учебник для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика» / Н. А. Бабаков ; под ред. А. А. Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Высш. шк., 1986. — 367 с.
6. Гудвин, Г. К. Проектирование систем управления / Г. К. Гудвин, С. Ф. Гребе, М. Е. Сальгадо : пер. с англ. А. М. Епаншникова. — М. : Бином; Лаборатория базовых знаний, 2012. — 911 с.
7. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. — СПб. : Профессия, 2003. — 752 с.
8. Мирошник, И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы / И. В. Мирошник. — СПб. : Питер, 2005. — 336 с.
9. Егоров, А. И. Основы теории управления : учеб. пособие / А. И. Егоров. — М. : Физматлит, 2007. — 504 с.
10. Музылёва, И. В. Компьютерное моделирование линейных систем автоматического управления. Ч. 1 : учеб. пособие / И. В. Музылева. — Липецк : Изд-во Липецкого ГТУ, 2011. — 48 с.
11. Уинстон, П. Искусственный интеллект / П. Уинстон ; пер. с англ. — М. : Мир, 1980. — 520 с.
12. Тэрано, Т. Прикладные нечеткие системы : пер. с англ. / Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. — М. : Мир, 1993. — 368 с.
13. Попов, Э. В. Искусственный интеллект. Кн. 1 / Э. В. Попов и др. — М. : Радио и связь, 1990. — 464 с.
14. Аверкин, А. Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин и др. ; под ред. Д. А. Поспелова. — М. : Книга по требованию, 2013. — 312 с.
15. Барский, А. Б. Нейронные сети: распознавание, управление, принятие решений / А. Б. Барский. — М. : Финансы и статистика, 2004. — 176 с.
16. Люгер, Дж. Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем / Дж. Ф. Люгер ; пер. с англ. Н. И. Галан. — 4-е изд. — М. : Вильямс, 2003. — 864 с.
17. Лорьер, Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта / Ж.-Л. Лорьер ; пер. с франц. В. Л. Стефанюк. — М. : Мир, 1991. — 568 с.

ЗМІСТ

1	Оптимальні системи автоматичного керування.....	3
1.1	Значення методів теорії оптимальних процесів.....	6
1.1.1	Загальна задача оптимального керування.....	7
1.1.2	Класифікація методів теорії оптимальних процесів.....	9
1.1.3	Необхідні умови оптимальності керування, достатні умови оптимальності й проблема існування оптимального керування.....	11
1.1.4	Загальна характеристика результатів, які можна отримати з допомогою методів теорії оптимального керування....	13
1.1.5	Умова раціонального застосування методів оптимізації...	14
1.2	Основні поняття і визначення математичної теорії оптимальних процесів керування.....	16
1.2.1	Математичні моделі. Змінні стану (фазові координати) керованого процесу.....	16
1.2.2	Постановка й класифікація задач оптимізації.....	17
1.2.3	Критерії оптимальності.....	20
1.3	Класичні методи варіаційного обчислення.....	25
1.4	Метод динамічного програмування Беллмана.....	33
1.5	Принцип максимуму Понтрягіна.....	36
1.6	Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів.....	51
2	Адаптивні системи автоматичного керування	62
2.1	Адаптивні системи.....	62
2.2	Екстремальні системи керування.....	65
2.3	Диференціальні системи екстремального керування.....	74
2.4	Динаміка екстремальних систем.....	82
2.5	Самоналагоджувані системи керування.....	94
2.6	Ідентифікація об'єктів керування.....	102

3 Нечітка логіка	107
3.1 Загальні відомості.....	107
3.2 Інтеграція з інтелектуальними парадигмами.....	116
3.3 Етапи нечіткого виведення, реалізація нечіткого алгоритму...	126
Бібліографічний список.....	131

Навчальне видання

Фірсов Сергій Миколайович
Кочук Сергій Борисович
Білоконська Юлія Валентинівна

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Редактор О. Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2019

Підписано до видання 18.10.2019

Ум. друк. арк. 7,4. Обл.-вид. арк. 8,38. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції серія ДК № 391 від 30.03.2001.