

**СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ
ДЛЯ ІНЖЕНЕРНОЇ ПРАКТИКИ**

2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ
ДЛЯ ІНЖЕНЕРНОЇ ПРАКТИКИ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2019

УДК 629.7.01 (075.8)
С71

Колектив авторів:

В. В. Кириченко, В. Л. Кириченко, А. В. Кондратьєв, А. А. Царіцинський

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. О. Федорович,
канд. техн. наук О. О. Пронцевич

Спеціальні розділи вищої математики і механіки для інженерної С71 практики [Електронний ресурс] : навч. посіб. / В. В. Кириченко, В. Л. Кириченко, А. В. Кондратьєв, А. А. Царіцинський. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2019. – 100 с.

Наведено деякі спеціальні положення розділів математики та механіки, що стосуються питань побудови математичних моделей дослідницьких задач та етапів їх розв'язання на основі вибраних математичних моделей. Викладено такі спеціальні розділи: основи варіаційного обчислення, методи розв'язання варіаційних задач; основні принципи механіки деформівного твердого тіла і методи розв'язання типових задач; принципи побудови математичних моделей і основні вимоги до моделей; основи механіки руйнування матеріалів, які об'єднує загальна прикладна спрямованість на застосування до інженерних задач.

Для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальністю «Авіаційна та ракетно-космічна техніка». Може бути корисним для наукових та інженерно-технічних працівників авіаційної та ракетно-космічної галузі, а також аспірантів, викладачів при розв'язанні прикладних задач.

Іл. 66. Табл. 2. Бібліогр.: 5 назв

УДК 629.7.01 (075.8)

© Колектив авторів, 2019
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2019

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛА	6
1.1 Задачі, що приводять до пошуку екстремуму функціонала, функція і функціонал, варіації функціонала	6
2 УМОВА ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛА	14
2.1 Необхідна умова екстремуму функціонала. Рівняння Ейлера	14
2.2 Функціонали з похідними вищих порядків	19
3 ЗАДАЧІ НА ЕКСТРЕМУМ ДЛЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ	22
3.1 Функціонал від функцій декількох змінних	22
3.2 Умовний екстремум функціонала	25
3.3 Прямі методи розв'язання варіаційних задач	28
4 СИНТЕЗ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	31
4.1 Основні закони механіки деформівного твердого тіла	31
4.2 Методи розв'язання задач математичної теорії пружності	35
4.3 Плоска задача теорії пружності	36
5 ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА	38
5.1 Принцип Сен-Венана	38
5.2 Принцип суперпозиції (незалежності дії сил)	38
5.3 Узагальнені сили і узагальнені переміщення	39
5.4 Можливі переміщення, деформації і напруження	40
5.5 Принцип можливої (віртуальної) роботи для точки	41
5.6 Можлива робота внутрішніх сил у деформівному тілі	42
5.7 Дійсна робота внутрішніх сил у тілі (потенціальна енергія)	44
5.8 Принцип можливих переміщень	44
5.9 Варіаційний принцип Лагранжа (принцип потенціальної енергії)	44
5.10 Варіаційний принцип Кастільяно (принцип додаткової енергії)	45
6 МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	47
6.1 Метод Бубнова–Гальоркіна	47
7 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ	52
7.1 Основи моделювання процесів	52
7.2 Класифікація математичних моделей	60
7.3 Побудова математичної моделі	64
7.4 Основні методи контролю при розв'язанні математичних задач	65
8 КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ Й ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ	70
8.1 Критерій максимальних нормальних напружень	70
8.2 Критерій максимальних лінійних деформацій	70
8.3 Критерій найбільших дотичних напружень	71
8.4 Енергетичний критерій міцності	72
8.5 Критерій енергії формоутворення	73
8.6 Критерій міцності анізотропних матеріалів	74

9	ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ Й РОЗМІРНОСТЕЙ	77
9.1	Методи подібності й розмірностей в механіці	77
9.2	Деякі теореми методу розмірностей	80
10	ОСНОВИ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ	83
10.1	Робота руйнування матеріалу	83
10.2	Аналіз напружень поблизу кінчика тріщини	85
10.3	Функції напружень	91
10.4	Відрив тріщини	93
10.5	Поперечний зсув тріщини	95
10.6	Поздовжній зсув тріщини	96
	БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	99

ВСТУП

Мета курсу – дати претендентам другого (магістерського) і третього (аспірантського) етапів здобуття вищої освіти додаткові знання в області сучасних методів різних розділів математики і механіки, що дозволить ефективніше застосовувати принципи і прийоми проектування і конструювання раціональних конструкцій, творчо підходити до процесу проектування, виконувати проектувальні та перевіірочні розрахунки, необхідні для оцінювання створюваної конструкції.

Задачі курсу – отримання студентами відповідних знань, умінь і навичок.

У результаті вивчення курсу студенти мають:

1. Знати:

- основи варіаційного числення, методи розв'язання варіаційних задач;
- основні принципи механіки деформівного твердого тіла та методи розв'язання типових задач;
- принципи побудови математичних моделей і основні вимоги до них;
- основи механіки руйнування матеріалів.

2. Уміти:

- застосовувати елементи варіаційного числення для постановки і розв'язання типових задач механіки деформівного твердого тіла;
- створювати математичні моделі для типових інженерних задач, використовувати методи самоконтролю при розв'язанні задач;
- застосовувати елементи теорії подібності та розмірностей при створенні і відпрацюванні математичних моделей;
- визначати основні параметри при розв'язанні типових задач механіки руйнування.

Матеріал посібника ґрунтується на відомих розділах математики і механіки [1 – 5]. Його прикладна спрямованість на підготовку інженерів за фахом «Авіаційна та ракетно-космічна техніка» зумовлює включення окремих питань, присвячених математичному апарату для побудови математичних моделей дослідницьких задач і основним етапам розв'язання цих задач на основі вибраних математичних моделей. Слід зазначити, що обмежений обсяг посібника не дозволив викласти весь матеріал у повному обсязі, з необхідними доказами і обґрунтуваннями. Для більш глибокого вивчення викладених в посібнику теоретичних питань і задач, які залишилися без належної уваги, потрібно звернутися до спеціалізованої літератури.

Автори сподіваються, що посібник допоможе читачам глибше зрозуміти математичні основи відповідної спеціальності і зорієнтуватися в існуючих і нових математичних інструментах розв'язання прикладних інженерних задач.

1 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛА

1.1 Задачі, що приводять до пошуку екстремуму функціонала, функція і функціонал, варіації функціонала

Варіаційне обчислення засновано в XVIII столітті Л. Ейлером і Ж. Лагранжем. Апарат варіаційного обчислення створено Л. Ейлером, Ж. Лагранжем, Я. Бернуллі, К. Гауссом, В. Гамільтоном. Варіаційне обчислення набуло значного розвитку в XIX ст., в даний час – це один із найважливіших розділів математики. Воно безпосередньо відноситься до теорії екстремумів.

Історично перша задача варіаційного обчислення, відома як легенда і віднесена пізніше до задач варіаційного обчислення, – це задача Дідони.

Дідона – цариця однієї з держав Стародавньої Греції. Дідона втекла від переслідування царем сусідньої держави в Північну Африку. Там вона попросила ділянку землі, яку можна обгорнути шкурою вола. Її прохання здалося нікчемним, а Дідона розрізала шкуру на тонкі ремінці, зв'язала їх в нитку і охопила нею неабияку ділянку землі (заснувала місто Карфаген).

Математична сторона легенди: як треба розташувати нитку відомої довжини L , щоб охоплена нею ділянка мала максимальну площу S (рисунок 1.1).

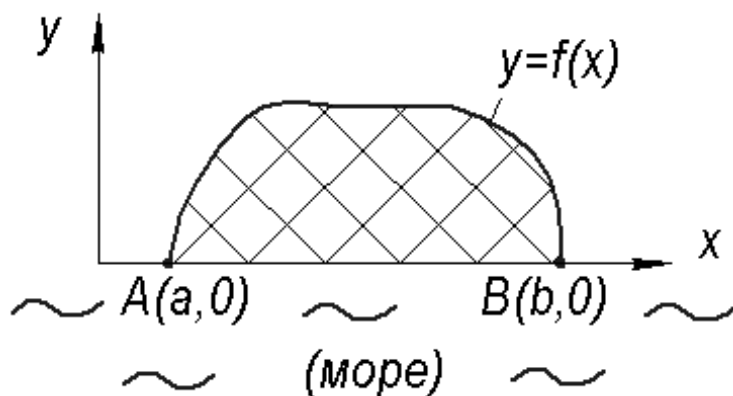


Рисунок 1.1 – Математична інтерпретація задачі Дідони

Якщо кінці нитки розташовані в заданих точках $A(a; 0)$ і $B(b; 0)$, то задача зводиться до пошуку максимуму площі

$$S = \int_a^b y(x) dx \rightarrow \max. \quad (1.1)$$

Довжина нитки відома: $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$;

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (\text{рисунок 1.2}). \quad (1.2)$$

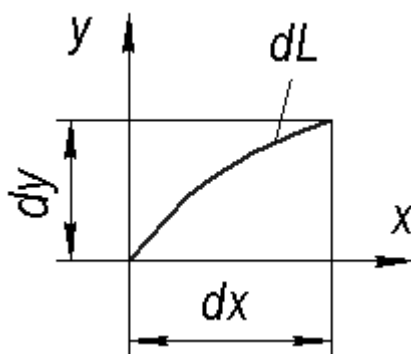


Рисунок 1.2 – До формулювання задачі Дідони

Крайові значення функції $y(x)$ (у самій простій постановці):

$$y(a) = 0; \quad y(b) = 0. \quad (1.3)$$

Ще в давні часи, не знаючи варіаційного обчислення, встановили, що форма нитки – це дуга окружності.

Друга задача варіаційного обчислення була запропонована в 1696 р. І. Бернуллі і вирішена різними способами Я. Бернуллі, Г. Лейбніцем, Г. Лопиталем і І. Ньютоном (задача про брахістохрону).

Під дією сил тяжіння матеріальна точка скочується з точки A в точку B по лінії без початкової швидкості і тертя за час T .

Як вибрати шлях (якої форми потрібно побудувати гірку), щоб час T був мінімальним (рисунок 1.3)?

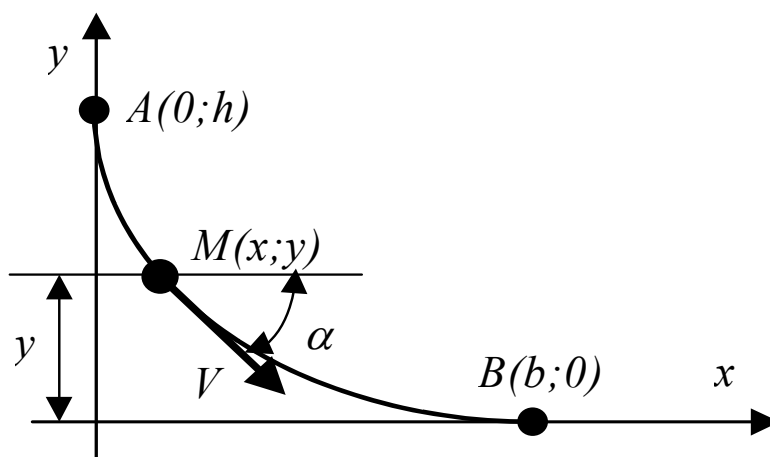


Рисунок 1.3 – До формулювання задачі про брахістохрону

Зменшення потенціальної енергії матеріальної точки

$$\Delta A = mg(h - y). \quad (1.4)$$

Кінетична енергія матеріальної точки M

$$W = \frac{mV^2}{2}. \quad (1.5)$$

З рівності енергій випливає, що $mg(h-y) = \frac{mV^2}{2}$ і швидкість матеріальної точки M

$$V = \sqrt{2g(h-y)}. \quad (1.6)$$

Проекція швидкості на вісь x : $V_x = V \cos \alpha = \frac{dx}{dt}$.

З урахуванням виразу (1.6) і того, що $\cos \alpha = \frac{dx}{dL} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2g(h-y)}}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (1.7)$$

Звідси випливає, що $dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} dx$ і

$$T = \int dt = \int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} dx \rightarrow \min \quad (1.8)$$

при граничних умовах $y(0) = h$; $y(b) = 0$.

Спільними рисами цих двох задач є те, що це задачі на екстремум $S \rightarrow \max$ і $T \rightarrow \min$ з нескінченним числом степенів вільності $y(x)$.

Необхідна умова екстремуму функції з одним степенем вільності

$$\frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.9)$$

Достатня умова

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0. \quad (1.10)$$

Для функції однієї змінної (один степінь вільності – x) $y = x^3 - 12x + 2$ необхідна умова $y' = 3x^2 - 12 = 0$ приводить до $x^2 = 4$ і координат точок екстремуму $x = \pm 2$.

Достатня умова: $y'' = 6x|_{x=2} = 12$ (це мінімум), $y'' = 6x|_{x=-2} = -12$ (максимум) (рисунок 1.4).

Екстремум функції двох змінних $z = f(x, y)$ з двома степенями вільності.

Необхідна умова екстремуму

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (1.11)$$

Достатня умова – нерівність нулю визначника матриці Гессе

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.12)$$

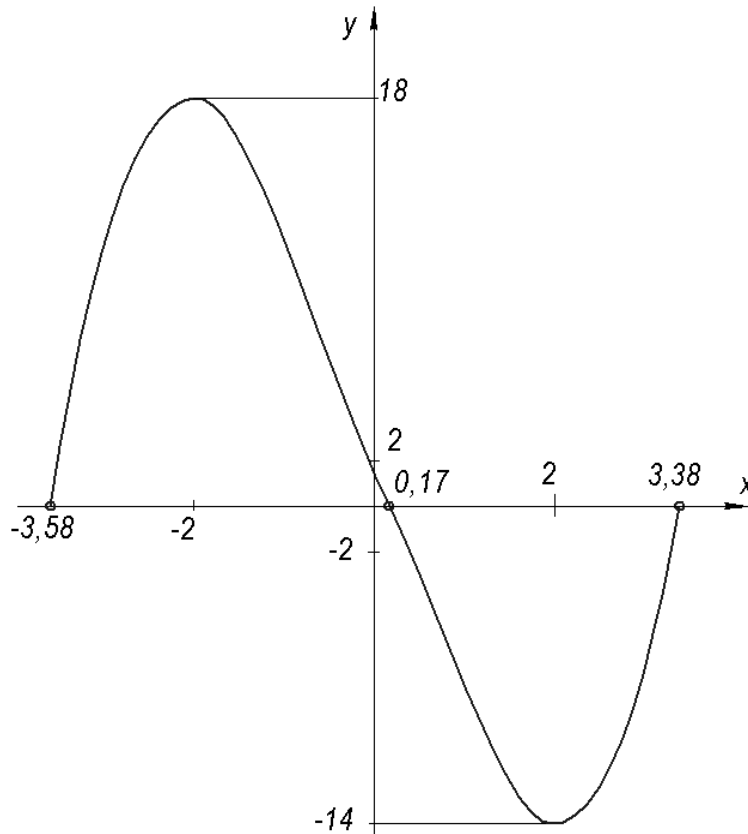


Рисунок 1.4 – Графік функції $y = x^3 - 12x + 2$

Для функції двох змінних (степені вільності – x та y) $z = x^2 + y^2 - 4x + 4$ (рисунок 1.5) необхідна умова екстремуму $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4 = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0$, звідки $x = 2$ і $y = 0$ (координати точки екстремуму).

Достатня умова: $H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ (це мінімум).

Це приклади пошуку екстремуму функції (однієї та двох змінних). Якщо шукається екстремум функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних, то з n степенями вільності.

Сформульовані задачі Дідони та про брахістохрону потребують пошуку функцій, які дають екстремум функціоналу.

Функціонал – це інтегральний оператор, який функції з деякого класу функцій ставить у відповідність число (функція – оператор, який ставить число у відповідність до числа).

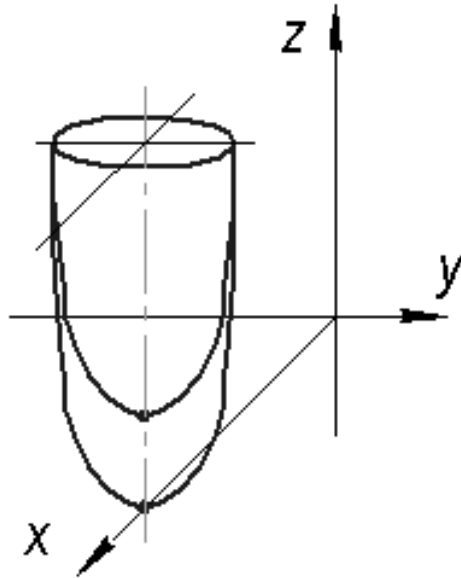


Рисунок 1.5 – Графік функції $z = x^2 + y^2 - 4x + 4$

Функції $y = x$; $y = \sin x$; $y = \ln x$ можуть бути подані як:

$y =$	←	$\frac{1}{\sin}$	←	x
		\ln		

При цьому числу x ставиться у відповідність число y .

Функціонал $I = \int_0^2 (y(x))^2 dx$ може бути поданий таким чином:

$I =$	←	$\int_0^2 (y(x))^2 dx$	←	$y(x)$
-------	---	------------------------	---	--------

Функції $y(x)$ ставиться у відповідність число

$$I = I(y) = \int_0^2 y^2(x) dx \quad (1.13)$$

– функціонал для функцій $y = f(x)$, які задані при $2 \geq x \geq 0$ і набувають кінцевого (або нескінченного, якщо інтеграл (1.13) сходиться) значення.

Якщо $y(x) = x^2$, то $I = \int_0^2 x^4 dx = 6,4$; якщо $y(x) = \sin x$, то

$$I = \int_0^2 \sin^2 x dx = \int_0^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = 1,19; \quad \text{якщо } y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}, \quad \text{то } I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{2} = 2,83$$

(рисунок 1.6).

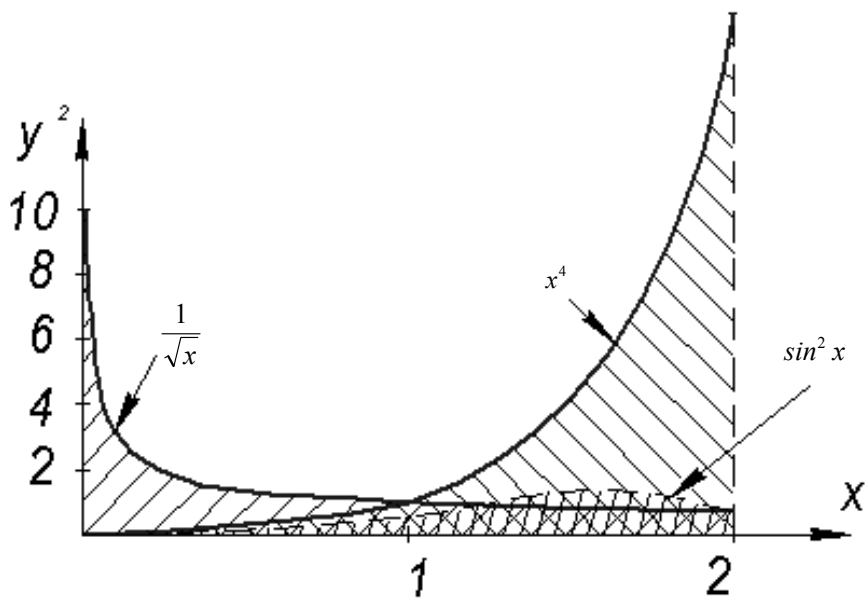


Рисунок 1.6 – До визначення функціонала

$I(y) = \int_0^2 (xy + y') dx$ – другий функціонал (лінійний), оскільки

$$I(Cy) = CI(y) \text{ і } I(y_1 + y_2) = I(y_1) + I(y_2).$$

$K(y) = \int_1^3 y^2 dx$ – ще один функціонал. Він не збігається з

$$I(y) = \int_0^2 y^2(x) dx \text{ (1.13), тому що заданий на іншому класі функцій } (1 \leq x \leq 3).$$

Оскільки функціонал – це число, яке залежить від функції, то можна проаналізувати зміну функціонала при переході від функції $y(x)$ до деякої іншої, близької функції $y(x) + \delta y(x)$ (рисунок 1.7) (варіювання функції). Розглянемо випадок $\delta y(x) = 0$ при $x = a$ і $x = b$.

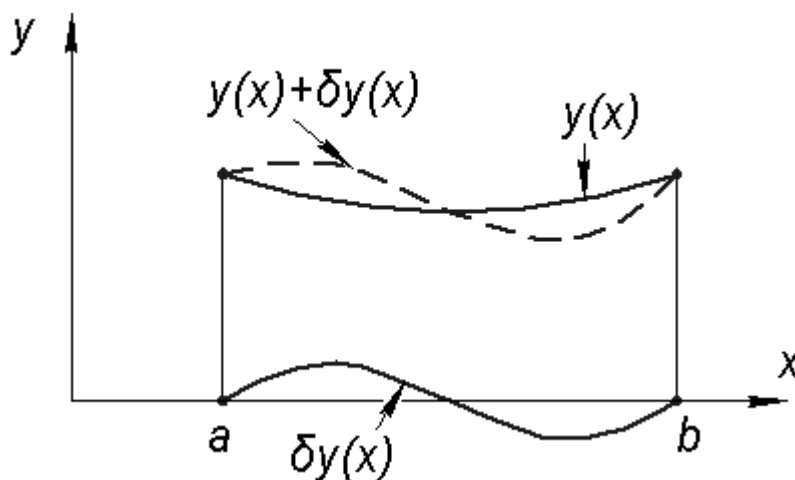


Рисунок 1.7 – До визначення варіації функціонала

Приріст функціонала

$$\Delta I = I(y + \delta y) - I(y). \quad (1.14)$$

Цей приріст можна подати у вигляді двох доданків: $\Delta I = I_1(y, \delta y) + R_1(y, \delta y)$. Перший доданок – лінійний функціонал відносно $\delta y(x) = 0$, другий – має вищий порядок малості.

Перший доданок і є варіація функціонала – лінійна частина приросту функціонала (аналог – диференціал функції як лінійна частина приросту функції).

Заміна приросту функціонала на варіацію – це лінеаризація функціонала.

Розглянемо функціонал

$$I(y) = \int_a^b F(x, y) dx. \quad (1.15)$$

Тоді приріст функціонала

$$\Delta I = \int_a^b [F(x, y + \delta y) - F(x, y)] dx. \quad (1.16)$$

На основі формули Тейлора $F(x, y + \delta y) = F(x, y) + F'_y(x, y)\delta y + R$.

З урахуванням цього варіація функціонала

$$\delta I = \int_a^b F'_y(x, y)\delta y dx. \quad (1.17)$$

Для функціонала

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.18)$$

повний приріст

$$\Delta I = \int_a^b [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx. \quad (1.19)$$

Формула Тейлора перетворює перший підінтегральний доданок до вигляду:

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y') = F(x, y, y') + F'_y(x, y, y')\delta y + F'_{y'}(x, y, y')\delta y' + R.$$

Тоді варіація функціонала

$$\delta I = \int_a^b [F'_y(x, y, y')\delta y + F'_{y'}(x, y, y')\delta y'] dx. \quad (1.20)$$

$\delta y'$ можна розуміти і як $\delta(y')$, і як $(\delta y)'$, оскільки похідна від різниці дорівнює різниці похідних.

Приклади:

1. $I = \int_0^2 y^2 dx$. Варіація функціонала $\delta J = 2 \int_0^2 y \delta y dx$.

2. $I = \int_0^1 \frac{x}{y^2} dx$. Варіація функціонала $\delta I = \int_0^1 x \frac{-2y}{y^4} \delta y dx = -2 \int_0^1 \frac{x \delta y dx}{y^3}$.

3. $I = \int_0^1 (xy + y'^2) dx$. Варіація функціонала $\delta I = \int_0^1 (x \delta y + 2y' \delta y') dx$.

4. $I = \int_0^1 (xyy') dx$. Варіація функціонала $\delta I = \int_0^1 [xy' \delta y + xy \delta y'] dx$.

На скільки «далекі» варіація та повний приріст функціонала?

Приклад

Для функціонала $I = \int_0^1 y^2 dx$. Нехай $y = 2x$; $\delta y = \alpha x^2$.

Повний приріст функціонала

$$\Delta I = \int_0^1 [(2x + \alpha x^2)^2 - (2x)^2] dx = \alpha + \frac{\alpha^2}{5}.$$

Варіація функціонала $\delta I = \int_0^1 2y \delta y dx = \int_0^1 4x \alpha x^2 dx = \alpha$.

Відхилення варіації від повного приросту наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Відхилення варіації від повного приросту

α	ΔI	δI	$\Delta, \%$
1	1,2	1	-17
-0,1	-0,098	-0,1	-2
0,01	0,01002	0,01	-0,2

2 УМОВА ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛА

2.1 Необхідна умова екстремуму функціонала. Рівняння Ейлера

Умова екстремуму функціонала аналогічна необхідній умові екстремуму функції однієї або кількох змінних: рівність нулю похідних ($y' = 0$; $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$; $\frac{\partial y}{\partial x_3} = 0$).

Припустимо, що деяка функція $y(x)$ реалізує локальний екстремум (мінімум або максимум) функціонала $I(y)$ у вибраному функціональному просторі (R). Причому функціонал $I(y)$ має варіацію $\delta I(y, \delta y)$, тобто допускає поблизу функції $y(x)$ лінеаризацію. Крім того, вважаємо, що розглядається внутрішній (неграничний) екстремум. Тоді для будь-якої $\delta y \in R$ має бути $\delta I(y, \delta y) = 0$.

З точністю до членів вищого порядку малості (оскільки функціонал допускає лінеаризацію) $\Delta I = \delta I$.

Якщо функція $y(x)$ реалізує мінімум, то при будь-яких δy $\delta y > 0$.

Для функціонала

$$I(y) = \int_a^b F(x, y) dx \quad \delta I = \int_a^b F'_y(x, y) \delta y dx. \quad (2.1)$$

Зміна знака δy у виразі (2.1) приводить до зміни знака δI , але $\delta y > 0$, оскільки є припущення, що функція $y(x)$ реалізує мінімум функціонала $I(y)$. Звідси випливає, що необхідна умова екстремуму функціонала $\delta I = 0$.

Для функціонала $I(y) = \int_a^b F(x, y) dx$ умова екстремуму $\delta I = 0$ або

$$\int_a^b F'_y(x, y) \delta y dx = 0.$$

Оскільки вибір варіації функції довільний, то з умови $\delta I = 0$ випливає

$$F'_y(x, y) = 0. \quad (2.2)$$

Приклади

Знайти функції, які дають мінімум функціоналам:

1. $I(y) = \int_0^l \left[\frac{k}{2} y^2 - f(x)y \right] \cdot dx.$

Це задача про форму ідеальної струни, точки якої пружно не пов'язані, з жорсткістю k , навантаженою навантаженням, розподіленим за законом $f(x)$ (рисунок 2.1):

$$F(x, y) = \frac{k}{2} y^2 - f(x)y; \quad F'_y = ky - f(x).$$

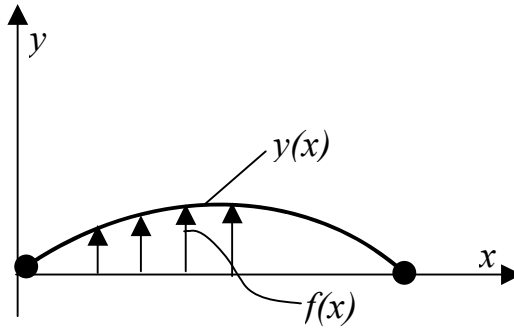


Рисунок 2.1 – Навантаження ідеальної струни

Умова екстремуму (2.2) приводить до рівняння $F'_y = ky - f(x) = 0$.

Розв'язання цього рівняння – $y = \frac{1}{k} f(x)$.

$$2. I(y) = \int_0^1 (1-x)(y-2x)^2 dx.$$

$$F(x, y) = (1-x)(y-2x)^2; F'_y = (1-x)2(y-2x).$$

Умова екстремуму (2.2) приводить до рівняння $(1-x)2(y-2x) = 0$.

Розв'язання цього рівня – $y = 2x$.

Для функціонала $I = \int_a^b F(x, y, y') dx$ необхідна умова екстремуму (1.19)

$$\delta J = \int_a^b \left[F'_y(x, y, y') \delta y + F'_{y'}(x, y, y') \delta y' \right] dx = 0. \quad (2.3)$$

Проінтегруємо другий доданок (2.3) по частинах:

$$\int_a^b \underbrace{F'_{y'}}_u \underbrace{\delta y' dx}_{dV} = F'_{y'} \int_a^b \delta y' dx - \int_a^b \frac{dF'_{y'}}{dx} dx \delta y;$$

$$u = F'_{y'}; \rightarrow du = \frac{d}{dx} F'_{y'} dx; dV = \delta y' dx \rightarrow V = \int_a^b \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) dx = \delta y \Big|_a^b$$

або

$$\int_a^b F'_{y'} \delta y' dx = F'_{y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dF'_{y'}}{dx} dx \delta y. \quad (2.4)$$

Перший доданок у виразі (2.3) $F'_{y'} \delta y = 0$, оскільки $\delta y|_{x=a} = 0$, і $\delta y|_{x=b} = 0$, оскільки на границях функція не варіюється.

Тоді умова екстремуму для функціонала

$$\delta I = \int_a^b \left[F'_y(x, y, y') \delta y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \delta y \right] dx = 0. \quad (2.5)$$

Звідси при довільних δy слідує

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0. \quad (2.6)$$

Оскільки $F(x, y, y')$, це рівняння має вигляд

$$F'_y(x, y, y') - F''_{xy'}(x, y, y') - F''_{y, y'}(x, y, y') y' - F''_{y', y'}(x, y, y') y'' = 0. \quad (2.7)$$

Це рівняння Ейлера, яке дозволяє обчислити стаціонарне значення функціонала $I = \int_a^b F(x, y, y') dx$.

Приклад

Траєкторія скатування матеріальної точки за мінімальний час (рисунок 2.1).

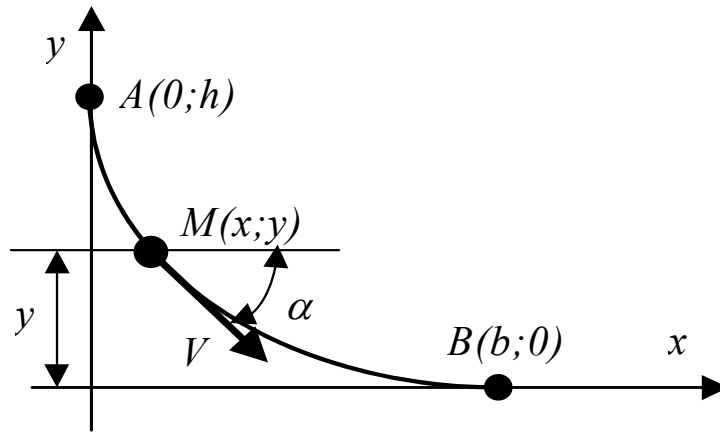


Рисунок 2.1 – До визначення траєкторії скатування матеріальної точки

Час скатування (визначено як (1.8)):

$$T = \int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} dx \quad (2.8)$$

при граничних умовах $y(0) = h$; $y(b) = 0$

$$F_{(x, y, y')} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}} = F_{(y, y')}. \quad (2.9)$$

З урахуванням того, що функціонал має вигляд $F_{(y, y')}$, рівняння Ейлера для мінімуму функціонала подається як

$$F'_y(y, y') - F''_{y, y'}(y, y') y' - F''_{y', y'}(y, y') y'' = 0. \quad (2.10)$$

Помножимо ліву частину рівняння (2.10) на y' :

$$F'_y(y, y') y' - F''_{y, y'}(y, y') y' y' - F''_{y', y'}(y, y') y'' y' = 0. \quad (2.11)$$

Рівняння (2.11) можна переписати так:

$$F(y, y') - F'_{y'} y' = 0 \quad (2.12)$$

$$\left[F'_y(y, y') y' + F'_{y'}(y, y') y'' - F''_{y'y'} y'' y' - F''_{y'y'} y' y'' - F'_{y'} y'' = 0 \right].$$

Інтегрування рівняння (2.12) приводить до результату

$$F - F'_{y'} y' = C_1. \quad (2.13)$$

З урахуванням вигляду функції (2.9) рівняння (2.13) набуває вигляду

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h-y)}} - \frac{y'y'}{\sqrt{2g(h-y)}\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)[2g(h-y)]}} = C_1. \quad (2.14)$$

Як розв'язувальне рівняння задачі отримали нелінійне (y'^2) диференціальне рівняння, яке пов'язує y і y' .

Застосуємо підстановку

$$y = h - r(1 - \cos t), \quad (2.15)$$

де $r = \frac{1}{4gC_1^2}$.

З урахуванням цього рівняння (2.14) має такий вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \sqrt{2g(h-y)} = C_1 \sqrt{2g[h-h+r(1-\cos t)]} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$$

або

$$1 + y'^2 = \frac{2}{1 - \cos t}. \quad (2.16)$$

Перетворюючи рівняння (2.16), отримаємо

$$y'^2 = \frac{2-1+\cos t}{1-\cos t} = \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2},$$

звідки

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sin t}{1-\cos t}. \quad (2.17)$$

З рівняння (2.17) випливає

$$dx = \pm \frac{1-\cos t}{\sin t} dy = \pm \frac{1-\cos t}{\sin t} \cdot (-r \cdot \sin t \cdot dt) = \pm r(1-\cos t) dt. \quad (2.18)$$

Після інтегрування рівняння (2.18) отримаємо

$$x = \pm r(1 - \sin t) + C_2$$

або

$$x = \pm \frac{t - \sin t}{4gC_1^2} + C_2 \quad (2.19)$$

З урахуванням (2.15)

$$y = h - \frac{1 - \cos t}{2gC_1^2}, \quad (2.20)$$

де C_1 і C_2 визначають із граничних умов: при $x=0$ $y=h$; при $x=a$ $y=0$.

Рівняння (2.19) і (2.20) – це циклоїда, записана в параметричному вигляді (рисунок 2.2).

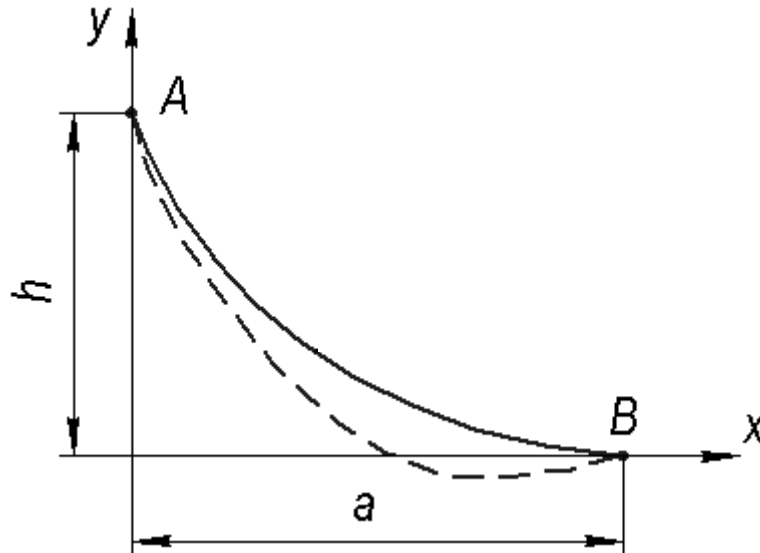


Рисунок 2.2 – Траєкторія якнайшвидшого скочування матеріальної точки

При $t=0$ з виразу (2.19) слідує $x=C_2=0$, а з формули (2.20) – $y=h$.
При цьому

$$a = \pm \frac{t - \sin t}{4gC_1^2}; \quad (2.21)$$

$$0 = h - \frac{1 - \cos t}{2gC_1^2}. \quad (2.22)$$

З рівняння (2.21) отримаємо

$$C_1^2 = \frac{1 - \cos t}{4gh}. \quad (2.23)$$

Підстановка (2.23) в рівняння (2.22) приводить до рівняння, з якого може бути знайдений мінімальний час скочування матеріальної точки t

$$a(1 - \cos t) = h(t - \sin t). \quad (2.24)$$

Для наближеного розв'язання рівняння (2.24) тригонометричні функції можуть бути наведені у вигляді рядів, що з утриманням перших двох членів рядів приводить до рівняння

$$a \left(1 - 1 + \frac{t^2}{2} \right) = h \left(t - t + \frac{t^3}{6} \right),$$

звідки випливає

$$t = \frac{3a}{h} \quad (2.25)$$

і

$$C_1 = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{3a}{h}\right)}{4gh}}.$$

2.2 Функціонали з похідними вищих порядків

Для функціонала

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx \quad (2.26)$$

з граничними умовами

$$y|_{x=a} = y_a; \quad y|_{x=b} = y_b; \quad y'|_{x=a} = y'_a; \quad y'|_{x=b} = y'_b \quad (2.27)$$

варіація функціонала має вигляд:

$$\delta I = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y' + F'_{y''} \delta y'') dx. \quad (2.28)$$

Необхідна умова екстремуму $\delta I = 0$, аналогічна попередній (два рази інтегруємо по частинах), приводить до рівняння

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} = 0. \quad (2.29)$$

Приклад

Визначити форму прогину бруса під дією довільно розподіленого поперечного навантаження (рисунок 2.3).

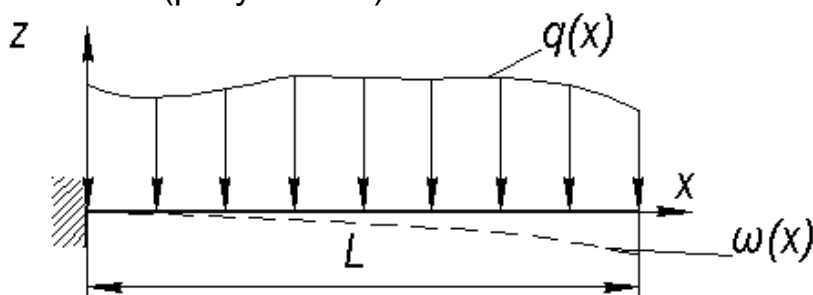


Рисунок 2.3 – До визначення форми прогину бруса

Форму прогину бруса визначають з умови мінімуму повної енергії бруса.

Повна енергія бруса

$$\Pi = U - W, \quad (2.30)$$

де U – потенціальна енергія бруса; W – робота зовнішніх сил.

Потенціальна енергія деформації бруса

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_x^2 dV. \quad (2.31)$$

Відносна деформація при згинанні бруса виражається через відстань точки перетину від нейтральної осі і кривизну деформованого бруса

$$\varepsilon_x = Z \frac{1}{\rho} = Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.32)$$

де w – прогин бруса; Z – відстань точки в поперечному перетині від нейтральної осі; ρ – радіус кривизни деформованого бруса (рисунок 2.4).

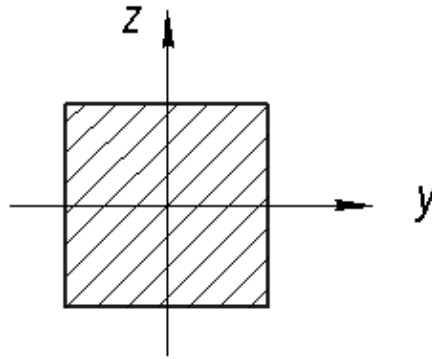


Рисунок 2.4 – Система координат у перетині бруса

З урахуванням цього потенціальна енергія деформованого бруса

$$U = \frac{E}{2} \int_0^l \int Z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy dz = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (2.33)$$

Робота зовнішніх сил, які прикладені до бруса,

$$W = \int_0^l q w dx. \quad (2.34)$$

З урахуванням (2.30), (2.33) і (2.34) повна енергія бруса

$$\Pi = \int_0^l \left[\frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - q w \right] dx. \quad (2.35)$$

Необхідна умова екстремуму функціонала Π (2.29) з урахуванням виразу (2.35) приводить до рівняння Ейлера

$$F'_w + \frac{d^2}{dx^2} F'_{w''} = 0, \quad F'_w + \frac{d^2}{dx^2} F'_{w''} = 0$$

або

$$-q + \frac{EJ}{2} \cdot 2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)'' = 0, \quad (2.36)$$

тобто умова екстремуму функціонала – це диференціальне рівняння пружної лінії бруса

$$EIw^{IV} - q = 0. \quad (2.37)$$

Розв'язання цього рівняння (функції прогину бруса) можна отримати шляхом інтегрування рівняння $w^{IV} = \frac{q(x)}{EI}$:

$$w''' = \int \frac{q(x)}{EI} dx + C_1;$$

$$w'' = \int \left(\int \frac{q(x)}{EI} dx \right) dx + C_1x + C_2;$$

$$w' = \int \left[\int \left(\int \frac{q(x)}{EI} dx \right) dx \right] dx + C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

$$w = \int \left\{ \int \left[\int \left(\int \frac{q(x)}{EI} dx \right) dx \right] dx \right\} dx + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

3 ЗАДАЧІ НА ЕКСТРЕМУМ ДЛЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

3.1 Функціонал від функцій декількох змінних

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$, які задані в деякій області

$G(x, y) \in G$, функціонал, аналогічний $I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y') dx$, запишемо як

$$I\{z\} = \int_G F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dG. \quad (3.1)$$

Варіація функціонала (3.1) має вигляд

$$\delta I = \int_G \left(F'_z \delta z + F'_p \delta \frac{\partial z}{\partial x} + F'_q \delta \frac{\partial z}{\partial y} \right) dG, \quad (3.2)$$

де $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Гранична умова для функціонала визначається завданням функції $z = f(x, y)$ на контурі Γ (рисунок 3.1).

Необхідна умова екстремуму функціонала (3.1) $\delta I = 0$.

Інтегрування по частинах варіації функціонала (3.2) з урахуванням того, що δz довільна, приводить до рівняння Ейлера для екстремуму функціонала (3.1) у вигляді

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = 0. \quad (3.3)$$

Рівняння (3.3) отримано М. В. Остроградським в 1834 році.

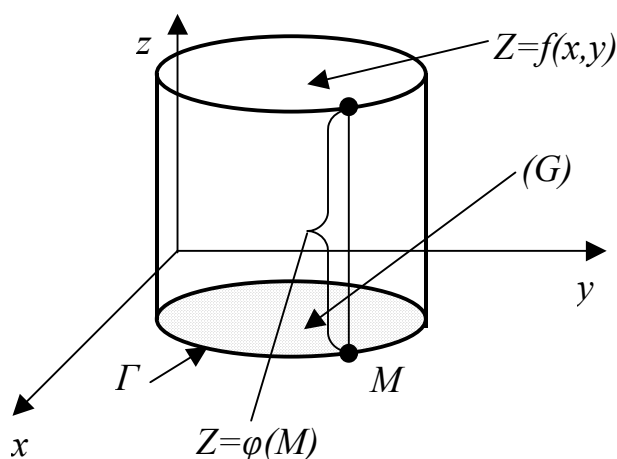


Рисунок 3.1 – До екстремуму функціонала від функцій двох змінних

Розгорнута форма цього рівняння з урахуванням того, що

$$z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y):$$

$$F''_{pp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2F''_{pq} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + F''_{qq} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F''_{zp} \frac{\partial z}{\partial x} + F''_{zq} \frac{\partial z}{\partial y} + F''_{xp} + F''_{yq} - F'_z = 0. \quad (3.4)$$

Аналогічно для функціонала

$$I\{z\} = \int_G F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) dG, \quad (3.5)$$

при граничній умові $z|_{M \in (\Gamma)} = \varphi(M)$, $\frac{\partial z}{\partial n}|_{M \in (\Gamma)} = \varphi'(M)$ рівняння Ейлера матиме вигляд

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F'_r + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F'_s + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F'_t = 0, \quad (3.6)$$

де $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Приклад

Визначення форми рівноваги мембрани, натягнутої на жорсткий контур. Мембрана однорідна, ізотропна і натягнута із зусиллям T на одиницю довжини (рисунок 3.2).

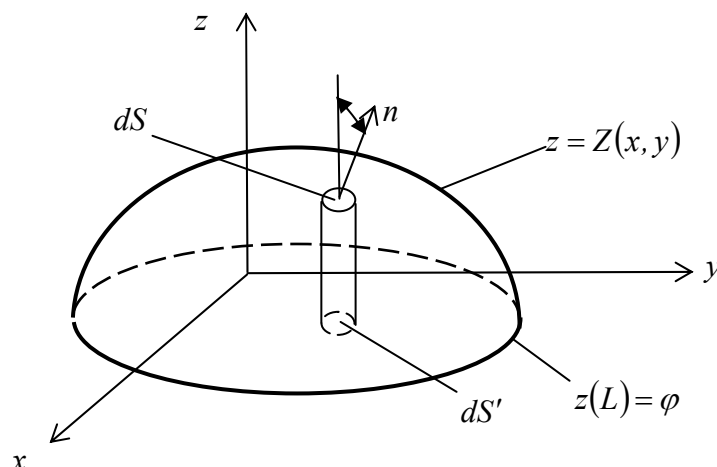


Рисунок 3.2 – До постановки задачі про форму натягнутої мембрани

Площа поверхні, що описується рівнянням $z = Z(x, y)$:

$$S = \int \frac{dS'}{\sigma \cos \left(\overset{\wedge}{n, z} \right)}. \quad (3.7)$$

З урахуванням того, що $\cos \left(\overset{\wedge}{n, z} \right) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{z}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{z}|}$, $\vec{n} = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{k}$,

$$\vec{z} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$$

$$S = \int_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (3.8)$$

Збільшення площі поверхні мембрани в результаті деформування (при зміні її форми від плоскої)

$$\Delta S = \int_{\sigma} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} - 1 \right) dx dy. \quad (3.9)$$

Розкладення в ряд ($\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$) і відкидання членів вищого порядку меншості приводить до залежності

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy. \quad (3.10)$$

Робота сил натягнення, яка здійснюється в процесі деформування:

$$A = \frac{T}{2} \int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy. \quad (3.11)$$

Такою ж буде потенціальна енергія. Її мінімуму відповідає форма поверхні мембрани $z = Z(x, y)$.

Отже, рівновагу мембрани визначають із умови мінімуму функціонала (3.11) $F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Умова екстремуму цього функціонала з урахуванням (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} F'_p + \frac{\partial}{\partial y} F'_q = 0$$

або

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Із залежності (3.12) випливає рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad (3.13)$$

Отже, рівновага натягнутої на контур $z(L) = \varphi(x, y)$ мембрани описується рівнянням (3.13) при граничній умові $z(L) = \varphi(x, y)$.

3.2 Умовний екстремум функціонала

Розглянемо умовний екстремум функції $z = f(x, y)$ за умови, що змінні x та y пов'язані $F(x, y) = C$ (рисунок 3.3).

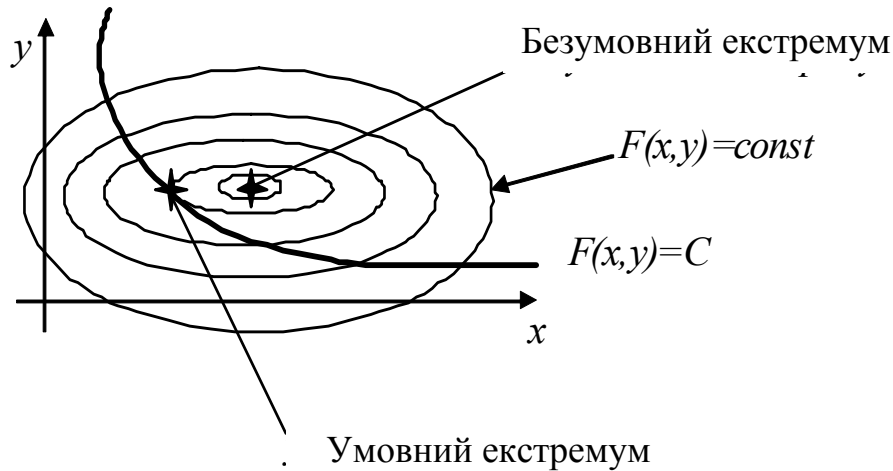


Рисунок 3.3 – До визначення умовного екстремуму

Якщо рівняння зв'язку

$$F(x, y) = C \quad (3.14)$$

можна подати у вигляді $y = \varphi(x)$, то $z = f(x, y)$ можна записати як $z = f(x, \varphi(x))$ і можна застосувати умову безумовного екстремуму.

Але це можна зробити не завжди, а звідси видно, що z – складна функція.

Для складної функції умова екстремуму

$$\frac{dz}{dx} = f'_x + f'_y \frac{dy}{dx} = 0, \quad (3.15)$$

де $\frac{dy}{dx}$ – похідна неявної функції $F(x, y) = C$.

Для неявної функції

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (3.16)$$

Підставивши (2.3) в рівняння (3.15), отримаємо $f'_x - f'_y \cdot \frac{F'_x}{F'_y} = 0$,

тобто

$$\frac{f'_x}{F'_x} = \frac{f'_y}{F'_y} = -\lambda, \quad (3.17)$$

(λ – невідомий параметр [знак (-) для зручності λ може бути (\pm)]).

Тоді

$$\begin{cases} f'_x + \lambda F'_x = 0 \\ f'_y + \lambda F'_y = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

в точці екстремуму.

Побудуємо функцію

$$f^*(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot F(x, y), \quad (3.19)$$

де λ – невідомий параметр – множник Лагранжа.

Для функції (3.19) умови екстремуму (3.18) запишемо як:

$$\left. \begin{aligned} f_x^{*'} &= 0; \\ f_y^{*'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

тобто як умови безумовного екстремуму (3.18).

Рівняння (3.20) разом із рівнянням зв'язку (3.14) утворюють систему рівнянь для визначення x, y та λ .

Аналогічно досліджують умовний екстремум для функції декількох змінних і при будь-якій кількості зв'язків:

$$f(x, y, z, u) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} F_1(x, y, z, u) = 0 \\ F_2(x, y, z, u) = 0 \end{cases};$$

$$\Downarrow$$

$$f^* = f(x, y, z, u) + \lambda_1 \cdot F_1 + \lambda_2 \cdot F_2.$$

Умови екстремуму:

$$\begin{aligned} f_x^{*'} = 0; & \quad f_z^{*'} = 0; & \quad F_1 = 0; \\ f_y^{*'} = 0; & \quad f_u^{*'} = 0; & \quad F_2 = 0. \end{aligned} \quad (6 \text{ рівнянь, } 6 \text{ невідомих})$$

Для функціонала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx \quad (3.21)$$

при додатковій умові

$$\int_a^b G(x, y, y') dx = K, \quad (3.22)$$

де $G(x, y, y')$ – задана функція, K – задане число.

Застосовуючи наведений вище підхід, отримаємо, що ця задача відповідає задачі про безумовний екстремум для функціонала:

$$\int_a^b F(x, y, y') dx + \lambda \int_a^b G(x, y, y') dx = \int_a^b (F + \lambda G) dx. \quad (3.23)$$

Отже, задача зводиться до пошуку екстремуму функціонала

$$\int_a^b F^*(x, y, y') dx, \quad (3.24)$$

де $F^*(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')$.

Аналогічно ці результати можна розповсюдити на функціонали інших видів.

Приклад. Задача Дідони

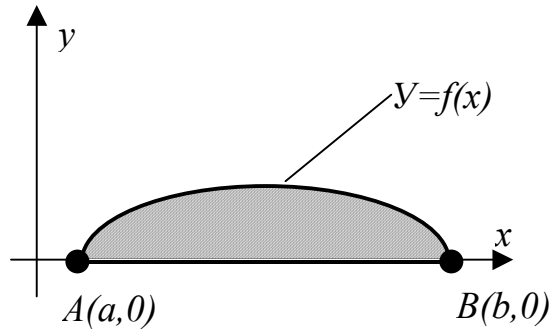


Рисунок 3.4 – До постановки задачі Дідони

Площа поверхні суші

$$S = \int_a^b y(x) dx \rightarrow \max \quad (3.25)$$

при обмеженні на довжину лінії, яка оперезає сушу,

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = L. \quad (3.26)$$

Задача про умовний екстремум функціонала (3.25) за наявності зв'язку (3.26) зводиться до пошуку безумовного екстремуму функціонала

$$\int_a^b \left(y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx. \quad (3.27)$$

Функціонал $F^*(y, y')$ залежить від функції та її похідної

$$F^* = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}. \quad (3.28)$$

Рівняння Ейлера для цієї варіаційної задачі має вигляд

$$F_y^* - \frac{d}{dx} F_{y'}^* = 0. \quad (3.29)$$

Оскільки функціонал $F^*(y, y')$ залежить від функції та її похідної, то рівняння Ейлера можна переписати у вигляді

$$\left(F^* - F_{y'}^* \cdot y' \right)' = 0, \quad (3.30)$$

а розв'язання його має вигляд

$$F^* - F_{y'}^* \cdot y' = C_1. \quad (3.31)$$

З рівняння (3.31) з урахуванням (3.28) випливає

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - \lambda \frac{2y'}{2 \cdot \sqrt{1 + y'^2}} \cdot y' = C_1. \quad (3.32)$$

Після перетворення отримаємо

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1, \quad (3.33)$$

звідки

$$\lambda^2 = (1 + y'^2)(C_1 - y)^2. \quad (3.34)$$

Із залежності (3.34) виходить $y'^2 = \frac{\lambda^2}{(C_1 - y)^2} - 1$

та

$$y' = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - (C_1 - y)^2}}{C_1 - y}. \quad (3.35)$$

Рівняння (3.35) може бути записано у вигляді

$$\pm \frac{dy(C_1 - y)}{\sqrt{\lambda^2 - (C_1 - y)^2}} = dx. \quad (3.36)$$

Після інтегрування рівняння (3.36) одержуємо розв'язок у вигляді

$$\pm \sqrt{\lambda^2 - (C_1 - y)^2} = x + C_2. \quad (3.37)$$

Рівняння (3.37) є рівнянням окружності.

Для визначення сталих C_1, C_2 і множника Лагранжа λ використовують граничні умови: при $x = A$ $y = 0$, при $x = B$ $y = 0$ та рівняння зв'язку

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = L.$$

3.3 Прямі методи розв'язання варіаційних задач

При класичному розв'язанні варіаційних задач мінімізація (або знаходження максимуму) використовують умови екстремуму функціонала, які приводять до рівнянь Ейлера.

Це диференціальне рівняння. Вони можуть бути нелінійними, і їх (особливо для функцій декількох змінних) не завжди вдається розв'язати в квадратурах.

Крім класичного шляху для розв'язання варіаційних задач використовують:

- наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь;
- методи розв'язання варіаційної задачі без переходу до рівняння Ейлера (прямі методи): Рітца (1908 р.), Рітца – Тимошенка (1910 р.)

Нехай маємо функціонал

$$I_{(y)} = \int_a^b F(x, y) dx \quad (3.38)$$

при граничних умовах

$$F(a) = F_a; F(b) = F_b. \quad (3.39)$$

Шукану функцію $y(x)$, яка реалізує екстремум функціонала (3.38), наводять у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad (3.40)$$

де $\varphi_i(x)$ вибрані з урахуванням задоволення граничних умов (3.39).

На практиці зручніше подавати функцію $y(x)$ у вигляді

$$y(x) = a_0 \varphi_{0(x)} + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad (3.41)$$

де $\varphi_{0(x)}$ – функція, що задовольняє граничні умови (3.40); $\varphi_i(x)$ – функції з однорідними граничними умовами ($\varphi_i|_{x=a} = 0$; $\varphi_i|_{x=b} = 0$).

Якщо підставити шукану функцію (3.40) або (3.42) у функціонал (3.38), то отримаємо:

$$I(a_i) = \int_a^b F(x, a_i) dx = \Phi(a_i). \quad (3.42)$$

При цьому задача пошуку екстремуму функціонала (3.38) перетворюється на задачу про екстремум функції n змінних a_i (3.40) або (3.42).

Необхідна умова екстремуму функціонала (3.38) набуває вигляду:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0. \quad (3.43)$$

Залежності (3.43) являють собою систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a_i .

Для функціонала з функцією декількох змінних

$$I = \int_r F(x, y, u, v) ds \quad (3.44)$$

з граничними умовами

$$F(r) = \Psi(x, y) \quad (3.45)$$

шукані функції можуть бути задані у вигляді

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i(x, y); v = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \varphi_i(x, y). \quad (3.46)$$

Це приводить до переведення функціонала в функцію декількох змінних

$$I(a_i, b_i) = \int_r F(x, y, a_i, b_i) ds = \Phi(a_i, b_i). \quad (3.47)$$

Умова екстремуму для (3.47)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_i} = 0. \quad (3.48)$$

Прямі методи лінеаризації функціоналів застосовують для квадратичних функціоналів, оскільки приводять до розв'язання систем лінійних рівнянь.

4 СИНТЕЗ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

4.1 Основні закони механіки деформівного твердого тіла

Закон рівноваги

Якщо тіло знаходиться у рівновазі під дією заданих зовнішніх навантажень, то в рівновазі знаходиться будь-яка нескінченно мала частина тіла.

Математично цей закон виражається у формі рівнянь Нав'є:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; & \tau_{xy} &= \tau_{yx}; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; & \tau_{yz} &= \tau_{zy}; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; & \tau_{zx} &= \tau_{xz}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

де $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – нормальні і дотичні напруження (рисунок 4.1); X, Y, Z – компоненти об'ємної сили, віднесені до одиниці об'єму; ρ – щільність; u, v, w – переміщення в напрямку координатних осей x, y і z .

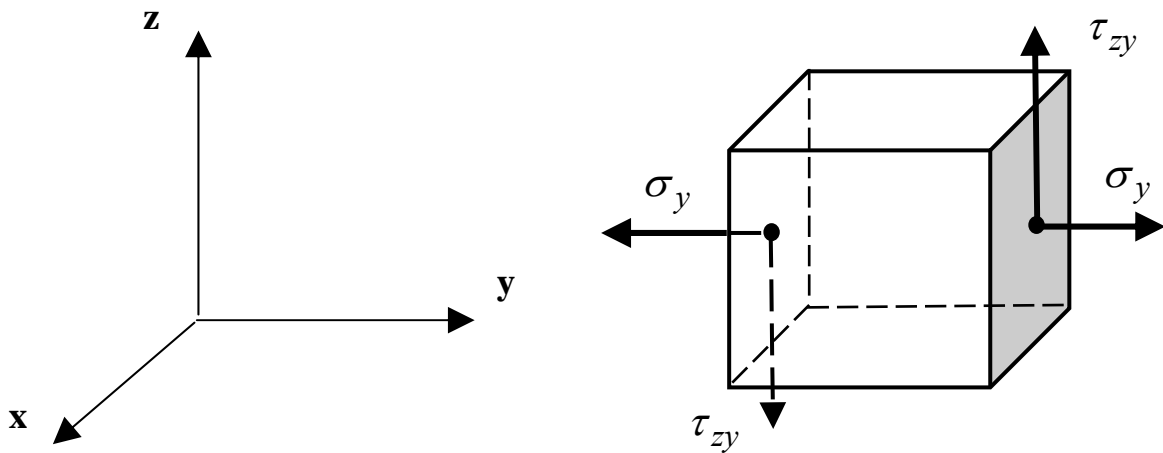


Рисунок 4.1 – Позитивні напрямки напружень

Умови на поверхні. За допомогою цих умов, що виражені в напруженнях, встановлюють зв'язок між компонентами напружень на площадці з нормаллю ν і компонентами напружень всередині тіла:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $p_{x\nu}, p_{y\nu}, p_{z\nu}$ – компоненти напружень на площадці з нормаллю ν ; l, m, n – напрямні косинуси на площадці (рисунок 4.2).

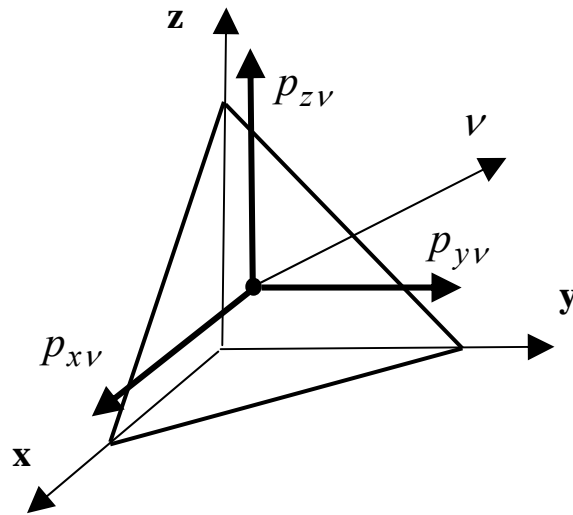


Рисунок 4.2 – Напрямки компонент напружень на площадці

Головні напруження. Головними площадками називаються площадки, на яких відсутні дотичні напруження. При цьому повне напруження на ділянці збігається з нормальним напруженням:

$$p_v = \sigma_v = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2}. \quad (4.3)$$

Головні напруження на головних площадках $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ визначають з рівняння

$$\sigma^3 + \sigma^2 \sigma^I + \sigma \sigma^{II} + \sigma^{III} = 0, \quad (4.4)$$

де $\sigma^I, \sigma^{II}, \sigma^{III}$ – інваріанти тензора напружень;

$$\begin{aligned} \sigma^I &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ \sigma^{II} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ \sigma^{III} &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

або, виражаючи інваріанти через головні напруження, отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma^I &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ \sigma^{II} &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ \sigma^{III} &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Геометричні рівняння деформації. Ці рівняння (рівняння Коші) пов'язують компоненти переміщень у точці деформівного твердого тіла з компонентами деформацій. При малих переміщеннях (для геометрично лінійних задач) ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – нормальні деформації; $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – зсувні деформації.

У нелінійній теорії пружності при розв'язанні геометрично нелінійних задач

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Головні деформації. Головні деформації $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ – це деформації на площадках, де відсутні зсувні деформації. Їх визначають з рівняння

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^2 \varepsilon^I + \varepsilon \varepsilon^{II} + \varepsilon^{III} = 0, \quad (4.9)$$

де $\varepsilon^I, \varepsilon^{II}, \varepsilon^{III}$ – інваріанти тензора деформацій

$$\varepsilon^I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z;$$

$$\varepsilon^{II} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2); \quad (4.10)$$

$$\varepsilon^{III} = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2).$$

В ізотропному тілі площадки головних напружень і головних деформацій збігаються.

Площинки, що рівнонахилені до площадок головних деформацій, називаються октаедричними. На них відносні подовження

$$\varepsilon_{окт} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (4.11)$$

В октаедричних площинах зсуви

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (4.12)$$

Інтенсивність деформацій

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\mu)} \gamma_{окт}, \quad (4.13)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Закон суцільності

Деформівне тверде тіло залишається суцільним на всіх етапах деформування. Математично цей закон виражається у вигляді рівнянь нерозривності Сен-Венана.

За допомогою першої групи цих рівнянь встановлюється зв'язок між лінійними і зсувними деформаціями шару тіла:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}. \quad (4.14)$$

За допомогою другої групи рівнянь Сен-Венана встановлюють зв'язок між деформаціями шарів тіла:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Фізичний зміст цих рівнянь полягає в тому, що не можна незалежно задавати компоненти деформацій твердого тіла, оскільки може порушитися нерозривність переміщень.

Фізичний закон

За допомогою цього закону встановлюють зв'язок між напруженнями і деформаціями та визначають матеріал тіла. В лінійній теорії пружності анізотропного тіла зв'язок деформацій і напружень виглядає так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{zx} + a_{36}\tau_{xy}; \\ \gamma_{yz} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{zx} + a_{46}\tau_{xy}; \\ \gamma_{zx} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{zx} + a_{56}\tau_{xy}; \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{zx} + a_{66}\tau_{xy}\end{aligned}\tag{4.16}$$

або

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\},\tag{4.17}$$

де a_{ij} – пружні сталі матеріалу; $[a]$ – матриця сприйнятливості матеріалу.

Виразивши у фізичному законі (4.17) напруження через деформації, отримаємо

$$\{\sigma\} = [a]^{-1}\{\varepsilon\} = [A]\{\varepsilon\},\tag{4.18}$$

де $[A] = [a]^{-1}$ – матриця жорсткості матеріалу.

У загальному випадку лінійний фізичний закон містить 36 пружних сталих a_{ij} . При припущенні існування пружного потенціалу ($a_{ij} = a_{ji}$) кількість пружних сталих дорівнює 21, із них незалежних – 18.

Площина пружної симетрії є окремим випадком загального вигляду фізичного закону. При цьому в тілі існує площина, відносно якої характеристики матеріалу однакові. Кількість пружних сталих дорівнює 13 (незалежних – 12). Коефіцієнти $a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0$.

Три площини пружної симетрії – ортотропне тіло. Кількість пружних сталей дорівнює 9 (усі незалежні). Коефіцієнти $a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = a_{34} = a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0$.

Фізичний закон для опису ортотропного тіла через фізичні сталі записують у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\mu_{21}}{E_2} \sigma_y - \frac{\mu_{31}}{E_3} \sigma_z; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{23}}; \\ \varepsilon_y &= -\frac{\mu_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\mu_{32}}{E_3} \sigma_z; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G_{13}}; \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{\mu_{23}}{E_2} \sigma_y + \frac{\sigma_z}{E_3}; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{12}},\end{aligned}\quad (4.19)$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності матеріалу в напрямку осей x, y і z ; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модулі зсуву матеріалу в площинах yz, xz та xy ; $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу в площинах xy, xz та yz .

Ізотропне тіло – тіло, в якому всі напрямки є пружно-еквівалентними. Число незалежних констант в ізотропному тілі дорівнює двом.

Фізичний закон для ізотропного тіла записуємо у вигляді

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G},\end{aligned}\quad (4.20)$$

де E і G – модулі пружності першого і другого роду, μ – коефіцієнт Пуассона.

Пружні сталі, що входять в рівняння (4.20), пов'язані співвідношенням

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (4.21)$$

4.2 Методи розв'язання задач математичної теорії пружності

Три закони теорії пружності містять 15 рівнянь (3 рівняння рівноваги (4.1), 6 рівнянь Коші (4.7) або Сен-Венана (4.14), (4.15) і 6 рівнянь фізичного закону у вигляді (4.16), (4.19) або (4.20)). У цих 15 рівняннях міститься 15 невідомих функцій:

- 6 компонент напружень ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$);
- 6 компонент деформацій ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$);
- 3 компоненти переміщень (u, v, w).

Для розв'язання загальної задачі такі рівняння треба застосовувати до кожної точки всередині деформівного твердого тіла і разом з гранични-

ми умовами в граничних точках на зовнішній та (або) внутрішній поверхні тіла.

Залежно від того, що приймають як невідомі (переміщення або напруження) і в якому вигляді задають граничні умови (статичні або кінематичні), загальну пряму задачу теорії пружності розв'язують одним із трьох методів: переміщень, сил або змішаним.

Оберненою задачею теорії пружності називають задачу, в якій за відомими функціями (напружень, переміщень), справедливими для всієї області тіла, знаходять умови на поверхні, яким відповідають ці функції.

4.3 Плоска задача теорії пружності

Усі основні рівняння теорії пружності значно спрощуються в двох окремих випадках: плоского напруженого стану і плоскої деформації.

При плоскому напруженому стані вважають, що напруження σ_z, τ_{xz} і τ_{yz} дорівнюють нулю на обох плоских поверхнях тіла і, отже, їх можна приймати такими, що дорівнюють нулю по всій товщині тіла (рисунок 4.3). Цю модель застосовують до тіл, один із розмірів яких (товщина δ) набагато менший двох інших.

При плоскому напруженому стані умови (4.2) на поверхні мають вигляд

$$\begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \quad (4.22)$$

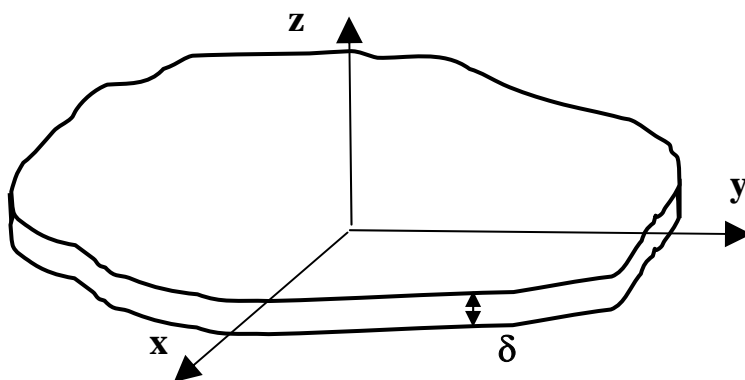


Рисунок 4.3 – Визначення плоского напруженого стану

Рівняння рівноваги замість (4.1) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Рівняння Коші (4.7) для описування плоского напруженого стану такі:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.24)$$

Рівняння спільності деформацій, що виходять з (4.14), записуємо у вигляді

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.25)$$

З урахуванням того, що $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, з фізичного закону, наприклад у вигляді (4.20), виходить

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x + \sigma_y); \quad \varepsilon_z = \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4.26)$$

При плоскій деформації вважають, що $w=0$, а переміщення u і v не залежать від координати z . Ця модель описує тіла, один із розмірів яких набагато більший двох інших (рисунок 4.4).

При плоскій деформації з урахуванням того, що $\varepsilon_z = 0$, з фізичного закону (4.20) випливає $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$, у зв'язку з цим

$$\varepsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right); \quad \varepsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E} \left(-\frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x + \sigma_y \right); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4.27)$$

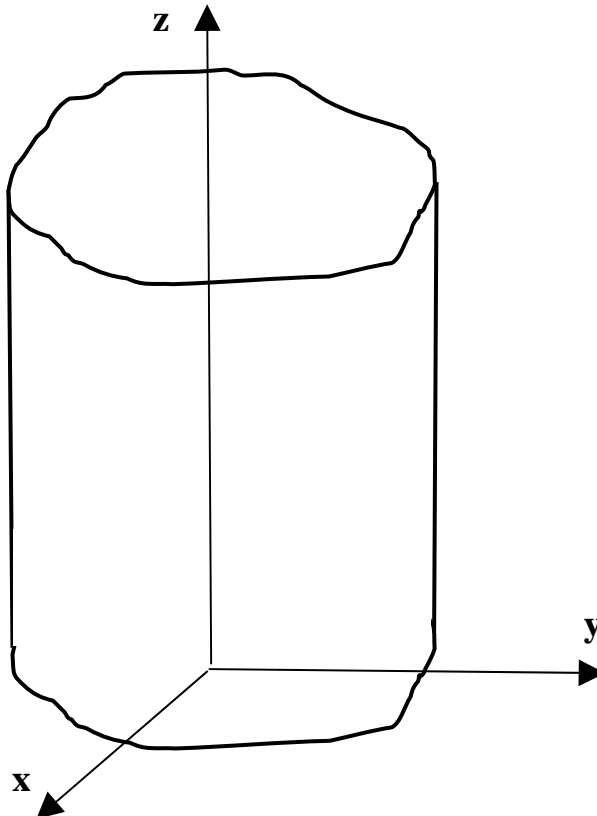


Рисунок 4.4 – До визначення плоскої деформації

5 ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

5.1 Принцип Сен-Венана

Напружено-деформований стан у тілі від статично еквівалентної системи навантажень, прикладених до невеликої частини поверхні тіла, на видаленні від місця прикладання навантажень практично не залежить від конкретного способу їх прикладання (рисунок 5.1).

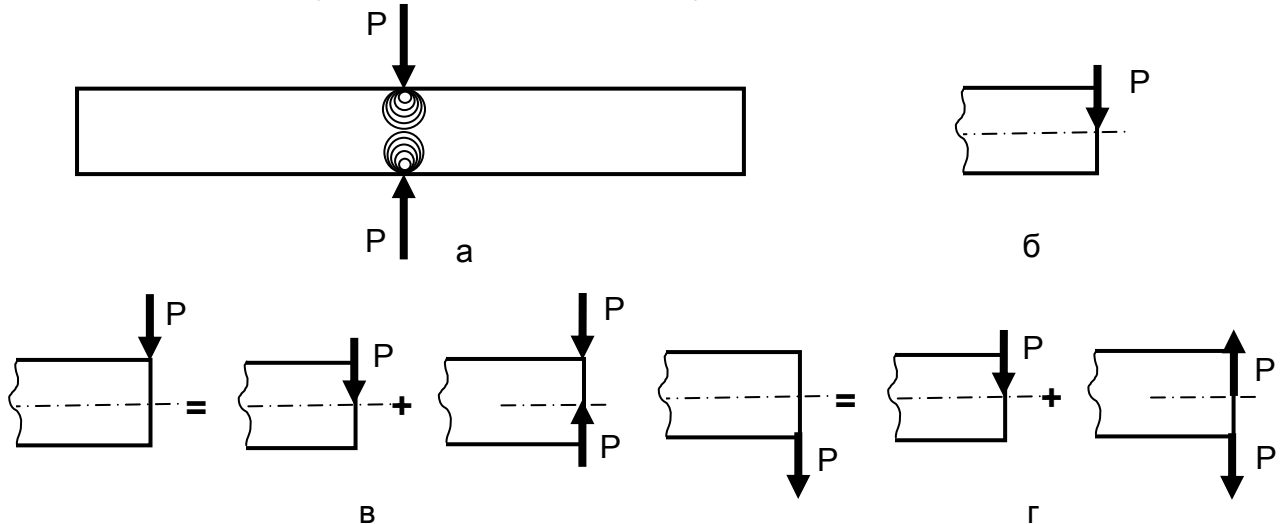


Рисунок 5.1 – Самоурівноважена система навантажень (а) і розкладання навантаження на урівноважене і самоурівноважене (в) і (г)

5.2 Принцип суперпозиції (незалежності дії сил)

Напружено-деформований стан у тілі від дії об'ємних і поверхневих сил не залежить від порядку їх прикладання.

Прикладені сили і напруження в тілі (що складаються з прикладених на першому і другому етапах навантаження) лінійно незалежні, і ця незалежність зберігається при зміні порядку прикладання навантаження.

Прикладені до тіла сили

$$X = X^{(1)} + X^{(2)}. \quad (5.1)$$

Компоненти напружень у тілі

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}. \quad (5.2)$$

При підстановці (5.1) і (5.2) в рівняння рівноваги $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$

отримаємо

$$\frac{\partial (\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)})}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)})}{\partial y} + (X^{(1)} + X^{(2)}) = 0, \quad (5.3)$$

а з умови на поверхні $X = \sigma_x l + \tau_{xy} m$

$$X^{(1)} = \left(\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)} \right) l + \dots \left(\tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} \right) m. \quad (5.4)$$

Видно, що рівняння розпадаються, тобто виконуються для будь-якої суми і порядку поєднання навантаження та напружено-деформованих станів. Принцип справедливий, поки переміщення при деформуванні не впливають суттєво на дію зовнішніх сил.

5.3 Узагальнені сили і узагальнені переміщення

Роботою в механіці називається добуток сили на переміщення (для постійної сили) (рисунок 5.2)

$$W = \vec{P} \cdot \vec{S}. \quad (5.5)$$

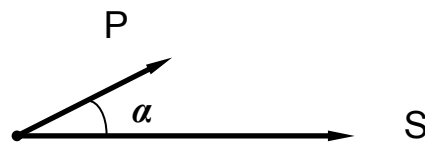


Рисунок 5.2 – До визначення роботи в механіці

Поняття роботи розширюється, якщо під роботою приймати добуток двох чинників, один з яких залежить від сили (узагальнена сила), а інший – від переміщення (узагальнене переміщення).

Приклад 1. Кожна сила ($P, \alpha P, \beta P$) на відповідному їй переміщенні (f, f_α, f_β) здійснює роботу: $P \cdot f, \alpha P \cdot f_\alpha, \beta P \cdot f_\beta$ (рисунок 5.3, а).

Сумарна робота

$$W = Pf + \alpha Pf_\alpha + \beta Pf_\beta = P(f + \alpha f_\alpha + \beta f_\beta) = P\varphi(f). \quad (5.6)$$

У залежності (5.6) співмножник P є узагальненою силою, а другий співмножник ($f + \alpha f_\alpha + \beta f_\beta$) – узагальненим переміщенням $\varphi(f)$.

Приклад 2. Кожна сила (P, M) на відповідному їй переміщенні (f, φ) здійснює роботу: $P \cdot f, M \cdot \varphi$ (рисунок 5.3, б).

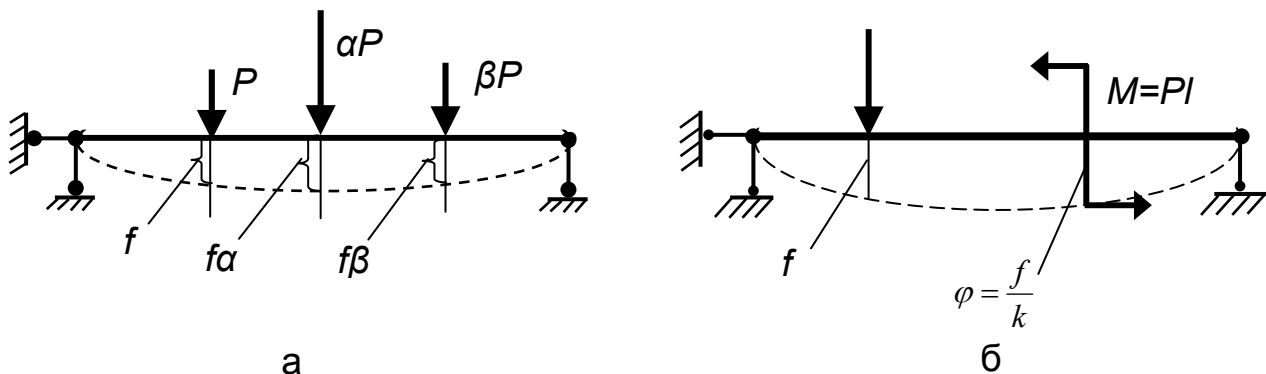


Рисунок 5.3 – До поняття узагальнених сил і узагальнених переміщень

Сумарна робота

$$W = Pf + M\varphi = Pf + Pl \frac{f}{k} = \left(P + P \frac{l}{k} \right) f. \quad (5.7)$$

В залежності (5.7) співмножник $P \left(P + P \frac{l}{k} \right)$ є узагальненою силою, а другий співмножник f – узагальненим переміщенням.

Для однієї й тієї самої системи узагальнені сили і узагальнені переміщення можна вибирати по-різному, але їх добуток має бути роботою. При цьому сили і переміщення мають бути відповідними.

5.4 Можливі переміщення, деформації і напруження

Разом із дійсним станом тіла (u, ε, σ) може бути розглянутий можливий стан, який виходить малою зміною (варіацією) дійсного стану « δ ».

Варіації переміщень: $\delta u, \delta v, \delta w$.

Варіації деформацій: $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{zx}$.

Варіації напружень: $\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \delta \sigma_z, \delta \tau_{xy}, \delta \tau_{yz}, \delta \tau_{zx}$.

Можливий стан тіла – стан, який допускається накладеними зв'язками (на переміщення, деформації, напруження).

Можливі переміщення $\delta u, \delta v, \delta w$. Варіації переміщень дорівнюють нулю там, де переміщення задані (дорівнюють нулю або задані кінематичними умовами) (рисунок 5.4). Показані на рисунку 5.4 граничні умови: $w=0$ при $x=0$ і $x=l$; $v=0$ при $x=0$ означають, що $\delta w=0$ при $x=0$ і $x=l$; $\delta v=0$ при $x=0$.

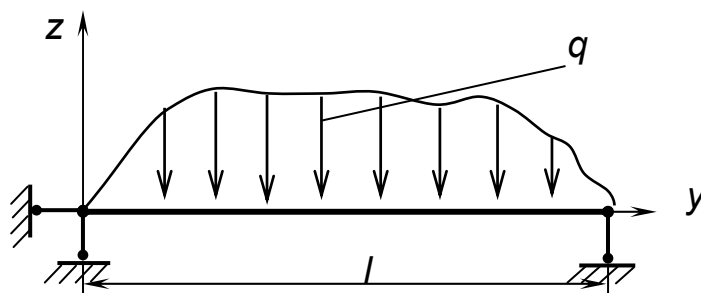


Рисунок 5.4 – До поняття можливих переміщень

Можливі деформації $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{zx}$ мають задовольняти закону суцільності:

$$\frac{\partial^2(\delta \varepsilon_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\delta \varepsilon_y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\delta \gamma_{xy})}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2(\delta \varepsilon_y)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(\delta \varepsilon_z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\delta \gamma_{yz})}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial^2(\delta \varepsilon_z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\delta \varepsilon_x)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(\delta \gamma_{xz})}{\partial x \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(\delta \gamma_{zx})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta \gamma_{xy})}{\partial z} - \frac{\partial(\delta \gamma_{yz})}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2(\delta \varepsilon_x)}{\partial y \partial z}; \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial(\delta \gamma_{xy})}{\partial z} + \frac{\partial(\delta \gamma_{yz})}{\partial x} - \frac{\partial(\delta \gamma_{zx})}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2(\delta \varepsilon_y)}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(\delta \gamma_{yz})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta \gamma_{zx})}{\partial y} - \frac{\partial(\delta \gamma_{xy})}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2(\delta \varepsilon_z)}{\partial x \partial y}.$$

Можливі напруження $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{xy}, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}$ мають задовольняти закону рівноваги і умовам на поверхні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{xz})}{\partial z} + \delta X &= \rho \frac{\partial^2(\delta u)}{\partial t^2} & \delta(\tau_{xy}) &= \delta(\tau_{yx}); \\ \frac{\partial(\delta\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} + \delta Y &= \rho \frac{\partial^2(\delta v)}{\partial t^2}; & \delta(\tau_{yz}) &= \delta(\tau_{zy}); \\ \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} + \delta Z &= \rho \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial t^2}; & \delta(\tau_{zx}) &= \delta(\tau_{xz}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \delta p_{xv} &= \delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m + \delta\tau_{xz} n; \\ \delta p_{yv} &= \delta\tau_{yx} l + \delta\sigma_y m + \delta\tau_{yz} n; \\ \delta p_{zv} &= \delta\tau_{zx} l + \delta\tau_{zy} m + \delta\sigma_z n. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Знаки варіації δ і диференціала ∂ можна міняти місцями:

$$\delta \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta \sigma_x.$$

5.5 Принцип можливої (віртуальної) роботи для точки

Якщо на точку A діє сила F і для точки можливе переміщення δr , тоді можлива робота (рисунок 5.5):

$$\delta A = F \cos \alpha \cdot \delta r. \quad (5.11)$$

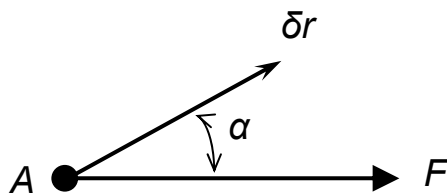


Рисунок 5.4 – До поняття віртуальної роботи сили

Нехай точка A з прикладеними до неї силами F_i ($i=1, \dots, n$), які знаходяться в рівновазі, перемістилася за напрямком t на величину $AA_1 = \delta r$ (рисунок 5.5). Можлива робота сил на цьому переміщенні:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta r (F_i \cos \alpha_i) = 0, \quad (5.12)$$

оскільки з умови рівноваги точки $\sum_{i=1}^n (F_i \cos \alpha_i) = 0$.

Звідти виходить, що для точки, яка знаходиться в рівновазі під дією системи сил, можлива робота цих сил на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

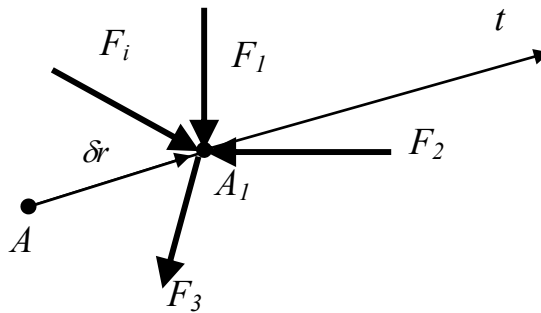


Рисунок 5.5 – До поняття віртуальної роботи сил

Надамо можливі зміни δF_i силам F_i . Щоб ці можливі зміни δF_i були статично можливими, мають виконуватись умови рівноваги точки

$$\sum_{i=1}^n (\delta F_i \cos \alpha_i) = 0. \quad (5.13)$$

Можлива робота сил δF_i на переміщенні r

$$\delta A = \sum_{i=1}^n r (\delta F_i \cos \alpha_i) = 0. \quad (5.14)$$

Якщо можлива робота статично можливої системи сил дорівнює нулю, то точка знаходиться в рівновазі під дією прикладених до неї дійсних сил.

5.6 Можлива робота внутрішніх сил у деформівному тілі

Надамо грані паралелепіпеда можливе переміщення δv (рисунок 5.6). Можлива робота внутрішніх сил на можливому переміщенні δv :

$$\delta U_y = -\sigma_y dx dz \delta v + \sigma_y \left(\delta v + \frac{\partial \delta v}{\partial y} dy \right) dx dz = \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} dx dy dz. \quad (5.15)$$

Питома робота внутрішніх сил на можливому переміщенні δv :

$$\delta U_{y0} = \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} = \sigma_y \delta \varepsilon_y. \quad (5.16)$$

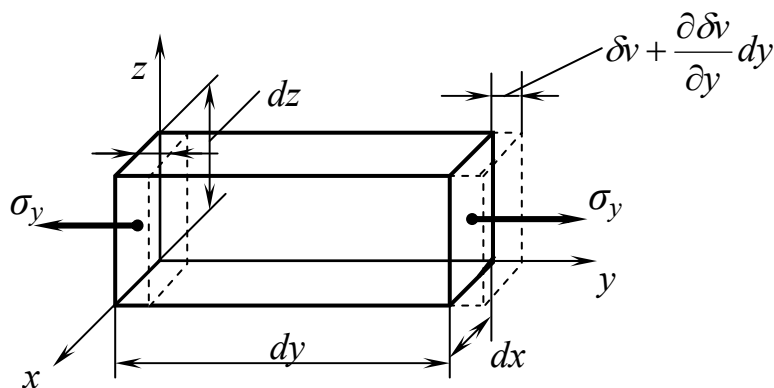


Рисунок 5.5 – До визначення віртуальної роботи внутрішніх сил

На можливих переміщеннях δu , δv і δw питома робота внутрішніх сил

$$\delta U_0 = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}. \quad (5.17)$$

З іншого боку, для питомої можливої роботи внутрішніх сил δU_0 можна записати повний диференціал:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx}. \quad (5.18)$$

З порівняння залежностей (5.17) і (5.18) випливає

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}; & \sigma_y &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}; & \sigma_z &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_z}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}}; & \tau_{yz} &= \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}}; & \tau_{zx} &= \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Залежності (5.19) являють собою формули Гріна, які дозволяють визначити напруження через питому роботу внутрішніх сил.

Якщо як можливі прийняти напруження, то по аналогії з (5.17) отримаємо

$$\delta \bar{U}_0 = \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}. \quad (5.20)$$

У залежності (5.20) риска зверху показує, що це додаткова питома можлива робота внутрішніх сил і варіюються напруження.

Для додаткової питомої можливої роботи внутрішніх сил $\delta \bar{U}_0$ аналогічно (5.19) також можна записати повний диференціал

$$\delta \bar{U}_0 = \frac{\delta \bar{U}_0}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\delta \bar{U}_0}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\delta \bar{U}_0}{\partial \sigma_z} \delta \sigma_z + \frac{\delta \bar{U}_0}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} + \frac{\delta \bar{U}_0}{\partial \tau_{yz}} \delta \tau_{yz} + \frac{\delta \bar{U}_0}{\partial \tau_{zx}} \delta \tau_{zx}. \quad (5.21)$$

Із порівняння залежностей (5.20) і (5.21) виходить:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \sigma_x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \sigma_y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \sigma_z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \tau_{xy}}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \tau_{yz}}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \tau_{zx}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Залежності (5.22) являють собою формули Кастільяно, які дозволяють визначити деформації через додаткову питому роботу внутрішніх сил.

Можлива робота і додаткова можлива робота внутрішніх сил для тіла в цілому відповідно визначають як

$$\delta U = \int_V \delta U_0 dV; \quad (5.23)$$

$$\delta \bar{U} = \int_V \delta \bar{U}_0 dV. \quad (5.24)$$

5.7 Дійсна робота внутрішніх сил у тілі (потенціальна енергія)

Варіація питомої потенціальної енергії деформації:

$$\delta U_{0x} = \sigma_x \delta \varepsilon_x. \quad (5.25)$$

Питома потенціальна енергія деформації (знаки δ і d мають той же зміст)

$$U_{0x} = \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x E \delta \varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon_x} E \varepsilon_x d\varepsilon_x, \quad (5.26)$$

звідки виходить

$$U_{0x} = E \frac{\varepsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2}. \quad (5.27)$$

По аналогії

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (5.28)$$

З урахуванням фізичного закону можна отримати залежності $U_0 = f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ або $U_0 = \varphi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$.

Потенціальна енергія в тілі:

$$U = \int_V U_0 dx dy dz. \quad (5.29)$$

5.8 Принцип можливих переміщень

Якщо тіло знаходиться в рівновазі, то сума робіт усіх прикладених до тіла сил (зовнішніх і внутрішніх) на нескінченно малих можливих переміщеннях дорівнює нулю

$$\delta A + \delta W = 0, \quad (5.30)$$

де δA – варіація роботи внутрішніх сил; δW – варіація роботи зовнішніх сил.

Це одна з форм вираження закону рівноваги.

5.9 Варіаційний принцип Лагранжа (принцип потенціальної енергії)

Повна потенціальна енергія тіла:

$$\Pi = U - W, \quad (5.31)$$

де Π – потенціальна енергія деформації; W – потенціал (робота) зовнішніх сил.

$$W = \int_V (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (p_x u + p_y v + p_z w) ds, \quad (5.32)$$

де X, Y, Z – об'ємні сили; p_x, p_y, p_z – поверхневі сили.

Якщо тіло знаходиться в рівновазі, а переміщення точок дійсні і малі, то повна потенціальна енергія тіла $\Pi = 0$. В інших випадках вона відрізняється від нуля.

З усіх можливих переміщень, які відповідають заданим граничним умовам і умовам суцільності, дійсними є такі, які дають повній потенціальній енергії мінімальне значення.

Оскільки внутрішні сили спрямовані проти деформації,

$$A = -U. \quad (5.33)$$

З принципу можливих переміщень випливає

$$\delta W - \delta U = 0, \quad (5.34)$$

або (рисунок 5.6)

$$\int_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dV + \int_S (p_x\delta u + p_y\delta v + p_z\delta w)dS - \int_V (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})dV = 0. \quad (5.35)$$

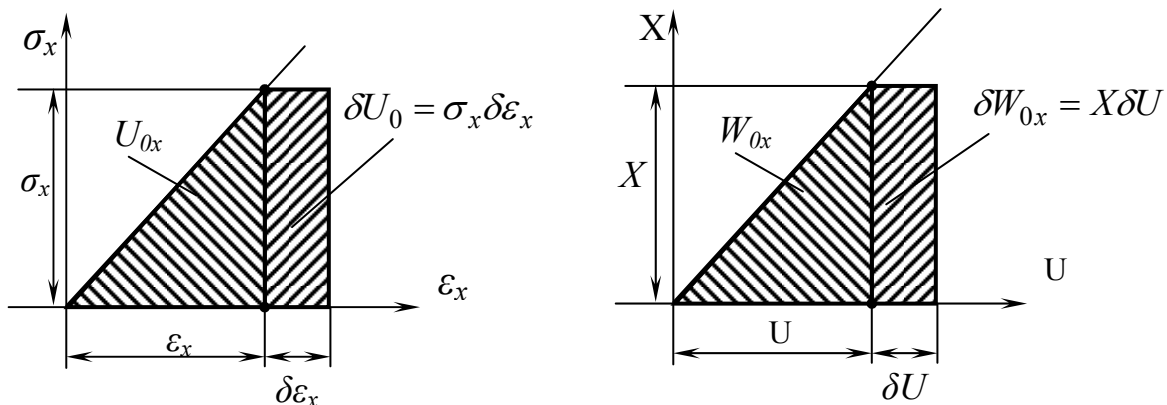


Рисунок 5.6 – До варіаційного принципу Лагранжа

Варіації δu , δv і δw дорівнюють нулю на тих частинах поверхні, де задані переміщення, тобто інтегрування по поверхні проводиться лише на частині поверхні, де задані поверхневі сили.

Оскільки в задачах механіки сили задані і не варіюються, то знак варіації можна винести:

$$\delta \int_V (Xu + Yv + Zw)dV + \delta \int_S (p_x u + p_y v + p_z w)dS - \delta U = 0.$$

або

$$\delta(W - U) = \delta\Pi = 0.$$

Отже, в стані рівноваги повна потенціальна енергія тіла має екстремум ($\delta\Pi = 0$) (оскільки $\delta^2\Pi > 0$, то це мінімум). Це ще одна форма вираження закону рівноваги.

5.10 Варіаційний принцип Кастільяно (принцип додаткової енергії)

Робота зовнішніх сил і потенціальна енергія деформації можуть бути подані варіюванням зусиль і напружень при дійсних переміщеннях і деформаціях (рисунок 5.7)

$$\delta\bar{W} = \int_V (u\delta X + v\delta Y + w\delta Z)dV + \int_S (u\delta p_x + v\delta p_y + w\delta p_z)dS; \quad (5.36)$$

$$\delta\bar{U} = \int_V (\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \dots + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx})dV. \quad (5.37)$$

Риска зверху показує, що варіюються зусилля і напруження.

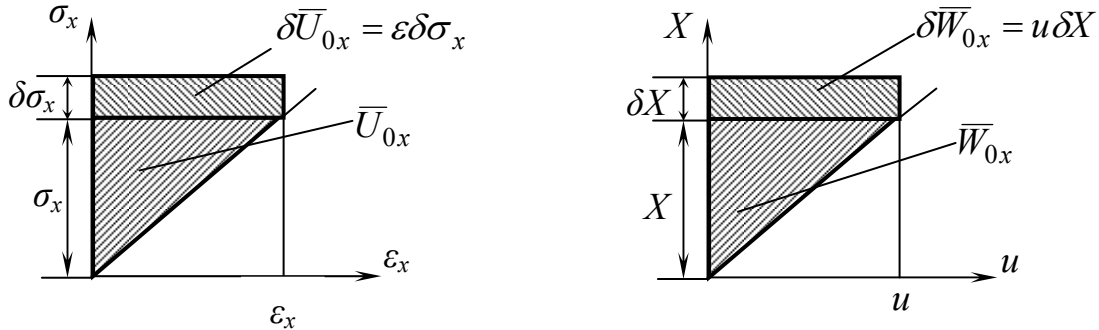


Рисунок 5.7 – До варіаційного принципу Кастільяно

Із всіх статично можливих систем напружень дійсними напруженнями, які задовольняють умовам суцільності, є такі, які дають додатковій енергії мінімальне значення.

$$\delta(\bar{U} - \bar{W}) = \delta\bar{\Pi} = 0. \quad (5.38)$$

Це форма вираження закону суцільності.

На рисунку 5.8 показано, що для лінійно деформівних тіл потенціална і додаткова енергії однакові, а для нелінійно деформівних вони різні.

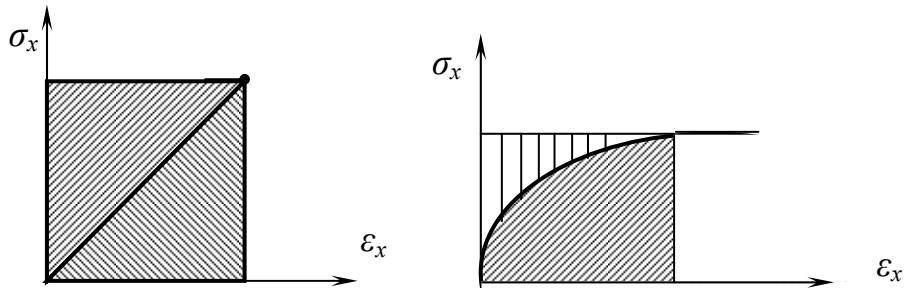


Рисунок 5.8 – До різниці при деформуванні тіл

$$\Pi = \bar{\Pi}$$

$$\Pi \neq \bar{\Pi}$$

$$U = \bar{U}$$

$$U \neq \bar{U}$$

$$W = \bar{W}$$

$$W \neq \bar{W}$$

Пружне тіло статично не визначене, оскільки при шести невідомих ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) є три рівняння рівноваги в диференціальній формі. Отже, існує багато варіантів задовольнити їм.

6 МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

6.1 Метод Бубнова – Гальоркіна

Це один із найбільш розповсюджених і ефективних методів наближеного розв'язання диференціальних рівнянь (не чисельного, а наближеного аналітичного рішення). Не знижуючи загальності методу, розглянемо його на прикладі одновимірної задачі.

Нехай маємо диференціальне рівняння виду:

$$L(x, y, y', y'') = 0. \quad (6.1)$$

Якщо відоме його точне рішення $y = \Psi(x)$, то рівняння (6.1) задовольняється точно.

При наближеному розв'язанні (рисунок 6.1), як і в методі Рітца, шукаємо рішення диференціального рівняння подається у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \varphi_i(x). \quad (6.2)$$

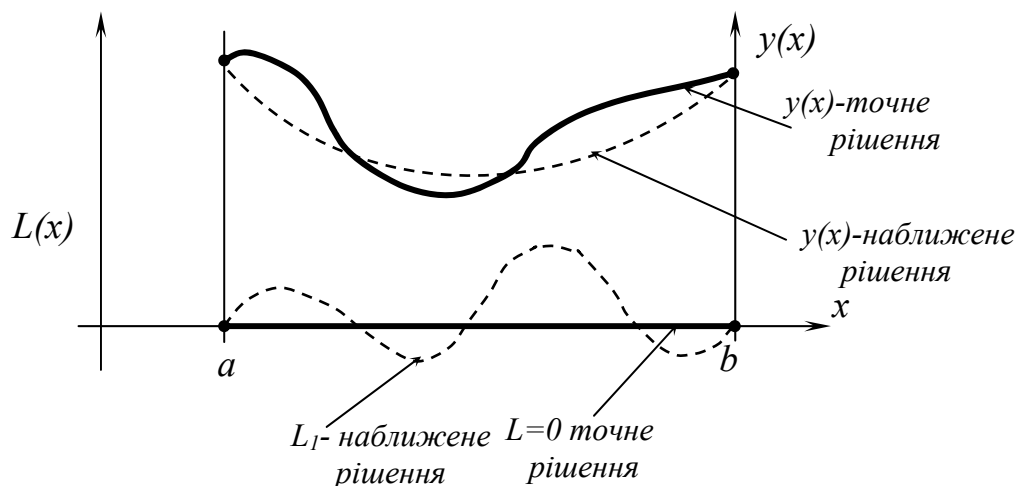


Рисунок 6.1 – До пошуку наближеного рішення диференціального рівняння

При цьому функції $\varphi_i(x)$ вибирають так, щоб задовольнити граничні умови.

Підставляючи (6.2) в рівняння (6.1), отримаємо

$$L_1(x, a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (6.3)$$

У загальному випадку $L_1(x, a_i) = \Delta \neq 0$.

Диференціальне рівняння (6.1) буде виконуватися при всіх значеннях x лише у випадку точного рішення. Наша задача – максимально до нього наблизитися.

Можна вимагати, щоб диференціальне рівняння (6.1) на інтервалі його існування мало мінімальну «нев'язку» $\Delta = \int_a^b L_1^2(x, y, y', y'') dx$.

Це задача про екстремум функціонала Δ . Необхідна умова екстремуму цього функціонала $\delta\Delta = 0$.

$$\delta\Delta = \int_a^b \delta L_1(x, y, y', y'') dx = 0, \quad (6.4)$$

звідки випливає

$$\delta\Delta = 2 \int_a^b L_1(x, y, y', y'') \delta y dx = 0. \quad (6.5)$$

Варіацію δy з урахуванням (6.2) можна навести у вигляді

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial y}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial a_n} \delta a_n$$

або

$$\delta y = \varphi_1 \delta a_1 + \varphi_2 \delta a_2 + \dots + \varphi_n \delta a_n. \quad (6.6)$$

Підстановка (6.6) в (6.5) приводить до залежності

$$\int_a^b L_1(x, y, y', y'') \cdot (\varphi_1 \delta a_1 + \varphi_2 \delta a_2 + \dots + \varphi_n \delta a_n) dx = 0. \quad (6.7)$$

Оскільки варіації $\delta a_1, \delta a_2, \dots, \delta a_n$ в інтервалі довільні, то рівняння (6.7) задовольняється при

$$\begin{aligned} \int_a^b L_1(x, y, y', y'') \varphi_1 dx &= 0; \\ \int_a^b L_1(x, y, y', y'') \varphi_2 dx &= 0; \\ \dots \\ \int_a^b L_1(x, y, y', y'') \varphi_n dx &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Це система n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно a_i .

Приклад 1. Вигин шарнірно опертої балки рівномірно розподіленим навантаженням (рисунок 6.2).

Диференціальне рівняння вигину має вигляд

$$EJw^{IV} - q = 0. \quad (6.9)$$

Задамо вигин w у вигляді ряду

$$w = \sum_{m=1}^c a_m \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (6.10)$$

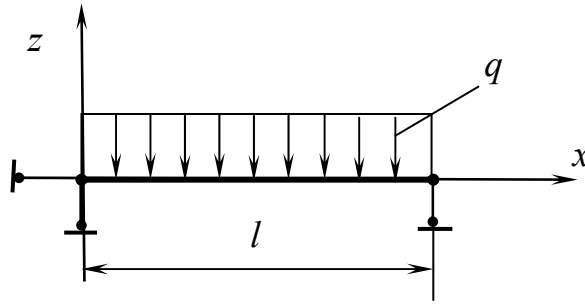


Рисунок 6.2 – Умови задачі про вигин балки

Вираз для вигину (6.10) задовольняє граничні умови:
 $w=0$ і $w''=0$ при $x=0$ і при $x=a$.

Рівняння (6.9) розв'язуємо методом Бубнова–Гальоркіна.
 Для вигину (6.10) утримуємо перший член ряду:

$$w = a \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (6.11)$$

Замість (6.9) рівняння набуває вигляду

$$\int_0^l \left(EJ \frac{\pi^4}{l^4} a \sin \frac{\pi x}{l} - q \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx = 0. \quad (6.12)$$

Після інтегрування отримаємо $EJ \frac{\pi^4 a l}{l^4 \cdot 2} - q \frac{l}{\pi} (2) = 0$, звідки

$$w = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (6.13)$$

Залежно для вигину (6.10) утримаємо два члени ряду

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Замість (6.9) рівняння набуде вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \left[EJ \left(a_1 \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} + a_3 \frac{81\pi^4}{l^4} \sin \frac{3\pi x}{l} \right) - q \right] \sin \frac{\pi x}{l} dx &= 0; \\ \int_0^l \left[EJ \left(a_1 \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} + a_3 \frac{81\pi^4}{l^4} \sin \frac{3\pi x}{l} \right) - q \right] \sin \frac{3\pi x}{l} dx &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Після інтегрування отримаємо

$$\begin{cases} EJ \left(a_1 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{2} + a_3 \frac{81\pi^4}{l^4} \cdot 0 \right) - q \frac{l}{\pi} (2) = 0; \\ EJ \cdot a_3 \frac{81\pi^4}{l^4} \frac{l}{2} - q \frac{l}{3\pi} (2) = 0, \end{cases}$$

звідки виходить $a_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ}$; $a_3 = \frac{4ql^4}{243\pi^5 EJ}$.

Результат збігається з методом Рітца, але виходить набагато швидше.

Для диференціальних рівнянь у частних похідних

$$L(w, x, y, w'_x, w'_y, \dots) = 0 \quad (6.14)$$

рішення шукають у вигляді ряду:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^c \sum_{n=1}^d a_{mn} \varphi_m(x) \cdot \Psi_n(y), \quad (6.15)$$

де функції $\varphi_m(x)$ і $\Psi_n(y)$ мають задовольняти граничні умови задачі.

Метод Бубнова–Гальоркіна приводить рівняння (6.14) до системи алгебраїчних рівнянь:

$$\iint_S L(w, x, y, w'_x, w'_y, \dots) \cdot \varphi_i(x) \cdot \Psi_j(y) dx dy. \quad (6.16)$$

Приклад 2. Вигин вільно опертої пластини поперечним навантаженням (рисунок 6.3).

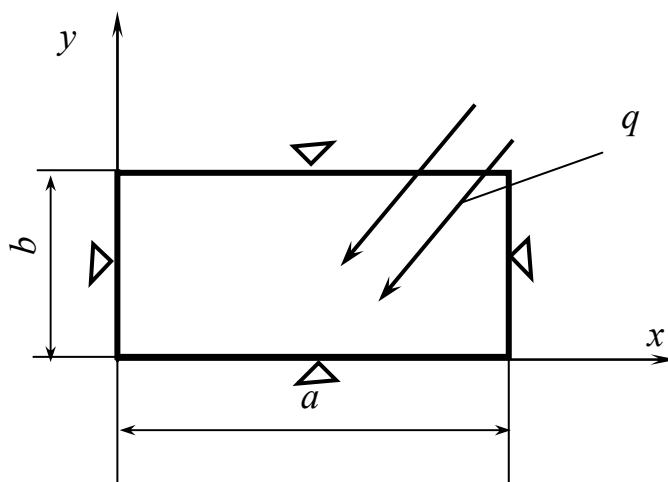


Рисунок 6.3 – Умови задачі про вигин пластини

Диференціальне рівняння поперечного вигину пластини

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0. \quad (6.17)$$

Задамо вигин w у вигляді ряду

$$w = \sum_{m=1}^c \sum_{n=1}^d a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.18)$$

При такому заданні вигину граничні умови $w=0$ і $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ при $x=0$ і $x=a$; $w=0$ і $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ при $y=0$ і $y=b$ задовольняються.

Інтегрування рівняння (6.17) з урахуванням (6.18) приводить до залежності

$$\int_0^a \int_0^b \left[D \sum_{m=1}^c \sum_{n=1}^d \left(a_{mn} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2a_{mn} \frac{m^2 n^2 \pi^2}{a^2 b^2} + a_{mn} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - q \right] \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = 0,$$

звідки випливає

$$Da_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \frac{ab}{4} q \frac{ab^4}{mn\pi^2} = 0;$$

i

$$a_{mn} = \frac{16q}{\pi^6 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) mn}.$$

7 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

7.1 Основи моделювання процесів

Моделювання – дослідження будь-яких явищ, процесів або систем об'єктів з метою побудови їх моделей.

Моделі використовують для визначення або уточнення характеристик і знаходження раціональних способів побудови об'єктів, які конструюються вперше.

На ідеї моделювання базуються обидва відомих методи наукового дослідження: теоретичний (використовують для різного роду знайомих, абстрактних моделей) і експериментальний (використовують предметні моделі). Схема процесу моделювання показана на рисунку 7.1.

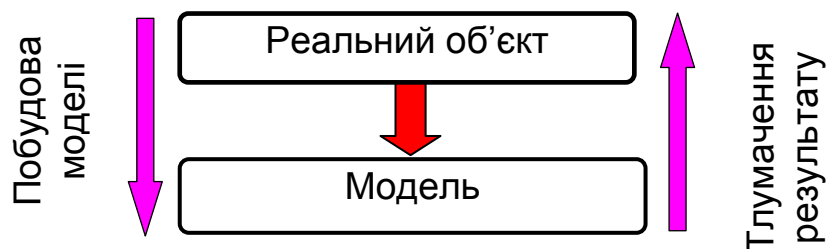


Рисунок 7.1 – Схема процесу моделювання

Стосовно технічних об'єктів і систем як методів дослідження використовують математичне моделювання (як теоретичний метод) і фізичне моделювання (як експериментальний метод).

Математичне моделювання – це наближений опис якого-небудь класу явищ, виражене за допомогою математичної символіки.

Люди почали користуватися математичними моделями ще до становлення математики як самостійної науки (обчислення площ у Стародавньому Єгипті). Основи сучасного уявлення про математичні моделі заклали І. Кеплер і І. Ньютон.

Йоганн Кеплер (1580 – 1630) – німецький астроном, математик і механік. Вивів перших два закони руху планет, названих його ім'ям. Це дозволило створити кінематичну модель сонячної системи.

Ісаак Ньютон (1643 – 1727) – англійський математик, фізик, механік, астроном. Відкрив закон всесвітнього тяжіння і створив динамічну модель сонячної системи.

Фізичне моделювання – це заміна вивчення деякого об'єкта або явища експериментальним дослідженням його моделі, яка має ту ж фізичну природу.

В подальшому розвитку науки і техніки сфера застосування математичних моделей розширювалася. Ускладнення моделей, потреба в прискоренні вирішення завдань привели до нових засобів і методів обчислень.

У сучасні математичні моделі входять алгоритми та реалізуючі їх програмні продукти.

Приклад. Вантаж масою m коливається на горизонтальній площині під дією пружини нульової маси з жорсткістю k (рисунок 7.2).

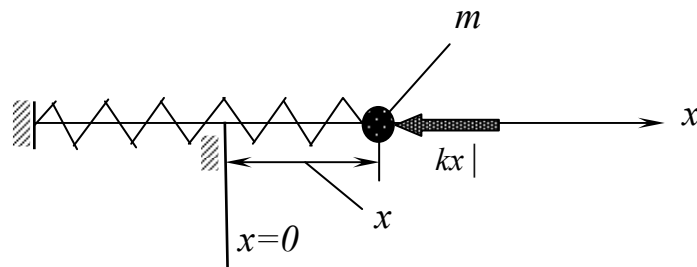


Рисунок 7.2 – До задачі про коливання вантажу

Із другого закону Ньютона випливає, що $F = m \cdot a$, тобто

$$-kx = m \frac{dx^2}{dt^2}. \quad (7.1)$$

Ми отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (7.2)$$

або

$$\ddot{x} + \frac{kx}{m} = 0. \quad (7.3)$$

Загальне розв'язання цього рівняння

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t. \quad (7.4)$$

Тобто якщо проаналізувати рішення (7.4), то вантаж здійснює гармонічні коливання з довільною амплітудою (C_1, C_2) і коловою частотою

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Сталі C_1 і C_2 треба визначити з початкових (або інших) умов.

Це твердження ми отримали не з безпосереднього розгляду механічної системи (рисунок 7.2), а з вирішення рівняння (7.3).

Звичайно рівняння (7.3) описує не в повному обсязі коливальний процес (без початкових умов не можна знайти амплітуду, не враховується загасання коливань, маса пружини і т.д.).

Математичною моделлю (рисунок 7.2) називається система співвідносин (7.3), дослідження якої дозволяє виявити властивості об'єкта (7.4).

У нашому прикладі:

A (рисунок 7.2) – коливальна механічна система;

A' (7.3) – рівняння коливань;

S – характер $\begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix}$ і частота $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$ коливань.

Для дослідження властивостей об'єкта математику застосовують не до реального об'єкта A , а до його математичної моделі A' за схемою (рисунки 7.3).

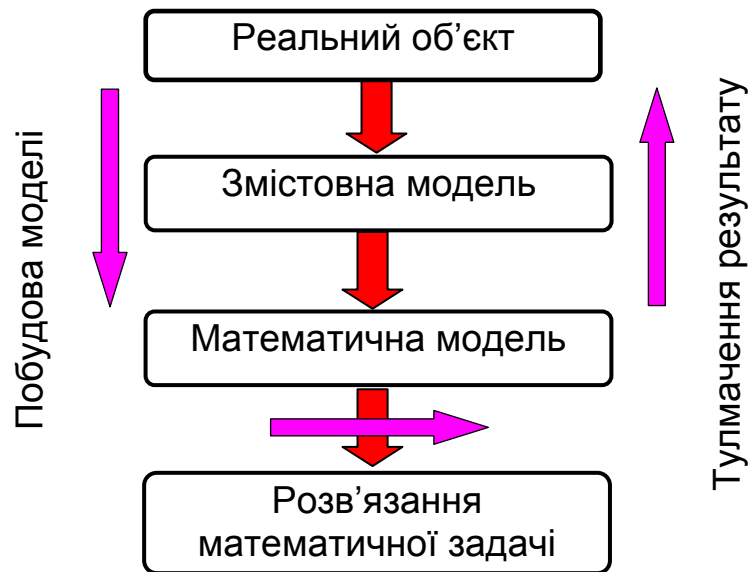


Рисунок 7.3 – Схема процесу моделювання

Змістова модель формулюється виходячи з реального об'єкта мовою тієї науки, з якою пов'язані (нею описуються) властивості реального об'єкта, які нас цікавлять (механічна, фізична, біологічна, соціальна модель).

При побудові змістовної моделі формулюють відповідні гіпотези (постулати). Включення моделі (віднесення її) в ту чи іншу науку дозволяє застосовувати закони і гіпотези (принципи, постулати) цієї науки.

Природно, що при побудові змістовної моделі відволікаються від різного роду неідеальностей, неправильностей реального об'єкта (якщо вони не є об'єктом моделювання).

У нашому прикладі використано гіпотезу про лінійну залежність пружних сил пружини від її переміщення ($F = kx$), про нульову масу пружини, про відсутність протидіючих сил (опір руху докільця). У прикладі модель побудована на базі фізики (механічна), використаний другий закон Ньютона ($F = ma$).

Математична модель будується на основі змістовної моделі, тобто змістова модель переводиться на формальну математичну мову. На цьому закінчується I етап (побудови моделі).

II етап полягає в дослідженні математичних задач, до яких приводить математична модель (розв'язання отриманої математичної задачі).

На цьому етапі:

- вибирають метод вирішення задачі,
- будують власне саме рішення задачі;
- створюють обчислювальні алгоритми;
- створюють програмний продукт.

Цей етап реалізується в рамках математики, але на цьому етапі в процесі розв'язання задачі використовують додаткові відомості про змістовну модель (це може спростити рішення, виділити з декількох потрібне та інше).

III етап – інтерпретація результатів дослідження математичної моделі.

На цьому етапі проводять:

- контроль правильності моделі (верифікація) на основі порівняння з експериментами, розрахунками за іншими моделями;
- аналіз суттєвості вхідних параметрів (з метою можливого спрощення моделі).

Реальний об'єкт може мати кілька рівносильних математичних моделей і різні реальні об'єкти можуть описуватися однією і тією ж математичною моделлю (множинність і єдність моделей).

Використання різних математичних моделей для дослідження одного і того ж об'єкта може бути пов'язано з таким:

- необхідністю дослідження різних властивостей об'єкта *A* (рисунок 7.4): *S1, S2, S3*:

S1 – визначенням прогину пластини *w* при поперечному навантаженні $q(x, y)$ (рівняння Софі-Жермен)

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q; \quad (7.5)$$

S2 – розподілом температури за об'ємом тіла (рівняння Фур'є)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad (7.6)$$

S3 – визначенням частоти власних коливань пластини

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (7.7)$$

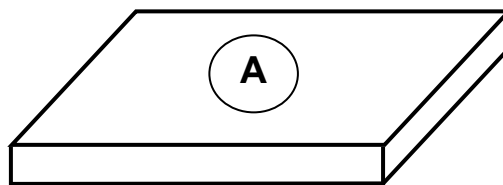


Рисунок 7.4 – До множинності математичних моделей об'єкта

- використанням різних типів моделей (безперервна, дискретна, детермінована, стохастична);

- необхідністю отримання різної точності при розрахунках (зазвичай, чим точніше, тим складніше).

Різні реальні об'єкти (A_1, A_2, A_3) або різні змістовні моделі можуть мати одну і ту ж модель:

– рівняння коливань вантажу масою m на пружині з жорсткістю k

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0; \quad (7.8)$$

– рівняння коливального контуру з індуктивністю L і ємністю C

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot I = 0; \quad (7.9)$$

– рівняння крутіння прямолінійного бруса

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta, \quad (7.10)$$

де θ – кут закручування; G – модуль зсуву; φ – функція напружень

$$\left(\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right);$$

– рівняння вигину мембрани

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{q}{S}, \quad (7.11)$$

де q – поперечне навантаження, S – напруження в мембрані.

Це дає можливість моделювати один з об'єктів іншим, наприклад, замість дослідження коливань складних механічних систем проводити вимірювання у відповідному електричному ланцюзі – електрична аналогія.

Основні вимоги, які пред'являють до математичних моделей

Вимога адекватності моделі. Адекватність – відповідність моделі досліджуваного об'єкта A щодо вибраної системи властивостей S .

Будь-яка адекватність математичної моделі реальному об'єкту відносна і має свої рамки застосовності.

Під адекватністю розуміють:

– правильне якісне описування моделлю розглянутих властивостей об'єкта (можливість на підставі дослідження моделі зробити правильний висновок про направлення зміни кількісних характеристик, про їх взаємозв'язки);

– правильне кількісне описування вибраної системи властивостей з деякою точністю.

Залежно від того, ставиться чи ні друга умова, розрізняють:

– якісні моделі;

– кількісні моделі (щодо них можна говорити про точність).

У техніці якісні моделі застосовують лише для складних об'єктів, що вивчаються. При цьому виявлення на моделі істотних властивостей об'єкта допомагає правильно зорієнтуватися. Часто якісні моделі застосовують у науках, де кількісні закономірності нечітко виявляються (біологія, соціальні науки).

Адекватність кількісних моделей потрібно розглядати стосовно до властивостей, які треба досліджувати.

Для моделі коливального процесу математична модель, яка описує

його: $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \rightarrow x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}x + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}x$ (рисунок 7.5).

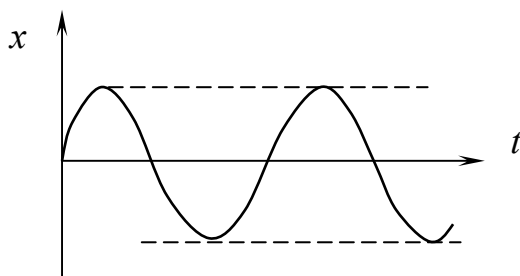


Рисунок 7.5 – До вимоги адекватності моделі

Ця модель адекватна відносно характеру коливань (\sin , \cos), частоти

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, але не відчуває загасання коливань.

Для моделі коливального процесу із загасанням математична модель

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{7.12}$$

де f – коефіцієнт в'язкого тертя.

Для процесу з великим тертям, якщо $\frac{f^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$,

$$x = C_1 \exp(-\alpha - \beta)t + C_2 \exp(-\alpha + \beta)t, \tag{7.13}$$

де $\alpha = \frac{f}{2m}$; $\beta = \sqrt{\frac{f^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ (рисунок 7.6).

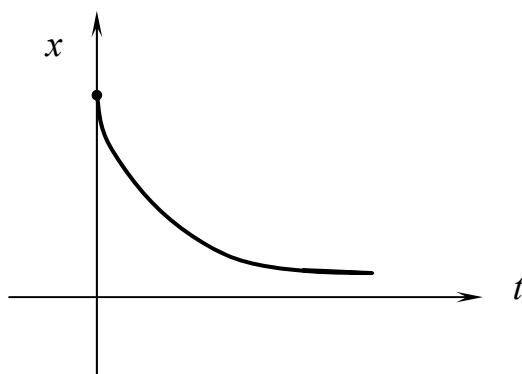


Рисунок 7.6 – До вимоги адекватності моделі (процес з великим тертям)

Якщо $\frac{f^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$, то рішення для моделі (7.12) має вигляд, показаний на рисунку 7.6.

$$x = C_1 \exp(-\alpha t) + C_2 t \exp(-\alpha t). \quad (7.14)$$

Для процесу з малим тертям, якщо $\frac{f^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$,

$$x = \exp(-\alpha t)(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad (7.15)$$

де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4m^2}}$ – частота коливань (рисунок 7.7).

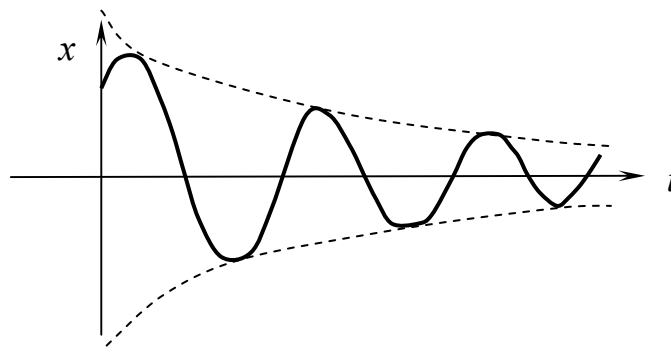


Рисунок 7.7 – До вимоги адекватності моделі (процес з малим тертям)

Ця модель адекватна відносно типу коливань (\exp , \sin , \cos), частоти (ω) і загасання коливань (α). Адекватність моделі встановлюється зіставленням результатів із фізичними або іншими надійно працюючими моделями.

Вимога достатньої простоти. Вважають, що модель є досить простою, якщо сучасні (у тому числі обчислювальні) засоби дають можливість провести аналіз властивостей моделі з необхідною точністю економно за витратами праці і коштів.

Вимога простоти зазвичай суперечить вимозі адекватності (зазвичай чим модель адекватніше, тим вона складніше). Але при спрощенні краще спрощувати змістовну модель, оскільки при цьому більш зрозумілі гіпотези.

Вимога повноти моделі. Модель має давати принципову можливість досліджувати шукані властивості, тобто бути повною щодо шуканих властивостей.

Так, модель коливань без тертя неповна відносно швидкості загасання коливань, хоч і описує сам коливальний процес.

Вимога продуктивності моделі. Вихідні дані для роботи моделі мають бути достовірними і доступними (щоб їх можна було виміряти, підрахувати, знайти в довіднику).

$$Y = \rho VT, \quad (7.16)$$

де ρ – густина; V – швидкість набігаючого незбуреного потоку; Γ – циркуляція вектора швидкості по контуру, що охоплює профіль крила. Це формула Жуковського. Циркуляцію вектора швидкості можна теоретично отримати в рідкісних випадках, а виміряти ще складніше. Ця формула є непродуктивною.

$$Y = C_y \frac{\rho V^2}{2} b,$$

де C_y – коефіцієнт піднімальної сили; b – хорда профілю крила.

Якщо вихідні дані важко отримати достовірними, то результат дослідження є проблематичним.

Вимога робастності моделі. Робастність – це стійкість моделі щодо похибок у вихідних даних. Деяка невизначеність у вихідних даних не повинна істотно впливати на результат.

Зазвичай нестійкість моделі виникає через віднімання близьких величин або використання функцій, які швидко змінюються на інтервалі, де працює модель.

Приклад 1. Модель $C = A - B$.

Вхідна величина A задана з похибкою $A = 275,1 \pm 0,1$. Похибка її завдання $\Delta = 0,004\%$.

Вхідна величина B задана з похибкою $A = 275,1 \pm 0,1$. Похибка її завдання $\Delta = 0,004\%$.

Похибка результату $C = A - B$, $\Delta = 7\%$. (в 200 раз більше похибки при завданні вихідних даних). (Купуючи цукерки, зважитися спочатку без цукерок, а потім з ними)

Приклад 2. Модель $F = \sqrt{A^2 + \alpha} - A$, $A = 16000000$; $\alpha = 1$.

На калькуляторі $F = 0$.

$$F = \frac{(\sqrt{A^2 + \alpha} - A)(\sqrt{A^2 + \alpha} + A)}{\sqrt{A^2 + \alpha} + A} = \frac{\alpha}{\sqrt{A^2 + \alpha} + A}; F = 3,1 \cdot 10^{-8}.$$

Вимога наочності моделі. Компоненти моделі повинні мати змістовний сенс (сила, робота, тепловий потік). Це дозволяє контролювати модель і орієнтовно передбачити результат рішення.

7.2 Класифікація математичних моделей

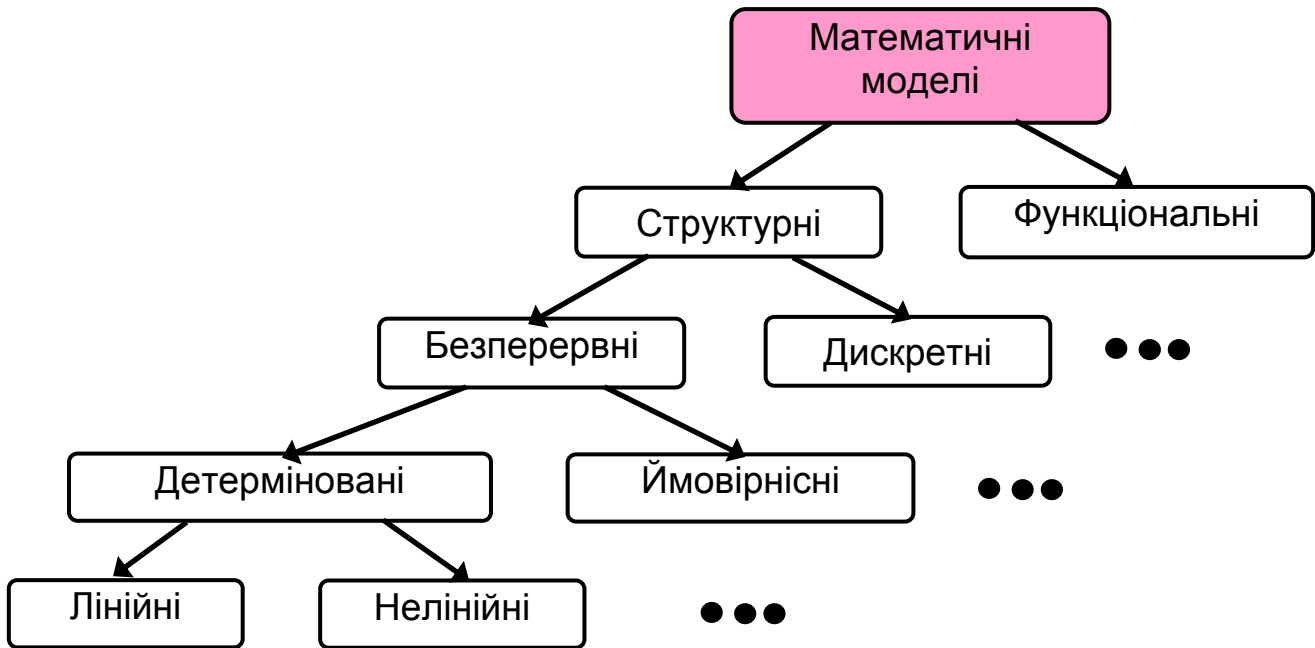


Рисунок 7.8 – Схема класифікації математичних моделей

Структурні і функціональні моделі

Структурна модель – це модель, в якій відбивається структура (устрій) об'єкта, що моделюється, властивості об'єкта (істотні для цілей дослідження) і взаємозв'язки компонент об'єкта.

Функціональна модель відображає тільки особливості функціонування об'єкта. Вона являє собою свого роду «чорний ящик».

Структурна математична модель визначення критичного зусилля при стисненні бруса (рисунок 7.9):

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (7.17)$$

де E – модуль пружності; I – момент інерції; μ – коефіцієнт, який залежить від умов обпирання країв бруса; l – довжина бруса.

Ця модель відображає характер і ступінь впливу кожного входячого параметра на величину критичного зусилля: $P_{kp} = f(E, I, l, \mu)$.

Функціональну математичну модель визначення критичного зусилля при стисненні бруса (рисунок 7.9) визначають за формулою

$$P_{kp} = AI, \quad (7.18)$$

де A може бути обчислено (зі структурної моделі) або визначено експериментально (для фіксованих регламентованих E , l і μ): $P_{kp} = f(I)$.

Для опису процесу коливань вантажу масою m ми отримали математичну модель (диференціальне рівняння)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (7.19)$$

Рішення цього рівняння має вигляд

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t. \quad (7.20)$$

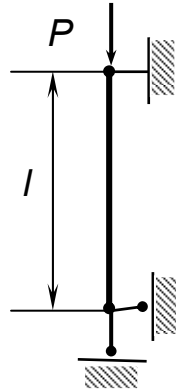


Рисунок 7.9 – До структурної моделі втрати стійкості бруса

Сталі C_1 і C_2 визначають з початкових умов, наприклад: при $t = 0$

$x = 0$; $\dot{x} = V_0$. При цьому $C_1 = 0$; $C_2 = V_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ і рішення (7.20) набуває вигляду

$$x = V_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

Це структурна модель.

Для вантажу масою $m = 0,1$ кг і при жорсткості пружини $k = 10$ Н/м ми отримаємо функціональну модель

$$x = \frac{V_0}{10} \sin(10t). \quad (7.21)$$

Ця функціональна модель може використовуватися при $m = 0,1$ кг і $k = 10$ Н/м.

Дискретні і безперервні моделі

Числові величини можуть бути двох типів – дискретні і безперервні. Безперервні набувають усіх значень з деякого інтервалу, а дискретні – "відірвані" один від одного значень. Для дискретних моделей характерне використання сум, а для безперервних – похідних і інтегралів.

Між цими типами величин немає принципового бар'єра, – при дрібному розбитті безперервної функції отримуємо дуже близькі результати (чисельне рішення рівнянь).

У багатьох задачах використовують змішані моделі (для різних частин моделі і на різних етапах розрахунку застосовують безперервні та дискретні моделі).

Площа, що описується функцією $y(x)$ на інтервалі від $x=a$ до $x=b$ (рисунк 7.10), може бути обчислена як інтеграл $f = \int_a^b y(x)dx$ або підсумо-

ується за скінченним числом інтервалів $f = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta_i$. При досить дрібному розбитті відрізка результат буде практично однаковим.

Використання ж дельта-функції (рисунк 7.11), з іншого боку, дозволяє подати дискретну величину як безперервну функцію.

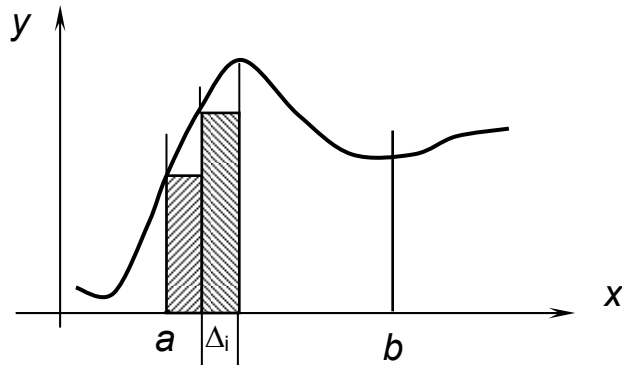


Рисунок 7.10 – До дискретної та безперервної моделей

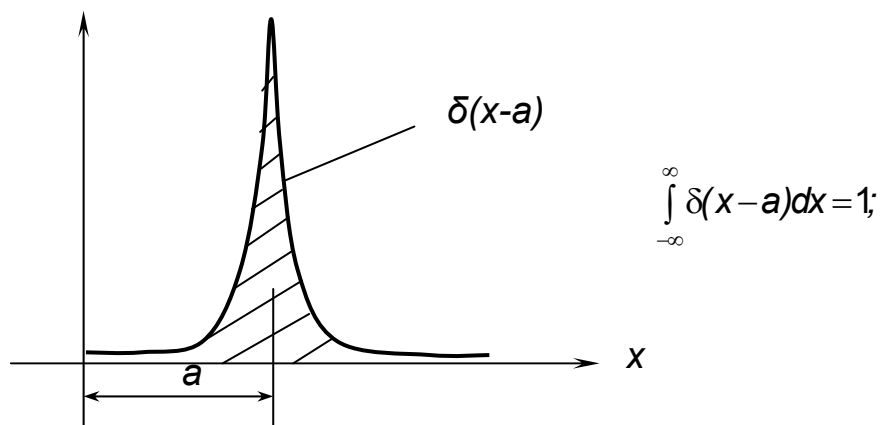


Рисунок 7.11 – До визначення дельта-функції

Детерміновані й імовірнісні моделі

Імовірнісні моделі містять випадкові (скалярні або векторні) компоненти, що задовольняють статистичним законам. Імовірнісні моделі вивчаються методами теорії ймовірності. Якщо ймовірнісні характеристики випадкових компонентів моделі відомі з невисокою точністю, то модель може бути непродуктивною.

Лінійні і нелінійні моделі

Лінійна залежність однієї величини від іншої – пропорційність їх збільшень ($y = ax + b \rightarrow \Delta y = a\Delta x$), ($z = ax + by + c \rightarrow \Delta z = a\Delta x + b\Delta y$).

Модель об'єкта можна розглядати як перетворювач, для якого кожному входу відповідає вихід (рисунок 7.12).

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow B_1 \\ A_2 &\rightarrow B_2 \end{aligned} \quad (7.22)$$



Рисунок 7.12 – До визначення оператора

У математиці такий перетворювач називається оператором (алгебраїчний, диференціальний, інтегральний та ін.).

Лінійна модель – якщо в ній виконується принцип суперпозиції: при додаванні входів складаються виходи

$$A_1 + A_2 \rightarrow B_1 + B_2, \quad (7.23)$$

при множенні входу на число вихід множиться на те ж число

$$\alpha A_1 \rightarrow \alpha B_1. \quad (7.24)$$

Лінійні моделі і методи розв'язання задач з використанням цих моделей добре розроблені (матриці, метод Бубнова–Гальоркіна, метод скінченних елементів).

Приклади лінійних моделей:

– фізичний закон

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{E}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \bar{E}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \end{aligned} \quad (7.25)$$

– закон Ома

$$I = \frac{U}{R}. \quad (7.26)$$

Нелінійні моделі мають нелінійну залежність між вхідними і вихідними величинами, наприклад

$$y'' + (1 + y^2)\sin(y') + y = 1. \quad (7.27)$$

На практиці в більшості моделей проводять лінеаризацію (заміну нелінійних рівнянь на лінійні). Лінеаризацію зазвичай проводять за таких умов:

– в розглянутому діапазоні відхилення від лінійності невелике і несуттєве (фізичний закон);

– діапазони зміни величин малі, і їх збільшення замінюють на диференціали (варіації) (відкидаються малі вищого порядку меншості).

Використовують класифікації моделей за іншими ознаками: статистичні та динамічні моделі (враховують зміну процесу у часі).

Проміжне місце посідають квазістатичні моделі (зміна об'єкта відбувається повільно, нехтують інерційними силами); стаціонарні моделі (процес проходить, але об'єкт не змінюється в часі).

7.3 Побудова математичної моделі

Найважливішим початковим етапом побудови або вибору математичної моделі є отримання чіткої інформації про об'єкт, що моделюється, і уточнення його змістовної моделі.

Змістовну модель (особливо при первісному дослідженні) бажано по можливості спростити (але не спотворюючи якісну картину), оскільки грубу модель можна в подальшому уточнити.

Шляхи спрощення при побудові змістовної моделі:

- прийняття об'єкта за матеріальну точку або абсолютно тверде тіло (теоретична механіка, динаміка польоту);
- спрощення форми об'єкта (але при цьому потрібно залишити суттєві характерні розміри об'єкта, – завдання загального проектування);
- уточнення характеру піддатливості елементів моделі (якщо це тверде тіло, то пружний, пластичний);
- уточнення властивостей рідких і газоподібних компонент моделі (наявність стисливості, в'язкості, характер течії);
- осереднення властивостей складних структур (багатокомпонентні композиційні матеріали замінюються однорідним анізотропним середовищем, заклепувальні шви безперервними сполуками);
- спрощення діючих сил (групування сил, ігнорування малосуттєвих сил).

Нехай у нашому прикладі (рисунок 7.2) потрібно врахувати масу пружини. Якщо пружина довжиною l_n однорідна і один кінець її закріплений, а інший (де прикріплений вантаж масою m) рухається зі швидкістю V (рисунок 7.13), то вираз для кінетичної енергії пружини має вигляд

$$T_n = \int_0^{l_n} \frac{1}{2} \left(\frac{m_n}{l_n} dx \right) \left(\frac{x}{l_n} V \right)^2 = \frac{m_n V^2}{2l_n^3} \int_0^{l_n} x^2 dx = \frac{1}{6} m_n V^2. \quad (7.28)$$

Закон збереження енергії стосовно нашої системи має вигляд

$$\frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{6} m_n V^2 + \frac{1}{2} kx^2 = const.$$

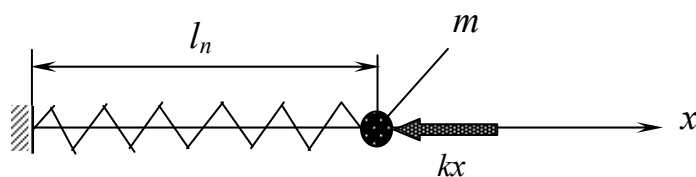


Рисунок 7.13 – До уточнення моделі коливань

Продиференціювавши рівняння (7.28), отримаємо:

$$\frac{1}{2}m_2V \frac{dV}{dt} + \frac{1}{6}m_n 2V \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}k2x \frac{dx}{dt} = 0$$

або

$$\left(m + \frac{m_n}{3}\right) \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (7.29)$$

Сформулюємо математичну модель. Це математична модель коливань вантажу з урахуванням маси пружини (приєднаної маси).

Прикладні математичні задачі умовно можна розділити на два класи: задачі аналізу і синтезу.

Задача аналізу – це дослідження властивостей заданого об'єкта. У цих задачах математична модель зводиться до рівнянь того чи іншого виду (алгебраїчних, трансцендентних, диференціальних, інтегральних і т. д.).

Задача синтезу – вибір об'єкта з деякої сукупності на підставі заданих вимог. Задачі синтезу можуть зводитися до вирішення рівнянь (якщо вимоги мають вигляд рівнянь) або задач на екстремум (створення (синтез) об'єкта з елементів за умови екстремуму властивості методами математичного аналізу, варіаційного обчислення, математичного програмування).

7.4 Основні методи контролю при розв'язанні математичних задач

Прикидки – попередні розв'язання задачі, які виконуються після максимально можливих спрощень змістовної моделі або рівнянь.

Для спрощення змістовної моделі часто використовують неформальне обговорення умов задачі. При цьому залучають фізичні міркування, інтуїцію, аналогію з раніше вивченими випадками.

Прикидки систематично проводять для поточного контролю обчислювань (арифметичних, складних виразів, інтегралів і т.п.).

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+0,1x^3}} dx \approx \int_0^1 dx = 1 \quad (0,9888);$$

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{\sqrt{1+0,1x^3}} dx \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{0,1x^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{0,1}} \left[\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_{10}^{20} = 0,6 \quad (0,584).$$

Контроль розмірностей

Складати і порівнювати можна тільки величини однакової розмірності.

Якщо розмірність величини, наведеної у формулі, відома заздалегідь (фізично), то вона має виходити і з формули.

Аргументи трансцендентних (неалгебраїчних) функцій мають бути безрозмірними (*exp, sin, sh*).

Наприклад, $a^2 + 2b$ невірно, якщо a і b мають розмірність довжини (порушено перше правило);

$S = \frac{a^2 + b^2}{a - b}$ – невірно, якщо це площа (порушено друге правило);

$\exp(-2t)$ – невірно, якщо t – час (порушено третє правило).

Контроль системи одиниць

Всі величини, що входять у формулу, мають бути виражені в одній системі одиниць.

Приклад. Знайти масу мідної трикутної пластинки (рисунок 7.14).

$\delta = 0,72$ мм; $\rho = 8,96$ г/см³; $a = 5,2$ см; $b = 3,7$ см.

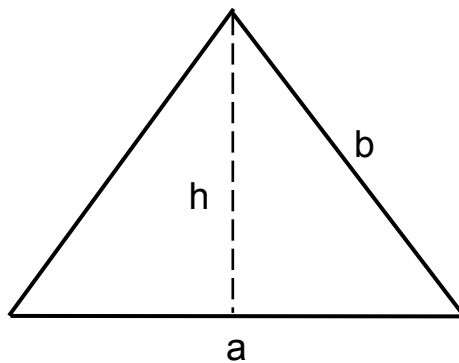


Рисунок 7.14 – До задачі про контроль системи одиниць

Маса пластини

$$m = \frac{1}{2} ah\rho\delta = \frac{1}{2} a\rho\delta \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2,6 \cdot 8,96 \cdot 0,072 = 4,4 \text{ г.}$$

Контроль законів збереження

Якщо в змістовній моделі втрати енергії вважають такими, що ними можна знехтувати, то математична модель має задовольняти умові збереження енергії, а для рішень має виявлятися ця властивість.

Рівняння коливань вантажу

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (7.30)$$

Помножимо ліву частину рівняння на dx і проінтегруємо

$$m \frac{dV}{dt} dx + kx dx = 0$$

або

$$\int mV dV + \int kx dx = 0,$$

звідки виходить

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const. \quad (7.31)$$

Рішення рівняння (7.30) має вигляд

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t. \quad (7.32)$$

Підставимо рішення (7.32) в ліву частину рівняння (7.31):

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + k \frac{x^2}{2} &= \frac{m}{2} \left[-C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right]^2 + \\ &+ \frac{k}{2} \left[C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right]^2 = \\ &= \frac{m}{2} \left[C_1^2 \frac{k}{m} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + C_2^2 \frac{k}{m} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - 2C_1 C_2 \frac{k}{m} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] + \\ &+ \frac{k}{2} \left[C_1^2 \frac{k}{m} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + C_2^2 \frac{k}{m} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + 2C_1 C_2 \frac{k}{m} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] = \\ &= \frac{k}{2} (C_1^2 + C_2^2) = const. \end{aligned}$$

Рівняння коливань з тертям має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (7.33)$$

звідки замість (7.31) випливає

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const - \int fV dx. \quad (7.34)$$

Останній доданок у правій частині рівняння (7.34) являє собою роботу сил тертя.

Контроль екстремальних ситуацій

При цьому параметри моделі наближають до вкрай допустимих значень і стежать за видом проміжних і остаточних співвідношень. В екстремальних ситуаціях завдання зазвичай спрощується або вироджується, що дозволяє простіше провести перевірку.

Для задачі про масу трикутної пластинки (рисунок 7.14)

$$m = \frac{1}{2} a \rho \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2}.$$

Маса пластинки $m \rightarrow 0$ при $a, \rho, \delta \rightarrow 0$ або $b = \frac{a}{2}$.

При отриманні простої формули складним шляхом потрібно шукати більш прямий шлях її виведення (це дає можливість не тільки підтвердити її правильність, але і глибше її зрозуміти).

Наприклад, формула для похідної в напрямі від скалярного поля має вигляд

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (7.35)$$

де x, y, z – декартові координати.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial l} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(x, l) + \\ &+ \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(y, l) + \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(z, l) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) [\cos(x, l)\vec{i} + \cos(y, l)\vec{j} + \cos(z, l)\vec{k}] = \\ &= \frac{1}{r} \vec{r} \vec{l}^0 = \vec{r}^0 \vec{l}^0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Але скалярний добуток одиничних векторів дорівнює косинусу кута між ними:

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \cos(\vec{r}, \vec{l}), \quad (7.37)$$

Нехай AB – дуга окружності з центром у точці O (рисунок 7.15).

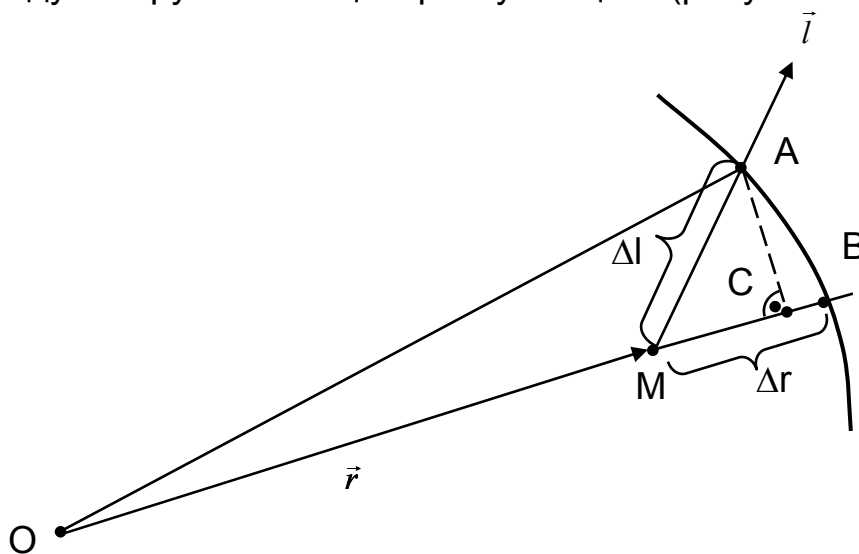


Рисунок 7.15 – До задачі про похідну за напрямком

AB – дуга окружності з центром у точці O . Відрізок AC перпендикулярний до вектора \vec{r} ($AC \perp \vec{r}$).

Оскільки при $\Delta l \rightarrow 0$ $|MC| = |MB|$, то

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta l} = \frac{|MC|}{\Delta l} = \cos(\vec{r}, \vec{l}). \quad (7.38)$$

Верифікація моделі виходить за рамки самоконтролю. Якщо модель досить апробована в даній області, то питання її верифікації не виникає (покладаються на досвід роботи з попередніми моделями).

Питання верифікації математичної моделі виникає, якщо модель будується заново із застосуванням відомих прийомів або застосовується відома модель поза рамками, де вона показувала себе адекватною, чи будується принципово нова математична модель.

Приклад. Математична модель процесу падіння дощової краплі середнього розміру з висоти $H = 300$ м з нульовою початковою швидкістю.

1. Якщо вважати падіння краплі рівноприскореним, то $a = const$, звідки виходить $\frac{dV}{dt} = g$, $dV = gdt$, $V = gt + C_1$. $\frac{dx}{dt} = gt + C_1$ і після інтегрування

отримаємо $x = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$.

Використовуючи початкові умови при $t = 0$: $x = 0$; $V = 0$, отримаємо $C_1 = C_2 = 0$ і $x = \frac{gt^2}{2}$.

Час падіння дощової краплі за цією математичною моделлю

$$T = \sqrt{\frac{2x}{g}}. \quad (7.39)$$

Для наших умов час падіння краплі $T = 7,8$ с, а швидкість у кінці падіння $V = 76,4$ м/с.

2. Експериментальні дані показують, що фактично дощова крапля падає близько 30 с., що свідчить про неадекватність моделі. Причина цього – не врахований опір повітря при падінні дощової краплі. Найпростіше припущення полягає в тому, що сила опору повітря пропорційна швидкості падіння краплі. Рівняння руху при цьому має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = g, \quad (7.40)$$

де m – маса краплі; k – коефіцієнт аеродинамічного опору тертя.

Розв'язок диференціального рівняння (7.40) має вигляд

$$x = C_1 + C_2 \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + \frac{mg}{k}t. \quad (7.41)$$

Сталі C_1 і C_2 визначаємо з початкових умов при $t = 0$: $x = 0$; $V = 0$. З урахуванням цього рішення (7.41) має вигляд

$$x = \frac{m^2g}{k^2} \left[\frac{k}{m}t + \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - 1 \right]. \quad (7.42)$$

Нехай дощова крапля має форму сфери з радіусом $r = 0,3$ мм, густина води $\rho = 1000$ кг/м³, коефіцієнт динамічної в'язкості повітря $\eta = 1,82 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Маса дощової краплі $m = \frac{4}{3}\rho\pi r^3 = 0,11$ мг, коефіцієнт аеродинамічного опору тертя $k = 6\pi\eta r$. При цих даних час падіння краплі $T = 30$ с, а швидкість в кінці падіння $V = 10,8$ м/с.

8 КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ Й ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ

Під критеріями міцності розуміють аналітичні залежності межі напружено-деформованого стану матеріалу (елемента конструкції або конструкції в цілому), в межах яких матеріал (елемент конструкції або конструкція) може працювати без настання граничного стану.

8.1 Критерій максимальних нормальних напружень

Пластична деформація або руйнування крихких матеріалів наступають тоді, коли найбільше за абсолютною величиною головне напруження досягає граничного значення.

Згідно з цим критерієм

$$|\sigma_1| = \sigma_{\sigma} \text{ або якщо } |\sigma_3| > |\sigma_1|, |\sigma_3| = \sigma_{\sigma}, \quad (8.1)$$

а умови міцності

$$|\sigma_1| \leq \sigma_{\sigma} \text{ або } |\sigma_3| \leq \sigma_{\sigma}. \quad (8.2)$$

Гранична поверхня для критерію максимальних нормальних напружень – це куб у просторі напружень (рисунок 8.1).

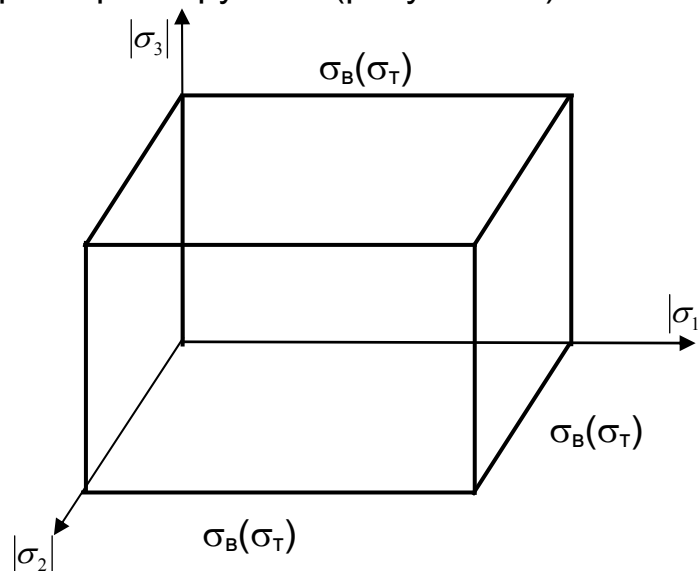


Рисунок 8.1 – Гранична поверхня критерію максимальних нормальних напружень

Як показують численні експерименти, критерій максимальних напружень не відображає умови переходу матеріалу до пластичного стану або його руйнування. Для комбінації розтягування зі стисненням критерій дає завищений опір матеріалу, а при всебічному стисненні – сильно занижений.

Отже, цей критерій має в основному історичне значення.

8.2 Критерій максимальних лінійних деформацій

Руйнування матеріалу починається, коли найбільша за модулем лінійна деформація подовження досягає граничного значення (гіпотеза Маріотта, Сен-Венана).

При лінійному фізичному законі

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_\epsilon}{E} \text{ або } \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_\epsilon, \quad (8.3)$$

а умова міцності

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_\epsilon. \quad (8.4)$$

Як показують експерименти, критерій максимальних деформацій не може застосовуватися як універсальний критерій, застосовний для будь-яких напружених станів.

Для ряду матеріалів і деяких напружених станів цей критерій добре узгоджується з експериментом (зокрема, для стволів артилерійських гармат).

8.3 Критерій найбільших дотичних напружень

Пластичні деформації наступають, якщо максимальне дотичне напруження досягає граничного значення (Тріска, 1865 р.).

Величина максимального дотичного напруження

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (8.5)$$

При чистому розтягуванні $\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_\epsilon}{2}$. З урахуванням цього умова міцності має вигляд:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_\epsilon. \quad (8.6)$$

Гранична поверхня критерію максимальних дотичних напружень у координатах (σ_1, σ_3) показана на рисунку 8.2, а в координатах (σ_1, σ_2) – на рисунку 8.3.

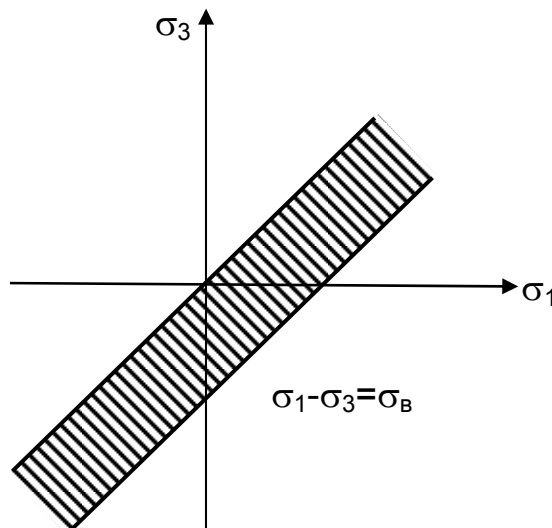


Рисунок 8.2 – Гранична поверхня критерію максимальних дотичних напружень

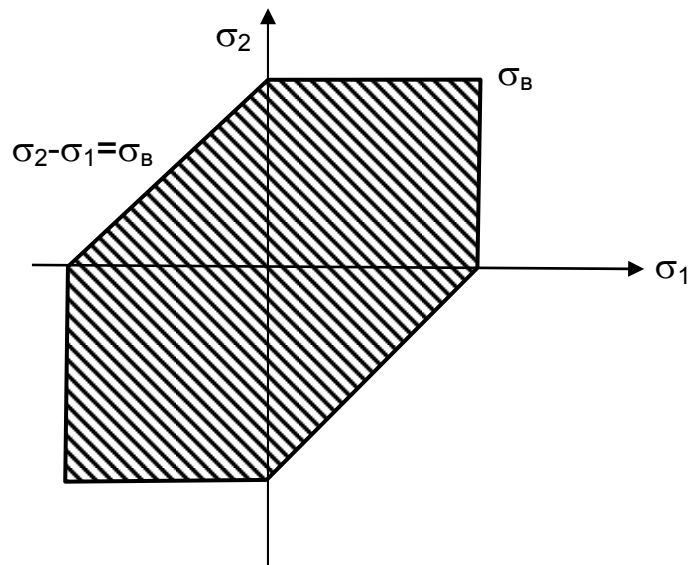


Рисунок 8.3 – Гранична поверхня критерію максимальних дотичних напружень

Критерій найбільших дотичних напружень задовільно фіксує початок пластичних деформацій для багатьох металів і сплавів (маловуглецевих сталей).

8.4 Енергетичний критерій міцності

Матеріал переходить у стан пластичного деформування або руйнування, якщо повна питома енергія деформації досягає граничного значення (Губер, 1904 р.; Мізес, 1913 р.; Хенкі, 1924 р.).

Повна питома енергія деформації, записана через головні напруження, має вигляд

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (8.7)$$

Фізичний закон для ізотропного тіла

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

З урахуванням (8.8) повна енергія деформацій

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \quad (8.9)$$

$$U = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 - \mu\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2^2 - \mu\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_3^2 - \mu\sigma_3(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (8.10)$$

При граничному одноосьовому напруженому стані ($\sigma_1 = \sigma_0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) граничне значення енергії деформації

$$U_{пред} = \frac{1}{2E} \sigma_6^2. \quad (8.11)$$

Прирівнюючи вирази повної енергії деформації (8.10) і граничне значення енергії (8.11), отримаємо

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_6. \quad (8.12)$$

Цей критерій не підтверджується експериментальними даними і має тільки історичне значення.

8.5 Критерій енергії формоутворення

Пластичний стан або руйнування настають, коли енергія формоутворення досягає граничного значення (Губер, 1904 р.; Мізес, 1913 р.; Хенкі, 1924 р.).

Повна питома енергія деформування може бути наведена у вигляді суми енергії, яка йде на зміну об'єму тіла і енергії формоутворення

$$U = U_{об} + U_{форм}. \quad (8.13)$$

Енергія, яка витрачається на зміну об'єму тіла, за аналогією з (8.7)

$$U_{об} = \frac{1}{2}(\sigma_{сер}\varepsilon_{сер} + \sigma_{сер}\varepsilon_{сер} + \sigma_{сер}\varepsilon_{сер}) = \frac{3}{2}\sigma_{сер}\varepsilon_{сер}. \quad (8.14)$$

Із фізичного закону у вигляді (8.8) виходить

$$\varepsilon_{сер} = \frac{1}{E}(\sigma_{сер} - 2\mu\sigma_{сер}) = \frac{\sigma_{сер}(1-2\mu)}{E}. \quad (8.15)$$

З урахуванням (8.15) енергія, яка витрачається на зміну об'єму тіла,

$$U_{об} = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_{сер}^2 = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \cdot \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2 = \frac{1-2\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (8.16)$$

Енергія формоутворення як частина енергії деформування тіла з урахуванням (8.13), (8.9) і (8.16) має вигляд

$$U_{форм} = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1+\mu}{3E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (8.17)$$

Гранична енергія деформування тіла при одновісному напруженому стані ($\sigma_1 \neq 0$)

$$U_{гр} = \frac{1}{2E} \sigma_6^2. \quad (8.18)$$

Прирівнюючи вираження енергії формоутворення (8.17) і граничне значення енергії (8.18), отримаємо

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_6. \quad (8.19)$$

8.6 Критерії міцності анізотропних матеріалів

Розроблення критеріїв міцності анізотропних матеріалів розпочато порівняно недавно з появою конструкційних матеріалів з анізотропними властивостями.

Ці роботи проводили за трьома напрямками:

- узагальнення на анізотропні матеріали деяких класичних критеріїв міцності ізотропних матеріалів;
- використання умови Мізеса, запропонованої ним для анізотропних кристалів, і критерію Мізеса–Хілла, розвинутого Хіллом для матеріалів і сплавів;
- розроблення нових критеріїв.

Для кристалічних анізотропних матеріалів з однаковими межами міцності на розтягання-стиснення умова пластичності запропонована Мізесом у вигляді полінома другого ступеня в головних осях ортотропії матеріалу:

$$\begin{aligned} & \Pi_1\sigma_x^2 + \Pi_2\sigma_y^2 + \Pi_3\sigma_z^2 + \Pi_4\sigma_x\sigma_y + \Pi_5\sigma_y\sigma_z + \\ & + \Pi_6\sigma_x\sigma_z + \Pi_7\tau_{xy}^2 + \Pi_8\tau_{yz}^2 + \Pi_9\tau_{xz}^2 = 1, \end{aligned} \quad (8.20)$$

де Π_i – компоненти міцності матеріалу, які виражаються через його механічні характеристики.

Основне допущення теорії Мізеса полягає в тому, що умова міцності не залежить від кульового тензора напружень (додавання гідростатичного тиску не впливає на настання руйнування).

Отже, за Мізесом для тензорів напружень T_H і T'_H умови міцності однакові, де

$$T_H = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}; \quad (8.21)$$

$$T'_H = \begin{Bmatrix} \sigma_x + \sigma_{cep} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y + \sigma_{cep} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z + \sigma_{cep} \end{Bmatrix}. \quad (8.22)$$

Умова міцності аналогічна (8.20) для тензора напружень (8.22):

$$\begin{aligned} & \Pi_1(\sigma_x + \sigma_{cep})^2 + \Pi_2(\sigma_y + \sigma_{cep})^2 + \Pi_3(\sigma_z + \sigma_{cep})^2 + \\ & + \Pi_4(\sigma_x + \sigma_{cep})(\sigma_y + \sigma_{cep}) + \Pi_5(\sigma_y + \sigma_{cep})(\sigma_z + \sigma_{cep}) + \\ & + \Pi_6(\sigma_x + \sigma_{cep})(\sigma_z + \sigma_{cep}) + \Pi_7\tau_{xy}^2 + \Pi_8\tau_{yz}^2 + \Pi_9\tau_{xz}^2 = 1. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Розгорнута залежність (8.23) має вигляд:

$$\begin{aligned}
& \Pi_1 \sigma_x^2 + 2\Pi_1 \sigma_x \sigma_{cep} + \Pi_1 \sigma_{cep}^2 + \Pi_2 \sigma_y^2 + 2\Pi_2 \sigma_y \sigma_{cep} + \Pi_2 \sigma_{cep}^2 + \Pi_3 \sigma_z^2 + \\
& + 2\Pi_3 \sigma_z \sigma_{cep} + \Pi_3 \sigma_{cep}^2 + \Pi_4 \sigma_x \sigma_y + \Pi_4 \sigma_y \sigma_{cep} + \Pi_4 \sigma_x \sigma_{cep} + \Pi_4 \sigma_{cep}^2 + \\
& + \Pi_5 \sigma_y \sigma_z + \Pi_5 \sigma_z \sigma_{cep} + \Pi_5 \sigma_y \sigma_{cep} + \Pi_5 \sigma_{cep}^2 + \Pi_6 \sigma_x \sigma_z + \Pi_6 \sigma_z \sigma_{cep} + \\
& + \Pi_6 \sigma_{cep}^2 + \Pi_7 \tau_{xy}^2 + \Pi_8 \tau_{yz}^2 + \Pi_9 \tau_{xz}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Оскільки обидві умови (8.20) і (8.24) описують одну і ту ж поверхню руйнування, то треба прирівняти коефіцієнти при компонентах T_n і T'_n , звідки отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}
2\Pi_1 + \Pi_4 + \Pi_6 &= 0; \\
2\Pi_2 + \Pi_4 + \Pi_5 &= 0; \\
2\Pi_3 + \Pi_5 + \Pi_6 &= 0; \\
\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5 + \Pi_6 &= 0.
\end{aligned} \tag{8.25}$$

Рівняння (8.25) дозволяють отримати залежності, які визначають Π_4 , Π_5 і Π_6 через Π_1 , Π_2 і Π_3 :

$$\Pi_4 = \Pi_3 - \Pi_1 - \Pi_2; \tag{8.26}$$

$$\Pi_5 = \Pi_1 - \Pi_2 - \Pi_3; \tag{8.27}$$

$$\Pi_6 = \Pi_2 - \Pi_1 - \Pi_3. \tag{8.28}$$

Незалежні компоненти міцності $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_7, \Pi_8, \Pi_9$ визначають із простих граничних станів:

– при одновісному розтягуванні-стисненні ($\sigma_x \neq 0$) $\Pi_1 \sigma_x^2 = 1$, звідки виходить

$$\Pi_1 = \frac{1}{\sigma_{e1}^2}. \tag{8.29}$$

Аналогічно з розгляду інших граничних станів

$$\Pi_2 = \frac{1}{\sigma_{e2}^2}; \quad \Pi_3 = \frac{1}{\sigma_{e3}^2}; \quad \Pi_7 = \frac{1}{\tau_{e12}^2}; \quad \Pi_8 = \frac{1}{\tau_{e23}^2}; \quad \Pi_9 = \frac{1}{\tau_{e13}^2}. \tag{8.30}$$

З урахуванням цього критерій Мізеса–Хілла має вигляд

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{e1}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{e2}^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_{e3}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{e12}^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{\tau_{e23}^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\tau_{e13}^2} + \left(\frac{1}{\sigma_{e3}^2} - \frac{1}{\sigma_{e1}^2} - \frac{1}{\sigma_{e2}^2} \right) \sigma_x \sigma_y + \\
& + \left(\frac{1}{\sigma_{e1}^2} - \frac{1}{\sigma_{e2}^2} - \frac{1}{\sigma_{e2}^2} \right) \sigma_y \sigma_z + \left(\frac{1}{\sigma_{e2}^2} - \frac{1}{\sigma_{e1}^2} - \frac{1}{\sigma_{e3}^2} \right) \sigma_x \sigma_z = 1.
\end{aligned} \tag{8.31}$$

В окремому випадку плоского напруженого стану залежність для критерію Мізеса–Хілла:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{e1}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{e2}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{e12}^2} - \left(\frac{1}{\sigma_{e1}^2} + \frac{1}{\sigma_{e2}^2} \right) \sigma_x \sigma_y = 1. \tag{8.32}$$

Цей критерій добре узгоджується з експериментальними даними для матеріалів зі слабкою анізотропією.

Разом із (8.31) використовується інша форма критерію Мізеса–Хілла:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\epsilon 1}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\epsilon 2}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{\epsilon 12}^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{\epsilon 1}^2} = 1. \quad (8.33)$$

Для оцінки міцності композитів використовують й інші критерії міцності.

Критерій Верена

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\epsilon 1}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\epsilon 2}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{\epsilon 12}^2} = 1. \quad (8.34)$$

Критерій Норіса

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\epsilon 1}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\epsilon 2}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{\epsilon 12}^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{\epsilon 1} \sigma_{\epsilon 2}} = 1. \quad (8.35)$$

Критерій Фішера

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\epsilon 1}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\epsilon 2}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{\epsilon 12}^2} - K \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{\epsilon 1} \sigma_{\epsilon 2}} = 1, \text{ де } K = \frac{E_1(1 + \mu_{21}) + E_2(1 + \mu_{12})}{2\sqrt{E_1 E_2(1 + \mu_{12})(1 + \mu_{21})}}. \quad (8.36)$$

Всі ці критерії не враховують те, що матеріал може мати різні межі міцності на розтягування і стиснення. Ці недоліки усунуті в інших критеріях, які дають кращу збіжність з експериментальними даними.

Критерій Хоффмана

$$\frac{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y}{\sigma_{\epsilon 1p} \sigma_{\epsilon 1c}} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\epsilon 2p} \sigma_{\epsilon 2c}} + \frac{\sigma_{\epsilon 1c} - \sigma_{\epsilon 1p}}{\sigma_{\epsilon 1p} \sigma_{\epsilon 1c}} \sigma_x + \frac{\sigma_{\epsilon 2c} - \sigma_{\epsilon 2p}}{\sigma_{\epsilon 2p} \sigma_{\epsilon 2c}} \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{\epsilon 12}^2} = 1, \quad (8.37)$$

де $\sigma_{\epsilon 1p}$, $\sigma_{\epsilon 2p}$ – межа міцності матеріалу при розтягуванні в напрямку відповідно осей x і y ; $\sigma_{\epsilon 1c}$, $\sigma_{\epsilon 2c}$ – межа міцності матеріалу при стисканні в напрямку осей x і y .

Критерій Гольденблата–Копнова

$$\left(\frac{1}{\sigma_{\epsilon 1p}} - \frac{1}{\sigma_{\epsilon 1c}} \right) \sigma_x + \left(\frac{1}{\sigma_{\epsilon 2p}} - \frac{1}{\sigma_{\epsilon 2c}} \right) \sigma_y + \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_{\epsilon 1p}} + \frac{1}{\sigma_{\epsilon 1c}} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{1}{\sigma_{\epsilon 2p}} + \frac{1}{\sigma_{\epsilon 2c}} \right)^2 \sigma_y^2 + \left[\left(\frac{1}{\sigma_{\epsilon 1p}} + \frac{1}{\sigma_{\epsilon 1c}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_{\epsilon 2p}} + \frac{1}{\sigma_{\epsilon 2c}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\tau_{\epsilon 45}^{\oplus}} + \frac{1}{\tau_{\epsilon 45}^{-}} \right)^2 \right] \sigma_x \sigma_y + 4 \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{\epsilon 12}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 2, \quad (8.38)$$

де $\sigma_{\epsilon 1p}$, $\sigma_{\epsilon 2p}$, – межа міцності матеріалу при розтягуванні в напрямку відповідно осей x і y ; $\sigma_{\epsilon 1c}$, $\sigma_{\epsilon 2c}$, – межа міцності матеріалу при стисканні в напрямку осей x і y ; $\tau_{\epsilon 45}^{\oplus}$, $\tau_{\epsilon 45}^{-}$ – межа міцності матеріалу при зсуві під кутом 45° відносно системи координат ортотропії матеріалу.

9 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ Й РОЗМІРНОСТЕЙ

9.1 Методи подібності й розмірностей в механіці

У системі СІ за одиниці вимірювання (основні) прийняті:

- метр – довжина;
- кілограм – маса;
- секунда – час;
- ампер – сила струму;
- кельвін – термодинамічна температура;
- кандела – сила світла;
- моль – кількість речовини.

При встановленні основних одиниць вимірювання одиниці вимірювання інших величин виходять автоматично. Вираз похідної одиниці вимірювання через основні називається розмірністю.

Символічно розмірність записують у вигляді формули. Для основних механічних одиниць вимірювання можуть бути прийняті позначення: L – довжина, M – маса, T – час. Тоді похідні одиниці вимірювання будуть наведені у вигляді:

- швидкості

$$[V] = \frac{L}{T}; \quad (9.1)$$

- сили

$$[F] = \frac{ML}{T^2}; \quad (9.2)$$

- прискорення

$$[A] = \frac{L}{T^2}. \quad (9.3)$$

Математична модель досліджуваного процесу може бути подана у вигляді однорідного або неоднорідного співвідношення щодо розмірності.

Однорідне співвідношення – це співвідношення, в якому форма його запису не залежить від вибору одиниць вимірювань:

Неоднорідне співвідношення – це співвідношення, в якому форма його запису залежить від вибору одиниць вимірювань.

Наприклад, $\Delta l = 5 \cdot 10^{-7} \frac{Pl}{F}$ – залежність для визначення подовження

сталевого стрижня в системі МКГС (кг, см) при $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

Якщо в математичній моделі отримано неоднорідне співвідношення, то може бути:

- або не врахована якась змінна;
- або присутня неявно «зайва» змінна.

Основне (очевидне) правило: розмірності зліва і справа в однорідному співвідношенні мають збігатися.

Приклад 1. Другий закон Ньютона: сила прямо пропорційна масі і прискоренню. Математична модель може бути записана у вигляді

$$F = m^\alpha a^\beta, \quad (9.4)$$

де α і β – шукані параметри.

З урахуванням прийнятих позначень можна записати:

$$[F] = MLT^{-2}; [m] = M; [a] = LT^{-2}.$$

Підстановка цих залежностей в (9.4) приводить до виразу $MLT^{-2} = M^\alpha (LT^{-2})^\beta$, звідки випливає $\alpha=1$ і $\beta=1$, тобто

$$F = ma. \quad (9.5)$$

Приклад 2. Критичне навантаження при стисненні бруса: критичне стискаюче навантаження пропорційно модулю пружності матеріалу, довжині бруса і моменту інерції. Математична модель може бути записана у вигляді

$$P_{kp} = E^\alpha l^\beta I^\gamma, \quad (9.6)$$

де α , β і γ – шукані параметри.

З урахуванням прийнятих позначень можна записати:

$$[P_{kp}] = MLT^{-2}; [E] = ML^{-1}T^{-2}; [l] = ML; [I] = L^4.$$

Підстановка цих залежностей в (9.6) приводить до виразу $MLT^{-2} = (ML^{-1}T^{-2})^\alpha l^\beta (L^4)^\gamma$, в результаті одержуємо $\alpha=1$ і $\beta=4\gamma-2$. При $\gamma=1$ $\beta=-2$

$$P_{kp} = \frac{EI}{l^2}. \quad (9.7)$$

Приклад 3. Сила опору руху тіла в рідині пропорційна швидкості руху тіла, його розміру, в'язкості і густині рідини. Математична модель може бути записана у вигляді

$$X = V^\alpha l^\beta \mu^\gamma \rho^\delta, \quad (9.8)$$

де α , β , γ і δ – шукані параметри.

З урахуванням прийнятих позначень можна записати:

$$[X] = MLT^{-2}; [V] = LT^{-1}; [l] = L; [\mu] = ML^{-1}T^{-1}; [\rho] = ML^{-3}.$$

Підстановка цих залежностей в (9.8) приводить до виразу $MLT^{-2} = (LT^{-1})^\alpha l^\beta (ML^{-1}T^{-1})^\gamma (ML^{-3})^\delta$, в результаті одержуємо $\alpha=2-\gamma$; $\beta=2-\gamma$; $\delta=1-\gamma$. При $\gamma=0$

$$X = V^2 l^2 \rho. \quad (9.9)$$

Приклад 4. Прогин бруса пропорційний прикладеному зусиллю, довжині бруса, модулю пружності матеріалу і моменту інерції. Математична модель може бути записана у вигляді

$$w = P^\alpha l^\beta E^\gamma I^\delta, \quad (9.10)$$

де α , β , γ і δ – шукані параметри.

З урахуванням прийнятих позначень

$$[w] = L, [P] = MLT^{-2}, [l] = L, [E] = ML^{-1}T^{-2}, [I] = L^4.$$

Підстановка цих залежностей в (9.10) приводить до виразу $L = (MLT^{-2})^\alpha L^\beta (ML^{-1}T^{-2})^\gamma (L^4)^\delta$. З цього виразу випливає $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $\gamma = -1$; $\delta = -1$, тобто

$$w = Pl^3 E^{-1} I^{-1} = \frac{Pl^3}{EI}. \quad (9.11)$$

Приклад 5. Власна частота коливань бруса пропорційна модулю пружності матеріалу, моменту інерції, погонній масі і довжині бруса. Математична модель може бути записана у вигляді

$$f = E^\alpha I^\beta m^\gamma l^\delta, \quad (9.12)$$

де α , β , γ і δ – шукані параметри.

З урахуванням прийнятих позначень можна записати:

$$[f] = T^{-1}, [E] = ML^{-1}T^{-2}, [I] = L^4, [m] = ML^{-1}, [l] = L.$$

Підстановка цих залежностей в (9.12) приводить до виразу $T^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^\alpha (L^4)^\gamma (ML^{-1})^\beta L^\delta$. Із цього виразу випливає $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{2}$; $\gamma = -\frac{1}{2}$; $\delta = -2$, тобто

$$f = E^{\frac{1}{2}} I^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} l^{-2} = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (9.13)$$

Приклад 6. Пробивання перепони товщиною δ тілом масою M . Критична швидкість пробивання перепони пропорційна масі тіла, модулю пружності матеріалу перепони і товщині перепони. Математична модель може бути записана у вигляді

$$V_{kp} = M^\alpha E^\beta \delta^\gamma, \quad (9.14)$$

де α , β і γ – шукані параметри.

З урахуванням прийнятих позначень можна записати:

$$[V] = LT^{-1}, [M] = M, [E] = ML^{-1}T^{-2}, [\delta] = L.$$

Підстановка цих залежностей в (9.14) приводить до виразу $LT^{-1} = M^\alpha (ML^{-1}T^{-2})^\beta L^\gamma$. Із цього виразу випливає $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{2}$; $\gamma = \frac{3}{2}$, тобто

$$V_{kp} = \sqrt{\frac{E\delta^3}{M}}. \quad (9.15)$$

Приклад 7. Критичний розмір тріщини (рисунок 9.1). Критичний розмір, при якому тріщина в твердому тілі починає рости, залежить від прикладених напружень, модуля пружності матеріалу тіла і роботи руйнування

на одиницю довжини поверхні тріщини. Математична модель може бути записана у вигляді

$$l = \sigma^\alpha E^\beta \gamma^\gamma, \quad (9.16)$$

де α , β і γ – шукані параметри.

З урахуванням прийнятих позначень можна записати:

$$[l] = L, [\sigma] = ML^{-1}T^{-2}, E = ML^{-1}T^{-2}, [\gamma] = MT^{-2}.$$

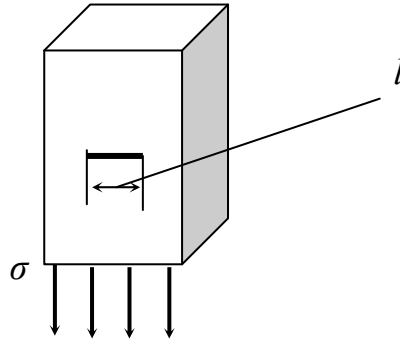


Рисунок 9.1 – До визначення критичного розміру тріщини

Підстановка цих залежностей в (9.16) приводить до виразу $L = (ML^{-1}T^{-2})^\alpha (ML^{-1}T^{-2})^\beta (MT^{-2})^\gamma$. З цього виразу випливає $\alpha = -2$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$, тобто

$$l_{kp} = \frac{E\gamma}{\sigma^2}. \quad (9.17)$$

9.2 Деякі теореми методу розмірностей

Безрозмірним комплексом називається співвідношення, яке має безрозмірний вигляд. Використання таких комплексів дозволяє зменшити кількість змінних.

При аналізі залежності сили опору руху тіла в рідині була записана математична модель у вигляді (9.8) $X = V^\alpha l^\beta \mu^\gamma \rho^\delta$. З урахуванням прийнятих позначень отримано рівняння

$$MLT^{-2} = (LT^{-1})^\alpha L^\beta (ML^{-1}T^{-1})^\gamma (ML^{-3})^\delta,$$

з якого випливає залежність $X = V^{2-\gamma} l^{2-\gamma} \mu^\gamma \rho^{1-\gamma}$.

Для створення безрозмірних комплексів у вирази методу розмірностей відповідно до методу Релея об'єднуються співмножники, які мають однакові показники, в результаті чого виходить вираз

$$X = V^2 l^2 \rho \left(\frac{\mu}{Vl\rho} \right)^\gamma. \quad (9.17)$$

Перетворивши залежність (9.17)

$$\frac{X}{V^2 l^2 \rho} = \left(\frac{\mu}{Vl\rho} \right)^\gamma, \quad (9.18)$$

отримуємо зліва і справа безрозмірні співвідношення.

При $\gamma = 1$ права частина виразу (9.18) являє собою коефіцієнт лобового опору $C_x = \frac{A}{Re}$ при течії стисливої рідини.

Теорема Букенгейма

Якщо співвідношення однорідне щодо розмірностей, то його завжди можна звести до набору безрозмірних комплексів.

Задача зведення однорідного співвідношення до безрозмірних комплексів багатозначна. Багатозначність задачі визначається різницею між числом змінних і числом основних одиниць виміру.

π -теорема

Якщо відомо співвідношення $\varphi_1(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$, для опису якого вибрано k основних одиниць виміру, то завжди можна скласти співвідношення між безрозмірними комплексами $\varphi_2(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) = 0$, яке містить $n - k$ змінних (безрозмірних комплексів).

Побудова моделей з використанням методу розмірностей може бути зведена до таких етапів:

1. Вибір незалежних змінних, які суттєво впливають на поведінку об'єкта.
2. Вибір основної системи одиниць вимірювання.
3. Складання безрозмірних комплексів.
4. Отримання моделі та її аналіз.

Примітки:

- розв'язання вірно, якщо всі комплекси є безрозмірними;
- число безрозмірних комплексів має бути не менше, ніж визначає π -теорема;
- кожен безрозмірний комплекс має брати участь у співвідношенні.

Теорія подібності пов'язана з теоремою розмірностей. Її застосовують для поширення умов експерименту (фізичного, чисельного) за межі кордонів самого експерименту. Теорію подібності широко використовують при фізичному моделюванні.

Критерії подібності створюються всередині визначеного класу явищ. При цьому всі явища, що входять в одну групу, вважаються подібними і відрізняються тільки масштабами.

Для задачі обтікання тіла було отримано $\frac{X}{V^2 l^2 \rho} = \left(\frac{\mu}{V l \rho} \right)^\gamma$ і $C_x = \frac{A}{Re}$.

Тобто якщо розглядати натурний експеримент і модель, то $X_{нат} = C_{x\,нат} \frac{\rho_{нат} V_{нат}^2}{2} \rho_{нат}$, $X_{мод} = C_{x\,мод} \frac{\rho_{мод} V_{мод}^2}{2} \rho_{мод}$.

Завдання полягає в тому, щоб провести експеримент на моделі і з використанням його результатів порахувати натурний об'єкт. Для цього треба знати $C_{x \text{ нат}}$. Із залежності $C_x = \frac{A}{Re}$ випливає, що $C_{x \text{ нат}} = C_{x \text{ мод}}$, якщо

$$Re_{\text{нат}} = Re_{\text{мод}} \text{ або } \frac{\mu_{\text{мод}}}{V_{\text{мод}} l_{\text{мод}} \rho_{\text{мод}}} = \frac{\mu_{\text{нат}}}{V_{\text{нат}} l_{\text{нат}} \rho_{\text{нат}}}.$$

Звідси якщо характерний розмір моделі менше ($l_{\text{мод}} \downarrow$), то для того, щоб числа Рейнольдса при натурному експерименті і при моделюванні були однаковими ($Re_{\text{нат}} = Re_{\text{мод}}$), потрібно збільшити швидкість обдування моделі і густину повітряного середовища ($V_{\text{мод}} \uparrow, \rho_{\text{мод}} \uparrow$). Точно дотриматися рівності чисел Рейнольдса природи і моделі дуже важко. Але C_x та інші характеристики плавно залежать від Re і, можливо, моделювання з уточненнями зі зміною чисел Рейнольдса.

Теорія подібності базується на трьох теоремах:

Теорема 1. Два фізичних явища подібні, якщо вони описуються однією і тією ж системою диференціальних рівнянь, мають подібні (граничні) умови однозначності і критерії подібності, які їх визначають, чисельно однаковими.

Теорема 2. Якщо фізичні процеси подібні, то критерії подібності цих процесів однакові між собою.

Теорема 3. Рівняння, що описують фізичні процеси, можуть бути виражені диференціальним зв'язком між критеріями подібності.

Деякі критерії подібності:

Рейнольдса – $Re = \frac{\mu}{Vl\rho} = \frac{\eta}{Vl}$ – відношення сил інерції до сил тертя.

Струхаля – $S = \frac{ap}{V}$ – подібність при коливаннях ($X = Vt + a \sin pt$ – складання рівномірного і коливального рухів).

Маха – $M = \frac{V}{a}$.

Фруда – $F = \frac{V}{\sqrt{gL}}$ – рух тіла по поверхні рідини (L – довжина тіла; V – швидкість руху тіла).

Нуссельта – $Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}$ – моделювання явищ теплопереносу (α – коефіцієнт теплопередачі, Вт/м²; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/м; d – розмір струменя рідини (газу)).

10 ОСНОВИ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ

10.1 Робота руйнування матеріалу

Механіка руйнування – це механіка тіл, що містять тріщини. Тріщини (тріщиноподібні дефекти) є практично в будь-яких конструкції і матеріалі. Конструкція може безпечно експлуатуватися за таких умов:

- тріщина є стійкою (не росте);
- кількість накопичених за час експлуатації тріщин (пошкоджень) не перевищує граничну.

При навантаженні конструкції в ній запасається енергія. Ця енергія може йти на утворення і зростання тріщин.

Отже, чи зруйнується конструкція, залежить від такого:

- енергії, якою володіє тіло;
- розмірів і форми дефектів (тріщин);
- потрібної для росту тріщини енергії.

Гріффітс (1920 р.) вирішив задачу про тріщину відриву при плоскій деформації в нескінченному середовищі (рисунок 10.1).

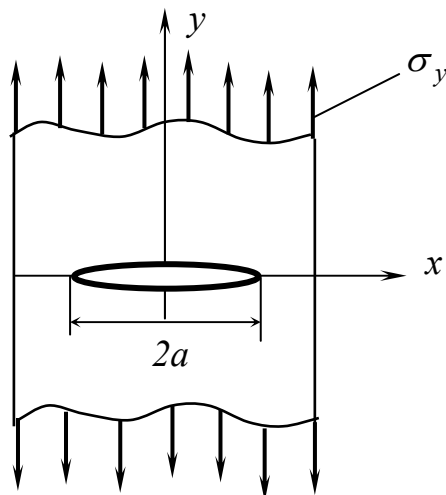


Рисунок 10.1 – До задачі зростання тріщини при плоскій деформації

Якщо γ – питома робота руйнування матеріалу (на одиницю площі тріщини), то необхідна для збільшення тріщини енергія

$$W_{номр} = \gamma 2a l. \quad (10.1)$$

Ця енергія звільняється шляхом «звільнення» напружень поблизу тріщини (рисунок 10.2). Наближено можна вважати, що енергія звільняється на площі, описаній навколо тріщини окружності (рисунок 10.3).

З урахуванням прийнятих припущень, проілюстрованих на рисунках 10.2 і 10.3, звільняється енергія

$$U_{зв} = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \varepsilon \pi 2a^2 l = \frac{\bar{\sigma}^2 \pi a^2}{E} l, \quad (10.2)$$

де $\bar{\sigma}$ – середні напруження далеко від тріщини.

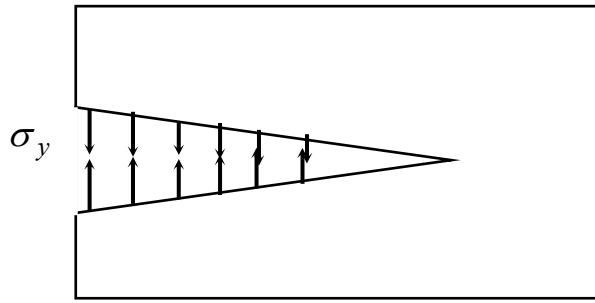


Рисунок 10.2 – До звільнення напружень поблизу тріщини

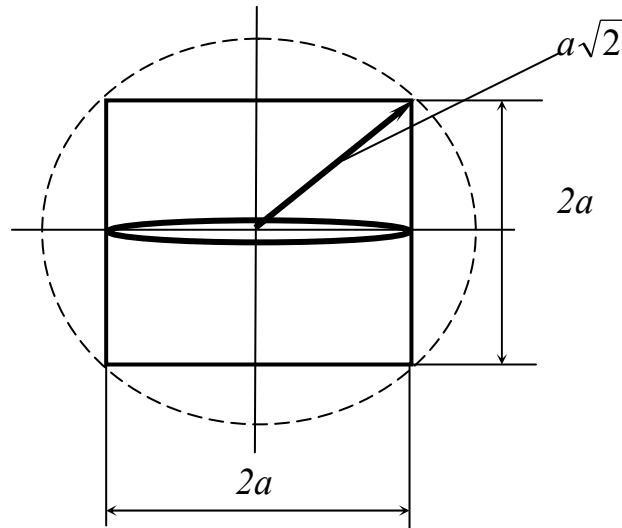


Рисунок 10.3 – До звільнення напружень поблизу тріщини

Залежність потрібної і енергії, що звільняється, від розміру тріщини показана на рисунку 10.4.

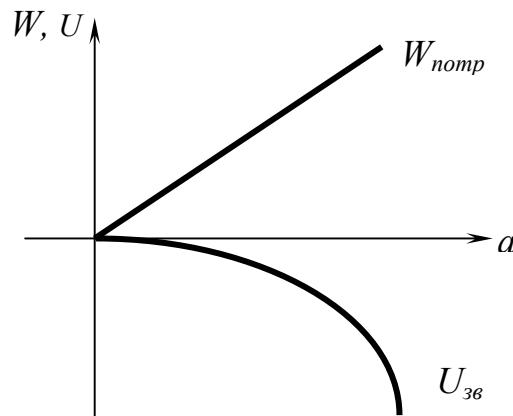


Рисунок 10.4 – Залежність потрібної енергії і енергії, що звільняється, від розміру тріщини

Повна енергія

$$\Pi = W_{нотр} - U_{зв} = 2\gamma a - \frac{\pi\bar{\sigma}^2 a^2}{E}. \quad (10.3)$$

Тріщина має тенденцію до зростання, якщо повна енергія Π буде зменшуватися (рисунок 10.5).

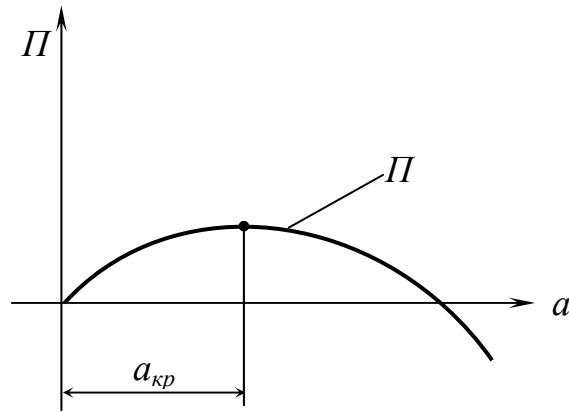


Рисунок 10.5 – Залежність повної енергії від розміру тріщини

Умова екстремуму для повної енергії $\frac{d\Pi}{da_{кр}} = 0$, звідки отримаємо

$$2\gamma - \frac{\pi\bar{\sigma}^2}{E} 2a = 0 \text{ і}$$

$$a_{кр} = \frac{\gamma E}{\pi\bar{\sigma}^2}. \quad (10.4)$$

Наближені значення питомої роботи руйнування, модуля пружності і межі міцності для матеріалів наведені в таблиці 10.1.

Таблиця 10.1 – Наближені значення питомої роботи руйнування, модуля пружності і межі міцності для матеріалів

Матеріал	γ , Н/м	E , ГПа	σ_s , МПа
Сталь високоміцна	10^4	210	1200
Сталь м'яка	10^6	210	500
Епоксидна смола	100	4	50
Кераміка	1...10	150	150

При середньому напруженні, яке дорівнює половині межі міцності матеріалу, критичний розмір тріщини становить:

- високоміцна сталь ≈ 2 мм;
- м'яка сталь ≈ 1200 мм;
- епоксидна смола $\approx 0,2$ мм;
- кераміка $\approx 0,01 \dots 0,1$ мкм.

10.2 Аналіз напружень поблизу кінчика тріщини

Для плоскої задачі (рисунок 10.6) рівняння рівноваги (за відсутності масових сил) записують у вигляді

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (10.5)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (10.6)$$

рівняння сумісності деформацій Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (10.7)$$

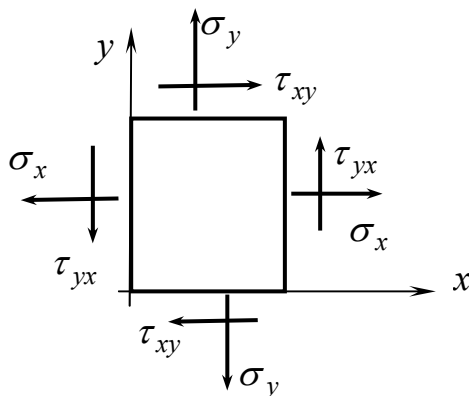


Рисунок 10.6 – Напружений стан елемента для плоскої задачі

Фізичний закон для ізотропного тіла має вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z); \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Причому при плоскому напруженому стані (тонке тіло, $\sigma_z = 0$) фізичний закон має вигляд (10.8), а при плоскій деформації (товсте тіло, $w = 0; \varepsilon_z = 0$) в залежностях (10.8) замість E треба використовувати

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \mu^2}, \text{ а замість } \mu - \bar{\mu} = \frac{\mu}{1 - \mu} \text{ (див. п. 4. 3).}$$

Підставимо співвідношення фізичного закону (10.8) у рівняння сумісності деформацій (10.7). В результаті отримаємо

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = \frac{2(1 + \mu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

або

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (10.9)$$

Другий доданок у рівнянні (10.9) дорівнює нулю, що виходить із рівнянь рівноваги (10.5).

Таким чином, $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$, з урахуванням (10.5)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

або

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (10.10)$$

Це рівняння сумісності деформацій в напруженнях (рівняння Лапласа).

Введемо функцію напружень (функцію Ері) як

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (10.11)$$

З урахуванням цього рівняння (10.10) має вигляд

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \Phi = 0 \quad (10.12)$$

або

$$\nabla^4 \Phi = 0. \quad (10.13)$$

Таким чином, при використанні функції напружень (10.11) задоволення рівняння (10.13) означає задоволення рівнянь сумісності деформацій, рівноваги і фізичного закону. Отже, рішення задачі зводиться до знаходження функції напружень, що задовольняє рівнянню (10.13) і граничним умовам конкретної задачі.

Приклад 1. Розтягування в напрямку осі (рисунок 10.7)

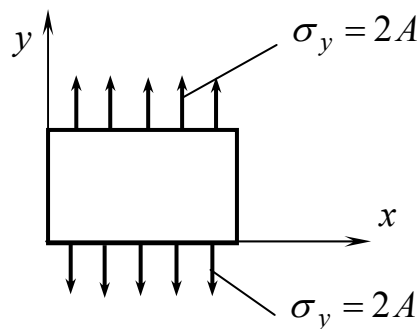


Рисунок 10.7 – До задачі прикладу 1

При виборі функції напружень у вигляді $\Phi = Ax^2$ рівняння (10.13) $\nabla^4 \Phi = 0$ задовольняється, а з урахуванням (10.11) напруження дорівнюють:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2A; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Приклад 2. Чистий зсув (рисунок 10.8)

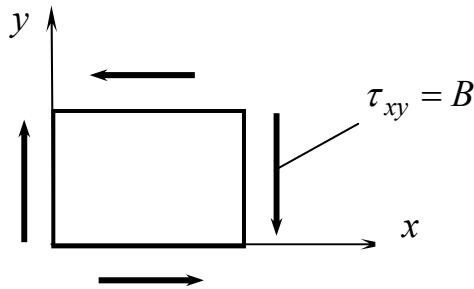


Рисунок 10.8 – До задачі прикладу 2

При виборі функції напружень у вигляді $\Phi = -Bxy$ рівняння (10.13) $\nabla^4\Phi = 0$ задовольняється, а з урахуванням (10.11) напруження дорівнюють:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = B.$$

Приклад 3. Навантаження прямокутної області зосередженою силою на краю (рисунок 10.9)

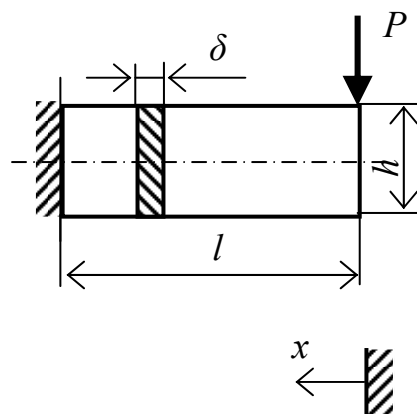


Рисунок 10.9 – До задачі прикладу 3

При виборі функції напружень у вигляді $\Phi = Axy + Bxy^3$ рівняння (10.13) $\nabla^4\Phi = 0$ задовольняється, а з урахуванням (10.11) напруження дорівнюють: $\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 6Bxy$; $\sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0$; $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -A - 3By^2$.

Сталі A і B визначаються з граничних умов: $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 0$ при $y = \pm \frac{h}{2}$, звідки виходить $A + 3B\frac{h^2}{4} = 0$ і $A = -\frac{3Bh^2}{4}$.

Стала B може бути визначена з рівняння рівноваги

$$P = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \delta dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-A - 3By^2) \delta dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{3Bh^2}{4} - 3By^2 \right) \delta dy =$$

$$= \frac{3Bh^2 \delta}{4} h - \frac{3B\delta}{3} 2 \frac{h^3}{8} = \frac{Bh^3 \delta}{2},$$

звідки випливає $B = \frac{2P}{h^3 \delta}$, $A = -\frac{3P}{2h\delta}$.

Таким чином, з урахуванням цього $\sigma_x = \frac{12P}{h^3 \delta} xy = \left(\frac{M}{J_x} y \right)$, $\sigma_y = 0$;

$\tau_{xy} = \frac{3P}{2h\delta} - \frac{6P}{h^3 \delta} y^2 = \frac{3P}{h\delta} \left(\frac{1}{2} - \frac{2y^2}{h^2} \right)$, тобто формули збігаються з формулами опору матеріалів.

Приклад 4. Навантаження прямокутної області розподіленим навантаженням (рисунок 10.10)

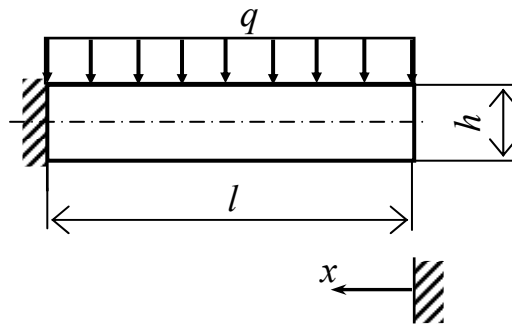


Рисунок 10.10 – До задачі прикладу 4

Функцію напружень вибирають у вигляді $\Phi = Ax^2 + Bx^2 + Cx^2y^3 + Dy^5$.
Вирішальне рівняння (10.13) $\nabla^4 \Phi = 0$ після підстановки в нього функції напружень набуває вигляду $120Dy + 24Cy = 0$, звідки виходить $D = -\frac{C}{5}$.

З урахуванням (10.11) напруження в області дорівнюють:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2C(3x^2y - 2y^3); \quad \sigma_y = 2(A + By + Cy^3); \quad \tau_{xy} = -2x(B + 3Cy^2).$$

Граничні умови: при $y = \frac{h}{2}$ $\sigma_y = -q$; $\tau_{xy} = 0$.

Це приводить до системи рівнянь:

$$q = 2A + 2B \frac{h}{2} + 2C \frac{h^3}{8}; \quad 0 = -2Bx - 6Cx \frac{h^2}{4}; \quad 0 = 2A - 2B \frac{h}{2} - 2C \frac{h^3}{8}.$$

Звідки знаходять $A = -\frac{q}{4}$; $B = -\frac{3q}{4h}$; $C = \frac{q}{h^3}$.

Таким чином, з урахуванням цього $\sigma_x = \frac{q}{h^3}(6x^2y - 4y^3)$,

$$\sigma_y = -\frac{q}{2} - \frac{3q}{2h}y + \frac{2q}{h^3}y^3; \quad \tau_{xy} = \frac{qx}{h}\left(\frac{3}{2} - \frac{6y^2}{h^2}\right).$$

Приклад 5. Навантаження плоскої трикутної області гідростатичним навантаженням з урахуванням власної ваги (рисунок 10.11)

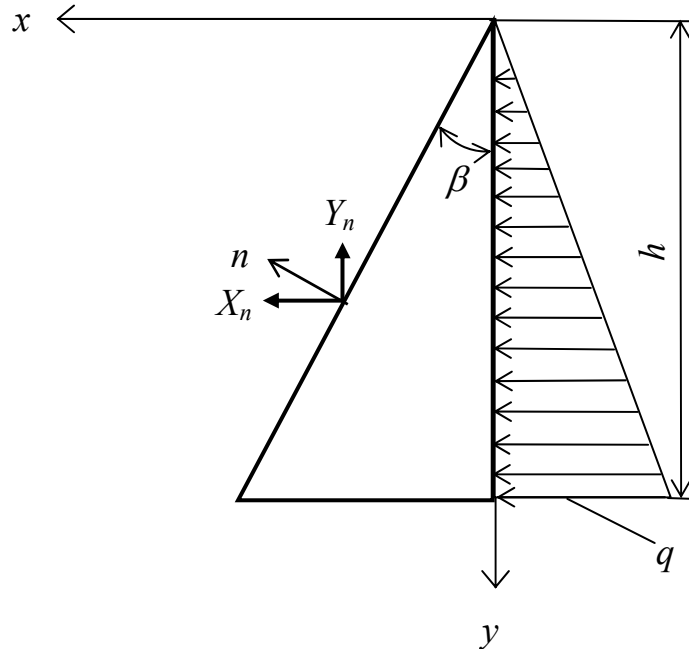


Рисунок 10.11 – До задачі прикладу 5

Запис граничних умов:

– при $x = 0$ $\tau_{yx} = 0$; $\sigma_x = -q \frac{y}{h}$;

– при $x = y \cdot \operatorname{tg} \beta$ $X_n = -\sigma_x l + \tau_{xy} m = 0$; $Y_n = -\tau_{yx} l + \sigma_y m = 0$.

$l = \cos \beta$; $m = \sin \beta$.

Вибір функції напружень $\phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Вибрана функція напружень задовольняє бігармонічному рівнянню (10.13).

З урахуванням (10.11) напруження дорівнюють:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2cx + 6dy; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6ax + 2by; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \gamma x = -2bx - 2cy - \gamma x.$$

Визначення коефіцієнтів a , b , c і d проводять з використанням граничних умов.

Із граничної умови при $x=0$ $\tau_{yx}=0$; $\sigma_x = -q \frac{y}{h}$ виходить $2cy=0$ і

$$6dy = -q \frac{y}{h}, \text{ звідки } c=0; d = -\frac{q}{6h}.$$

Із граничної умови при $x = y \cdot \operatorname{tg} \beta$ виходить

$$6dy \cdot \cos \beta - (2b + \gamma)y \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \beta = 0 \text{ і } \frac{q}{h} \cdot \cos \beta - (2b + \gamma) \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = 0,$$

$$\text{звідки } a = \frac{\gamma}{6} \operatorname{ctg} \beta - \frac{q}{3h} \operatorname{ctg}^3 \beta \text{ і } b = \frac{q}{2h} \operatorname{ctg}^2 \beta - \frac{\gamma}{2}.$$

З урахуванням цього

$$\sigma_y = \operatorname{ctg} \beta \left(\gamma - \frac{2q}{h} \operatorname{ctg}^2 \beta \right) x + \left(\frac{q}{h} \operatorname{ctg}^2 \beta - \gamma \right) y; \quad \tau_{xy} = -\frac{qx}{h} \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

10.3 Функції напружень

Для тіл із тріщинами звичайно використовують функції напружень, які виражені через функції комплексної змінної. Розглянемо функцію $Z(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$, яка має похідні, що подають у вигляді:

$$\bar{Z} = \frac{d\bar{Z}}{dz}; \quad Z = \frac{dZ}{dz}; \quad Z' = \frac{dZ}{dz}. \quad (10.14)$$

Функція \bar{Z} ($\bar{Z} = \operatorname{Re} \bar{Z} + i \operatorname{Im} \bar{Z}$) є аналітичною (тобто має похідні, і вони не залежать від шляху) і гармонічною (задовольняє рівнянню Лапласа $\nabla^2 = 0$).

Умова аналітичності функції $\bar{Z} = \operatorname{Re} \bar{Z} + i \operatorname{Im} \bar{Z}$:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial y} = \operatorname{Re} Z; \quad (10.15)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial y} \right) = \operatorname{Im} Z.$$

Це умова Коші–Рімана, тобто функція має похідні, і вони не залежать від шляху.

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = Z \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = Z \frac{\partial z}{\partial y} = iZ. \quad (10.16)$$

Крім того, оскільки $\bar{Z} = \operatorname{Re} \bar{Z} + i \operatorname{Im} \bar{Z}$,

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial x} + i \frac{\partial \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial y} + i \frac{\partial \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial y}, \quad (10.17)$$

Із залежності (10.16) виходить, що $i \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y}$, тобто

$$i \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial x} + i \frac{\partial \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial x} \right) = \frac{\partial \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial y} + i \frac{\partial \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial y}. \quad (10.18)$$

З урахуванням того, що $Z = \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z$,

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial y} = \operatorname{Re} Z; \quad (10.19)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial y} = \operatorname{Im} Z.$$

Продиференціюємо першу з умов Коші–Рімана (10.15) за x , а другу – за y і отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \bar{Z}}{\partial y^2} = 0 \quad (10.20)$$

або

$$\nabla^2 \operatorname{Re} \bar{Z} = 0. \quad (10.21)$$

Продиференціюємо першу з умов Коші–Рімана (10.15) за y , а другу – за x і отримаємо залежність

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} \bar{Z}}{\partial x^2} = 0 \quad (10.22)$$

або

$$\nabla^2 \operatorname{Im} \bar{Z} = 0. \quad (10.23)$$

Отже, функції аналітичні і гармонічні.

У механіці руйнування розглядають три основні задачі (три види переміщень тріщини):

– відрив: переміщення від симетричного поля напружень (рисунок 10.12, а);

– поперечний зсув: зміщення нормально фронту тріщини (рисунок 10.12, б);

– поздовжній зсув: зміщення паралельно фронту тріщини (рисунок 10.12, в).

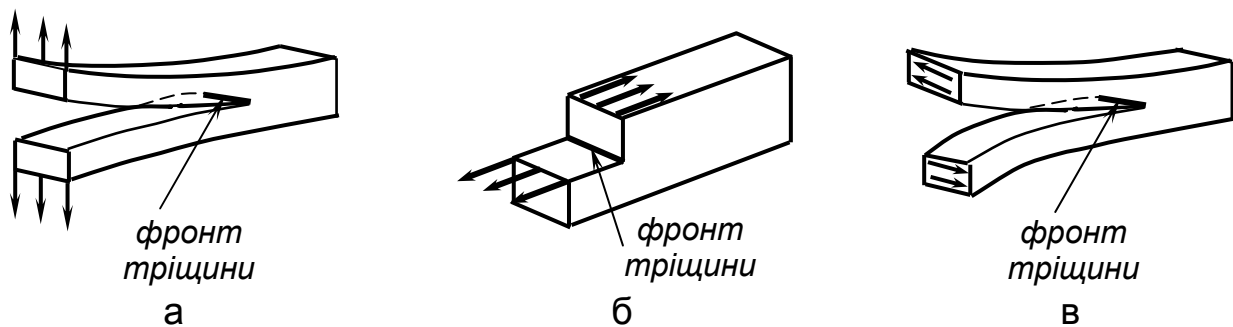


Рисунок 10.12 – Види розвитку тріщин:
а – відрив; б – поперечний зсув; в – поздовжній зсув

10.4 Відрив тріщини

Для задач про нормальне розкриття тріщин Вестергард (1957 р.) запропонував функцію напружень у вигляді

$$\Phi_I = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z}, \quad (10.24)$$

де функції \bar{Z} , Z і Z' пов'язані залежностями (10.14).

З урахуванням того, що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} Z; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\operatorname{Im} \bar{Z} + y \operatorname{Re} Z + \operatorname{Im} \bar{Z} = y \operatorname{Re} Z; \quad (10.25)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z'; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -y \operatorname{Im} Z' + \operatorname{Re} Z; \quad (10.26)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\operatorname{Im} Z + y \operatorname{Re} Z' + \operatorname{Im} Z = y \operatorname{Re} Z',$$

напруження дорівнюють

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z';$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z'; \quad (10.27)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = y \operatorname{Re} Z'.$$

При цьому вибрана функція Z має задовольняти граничні умови задачі.

Для тріщини в нескінченній плиті, навантаженій двовісними напруженнями σ (рисунок 10.13), Ірвін запропонував функцію у вигляді

$$Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{(z+a)(z-a)}}. \quad (10.28)$$

При $y=0$ і $a > x > -a$ Z є чисто уявною величиною, тобто $\operatorname{Re} Z = 0$, а значить, відповідно до (10.27) $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ (краї тріщини не навантажені), а при $z \rightarrow \infty$ $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$.

Для аналізу напружено-деформованого стану поблизу кінчика тріщини зручно ввести заміну змінних (рисунок 10.14)

$$\xi = z - a. \quad (10.29)$$

З урахуванням (10.28) і (10.29) функція може бути наведена у вигляді

$$Z = \frac{\sigma(\xi+a)}{\xi^{1/2}(\xi+2a)^{1/2}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi} \cdot \xi^{1/2}}, \quad (10.30)$$

де $K_I = \sqrt{2\pi\xi} Z$ – коефіцієнт інтенсивності напружень.

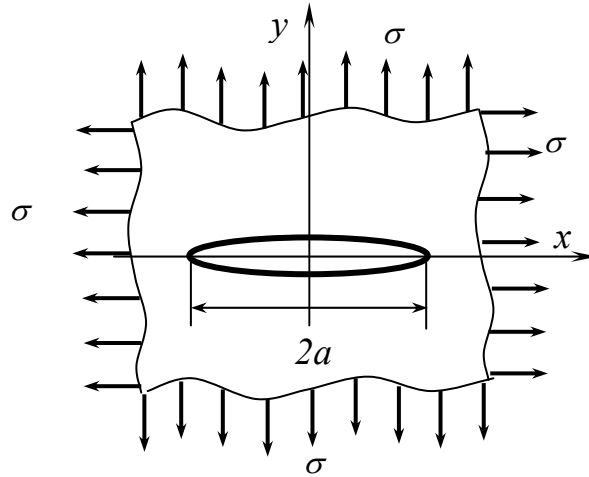


Рисунок 10.13 – До формулювання граничних умов для задачі про відрив тріщини

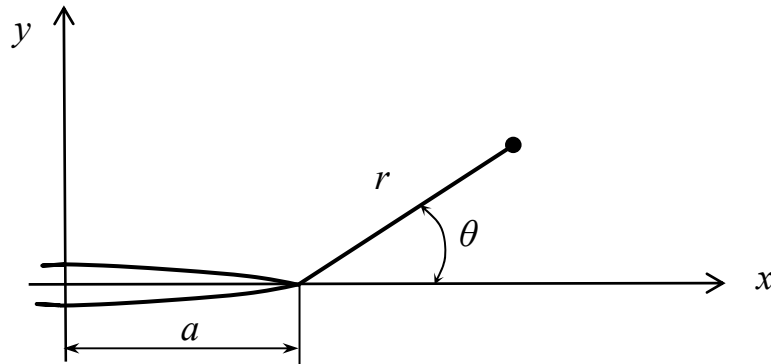


Рисунок 10.14 – До заміни змінної для задачі про відрив тріщини

Поблизу кінчика тріщини величина інтенсивності напружень становить

$$K_I = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} Z = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \sqrt{\xi} \frac{\sigma a}{\sqrt{\xi} \sqrt{2a}} = \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (10.31)$$

При визначенні напружень поблизу кінчика тріщини потрібно врахувати, що

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}^{1/2}}; \quad Z' = \frac{dZ}{dz} = \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{2}\right) \xi^{-3/2}. \quad (10.32)$$

З урахуванням того, що при заміні змінної (10.29) $\xi = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\xi^{-1/2} = r^{-1/2} e^{-i\theta/2} = r^{-1/2} \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} \right); \quad (10.33)$$

$$\xi^{-3/2} = r^{-3/2} e^{-i3\theta/2} = r^{-3/2} \left(\cos\frac{3\theta}{2} - i\sin\frac{3\theta}{2} \right), \quad (10.34)$$

вираз для функції напружень та її похідної замість (10.32) можна навести у вигляді

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right);$$

$$Z' = -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{r^3}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right).$$
(10.35)

З урахуванням (10.27) і (10.35) напруження поблизу кінчика тріщини можуть бути визначені як

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - y \left(-\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r^3}} \right) \left(-\sin \frac{3\theta}{2} \right) =$$

$$= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right);$$
(10.36)

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right);$$
(10.37)

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}.$$
(10.38)

10.5 Поперечний зсув тріщини

Функцію напружень приймають у формі (рисунок 10.15).

$$\bar{\Phi}_{II} = -y \operatorname{Re} \bar{Z}.$$
(10.39)

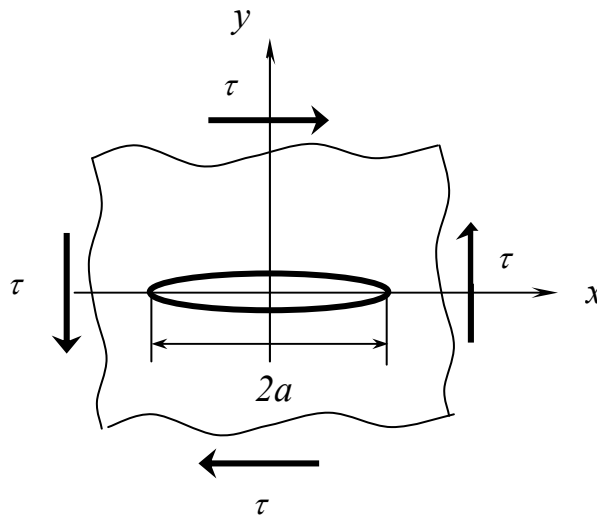


Рисунок 10.15 – До формулювання граничних умов для задачі про поперечний зсув тріщини

Напруження при цьому визначають як

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Im} Z + y \operatorname{Re} Z';$$

$$\sigma_y = -y \operatorname{Re} Z';$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z'.$$
(10.40)

Форма функції напружень відносно Z може бути прийнята аналогічною, тобто

$$Z = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi} \cdot \xi^{1/2}} = \frac{\tau(\xi + a)}{\xi^{1/2}(\xi + 2a)^{1/2}}. \quad (10.41)$$

З урахуванням цього

$$K_{II} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} \cdot Z = \tau\sqrt{\pi a}. \quad (10.42)$$

10.6 Поздовжній зсув тріщини

Для цієї задачі $u = v = 0$ і $w = f(x, y)$ (рисунок 10.16).

Отже, при врахуванні співвідношень Коші

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0; \gamma_{xy} = 0. \quad (10.43)$$

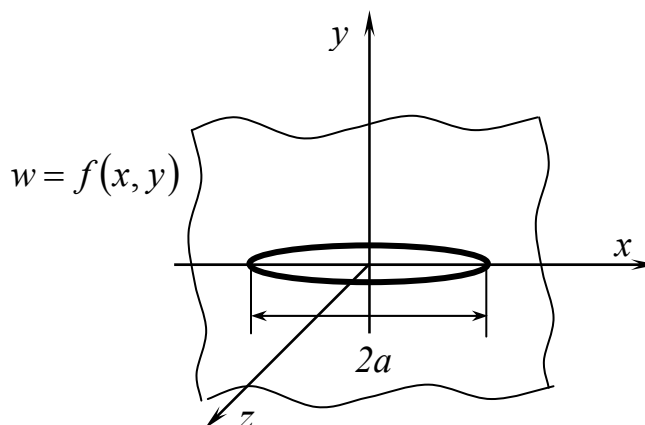


Рисунок 10.16 – До формулювання граничних умов для задачі про поздовжній зсув тріщини

Виходячи з фізичного закону з урахуванням (10.43)

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \quad (10.44)$$

Зв'язок інших зсувних компонент деформації з переміщеннями має вигляд

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Із закону рівноваги виходить, що $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$,

тобто

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = 0 \quad (10.46)$$

або

$$\nabla^2 w = 0. \quad (10.47)$$

Завдання переміщень у вигляді

$$w = \frac{1}{G} \operatorname{Im} \bar{Z}, \quad (10.48)$$

а Z у вигляді

$$Z = \frac{\tau(\xi + a)}{\xi^{1/2}(\xi + 2a)^{1/2}} \quad (10.49)$$

приводить за аналогією з попереднім до значення коефіцієнта інтенсивності напружень

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi a}.$$

Поле напружень поблизу кінчика тріщини наведено дотичними напруженнями

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \operatorname{Im} Z; \\ \tau_{yz} &= \operatorname{Re} Z. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Відповідно до Ірвіна тріщина не зростає, якщо величини коефіцієнтів інтенсивності напружень не перевищують критичних значень

$$K_I < K_{Ikp}. \quad (10.51)$$

Аналогічно для коефіцієнтів інтенсивності K_{II} і K_{III} .

Із співвідношення Гріфітса критичний розмір тріщини:

$$a = \frac{\gamma E}{\pi \sigma^2 (1 - \mu^2)}, \quad (10.52)$$

звідки виходить, що

$$\sigma\sqrt{\pi a} = \sqrt{\frac{\gamma E}{1 - \mu^2}}. \quad (10.53)$$

Тобто критичне значення коефіцієнта інтенсивності

$$K_{Ikp} = \sqrt{\frac{\gamma E}{1 - \mu^2}}. \quad (10.54)$$

У випадку трьох моделей руйнування використовують формулу Ірвіна

$$\gamma = \frac{1 - \mu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \mu}{E} K_{III}^2. \quad (10.55)$$

Якщо тріщина росте ($a > a_{kp}$), то швидкість поширення (зростання) тріщини подається у вигляді залежності від коефіцієнта концентрації напружень у вершині тріщини (рисунок 10.17):

$$\frac{da}{dN} = A(\sqrt{\pi a} \sigma)^\delta, \quad (10.56)$$

де N – число циклів навантаження; A, δ – параметри, які залежать від структури і властивостей матеріалу.

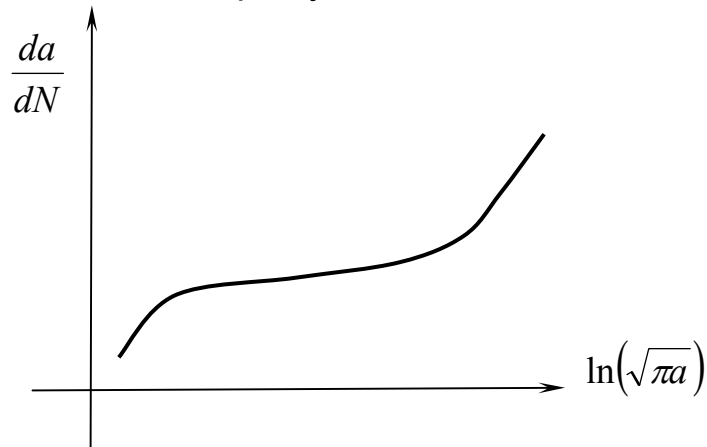


Рисунок 10.17 – Характер залежності швидкості росту тріщини від її розміру

Із рівняння (10.56) випливає

$$da = A\pi^{\delta/2} a^{\delta/2} \sigma^\delta dN, \quad (10.57)$$

звідки

$$a^{\delta/2} = \frac{A\delta}{2} \pi^{\delta/2} \sigma^\delta N + C_1. \quad (10.58)$$

Ввівши позначення $R = a^{\delta/2}$; $K = \frac{A\delta}{2} \pi^{\delta/2}$ замість (10.58), можна записати

$$R = K\sigma^\delta N + C_1. \quad (10.59)$$

При $N = 0$ $C_1 = R_0$ і залежність (10.59) може бути наведена як

$$R - R_0 = K\sigma^\delta N. \quad (10.60)$$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Мышкис, А. Д. Математика для вузов. Специальные курсы [Текст] / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
2. Седов, Л. И. Методы подобия и размерностей в механике [Текст] / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. Разрушение. Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975. – Т.2. – 764 с.
4. Мышкис, А. Д. Элементы теории математических моделей [Текст] / А. Д. Мышкис. – М.: Физматиздат, 1994. – 192 с.
5. Авдонин, А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций [Текст] / А. С. Авдонин. – М.: Машиностроение, 1969. – 402 с.

Навчальне видання

**Кириченко Валерій Васильович
Кириченко Валентина Леонідівна
Кондратьєв Андрій Валерійович
Царіцинський Антон Анатолійович**

**СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ
ДЛЯ ІНЖЕНЕРНОЇ ПРАКТИКИ**

Редактор Т. Г. Кардаш

Зв. план, 2019

Підписано до видання 25.10.2019

Ум. друк. арк. 5,5. Обл.-вид. арк. 6,25. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001