ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2019

УДК 519.21(075.8)
Т52

Авторський колектив:
Ю. М. Толкунова, С. О. Коба, Ю. О. Пащук, О. К. Погудіна

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. О. Б. Леонтьєв,
д-р техн. наук, проф. Г. А. Кучук

Теорія ймовірностей [Електронний ресурс] : навч. посіб. /
Т52 Ю. М. Толкунова, С. О. Коба, Ю. О. Пащук, О. К. Погудіна. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2019. – 80 с.

Розглянуто основні поняття теорії ймовірностей та математичної статистики, викладено математичний апарат теорії ймовірностей. Показано області застосування методів теорії ймовірностей на наочних прикладах. Кожен розділ містить теоретичний матеріал, який проілюстровано докладно розібраними прикладами.

Для студентів спеціальності «Комп'ютерні науки» при самостійній підготовці до лекцій, повторенні й вивченні основного матеріалу курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика».

Іл. 27. Табл. 8. Бібліогр.: 15 назв

УДК 519.21(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей, подібно до інших математичних наук, розвинулася з потреб практики. Початок систематичного дослідження завдань, що стосуються масових випадкових явищ, і поява відповідного математичного апарату належать до XVII століття. На початку XVII століття знаменитий фізик Галілей вже намагався піддати науковому дослідженню помилки фізичних вимірювань, розглядаючи їх як випадкові і оцінюючи їх імовірності. Необхідність створення математичного апарату, спеціально пристосованого для аналізу випадкових явищ, витікала і з потреб оброблення і узагальнення великого статистичного матеріалу у всіх областях науки.

Однак теорія ймовірностей як математична наука сформувалася в основному не на матеріалі зазначених вище практичних завдань. Ці завдання дуже складні; в них закони, що керують випадковими явищами, виявляються недостатньо чітко і завуальовані багатьма ускладненими чинниками. Необхідно було спочатку вивчити закономірності випадкових явищ на більш простому матеріалі. Таким матеріалом стали так звані «азартні ігри». Ці ігри з незапам'ятних часів створювалися саме так, щоб в них результат експерименту був не залежним від спостережуваних умов експерименту, був чисто випадковим.

Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах [1]. Випадкове явище – це таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного і того ж експерименту виявляється кожен раз по-іншому. Як приклад можна навести відхилення траєкторії снаряда при стрільбі з гармати від теоретичної траєкторії внаслідок сукупного впливу багатьох чинників: помилок виготовлення снаряда, відхилення ваги снаряда від номіналу, неоднорідності структури заряду та ін.

Траєкторії снарядів не збігаються між собою, в результаті точки падіння снарядів на землі розсіюються. Якщо розміри цілі великі порівняно з областю розсіювання, то цим розсіюванням можна знехтувати: при правильному установленні гармати будь-який випущений снаряд влучає в ціль. Якщо ж (як зазвичай і буває на практиці) область розсіювання снарядів перевищує розміри цілі, то деякі із снарядів у зв'язку з впливом випадкових чинників у ціль не потраплять. Виникає ряд запитань, наприклад: який відсоток випущених снарядів в середньому потрапляє в ціль; скільки потрібно витратити снарядів для того, щоб досить надійно вразити ціль; які слід вжити заходи для зменшення витрати снарядів?

Щоб відповісти на ці запитання, звичайна схема точних наук виявляється недостатньою. Ці запитання органічно пов'язані з випадковою природою явища і для того, щоб на них відповісти, очевидно, не можна просто знехтувати випадковістю. Необхідно вивчити випадкове явище розсіювання снарядів з точки зору закономірностей, властивих йому саме як випадковому явищу. Слід дослідити закон, за яким розподіляються точки падіння снарядів; з'ясувати випадкові причини, що призводять до розсіювання, порівняти їх між собою за ступенем важливості та ін. [1].

Подібні завдання, число яких в техніці надзвичайно велике, потребують вивчення не тільки основних закономірностей, що визначають явище в загальних рисах, але й аналізування випадкових збурень, пов'язаних з наявністю другорядних чинників, і надають результату експерименту при заданих умовах елемент невизначеності.

Такі методи і розробляються в теорії ймовірностей. Її предметом є специфічні закономірності, які спостерігаються у випадкових явищах.

1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Випадкові події та їх імовірність

Випадкова подія. Якщо деяка подія А в результаті експерименту може відбутися, а може і не відбутися, то така подія називається ***випадковою***. Наприклад, поява герба при киданні монети.

Якщо в результаті деякого експерименту подія А здійсниться обов'язково, то така подія називається ***достовірною***. Наприклад, якщо при киданні гральної кістки подію А визначити як випадання одного, двох, трьох, чотирьох, п’яти або шести очок – А: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, то ця подія буде достовірною.

Якщо в результаті деякого експерименту подія А статися не може, то така подія називається ***неможливою***. Наприклад, якщо при киданні гральної кістки подію А визначити як випадання сьоми очок – А: {7}, то ця подія буде неможливою.

Імовірність. Для кількісного порівняння ступеня можливості появи випадкових подій використовують **ймовірність події**, яка тим більше, чим більше є можливою подія. Приймають, що ймовірність **достовірної події** дорівнює одиниці, а ймовірність **неможливої події** – нулю [1].

Таким чином, діапазон зміни ймовірностей будь-яких подій – від 0 до 1.

Наведемо одне з визначень імовірності (частотне або емпіричне).

Якщо деякий експеримент проводиться N раз і m раз з'являється подія А, то ймовірністю події А називається границя відносини m/N при $N \to \infty$. Цю ймовірність позначають як P(A) – **ймовірність появи події** А.

1.2. Безпосередній підрахунок імовірностей

Випадки. Введемо деякі допоміжні поняття.

Перше з них – ***повна група подій*** – тобто група подій, хоча б одна з яких неодмінно має відбутися в результаті проведення експерименту. Наприклад, попадання в ціль або промах при пострілі.

Друге – ***несумісні події***, тобто кілька подій, з яких ніякі дві не можуть з'явитися разом в даному експерименті. Наприклад, поява і герба, і цифри при киданні монети.

Третє – ***рівноможливі події*** – це кілька подій в даному експерименті, які не є більш можливими, ніж інші. Наприклад, поява карти бубнової, чирвової, трефової або пікової масті при вийманні карти з колоди.

Якщо група подій утворює повну групу, а події є несумісними і рівноможливими, то події, що створюють таку групу, називають **випадками** [2].

Випадок називають **сприятливим** деякій події, якщо поява цього випадку веде до появи даної події.

Схему випадків для наочності зручно зображувати у вигляді сукупності точок на прямій (рис.1.1).

$$\ldots\ldots\ldots\overbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}^{A\to m}\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

Рис.1.1. Випадки

На рис.1.1 показано схему, що містить n випадків, з яких m є сприятливими події *А*. Очевидно, що для даної схеми випадків згідно з визначенням ймовірності випадкової події ймовірність події *А* можна знайти як відношення числа сприятливих випадків m до загальної кількості випадків n [13]:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Формулу (1.1) призначено для безпосереднього підрахунку ймовірностей подій.

Приклад 1.1. В урні a білих і b чорних куль. Кулі однакові. З урни навмання витягують одну кулю. Якою є ймовірність того, що куля виявиться білою?

Розв'язання.

Під час експерименту «витяг однієї кулі з урни» є можливими $a+b$ різних результатів – подій, якими завершується даний експеримент. Ці події несумісні (витягується тільки одна з усіх куль), рівноможливі (всі кулі однакові) і мають властивість повноти (обов'язково одна з куль буде витягнутою). Отже, експеримент зводиться до схеми випадків і для розв'язання задачі можна скористатися формулою (1.1), де загальна кількість випадків $n= a+b$, а число випадків, сприятливих події *А*, $m=a$. Отже, шукана ймовірність

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{a}{a+b}.$$

При обробленні статистичного матеріалу для оцінювання ймовірності деякої події *А* користуються формулою, аналогічною (1.1):

$$P^{*}(A)=\frac{m^{*}}{N}, \tag{1.2}$$

де $P^*(A)$ – оцінка ймовірності події А, яку називають ***частотою події А або статистичною ймовірністю події А***; N – обсяг статистичного матеріалу; m^* – кількість появ подій *А* [3].

Приклад 1.2. У ящику 120 яблук, з яких 40 не відповідають стандарту. Чому дорівнює статистична ймовірність вийняти з ящика навмання стандартне яблуко?

Розв'язання.

У цьому прикладі подія *А* – вийняти стандартне яблуко. Кількість стандартних яблук m^*= 120 - 40 = 80 шт. Загальна кількість яблук N = 120. Отже, шукана статистична ймовірність

$$P^*(A) = \frac{m^*}{N} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}.$$

1.3. Основні формули комбінаторики

Основні формули комбінаторики: перестановки, поєднання, розміщення.

Перестановки. Нехай є *n* різних об'єктів. Будемо переставляти їх усіма можливими способами (число об'єктів залишається незмінним, змінюється тільки їх порядок) [15]. Утворені комбінації називаються перестановками, а їх число

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n. \qquad (1.3)$$

Символ n! називається факторіалом і означає добуток усіх цілих чисел від 1 до n. Вважають, що 0! = 1, 1! = 1.

Приклад усіх перестановок з n = 3 об'єктів (трьох кубиків) зображено на рис. 1.2.

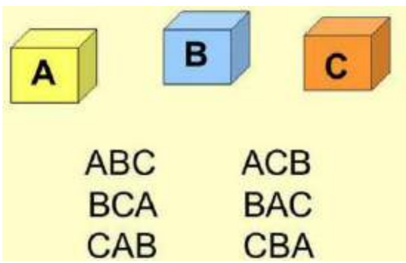


Рис. 1.2. Приклад перестановок

Відповідно до формули (1.3) їх повинно бути P_3 = 3! = 1·2·3 = 6, так і виходить.

Зі збільшенням числа об'єктів кількість перестановок дуже швидко зростає і зображати їх наочно стає важко. Наприклад, кількість перестановок з 10 предметів – вже 3628800 (більше 3 мільйонів!).

Розміщення. Нехай є *n* різних об'єктів. Будемо вибирати з них *m* об'єктів і переставляти їх усіма можливими способами між собою (тобто змінюється і склад вибраних об'єктів, і їх порядок) [4]. Утворені комбінації називаються розміщеннями з *n* об'єктів по *m*, а їх число

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1). \quad (1.4)$$

Приклад усіх розміщень з *n*=3 об'єктів (різних фігур) по *m*=2 показано на рис. 1.3. Відповідно до формули (1.4) їх має бути A_3^2=3·(3-2+1) = 3·2 = 6.

Рис. 1.3. Приклад розміщення

Сполучення. Нехай є *n* різних об'єктів. Будемо вибирати з них *m* об'єктів всіма можливими способами (тобто змінюється склад вибраних об'єктів, але порядок не є важливим) [15]. Утворені комбінації називаються ***сполученнями*** з *n* об'єктів по *m*, а їх число

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \quad (1.5)$$

Приклад усіх сполучень з *n*=3 об'єктів (різних фігур) по *m*=2 зображено на рис. 1.4.

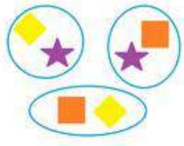


Рис. 1.4. Приклад сполучень

Відповідно до формули (1.5) їх має бути C_3^2 = 3! / (3-2)! ·2! = 3.

Ясно, що сполучень завжди менше, ніж розміщень (оскільки при розміщеннях порядок є важливим, а при сполученнях – ні), причому саме в *m*! раз, тобто правильною є формула зв'язку:

$$C_n^m = A_n^m / P_m .$$

Розв’язання типових задач. Найчастіше задачу формулюють так: з урни, в якій знаходяться *N* куль (*K* білих і *N-K* чорних), навмання і без повернення виймають *n* куль (*n*≤*N*). Знайти ймовірність того, що буде вибрано *k* білих і *n-k* чорних куль.

Звісно, що при *k*>*K* або *n-k*>*N-K* (тобто куль потрібно вийняти більше, ніж їх всього в урні), ймовірність дорівнює нулю (подія неможлива). А при *k*≤*K* і *n-k*≤*N-K* шукану ймовірність обчислюють за формулою

$$P = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} . \tag{1.6}$$

Кожна з типових задач може бути розв’язана за формулою (1.6):

• задача про кулі,

• задача про деталі,

• задача про лотерейні квитки.

Приклад 1.3. Серед 8 лотерейних квитків 4 виграшних. Навмання взяли 5 квитків. Визначити ймовірність того, що серед них 2 виграшних.

Розв’язання.

Підставляємо в формулу (1.6) значення:

K=4 виграшних квитка, *N-K*=8-4 = 4 невиграшних квитка, всього *N*=8 квитків. Вибираємо *n*=5 квитків, з них має бути *k*=2 виграшних і відповідно, *n-k* = 5-2 = 3 без виграшу. Отримуємо потрібну ймовірність:

$$P = \frac{C_4^2 \cdot C_4^3}{C_8^5} = 6 \cdot 4 / 56 = 0{,}429.$$

2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

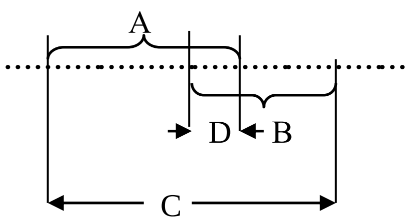
2.1. Теорема додавання ймовірностей

Розглянемо поняття про ***суму і добуток*** подій, які допоможуть перейти до основних теорем теорії ймовірностей.

Сумою декількох подій називається подія, що полягає у появі хоча б однієї з цих подій.

Добутком кількох подій називається подія, що полягає у появі всіх цих подій (рис. 2.1).

На рис. 2.1 показано подію *C*, яка є сумою подій *A* і *B*, а подія *D* – добутком подій *A* і *B*:



$$C = A + B$$
$$D = A \cdot B$$

Рис. 2.1. Сума и добуток подій

2.1.1. Окремий випадок теореми додавання

Теорема: ймовірність суми несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Розглянемо дві несумісні події *A* та *B* (рис. 2.2).

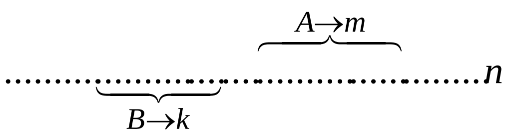


Рис. 2.2. Несумісні події

Оскільки ці події несумісні, сприятливі події *A* випадки не збігаються з випадками, сприятливими події *B*.

Тому можемо записати:

• події *A* є сприятливими m випадків;
• події *B* – k випадків;
• події *A*+*B* – $m+k$ випадків.

Відповідно ймовірності при загальному для всіх подій числі випадків, що дорівнює n, одержимо:

$$P(A)=\frac{m}{n};\ P(B)=\frac{k}{n}; \tag{2.1}$$

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}. \tag{2.2}$$

Підставивши (2.1) в (2.2), отримаємо

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{2.3}$$

Теорему доведено для двох подій. Доказ для довільного числа подій є аналогічним.

Остаточно для довільного числа несумісних подій часткова ***теорема додавання ймовірностей*** має такий вигляд:

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{2.4}$$

Приклад 2.1. Для проведення лотереї використовують 1000 квитків; з них на один квиток припадає виграш 500 грн, на 100 квитків – виграші по 100 грн, на 50 квитків – виграші по 20 грн, на 100 квитків – виграші по 5 грн, інші квитки є невиграшними. Хтось купує один квиток. Знайти ймовірність виграти не менш 20 грн [14].

Розв'язання.

Розглянемо події:

A – виграти не менш 20 грн,

A1 – виграти 20 грн,

A2 – виграти 100 грн,

A3 – виграти 500 грн.

Очевидно, що *A= A1+ A2+ A3.*

Тоді за теоремою додавання ймовірностей маємо

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0,05+0,01+0,001=0,061.$$

З теореми (2.4) випливають два наслідки.

Наслідок 1. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх імовірностей дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1. \tag{2.5}$$

Дійсно, якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу подій, то ймовірність появи хоча б однієї з них являє собою достовірну подію і, отже, можна записати

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = 1, \tag{2.6}$$

але оскільки події $A_1, A_2, ..., A_n$ є несумісними, до (2.6) можна застосувати теорему (2.4), що і доводить наслідок (2.5).

Наслідок 2. Введемо поняття ***протилежних подій***. Якщо повна група подій складається з двох несумісних подій, то такі події називаються ***протилежними*** [2]. Вони позначаються як A і $\overline{A}$. Остання читається: «не А». Застосувавши наслідок 1 до протилежних подій, отримаємо:

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

звідки випливає

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \tag{2.7}$$

Згідно з виразом (2.7) імовірність події виражається через імовірність їй протилежній події, що часто використовують при розв’язанні прикладних задач.

2.1.2. Загальний випадок теореми додавання

У загальному випадку, коли події не мають властивості несумісності, теорема додавання дещо ускладнюється. Спочатку розглянемо дві події (рис. 2.3).

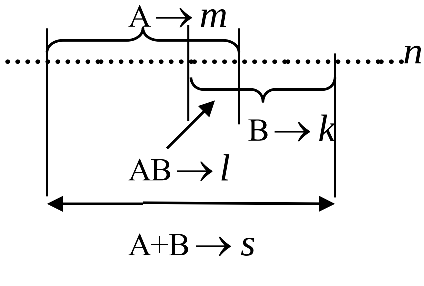


Рис. 2.3. Сумісні події

На рис. 2.3 наведено такі позначення: n – загальне число випадків; m – число випадків, сприятливих події A; k – число випадків, сприятливих події B; l – число випадків, сприятливих події AB; $s = m + k - l$ – число випадків, сприятливих події $A + B$. Запишемо ймовірності цих подій:

$$P(A) = \frac{m}{n};\ P(B) = \frac{k}{n};\ P(AB) = \frac{l}{n}; \tag{2.8}$$

$$P(A + B) = \frac{s}{n} = \frac{m + k - l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n}. \tag{2.9}$$

Підставивши рівняння (2.8) в (2.9), отримаємо

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{2.10}$$

Приклад 2.1. Ведеться стрільба по літаку, уразливими частинами якого є два двигуна та кабіна пілота. Для того, щоб вивести зі строю літак, достатньо вразити обидва двигуна разом або кабіну пілота. За даних умов стрільби ймовірність влучення в перший двигун дорівнює p_1, у другий двигун – p_2, у кабіну пілота – p_3. Частини літака вражаються незалежно одна від одної. Знайти ймовірність того, що літак буде вражено [12].

Розв'язання.

Подія *A* – враження літака являє собою суму двох сумісних подій:

D – враження обох двигунів;

K – враження кабіни пілота;

$$P(A) = P(D) + P(K) - P(DK) = p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3.$$

Розглянемо суму трьох довільних подій (рис. 2.4). Як і вище, випишемо сприятливі випадки і ймовірності подій.

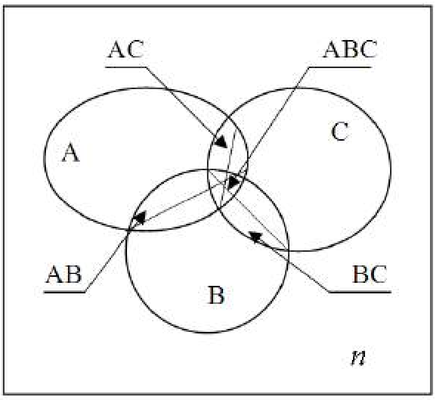


Рис. 2.4. Сума трьох довільних подій

На рис. 2.4 показано сприятливі подіям випадки: $A \Rightarrow m_1$; $B \Rightarrow m_2$; $C \Rightarrow m_3$; $AB \Rightarrow l_1$; $AC \Rightarrow l_2$; $BC \Rightarrow l_3$; $ABC \Rightarrow s$; $D = A + B + C$; $D \Rightarrow m_1 + m_2 + m_3 - l_1 - l_2 - l_3 + s$; n – загальна кількість випадків.

Імовірності подій:

$$P(A) = \frac{m_1}{n}; P(B) = \frac{m_2}{n}; P(C) = \frac{m_3}{n}; P(AB) = \frac{l_1}{n}; P(AC) = \frac{l_2}{n}; P(BC) = \frac{l_3}{n};$$

$$P(ABC) = \frac{s}{n}.$$

Імовірність суми подій A, B, C дорівнює ймовірності події D:

$$P(A + B + C) = P(D) = \frac{m_1 + m_2 + m_3 - l_1 - l_2 - l_3 + s}{n}$$

або

$$P(A + B + C) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \frac{m_3}{n} - \frac{l_1}{n} - \frac{l_2}{n} - \frac{l_3}{n} + \frac{s}{n},$$

або з урахуванням виписаних вище співвідношень

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

При довільному числі подій, застосувавши метод індукції, отримаємо загальний вираз теореми додавання:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n), \qquad (2.11)$$

де $A_{i,}(i=\overline{1,n})$ – довільні події.

2.2. Теорема множення ймовірностей

Перш ніж розглядати теорему множення ймовірностей, необхідно ввести поняття про незалежні та залежні події, а також про умовну ймовірність події.

Подія А називається не залежною від події В, якщо ймовірність події А не залежить від того, відбулася подія В чи ні.

Якщо дві події A й B незалежні, то **теорема множення для незалежних подій** має вигляд

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Приклад 2.1. Є дві урни з чорними і білими кульками. Подія А – навмання витягнута біла куля з урни № 1. Подія В – навмання витягнута біла куля з урни № 2. Цілком очевидно, що ймовірність події А не залежить від того, відбулася подія В чи ні.

Приклад 2.2. Кидають дві монети. Розглянуто події:

A – випадання герба на першій монеті;

B – випадання герба на другій монеті.

Знайти ймовірність події $C = A + B$.

Розв’язання.

Оскільки події сумісні та незалежні, застосовуємо рівняння (2.10) та теорему множення для незалежних подій

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Подія А називається залежною від події В, якщо ймовірність події А змінюється залежно від того, відбулася подія В чи ні.

Приклад 2.3. Кидають гральну кістку. А – випадання одного очка (А: {1}); В – випадання одного, двох, трьох очок (В: {1, 2, 3}). Тут імовірність події А $P(A)$=1/6 (загальне число випадків $n=6$, число сприятливих випадків $m=1$). Імовірність події В $P(B)=$1/2 (загальне число випадків $n=6$, число сприятливих випадків $m=3$). Якщо відомо, що подія В відбулася, то ймовірність події А зміниться зі значення 1/6 на значення 1/3, тому що відомо, що випало один, два або три очки (загальне число випадків), з яких сприятливим є одне значення.

Імовірність події А, обчислена за умови, що існувала інша подія В, називається *умовною ймовірністю* події А і позначається $P(A|B)$. Читається так: «Імовірність події А за умови, що подія В відбулася» [5].

Якщо ймовірність події А не залежить від того, відбулася подія В чи ні, то кажуть, що подія А не залежить від події В. У цьому випадку умовна ймовірність дорівнює безумовній:

$$P(A|B) = P(A). \tag{2.12}$$

Вираз (1.12) являє собою умову незалежності події А від події В.

Розглянемо дві взаємно залежні події А і В (рис. 2.5).

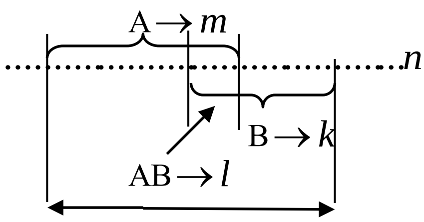


Рис. 2.5. Взаємно залежні події А і В

Випишемо ймовірності подій, показаних на рис. 2.5:

$$P(A)=\frac{m}{n};\ P(B)=\frac{k}{n};\ P(AB)=\frac{l}{n};\ P(A|B)=\frac{l}{k};\ P(B|A)=\frac{l}{m}. \tag{2.13}$$

Доведемо, що

$$P(AB)=P(A)P(B|A); \tag{2.14}$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B). \tag{2.15}$$

Підставивши вираз (2.13) в (2.14), отримаємо

$$P(AB)=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=\frac{l}{n}=P(AB).$$

Підставивши вираз (2.13) в (2.15), одержимо

$$P(AB)=\frac{k}{n}\cdot\frac{l}{k}=\frac{l}{n}=P(AB),$$

що й потрібно було довести.

Т*еорема множення ймовірностей* доведена для двох подій.

Для довільного числа подій, використавши метод індукції, одержимо

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}). \qquad (2.16)$$

Приклад 2.4. Студент знає відповіді на 41 запитання з 45. Якою є ймовірність того, що він відповість на два запитання?

Розв'язання.

A – студент відповість на перше запитання;

B – студент відповість на друге запитання;

C – студент відповість на два запитання;

$C = A \cdot B$;

$P(C) = P(AB) = P(A)P(B \mid A)$, тому що подія B залежить від події A. $P(B \mid A)$ – імовірність події B за умови, що подія A відбулася:

$$P(A) = \frac{41}{45}; \; P(B \mid A) = \frac{40}{44}; \; P(C) = \frac{41}{45} \cdot \frac{40}{44}.$$

Наслідок. Якщо подія A не залежить від події B, то подія B не залежить від події A [10].

Нехай подія A не залежить від події B. Тоді справедливо рівняння (2.12). Підставляючи вираз (2.12) в (2.15), отримуємо $P(AB) = P(B)P(A)$ і, прирівнюючи праву частину цієї рівності до правої частини (2.14), маємо $P(B)P(A) = P(A)P(B \mid A)$, а оскільки ймовірність $P(A)$ є число додатне і дійсне, його можна скорочувати, отримуючи

$$P(B) = P(B \mid A). \qquad (2.17)$$

Вираз (2.17) являє собою ознаку незалежності події B від події A, що й треба було довести.

Якщо в рівнянні (2.16) всі події $A_i, i = \overline{1,n}$ незалежні, то всі умовні ймовірності дорівнюють безумовним і рівняння (2.16) перетвориться в теорему множення для незалежних подій:

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.18)$$

Таким чином, імовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

2.3. Формула повної ймовірності

Розглянемо приклад. Нехай є n урн, в кожній з яких знаходиться різна кількість куль різних кольорів, включаючи білі. Співвідношення білих і інших куль в кожній урні відомо, а, значить, відомі ймовірності вилучення білої кулі з будь-якої урни. Відомі також ймовірності підходу до урн. Необхідно знайти можливість отримання білої кулі з навмання вибраної урни.

Позначимо: A – подія вилучення білої кулі з навмання вибраної урни; $H_i, i=\overline{1,n}$ – події підходу до i-ої урни. Події H_i називають гіпотезами. Гіпотези $H_i, i=\overline{1,n}$ являють собою повну групу несумісних подій. A – подія складна. У словесному формулюванні для того, щоб відбулася ця подія, потрібно підійти до першої урни і витягнути білу кулю або підійти до другої урни і витягнути білу кулю, або підійти до третьої урни і витягнути білу кулю, або ... або підійти до n-ої урни і витягнути білу кулю. У формульному вигляді подію А можна подати так:

$$A = H_1A + H_2A + H_3A + ... + H_nA.$$

Імовірність події *A*:

$$P(A) = P(\sum_{i=1}^{n} H_iA). \qquad (2.19)$$

Однак події $H_iA, i=\overline{1,n}$ є несумісними подіями і відповідно до теореми додавання для несумісних подій вираз (2.19) можна записати як

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_iA). \qquad (2.20)$$

Застосувавши до рівняння (2.20) теорему множення, одержимо

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \qquad (2.21)$$

Вираз (2.21) називається формулою повної ймовірності [3].

Приклад 2.5. Є дві урни: у першій знаходяться *a* білих куль і *b* чорних; у другій – *c* білих і *d* чорних. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, одну кулю. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

Розв'язання.

Подія А – поява білої кулі.

Гіпотези:

H1 – перекладена біла куля;

H2 – перекладена чорна куля.

Використовуючи формулу (1.21), ймовірність прояву події А буде дорівнювати:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2);$$

$$P(H_1) = \frac{a}{a+b};$$

$$P(H_2) = \frac{b}{a+b};$$

$$P(A|H_1) = \frac{c+1}{c+d+1};$$

$$P(A|H_2) = \frac{c}{c+d+1};$$

$$P(A) = \frac{a}{a+b}\frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b}\frac{c}{c+d+1}.$$

2.4. Формула Байєса (теорема гіпотез)

Розглянемо деякий наслідок з основних теорем теорії ймовірностей і формули повної ймовірності, що має назву формули Бейєса (теореми гіпотез). Є повна група несумісних гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Імовірності цих гіпотез є такими: $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Разом з будь-якою з гіпотез може статися подія А. Умовні ймовірності $P(A|H_i)$, $i=\overline{1,n}$ відомі. Нехай подія *A* сталася. Знайдемо ймовірність того, що вона відбулася разом з гіпотезою H_i, тобто знайдемо умовну ймовірність $P(H_i|A)$ для будь-якої з гіпотез. Згідно з виразом (2.14) і (2.15) можна записати $P(H_iA) = P(H_i)P(A|H_i) = P(A)P(H_i|A)$, звідки

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

або з урахуванням (2.21)

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}. \qquad (2.22)$$

Вираз (2.22) називають *формулою Бейєса, або теоремою гіпотез* [3].

Приклад 2.6. Прилад складається з двох вузлів, робота кожного вузла безумовно є необхідною для роботи приладу в цілому. Надійність (імовірність безвідмовної роботи протягом часу *t*) першого вузла дорівнює p_1, другого – p_2. Прилад випробовувався протягом часу *t*, в результаті чого було виявлено, що він вийшов з ладу (відмовив). Знайти ймовірність того, що відмовив тільки перший вузол, а другий залишився справним.

Розв’язання.

До випробування є можливими чотири гіпотези:

H_0 – обидва вузла справні;

H_1 – перший вузол відмовив, а другий справний;

H_2 – перший вузол справний, а другий відмовив;

H_3 – обидва вузла відмовили.

Імовірності гіпотез:

$$P(H_0) = p_1 p_2;$$
$$P(H_1) = (1 - p_1) p_2;$$
$$P(H_2) = p_1 (1 - p_2);$$
$$P(H_3) = (1 - p_1)(1 - p_2).$$

Спостерігалася подія А – прилад відмовив, тоді:

$$P(A \mid H_0) = 0; \qquad P(A \mid H_1) = P(A \mid H_2) = P(A \mid H_3) = 1.$$

За формулою Бейєса

$$P(H_1 \mid A) = \frac{(1 - p_1) p_2}{(1 - p_1) p_2 + p_1 (1 - p_1) + (1 - p_1)(1 - p_2)} = \frac{(1 - p_1) p_2}{1 - p_1 p_2}.$$

3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

3.1. Часткова теорема про повторення випробувань

Під час практичного застосування теорії ймовірностей часто доводиться розв'язувати завдання, в яких одне і те ж випробування або аналогічні випробування повторюються неодноразово. В результаті кожного з них може з'являтися або не з'являтися деяка подія А, причому є важливим не результат кожного окремого випробування, а загальне число появ події А в кінці серії випробувань. Наприклад, якщо проводиться група пострілів по одній і тій же цілі, як правило, привертає увагу не результат кожного пострілу, а загальна кількість влучень. При виконанні подібних завдань потрібно вміти визначати ймовірність будь-якого заданого числа появ події в результаті проведення серії випробувань. Такі завдання і будуть розглянуті в цьому розділі. Їх розв'язують досить просто тоді, коли випробування є незалежними.

Кілька випробувань називають незалежними, якщо ймовірність того чи іншого результату кожного з них не залежить від того, які результати мали інші випробування. Наприклад, кілька послідовних кидань монети являють собою незалежні випробування. Кілька послідовних виймань карти з колоди є незалежними випробуваннями за умови, що вийнята карта кожен раз повертається в колоду і карти перемішуються; в іншому випадку це – залежні випробування. Кілька пострілів є незалежними випробуваннями тільки в разі, якщо прицілювання проводиться заново перед кожним пострілом; у разі, коли прицілювання проводиться один раз перед всім стрілянням або безперервно здійснюється в процесі стрільби (стрільба чергою), постріли являють собою залежні випробування. Незалежні випробування можуть проводитися в однакових або різних умовах. У першому випадку ймовірність події А від випробування до випробування не змінюється. До першого випадку належить часткова теорема, а до другого — загальна теорема про повторення випробувань [1]. Почнемо з часткової теореми. Перш за все розглянемо конкретний приклад.

Приклад 3.1. Проводиться три незалежних постріли по мішені, ймовірність попадання в яку при кожному пострілі (подія А) дорівнює p. Знайти ймовірність того, що при цих трьох пострілах буде отримано рівно два влучення $P_{2,3}$.

Розв'язання.

Позначимо подію «рівно два влучення при трьох пострілах», як $B_{2,3}$. Введемо події:

A_1, A_2, A_3 – влучення при першому, другому і третьому пострілах відповідно;

$\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – промахи при першому, другому і третьому пострілах відповідно.

Складну подію $B_{2,3}$ виразимо через ці події:

$$B_{2,3} = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 A_3 \overline{A_2} + A_2 A_3 \overline{A_1}. \tag{3.1}$$

Усі три події – складові формули (3.1) – являють собою повну групу несумісних подій, внаслідок чого ймовірність події можна визначити, як

$$P(B_{2,3}) = P_{2,3} = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 A_3 \overline{A_2}) + P(A_2 A_3 \overline{A_1}). \tag{3.2}$$

Кожна складова виразу (3.2) являє собою ймовірність добутку незалежних подій і згідно з формулою (2.18) дорівнює добутку ймовірностей цих подій. Наприклад, для першого доданка маємо:

$$P(A_1 A_2 \overline{A_3}) = P(A_1) P(A_2) P(\overline{A_3}). \tag{3.3}$$

Однак за умовою задачі ймовірності подій $A_i (i = \overline{1,3})$ $P(A_i) = p$. Відповідно ймовірності протилежних подій $\overline{A}_i (i = \overline{1,3})$ згідно з формулою (2.7) дорівнюють $P(\overline{A}_i) = 1 - p$. Тому вираз (3.3) можна записати так:

$$P(A_1 A_2 \overline{A_3}) = p^2 (1 - p).$$

Такі ж значення ймовірностей відповідають всім складовим формули (3.2), внаслідок чого цю формулу можна записати у вигляді

$$P_{2,3} = 3 p^2 (1 - p). \tag{3.4}$$

Тут коефіцієнт «3» являє собою число доданків у виразі (3.2), яке є числом поєднань з трьох по два C_3^2.

Таким чином, можна навести таке формулювання часткової теореми про повторення випробувань: якщо проводиться n незалежних дослідів, в кожному з яких подія А з'являється з імовірністю p, то ймовірність того, що подія А з'явиться рівно m раз, виражається формулою

$$P_{m,n} = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}. \tag{3.5}$$

Вираз (3.5) називають *формулою Бернуллі,* він описує, як розподіляються ймовірності між можливими значеннями деякої випадкової величини – числа появ події А при n випробуваннях.

3.2. Загальна теорема про повторення випробувань

Часткова теорема про повторення випробувань стосується того випадку, коли ймовірність події А в усіх дослідах одна і та ж. На практиці часто доводиться зустрічатися з більш складним випадком, коли випробування проводяться в неоднакових умовах, і ймовірність події від експерименту до експерименту змінюється. Наприклад, якщо проводиться ряд пострілів в змінних умовах (при змінній дальності), то ймовірність попадання від пострілу до пострілу може помітно змінюватися.

Спосіб обчислення ймовірності заданого числа появ події в таких умовах наведено в загальній теоремі про повторення випробувань.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких може з'явитися або не з'явитися деяка подія А, причому ймовірність появи події А в *i*-му випробувані дорівнює p_i, а ймовірність непояви – $q_i = 1 - p_i,\ i = 1,...,n$. Потрібно знайти ймовірність $P_{m,n}$ того, що в результаті n випробувань подія А з'явиться рівно m раз.

Позначимо, як і раніше, через B_m подію, яка полягає в тому, що подія А з'явиться m раз у n випробуваннях. Наведемо B_m як суму добутків елементарних подій:

$$B_m = A_1 A_2 ... A_m \overline{A_{m+1}} ... \overline{A_n} + ... + A_1 \overline{A_2} A_3 ... \overline{A_{n-1}} A_n + ... + \overline{A_1}\,\overline{A_2} ... \overline{A_{n-m}} A_{n-m+1} ... A_n,$$

причому в кожен з добутків подія A входить m разів, подія $\overline{A}$ – $n-m$ разів. Число таких комбінацій, як і раніше, буде C_n^m, але самі комбінації між собою будуть вже нерівноймовірні.

Застосовуючи теорему додавання і теорему множення для незалежних подій, отримуємо:

$$P_{m,n} = p_1 p_2 ... p_m q_{m+1} ... q_n + ... + p_1 q_2 p_3 ... q_{n-1} p_n + ... + q_1 q_2 ... q_{n-m} q_{n-m+1} ... p_n,$$

тобто шукана ймовірність дорівнює сумі всіх можливих добутків, в яких букви p з різними індексами входять m раз, а букви q з різними індексами – $n-m$ раз.

Для того, щоб чисто механічно складати всі можливі добутки з m букв p і $n-m$ букв q з різними індексами, застосуємо формальний прийом. Складемо добуток біномів

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)...q_n + p_n z$$

або коротше

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z), \tag{3.6}$$

де z – довільний параметр.

Задамося метою знайти в цьому добутку біномів коефіцієнт при z^m. Для цього перемножимо біноми і виконаємо приведення подібних членів. Очевидно, кожен член, що містить z^m, буде мати в якості коефіцієнта добуток m букв p з якимись індексами і $n-m$ букв q, а після приведення подібних членів коефіцієнт при z^m буде являти собою суму всіх можливих добутків такого типу. Отже, спосіб складання цього коефіцієнта повністю збігається зі способом обчислення ймовірності $P_{m,n}$ в задачі про повторення випробувань.

Скориставшись виразом (3.6), можна сформулювати теорему про повторення випробувань: імовірність того, що подія A в n незалежних випробуваннях з'явиться рівно m раз, дорівнює коефіцієнту при z^m у виразі (3.6), де p_i – ймовірність появи події A в *і*-му випробуванні, $q_i = 1 - p_i$.

Наведене вище формулювання загальної теореми про повторення випробувань на відміну від часткової теореми не дозволяє одержати явного виразу для визначення ймовірності $P_{m,n}$. Такий вираз написати можна, але він є занадто складним, не будемо його наводити. Однак, не вдаючись до такого явного виразу, все ж можна записати загальну теорему про повторення випробувань у вигляді однієї формули [1]:

$$\prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z) = \sum_{m=0}^{n} P_{m,n} z^m. \tag{3.7}$$

Ліва і права частини рівності (3.7) являють собою одну й ту ж функцію (3.6), тільки зліва вона написана у вигляді одночлена, а праворуч – у вигляді багаточлена. Розкриваючи дужки у лівій частині і виконуючи приведення подібних членів, отримаємо ймовірності

$$P_{0,n},\ P_{1,n},\ P_{n,n}$$

як коефіцієнти відповідно при нульовій, першій та інших степенях z.

Очевидно, що часткова теорема про повторення дослідів випливає із загальної при

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p;$$
$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q.$$

У такому випадку вираз (3.6) перетворюється в *n*-у степінь бінома $(q + pz)$:

$$\varphi_n(z) = (q + pz)^n.$$

Розкриваючи цей вираз за формулою бінома, маємо

$$(q + pz)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m,$$

звідки одержуємо формулу (3.5).

Звернемо увагу на те, що як в загальному, так і в частковому випадку сума всіх імовірностей дорівнює одиниці:

$$\sum_{m=0}^{n} P_{m,n} = 1. \qquad (3.8)$$

Це випливає насамперед з того, що події $B_0, B_1, \ldots, B_n$ утворюють повну групу несумісних подій. Формально до рівності (3.8) можна приходити, вважаючи в загальній формулі (3.7) $z = 1$.

У багатьох випадках практики, крім імовірності $P_{m,n}$ рівно m появ події *A* доводиться розглядати ймовірність і не менше m появ події *A*.

Позначимо через C_m подію, яка полягає в тому, що подія *A* з'явиться не менш m разів, а ймовірність події C_m позначимо $R_{m,n}$. Очевидно,

$$C_m = B_m + B_{m+1} + \ldots + B_n,$$

звідки за теоремою додавання

$$R_{m,n} = P_{m,n} + P_{m+1,n} + \ldots + P_{n,n}$$

або коротше

$$R_{m,n} = \sum_{i=m}^{n} P_{i,n}. \qquad (3.9)$$

При обчисленні $R_{m,n}$ часто буває зручніше не користуватися безпосередньо формулою (3.9), а переходити до протилежної події і обчислювати ймовірність $R_{m,n}$ за формулою

$$R_{m,n} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} P_{i,n}. \qquad (3.10)$$

Приклад 3.2. Виконується чотири незалежних постріли по одній і тій же цілі з різних відстаней; ймовірності попадання при цих пострілах відповідно $p_1 = 0,1;\ p_2 = 0,2;\ p_3 = 0,3;\ p_4 = 0,4.$ Знайти ймовірності промаху, одного, двох, трьох і чотирьох попадань:

$$P_{0,4};\ P_{1,4};\ P_{2,4};\ P_{3,4};\ P_{4,4}.$$

Розв'язання.

Складаємо функцію на основі виразу (3.6):

$$\varphi_4(z) = \prod_{i=1}^{4}(q_i + p_i z) = (0,9+0,1z)(0,8+0,2z)(0,7+0,3z)(0,6+0,4z) =$$
$$= 0,302 + 0,44z + 0,215z^2 + 0,04z^3 + 0,002z^4,$$

звідки

$$P_{0,4} = 0,302;\ P_{1,4} = 0,44;\ P_{2,4} = 0,215;\ P_{3,4} = 0,04;\ P_{4,4} = 0,002.$$

4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадкова величина – це величина, яка в результаті досліду може прийняти те або інше заздалегідь невідоме значення. Прикладами випадкових величин можуть бути:

- кількість влучень при трьох пострілах;
- число очок при киданні гральної кістки;
- діаметр вала.

Випадкова величина може бути дискретною і безперервною. Якщо можна заздалегідь указати можливі значення випадкової величини, то така випадкова величина називається дискретною. Якщо заздалегідь не можна вказати можливі значення випадкової величини, а лише інтервал, в якому вона може реалізуватися при досліді, така випадкова величина називається безперервною.

Прикладом дискретних випадкових величин можуть бути:

- кількість влучень при п'яти пострілах;
- число очок при киданні гральної кістки.

Прикладом безперервних випадкових величин можуть бути:

- швидкість велосипедиста на заданій ділянці траси;
- час безвідмовної роботи приладу.

Для позначення випадкових величин будемо використовувати великі латинські літери, найчастіше *X*, *Y* або *Z*. Конкретні реалізації випадкових величин будемо позначати відповідними малими літерами, наприклад, *x*, *y*, *z*.

4.1. Закони розподілу випадкових величин

Якщо випадкові події характеризуються тільки ймовірністю, то для повної характеристики випадкових величин вводять поняття законів розподілу. Розглянемо найбільш поширені з них.

4.1.1. Ряд розподілу

Ряд розподілу характеризує тільки дискретні випадкові величини.

Рядом розподілу встановлюється зв'язок між реалізаціями дискретних випадкових величин та їх імовірностями.

Якщо відомі всі можливі значення $x_1, x_2, ..., x_n$ якої-небудь дискретної випадкової величини *X* і ймовірності появи цих значень відповідно дорівнюють $p_1, p_2, ..., p_n$, то цю відповідність зазвичай подають у вигляді таблиці (табл. 4.1) і називають рядом розподілу.

Таблиця 4.1

Ряд розподілу

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Ряд розподілу повністю характеризує дискретну випадкову величину. Якщо випадкова величина задана рядом розподілу, то ніякої додаткової інформації не потрібно. Наведемо приклад.

Приклад 4.1. При киданні гральної кістки ймовірність випадання будь-якої грані дорівнює 1/6. Всі можливі значення відомі. Отже, можна задати ряд розподілу (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Імовірність випадання грані гральної кістки

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Оскільки можливі значення дискретної випадкової величини становлять повну групу несумісних подій, то на основі рівняння (2.5) отримуємо важливу властивість ряду розподілу: сума всіх імовірностей ряду розподілу дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{4.1}$$

4.1.2. Функція розподілу

Ряд розподілу безперервної випадкової величини побудувати не можна. Однак існує більш універсальна характеристика випадкової величини, що дозволяє описати як дискретні, так і безперервні випадкові величини. Це ***функція розподілу або інтегральний закон розподілу*** *випадкової величини* X – *F(x)* – ймовірність того, що випадкова величина *X* не перевершує значення *x* [1]:

$$F(x) = P(X < x). \tag{4.2}$$

Для дискретної випадкової величини вираз (4.2) може бути записано в такому вигляді:

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(x_i), \tag{4.3}$$

де $P(x_i)=p_i$ – ймовірність появи випадкової величини x_i.

Приклад 4.2. Побудуємо функцію розподілу для дискретної випадкової величини з прикладу 4.1. Для цього скористаємося даними табл. 4.2 та формулою (4.3). Оскільки очки, що випадають при киданні гральної кістки – числа додатні, змінну x будемо змінювати від нуля вправо (рис. 4.1). При $0 \le x < 1$ значення p_i дорівнює нулю, бо лівіше цифри 1 можливі значення випадкової величини відсутні. Отже, при $0 \le x < 1$ $F(x)=0$. При $1 \le x < 2$ значення p_i =1/6, бо лівіше цифри 2 існує одне можливе значення випадкової величини x=1, імовірність появи якого дорівнює 1/6 (табл. 2.1). Отже, при $1 \le x < 2$ $F(x)=1/6$.

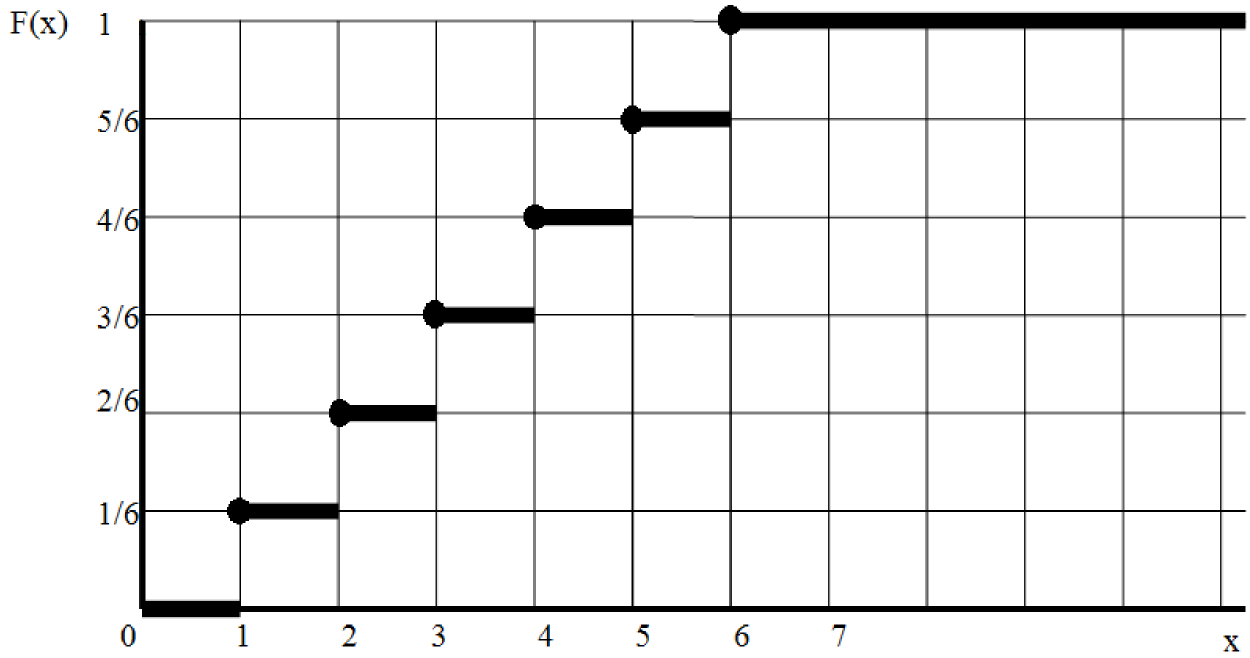


Рис. 4.1. Функція розподілу для дискретної випадкової величини з прикладу 4.1

При $2 \le x < 3$ лівіше цифри 3 існують два можливих значення випадкової величини x=1 і x=2, ймовірність появи кожного з яких дорівнює 1/6 (табл. 4.1). Скориставшись формулою (4.3), отримаємо, що при $x < 3$, $F(x)=2/6$. Продовживши переміщати змінну x вправо, одержимо графік, зображений на рис. 4.1. Цілком очевидно, що при $x \ge 6$ функція розподілу не змінюється й дорівнює одиниці: $F(x)=1$.

Досвід побудови функції розподілу допоможе сформулювати **властивості функції розподілу**:

1. Функція розподілу є неспадною функцією, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$;

2. $F(-\infty) = 0$;

3. $F(+\infty) = 1$.

Ці властивості визначаються виразом (4.3) з урахуванням того, що ймовірність лежить у межах від нуля до одиниці.

4.2. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал

Часто доводиться розв'язувати задачу визначення ймовірності потрапляння випадкової величини в заданий інтервал. Розглянемо цю проблему детальніше. Потрібно визначити ймовірність

$$P(\alpha \leq X < \beta).$$

Розглянемо такі події (рис. 4.2):

A, якщо $X < \beta$ та $P(A) = P(X < \beta) = F(\beta)$;

B, якщо $X < \alpha$ та $P(B) = P(X < \alpha) = F(\alpha)$;

C, якщо $\alpha \leq X < \beta$ та $P(C) = P(\alpha \leq X < \beta)$.

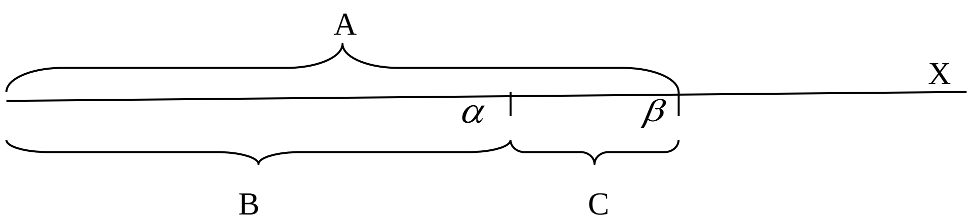


Рис. 4.2. Події A, B, C

Зрозуміло, що $A = B + C$. Оскільки події B і C є несумісними, то на основі виразу (2.3) можна записати $P(A) = P(B) + P(C)$ або

$$P(X < \beta) = P(X < \alpha) + P(\alpha \leq X < \beta)),$$

звідки

$$P(\alpha \leq X < \beta) = P(X < \beta) - P(X < \alpha) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (4.4)$$

Отже, ймовірність потрапляння випадкової величини на задану ділянку дорівнює приросту функції розподілу на цій ділянці.

Приклад 4.3. Визначимо ймовірність попадання випадкової величини з прикладу 4.1 в інтервал (2,5; 4,7).

Розв'язання.

Згідно з формулою (4.4) $P(2{,}5 \le X < 4{,}7) = F(4{,}7) - F(2{,}5)$. Використавши формулу (4.4) і дані табл. 4.2, отримаємо $F(4{,}7) = 4/6; F(2{,}5) = 2/6$. Знайдемо приріст функції розподілу в заданому інтервалі:

$$P(2{,}5 \le X < 4{,}7) = F(4{,}7) - F(2{,}5) = 4/6 - 2/6 = 1/3.$$

Задачу розв'язано.

Розглянемо приклад, коли X – безперервна випадкова величина.

Приклад 4.4. Нехай функцію розподілу випадкової величини X задано у вигляді

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ ax, 0 < x \le 2; \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

Необхідно знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (0,5; 1,5) – $P(0{,}5 \le x < 1{,}5)$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо невідому константу a, для чого скористаємося третьою властивістю функції розподілу $F(+\infty) = 1$. Для розглянутої функції розподілу $+\infty$ «наступає» в точці $x = 2$, оскільки в цій точці функція розподілу дорівнює одиниці і далі не змінюється:

$$F(x)\big|_{x=2} = 1 = 2a,$$

звідки $a = 0{,}5$.

Таким чином, функція розподілу випадкової величини X конкретизується:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ 0{,}5x, 0 < x \le 2; \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

Тепер знайдемо шукану ймовірність

$$P(0{,}5 \le x < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0{,}5) = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5.$$

Задачу розв'язано.

4.3. Щільність розподілу

Якщо взяти похідну від функції розподілу безперервної випадкової величини *F(x)*, то отримаємо дуже важливу характеристику випадкової величини – щільність розподілу випадкової величини *X* , яку позначають як $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) \qquad \text{або} \qquad f(x) = \frac{dF}{dx}. \tag{4.5}$$

З формули (4.5) одержуємо

$$dF = f(x)dx. \tag{4.6}$$

Цей добуток називається елементом імовірності і дозволяє виразити функцію розподілу через щільність розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{4.7}$$

Імовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал можна виразити через щільність розподілу:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{4.8}$$

Щільність розподілу має деякі властивості, які випливають з властивостей функції розподілу:

1. Щільність розподілу – це невід'ємна функція: $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з першої властивості функції розподілу.

2. Інтеграл від щільності розподілу в нескінченних межах дорівнює одиниці: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Ця властивість випливає з третьої властивості функції розподілу [5].

Зауважимо, що щільність розподілу є законом розподілу тільки безперервних випадкових величин і являє собою аналог ряду розподілу дискретних випадкових величин.

Приклад 4.5. Скориставшись похідною від функції розподілу, отримаємо щільність розподілу випадкової величини із прикладу 4.4:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ 0{,}5;\ 0<x\le 2;\\ 0, x>2.\end{cases}$$

Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (0,5; 1,5) – $P(0{,}5<x<1{,}5)$ з допомогою щільності розподілу:

$$P(0{,}5\le x<1{,}5)=\int_{0,5}^{1,5} f(x)dx=\int_{0,5}^{1,5} 0{,}5dx=0{,}5x\Big|_{0,5}^{1,5}=0{,}5\cdot 1{,}5-0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}5\,.$$

Отже, отримали той же результат, що і в прикладі 4.4, але з допомогою щільності розподілу.

4.4. Гістограма і статистична функція розподілу

Будь-який статистичний матеріал являє собою сукупність реалізацій випадкової величини. Наприклад, якщо на токарному верстаті виготовляють деталь циліндричної форми з номінальним (розрахунковим) діаметром *d*, то цей діаметр готової деталі буде відрізнятися від номінального значення і в загальному випадку у всіх виготовлених деталей він буде різним. Нехай виготовлено *N* деталей, виміряно їх діаметри і отримано *N* значень діаметрів. Ці значення являють собою статистичний матеріал, який прийнято називати *простою статистичною сукупністю*. Якщо статистичний матеріал яким-небудь чином ранжувати (наприклад, за зростанням або спаданням), то отримаємо впорядковану статистичну сукупність.

Для побудови гістограм і статистичних функцій розподілу статистичного матеріалу використовують упорядковану за зростанням статистичну сукупність. Гістограма і статистична функція розподілу є аналогами щільності (ряду) розподілу і функції розподілу випадкових величин для статистичного матеріалу.

Гістограма розподілу. Гістограму розподілу будують таким чином:

1. Упорядковану статистичну сукупність, де x_1 – найменше значення, а x_N – найбільше, розбити на k однакових інтервалів, які називаються розрядами (рис. 4.3). Кількість розрядів визначають за правилом

$$k=\begin{cases}\left\langle \sqrt{N}\right\rangle, N\le 900;\\ 30, N>900.\end{cases} \qquad (4.9)$$

2. Знайти величину розряду за формулою

$$\Delta_i = \frac{x_N - x_1}{k}, i = \overline{1,k}. \quad (4.10)$$

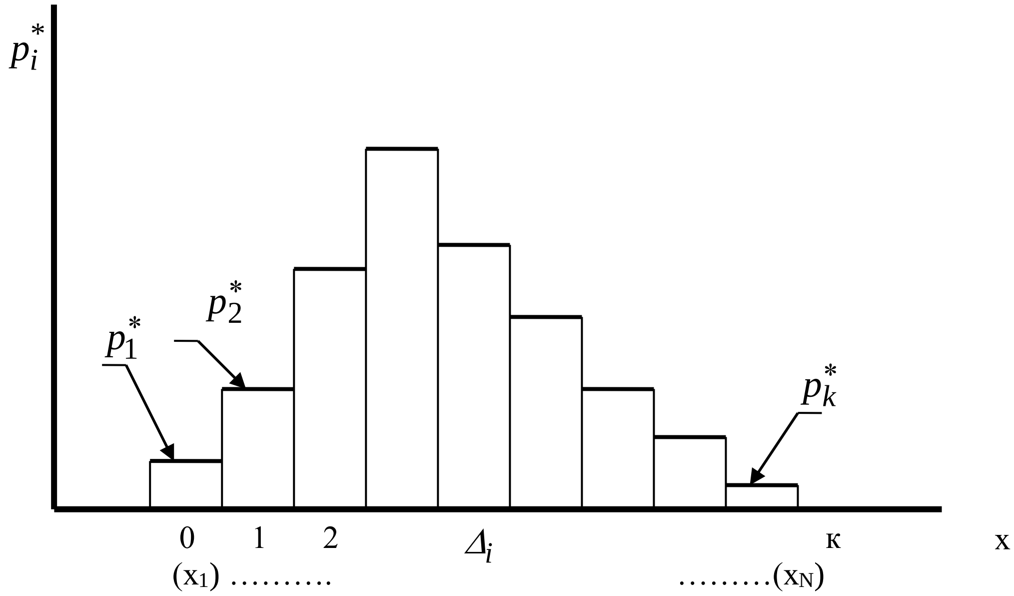


Рис. 4.3. Гістограма розподілу

3. Знайти число реалізацій, які потрапили на кожен розряд $N_i^*, i = \overline{1,k}.$

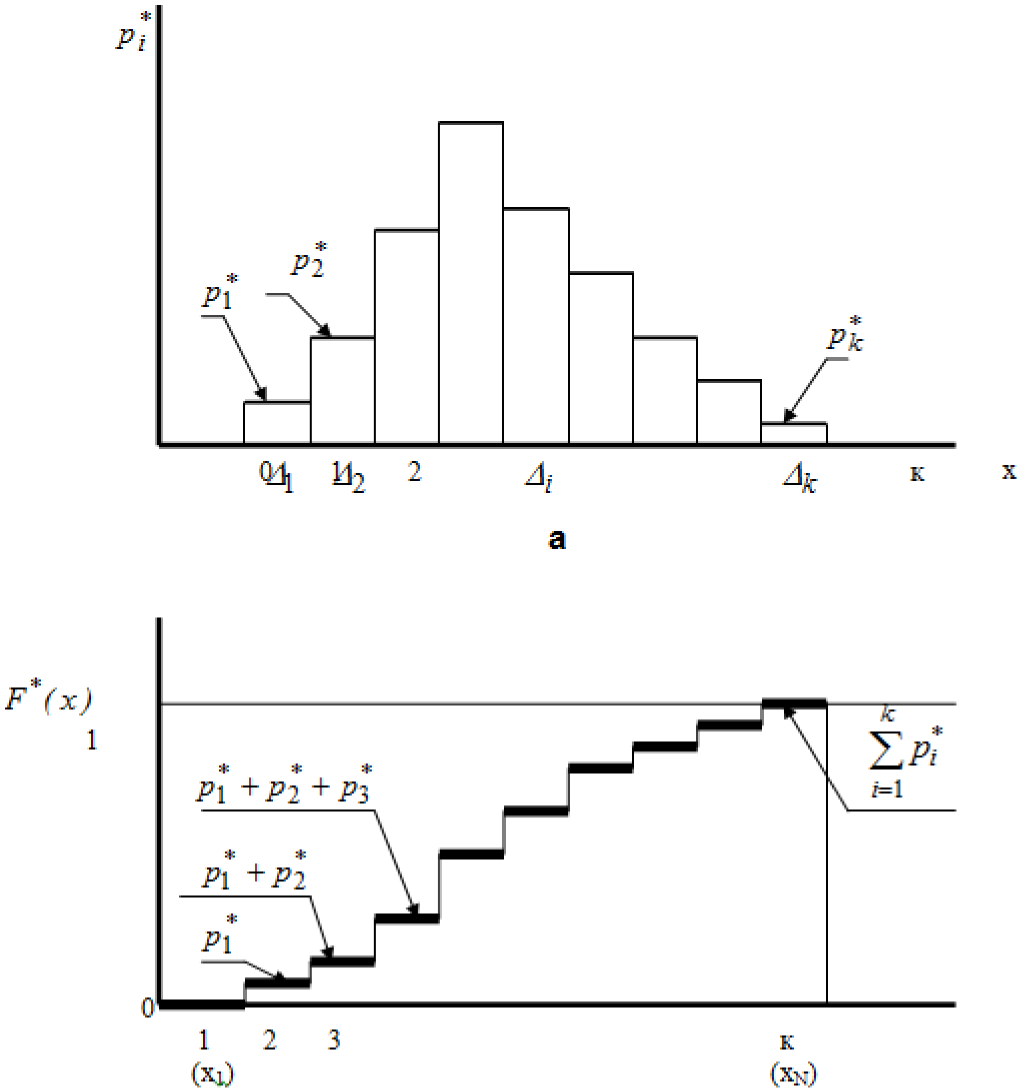
4. Знайти статистичні ймовірності попадання випадкових реалізацій на кожен розряд $p_i^* = \frac{N_i^*}{N}, i = \overline{1,k}$, де $\langle * \rangle$ означає виділення цілої частини додатного значення.

5. Побудувати гістограму розподілу статистичного матеріалу, як це показано на рис. 4.3.

Статистична функція розподілу. Побудова статистичної функції розподілу аналогічна побудові функції розподілу дискретної випадкової величини, оскільки упорядкована статистична сукупність за своєю реалізацією є дискретною. Послідовність побудови така ж, як у прикладі 4.2, але формула (4.3) трохи перетворюється:

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i), \quad (4.11)$$

де $P(x_i) = \frac{1}{N}$ – ймовірність появи реалізації випадкової величини x_i. При великому обсязі статистичного матеріалу раціонально використовувати гістограму розподілу (рис. 4.4).



б

Рис. 4.4. Гістограма розподілу (а) і функція розподілу (б) для статистичного матеріалу

У цьому випадку формулу (4.11) буде перетворено у такий вигляд:

$$F^*(x) = \sum_{\overline{x_i} < x} p_i^* ,$$

де $\overline{x_i} \subset \Delta_i \;\; i = \overline{1,k}$.

Техніку побудови добре видно на рис. 4.4.

$F^*(x)$

5. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закони розподілу випадкових величин є повними їх характеристиками. Однак для виконання прикладних завдань повні характеристики потрібні не завжди. Іноді достатньо знати часткові характеристики. Як часткові використовують числові характеристики.

5.1. Математичне сподівання

Однією з найважливіших числових характеристик випадкової величини є математичне сподівання випадкової величини або її середнє значення. Його позначають (для випадкової величини X) як $M[X]$ або m_x, а при написанні використовують абревіатуру «м. с.».

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \;. \tag{5.1}$$

Математичне сподівання безперервної випадкової величини визначають через щільність розподілу:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{5.2}$$

Математичне сподівання статистичного матеріалу оцінюють за формулою

$$M^*[X] = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}, \tag{5.3}$$

де x_i – елементи статистичного матеріалу – реалізації випадкової величини *X*; N – обсяг статистичного матеріалу [9].

Математичне сподівання має розмірність випадкової величини.

Приклад 5.1. Виконано дослід, в результаті якого може з’явитися або не з’явитися подія A, ймовірність якої дорівнює p. Розглянуто випадкову величину X – число проявів події A. Визначити її математичне сподівання.

Розв’язання.

Ряд розподілу величини X наведено в таблиці 5.1, де $q = 1 - p$ – ймовірність невиявлення події A.

Таблиця 5.1

Ряд розподілу

x_i	0	1
p_i	q	p

За формулою (5.1) знаходимо математичне сподівання величини X:

$$M[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p .$$

5.2. Мода. Квантиль

Мода – це найімовірніше значення випадкової величини. Для дискретних випадкових величин – це значення, ймовірність якого є максимальною. Для безперервних величин – це значення, в якому щільність імовірності є максимальною (рис. 5.1). На рис. 5.1 модою є значення $x = x_m$. Мода має розмірність випадкової величини. Якщо щільність розподілу має кілька максимумів, розподіл називають полімодальним (для двох максимумів – бімодальним).

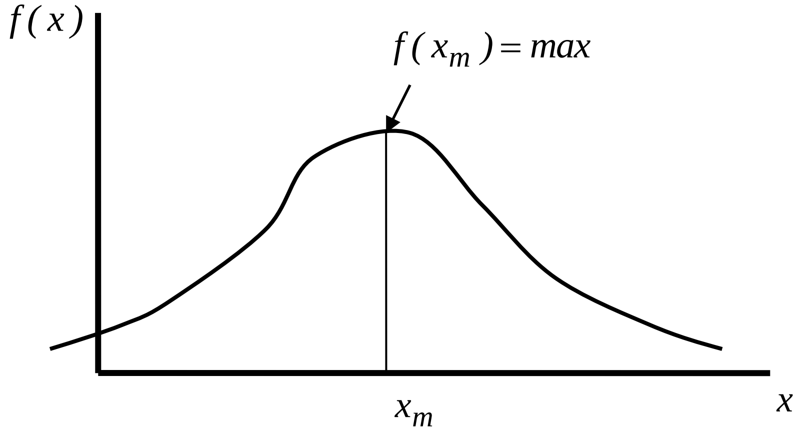


Рис. 5.1 Мода

Квантиль. Ще одна характеристика, що має розмірність випадкової величини x_α – α-квантиль – значення випадкової величини, яке відповідає розв’язку рівняння $F(x) = \alpha$ (рис. 5.2).

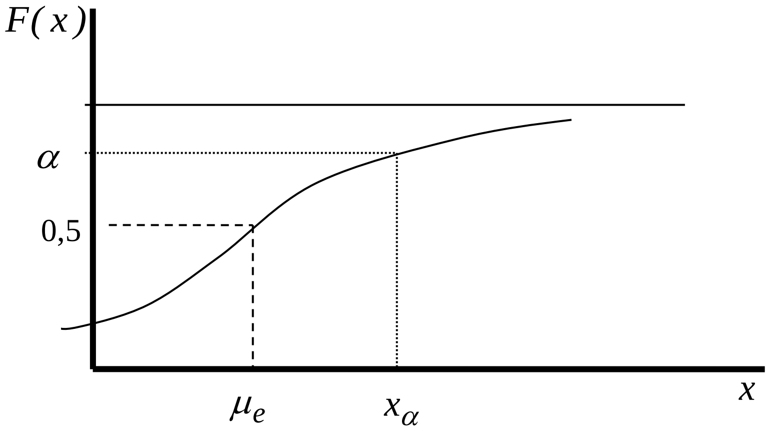


Рис. 5.2. Квантиль

На рис. 5.2 показано графічне визначення значення x_α при заданому α. Значення x_α, що відповідає α = 0,5, називається медіаною і позначається μ_e. Властивість медіани така, що $P(X < \mu_e) = P(X > \mu_e)$.

5.3. Моменти розподілу

5.3.1. Початковий момент s-го порядку

Початковим моментом s-го порядку α_s випадкової величини X називають математичне сподівання цієї випадкової величини в степені s [9]:

$$\alpha_s = M[X^s].$$

Для дискретної випадкової величини це сума виду

$$\alpha_s = M[X^s] = \alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i . \tag{5.4}$$

Для безперервної випадкової величини

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx . \tag{5.5}$$

Початкові моменти для статистичного матеріалу оцінюють за формулою

$$\alpha_s^* = M^*[X^s] = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^s}{N}, \qquad (5.6)$$

Якщо в рівняннях (5.4) – (5.6) прийняти $s = 1$, стане зрозуміло, що математичне сподівання – це перший початковий момент випадкової величини *X*.

Для розв’язання прикладних задач використовують тільки перший і другий початкові моменти.

5.3.2. Центральний момент s-го порядку

Введемо поняття ***центрованої*** випадкової величини як відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x.$$

Математичне сподівання центрованої випадкової величини

$$M[X - m_x] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x = 0.$$

Таким чином, $M[\overset{\circ}{X}] = 0$.

Центральним моментом s-го порядку μ_s випадкової величини X називають математичне сподівання центрованої випадкової величини в степені s:

$$\mu_s = M[\overset{\circ}{X}{}^s].$$

Для дискретної випадкової величини

$$\mu_s = M[\overset{\circ}{X}{}^s] = \sum (x_i - m_x)^s p_i. \qquad (5.7)$$

Для безперервної випадкової величини

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x) dx. \qquad (5.8)$$

Центральні моменти для статистичного матеріалу оцінюють за формулою

$$\mu_s^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - m_x^*)^s}{N}. \quad (5.9)$$

Для прикладних цілей використовують другий, третій і четвертий центральні моменти.

5.3.3. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення

Центральний момент другого порядку (другий центральний момент) μ_2 називають ***дисперсією*** випадкової величини і позначають $D[X]$ або D_x.

Дисперсія для дискретної випадкової величини

$$D_x = \mu_2 = M[\overset{\circ}{X}{}^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i. \quad (5.10)$$

Для безперервної випадкової величини

$$D_x = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (5.11)$$

Дисперсію для статистичного матеріалу оцінюють за формулою

$$D_x^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - m_x^*)^2}{N}. \quad (5.12)$$

Існує ще один спосіб визначення дисперсії. Розглянемо його. Для цього розкриємо праву частину виразу (5.10):

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m_x \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m_x^2 \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Урахувавши, що $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \alpha_2$; $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m_x$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (властивість ряду розподілу), після нескладних перетворень остаточно отримаємо [1]

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2. \tag{5.13}$$

Формулу (5.13) використовують частіше інших, тому що початкові моменти обчислюють простіше центральних.

Дисперсія – це характеристика розсіювання випадкової величини близько її математичного сподівання. Її розмірність – розмірність квадрата випадкової величини. Розсіювання зручно порівнювати з самою випадковою величиною. Тому ввели ще одну міру розсіювання випадкової величини – ***середнє квадратичне відхилення*** σ_x або $\sigma[X]$.

$$\sigma_x = \left|\sqrt{D_x}\right|. \tag{5.14}$$

5.4. Асиметрія. Ексцес

Асиметрія – одна з характеристик форми кривої щільності розподілу. Її прийнято позначати S_k. Асиметрія являє собою нормований третій момент

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{5.15}$$

Іноді S_k називають нормованим показником асиметрії.

Для симетричних відносно м.с. розподілів третій центральний момент дорівнює нулю. Дійсно, нехай дано симетричний розподіл (рис. 5.3).

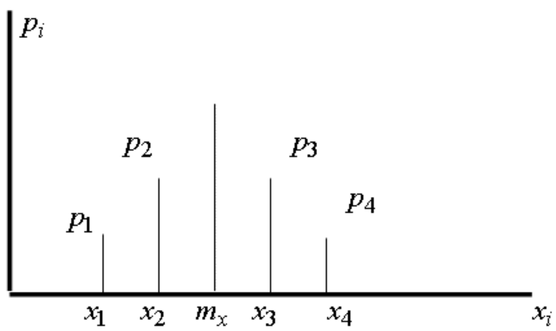


Рис. 5.3. Симетричний розподіл

Для цього розподілу можна записати умови симетрії:

$$x_1 - m_x = -(x_4 - m_x);$$
$$x_2 - m_x = -(x_3 - m_x);$$

$$p_1 = p_4;$$
$$p_2 = p_3.$$

Згідно з формулою (2.18) для третього центрального моменту маємо:

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^3 p_i = (x_1 - m_x)^3 p_1 + (x_2 - m_x)^3 p_2 + (x_3 - m_x)^3 p_3 + (x_4 - m_x)^3 p_4.$$

З урахуванням умов симетрії після нескладних перетворень отримаємо $\mu_3 = 0$, що й треба було довести. Відповідно для такого розподілу асиметрія $S_k = 0$. На рис. 5.4 показано криві щільності розподілу для випадків різних знаків асиметрії.

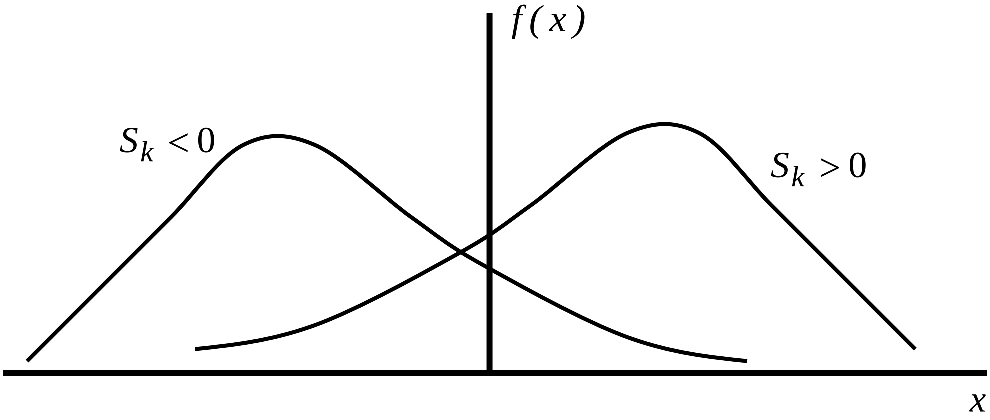


Рис. 5.4. Криві щільності розподілу для різних знаків асиметрії

Рисунок демонструє, як пов'язана форма кривої щільності розподілу з асиметрією.

Як параметр, що характеризує асиметрію кривої щільності розподілу, використовують квадрат нормованого показника асиметрії

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}. \tag{5.16}$$

Ексцес – ще одна з характеристик форми кривої щільності розподілу. Її прийнято позначати Ex. Ексцес визначають так:

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (5.17)$$

Ексцес характеризує гостровершинність кривої щільності розподілу. Як характеристику гостровершинності часто використовують четвертий нормований центральний момент

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}. \qquad (5.18)$$

Приклад 5.2. Виконується три незалежні постріли по мішені, ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,4. Випадкова величина X — число влучень. Виявити характеристики величини X — математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію [12].

Розв'язання. Ряд розподілу величини X наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Ряд розподілу

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Обчислюємо числові характеристики величини X :

$$m_X = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2;$$

$$D_X = (0-1,2)^2 \cdot 0,216 + (1-1,2)^2 \cdot 0,432 + (2-1,2)^2 \cdot 0,288 + (3-1,2)^2 \cdot 0,064 = 0,72;$$

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0,72} = 0,848;$$

$$\mu_3 = (0-1,2)^3 \cdot 0,216 + (1-1,2)^3 \cdot 0,432 + (2-1,2)^3 \cdot 0,288 + (3-1,2)^3 \cdot 0,064 = 0,144;$$

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{0,144}{0,72 \cdot 0,848} \approx 0,236.$$

6. НАЙПОШИРЕНІШІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Те, що в теорії ймовірностей називають «законами розподілу» насправді є математичними описами (моделями) реальних розподілів випадкових величин. Оскільки робота щодо створення таких моделей ведеться досить давно, на сьогоднішній день їх розроблено дуже багато. Розглянемо найбільш поширені з них. Закони розподілу розроблялися на основі вивчення різних типів статистичного матеріалу і тому існує певний зв'язок між ними. Існують також рекомендації про відповідність моделей розподілу певним типам реальних розподілів.

6.1. Рівномірний закон розподілу

Рівномірний закон розподілу є однією з моделей розподілу безперервних випадкових величин. Прикладом такого розподілу може бути час очікування поїзда в метро за умови, що інтервал між поїздами витримується строго. Якщо цей час становить t хв, а пасажир заходить в довільний момент часу, час його очікування поїзда лежить в межах від 0 до t. Вивчення статистики показало, що цей час підпорядковано рівномірному закону розподілу. Його функцію розподілу (модель) виражено формулою (6.1), а графік зображено на рис. 6.1:

$$F(x)=\begin{cases}0, a\le x;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a<x\le b;\\ 1, x>b.\end{cases} \tag{6.1}$$

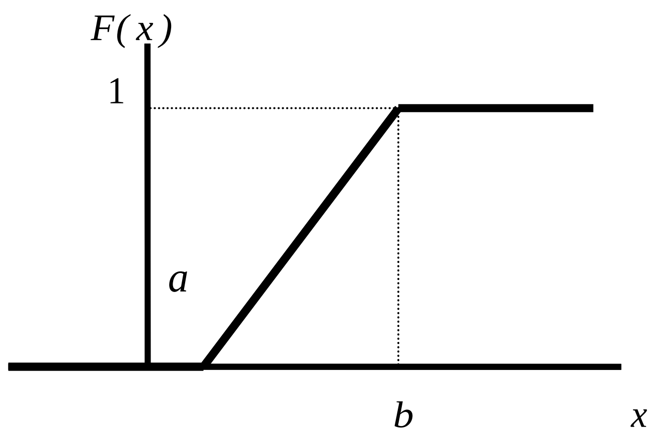


Рис. 6.1. Функція розподілу для рівномірного закону розподілу

У рівнянні (6.1) константи a і b називають параметрами рівномірного закону розподілу [1].

Щільність цього розподілу описано виразом (6.2), а графік зображено на рис. 6.2:

$$f(x)=\begin{cases}0, x \le a;\\ \dfrac{1}{b-a}, a < x \le b;\\ 0, x > b.\end{cases} \tag{6.2}$$

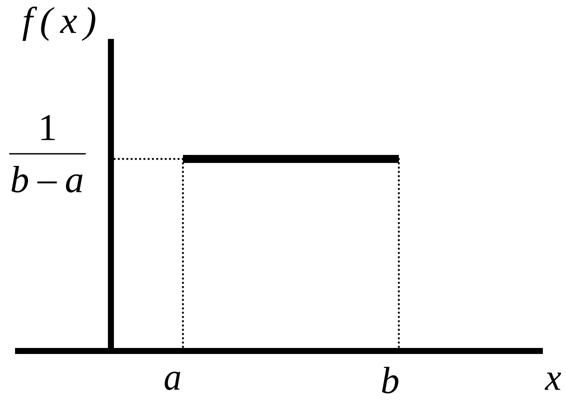


Рис. 6.2. Щільність розподілу для рівномірного закону розподілу

Визначимо основні числові характеристики випадкової величини, підпорядкованої рівномірному закону розподілу.

Математичне сподівання. Щоб знайти математичне сподівання, скористаємося формулою (5.2), підставивши в неї щільність розподілу (6.2):

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{a} o\cdot x\cdot dx+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}\cdot x\cdot dx+\int_{b}^{\infty} o\cdot x\cdot dx.$$

Перший і останній інтеграли цього виразу дорівнюють нулю. Другий інтеграл дозволяє одержати такий результат:

$$m_x=\frac{b+a}{2}. \tag{6.3}$$

Із цього рівняння випливає, що математичне сподівання лежить посередині інтервалу розподілу і, отже, рівномірний розподіл є симетричним відносно математичного сподівання.

Дисперсія. Для визначення дисперсії скористаємося виразами (5.13), (5.5) і (6.3). Спочатку знайдемо другий початковий момент:

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} o \cdot x^2 \cdot dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \cdot x^2 \cdot dx + \int_{b}^{\infty} o \cdot x^2 \cdot dx.$$

Перший і останній інтеграли цього виразу дорівнюють нулю. Другий інтеграл приводить до такого результату:

$$\alpha_2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}. \qquad (6.4)$$

Віднявши з рівняння (6.3) квадрат математичного сподівання (6.2), остаточно отримаємо

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad (6.5)$$

звідки середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}. \qquad (6.6)$$

Асиметрія. Оскільки закон розподілу є симетричним відносно математичного сподівання, асиметрія дорівнює нулю: $S_k = 0$.

Ексцес для рівномірного розподілу $Ex = -1{,}2$.

Знайдемо ймовірність попадання випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом, на ділянку $(a,\ b)$, яка являє собою частину ділянки $(\alpha,\ \beta)$ (рис. 6.3). Геометрично таку ймовірність зображено заштрихованою площею. Вона дорівнює відношенню довжини відрізка $(a,\ b)$ до всієї довжини ділянки $(\alpha,\ \beta)$, на якій задано рівномірний розподіл:

$$P(a < X < b) = \frac{b-a}{\beta - \alpha}.$$

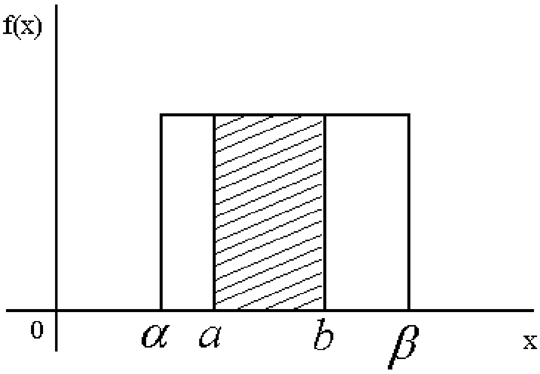


Рис. 6.3. Попадання випадкової величини на ділянку $(a,\ b)$

6.2. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу є однією з моделей розподілу безперервних випадкових величин. Закон розподілу широко використовують при розв’язанні прикладних задач. Це пов'язано з дією центральної граничної теореми. Щільність імовірності при нормальному законі розподілу має вигляд [11]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (6.7)$$

де m і σ – параметри нормального закону розподілу.

Графік кривої показано на рис. 6.4.

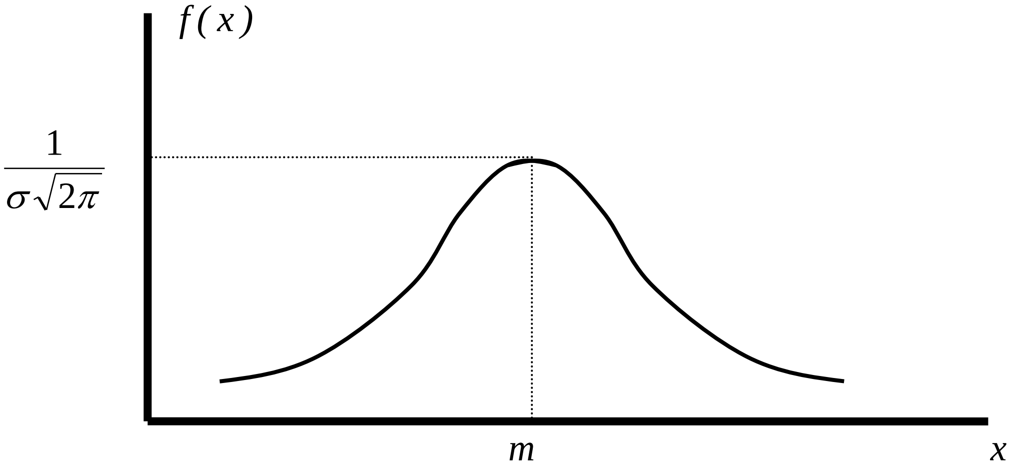


Рис. 6.4 Щільність розподілу для нормального закону розподілу

Максимум цієї функції досягається в точці $x = m$ і дорівнює $max\, f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Для нормального закону розподілу математичне сподівання $m_x = m$, дисперсія $D_x = \sigma^2$, середнє квадратичне відхилення (с.к.в.), $\sigma_x = \sigma$, $\mu_3 = 0$ і, отже, асиметрія дорівнює нулю, ексцес $Ex = 0$.

Функція розподілу цього закону

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (6.8)$$

Графік цієї функції зображено на рис. 6.5.

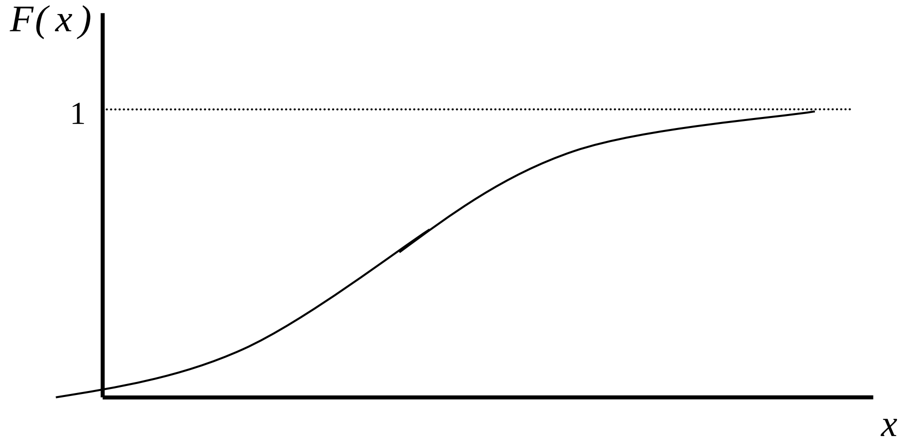


Рис. 6.5. Функція розподілу для нормального закону розподілу

Інтеграл (6.8) в явній формі не існує. Тому для прикладних цілей його наведено в таблицях значень нормальної функції розподілу [1]. Для того, щоб таблицями було зручно користуватися, в інтегралі (6.8) замінимо змінну $t = \dfrac{x - m}{\sigma}$, отримаємо

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (6.9)$$

Змінна є нормальною величиною з параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$. Функція розподілу (6.9) називається **нормальною функцією розподілу, або функцією Гаусса** і має вигляд

$$\Phi\ (x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Записав функцію розподілу через нормальну функцію розподілу, отримаємо

$$F(x)=\Phi\ \left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Вираз $\frac{x-m}{\sigma}$=*U* називається безрозмірним аргументом нормальної функції розподілу, за значенням якого легко, використавши таблиці, знайти значення нормальної функції розподілу.

Ймовірність потрапляння випадкової величини *X* на ділянку від α до β можна знайти за такою формулою:

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\ \left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\ \left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right). \quad (6.10)$$

Приклад 6.1. Випадкова величина X, розподілена за нормальним законом, є помилкою вимірювання деякої відстані. При вимірюванні допускається систематична помилка вбік завищення на 1,2 м; середнє квадратичне відхилення помилки виміру дорівнює 0,8 м. Знайти ймовірність того, що відхилення вимірюваного значення від справжнього не перевершить за абсолютною величиною 1,6 м [1].

Розв'язання. Помилкою виміру є випадкова величина X, підпорядкована нормальному закону з параметрами $m=1,2$ і $\sigma=0,8$. Потрібно знайти ймовірність потрапляння цієї величини в інтервал від $\alpha=-1,6$ до $\beta=+1,6$.

За формулою (6.10)

$$P(-1,6 < X < 1,6)=\Phi\ \left(\frac{1,6-1,2}{0,8}\right)-\Phi\ \left(\frac{-1,6-1,2}{0,8}\right)=\Phi(0,5)-\Phi(-3,5).$$

Використовуючи табличні значення функції Гаусса $\Phi(x)$ [1], знаходимо:

$$\Phi(0,5)=0,6915;\ \Phi(-3,5)=0,0002,$$

звідки

$$P(-1,6 < X < 1,6)=0,6915-0,0002=0,6913\approx 0,691.$$

6.3. Експоненціальний розподіл

Експоненціальний розподіл є однією з моделей розподілу безперервних випадкових величин, зокрема часу безвідмовної роботи технічних пристроїв.

Щільність імовірності при такому законі розподілу має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0,\\ 0, x<0,\end{cases} \tag{6.11}$$

де $\lambda>0$ – параметр розподілу, який при оцінюванні ймовірності часу безвідмовної роботи, називають інтенсивністю відмов.

Функція розподілу

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}. \tag{6.12}$$

Математичне сподівання $m_x=\dfrac{1}{\lambda}$, дисперсія $D_x=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

6.4. Біноміальний розподіл

Біноміальний розподіл є однією з моделей розподілу дискретних випадкових величин. Зокрема, за допомогою цього розподілу знаходять імовірність появи x_i успішних результатів при n незалежних випробуваннях

Ряд розподілу

$$p_i=C_n^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{n-x_i},\ n>0,\ \text{ціле};\ x_i>0,\ \text{ціле};\ 0\leq p\leq 1. \tag{6.13}$$

Математичне сподівання $m_x=np$; дисперсія $D_x=np(1-p)$ [7].

6.5. Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона є однією з моделей розподілу дискретних випадкових величин. Зокрема, за допомогою цього розподілу знаходять ймовірність появи x_i незалежних подій на фіксованому інтервалі часу.

Ряд розподілу

$$p_i=\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!},\ x_i\geq 0,\ \text{ціле},\ \lambda>0, \tag{6.14}$$

де λ – деяка додатна величина, що називається параметром розподілу Пуассона.

Величина λ являє собою середнє число точок, які приходяться на деякий відрізок l. Тоді ймовірність того, що у відрізок l потрапить хоча одна точка [5]:

$$P_l = 1 - e^{-\lambda}. \tag{6.15}$$

Математичне сподівання $m_x = \lambda$, дисперсія $D_x = \lambda$. Таким чином, дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, дорівнює її математичному сподіванню λ. Цю властивість розподілу Пуассона часто застосовують на практиці для вирішення питання, чи правдоподібна гіпотеза про те, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона. Для цього визначають з експерименту статистичні характеристики – математичне сподівання і дисперсію – випадкової величини. Якщо їх значення близькі, то це може бути доказом на користь гіпотези про те, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона; велика відмінність цих характеристик, навпаки, свідчить проти гіпотези.

Приклад 6.2. На автоматичну телефонну станцію надходить у середньому *К* викликів за годину. Вважаючи, що кількість викликів у будь-якому інтервалі часу розподілено за законом Пуассона, знайти ймовірність того, що за дві хвилини на станцію надійде рівно три виклики.

Розв'язання. Середнє число викликів за дві хвилини

$$\lambda = \frac{2K}{60} = \frac{K}{30}.$$

За формулою (6.14) ймовірність надходження рівно трьох викликів

$$P_3 = \frac{\left(\frac{K}{30}\right)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-\frac{K}{30}}.$$

Приклад 6.3. На автоматичну телефонну станцію надходить у середньому *К* викликів за годину. Вважаючи, що число викликів у будь-якому інтервалі часу розподілено за законом Пуассона, знайти ймовірність того, що за дві хвилини на станцію надійде хоча б один виклик.

Розв'язання. Середнє число викликів за дві хвилини

$$\lambda = \frac{2K}{60} = \frac{K}{30}.$$

За формулою (6.15)

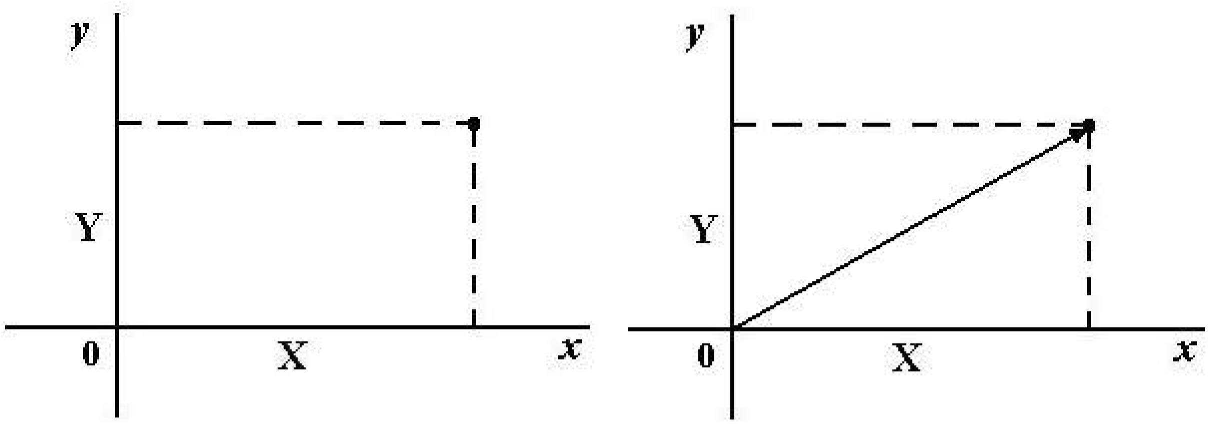
$$P_l = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-\frac{K}{30}}.$$

7. ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ

7.1. Поняття про систему випадкових величин

У практиці дуже часто доводиться мати справу з комплектом випадкових величин. Так, будь-яка продукція, будь-яка технічна система мають декілька важливих для споживача характеристик, кожна з яких може бути випадковою величиною. Наприклад, точка влучення снаряда визначається не однією випадковою величиною, а двома: абсцисою і ординатою – і може бути розглянута як комплекс двох випадкових величин. Аналогічно точка розриву дистанційного снаряда визначається комплексом трьох випадкових величин. У таких випадках говорять про систему випадкових величин або про **випадковий вектор** [1].

При розгляді питань, пов'язаних з системами випадкових величин, зручно користуватися геометричною інтерпретацією системи. Наприклад, систему двох випадкових величин (X,Y) можна зображувати випадковою точкою на площині з координатами (X,Y) (рис. 7.1, а). Аналогічно система трьох випадкових величин може бути зображена випадковою точкою в тривимірному просторі.



а б

Рис. 7.1. Геометрична інтерпретація системи двох випадкових величин

Часто замість образу випадкової точки у геометричній інтерпретації системи випадкових величин користуються образом випадкового вектора. Систему двох випадкових величин при цьому розглядають як випадковий вектор на площині XoY, складові якого по осях є випадковими величинами X,Y (рис. 7.1, б).

7.2. Функція та щільність розподілу системи двох випадкових величин

Функцією розподілу системи двох випадкових величин (X,Y) називається ймовірність спільного виконання двох нерівностей $X<x$ та $Y<y$:

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y). \tag{7.1}$$

Якщо користуватися образом випадкової точки в геометричній інтерпретації системи, то функція розподілу $F(x,y)$ є не що інше, як імовірність попадання випадкової точки (X,Y) у нескінченний квадрант з вершиною в точці (x,y), що лежить нижче і лівіше неї (рис. 7.2).

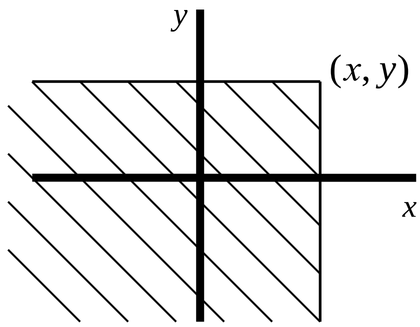


Рис. 7.2. Нескінченний квадрант з вершиною в точці (x,y)

Використавши рівняння (7.1) і рис. 7.2, можна сформулювати властивості функції розподілу двох випадкових величин.

1. Функція розподілу $F(x,y)$ є неспадною функцією обох своїх аргументів:

$$x_2>x_1,\qquad F(x_2,y)\ge F(x,y);$$
$$y_2>y_1,\qquad F(x,y_2)\ge F(x,y).$$

2. Всюди на $-\infty$ функція розподілу дорівнює нулю:

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0.$$

3. Якщо один з аргументів функції дорівнює $+\infty$, то функція перетворюється у функцію розподілу випадкової величини, відповідну до іншого аргументу:

$$F(x,\infty) = F_1(x);$$
$$F(\infty, y) = F_2(y).$$

.
4. Якщо обидва аргументи дорівнюють $+\infty$, то функція розподілу

$$F(\infty,\infty) = 1.$$

Щільність розподілу системи двох випадкових величин

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \quad .$$

Імовірність попадання випадкової точки з координатами (X,Y) у деяку область D:

$$P((X,Y) \subset D) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Звідси одержуємо формулу для визначення ймовірності попадання в прямокутник, обмежений абсцисами α, β і ординатами γ, δ (рис. 7.3):

$$P((X,Y) \subset R) = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dxdy. \qquad (7.2)$$

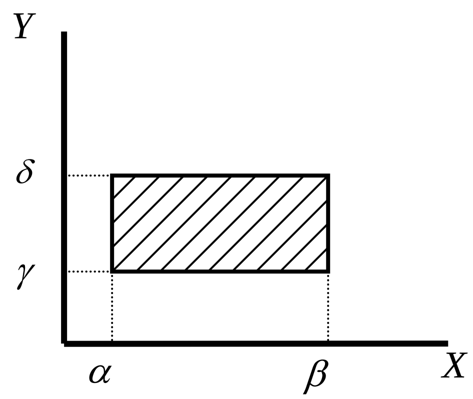


Рис. 7.3. Ймовірність попадання випадкової точки у прямокутник

Зі сказаного вище отримуємо:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy. \qquad (7.3)$$

Щільність розподілу системи має такі властивості:

1. Щільність розподілу системи є невід'ємною функцією:

$$f(x,y)\geq 0.$$

2. Подвійний інтеграл у нескінченних межах від щільності розподілу системи

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Закони розподілу окремих величин, що входять у систему, можна одержати, знаючи спільні закони розподілу. Функції розподілу окремих величин, що отримані в третій властивості спільної функції розподілу:

$$F(x,\infty)=F_1(x);$$
$$F(\infty,y)=F_2(y).$$

Якщо необхідно виразити щільність розподілу кожної з величин, що входять у систему, через щільність розподілу системи, можна скористатися цією властивістю. Зокрема, для випадкової величини X

$$F_1(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy.$$

Диференціюючи за x, отримуємо щільність розподілу випадкової величини X

$$f_1(x)=F_1'(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy.$$

Аналогічно для випадкової величини Y

$$f_2(y)=F_2'(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Приклад 7.1. Систему двох випадкових величин (X,Y) підпорядковано закону розподілу з щільністю

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Знайти функцію розподілу $F(x,y)$. Визначити ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в квадрат R (рис. 7.4).

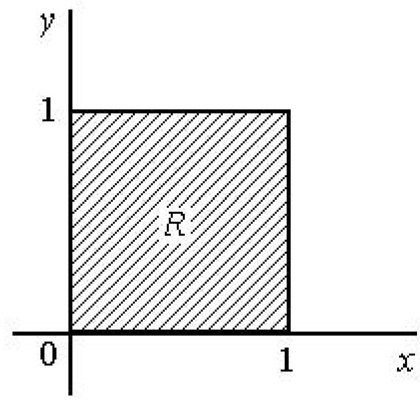


Рис. 7.4. Попадання випадкової точки в квадрат R

Розв'язання.
Функцію розподілу $F(x,y)$ знаходимо за формулою (7.3):

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctgy+\frac{1}{2}\right).$$

Імовірність попадання в квадрат R одержуємо за формулою (7.2):

$$P((x,y)\subset R)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)}\int_0^1\frac{dy}{(1+y^2)}=\frac{1}{16}.$$

7.3 Залежні і незалежні випадкові величини

Випадкові величини, що входять у систему, можуть бути залежними одна від одної або ж незалежними. Наприклад, очевидно, що маса і діаметр яблука є взаємно залежними. Тому вводиться поняття умовної щільності розподілу, наприклад, умовна щільність розподілу випадкової величини X: $f(x|y)$. Спільну щільність розподілу можна виразити за допомогою умовної щільності:

$$f(x,y)=f_1(x)f(y|x) \;\Rightarrow\; f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \tag{7.4}$$

Для безперервних випадкових величин умова незалежності має такий вигляд:

$$f(x|y)=f_1(x);$$
$$f(y|x)=f_2(y).$$

Спільна щільність розподілу незалежних випадкових величин

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y).$$

Таким чином, щільність розподілу системи незалежних випадкових величин дорівнює добутку щільності розподілу окремих випадкових величин, що входять у систему.

7.4. Моменти системи випадкових величин

Початковим змішаним моментом порядку k,s системи (X,Y) називається математичне сподівання добутку X^k на Y^s:

$$\alpha_{k,s}=M[X^kY^s]. \tag{7.5}$$

Центральним змішаним моментом порядку k,s системи (X,Y) є

$$\mu_{k,s}=M[\overset{\circ}{X}{}^k\,\overset{\circ}{Y}{}^s]. \tag{7.6}$$

Для визначення значень моментів дискретних випадкових величин застосовують формули

$$\alpha_{k,s}=\sum_i\sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}; \tag{7.7}$$

$$\mu_{k,s}=\sum_i\sum_j (x_i-m_x)^k(y_j-m_y)^s p_{ij}. \tag{7.8}$$

Для безперервних випадкових величин

$$\alpha_{k,s} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy; \tag{7.9}$$

$$\mu_{k,s} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k (y-m_y)^s f(x,y)dxdy. \tag{7.10}$$

Для практичного застосування використовують другий змішаний центральний момент. Його називають ***кореляційним моментом*** випадкових величин X, Y і позначають K_{xy}:

$$\mu_{11} = K_{xy} = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}] = M[(X-m_x)(Y-m_y)].$$

Для дискретних випадкових величин

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \tag{7.11}$$

де p_{ij} – ймовірність спільної появи x_i та y_j.
Для безперервних випадкових величин

$$K_{xy} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)(y-m_y) f(x,y)dxdy. \tag{7.12}$$

Для статистичного матеріалу обсягом N кореляційний момент оцінюють за формулою [1]

$$K_{xy}^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)}{N}. \tag{7.13}$$

Відсутність схожості між формулами (7.12) і (7.11) пояснимо на прикладі. Припустимо розглядають систему двох випадкових величин: діаметр d і масу g яблука. Щоб накопичити статистичний матеріал, беруть N яблук і проводять вимірювання діаметра і зважування маси кожного яблука. Результати заносять у таблицю (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Результати вимірювання діаметрів і зважування яблук

Діаметр, маса яблука	Номер яблука			
	1	2	…	N
d_i	d_1	d_2	…	d_N
g_i	g_1	g_2	…	g_N

З табл. 7.1 видно, що кожному номеру яблука відповідає тільки один діаметр і одна маса, тобто ймовірність отримати діаметр i-го яблука з масою j-го яблука дорівнює нулю, якщо $j \neq i$. Таким чином, при обробленні статистичного матеріалу завжди $p_{ij} = 0$, якщо $j \neq i$. Тому в рівнянні (7.11) подвійна сума зникає, а $p_{ij} = p_i = \frac{1}{N}$ — ймовірність i-го вимірювання випадкових величин. З урахуванням сказаного, (7.11) перетворюється в формулу (7.13).

Крім кореляційного моменту, для характеристики взаємної залежності двох випадкових величин використовують його нормоване значення, яке називають ***коефіцієнтом кореляції***:

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{7.14}$$

Коефіцієнт кореляції характеризує ступінь лінійної залежності двох випадкових величин. Пізніше це твердження буде доведено. **Якщо випадкові величини не залежать одна від одної, то коефіцієнт кореляції дорівнює нулю** [8].

Зрозуміло, що кореляційний момент незалежних випадкових величин дорівнює нулю, тобто наявність залежності між випадковими величинами можна визначати за величиною кореляційного моменту. Якщо він не дорівнює нулю, то величини є залежними одна від одної.

Коли мова йде про випадковий вектор ***X*** довільної розмірності

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{Vmatrix},$$

його характеризують кореляційною матрицею

$$K_x = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{Vmatrix},$$

де $K_{ij} = M[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j]$, а діагональні елементи $k_{ii} = D_i$ – дисперсії компонент випадкового вектора.

Оскільки елементи кореляційної матриці мають властивість симетрії: $K_{ij} = K_{ji}$ $(i, j = \overline{1, n})$, то матриця K_x є трикутною. Вона симетрична відносно діагоналі.

Коефіцієнти кореляції компонент вектора $\boldsymbol{X}$ утворюють **нормовану кореляційну матрицю**

$$R_x = \begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{Vmatrix},$$

де $r_{ii} = 1, \; i = \overline{1, n}$.

Матриця R_x так само, як і K_x, є симетричною відносно діагоналі, оскільки $r_{ij} = r_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$.

8. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Коли маємо на увазі злітну масу літака, то розуміємо, що ця маса складається з мас агрегатів і деталей літака, мас пасажирів, маси палива, вантажу і т. п. Причому маси всіх компонент, що складають масу літака, є випадковими величинами. Таким чином, маса літака є функцією випадкових величин – компонент, що складають масу літака. Це – найпростіший приклад. На практиці в технічних додатках дуже часто доводиться зустрічати характеристики, які являють собою функції випадкових величин, або, як ще кажуть, функції випадкового аргументу. Розглянемо, що являє собою функція випадкового аргументу з точки зору теорії ймовірностей.

Функцією випадкового аргументу називається детермінована функція, аргумент якої є випадковою величиною, або випадковим вектором.

Нехай ця функція $Y = 2X^2 - 1$, де X – дискретна випадкова величина, ряд розподілу якої наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Ряд розподілу випадкової величини X

x_i	0,5	1,0	1,5	2,0
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Для всіх можливих значень випадкового аргументу знайдемо значення функції, за результатами «розширимо» таблицю 8.1 і одержимо табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Ряд розподілу випадкових величин X та Y

x_i	0,5	1,0	1,5	2,0
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	-0,5	1,0	3,5	7,0

Знайшли значення функції для всіх можливих значень випадкового аргументу. Причому ймовірність кожного значення функції дорівнює відповідній імовірності аргументу $P(y_i) = P(x_i), i = \overline{1,4}$. У загальному випадку безперервна функція

$$P(y_i) = P(x_i), i = \overline{1,n}, \tag{8.1}$$

де n – число всіх можливих значень аргументу.

Це означає, що *функція випадкового аргументу є випадковою величиною*, а її ряд розподілу визначається рядом розподілу випадкового аргументу.

Для функції випадкової величини досить просто знайти будь-які числові характеристики.

На основі рівняння (5.2) з урахуванням (8.1) математичне сподівання функції випадкового аргументу для дискретних випадкових величин можна визначити так:

$M[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) p_i$ – для однієї випадкової величини;

$M[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_{i,} y_j) p_{ij}$ – для двох випадкових величин.

На основі рівняння (5.2) для безперервних випадкових величин одержимо:

$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$ – для однієї випадкової величини;

$M[\varphi(X,Y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f(x,y) dxdy$ – для двох випадкових величин.

За аналогією можна визначити будь-які числові характеристики функції випадкового аргументу.

Отже, визначити числові характеристики функції випадкового аргументу теоретично досить просто. Однак:

- для розв'язання прикладних задач не завжди можна обмежитися числовими характеристиками;
- коли як аргумент розглядають багатомірний випадковий вектор, визначення числових характеристик стає громіздким і технічно складним завданням.

8.1. Теореми про числові характеристики

У попередніх розділах наведено ряд формул, що дозволяють знаходити числові характеристики функцій, коли є відомими закони розподілу аргументів. Однак у багатьох випадках для знаходження числових характеристик функцій не потрібно знати навіть законів розподілу аргументів, а досить знати тільки деякі їхні числові характеристики. При цьому взагалі можна обходитися без використання будь-яких законів розподілу. Визначення числових характеристик функцій за заданими числовими характеристиками аргументів широко застосовується в теорії ймовірностей і дозволяє значно спрощувати розв’язання ряду задач. Переважно такі спрощені методи належать до лінійних функцій; однак до деяких елементарних нелінійних функцій також допускається подібний підхід.

У цьому розділі викладемо ряд теорем про числові характеристики функцій, що являють у своїй сукупності досить простий апарат обчислення цих характеристик, застосовний у широкому колі умов [1].

1. Теорема про математичне сподівання невипадкової константи.

Якщо c – невипадкова величина, то

$$M[c] = c.$$

Сформульована властивість є досить очевидною. Доводити її можна, розглядаючи невипадкову величину c як окремий вид випадкової, при одному можливому значенні з імовірністю одиниця. Тоді за загальною формулою (5.2) математичне сподівання:

$$M[c] = c \cdot 1 = c.$$

Теорема доведена.

2. Теорема про дисперсію невипадкової константи

$$D[c] = 0.$$

Для доказу скористаємося формулою (5.10):

$$D[c] = (c - c)^2 \cdot 1 = 0.$$

Теорема доведена.

Інші теореми доводяться аналогічно. Наводимо їх без доказів.

3. Винесення невипадкової величини за знак математичного сподівання

$$M[cX] = cm_X,$$

де X – випадкова величина, тобто невипадкову величину можна виносити за знак математичного сподівання.

4. Винесення невипадкової величини за знак дисперсії й середнього квадратичного відхилення

$$D[cX] = c^2 D_X.$$

Отже, невипадкову величину можна виносити за знак дисперсії, підносячи її у квадрат.

Наслідок: $\sigma[cX]=|c|\sigma[X]$, тобто невипадкову величину можна виносити за знак середнього квадратичного відхилення її абсолютним значенням.

5. Математичне сподівання суми декількох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M[\sum_i X_i]=\sum_i M[X_i].$$

6. Дисперсія суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2\sum K_{XY}\ .$$

Дисперсія суми випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]+2\sum_{i<j} K_{ij}\ ,$$

де K_{ij} – кореляційний момент величин X_i, X_j, знак $i<j$ під сумою означає, що підсумовування поширюється на всі можливі попарні сполучення випадкових величин ($X_1, X_2, \dots, X_n$).

Дисперсія суми некорельованих (незалежних) випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i].$$

7. Математичне сподівання лінійної функції дорівнює тій же лінійній функції від математичних сподівань аргументів:

$$M\left[b+\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]=b+\sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i],$$

де a_i, b – невипадкові коефіцієнти.

8. Дисперсія лінійної функції виражена формулою

$$D\left[b+\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]+2\sum_{i<j} a_i a_j K_{ij},$$

де a_i, b – невипадкові величини, K_{ij} – кореляційний момент величин X_i, X_j.

Дисперсія лінійної функції некорельованих (незалежних) випадкових величин дорівнює сумі добутків квадратів коефіцієнтів на дисперсії відповідних аргументів:

$$D\left[b+\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i].$$

9. Математичне сподівання добутку двох випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент:

$$M[XY]=m_x m_y+K_{xy},$$

де $m_x=M[X]$; $m_y=M[Y]$.

Математичне сподівання добутку **незалежних** випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]=\prod_{i=1}^{n} M[X_i].$$

10. Дисперсія добутку двох **незалежних** випадкових величин виражена формулою

$$D[XY]=D_x D_y+m_x^2 D_y+m_y^2 D_x,$$

де X, Y – незалежні випадкові величини.

11. Дисперсія добутку **незалежних** центрованих випадкових величин дорівнює добутку їх дисперсій:

$$D[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}]=D[\overset{\circ}{X}]D[\overset{\circ}{Y}],$$

де X, Y – незалежні випадкові величини.

8.2. Застосування теорем про числові характеристики

Приклад 8.1. Задано лінійну функцію випадкової величини X:

$$Y = a_0 + aX .$$

Випадкову величину X задано числовими характеристиками $m_X; D_X; \sigma_X$. Знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y.

Розв'язання. Визначимо математичне сподівання й дисперсію випадкової величини Y.

За теоремою № 7

$$M[Y] = M[a_0 + aX] = a_0 + am_x.$$

За теоремою № 8

$$D_y = a^2 D_x .$$

Кореляційний момент

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)],$$

звідки, підставивши $Y = a_0 + aX$ і $m_y = a_0 + am_x$ та провівши нескладні перетворення, одержимо

$$K_{xy} = aD_x.$$

Оскільки дисперсія завжди є додатною, знак кореляційного моменту визначається знаком коефіцієнта a. Коефіцієнт кореляції

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} .$$

З огляду на те, що $\sigma_y = |a| \sigma_x$, і, підставивши в цей вираз $K_{xy} = aD_x$, одержимо

$$R_{xy} = \frac{a}{|a|} .$$

Отриманий результат підтверджує твердження про те, що коефіцієнт кореляції характеризує ступінь лінійної залежності випадкових величин. За наявності такої залежності він приймає максимальне за модулем значення, що дорівнює +1, коли a є додатним, й значення -1, коли a є від'ємним [1].

9. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

9.1. Закон великих чисел

Закон великих чисел – це набір математичних теорем, в яких для різних умов встановлюється факт наближення середніх характеристик великого числа дослідів до деяких певних постійних.

Закон великих чисел відіграє важливу роль у практичних застосуваннях теорії ймовірностей. Властивість випадкових величин при певних умовах вести себе практично як невипадкові дозволяє впевнено оперувати цими величинами, передбачати результати масових випадкових явищ майже з повною визначеністю.

Можливості таких прогнозів в області масових випадкових явищ ще більше розширюються наявністю іншої групи граничних теорем, що стосуються вже не граничних значень випадкових величин, а граничних законів розподілу. Мова йде про групу теорем, відомих під назвою «центральної граничної теореми». Відомо, що при підсумовуванні досить великого числа випадкових величин закон розподілу суми необмежено наближається до нормального при дотриманні деяких умов. Ці умови, які математично можна формулювати по-різному — у більш або менш загальному вигляді, — по суті зводяться до вимоги, щоб вплив на суму окремих доданків був рівномірно малим, тобто, щоб до складу суми не входили члени, які явно переважають над сукупністю інших за своїм впливом на розсіювання суми. Різні форми центральної граничної теореми розрізняються між собою тими умовами, для яких встановлюється ця гранична властивість суми випадкових величин.

Різні форми закону великих чисел разом з різними формами центральної граничної теореми утворюють сукупність так званих граничних теорем теорії ймовірностей. Граничні теореми дають можливість не тільки здійснювати наукові прогнози в області випадкових явищ, а й оцінювати точність цих прогнозів.

Доведення цих теорем досить громіздкі, тому наводимо їх без доказів.

9.2. Закон великих чисел у формі Бернуллі

Уведемо поняття ***збіжності за ймовірністю***. Випадкова величина X збігається за ймовірностю до величини a, якщо $P(|X-a|<\varepsilon)>1-\delta$, де δ,ε – скільки завгодно малі числа [6].

Відома теорема Я. Бернуллі, що встановлює зв'язок між частотою події і її ймовірністю, може бути доведена як прямий наслідок закону великих чисел.

Бернуллі довів, що при необмеженому збільшенні числа дослідів N частота (статистична ймовірність) події A збігається за ймовірностю до її істинної ймовірності p:

$$P\left(\left|\frac{m^*}{N}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\delta, \qquad (9.1)$$
$$N\to\infty$$

де $P^*(A)=\dfrac{m^*}{N}$ – частота події A; δ,ε – скільки завгодно малі додатні числа.

Теорема Бернуллі дозволяє при досить великому обсязі статистичного матеріалу користуватися статистичною ймовірністю події A замість істинної.

9.3. Закон великих чисел у формі Чебишова

Закон великих чисел у формі Чебишова (теорема Чебишова): при достатньо великому числі незалежних дослідів середнє арифметичне спостережених значень $x_i, i=\overline{1,N}$ випадкової величини X збігається за ймовірністю до її математичного сподівання

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{N}-m_x\right|<\varepsilon\right)>1-\delta, \qquad (9.2)$$
$$N\to\infty$$

де $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{N}=m_x^*$; δ,ε – скільки завгодно малі додатні числа.

Теорема Чебишова легко поширюється на будь-які числові характеристики, зокрема, на центральні моменти. Дійсно, для оцінювання центральних моментів маємо (5.9):

$$\mu_s^*=\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-m_x^*)^s}{N}.$$

Позначивши $y_i = (x_i - m_x^*)^s, i = \overline{1, N}$ і підставивши y_i в рівняння (5.9), отримаємо

$$\mu_s^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{N}.$$

Замінивши у формулі (9.2) x_i на y_i, одержимо

$$P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N} - m_y \right| < \varepsilon \right) > 1 - \delta.$$

$$N \to \infty$$

Однак $m_y = \mu_s$. Отже, теорема Чебишова доведена для центральних моментів довільного порядку μ_s, включаючи дисперсію [5].

9.4. Центральна гранична теорема (теорема Ляпунова)

Властивість випадкових величин при певних умовах вести себе практично як невипадкові дозволяє впевнено оперувати цими величинами, передбачати результати масових випадкових явищ майже з повною визначеністю.

Можливості таких прогнозів в області масових випадкових явищ ще більше поширюються за наявності іншої групи граничних теорем, що стосуються вже не граничних значень випадкових величин, а граничних законів розподілу. Мова йде про групу теорем, відомих під назвою «центральної граничної теореми». При підсумовуванні досить великого числа випадкових величин закон розподілу суми необмежено наближається до нормального при дотриманні деяких умов. Ці умови, які математично можна формулювати по-різному – у більш або менш загальному вигляді, – по суті, зводяться до вимоги, щоб вплив на суму окремих доданків був рівномірно малим, тобто, щоб до складу суми не входили члени, які явно переважають над сукупністю інших за своїм впливом на розсіювання суми. Різні форми центральної граничної теореми розрізняються між собою тими умовами, для яких встановлюється ця гранична властивість суми випадкових величин. Наведемо одну з таких форм.

Центральна гранична теорема (теорема Ляпунова): якщо X_1, X_2, …, X_N – незалежні випадкові величини, які мають один і той самий закон розподілу з математичним сподіванням m_x і дисперсією D_x, то при необмеженому збільшенні N закон розподілу суми

$$Y_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

необмежено наближається до нормального [1].

Приклад 9.1. По смузі укріплень супротивника скидається 100 серій бомб. При скиданні однієї такої серії математичне сподівання кількості попадань дорівнює 2, а середнє квадратичне відхилення числа дорівнює 1,5. Знайти приблизно ймовірність того, що при скиданні 100 серій в смугу влучає від 180 до 220 бомб.

Розв'язання.

Наведемо загальне число влучень як суму влучень бомб окремих серій:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i,$$

де X_i — число влучень бомб i-ї серії.

Умови центральної граничної теореми дотримано, бо величини X_1, X_2, …, X_{100} розподілено однаково. Будемо вважати число $n = 100$ достатнім для того, щоб можна було застосувати граничну теорему (на практиці вона звичайно використана і при набагато менших n). Маємо

$$m_x = \sum_{i=1}^{100} m_i = 200, \ \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{100} 1{,}5^2 = 225.$$

Застосувавши формулу (6.10), отримаємо

$$P(180 < X < 220) = \hat{O}\left(\frac{220-200}{\sqrt{225}}\right) - \hat{O}\left(\frac{180-200}{\sqrt{225}}\right) \approx 0.82,$$

тобто з імовірністю 0,82 можна стверджувати, що загальне число влучень в смугу не вийде за межі $180 \ldots 220$.

10. ГЕНЕРАТОРИ ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ

Розглянемо приклад.

Приклад 10.1. Затиснена одним кінцем балка з композиційного матеріалу навантажена силою P, прикладеною під кутом α (рис. 10.1). Як досліджувану характеристику розглянемо проекцію прогину балки на вісь *Z*:

$$f = \frac{P \sin \alpha L^3}{EJ_y}, \tag{10.1}$$

де P – діюча сила (навантаження); α – кут прикладання навантаження; L – довжина балки; E – модуль пружності; J_y – момент інерції.

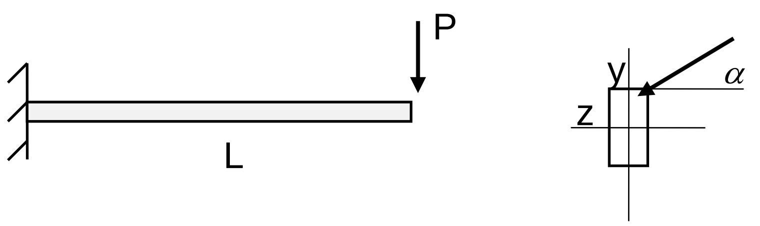


Рис. 10.1. Навантажена силою Р балка

Насправді розрахункові значення параметрів балки при реалізації і експлуатації відрізняються від розрахункових значень внаслідок випадкових розкидів. Тому вираз (10.1) потрібно записати так:

$$f = \frac{(P^0 + \eta_1) \sin(\alpha^0 + \eta_5)(L^0 + \eta_2)^3}{(E^0 + \eta_3)(J_y^0 + \eta_4)}, \tag{10.2}$$

де $P^0, \alpha^0, L^0, E^0, J_y^0$ – розрахункові значення параметрів; $\eta_i, i = \overline{1,5}$ – випадкові відхилення від розрахункових значень.

Якщо розглянута балка є лонжероном крила літака, який знаходиться в експлуатації, то встановивши на всіх літаках датчик переміщення на кінці балки і замірявши прогин при кожному польоті літака, можна отримати відповідний статистичний матеріал. В даному випадку статистичний матеріал отримано на «живому» літаку. А що робити, якщо літак тільки проектується, а статистичні характеристики прогину треба знати? У цьому випадку вдаються до статистичного моделювання.

Необхідні дані для проведення статистичного моделювання наведено в табл. 10.1

Таблиця 10.1

Дані для проведення статистичного моделювання

Параметр	Позначення		Значення і розкид
	Відхилення	С.к.в.	
Навантаження *P*	η_1	σ_1=0,8	8,0 $\pm$ 2,4
Довжина *L*	η_2	σ_2=2,7	90 $\pm$ 8,1
Модуль пружності *E*	η_3	σ_3=0,097$\cdot$ 10^6	1,4 $\cdot$ 10^6 $\pm$0,29$\cdot$ 10^6
Момент інерції J_y	η_4	σ_4=0,1	2,0 $\pm$ 0,3
Кут α	η_5	σ_5=6	60° $\pm$ 18°

Усі п'ять параметрів задано у вигляді номінального значення і граничного значення розкиду. Наприклад, навантаження *P* задано так: $P = P^0 \pm \Delta P$, де P^0=8,0; ΔP=2,4. Аналогічними є й інші параметри. Розбіжності є нормальними випадковими величинами, а їх граничні значення задають на рівні «трьох с.к.в.», тобто $\Delta P = 3\sigma_p$, отже, $\sigma_p = \frac{\Delta P}{3}$. У наведеному випадку $\sigma_p = \frac{2,4}{3} = 0,8$.

Якщо вдасться знайти випадкову реалізацію випадкових відхилень параметрів η_i, то підставивши їх значення у формулу (10.2), отримаємо випадкову реалізацію прогину балки. Для накопичення статистичного матеріалу в обсязі N «наборів» випадкових реалізацій випадкових відхилень параметрів η_i має бути теж N. Цей процес проілюстровано рис. 10.2.

Рис. 10.2. Процес накопичення статистичного матеріалу

Порахувати за формулою значення прогину, якщо є всі дані, досить просто. Накопичення масиву теж не є складним. Поки невідомо, як згенерувати "набір" випадкових реалізацій випадкових відхилень. Тому перейдемо до розгляду цього питання.

Якщо звернутися до прикладу 10.1, то зрозуміло, що на практиці в кожному польоті й для кожного літака здійснюється конкретна реалізація випадкових параметрів. Якщо знати закономірності, за якими така реалізація здійснюється, то можна навчитися її моделювати. Знати закономірності — це знати статистичні характеристики випадкових параметрів. Вивченню цього питання присвячено багато досліджень, і в цей час для будь-яких випадкових параметрів, що зустрічаються в техніці, існують не тільки їхні статистичні характеристики, але й методи здійснення конкретних реалізацій випадкових величин, підпорядкованих різним законам розподілу. Основою цих методів є генератори випадкових чисел різних законів розподілу. Основою всіх генераторів випадкових чисел є генератор рівномірних випадкових чисел з параметрами $a = 0$ та $b = 1$, тобто чисел, що мають рівномірний розподіл в інтервалі (0,1). Зараз будь-яка мова програмування має процедуру або функцію, що генерує рівномірні випадкові числа (РВЧ).

10.1. Генератори рівномірних випадкових чисел

Основна ідея таких генераторів – зробити яке-небудь обчислення і як РВЧ використати дробову частину результату. Найпростіший генератор РВЧ працює за таким правилом:

$$s_{i+1} = \{As_i\}, \tag{10.3}$$

де $A \geq 10$ — довільна константа; $\{*\}$ — операція виділення дробової частини; s_i, s_{i+1} — сгенеровані РВЧ. Як початкове значення приймають будь-яке число з інтервалу (0,1): $0 < s_0 < 1$.

РВЧ, отримані за правилом (10.3), насправді не є випадковими, тому що для їх генерації використовують рекурентне співвідношення. Тому їх називають псевдовипадковими. Основний недолік таких чисел – вони можуть повторюватися. Якщо після генерації таких чисел в обсязі M, виявиться, що $s_M = s_0$, то генерована послідовність повториться й наступна послідовність M чисел збіжиться з попередньою. Значення M називають періодом повторюваності, що залежить від значень A і s_0, кількості значущих цифр значень A і s_0. Для збільшення періоду повторюваності використовують більш складне правило генерації РВЧ:

$$s_{i+1} = \{e^{As_i}\}. \tag{10.4}$$

Тут прийнято ті ж позначення, що й у виразі (10.3) і поставлено ті ж вимоги до початкового значення s_0.

Алгоритмів і правил моделювання рівномірних випадкових чисел існує багато. Основними критеріями, за якими роблять висновок про якість генераторів є:

- період повторюваності (періодичність);
- випадковість;
- рівномірність розподілу;
- корельованість (незалежність).

В останніх розробках генераторів, реалізованих програмним шляхом, використовують переривання (з періодом істотно меншим періоду повторюваності) генерації "за правилом" (наприклад, за правилом (10.4)) і введення "чергового" фактично випадкового числа. Щоб одержати таке число, звертаються до таймера ПЭВМ і отриманий поточний час "перетворюють" у випадкове число. Наприклад, звертання до таймера дозволило одержати 14:23:14. Оскільки найбільш динамічними є секунди, можна взяти 14 с і поділити їх на 60, а результат використати як "чергове" фактично випадкове число.

10.2 Генератори нормальних випадкових чисел

Найпоширенішим правилом генерації нормальних випадкових чисел (НВЧ) є правило, основане на центральній граничній теоремі. Нагадаємо, що НВЧ має такі параметри розподілу: $m=0$ та $\sigma=1$. Для одержання такого числа використовують формулу

$$v_i = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{j=1}^{n} s_j - \sqrt{3n}, \; i = \overline{1,m}, \qquad (10.5)$$

де v_i — НВЧ; s_j — РВЧ; m — необхідна кількість НВЧ.

Кількість доданків s_j має бути досить великою, інакше центральна гранична теорема "не спрацює" і закон розподілу НВЧ буде відрізнятися від нормального. Найпоширенішим є $n=12$. Таке значення n є достатнім, щоб закон розподілу НВЧ практично не відрізнявся від нормального. При цьому формула (10.5) істотно спрощується:

$$v_i = \sum_{j=1}^{12} s_j - 6, \; i = \overline{1,m}. \qquad (10.6)$$

Зрозуміло, що для кожного НВЧ необхідно генерувати свій "комплект" РВЧ. Так, для генерації десяти НВЧ за формулою (10.6) необхідно згенерувати 120 РВЧ.

Нормальність випадкових чисел v_i забезпечується центральною граничною теоремою, а параметри розподілу відповідають НВЧ: $m = 0$ та $\sigma = 1$. У цьому легко переконуватися, застосовуючи до (10.6) відповідні теореми про числові характеристики і ураховуючи, що РВЧ має математичне сподівання $m_S = 0{,}5$ й дисперсію $D_S = \frac{1}{12}$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Основна література

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 2001. – 575 с.

2. Пугачев, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачев. – М. : Физматлит, 2002. – 496 с.

3. Бородин, А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А. Н. Бородин. – Спб. : Лань, 2004. – 256 с.

4. Бочаров, П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика : учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печенкин. – М.: Гардарика, 1998. – 328 с.

5. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. школа, 2005. – 479 с.

Допоміжна література

6. Прохоров, Ю. В. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – М. : Наука, 1967. – 496 с.

7. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – М. : Мир, 1967. – 500 с.

8. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – М. : Наука, 1978. – 224 с.

9. Колемаев, В. А., Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. – М. : Инфра-М, 1997. – 302 с.

10. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. образование, 2006. – 404 с.

11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

12. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. школа, 2000. – 366 с.

13. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер. – М. : Юнити-Дана, 2004. – 573 с.

14. Виленкин, Н. Я. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики / Н. Я. Виленкин, В. Г. Потапов. – М. : Просвещение, 1979. – 112 с.

15. Мостеллер, Ф. Вероятность / Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас. – М. : Мир, 1969. – 432 с.

Навчальне видання

Толкунова Юлія Миколаївна
Коба Сергій Олександрович
Пащук Юлія Олександрівна
Погудіна Ольга Костянтинівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2019
Підписано до видання 13.06.2019
Ум. друк. арк. 4,4. Обл.-вид. арк. 4,94. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001