

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”

С. М. Фірсов, Ю. В. Білоконська

ОСНОВИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА УПРАВЛІННЯ

Навчальний посібник для самостійної роботи студентів

Харків «ХАІ» 2018

УДК 681.5.011(076.5)
Ф62

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Д. М. Клец,
канд. техн. наук В. І. Чумаченко

Фірсов, С. М.

Ф62 Основи автоматизації та управління [Електронний ресурс] : навч. посіб. для самостійної роботи студентів / С. М. Фірсов, Ю. В. Білоконська. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. С. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2018. – 117 с.

Розглянуто основи теорії автоматизації та управління: об'єкт і предмет, основні методи та принципи управління, критерії оцінювання якості систем автоматизації. Наведено приклади синтезу САУ, їх аналіз, розв'язання відносно заданих початкових умов, що дає можливість зрозуміти використання методів автоматичного управління.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

Іл. 163. Табл. 4. Бібліогр.: 4 назви

УДК 681.5.011(076.5)

© Фірсов С. М., Білоконська Ю. В., 2018

© Національний аерокосмічний
університет ім. М. С. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2018

Тема 1 ВВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

1.1 Основні поняття ТАУ

Об'єктом вивчення дисципліни «Теорія автоматичного управління» ТАУ є системи автоматичного управління (САУ), властивості й методи проектування.

Головними напрямками науково-технічного прогресу є механізація і автоматизація виробничої та пізнавальної діяльності людей.

Механізація – це заміна людини машиною в робочих операціях; автоматизація – заміна людини машиною як в робочих операціях, так і в операціях управління.

У наш час процесу автоматизації підлягає чимало процесів: технологічні, енергетичні, транспортні, процеси проектування, планування, обліку, дослідження, оброблення інформації, управління озброєнням і військами та ін. Автоматизація цих процесів приводить до підвищення продуктивності й ефективності праці, поліпшення якості продукції, оптимізації планування та управління, звільнення людини від монотонної праці, від праці в шкідливих та небезпечних для здоров'я умовах, до можливості виконання завдань, які для людини є непосильними.

Теоретичною основою автоматизації є кібернетика – комплекс наук про загальні закони отримання, зберігання, передавання, оброблення та використання інформації в системах різної природи. Ідеї та методи кібернетики широко застосовуються в техніці, медицині, військовій справі, сільському господарстві, криміналістиці та ін. Принципами створення технічних систем управління займається технічна кібернетика.

Американський математик Норберт Вінер (1894 – 1964) в роботі «Кібернетика, або управління та зв'язок у тварині та машині» (1948 г.) визначив кібернетику як теорію автоматичного управління, теорію інформації, кінцевих автоматів, алгоритмів, дослідження операцій, теорію масового обслуговування великих систем та ін.

Технічною основою автоматизації є електромеханічні, електронні, гідравлічні, пневматичні та інші пристрої, які об'єднуються в системи управління (СУ).

Під управлінням розуміють сукупність дій, які забезпечують збереження або цілеспрямовану зміну структури організованих систем, підтримку режимів їх діяльності, реалізацію програм та цілей. Іншими словами, управління – це перетворення того, що є, в те, що має бути.

Основними етапами управління є такі дії:

1. Визначення мети управління, якою може бути стабілізація параметрів деякого процесу, спостереження за вхідним сигналом, переведення об'єкта управління з одного стану в інший і т.д. Мета має бути позитивною, актуальною, реальною.

2. Оцінювання можливості, способів, засобів, часу та вартості досягнення мети управління.

3. Вивчення властивостей об'єкта управління (ідентифікація структури та параметрів, оцінювання лінійності, стаціонарності об'єкта, ефективності органів управління, обмежень, керованості, спостережуваності і т.д.), його взаємодії з навколишнім середовищем (вивчення задавальних та збурювальних дій, впливу системи на навколишнє середовище).

4. Вибір критерію оцінювання якості процесу управління, наприклад, точності, швидкодії, витрати енергії, палива, вартості та ін.

5. Організація процесу управління: вибір структурної схеми системи управління, апаратури, джерел енергії, необхідної інформації, програми дії, закону управління, виробництва систем управління.

6. Забезпечення живучості системи управління.

7. Контроль працездатності, діагностування та парирування відказів, підтримка режимів діяльності.

8. Оцінювання поточної та майбутньої ситуації: вимірювання або обчислення змінних стану, збурень, оцінювання критерію якості, прогнозування ходу подій, порівняння знайдених значень з очікуваними.

9. Вирішення проблеми: врахування всіх чинників, поєднання всіх дій та зусиль, вплив на об'єкт управління.

10. Оцінювання результатів управління: «розбирання польотів», порівняння результатів управління із запланованими, з'ясування помилок, розроблення заходів щодо поліпшення процесу управління.

11. Розвиток системи управління. Застосування нових способів побудови систем управління, нових пристроїв та елементів.

У процесі управління постійно доводиться повертатися до окремих етапів, деякі з них виконуються одночасно. На всіх етапах слід застосовувати системний підхід, тобто розглядати систему в цілому, в усьому різноманітті її взаємодій з навколишнім середовищем.

Система автоматичного управління – це сукупність об'єктів управління вимірювальної, обчислювальної, підсилювальної, виконавчої та керуючої апаратури, які об'єднані для виконання поставленої задачі без безпосередньої участі людини.

Об'єкт управління – спостережувана частина навколишнього середовища, яка здатна досягти поставленої мети. Як об'єкт управління може бути літальний апарат, корабель, станок, технологічна установка, снаряд та інше, а також їх сукупність.

З процесу управління автоматичними і автоматизованими системами людина не повністю виключена. Такі системи ще називають ергатичними. Наприклад, у системі управління повітряним рухом є необхідною наявністю людини-оператора.

Окремим випадком управління є регулювання.

Регулювання – це підтримання постійної або зміна за заданим законом деякої фізичної величини, наприклад, стабілізації висоти, швидкості та курсу польоту літака, стеження за зміною рівня сигналу, наведення ракети на ціль, синхронізації маневрування групи літаків, ведення літака по траєкторії посадки (глісаді), стабілізації напруги та частоти генератора та ін.

Найпростішими системами автоматичного управління є системи автоматичного регулювання (САР), принципи побудови яких вивчає теорія автоматичного регулювання (ТАР).

У загальному вигляді САУ можна подати у вигляді сполучення об'єкта управління (ОУ) та керувального пристрою (КП) (регулятора) так, як показано на рисунку 1.1, Е – енергія живлення САУ.

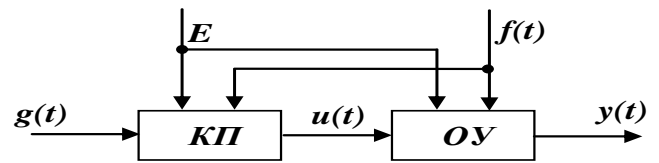


Рисунок 1.1

Оскільки запас енергії джерела живлення зазвичай є набагато вищим енергії, яка подається на систему, то Е не вказують на структурних схемах. Сигнал Е показують тільки в системах регулювання енергії:

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_r \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{вектор} \\ \text{-- задавальних;} \\ \text{впливів} \end{array}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{вектор} \\ \text{-- керувальних;} \\ \text{впливів} \end{array}; \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{вектор} \\ \text{-- збурювальних;} \\ \text{впливів} \end{array}; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{вектор} \\ \text{-- керувальних;} \\ \text{величин} \end{array};$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{вектор} \\ \text{-- стану.} \end{array}$$

Вектор задавальних впливів $g(t)$ (вхідний сигнал) задає системі інформацію про необхідне, бажане значення виходу, тобто про мету управління, наприклад, необхідне значення висоти й швидкості польоту літака, його курсу, крену, тангажу, кількості задавальних впливів r . Задавальний вплив уводиться в систему людиною або системою вищого рівня. Цей вплив є таким же або пропорційним необхідному значенню виходу: $g(t)=y_{необ}(t)$ або $g(t)=ay_{необ}(t)$.

Вектор керувальних впливів $u(t)$ забезпечується керувальним пристроєм (КП) та задає цілеспрямований вплив на об'єкт управління, наприклад, зміну положення та напрямку керма висоти або елеронів літака, кількості керувальних впливів l .

Вектор збурювальних впливів $f(t)$ – це вплив навколишнього середовища на об'єкт управління та керувальний пристрій, наприклад, пориви вітру, які діють на літак; хвиль на корабель; навантаження на двигун та систему електроживлення; помилок вимірювань; вимірів параметрів САУ, шумів; змін температури, кількості збурювальних впливів p .

Вектор керувальних величин $y(t)$ – це величини, які пов'язані зі станом об'єкта управління (наприклад, курсом та висотою літака), кількістю керувальних величин m .

Крім цього, в математичний опис входить $x(t)$ – вектор стану, n – порядок системи. Як змінні стану можуть бути вибрані сигнали, які характеризують запаси енергії в елементах системи, наприклад, лінійні та кутові швидкості, напруга на конденсаторах, струми в індуктивностях та ін.

1.2 Приклади САР

Канал управління курсом літака зображено на рисунку 1.2, де 1 – об'єкт управління – літак; 2 – чутливий елемент – гіроскоп; 3 – підсилювально-перетворювальний пристрій; 4 – виконавчий механізм, рульова машина; 5 – орган управління, кермо напряду.

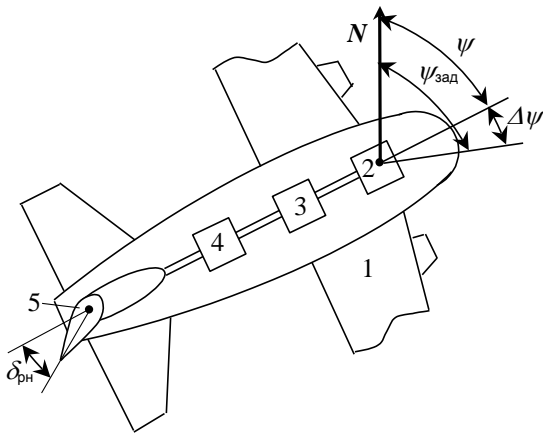


Рисунок 1.2

Оскільки гіроскоп (2) зберігає незмінним напрям своєї осі повороту в просторі при відхиленні літака (1) від заданого напрямку польоту $\Psi_{зад}$, то на виході датчика з'являється напруга, пропорційна відхиленню $\Delta\Psi$. Цей сигнал $U_D = k_D \Delta\Psi$ підсилюється в підсилювачі (3) і подається на рульову машину (4), яка повертає кермо напрямку (5). Літак повертається доти, доки не буде компенсовано відхилення $\Delta\Psi$.

Система стабілізації швидкості обертання двигуна шпинделя токарного станка (рисунок 1.3).

Об'єкт регулювання – робочий механізм (РМ), наприклад, шпиндель токарного станка, радіолокаційна антена і т.д.

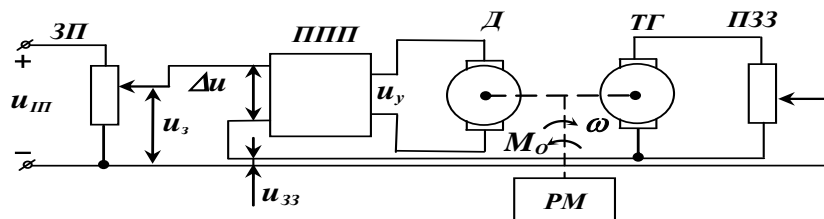


Рисунок 1.3

На вхід підсилювально-перетворювального пристрою (ППП) подається різниця між напругами задавального потенціометра (ЗП) та потенціометра зворотного зв'язку (ПЗЗ): $\Delta u = u_z - u_{zz}$. Датчик – тахогенератор (ТГ) – подає напругу $U_{ТГ}$, пропорційну швидкості обертання ω двигуна Д.

Переміщаючи движок задавального потенціометра, встановлюємо задавальну напругу u_z , яка відповідає бажаній швидкості обертання двигуна. При збільшенні навантаження M_o швидкість двигуна падає. При цьому падає напруга зворотного зв'язку, а напруга $\Delta u = u_z - u_{zz}$ збільшується. Тому з підсилювача на двигун надходить значно більша напруга і швидкість обертання його вала збільшується. Таким чином, спостерігається компенсація впливу збурювання на об'єкт управління. В даній системі ця компенсація є неповною, для повної компенсації необхідно застосувати астатичний регулятор.

Окремі автоматичні регулятори з'явилися в давні часи. Так, на межі нашої ери араби обладнали водяні часи поплавковим регулятором рівня. В 1657 р. нідерландський вчений Крістіан Гюйгенс (1629 – 1695) вмонтував в годинник маятниковий регулятор ходу. Наприкінці XVIII –початку XIX ст., під час промислової революції, в Європі було розроблено велику кількість регуляторів. У 1765 р. російський теплотехнік І. І. Ползунов (1728 – 1766) запропонував регулятор живлення котла парової машини. В 1784 р. англієць Джеймс Ватт (1736 – 1819) розробив відцентровий регулятор швидкості парової машини.

Перший програмний пристрій керування ткацьким станком від перфокарт виготовлено в 1804 р. французом Жозефом Жаккаром (1752 – 1834). Ці регулятори відкрили шлях цілому потоку нових винаходів. Для розроблення складних машин з регуляторами необхідно було провести теоретичні дослідження.

Основоположником теорії автоматичного регулювання є російський вчений І. О. Вишнеградський (1832 – 1895), який опублікував в 1876 р. роботу «Про загальну теорію регуляторів». У цій роботі регулятор та парову машину розглянуто як єдину систему, запропоновано методи аналізу стійкості та якості процесу регулювання. Робота англійського фізика Джеймса Максвелла (1831 – 1879) «Про регулятори» (1866 р.) залишилась не поміченою сучасниками, оскільки в ній описано вузько специфічний механізм ведення телескопа.

Російський математик О. М. Ляпунов (1857 – 1918) створив чітку сучасну теорію стійкості рівноваги та руху механічних систем. Його методи і зараз є джерелом ідей в ТАУ. В 1898 р. К. Е. Ціолковський (1857 – 1935) запропонував електричне управління горизонтальним кермом літака, тобто перший автопілот. Перший російський підручник з теорії автоматичного регулювання написано в 1909 р. М. Є. Жуковським (1847 – 1921).

Великий внесок у сучасну ТАУ зробили Е. Раус, О. Гурвіц, О. В. Михайлов, Г. Найквіст (критерії стійкості), В. В. Солодовніков, Є. П. Попов (частотні методи аналізу та синтезу системи), Л. С. Понтрягін, О. А. Фельдбаум, М. М. Красовський (1924 – 2012) (оптимальне управління), О. А. Красовський (1921 – 2003), Н. Вінер (ймовірнісні методи), Ю. Ту, Е. Джури (дискретні системи) та багато інших.

Тема 2 ОСНОВИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

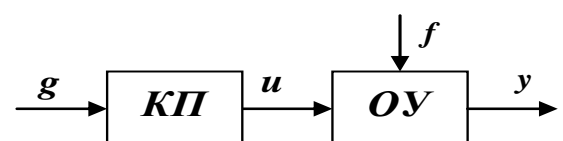
2.1 Принципи управління

Принцип управління – спосіб формування керуючого впливу.

Існують три фундаментальних принципи управління – управління на основі задавального впливу, управління на основі збурювального впливу, управління за відхиленням.

Управління на основі задавального впливу

У більш загальному випадку САУ можна відобразити у вигляді двох елементів (рисунок 2.1):



КП – керуючий пристрій;

Рисунок 2.1

ОУ – об’єкт управління;

g – задавальний вплив, що містить інформацію про необхідне (бажане) значення вихідної величини y ;

u – керуючий вплив, який цілеспрямовано змінює стан ОУ;

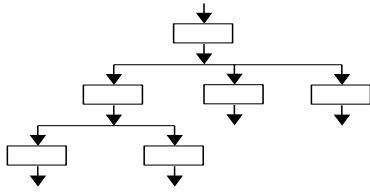


Рисунок 2.2

f – збурювальний вплив, вплив середовища на ОУ.

У даному випадку $u=u(g)$.

У найпростішому випадку $y = k_{ou}u - k'_{ou}f$.

Керуючий вплив формується на основі інформації про задавальний вплив та не залежить ні від збурення, ні від виходу, ні від стану об’єкта управління. Система є розімкненою.

За таким принципом можна будувати ієрархічну систему (*hieros* – священний (гр.), *arche* – влада (гр.)) (рисунок 2.2).

Переваги: простота реалізації.

Недоліки: не враховується стан об’єкта, не компенсується діяння збурювальних впливів. Процес формування керуючого впливу не залежить від результатів управління.

Приклад 1. Система автоматичного регулювання швидкості оберту двигуна (рисунок 2.3) містить:

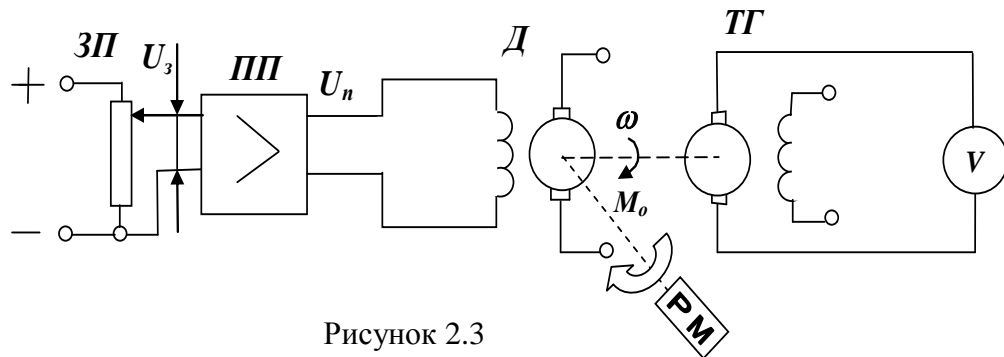


Рисунок 2.3

ЗП – задавальний потенціометр,

ПП – підсилювач потужності,

Д – двигун,

ТГ – тахогенератор,

РМ – робочий механізм.

При переміщенні движка ЗП вгору збільшується напруга U_3 , U_n і швидкість оберту двигуна ω . Показання вольметра відповідають швидкості ω . Однак при зміні моменту опору M_o , яке формує робочий механізм, швидкість оберту двигуна також змінюється, що є небажаним (рисунок 2.4).

Принцип широко застосовується при управлінні металооброблювальними станками с ЧПУ, в автоматах.

Управління на основі збурювального впливу (принцип Понселе, компенсаційне управління; *compensatio* – урівноваження (лат.).

Для компенсації шкідливого впливу збурювальної дії в систему вводять **блок компенсації** (БК), який вимірює збурення та формує сигнал, пропорційний збуренню. Цей сигнал враховується при формуванні керуючого впливу (рисунок 2.5). Блок компенсації складається з вимірювача та перетворювача. В цьому випадку $u = u(g, f)$.

Управління залежить не тільки від задавального впливу, але й від збурювального.

Система, як і в попередньому випадку, є розімкненою.

Приклад 2. У цій системі вихід залежить не тільки від задавального впливу, але й від збурювального (рисунок 2.6). Без блока компенсації $y = k_1 k_2 g - k_3 f$.

З блоком компенсації $y = k_1 k_2 g - k_3 f + k_{БК} k_2 f$. Якщо вибрати $k_{БК} = k_3 / k_2$, то отримаємо $y = k_1 k_2 g$, тобто відбудеться компенсація збурення.

Приклад 3. Вводимо в систему регулювання швидкості датчик моменту (ДМ) (муфту моменту). Його напруга складається з напруги задавального потенціометра: $u_1 = u_3 + u_{ДМ}$ (рисунок 2.7).

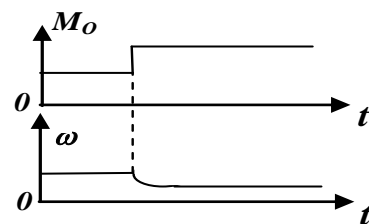


Рисунок 2.4

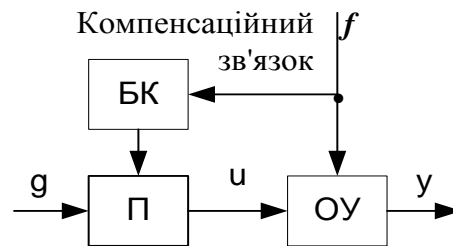


Рисунок 2.5

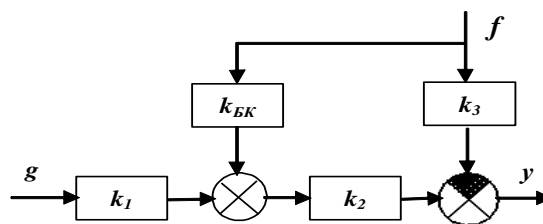


Рисунок 2.6

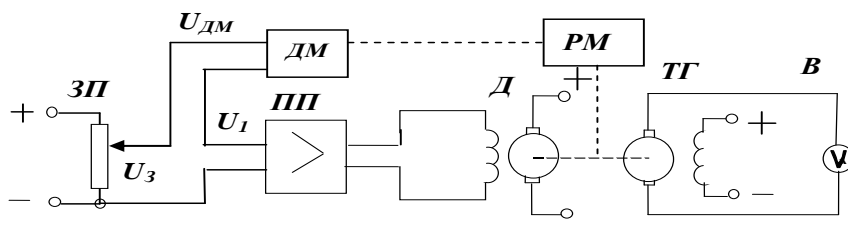


Рисунок 2.7

Системи з ідеальною компенсацією збурювального впливу називають інваріантними відносно збурення (рисунок 2.8, 2.9).

Переваги: компенсуються збурення.

Недоліки: не всі збурення компенсуються (тільки ті, які вимірюються).

Слід правильно вибирати знак і коефіцієнт передачі $U_{дм}$. При неправильному виборі буде існувати недокомпенсація або перекомпенсація (див. рисунок 2.9).

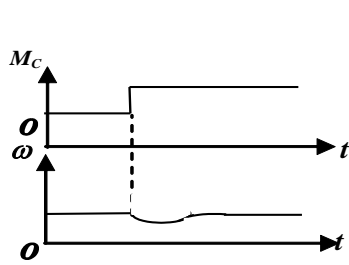


Рисунок 2.8

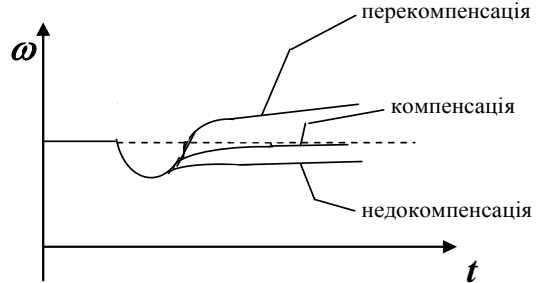


Рисунок 2.9

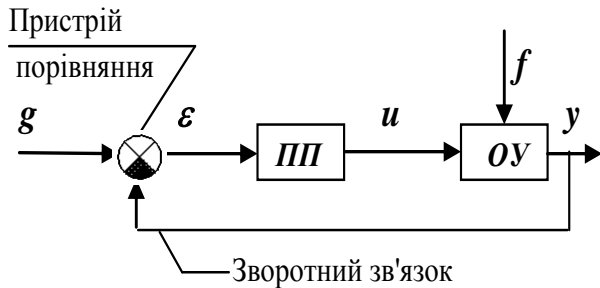


Рисунок 2.10

Управління за відхиленням (замкнуте управління, принцип зворотного зв'язку, принцип Ползунова – Ватта).

Вводимо зворотний зв'язок (від'ємний). Система стає замкненою (рисунок 2.10). В ній $u = u(\varepsilon)$.

Нехай $g = y_{необ}$, тоді $\varepsilon = g - y = y_{необ} - y$ – відхилення або похибка. Відхилення викликає задавальний і збурювальний впливи (навантаження, зміна параметрів). Управління залежить від відхилення вихідного сигналу необхідного значення і усуває похибку незалежно від її причини.

Переваги: компенсуються всі збурення.

Недоліки: система може стати нестійкою.

Приклад 4. У замкненій системі (рисунок 2.11) $u_1 = u_3 - u_{ТГ}$.

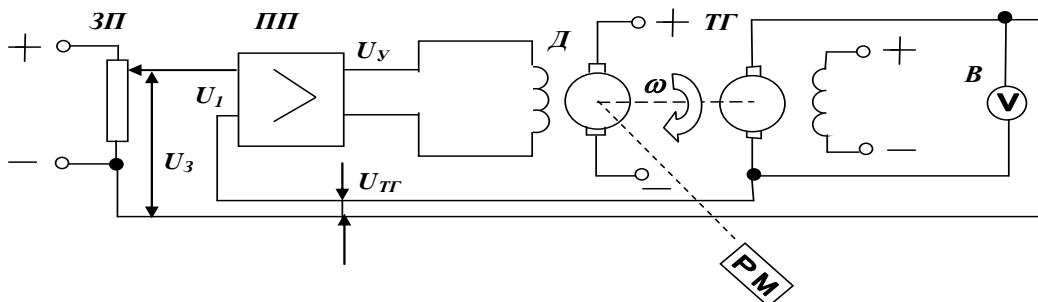


Рисунок 2.11

При складанні системи слід забезпечити правильний знак зворотного зв'язку. У протилежному випадку двигун набиратиме обертів. Від'ємний зворотний зв'язок (**ВЗЗ**) змінюється для стабілізації, додатний зворотний зв'язок (**ДЗЗ**) – для швидкого переходу в новий стан або для генерації коливань.

Така система не повністю компенсує збурення (рисунок 2.12).

Похибка ε_f може бути усунена за допомогою астатичного регулятора (наприклад, інтегрувального або ізодромного: *isos* – рівний (гр.), *dromos* – біг, місце для бігу (гр.))

Найкращі результати дозволяє одержати комбінація всіх трьох принципів управління: $u = u(g, \varepsilon, f)$ – **комбіноване управління**.

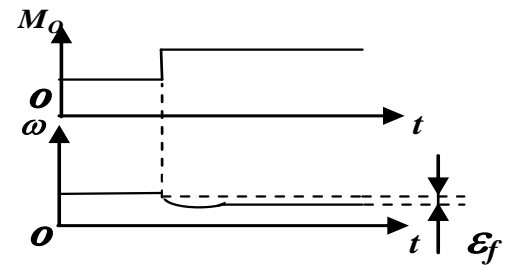


Рисунок 2.12

2.2 Основні закони управління

Закон або алгоритм управління – це характер залежності керувального впливу від задавальної та збурювальної дій, від відхилення керуючої величини, від параметрів об'єкта управління. **Закон управління** – правило, за яким формується керуюча дія: $u = u(g, \varepsilon, f, p)$.

Розглянемо закони управління на прикладі систем із зворотним зв'язком: $u = u(\varepsilon)$ (рисунок 2.13).

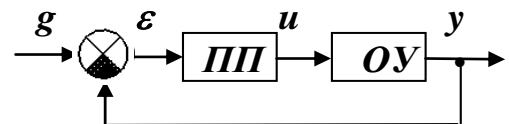


Рисунок 2.13

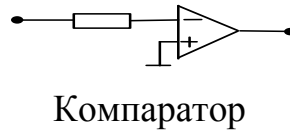
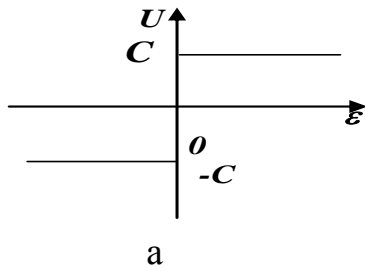
Існують лінійні та нелінійні закони. Розглянемо деякі з них.

Релейний закон управління

Найпростіший нелінійний закон $u = c \text{sign}(\varepsilon)$ (*signum* – знак) використовується при побудові системи стабілізації КЛА. На протилежних бортах встановлено двигуни. При відхиленні КЛА вмикається один із цих двигунів до моменту зміни знака відхилення. Потім вмикається протилежний двигун (рисунок 2.14, а).

Недоліки: неергономічний, можливо виникнення автоколивань в системі.

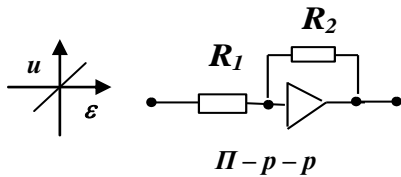
Переваги: простота реалізації.



$$u = \begin{cases} c & \text{при } \varepsilon > 0, \\ 0 & \text{при } \varepsilon = 0, \\ -c & \text{при } \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Компаратор
б
Рисунок 2.14

Реалізацію релейного регулятора за допомогою операційного підсилювача (ОП) показано на рисунку 2.14, б.



Пропорційний закон управління

Цей закон – найпростіший лінійний закон управління: $u(t) = k\varepsilon(t)$.

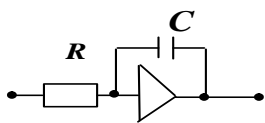
Рисунок 2.15

Реалізацію пропорційного регулятора на ОУ показано на рисунку 2.15: $k = R_2/R_1$.

Переваги: регулятор є більш ергономічним ніж релейний; простота реалізації.

Недоліки: при малих відхиленнях спостерігається мале значення управління. Для здійснення управління необхідна наявність ненульової похибки. Система взагалі не може працювати без похибки, якщо об'єкт є статичним. Для зменшення величини похибки та прискорення процесу регулювання необхідно збільшувати значення коефіцієнта підсилення k . Однак при цьому система може стати нестійкою.

Інтегральний закон управління



$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau.$$

I-регулятор

Реалізація I-регулятора на ОУ (рисунок 2.16):

Рисунок 2.16

$$T_i = RC; \quad W(s) = 1/RCs = 1/T_i s,$$

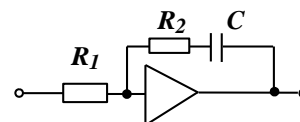
де T_i – постійна інтегрування.

Для усунення сталої похибки при постійних вхідних впливах вводять інтеграл. Управління змінюється доти, доки похибка не стане такою, що дорівнює нулю. При $\varepsilon = 0$ управління стабілізується.

Недоліки: операція інтегрування вносить момент запізнювання за фазою в систему. Процес регулювання сповільнюється. Запас стійкості за фазою зменшується. При неправильному виборі параметрів система може стати нестійкою.

Пропорційно-інтегральний закон управління

$$u(t) = k\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau.$$



ПІ-регулятор

Рисунок 2.17

Реалізацію ПІ-регулятора (ізодромного) на ОУ показано на рисунку 2.17:

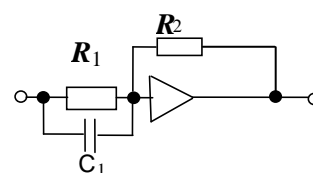
$$W(s) = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 Cs} = k + \frac{1}{T_i s};$$

$$k = R_2/R_1; \quad T_i = R_1 c.$$

Пропорційна складова вводиться для прискорення процесу регулювання, інтегральна – для підвищення точності системи.

Пропорційно-диференційований закон управління

Похідна вводиться в закон управління для прискорення процесу регулювання. В сталому режимі похідна перетворюється в нуль. На статичну похибку (точність) ця складова не впливає. Реалізацію цього закону показано на рисунку 2.18:



ПД – р – р

Рисунок 2.18

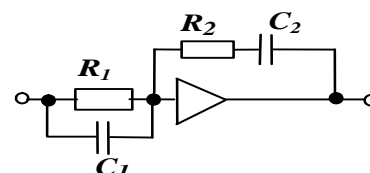
$$u(t) = k\varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Пропорційно-інтегрально-диференційований закон управління

$$u(t) = k\varepsilon(t) + \frac{1}{T_u} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Реалізація ПІД-регулятора на ОУ (рисунок 2.19):

$$k = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}; \quad T_u = R_1 C_2; \quad T_d = R_2 C_1.$$



ПІД - регулятор

Рисунок 2.19

2.3 Функціональні елементи систем управління

Розглянемо типову САУ, побудовану на основі комбінації трьох принципів управління.

На рисунку 2.20 показано функціональну схему цієї системи, де **ЗП** – задавальний пристрій, що перетворює задавальний вплив у такий вигляд, який є зручним для порівняння, встановлює необхідну величину регулювання або регулює алгоритм її зміни; **ПП** – порівняльний пристрій, що порівнює вихідний сигнал з керуючою дією; **ППД** – попередній підсилювач; **Р** – регулятор (аналоговий або цифровий); **КП** – коригуючий пристрій, що забезпечує стійкість системи та потрібні показники якості (перерегулювання, швидкодію, коливання);

ПдП – підсилювач потужності; **ВМ** – виконавчий механізм, наприклад, рульова машина на літаку, що надає бажану дію на об’єкт управління; **ОУ** – об’єкт управління; **Д** – датчик (вимірювальний перетворювач), що подає сигнал, який є пропорційним вимірюваному значенню (переміщення, тиску, температури, електричної напруги та іншим) у вигляді електричного сигналу; **Пр** – перетворювач, що перетворює сигнал зворотного зв’язку у вигляд, зручний для порівняння (фазочутливий випрямляч, АЦП); **БК** – блок компенсації.

Головний зворотний зв’язок передає сигнал з виходу системи на її вхід.

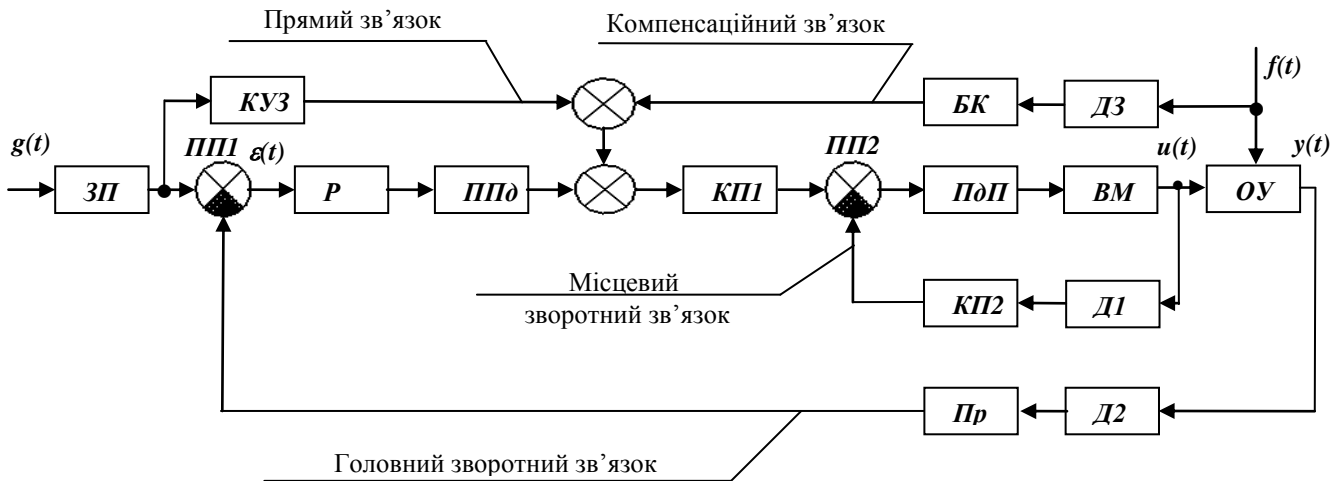
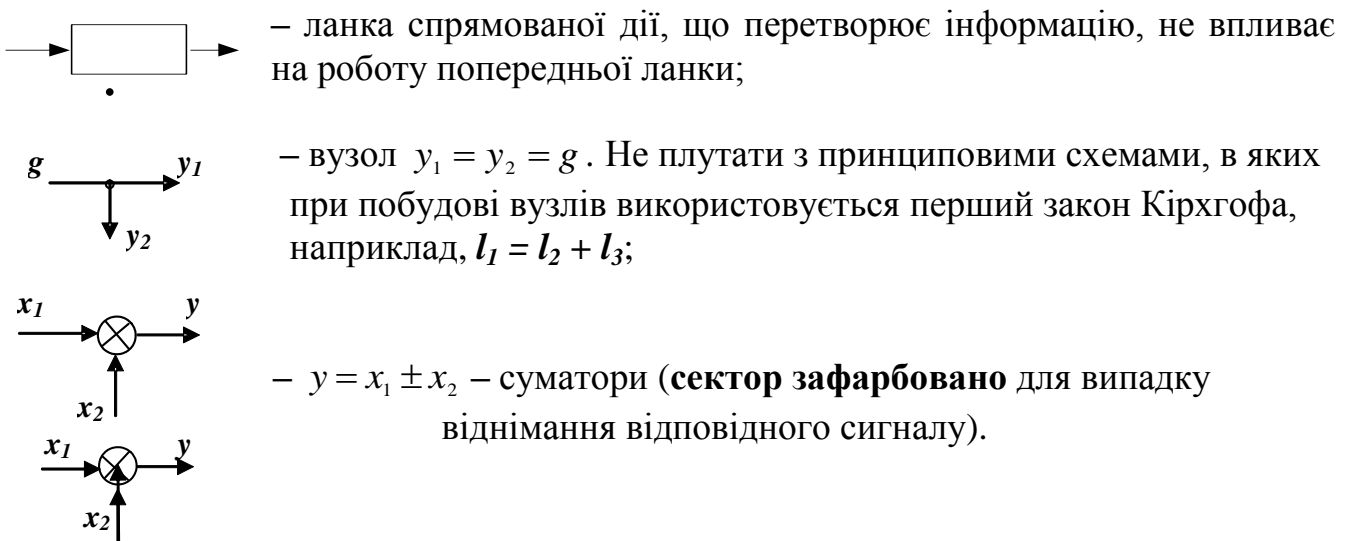


Рисунок 2.20

Місцевий зворотний зв’язок передає сигнал з виходу системи або елементів на вхід деякого елемента.

Зворотний зв’язок буває ще додатним і від’ємним, жорстким (діючим як в установленому режимі, так і в перехідному) та гнучким (діючим тільки в перехідному режимі). Наведемо елементи функціональної схеми:



Для наглядного відображення систем управління застосовують різні схеми: структурні, функціональні, принципові та ін.

Структурна схема в конструкторській документації – це графічне подання системи із зазначенням основних блоків, зв'язків між ними, сигналів та дій. Далі будемо називати її блок-схемою.

Функціональна схема – це графічне зображення системи із зазначенням усіх блоків, зв'язків між ними, сигналів та дій.

Принципова схема – це графічне зображення системи з зазначенням усіх елементів, їх марок, номіналів та інших характеристик, усіх зв'язків між елементами та блоками, сигналів та дій. На принципових схемах показано різні і точки паяння проводів.

Структурна схема в теорії управління – це графічне подання математичної моделі системи, яка складається з ланок, суматорів, ліній зв'язку та вузлів, із зазначенням сигналів та дій, які враховуються при математичному описі САУ.

2.4 Класифікація САУ

Існує багато різних за своїми властивостями систем автоматичного управління. Тому немає єдиної основи (ознаки), за якою можна було б поділити всі системи на класи, що повністю відображають всі властивості систем. Наведемо класифікацію САУ за окремими ознаками:

- **за призначенням:** енергетичні, технологічні, транспортні, навігаційні, орієнтації, життєзабезпечення, синхронізації та ін.;

- **за типом використовуваної енергії:** механічні, гідравлічні, пневматичні, електричні, комбіновані;

- **за принципом управління:** на основі задавальної дії, на основі збурювальної дії, за відхиленням, комбіновані;

- **за кількістю зворотних зв'язків:** розімкнені, замкнені (одноконтурні та багатоконтурні);

- **за кількістю керуючих величин:** одномірні, багатомірні;

- **за ступенем залежності між декількома входами та виходами:** роздільні, багатозв'язані;

- **за видом задавальної дії:** системи стабілізації ($g(t)=const$), програмні системи ($g(t)$ – завчасно відома функція), слідкуючі системи ($g(t)$ – завчасно невідома функція часу), термінальні (задано значення $g(t_f)$ в кінцевий момент часу t_f);

- **за кількістю апріорної інформації про об'єкт управління та збурювальних дій:** звичайні (з повною інформацією), робастні (з неповною інформацією); *robust* – сильний, міцний (англ.), адаптивні (з мінімумом інформації: самоналагоджувальні; самоорганізуючі; самонавчальні (інтелектуальні);

- **за характером процесів:** безперервні (аналогові), дискретні (релейні, імпульсні, цифрові);

- **за ступенем визначеності параметрів і структури:** детерміновані, ймовірнісні (стохастичні);

- **за точністю в сталому режимі:** статичні (на основі задавального впливу, на основі збурювального впливу), астатичні (на основі задавального впливу, на основі збурювального впливу);
- **за характером рівнянь:** лінійні, нелінійні;
- **за наявності особливостей:** без запізнювання, із запізнюванням, стаціонарні, нестаціонарні, із зосередженими параметрами, із розподіленими параметрами;
- **за стійкістю:** стійкі, нестійкі, нейтральні;
- **за іншими технічними характеристиками:** керовані, некеровані, спостережувані, неспостережувані, чутливі, грубі (робастні).

Тема 3 МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС САУ

3.1 Побудова математичної моделі САУ

Математична модель, або математичний опис САУ – це сукупність математичних відношень, які описують динаміку системи. Такими відношеннями можуть бути алгебричні, диференціальні та різницеві рівняння, таблиці, графіки, схеми, графи, алгоритми, програми, матриці, передавальні функції, оператори.

Математичні моделі САУ широко застосовуються для розв'язання задач аналізу та синтезу систем математичними методами. Характер математичної моделі визначається як самою системою, так і поставленою задачею. Для виконання різних завдань з теорії автоматичного управління потрібні моделі різної точності. Оскільки неможливо створити модель, яка б абсолютно повно відповідала системі, то в кожному конкретному випадку доводиться вирішувати, які чинники необхідно враховувати, а якими можна знехтувати. Це є творчим завданням і його вирішення неоднозначне. Чим більше чинників враховується при створенні моделі для збільшення її точності, тим більш громіздкою вона виходить. Розв'язок складних рівнянь знаходиться наближеними методами, і при цьому чим складніше рівняння, тим менш точним є його розв'язок. Крім того, важко аналізувати громіздкі рівняння і робити на їх основі якісь висновки.

Порядок отримання рівняння «вхід-вихід» може бути таким:

1 Поділяють систему на елементи, визначають їх вхідні й вихідні сигнали (задавальні, збурювальні, керуючі).

2 На основі фізичних законів роботи елементів або на основі експериментальних досліджень складають рівняння, що зв'язують їх входи і виходи.

3 Вибирають робочу точку або робочий режим системи. Складають рівняння встановленого режиму для елементів.

4 Вводять відхилення від сталого режиму. Складають рівняння динаміки елементів.

5 Віднімають від рівнянь динаміки рівняння сталого режиму, отримують рівняння динаміки елементів у відхиленнях від робочої точки.

6 Якщо необхідно і можливо, виконують лінеаризацію отриманих рівнянь.

7 Складають структурну схему елементів, знаходять передавальні функції лінійних елементів.

8 Складають структурну схему системи. Виключають проміжні змінні, отримують рівняння «вхід-вихід» системи, передавальні функції системи для лінійних систем.

9 Перевіряють адекватність отриманої моделі, наприклад, шляхом порівняння експериментальних і розрахункових перехідних характеристик. (*adaequatus* –рівний (лат.).)

Зупинимося докладніше на лінеаризації рівнянь.

Якщо нелінійна функція $F(\bullet)$ не містить розривів, зламів або неоднозначностей, її можна лінеаризувати за допомогою дотичної або розкладанням в ряд Тейлора (рисунок 3.1: а – ланка; б – гладка; в – з розривом; г – зі зломом; д – неоднозначна).

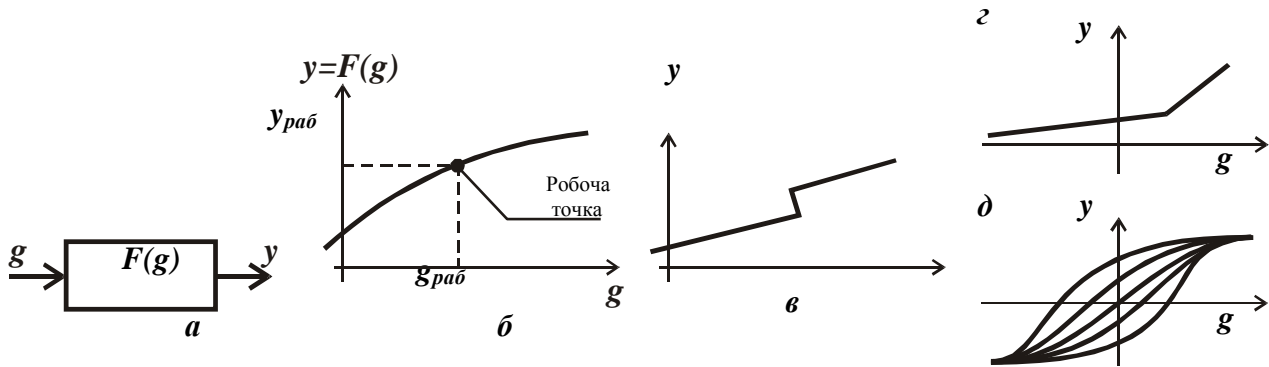


Рисунок 3.1

При постійних сигналах можна застосувати **статичну лінеаризацію** (рисунок 3.2)

$$F(g) \Big|_{g=g_{уст}} = k_{уст} g; \quad k_{уст} = \frac{y_{уст}}{g_{уст}}$$

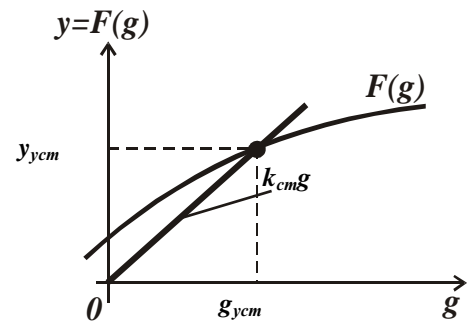
У робочій точці ці функції збігаються.

При малих відхиленнях сигналу від робочої точки застосовують **дотичну лінеаризацію** (рисунок 3.3): $F(g) = g_{уст} + k_{кас} \Delta g;$

$$k_{кас} = \frac{\partial F(g)}{\partial g} \Big|_{g=g_{уст}}; \quad \Delta g = g - g_{уст}$$

Якщо функція залежить від декількох аргументів $y = F(g_1, g_2, u, \dot{u}, \dots)$, її розкладають у ряд Тейлора (Брук Тейлор (1685–1731):

$$y = F(g_{1уст}, g_{2уст}, u_{уст}, 0, \dots) + \frac{\partial F(\dots)}{\partial g_1} \Big|_{\substack{g_1=g_{1уст} \\ g_2=g_{2уст} \\ \dots}} \Delta g_1 +$$



Рисунк 3.2

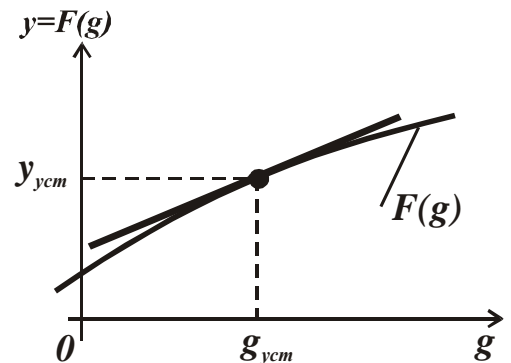


Рисунок 3.3

$$+ \frac{\partial F(\dots)}{\partial g_2} \Big|_{\substack{g_1=g_{1УСТ} \\ g_2=g_{2УСТ} \\ \dots}} \Delta g_2 + \frac{\partial F(\dots)}{\partial y} \Big|_{\substack{g_1=g_{1УСТ} \\ g_2=g_{2УСТ} \\ \dots}} \Delta y + \frac{\partial F(\dots)}{\partial \dot{y}} \Big|_{\substack{g_1=g_{1УСТ} \\ g_2=g_{2УСТ} \\ \dots}} \Delta \dot{y} + \dots,$$

в якому залишають складові першого порядку малості. Іншими складовими нехтують. Таким чином, отримуємо:

$$y = y_{УСТ} + a\Delta g_1 + b\Delta g_2 + c\Delta y + d\Delta \dot{y} + \dots$$

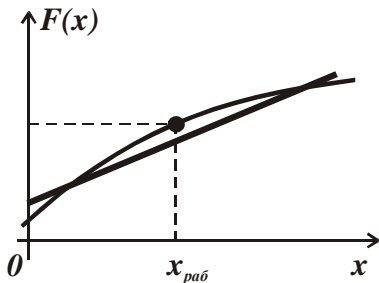


Рисунок 3.4

Одержуємо лінійне рівняння.

При значних відхиленнях від робочої точки застосовують апроксимацію січної (метод найменших квадратів) (рисунок 3.4): $F(x) = F(0) + k_{сич} x$. За наявності коливань в нелінійних системах застосовують гармонічну лінеаризацію, при випадкових впливах – статичну лінеаризацію.

3.2 Приклад математичного опису САР

На рисунку 3.5 зображено систему стабілізації швидкості обертання двигуна.

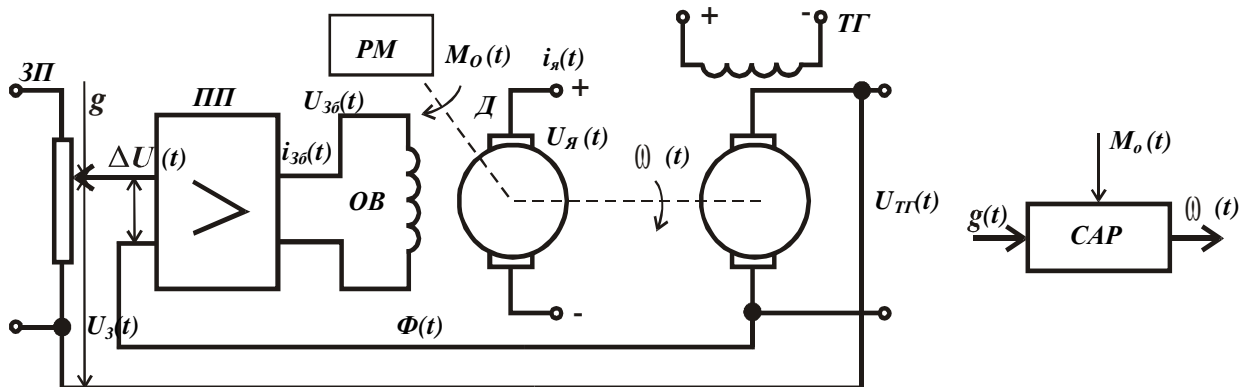


Рисунок 3.5

1 Розбиваємо систему на елементи: задавальний потенціометр (ЗП), підсилювач потужності (ПД), двигун (Д), тахогенератор (ТГ), робочий механізм (РМ). Позначаємо вхідні та вихідні сигнали.

2 Записуємо рівняння динаміки елементів:

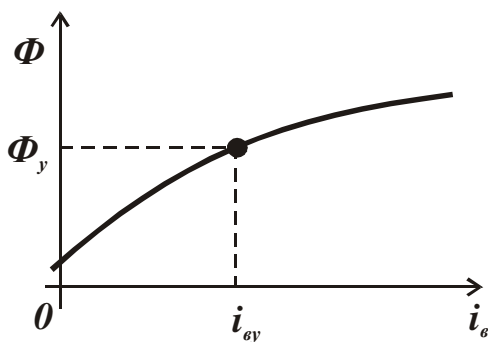


Рисунок 3.6

$$\text{ЗП: } u_3(t) = k_{ЗП} g(t);$$

$$\text{Д: } u_{3б}(t) = R_{3б} i_{3б}(t) + \omega(t) \frac{d\Phi}{dt};$$

$$\text{СУ: } u_1(t) = u_3(t) - u_{ТГ}(t);$$

$$u_{я}(t) = R_{я} i_{я}(t) + C_e \Phi(t) \omega(t) = const;$$

$$\text{ПД: } u_{3б}(t) = k_{3б} u_1(t);$$

$$M_o(t) = C_M \Phi(t) i_{я}(t) - J \frac{d\omega}{dt};$$

$$\text{ТГ: } u_{\text{ТГ}}(t) = k_{\text{ТГ}} \omega(t).$$

3 Вибираємо робочу точку

$\omega_y, \Phi_y, u_{\text{ТГ}y}, g_y, u_{1y}, i_{3\bar{b}y}, i_{\text{я}y}, u_{3y}, u_{3\bar{b}y}, M_{0y}$, що відповідають

установленим значенням при заданих вхідних сигналах g_y, M_{0y} .

Складаємо рівняння сталого режиму:

$$u_{3y} = k_{3\text{П}} g_y; \quad u_{1y} = u_{3y} - u_{\text{ТГ}y}; \quad u_{3\bar{b}y} = k_{\text{ПП}} u_{1y}; \quad u_{\text{ТГ}y} = k_{\text{ТГ}} \omega_y;$$

$$u_{3\bar{b}y} = R_{3\bar{b}} i_{3\bar{b}y}; \quad u_{\text{я}y} = R_{\text{я}} i_{\text{я}y} + C_e \Phi_y \omega_y; \quad M_{0y} = C_M \Phi_y i_{\text{я}y}; \quad \Phi_y = \Phi(i_{3\bar{b}y}).$$

4 Вводимо відхилення від сталого режиму:

$$g = g_y + \Delta g; \quad \omega = \omega_y + \Delta \omega, \quad \Phi = \Phi_y + \Delta \Phi; \quad u_{\text{ТГ}} = u_{\text{ТГ}y} + \Delta u_{\text{ТГ}}; \quad u_1 = u_{1y} + \Delta u_1;$$

$$i_{3\bar{b}} = i_{3\bar{b}y} + \Delta i_{3\bar{b}}; \quad i_{\text{я}} = i_{\text{я}y} + \Delta i_{\text{я}}; \quad u_3 = u_{3y} + \Delta u_3; \quad u_{3\bar{b}} = U_{3\bar{b}y};$$

$$M_0 = M_{0y} + \Delta M_0.$$

Складаємо рівняння динаміки елементів:

$$u_{3y} + \Delta u_3 = k_{3\text{П}}(g_y + \Delta g); \quad u_{3\bar{b}y} + \Delta u_{3\bar{b}} = R_{3\bar{b}}(i_{3\bar{b}y} + \Delta i_{3\bar{b}}) + \omega \frac{d\Delta \Phi}{dt};$$

$$u_{1y} + \Delta u_1 = u_{3y} + \Delta u_3 - u_{\text{ТГ}y} - \Delta u_{\text{ТГ}};$$

$$u_{\text{я}y} = R_{\text{я}}(i_{\text{я}y} + \Delta i_{\text{я}}) + C_e(\Phi_y + \Delta \Phi)(\omega_y + \Delta \omega);$$

$$U_{3\bar{b}y} + \Delta U_{3\bar{b}} = k_{\text{ПП}}(U_{1y} + \Delta U_1);$$

$$M_{0y} + \Delta M_0 = C_M(\Phi_y + \Delta \Phi)(i_{\text{я}y} + \Delta i_{\text{я}}) - J \frac{d\Delta \omega}{dt};$$

$$u_{\text{ТГ}y} + \Delta u_{\text{ТГ}} = k_{\text{ТГ}}(\omega_y + \Delta \omega);$$

$$\Phi_y + \Delta \Phi = \Phi(i_{3\bar{b}y} + \Delta i_{3\bar{b}}).$$

5 Віднімаємо від рівнянь динаміки рівняння сталого режиму:

$$\Delta u_{3y} = k_{3\text{П}} \Delta g; \quad \Delta u_{3\bar{b}} = R_{3\bar{b}} \Delta i_{3\bar{b}} + \omega \frac{d\Delta \Phi}{dt};$$

$$\Delta u_1 = \Delta u_3 - \Delta u_{\text{ТГ}}; \quad 0 = R_{\text{я}} \Delta i_{\text{я}} + C_e \Phi_y \Delta \omega + C_e \omega_y \Delta \Phi + C_e \Delta \Phi \Delta \omega;$$

$$\Delta u_{3\bar{b}} = k_{\text{ПП}} \Delta u_1; \quad \Delta M_0 = C_M \Phi_y \Delta i_{\text{я}} + C_M i_{\text{я}y} \Delta \Phi + C_M \Delta \Phi \Delta i_{\text{я}} - J \frac{d\Delta \omega}{dt};$$

$$\Delta u_{\text{ТГ}} = k_{\text{ТГ}} \Delta \omega; \quad \Delta \Phi = \Phi(i_{3\bar{b}y} + \Delta i_{3\bar{b}}) - \Phi(i_{3\bar{b}y}).$$

6 Проводимо лінеаризацію нелінійних рівнянь, випускаємо знак Δ , вводимо

оператор диференціювання $p = \frac{d}{dt}$:

$$u_3 = k_{3\text{П}} g; \quad u_{3\bar{b}} = R_{3\bar{b}} i_{3\bar{b}} + \omega p \Phi;$$

$$u_1 = u_3 - u_{\text{ТГ}}; \quad 0 = R_{\text{я}} i_{\text{я}} + C_e \Phi_y \omega + C_e \omega_y \Phi;$$

$$u_{3\bar{b}} = k_{\text{ПП}} u_1; \quad M_0 = C_M \Phi_y i_{\text{я}} + C_M i_{\text{я}y} \Phi - J p \omega;$$

$$u_{\text{ТГ}} = k_{\text{ТГ}} \omega;$$

$$\Phi = \Phi_y + \left. \frac{\partial \Phi(i_{3\bar{b}})}{\partial i_{3\bar{b}}} \right|_{i_{3\bar{b}}=i_{3\bar{b}y}} \cdot \Delta i_{3\bar{b}} - \Phi_y = a i_{3\bar{b}}.$$

7. Відкидаємо проміжні змінні щодо двигуна:

$$\begin{cases} u_{3\phi} = R_{3\phi} i_{3\phi} + a\omega p i_{3\phi}; \\ 0 = R_{\text{я}} i_{\text{я}} + C_e \Phi_{\text{у}} \omega + C_e \omega_{\text{у}} a i_{3\phi}; \\ M_0 = C_m \Phi_{\text{у}} i_{\text{я}} + C_m i_{\text{я}} \omega_{\text{у}} a i_{3\phi} - J p \omega. \end{cases}$$

Виключаємо $i_{3\phi}, i_{\text{я}}$:

$$i_{3\phi} = \frac{1}{R_{3\phi} + a\omega p}; \quad u_{3\phi} = \frac{1}{R_{3\phi}(T_1 p + 1)} u_{3\phi};$$

$$i_{\text{я}} = -\frac{C_e \Phi_{\text{у}}}{R_{\text{я}}} \omega - \frac{C_e \omega_{\text{у}} a}{R_{\text{я}}} \cdot \frac{1}{R_{3\phi}(T_1 p + 1)} u_{3\phi};$$

$$\begin{aligned} M_0 = & -\frac{C_e C_m \Phi_{\text{у}}^2}{R_{\text{я}}} \omega - \frac{C_e C_m \Phi_{\text{у}} \omega_{\text{у}} a}{R_{\text{я}}} \cdot \frac{1}{R_{3\phi}(T_1 p + 1)} u_{3\phi} + \\ & + \frac{C_m i_{\text{я}} \omega_{\text{у}} a}{R_{3\phi}(T_1 p + 1)} u_{3\phi} - J p \omega, \end{aligned}$$

де $T_1 = \frac{a}{R_{3\phi}}$ – електромагнітна постійна часу двигуна.

Отже, для двигуна отримали одне рівняння.

Запишемо його в більш зручному вигляді:

$$\begin{aligned} R_{\text{я}} R_{3\phi} (T_1 p + 1) M_0 = & -C_e C_m \Phi_{\text{у}}^2 R_{3\phi} (T_1 p + 1) \omega - \\ & - C_e C_m \Phi_{\text{у}} \omega_{\text{у}} a u_{3\phi} + C_m i_{\text{я}} a R_{\text{я}} u_{3\phi} - R_{\text{я}} R_{3\phi} J (T_1 p + 1) p \omega. \end{aligned}$$

Перенесемо вихідний сигнал та його похідні в ліву частину, а вхідні сигнали зі своїми похідними – в праву:

$$\begin{aligned} (T_1 p + 1)(C_e C_m \Phi_{\text{у}}^2 R_{3\phi} + R_{\text{я}} R_{3\phi} J p) \omega = \\ = (C_m i_{\text{я}} a R_{\text{я}} - C_e C_m \Phi_{\text{у}} \omega_{\text{у}} a) u_{3\phi} - R_{\text{я}} R_{3\phi} (T_1 p + 1) M_0. \end{aligned}$$

Розділимо обидві частини рівняння на $(C_e C_m \Phi_{\text{у}}^2 R_{3\phi})$, остаточно отримаємо **рівняння «вхід-вихід» в операторній формі для відхилень:**

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \omega(t) = k_1 u_{3\phi}(t) - k_2 (T_1 p + 1) M_0(t),$$

де $T_2 = \frac{R_{\text{я}} J}{C_e C_m \Phi_{\text{у}}^2}$ – електромеханічна постійна часу двигуна;

$$k_1 = \frac{i_{\text{я}} a R_{\text{я}}}{C_e \Phi_{\text{у}}^2 R_{3\phi}} - \frac{\omega_{\text{у}} a}{\Phi_{\text{у}} R_{3\phi}} - \text{коєфіцієнт передачі двигуна за керуючою}$$

напругою управління;

$k_2 = \frac{R_{\text{я}}}{C_e C_M \Phi_{\text{у}}^2}$ – коефіцієнт передачі двигуна за збурювальним впливом.

Рівняння «вхід-вихід» у **диференціальній формі** отримаємо при заміні оператора диференціювання на операцію диференціювання:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \omega}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\omega}{dt} + \omega(t) = k_1 u_{3\delta}(t) - k_2 \left(T_1 \frac{dM_o}{dt} + M_o(t) \right).$$

Рівняння вхід-вихід елементів можна подати **графічно**. Врахувавши відношення

$$u_3 = k_{3\text{п}} g, u_1 = u_3 - u_{\text{тг}}; u_{3\delta} = k_{\text{ІІІ}} u_1; u_{\text{тг}} = k_{\text{тг}} \omega;$$

$$\omega = \frac{k_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} u_{3\delta} - \frac{k_2}{(T_2 p + 1)} M_o,$$

можна зобразити **структурну схему САР** (рисунок 3.7).

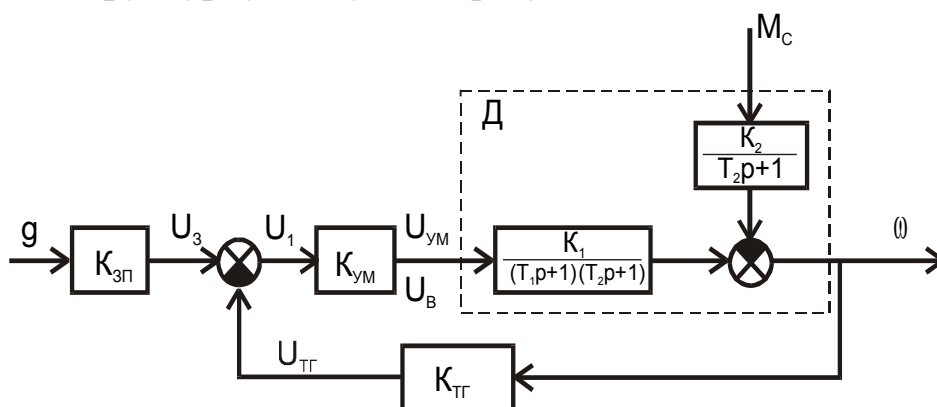


Рисунок 3.7

Відкинувши інші проміжні змінні $u_3, u_1, u_{\text{в}}, u_{\text{тг}}$, отримаємо

$$\omega(t) = \frac{k_1 k_{\text{ІІІ}} (k_{3\text{п}} g(t) - k_{\text{тг}} \omega(t))}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} - \frac{k_2}{T_2 p + 1} M_o(t),$$

звідки одержимо

$$((T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_1 k_{\text{ІІІ}} k_{\text{тг}}) \omega(t) = k_1 k_{\text{ІІІ}} k_{3\text{п}} g(t) - k_2 (T_1 p + 1) M_o(t)$$

$$\text{або } \omega(t) = \frac{k_1 k_{\text{ІІІ}} k_{3\text{п}}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_1 k_{\text{ІІІ}} k_{\text{тг}}} g(t) - \frac{k_2 (T_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_1 k_{\text{ІІІ}} k_{\text{тг}}} M_o(t).$$

Рівняння «вхід-вихід» в **операторній формі** має вигляд

$$\omega(t) = \Phi(p)g(t) + \Phi_f(p)M_o(t)$$

або в **диференційній формі** –

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \omega}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\omega}{dt} + (1 + k_1 k_{\text{ІІІ}} k_{\text{тг}}) \omega(t) = k_1 k_{\text{ІІІ}} k_{3\text{п}} g(t) - k_2 \left(T_1 \frac{dM_o}{dt} + M_o(t) \right).$$

3.3 Форми запису рівнянь САУ

Математичну модель САУ прийнято відображати в одній з декількох форм. Розглянемо деякі з них.

3.3.1 Стандартна форма запису рівняння «вхід-вихід»

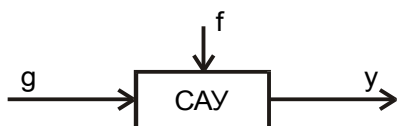


Рисунок 3.8

Нехай система має два входи та один вихід (рисунок 3.8). У лівій частині рівняння «вхід-вихід» записують вихідний сигнал зі своїми похідними, в правій – вхідні сигнали зі своїми похідними:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m g}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}} + \dots + b_m g(t) + c_0 \frac{d^l f}{dt^l} + c_1 \frac{d^{l-1} f}{dt^{l-1}} + \dots + c_l f(t). \quad (3.1)$$

Якщо це рівняння поділити на коефіцієнт a_n , то коефіцієнти a_i/a_n будуть мати розмірність c^{n-1} .

$$\text{У сталому режимі } y_{ст} = \frac{b_m}{a_n} g_{ст} + \frac{c_l}{a_n} f_{ст}.$$

Коефіцієнт $\frac{b_m}{a_n} = k_g$ передачі системи на основі задавальної дії буде мати розмірність $[y]/[g]$.

Коефіцієнт $\frac{c_l}{a_n} = k_f$ передачі системи на основі збурювальної дії буде мати розмірність $[y]/[f]$.

З рівняння динаміки легко отримати **рівняння статички** $y = k_g g + k_f f$.

Якщо n – порядок рівняння, порядок системи, то **умовами фізичної реалізації** моделі будуть відношення $m \leq n$, $l \leq n$.

Рівняння «вхід-вихід» двигуна постійного струму має вигляд

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \omega}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\omega}{dt} + \omega(t) = k_u u_{36}(t) - k_{M_0} (T_1 \frac{dM_0}{dt} + M_0(t)).$$

3.3.2 Операторна форма запису рівняння «вхід-вихід»

Уведемо оператор диференціювання $p = \frac{d}{dt}$. Тоді рівняння (3.1) можна записати так:

$$a_0 p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 p^m g(t) + \dots + b_m g(t) + c_0 p^l f(t) + \dots + c_l f(t)$$

або

$$A(p)y(t) = B(p)g(t) + C(p)f(t), \quad (3.2)$$

де $A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$; $B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$; $C(p) = c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \dots + c_l$.

Розв'язав рівняння (3.2), отримаємо

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} g(t) + \frac{C(p)}{A(p)} f(t) = W_g(p)g(t) + W_f(p)f(t),$$

де $W_g(p)$ – оператор передачі системи на основі задавальної дії,

$W_f(p)$ – оператор передачі системи на основі збурювального впливу.

$$\text{Рівняння двигуна має вигляд } \omega(t) = \frac{k_u}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} u_{3\sigma}(t) - \frac{k_{M_0}}{T_2 p + 1} M_0(t).$$

3.3.3 Запис рівняння «вхід-вихід» у зображеннях

Існують такі перетворення Лапласа (П'єр Симон Лаплас (1749 – 1827):

пряме перетворення: $Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$;

зворотне перетворення: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{st} ds$; $s = \alpha + j\omega$,

де $y(t)$ – **оригінал**, $Y(s)$ – **зображення**.

Застосуємо зображення Лапласа до рівняння «вхід-вихід» (3.1) при нульових початкових умовах. Отримаємо рівняння «вхід-вихід» в зображеннях:

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_n Y(s) = b_0 s^m G(s) + \dots + b_m G(s) + c_0 s^l F(s) + \dots + c_l F(s).$$

У багатьох книгах використовують одне й те ж позначення і для оператора диференціювання $p = \frac{d}{dt}$, і для комплексного аргументу $p = \alpha + j\omega$.

Відрізнити оператор від комплексного аргументу потрібно, визначаючи для чого записано рівняння: для оригіналів або зображень. Розв'яжемо рівняння в зображеннях. Отримаємо

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n} G(s) + \frac{c_0 s^l + \dots + c_l}{a_0 s^n + \dots + a_n} F(s) \text{ або } Y(s) = W_g(s)G(s) + W_f(s)F(s),$$

де $W_g(s)$ – передавальна функція системи на основі задавального впливу,

$W_f(s)$ – передавальна функція на основі збурювального впливу.

Якщо $f(t) \equiv 0$, то $y(s) = W_g(s)G(s)$ (рисунк 3.9).

Звідси

$$W_g(s) = W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} \left| \begin{array}{l} f(t) \equiv 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Аналогічно

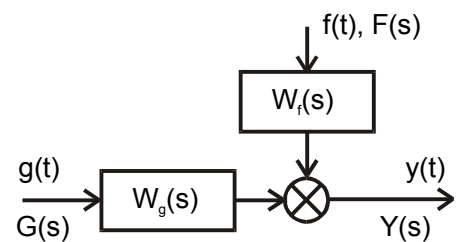


Рисунок 3.9

$$W_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} \left| \begin{array}{l} g(t) \equiv 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)} = 0 \end{array} \right.$$

Для двигуна

$$\Omega(s) = \frac{k_u}{(T_1s+1)(T_2s+1)} U_{36}(s) - \frac{k_{M_0}}{T_2s+1} M_0(t).$$

Передавальна функція – це відношення перетвореного за Лапласом вихідного сигналу до перетвореного за Лапласом вхідного сигналу при нульових початкових умовах.

3.4 Нормальна форма Коши

За допомогою додаткових змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, які називаються змінними стану або фазовими змінними, будь-яке диференціальне рівняння n -го степеня можна замінити n диференціальними рівняннями першого степеня.

Наприклад, рівняння двигуна при $M_c = 0$ має вигляд

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \omega}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\omega}{dt} + \omega(t) = k_1 u_{36}(t) \text{ или } a_0 \ddot{\omega} + a_1 \dot{\omega} + \omega = k_1 u_{36}.$$

Виберемо змінні стану x_1 і x_2 таким чином: $\begin{cases} x_1 = \omega, \\ x_2 = \dot{\omega}. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{a_0} x_1 - \frac{a_1}{a_0} x_2 + \frac{k_1}{a_0} u_{36}. \end{cases}$ Ці рівняння називаються **рівняннями**

стану;

$\omega = x_1$ – **рівняння виходу** (воно пов'язує вихідний сигнал системи зі змінними стану).

У загальному випадку рівняння стану мають вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}g_1 + b_{12}g_2 + \dots + b_{1r}g_r + n_{11}f_1 + \dots + n_{1p}f_p \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}g_1 + b_{n2}g_2 + \dots + b_{nr}g_r + n_{n1}f_1 + \dots + n_{np}f_p \end{cases}$$

або у векторно-матричній формі

$$\dot{x} = Ax + Bg + Nf,$$

де

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ – вектор стану; } g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_r \end{bmatrix} \text{ – задавальних впливів; } f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix} \text{ – збурювальних впливів}$$

Матриці A, B, N – матриці коефіцієнтів $[a_{ij}], [b_{ik}], [n_{il}]$ розмірності матриць:

$$A - (n \times n), B - (n \times r), N - (n \times p),$$

де n – порядок системи, r – кількість задавальних впливів, p – кількість збурювальних впливів.

Рівняння виходу в загальному випадку має вигляд

$$y = Cx + Dg + Mf.$$

Нормальна форма Коши (Огюстен Коши (1789-1857)) зручна тим, що диференціальне рівняння стану має перший порядок та легко розв'язується, а рівняння виходу є алгебричним. При відомих x , g та f легко знаходять вихід y . Векторно-матричні рівняння стану та виходу мають компактний вигляд.

3.5 Статичні та динамічні характеристики елементів і САУ

3.5.1 Статичні характеристики САУ

Розглянемо систему зі скалярними входами та виходом (рисунок 3.10).

Рівняння статичної такої системи має вигляд:
 $y = k_g g + k_f f$ (зазвичай $k_f < 0$).

Для цього рівняння можна побудувати два сімейства характеристик: регулювальні (рисунок 3.11) і навантажувальні (рисунок 3.12).

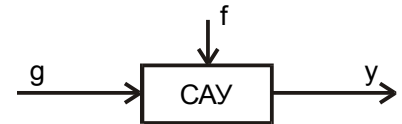


Рисунок 3.10

Статичною характеристикою елемента або системи називається залежність вихідного сигналу від вхідного в сталому режимі.

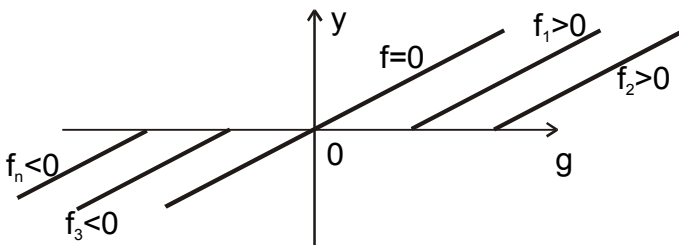


Рисунок 3.11

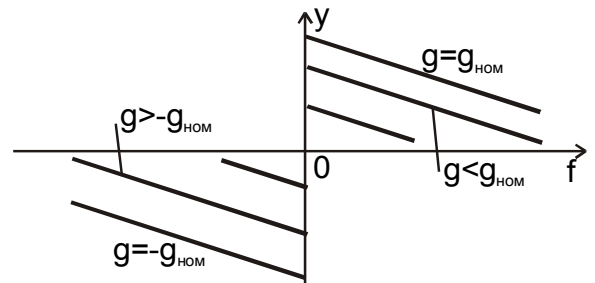


Рисунок 3.12

Всі реальні елементи мають нелінійні статичні характеристики.

3.5.2 Динамічні характеристики САУ

Динамічні характеристики елементів і систем поділяють на часові та частотні.

До часових належать перехідна та імпульсна перехідна (або вагова) характеристики, до частотних – АЧХ, ФЧХ, АФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ, ВЧХ, НЧХ та ін.

Часові характеристики

|| **Перехідна характеристика** – це реакція елемента або системи на одиничний ступеневий вплив $1(t)$ при нульових початкових впливах:

$$h(t) = h_g(t) = y(t) \left| \begin{array}{l} g(t) = 1(t), \\ f(t) = 0 \\ y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right. \quad - \text{перехідна характеристика на основі}$$

задавального впливу;

$$h_f(f) = y(t) \left| \begin{array}{l} g(t) = 0 \\ f(t) = 1(t) \\ y(0), \dots, y^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right. \quad - \text{перехідна характеристика на основі}$$

збурювального впливу.

|| **Імпульсна перехідна характеристика** – це реакція елемента або системи на δ -функцію при нульових початкових умовах.

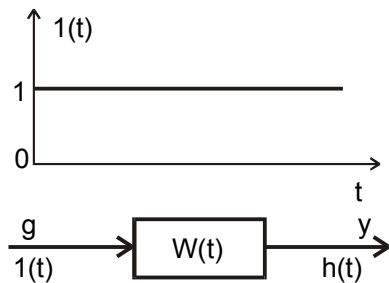


Рисунок 3.13

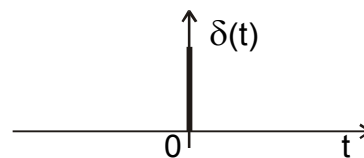


Рисунок 3.14

На рисунку 3.13 зображено $1(t)$ – функцію Хевісайда (Олівер Хевісайд (1850 – 1925), англ. фізик).

Перехідну характеристику можна знайти за допомогою передавальної функції:

$$Y(s) = W(s)G(s); \quad g(t) = 1(t); \quad G(s) = \frac{1}{s};$$

$$H(s) = \frac{W(s)}{s}; \quad h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \int_0^t w(t - \tau) d\tau = \int_0^t w(\tau) 1(t - \tau) d\tau.$$

$$h'(t) = h'_g(t) = y(t) \left| \begin{array}{l} g(t) = \delta(t), \\ f(t) = 0, \\ y(0), \dots, y^{(n-1)}(0) = 0; \end{array} \right.$$

$$h'_f(t) = y(t) \left| \begin{array}{l} g(t) = 0 \\ f(t) = \delta(t) \\ y(0) = \dots + y^{(n-1)}(0) = 0, \end{array} \right.$$

де $h'(t) = w(t)$ – вагова функція.

На рисунку 3.14 показано $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$ – функцію Дірака (Поль

Дірак (1902), англ. фізик).

Властивості функції Дірака:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1(t); \quad \frac{d1(t)}{dt} = \delta(t); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0);$$

($\varphi(t)$ – довільна функція);

$$Y(s) = W(s)G(s); \quad g(t) = \delta(t); \quad g(s) = 1;$$

$$H'(s) = W(s); \quad h'(t) = w(t) = L^{-1}\{W(s)\} = \frac{dh}{dt}.$$

За допомогою вагової функції можна знайти реакцію системи на будь-яку дію:

$$Y(s) = W(s)G(s) \rightarrow y(t) = \int_0^t w(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Застосувавши теорему про зображення згортки, перехідною та імпульсною перехідною функціями можна повністю описати САУ.

Частотні характеристики САУ

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ, $A(\omega)$) – це залежність відношення амплітуд вхідного й вихідного сигналів від частоти (рисунки 3.15, 3.16);

$$g(t) = a \sin \omega t; \quad y(t) = b(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)).$$

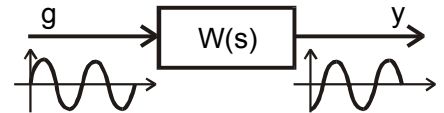


Рисунок 3.15

$$A(\omega) = \frac{b(\omega)}{a}; \quad g(t) \rightarrow ae^{j\omega t};$$

$$y(t) \rightarrow b(\omega)e^{j\omega t + \varphi(\omega)} = W(j\omega)ae^{j\omega t};$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}.$$

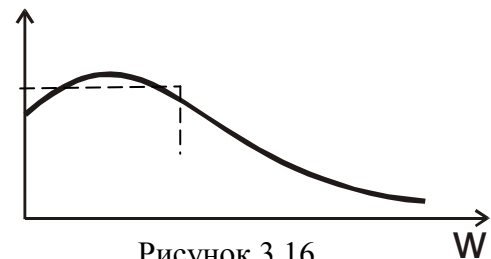


Рисунок 3.16

Фазочастотна характеристика (ФЧХ, $\varphi(\omega)$) – це залежність фази вихідного та фази вхідного сигналів частоти (рисунок 3.17);

$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ – при обчисленні фази за цією формулою слід враховувати знаки ВЧХ та НЧХ.

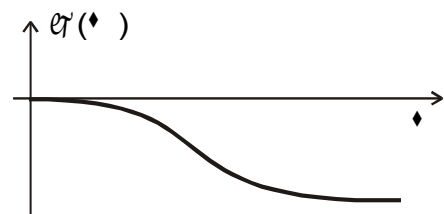


Рисунок 3.17

Амплітудно-фазочастотна характеристика (АФЧХ, $W(j\omega)$) – це траєкторія руху кінця вектора $W(j\omega)$ при зміні частоти ω (зазвичай в діапазоні від 0 до $+\infty$) (рисунок 3.18).

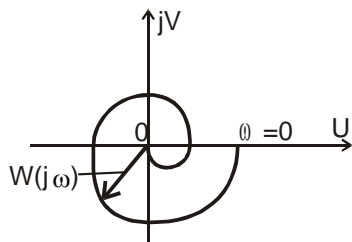


Рисунок 3.18

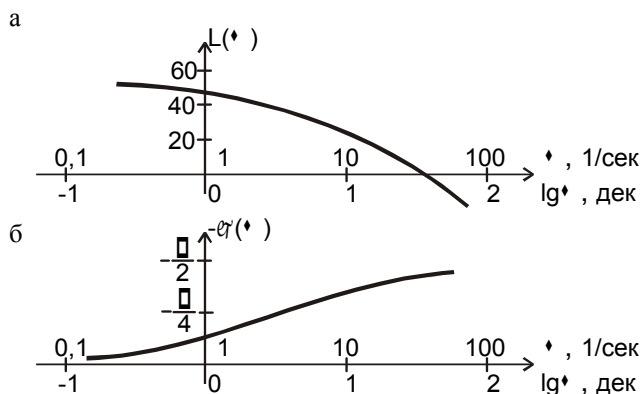


Рисунок 3.19

ЛАЧХ и **ЛФЧХ** – логарифмічні АЧХ і ФЧХ (рисунок 3.19).

При їх побудові по осі абсцис частота відкладається в логарифмічному масштабі в рад/с. Відрізок осі, який відповідає зміні частоти в десять разів, називають декадою. При побудові ЛАЧХ по осі ординат відкладають відношення амплітуд вхідного й вихідного сигналів пристрою, виражене в **децибелах**:

$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$, дБ.

Джон Непер (1550 – 1617) – шотландський вчений – в 1614 р. опублікував книгу «Опис чудесної таблиці логарифмів».

<i>amplitudo</i>	– величина (лат.)
<i>logos</i>	– відношення (гр.)
<i>arithmos</i>	– число (гр.)
<i>phasis</i>	– поява (гр.)
<i>modulus</i>	– міра (лат.)

Тема 4 ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ САУ

4.1 Передавальні функції послідовного, паралельного та зустрічно-паралельного з'єднання ланок

4.1.1 Послідовне з'єднання ланок

Послідовним називається з'єднання ланок, при якому вихідний сигнал попередньої ланки є вхідним сигналом наступної ланки ($y_i = g_{i+1}$) (рисунки 4.1, 4.2).

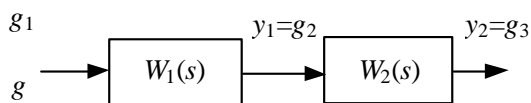


Рисунок 4.1

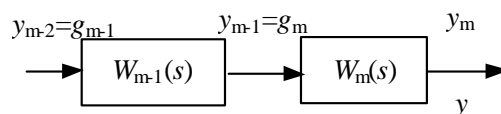


Рисунок 4.2

Знайдемо передавальну функцію (ПФ) послідовного з'єднання ланок. Зображення вихідного сигналу пов'язане із зображенням вхідного сигналу через передавальну функцію

$$y(s) = W_m(s)G_m(s) = W_m(s)Y_{m-1}(s) = W_m(s)W_{m-1}(s)G_{m-1}(s) = \dots = \\ = W_m(s)W_{m-1}(s) \dots W_1(s)G(s).$$

За визначенням $W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}$. Звідси $W(s) = \prod_{i=1}^m W_i(s)$, тобто при послідовному з'єднанні ланок їхні передавальні функції перемножуються.

Розглянемо частотні характеристики послідовного з'єднання ланок. Робимо заміну в передавальній функції $s \rightarrow j\omega$: $W(j\omega) = \prod_{i=1}^m W_i(j\omega)$. Подамо комплексний коефіцієнт передачі у вигляді

$$W_i(j\omega) = A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}.$$

$$\text{Тоді } W(j\omega) = \prod_{i=1}^m A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)} = \prod_{i=1}^m A_i(\omega)e^{j\sum_{i=1}^m \varphi_i(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \Rightarrow A(\omega) = \prod_{i=1}^m A_i(\omega), \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\omega).$$

При послідовному з'єднанні ланок їх частотні характеристики перемножуються, а фазові – додаються (рисунок 4.3). Перейдемо до логарифмічних амплітудних частотних характеристик

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^m A_i(\omega) = \sum_{i=1}^m L_i(\omega).$$

Таким чином, $L(\omega) = \sum_{i=1}^m L_i(\omega)$, тобто логарифмічні

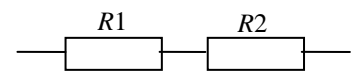


Рисунок 4.3

амплітудні частотні характеристики також додаються. Ця властивість приводить до простого способу побудови асимптотичних ЛАЧХ послідовного з'єднання ланок. Слід запам'ятати, що в ТАУ розглядаються ланки направленої дії, а передавальна функція характеризує перетворення інформації даною ланкою. На відміну від електричних принципових схем, де розглядаються елементи перетворення електричних процесів, наприклад, у ланцюзі двох послідовно ввімкнених резисторів (див. рисунок 4.3), є справедливим відношення $R = R_1 + R_2$.

Цей ланцюг містить ланки ненаправленої дії. Якщо два підсилювача з коефіцієнтами підсилення $k_1 = 2$, $k_2 = 5$ з'єднати послідовно, то разом вони підсилять сигнал у 10 разів.

4.1.2 Паралельне з'єднання ланок

Паралельним називається таке з'єднання ланок, при якому вхідні сигнали всіх ланок однакові, а вихідний сигнал дорівнює сумі вихідних сигналів елементів (рисунок 4.4):

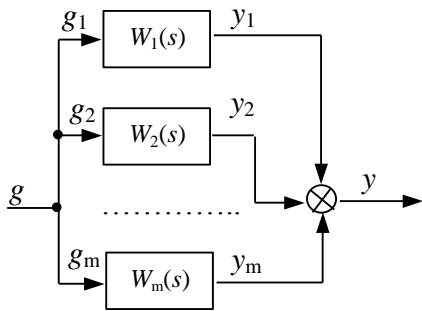


Рисунок 4.4

$$g = g_1 = g_2 = \dots = g_m;$$

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_m.$$

Знайдемо передавальну функцію паралельного з'єднання ланок. Подамо зображення вихідного сигналу через зображення вхідного сигналу:

$$\begin{aligned} y(s) &= y_1(s) + y_2(s) + \dots + y_m(s) = \\ &= W_1(s)G_1(s) + W_2(s)G_2(s) + \dots + W_m(s)G_m(s) = \\ &= W_1(s)G(s) + W_2(s)G(s) + \dots + W_m(s)G(s) = \\ &= (W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_m(s))G(s). \end{aligned}$$

Звідки отримуємо $W(s) = \sum_{i=1}^m W_i(s)$. При паралельному з'єднанні ланок їх передавальні функції додаються, а частотні характеристики зручно розглядати в декартових координатах:

$$W(j\omega) = \sum_{i=1}^m W_i(j\omega) = \sum_{i=1}^m (U_i(\omega) + jV_i(\omega)) = \sum_{i=1}^m U_i(\omega) + j \sum_{i=1}^m V_i(\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

де $U(\omega) = \sum_{i=1}^m U_i(\omega)$; $V(\omega) = \sum_{i=1}^m V_i(\omega)$.

При цьому з'єднанні АФЧХ системи отримують шляхом додавання АФЧХ окремих ланок.

Не слід плутати паралельне з'єднання ланок з паралельним з'єднанням елементів, яке показано на рисунку 4.5

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Якщо два підсилювача з коефіцієнтами підсилення $k_1=2$, $k_2=5$ з'єднати паралельно, то разом вони підсилять сигнал у 7 раз.

4.1.3 Зустрічно-паралельне з'єднання ланок

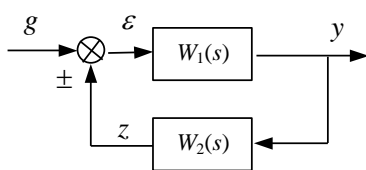


Рисунок 4.5

Перша ланка $W_1(s)$ охоплена зворотним зв'язком (ЗЗ) з допомогою другої ланки $W_2(s)$. Існує два шляхи: **прямий шлях** від входу до виходу та **лінія зворотного зв'язку**, яка передає сигнал від виходу до входу.

Зустрічно-паралельним з'єднанням двох ланок називають таке з'єднання, при якому вихідний сигнал першої ланки є вхідним сигналом другої ланки, а вхідний сигнал першої ланки є алгебричною сумою вхідного сигналу та вихідного сигналу другої ланки.

Зворотний зв'язок називають **додатним**, якщо $\epsilon = g + z$, та **від'ємним**, якщо $\epsilon = g - z$.

Запишемо зв'язки зображень всіх сигналів з передавальними функціями ланок:

$$E(s) = G(s) \pm Z(s), Y(s) = W_1(s)E(s), Z(s) = W_2(s)y(s).$$

Тут знак “+” – для додатного зворотного зв'язку (ДЗЗ), а знак “-” – для від'ємного (ВЗЗ). Виключимо проміжні змінні:

$$Y(s) = W_1(s)[G(s) \pm Z(s)] = W_1(s)[G(s) \pm W_2(s)y(s)].$$

Звідки

$$Y(s) \mp W_1(s)W_2(s)Y(s) = W_1(s)G(s), \quad [1 \mp W_1(s)W_2(s)]Y(s) = W_1(s)G(s),$$

тут “-” – для ДЗЗ і далі “+” – для ВЗЗ.

Знаходимо ПФ зустрічно-паралельного з'єднання: $W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)}$ –

формула замикання.

Від'ємний зворотний зв'язок широко застосовується в підсилювачах для стабілізації їх коефіцієнтів передачі. Наприклад, коефіцієнт передачі підсилювача змінюється в діапазоні $k_1=100\dots200$. При охопленні його зворотним зв'язком з коефіцієнтом $k_2 = 0.1$ отримаємо $k_{\min} = \frac{100}{1+100 \cdot 0.1} = 9.09$ і $k_{\max} = \frac{200}{1+200 \cdot 0.1} = 9.52$.

Таким чином, нестабільність коефіцієнта підсилення, яка дорівнює 50 %, зменшується до менш ніж 5 %. Проте це досягається за рахунок зменшення коефіцієнта підсилення.

4.2 Правила перетворення структурних схем САУ

Дві схеми є **еквівалентними**, якщо при однакових вхідних сигналах отримують однакові вихідні сигнали (рисунок 4.6):

$$\forall i(g_{1i} = g_{2i}) \Rightarrow \forall i(y_{1i} = y_{2i}).$$

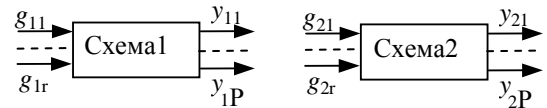


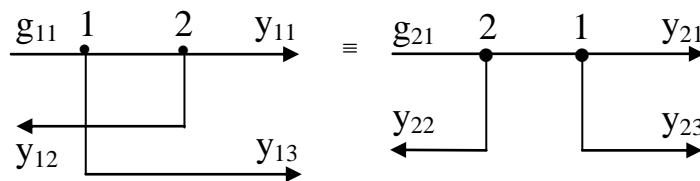
Рисунок 4.6

Для спрощення виведення передавальних функцій складних САУ в структурних схемах, в яких непросто виділити типові зв'язки в чистому вигляді, можна застосовувати структурні перетворення. Наведемо деякі з правил перетворення структурних схем.

Правило 1

Якщо $q_{11} = q_{21}$, то $y_{11} = y_{21}$, $y_{12} = y_{22}$, $y_{13} = y_{23}$.

Вузли можна міняти місцями.



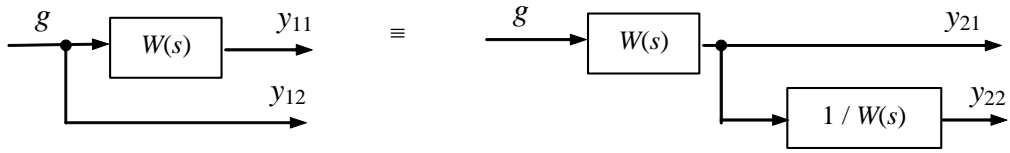
Правило 2

Суматори можна міняти місцями.



Правило 3

При переносі вузла через ланку по ходу сигналу треба додати зворотну ланку.



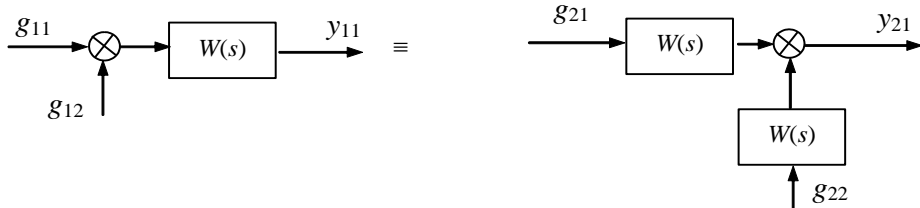
Правило 4

При переносі вузла через ланку по ходу сигналу слід додавати таку ж ланку.



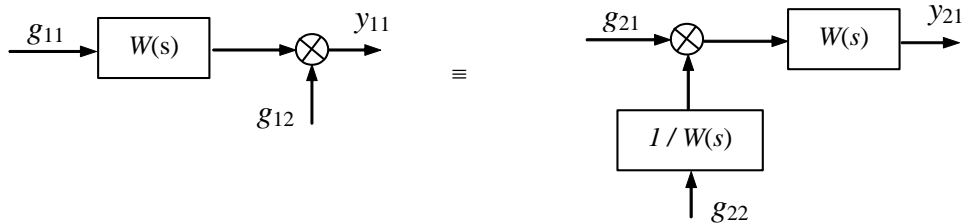
Правило 5

При переносі суматора через ланку по ходу сигналу слід додавати таку ж ланку.



Правило 6

При переносі ланки через суматор по ходу сигналу слід додавати зворотню ланку.



Правило 7

При переносі вузла через суматор по ходу сигналу слід додавати ще один суматор.



Приклад. Дано схему (рисунок 4.6).

Знайти її передавальну функцію.

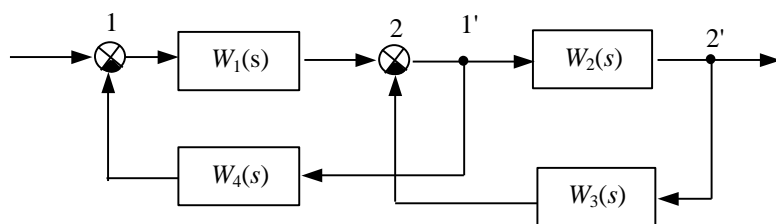


Рисунок 4.6

Контури, що перехрещуються, не дають можливості застосовувати формули типових з'єднань ланок.

Перенесемо вузол 1' через ланку $W_2(s)$ і через вузол 2' по ходу сигналу (рисунок 4.7). При цьому необхідно ввести ланку $\frac{1}{W_2(s)}$.

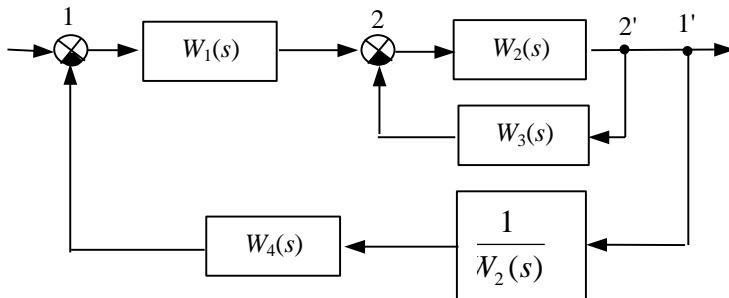


Рисунок 4.7

Тепер можна послідовно застосовувати формули замикання та послідовного з'єднання:

$$W(s) = \frac{W_1(s) \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)}}{1 + \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)} \cdot W_4(s) \frac{1}{W_2(s)}} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_2(s)W_3(s) + W_1(s)W_4(s)}$$

4.3 Виведення передавальних функцій систем за допомогою формули Мейсона

Теорія графів дозволяє знаходити передавальну функцію лінійної системи за будь-яким входом і виходом системи без структурних перетворень.

Розглянемо цей метод на прикладі системи, яку зображено на рисунку 4.8.

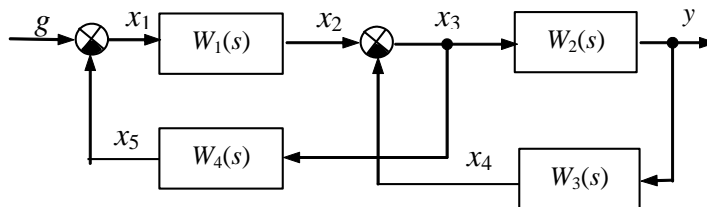


Рисунок 4.8

Граф – це сукупність вершин та зв'язків (ребер, дуг).

Побудуємо граф системи (рисунок 4.9). Кожному сигналу ставимо у відповідність вершину графа. Кожній ланці ставимо у відповідність направлений зв'язок графа з вагою, яка дорівнює його передавальній функції.

Оскільки на вході та виходах вузлів існує один і той же сигнал, вузли на графі зникають. Суматори на графі також відсутні, оскільки сигнал у вершині дорівнює сумі сигналів, що входять в неї.

Прямий шлях – це розімкнутий ланцюг зв'язків графа від входу до виходу.

Контур – це замкнутий ланцюг зв'язків, через

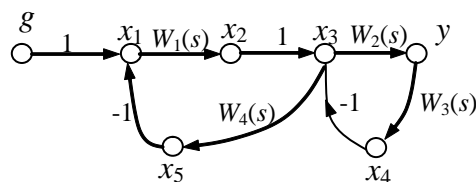


Рисунок 4.9

який кожна вершина проходить тільки один раз.

Недотичні контури – контури, які не мають спільних вершин.

Передавальна функція системи між входом q та виходом y може бути знайдена за **формулою Мейсона**:

$$\Phi_{yg}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{np}} W_{np,i}(s) \Delta_i(s)}{\Delta(s)},$$

де $W_{np,i}(s)$ – передавальна функція i -го прямого шляху;

n_{np} – число прямих шляхів між входом g і виходом y ;

$\Delta(s) = 1 - \sum_{j=1}^{n_1} W_{1j}(s) + \sum_{k=1}^{n_2} W_{2k}(s) - \sum_{l=1}^{n_3} W_{3l}(s) + \dots$ – визначник графа;

$\Delta_i(s)$ – визначник доповнення графа до i -го прямого шляху. Доповнення отримують кресленням всіх зв'язків i -го прямого шляху та всіх зв'язків, які мають з ним спільні вершини;

n_1, n_2, n_3, \dots – число контурів, пари недотичних контурів, трійки недотичних контурів і т.д.;

$W_{1j}(s)$ – передавальна функція j -го контуру;

$W_{2k}(s)$ – добуток передавальних функцій k -ї пари недотичних контурів;

$W_{3l}(s)$ – добуток передавальних функцій першої трійки недотичних контурів.

У прикладі $n_{np}=1, n_1=2, n_2=0, n_3=0, \dots$ (рисунок 4.10).

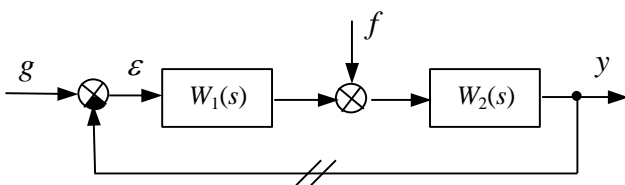


Рисунок 4.10

$$W_{11}(s) = -W_1(s)W_4(s); \quad W_{12}(s) = -W_2(s)W_3(s);$$

$$W_{np1}(s) = W_1(s)W_2(s);$$

$$\Delta(s) = 1 + W_1(s)W_4(s) + W_2(s)W_3(s);$$

$$\Delta_1(s) = 1;$$

$$\Phi_{yg}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_4(s) + W_2(s)W_3(s)}.$$

Отже, отримали ту ж відповідь, що і в попередньому прикладі.

4.4 Передавальні функції САУ на основі задавального та збурювального впливів та за відхиленням

Розглянемо систему з одиничним зворотним зв'язком:

$$y_{баз} = g, \quad E(s) = G(s) - Y(s).$$

Розрізняють шість передавальних функцій:

1. Передавальна функція розімкненої системи на основі задавальної дії:

$$W_{y\delta}(s) = \left. \frac{Y(s)}{G(s)} \right|_{f \equiv 0} = W_1(s)W_2(s) = W_{np}(s) = W_{раз}(s).$$

2. Передавальна функція розімкненої системи на основі збурювального впливу:

$$W_{yf}(s) = \left. \frac{Y(s)}{F(s)} \right|_{g \equiv 0} = W_2(s).$$

3. Передавальна функція замкненої системи на основі задавальної дії:

$$\Phi_{y\partial}(s) = \left. \frac{Y(s)}{G(s)} \right|_{f \equiv 0} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{W_{np}(s)}{1 + W_{пр}(s)W_{зз}(s)}.$$

4. Передавальна функція замкненої системи на основі збурювального впливу:

$$\Phi_{yf}(s) = \left. \frac{Y(s)}{F(s)} \right|_{g \equiv 0} = \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{W_f(s)}{1 + W_{раз}(s)}.$$

5. Передавальна функція замкненої системи за відхиленням, викликаним задавальним впливом:

$$\Phi_{\varepsilon g}(s) = \Phi_{\varepsilon}(s) = \left. \frac{E(s)}{G(s)} \right|_{f \equiv 0} = 1 - \Phi(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{1}{1 + W_{раз}(s)}.$$

6. Передавальна функція замкненої системи за відхиленням, викликаним збурювальним впливом (з точністю до знака збігається з передавальною функцією замкненої системи на основі збурювального впливу):

$$\Phi_{\varepsilon f}(s) = \frac{-W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

На основі принципу суперпозиції можна записати:

$$Y(s) = \Phi(s)G(s) + \Phi_f(s)F(s); \quad E(s) = \Phi_{\varepsilon}(s)G(s) - \Phi_f(s)F(s).$$

Тема 5 МЕТОД ПРОСТОРУ СТАНУ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ САУ

Цей метод належить до сучасної ТАУ. Він дозволяє знайти реакцію і будь-яку дію при будь-яких початкових умовах, оцінити стійкість, керованість і спостережуваність.

5.1 Рівняння стану та виходу неперервних лінійних САУ

Неперервна лінійна система з r входами та l виходами описується:

– n диференціальними рівняннями стану 1-го порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}g_1 + \dots + b_{1r}g_r + m_{11}f_1 + \dots + m_{1p}f_p, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}g_1 + \dots + b_{nr}g_r + m_{n1}f_1 + \dots + m_{np}f_p, \end{cases}$$

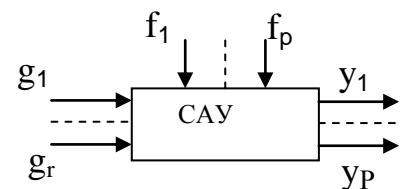


Рисунок 5.1

$$\text{де } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ -- вектор стану; } \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_r \end{bmatrix} \text{ -- задавальних впливів; } \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix} \text{ -- збурювальних впливів;}$$

– одним алгебричним рівнянням виходу

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}g_1 + \dots + d_{1r}g_r + n_{11}f_1 + \dots + n_{1p}f_p, \\ \dots \\ y_l = c_{l1}x_1 + \dots + c_{ln}x_n + d_{l1}g_1 + \dots + d_{lr}g_r + n_{l1}f_1 + \dots + n_{lp}f_p, \end{cases}$$

$$\text{де } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_l \end{bmatrix} \text{ -- вихідних величин .}$$

Ці рівняння у векторно-матричній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bg + Mf; \\ y &= Cx + Dg + Nf, \end{aligned}$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ -- власна матриця системи розміром } n \times n;$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \text{ -- на основі задавальної дії матриця входу розміром } n \times r;$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & \dots & c_{ln} \end{bmatrix} \text{ -- матриця виходу розміром } l \times n;$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{l1} & \dots & d_{lr} \end{bmatrix} \text{ -- на основі задавальної дії матриця обходу розміром } l \times r;$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{bmatrix} \text{ -- на основі збурювальної дії матриця входу розміром } n \times p;$$

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & \dots & n_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ n_{l1} & \dots & n_{lp} \end{bmatrix} \text{ -- на основі збурювальної дії матриця обходу розміром } l \times p.$$

Згодом вектор станів x (стан x) переміщається в n -мірному евклідівському просторі та описує фазову траєкторію; $x(t)$ – точка зображення, що характеризує стан САУ або певну фазу руху САУ в кожний момент часу.

Метод простору станів розглянуто щодо явищ динаміки САУ рухом точки зображення в n -мірному евклідівському просторі.

Змінні стану характеризують запас енергії в елементах системи. Як змінні стану можна вибирати змінні, які відповідають запасу енергії в елементах або їх лінійних комбінаціях, наприклад, напруги або заряди на конденсаторах, струми або потокозчеплення в котушках індуктивності, кутові та лінійні швидкості, переміщення мас по вертикалі, розтягнення пружини, а також їх комбінації.

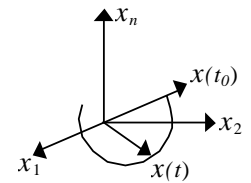


Рисунок 5.2

Так, якщо $x_1 = u_{c1}$, $x_2 = u_{c2}$, то можна вибрати інші набори змінних стану: $x'_1 = u_{c1} + u_{c2}$; $x'_2 = 2u_{c1} + 3u_{c2}$ і т.д.

Формальне визначення вектора стану: **вектор стану** – це мінімальний набір змінних x_1, x_2, \dots, x_n , знання яких в початковий момент часу t_0 є спільним зі знанням вхідних впливів $g_1(t), \dots, g_r(t), f_1(t), \dots, f_p(t)$ в інтервалі $t_0 \leq t \leq t_1$, що дозволяє визначити всі вихідні сигнали $y_1(t), \dots, y_l(t)$ в будь-який момент часу t в діапазоні $t_0 \dots t_1$.

5.2 Розв'язання рівнянь стану і виходу неперервних лінійних САУ

Нехай $f(t)=0$, тоді рівняння стану та виходу мають вигляд

$$\dot{x} = Ax + Bg; \quad x|_{t_0} \quad (5.1)$$

$$y = Cx + Dg. \quad (5.2)$$

Розв'яжемо однорідне рівняння стану із заданими початковими умовами:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0). \quad (5.3)$$

Нехай $t_0 = 0$. Скалярне диференціальне рівняння $\dot{x} = ax$, $x(0)$ має розв'язок

$$x(t) = ce^{\lambda t},$$

де λ – корінь характеристичного рівняння $\lambda = a$;

c – постійна інтегрування, що визначається з початкових умов $c = x(0)$.

Таким чином, $x(t) = x(0)e^{at}$.

Експоненціальна функція може бути розкладена в степеневий ряд:

$$x(t) = x(0) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(at)^i}{i!}.$$

За аналогією зі скалярним випадком допустимо, що розв'язання векторно-матричного рівняння стану має вигляд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i t^{i-1}}{i!} x(0) = A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} x(0).$$

Перевіримо це допущення, підставивши ймовірний розв'язок в однорідне рівняння стану (5.3) $x' = Ax$:

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} x(0) = A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} x(0).$$

Винесемо A за знак суми в лівій частині рівності та введемо нову змінну $k = i - 1$.

Отримали тотожність. Отже, розв'язання однорідного диференціального рівняння дійсно має вигляд

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} x(0)$$

Введемо позначення

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = e^{At}.$$

Тоді $x(t) = \Phi(t)x(0)$, де $\Phi(t)$ – **фундаментальна, або перехідна матриця**.

При $t = 0$ вона перетворюється в одиничну матрицю $\Phi(0) = I$.

Розв'яжемо рівняння (5.3) за допомогою перетворення Лапласа:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, x(0); & (sI - A)X(s) &= x(0); \\ sX(s) - x(0) &= AX(s); & X(s) &= (sI - A)^{-1} x(0); \\ sX(s) - AX(s) &= x(0); & x(t) &= L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} \cdot x(0). \end{aligned}$$

Порівнюючи обидва розв'язання, отримуємо рівність:

$$\Phi(t) = L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} \quad \text{або} \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}.$$

Фундаментальну матрицю можна визначити за допомогою формули Сильвестра (при некратних коренях):

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n F_i e^{\lambda_i t},$$

$$\text{де } F_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j};$$

λ_i і λ_j – корні характеристичного рівняння системи $\det(\lambda I - A) = 0$.

Розв'яжемо тепер неоднорідне рівняння стану (5.1) за допомогою перетворення Лапласа

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t)x(0)}_{\text{вільна складова}} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)Bg(\tau)d\tau}_{\text{вимушена складова}};$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bg, \quad x(0); \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) + BG(s); \\ sX(s) - AX(s) &= x(0) + BG(s); \\ (sI - A)X(s) &= x(0) + BG(s); \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BG(s); \\ X(s) &= \Phi(s)x(0) + \Phi(s)BG(s). \end{aligned}$$

Рівняння виходу $y = Cx + Dg$ має розв'язок

$$y(t) = \underbrace{C\Phi(t)x(0)}_{\text{вільна складова}} + \underbrace{C \int_0^t \Phi(t-\tau)Bg(\tau)d\tau + Dg(t)}_{\text{вимушена складова}}.$$

Вільна складова не залежить від вхідних впливів $g(t)$ та визначається тільки початковими умовами $x(0)$ та властивостями системи. Вимушена складова залежить від вхідних впливів $g(t)$ та властивостей системи і не залежить від початкових умов. Ця формула дозволяє знаходити вихідний сигнал при будь-яких початкових умовах та вхідних впливах.

Наприклад, можна визначити перехідну характеристику:

$$h(t) = C \int_0^t \Phi(t-\tau)Bd\tau + D1(t)$$

5.3 Векторно-матрична структурна схема та матричні передавальні функції неперервних лінійних САУ

Рівняння стану та виходу $\dot{x} = Ax + Bg + Mf, x(t_0); y = Cx + Dg + Nf$ можна відобразити графічно за допомогою структурної схеми (рисунок 5.3).

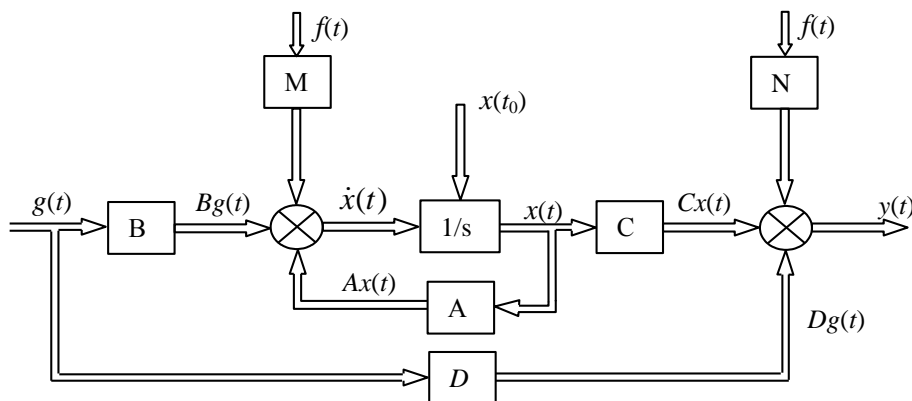


Рисунок 5.3

Схема містить n -мірний інтегратор із заданими початковими умовами.

Подвійні лінії означають шляхи векторних сигналів. Ця ж схема може бути зображена і в скалярній формі.

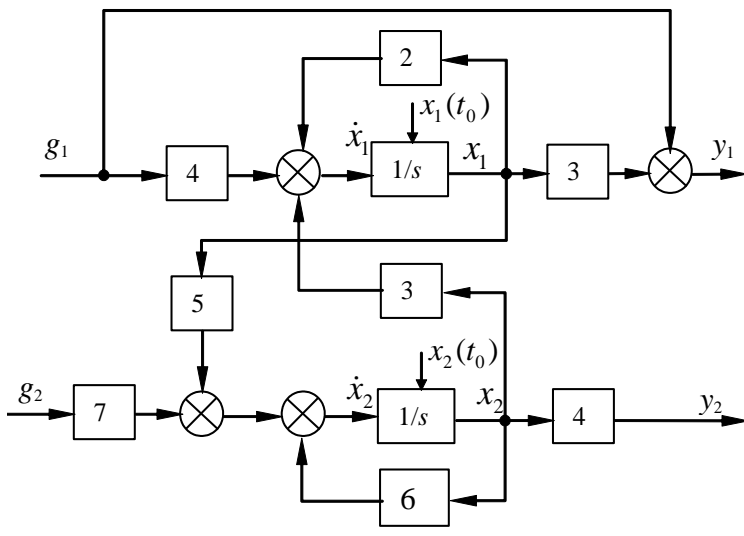


Рисунок 5.4

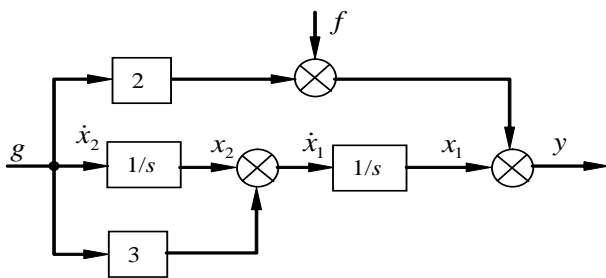


Рисунок 5.5

Приклад 1. За допомогою рівнянь стану та виходу $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4g_1, \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + 6x_2 + 7g_2, \end{cases} \begin{cases} y_1 = 3x_1 + g_1, \\ y_2 = 4x_2. \end{cases}$ зобразити структурну схему (рисунок 5.4).

Випишемо значення матриць A, B, C, D:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структурну схему САУ, що відповідає заданим рівнянням, показано на рисунку 5.5.

Приклад 2. За структурною схемою знайти рівняння стану та виходу.

Як змінні стану x_1 і x_2 вибираємо виходи інтеграторів, оскільки ці змінні характеризують запас енергії в цих блоках. Решта елементів (суматори, підсилювальні елементи) енергію не запасують.

$$\text{Тоді } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3g, \\ \dot{x}_2 = g, \end{cases} \quad y = x_1 + 2g + f.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0]; D = [2];$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; N = [1].$$

Для структурної схеми можна знайти передавальні функції (наприклад, використовуючи формулу Мейсона).

Застосуємо перетворення Лапласа до рівнянь стану і виходу при нульових початкових умовах та розв'яжемо їх:

$$X(s) = \Phi(s)BG(s);$$

$$Y(s) = C\Phi(s)BG(s) + DG(s) = [C\Phi(s)B + D]G(s).$$

Тоді $W_x(s) = \Phi(s)B = (sI - A)^{-1}B$ – матрична передавальна функція системи за станом;

$$W_y(s) = C\Phi(s)B + D = C[(sI - A)^{-1}B] + D \text{ – матрична передавальна функція}$$

системи за виходом;

$W_{xij}(s)$ – передавальна функція системи між j -м входом та i -м станом;

$W_{yij}(s)$ – передавальна функція системи між j -м входом та i -м виходом.

5.4 Виведення рівнянь стану та виходу неперервної лінійної САУ за допомогою методу керуючого канонічного подання

За допомогою відповідного вибору змінних стану можна описати систему n диференціальними рівняннями стану (першого порядку) та l алгебричними рівняннями виходу. Якщо є принципова схема САУ, як змінні стану можна використовувати сигнали, що характеризують запас енергії в елементах САУ, або їх лінійні комбінації. Розглянемо, як вибрати змінні стану, якщо немає принципової схеми САУ, а є її передавальна функція

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{Y(s)}{G(s)}, \quad m \leq n \text{ або рівняння «вхід-вихід»};$$

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m g}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}} + \dots + b_m g(t), \quad m \leq n.$$

Цю задачу розглядаємо на прикладі САУ з одним входом та одним виходом (рисунок 5.6).

Існує велика кількість методів розв'язання такої задачі. Наприклад, розкладання передавальної функції на прості дроби з подальшим паралельним з'єднанням елементів, що відповідають окремим дробам (метод паралельного програмування); розкладання чисельника та знаменника передавальної функції на прості множники з подальшим послідовним з'єднанням елементів, що відповідають дробам першого степеня (метод послідовного програмування); ідентифікаційне канонічне подання системи та інші.

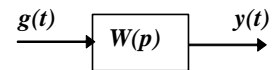


Рисунок 5.6

Розглянемо один із цих методів – метод керуючого канонічного подання (ККП).

Метод ККП

Зображення за Лапласом вихідного сигналу САУ:

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} G(s), \quad m \leq n.$$

Введемо допоміжну змінну $Z(t)$

$$Z(s) = \frac{G(s)}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad Y(s) = (b_0 s^m + \dots + b_m) Z(s)$$

або

$$a_0 z^{(n)}(t) + a_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + a_n z(t) = g(t).$$

Розв'яжемо останнє рівняння відносно старшої похідної

$$z^{(n)}(t) = -\frac{a_1}{a_0} z^{(n-1)}(t) - \frac{a_2}{a_0} z^{(n-2)}(t) - \dots - \frac{a_n}{a_0} z(t) + \frac{1}{a_0} g(t). \quad (5.4)$$

Вихід $y(t)$ пов'язано зі змінною $z(t)$ залежністю

$$y(t) = b_0 z^{(m)}(t) + b_1 z^{(m-1)}(t) + \dots + b_m z(t). \quad (5.5)$$

На основі рівнянь (5.4) та (5.5) будемо схему в змінних стану для більш загального випадку $m = n$ (рисунок 5.7). Як змінні стану x_i використовуємо вихідні сигнали інтеграторів.

Тоді вхідні сигнали інтеграторів дорівнюватимуть відповідним похідним.

Складемо рівняння стану при $a_0 = 1, b_0 = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + g \end{cases}$$

або

$$\dot{x} = Ax + Bg,$$

де $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$

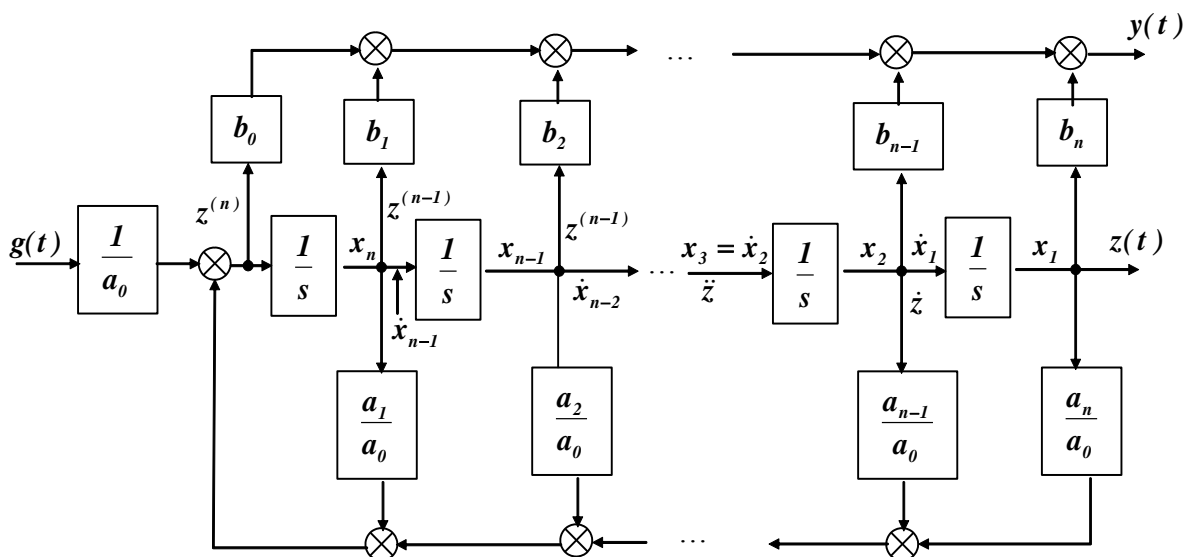


Рисунок 5.7

У правому верхньому кутку матриці A знаходиться одинична матриця I . Останній ряд матриці A містить коефіцієнти знаменника передавальної функції $W(s)$ із знаками “-”. Така форма матриці A має назву матриця Фробеніуса. Матриця B має тільки один ненульовий елемент – останній.

Складемо рівняння виходу

$$y = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \dots + b_2 x_{n-1} + b_1 x_n.$$

Воно одне, тому що розглядається система тільки з одним виходом. У матричній формі це рівняння має вигляд

$$y = Cx + Dg,$$

де $C = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_2 \ b_1], D = [0].$

Окремий випадок. Якщо чисельник передавальної функції не містить s або диференціальне рівняння «вхід-вихід» не містить похідних від вхідного сигналу, то структурна схема має у верхньому ряду тільки один підсилювач з коефіцієнтом b_n . Тоді вихідний сигнал y дорівнює $b_n x_1$. Решта змінних стану стають пропорційними похідним від виходу y . В цьому випадку як змінні стану можна вибрати вихідний сигнал ($x_1=y$) і $n-1$ його похідні ($x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$).

Приклад. Знайти А, В, С, D, Ф, х для двигуна.

Рівняння «вхід-вихід» двигуна має вигляд

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \omega}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\omega}{dt} + \omega(t) = k_D u_B$$

або

$$\ddot{\omega}(t) + a_1 \dot{\omega}(t) + a_2 \omega(t) = b u_B(t),$$

де $a_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$, $a_2 = \frac{1}{T_1 T_2}$, $b = \frac{k_D}{T_1 T_2}$.

Виберемо як змінні стану вихідний сигнал ω і його похідну $\dot{\omega}$:

$$x_1 = \omega, \quad x_2 = \dot{\omega}.$$

Знайдемо рівняння стану та виходу:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & \text{— на основі вибору змінних } x_1 \text{ і } x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + b u_B & \text{— з рівняння "вхід - вихід",} \\ y = x_1 = \omega. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]; \quad D = [0]$$

Рівнянням стану та виходу відповідає структурна схема (рисунок 5.8).

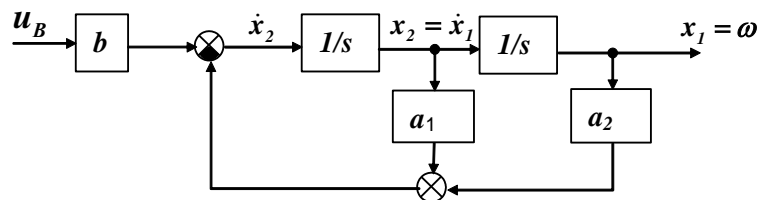


Рисунок 5.8

Знайдемо фундаментальну матрицю двигуна $\Phi(t)$ за допомогою формули Сильвестра

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n F_i e^{\lambda_i t}, \quad F_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j},$$

де λ_i, j – корні характеристичного рівняння $\det(\lambda I - A) = 0$.

Характеристичне рівняння двигуна має вигляд

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Його корні знаходимо за формулою $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$.

Нехай $a_1 = 6$; $a_2 = 5$; $b = 0.1$. Тоді $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -5$.

$$\text{Нехай } i=1, j=2; F_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} - (-5) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-1 - (-5)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\text{При } i=2, j=1 F_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-5 - (-1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Тепер можемо записати фундаментальну матрицю двигуна:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-5t} & \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-5t} \\ -\frac{5}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^{-5t} & -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Природно, що при $t=0$ вона перетворюється в одиничну:

$$\Phi(t) = e^{At} = I \quad \text{при } t=0.$$

5.5 Керованість і спостережуваність неперервних лінійних САУ

|| **Керованою за станом** називають систему, стан якої можна змінити від будь-якого початкового $x(t_0)$ до будь-якого кінцевого $x(t_f)$ за обмежений час $(t_f - t_0) < \infty$ та при обмеженій вхідній дії $|g| < \infty$ (рисунок 5.9).

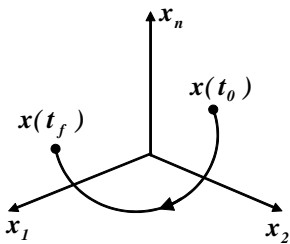


Рисунок 5.9

Керованою за виходом називають систему, вихід якої можна змінити від будь-якого початкового значення $y(t_0)$ до будь-якого кінцевого значення $y(t_f)$ за обмежений час $t_f - t_0 < \infty$ та при обмеженій вхідній дії $|g(t)| < \infty$.

Розглянемо САУ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bg; \\ \text{для неї} \quad y &= Cx + Dg. \end{aligned}$$



Складемо *матрицю керованості* за станом

$$U_x = [B : AB : \dots : A^{n-1}B].$$

Теорема. Для того, щоб неперервна лінійна САУ була керованою за станом, необхідно та достатньо, щоб ранг матриці керованості за станом дорівнював порядку системи $\text{rank}(U_x) = n$.

Складемо *матрицю керованості* системи за виходом

$$U_y = [CB : CAB : \dots : CA^{n-1}B].$$

Теорема. Для того, щоб САУ була керованою за виходом, необхідно та достатньо, щоб ранг матриці керованості за станом дорівнював кількості виходів $\text{rank}(U_y) = l$.

Спостережуваність системи – це можливість визначення всіх змінних стану x_1, x_2, \dots, x_n за вимірними значеннями вхідних і вихідних сигналів.

Складемо матрицю спостережуваності системи

$$N = [C^T : A^T C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T],$$

де T – символ транспонування матриці.

Теорема. Система є спостережуваною, якщо ранг матриці спостережуваності дорівнює порядку системи $rank(N) = n$.

Приклад. Дано систему (рисунок 5.10). Оцінити її керованість та спостережуваність. Порядок системи $n = 2$.

Введемо змінні стану x_1 та x_2 .

Складемо рівняння стану та виходу:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2g; \\ \dot{x}_2 = 3g; \end{cases} \quad y = x_1 + x_2.$$

Знаходимо матриці:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 1] \quad D = [0].$$

$$U_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad U_y = [5 \quad 0]; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Визначаємо ранг матриць

$$U_x, U_y, N : rank U_x = 1 \neq n; \quad rank U_y = 1 = l; \quad rank N = 1 \neq n.$$

Система не зовсім є керованою за станом і виходом, не зовсім є спостережуваною.

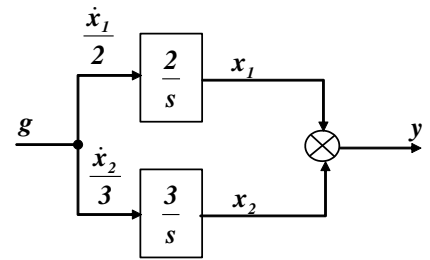


Рисунок 5.10

Тема 6 СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

6.1 Поняття про стійкість САУ

Мається на увазі не конструктивна, а динамічна стійкість.

Стійкою називають систему, що, будучи виведеною із стану рівноваги, повертається в цей стан або до свого незбуреного руху після закінчення дії збурення. Стійкість – важлива властивість САУ. Нестійка система є неприцездатною.

Розрізняють стійкість стану рівноваги, стійкість незбуреного руху та стійкість системи (рисунок 6.1).

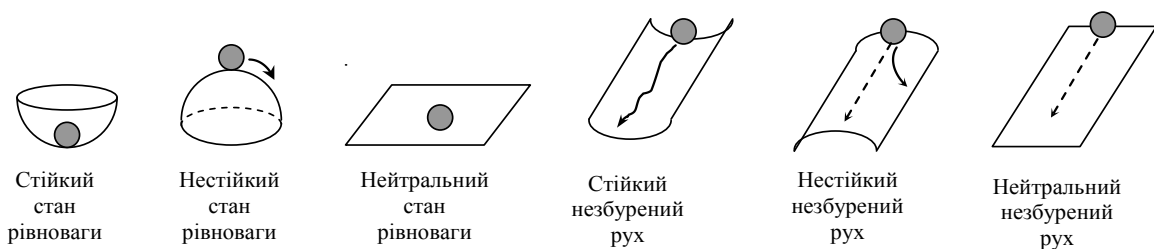


Рисунок 6.1

Динаміка системи може бути описана рівняннями стану:

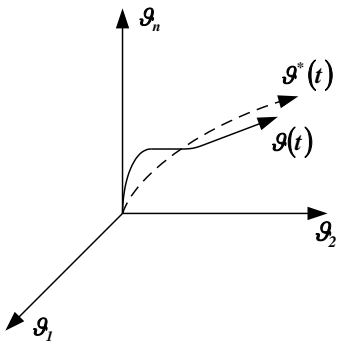


Рисунок 6.2

$$\begin{cases} \dot{g}_1 = f_1(g_1, g_2, \dots, g_n), & g(0) \\ \dots\dots\dots \\ \dot{g}_n = f_n(g_1, g_2, \dots, g_n). \end{cases}$$

Кожній початковій умові $g(0)$ відповідає один розв'язок $g(t)$ (рисунок 6.2). Один із розв'язків (розрахунковий або необхідний) називають незбуреним рухом $g^*(t)$, усі інші розв'язки $g(t)$ – збуреним рухом.

Введемо відхилення $x(t)$ від незбуреного руху: $x(t) = g(t) - g^*(t)$. САУ описується рівнянням стану у відхиленнях:

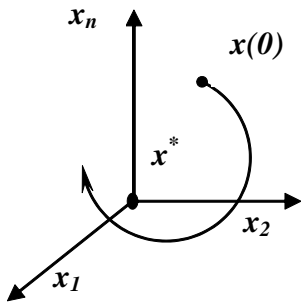


Рисунок 6.3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), & \varphi(0). \end{cases}$$

Незбурений рух у відхиленнях $x^*(t) = g^*(t) - g^*(t) = 0$ переходить у стан, точку початку координат простору станів (рисунок 6.3).

Визначення стійкості незбуреного руху за Ляпуновим

Незбурений рух $x^*(t)$ є **стійким**, якщо для будь-якого скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що залежить від такого ε , що при виконанні умови $\|x(t_0)\| < \delta$ буде існувати нерівність $\|x(t)\| < \varepsilon$ для будь-якого моменту часу t в інтервалі $t_0 \leq t \leq \infty$.

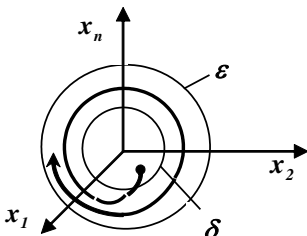


Рисунок 6.4

Якщо окрім наведених умов виконується $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то незбурений рух $x^*(t)$ називають **асимптотично стійким** (рисунок 6.4).

Система вважається стійкою, якщо всі її незбурені рухи є асимптотично стійкими. Розрізняють стійкість «у малому», «у великому», «у цілому» та абсолютну стійкість.

Задача оцінювання стійкості **лінійних систем** спрощується, оскільки, якщо є стійким хоча б один незбурений рух, то стійкі і всі інші.

6.2 Оцінювання стійкості лінійних систем за коренями характеристичного рівняння

Нехай система описується рівнянням «вхід-вихід»:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m g}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}} + \dots + b_m g(t).$$

Виведемо її зі стану рівноваги ($y(0) \neq 0$). Приберемо вхідну дію ($g(t) \equiv 0$). Система описується однорідним рівнянням

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = 0, \quad y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0).$$

Розв'язання цього рівняння має вигляд

$$y(t) = y_{\text{обш}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t},$$

де C_i – постійні інтегрування, які визначаються початковими умовами;
 λ_i – некрлатні корні характеристичного рівняння системи.

Якщо i -й корінь є кратним, то

$$y_i(t) = (C_{i1} + C_{i2}t + \dots + C_{ir}t^{r-1})e^{\lambda_i t}. \quad (6.1)$$

Розв'язок $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, якщо всі складові $y_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Наведемо корні $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$ та підставимо їх у рівняння (6.1).

Розглянемо всі можливі варіанти значень λ_i :

1) корінь дійсний: $\lambda_i = \alpha_i$; $y_i(t) = c_i e^{\alpha_i t}$. Розв'язок $y_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, якщо $\alpha_i < 0$ (рисунок 6.5);

2) корінь комплексний: $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$. Кожному комплексному кореню $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$ відповідає пов'язаний з ним корінь $\lambda_{i+1} = \alpha_i - j\omega_i$.

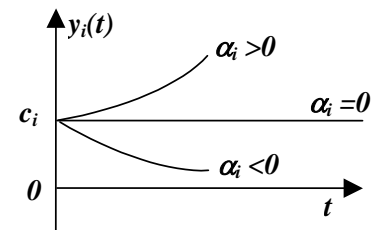


Рисунок 6.5

Парі комплексно-пов'язаних коренів відповідає

$$y_i(t) = C_i e^{(\alpha_i + j\omega_i)t} + C_{i+1} e^{(\alpha_i - j\omega_i)t} = C e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_0).$$

Розв'язок $y_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, якщо $\alpha_i < 0$ (рисунок 6.6).

Для **стійкості** лінійної неперервної САУ є **необхідним і достатнім**, щоб всі корні її характеристичного рівняння (полюси передавальної функції) знаходились у **лівій півплощині**. Система може бути стійкою, нестійкою або нейтральною.

Для стійкої системи $\eta = |\alpha|_{\min}$ – ступінь стійкості (рисунок 6.7).

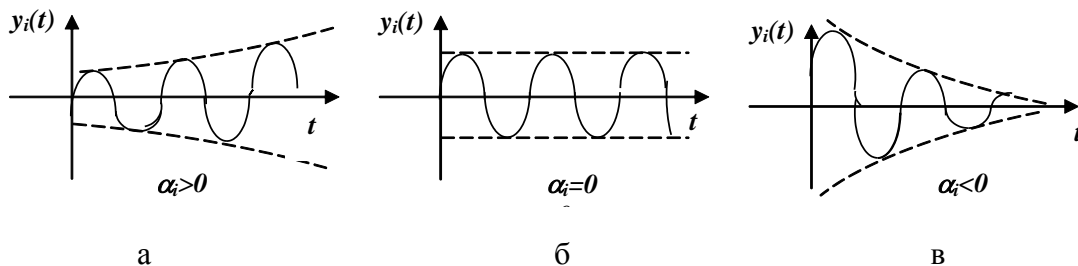


Рисунок 6.6

Для оцінювання стійкості САУ слід знайти корені її характеристичного рівняння, що не завжди так просто.

6.3 Критерій стійкості Е. Рауса

Існують такі ознаки оцінювання стійкості САУ, які не потребують розрахунку коренів. Такі ознаки називають **критеріями стійкості** – алгебричними та частотними. Алгебричний критерій розроблено в 1877 р. англійським математиком Е. Раусом.

За рівнянням «вхід-вихід» або передавальною функцією складають таблицю Рауса. Якщо $a_0 < 0$, то всі коефіцієнти множать на -1. В першому рядку таблиці записують коефіцієнти з кратними індексами, починаючи з a_0 . В другому рядку – коефіцієнти з некратними індексами, починаючи з a_1 .

Неіснуючі коефіцієнти замінюють нулями:

a_0	a_2	a_4	a_6	0
a_1	a_3	a_5	a_7	0
c_{31}	c_{32}	0
c_{41}	c_{42}	0
...	0

Усі наступні рядки заповнюють коефіцієнтами, які розраховують за формулою

$$c_{ij} = \frac{c_{i-1,1}c_{i-2,j+1} - c_{i-2,1}c_{i-1,j+1}}{c_{i-1,1}}$$

Наприклад, $c_{31} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$. Таблицю заповнюють доти, доки в рядку не залишиться тільки один нульовий елемент.

Для стійкості системи є необхідним і достатнім, щоб всі елементи першого рядка таблиці Рауса були додатними: $c_{i1} > 0, i = 1, 2, \dots$

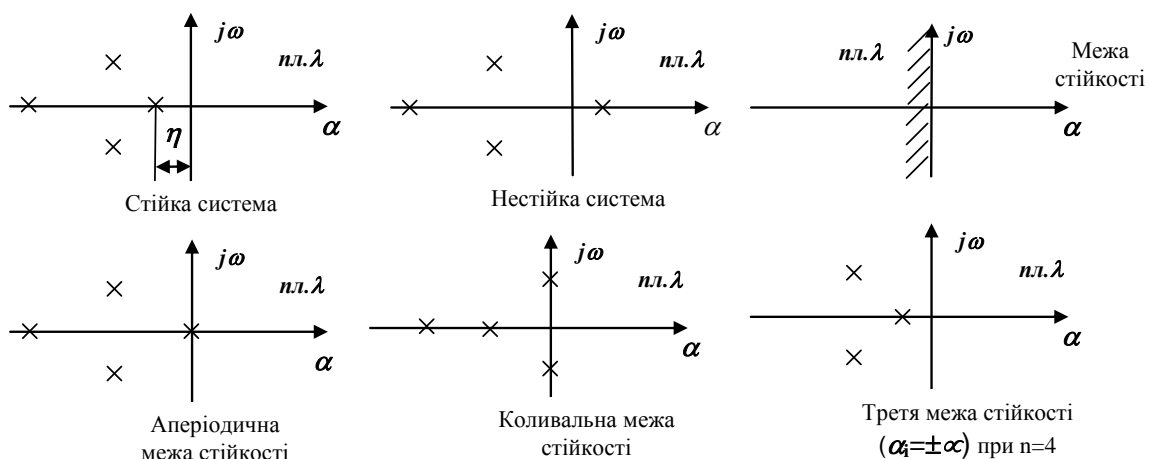


Рисунок 6.7
48

6.4 Критерій А. Гурвіца

Алгебричний критерій розроблено в 1895 р. німецьким математиком А. Гурвіцем.

Цей критерій складається з двох умов.

Перша умова полягає в додатності знаків всіх коефіцієнтів характеристичного полінома $D(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$: $a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$ (критерій Стодолі).

Якщо ця умова не виконується, система не може бути стійкою. Якщо ця умова виконується, складають матрицю Гурвіца:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}$$

Розмір матриці – $n \times n$. По головній діагоналі матриці записують коефіцієнти характеристичного полінома від a_1 до a_n .

Над діагоналлю записують коефіцієнти зі зростаючими індексами, під діагоналлю – коефіцієнти зі спадними індексами.

Замість неіснуючих коефіцієнтів ставлять нулі.

Друга умова полягає в додатності знаків всіх діагональних мінорів матриці Гурвіца $\Delta_i > 0, i = 1, \dots, n$; $\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3, \dots, \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$.

Для стійкості САУ є необхідним і достатнім, щоб всі коефіцієнти характеристичного полінома були додатними $a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$ та всі діагональні мінори були додатними $\Delta_i > 0, i = 1, \dots, n$.

Для систем 1-го та 2-го порядків достатньо перевірити першу умову $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$. Якщо вона виконується, то автоматично виконується і друга умова $\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1a_2 > 0$.

Для системи 3-го порядку критерій Гурвіца має такий вигляд:

1. $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$.
2. $\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, або $a_1a_2 > a_0a_3$.

Якщо ці умови виконуються, то система стійка, оскільки при цьому автоматично виконуються й інші умови: $\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0$.

Узагалі для систем будь-якого порядку достатньо перевірити додатну ознаку тільки кратних мінорів або тільки некрлатних. При виконанні однієї із цих умов автоматично виконується і друга умова (критерій Л'єнара-Шипара, 1914 р.)

Приклад. Дано систему (рисунок 6.8):

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}; k = 10; T_1 = 0.1; T_2 = 0.01.$$

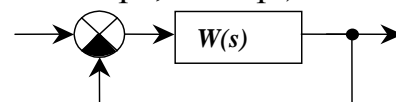


Рисунок 6.8

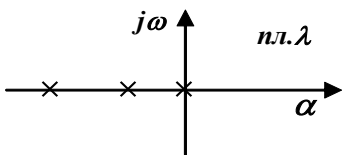


Рисунок 6.9

Визначити, чи є стійкими розімкнена та замкнена системи.

Розв'язання. Стійкість розімкненої системи легко оцінити за коренями її характеристичного рівняння:

$$(s_1 = 0, s_2 = -\frac{1}{T_1}, s_3 = -\frac{1}{T_2}) \text{ (рисунок 6.9).}$$

Розімкнена система знаходиться на аперіодичній межі стійкості.

Знайдемо передавальну функцію замкненої системи: $\Phi(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+k}$.

Характеристичне рівняння має вигляд $D(s) = s(T_1s+1)(T_2s+1)+k=0$.

Розрахувати його корені не так легко.

Застосуємо критерій Гурвіца. Запишемо характеристичний поліном у вигляді $D(s) = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k$.

Розрахуємо коефіцієнти характеристичного полінома:

$$a_0 = T_1T_2, a_1 = T_1 + T_2, a_2 = 1, a_3 = k.$$

Перша умова критерію Гурвіца виконується при $a_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$.

Перевіримо другу умову: $a_1a_2 > a_0a_3; (T_1+T_2) > T_1T_2k$.

Наприклад, $0.11 > 0.01$ виконується, отже система стійка.

З останньої формули видно, що при збільшенні k система може стати нестійкою.

Якщо в характеристичному поліномі $D(s)$ перейти до нової змінної $D(s-\eta)$, то можна дізнатися, чи має така система певний ступінь стійкості η .

6.5 Критерій стійкості О. В. Михайлова

Цей алгебричний критерій розроблено в 1938 р.

Нехай передавальна функція замкненої САУ має вигляд

$$\Phi(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{D(s)}.$$

Побудуємо годограф Михайлова при $0 \leq \omega \leq \infty$:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = X(\omega) + jY(\omega), \text{ причому } D(0) = a_n.$$

Годограф – це траєкторія руху кінця вектора $D(j\omega)$ на комплексній площині (X, jY) при зміні частоти ω у заданому діапазоні від 0 до ∞ (рисунок 6.10).

Для стійкості САУ є необхідним і достатнім, щоб годограф Михайлова $D(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ починався на додатній дійсній півосі (при $\omega=0$) та послідовно проходив у додатному напрямку при $\omega \rightarrow \infty$ n квадрантів.

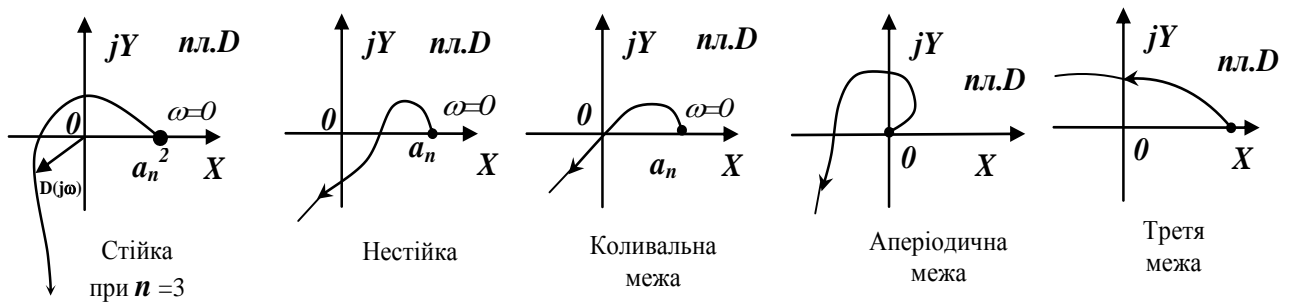


Рисунок 6.10

Можна не будувати криву $D(j\omega)$, а тільки перевірити чергування коренів рівняння $X(\omega)=0$ и $Y(\omega)=0$.

Доказ:

Характеристичний поліном $D(s)$ може бути подано через корні $D(s)=a_0(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)$ (рисунок 6.11). Перейдемо від s до $j\omega$:

$$D(j\omega)=a_0(j\omega-s_1)(j\omega-s_2)...(j\omega-s_n).$$

Оцінимо зміну аргументу (фази) вектора $D(j\omega)$ при зміні частоти $-\infty \leq \omega \leq \infty$

Приріст аргументу вектора s_i дорівнює $j\omega-s_i$, якщо s_i лівої півплощини дорівнює $\Delta \arg (j\omega-s_i) = \pi$.

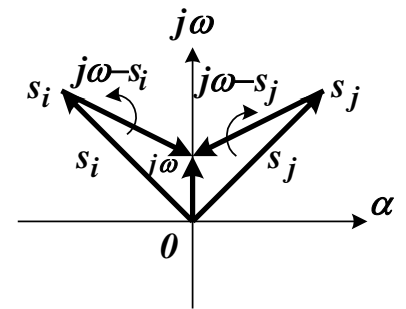


Рисунок 6.11

Приріст аргументу вектора s_j дорівнює $j\omega-s_j$, якщо s_j правої півплощини дорівнює $\Delta \arg (j\omega-s_j) = -\pi$

Якщо в правій півплощині знаходяться l коренів, а в лівій $n-l$ коренів, то $\Delta \arg D(s) = (n-l)\pi - l\pi = (n-2l)\pi$.

Якщо всі n коренів знаходяться в лівій півплощині, то

$$\Delta \arg D(j\omega) = n\pi$$

або

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2},$$

оскільки корені або належать дійсній осі, або розташовані парами симетрично дійсної осі.

6.6 Критерій стійкості Найквіста

Цей частотний критерій розроблено з підсилювачів американським спеціалістом Х. Найквістом у 1932 р. Застосовується у системах з одиничним зворотним зв'язком. Дозволяє оцінювати стійкість замкненої системи за АФЧХ розімкненої системи.

Зворотний зв'язок має бути одиничним, тобто структурну схему замкненої САУ слід змінити.



Нехай $W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$. За формулою замикання маємо

Рисунок 6.12

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{B(s)/A(s)}{1+B(s)/A(s)} = \frac{B(s)}{A(s)+B(s)} = \frac{B(s)}{D(s)}, \quad \text{де } D(s) = A(s) + B(s).$$

Перейдемо до перетворення Фур'є. Для цього виконаємо заміну $s = j\omega$:

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}.$$

Розглянемо, як змінюється аргумент вектора $1+W(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ :

$$\begin{aligned} \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} (1+W(j\omega)) &= \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} \left(1 + \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\right) = \\ &= \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} \frac{A(j\omega) + B(j\omega)}{A(j\omega)} = \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} D(j\omega) - \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} A(j\omega). \end{aligned}$$

Відповідно до критерію Михайлова для стійкості замкненої системи має бути

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} D(j\omega) = n\pi/2.$$

Розімкнена система може мати l коренів у правій півплощині. Тоді

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} A(j\omega) = (n-2l)\pi/2.$$

Розглянемо можливі варіанти.

1. Розімкнена система стійка, тобто не має полюсів у правій півплощині, ($l=0$). Тоді

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} (1+W(j\omega)) = \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} D(j\omega) - \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} A(j\omega) = n\pi/2 - n\pi/2 = 0.$$

Вектор $1+W(j\omega)$ не повинен охоплювати початок координат, а вектор $W(j\omega)$ – точку $(-1, j0)$ (рисунок 6.12).

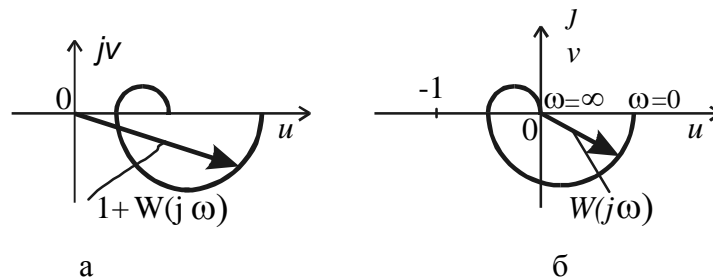


Рисунок 6.12

Теорема. Якщо розімкнена система не має полюсів у правій півплощині, то для стійкості замкненої системи необхідно та достатньо, щоб АФЧХ розімкненої системи при зміні частоти від 0 до ∞ не охоплювала точку координатами $(-1, j0)$.

Якщо розімкнена система нейтральна й знаходиться на аперіодичній межі стійкості, то

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s(a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1})},$$

тобто $a_n = 0$, $A(s)$ має один нульовий корінь, $W(s)$ має нульовий полюс, система містить інтегруючу ланку. Вона є астатичною за задавальною дією (рисунок 6.13).

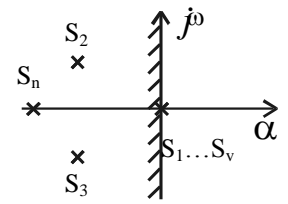


Рисунок 6.13

Якщо розімкнена система має v інтегруючих ланок, то система має v -й порядок астатизму, тоді $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-v+1} = 0$, $A(s)$ має v нульових коренів, і передавальну функцію розімкненої системи можна подати у вигляді

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{s^v} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{W_0(s)}{(s + \alpha)^v}.$$

Інтегруючі ланки розглядаємо як граничний випадок аперіодичних ланок. Переходимо до $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{W_0(j\omega)}{(j\omega)^v} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{W_0(j\omega)}{(j\omega + \alpha)^v}.$$

АФЧХ розімкненої системи має розрив на частоті $\omega = 0$. В цьому випадку доповнюємо АФЧХ частиною дуги безкінечно великого радіуса, починаючи з дійсної осі, на кут $-\pi/2$, оскільки кожна інтегруюча ланка вносить запізнювання за фазою на кут $-\pi/2$ радіан (рисунок 6.14).

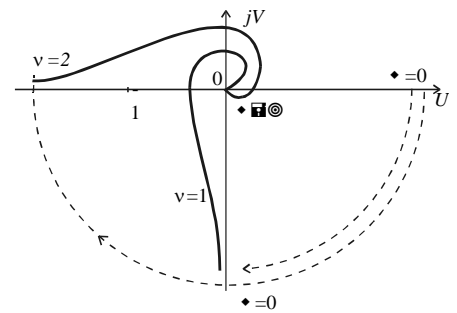


Рисунок 6.14

2. Якщо розімкнена система нейтральна й знаходиться на коливальній границі стійкості, тоді її АФЧХ має розрив на частоті $\omega_{рез}$.

Якщо розімкнена система є нестійкою, то $l \neq 0$.

У цьому випадку робимо аналогічний граничний перехід, що приводить до необхідності доповнення АФЧХ іншою частиною дуги безкінечно великого радіуса на кут $-\pi$ радіан на частоті $\omega = \omega_{рез}$.

Після доповнення застосовуємо те ж формулювання Найквіста.

$$\text{Тоді } \Delta \arg (1 + W(j\omega)) = \Delta \arg (j\omega) - \Delta \arg A(j\omega) = n\pi/2 - (n - 2l)\pi/2 = 2\pi \frac{l}{2}.$$

Отже, вектор $1 + W(j\omega)$ має охоплювати початок координат $\frac{l}{2}$ раз в додатному напрямі.

Теорема. Для стійкості замкненої системи при нестійкості розімкненої системи необхідно та достатньо, щоб при зміні частоти ω від 0 до ∞ АФЧХ (доповнена

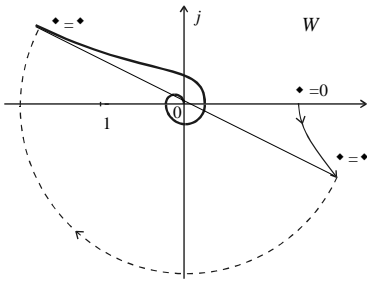
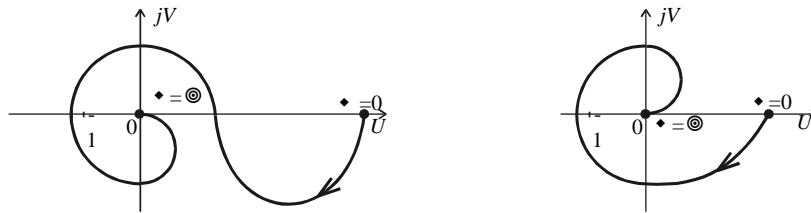


Рисунок 6.15

АФЧХ) розімкненої системи $W(j\omega)$ охоплювала точку з координатами $(-1, +j0)$ в додатному напрямі $\frac{l}{2}$ раз, де l – кількість полюсів в розімкненій системі, що знаходяться в правій півплощині (рисунок 6.15).

Перевага критерію Найквіста в тому, що стійкість системи можна оцінювати за експериментальною АФЧХ розімкненої системи, не маючи її математичної моделі (рисунок 6.16).



При $l=2$ замкнена система стійка

Замкнена система нестійка

Рисунок 6.16

Для стійких систем вводять поняття запасу стійкості за амплітудою A_z та фазою γ . Запас стійкості за амплітудою A_z визначається на частоті $\omega_{-\pi}$, при якій $\varphi(\omega_{-\pi}) = -\pi$ (рисунок 6.17):

$$A_{\text{К}} = 1 - |W(j\omega_{-\pi})| = -A(\omega_{-\pi}).$$

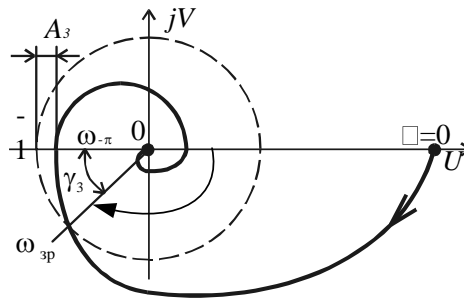


Рисунок 6.17

Запас стійкості за фазою γ визначається на частоті зрізу ω_{zp} , при якій $A(\omega_{-p}) = 1$:

$$\gamma = \pi + \varphi(\omega_{-p}).$$

6.7 Логарифмічний критерій стійкості (частотний)

Впливає з критерію Найквіста.

Якщо розімкнена система стійка, то її АФЧХ не має охоплювати точку $(-1, j0)$ (рисунки 6.18, 6.19).

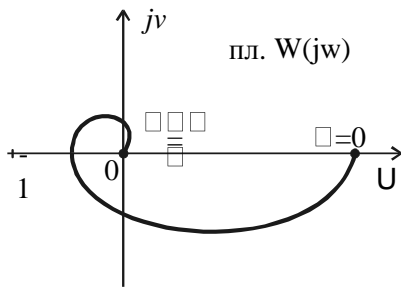


Рисунок 6.18

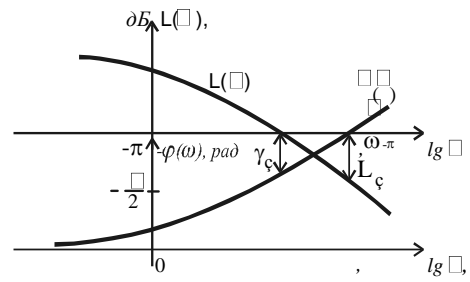


Рисунок 6.19

У загальному випадку, коли присутні нульові полюси є чисто уявними та $l \neq 0$, необхідно визначати число охоплень точки $(-1, j0)$ (рисунки 6.20, 6.21).

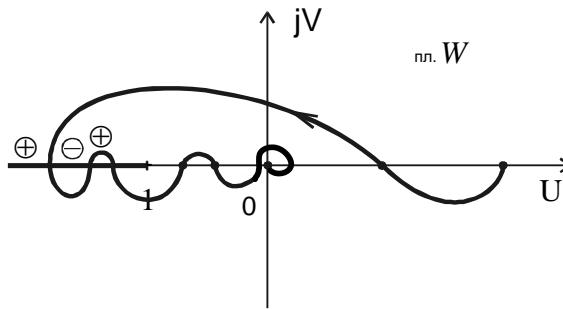


Рисунок 6.20

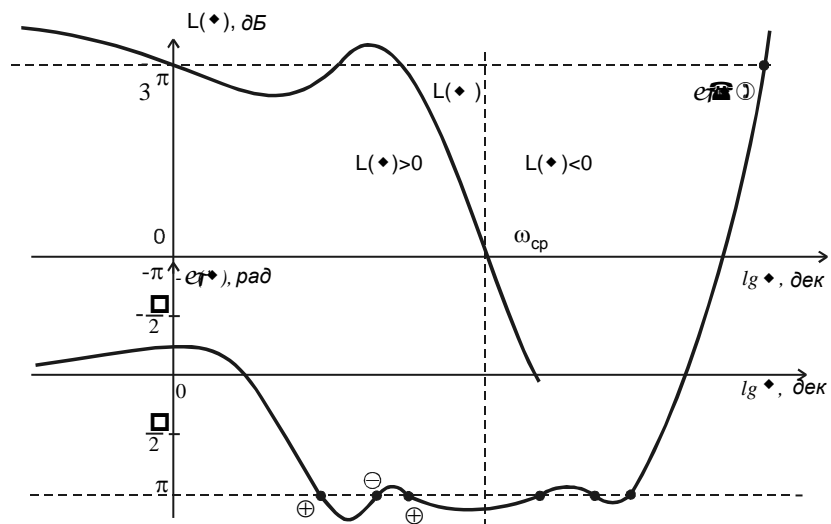


Рисунок 6.21

Число охоплень точки можна розрахувати за кількістю додатних Π_* і від'ємних Π_l перетинів АФЧХ розімкненої системи відрізка дійсної осі $(-1, -\infty)$. Перетин вважаємо додатним при русі точки по АФЧХ зверху вниз, від'ємним – при русі знизу вверх. Для стійкості САУ необхідно й достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\Pi_* - \Pi_l = \frac{l}{2}.$$

При $l=0$ – $\Pi_* - \Pi_l = 0$.

На логарифмічних характеристиках цей відрізок відповідає $L(\omega) > 0$ та $\varphi(\omega) = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$

Теорема. Для стійкості замкненої системи необхідно й достатньо, щоб при $L(\omega) > 0$ ЛФЧХ (доповнена ЛФЧХ) розімкненої системи перетинала b лінії $-\pi \pm 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots$ зверху вниз більше число раз, ніж знизу вверх на величину $l/2$, де l – число полюсів розімкненої системи, що лежать в правій півплощині.

6.8 Критерій стійкості В. І. Зубова

Цей критерій – алгебричний. Застосовується при матричному описі САУ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bg; \\ y &= Cx + Dg. \end{aligned}$$

Вводиться допоміжна матриця $V = I + 2(A - I)^{-1}$.

Для стійкості САУ необхідно й достатньо, щоб $\|V^k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

6.9 Виділення областей стійкості САУ за допомогою методу D -розбиття площини одного параметра

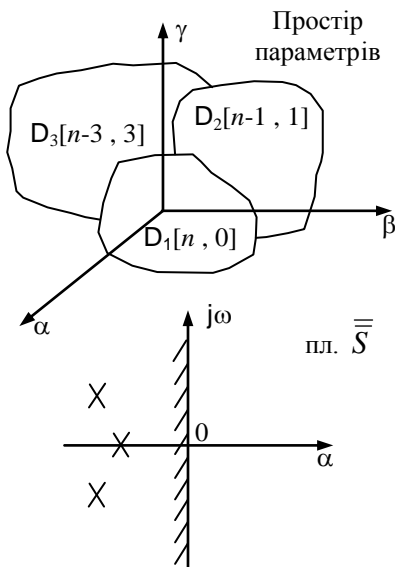


Рисунок 6.22

При проектуванні САУ необхідно знати, при яких значеннях параметрів система стійка. Це можна виявити, якщо в просторі параметрів будуть виділені області однакової кількості коренів характеристичного рівняння, що розміщені в лівій півплощині.

Такими параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ можуть бути коефіцієнти передачі k_i елементів або системи, постійні часу T_j і т.п. Таке розбиття простору параметрів називають D -розбиттям. Запис $D_i[n - l, l]$ означає, що в області D_i при будь-яких значеннях параметрів α, β, \dots характеристичний поліном $D(s)$ має $n - l$ коренів в лівій півплощині та l коренів – в

правій півплощині. Область стійкості має позначення $D[n,0]$ (рисунок 6.22).

D -розбиття простору параметрів можна виконати, відобразивши межі стійкості площини \bar{s} в просторі параметрів. Отже, слід побудувати межі за рівняннями $D(j\omega)=0$ при $\omega=0$, тобто $a_n=0$ – аперіодична межа стійкості, $D(j\omega)=0$ при $\omega \neq 0$ – коливальна межа стійкості, $a_0=0$ – третя межа стійкості.

Якщо в ці рівняння входять параметри α або β , або γ, \dots , то відповідні межі з'являються в просторі параметрів. Якщо змінний параметр є тільки один α , виконують D -розбиття площини одного параметра, вважаючи його комплексним $\alpha = x + jy$.

Нехай передавальна функція системи має вигляд

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{D(s)}, m \leq n.$$

Коефіцієнти характеристичного полінома $D(s)$ залежать від параметрів системи $a_i = a_i(\alpha, \beta, \dots)$. Нехай $\alpha = var$, $\beta, \gamma, \dots = const$. Складемо рівняння меж стійкості $a_0=0, D(j\omega)=0, a_n=0$.

Будь-який параметр α входить в поліном $D(j\omega)$: $D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Виділяємо складові, що містять цікаві для нас параметри:

$$D(j\omega) = \alpha Q(j\omega) + R(j\omega) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \underset{=}{x(\omega)} + j \cdot \underset{=}{y(\omega)} = \alpha(\omega), \quad \underset{=}{x(\omega)} - \text{дійсна частина,}$$

кратна функція, $\underset{=}{y(\omega)}$ – некратна.

Будуємо графік $\alpha(\omega)$ при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$. Крива D -розбиття $\alpha(\omega)$ відображає уявну вісь площини s . Саме тому заштриховуємо її зліва, так же як і уявну вісь при зміні частоти від $-\infty$ до $+\infty$. Крива D -розбиття симетрична відносно осі X . Ця крива поділила площину параметра α на три області. Найбільш заштрихована область D_2 може бути областю стійкості. Вибираємо будь-яке значення параметра α (наприклад $\alpha = 0$) із цієї області й по одному із критеріїв перевіряємо, чи є стійкою система при даному значенні параметра α . Якщо система стійка при даному значенні параметра α , то вона стійка при будь-яких значеннях параметра з цієї області. Область, що розглядаємо, є областю стійкості. Позначаємо її $D_2[n,0]$. Тоді інші області будуть мати позначення $D_1[n-2,2], D_3[n-1,1]$ (рисунок 6.23).

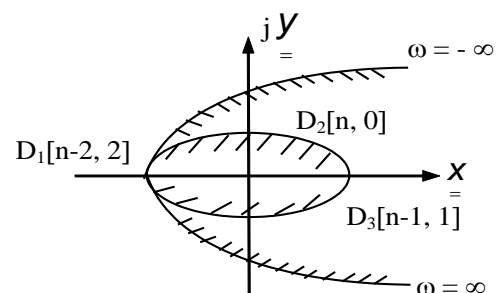


Рисунок 6.23

Якщо система виявиться нестійкою при вибраному значенні параметра α , то вона буде нестійкою при будь-яких значеннях цього параметра. Такі системи називають структурно-нестійкими. Для забезпечення стійкості таких систем не

достатньо змінити значення параметра, потрібно ввести коригуючий пристрій, тобто змінити структуру системи.

Приклад. На рисунку 6.24 зображено спостережувальну систему

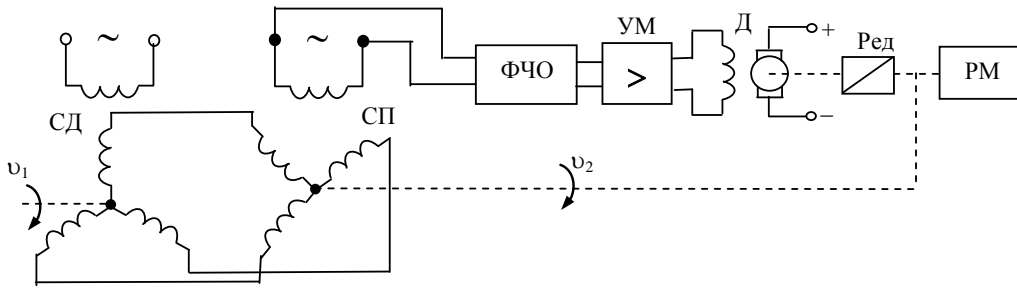


Рисунок 6.24

$$W(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)s} \text{ -- передавальна функція системи;}$$

$$\Phi(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)s + k} \text{ -- передавальна функція замкненої системи;}$$

k – var, $T_1 = 0.1$ с, $T_2 = 0.6$ с.

Визначити, при яких значеннях параметра k система (рисунку 6.25) є стійкою.

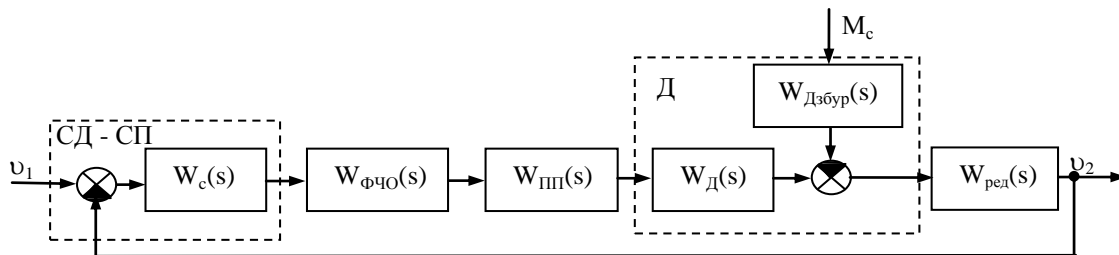


Рисунок 6.25

$$D(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k = 0;$$

$$a_0 = 0; \quad a_3 = 0; \quad s \rightarrow j\omega;$$

$$a_0 = T_1 T_2; \quad a_1 = T_1 + T_2; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = k;$$

$$D(j\omega) = T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2) (j\omega)^2 + j\omega + k = 0;$$

$$k = \underbrace{(T_1 + T_2)\omega^2}_{x(\omega)} + \underbrace{j(T_1 T_2 \omega^3 - \omega)}_{y(\omega)} = k(\omega).$$

Таблиця 6.1

ω	0	0.1	1	...	∞
x ₌	0	0,007	0,7	...	∞
y ₌	0	-0,1	-0,94	...	∞

Оскільки крива D -розбиття є симетричною відносно дійсної осі X , розрахунки проводимо тільки для додатних значень ω та будуємо симетрично другу частину кривої (рисунок 6.26). Заштрихуємо її зліва. Видаляємо області. Знайдемо точку перетину кривої з віссю X :

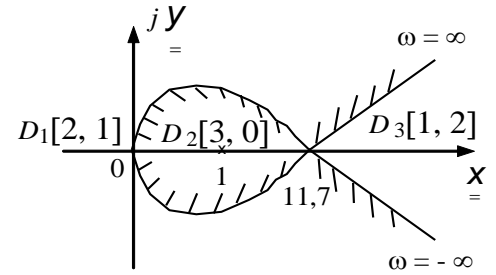


Рисунок 6.26

$$y(\omega) = 0 \rightarrow T_1 T_2 \omega^3 - \omega = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} \rightarrow x(\omega) = (T_1 + T_2) \cdot \frac{1}{T_1 T_2} = \frac{0.1 + 0.6}{0.1 \cdot 0.6} = 11.7.$$

Перевіряємо, чи є стійкою система при $k = 1$. Застосовуємо критерій Гурвіца:

$$1. a_0 = T_1 T_2 > 0; a_1 = T_1 + T_2 > 0; a_2 = 1 > 0; a_3 = k > 0.$$

Перша умова Стодолі виконується.

$$2. \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 - ?$$

$$(T_1 + T_2) \cdot 1 > T_1 T_2 k - ?$$

$0,1 + 0,6 > 0,1 \cdot 0,6$ – друга умова також виконується.

Отже, система є стійкою при $k = 1$ та при будь-яких значеннях k у діапазоні $0 < k < 11.7$.

Позначимо області на рисунку 6.26 таким чином: $D_1[2,1]$, $D_2[3,0]$, $D_3[1,2]$.

6.10 Виділення областей стійкості САУ за допомогою методу D -розбиття площини двох параметрів

Передавальна функція замкненої системи

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{D(s)}, m \leq n.$$

Визначаємо, при яких значеннях параметрів α та β (α, β – var, γ, δ, \dots – const) система буде стійкою. Записуємо рівняння меж стійкості:

$$a_0 = 0; a_n = 0; D(j\omega) = 0.$$

На площині параметрів (α, β) будуть криві, що відображають ті межі, в рівняння яких входить хоча б один із параметрів:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Виділяємо складові, що містять цікаві для нас параметри. Спочатку записуємо складові з першим параметром, наприклад α :

$$D(j\omega) = \alpha P(j\omega) + \beta Q(j\omega) + R(j\omega) = 0.$$

Розбиваємо ці рівняння на дійсну та уявну частини. Першою записуємо дійсну частину:

$$\begin{cases} \alpha P_1(\omega) + \beta Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0; & P_1, Q_1, R_1 - \text{дійсні частини;} \\ \alpha P_2(\omega) + \beta Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0; & P_2, Q_2, R_2 - \text{уявні частини.} \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь відносно параметрів за допомогою правила Крамера (Габріель Крамер (1704 – 1752), швейцарський математик):

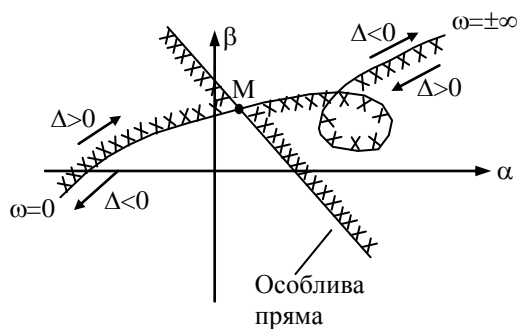


Рисунок 6.27

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_\alpha(\omega)}{\Delta(\omega)} = \alpha(\omega);$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_\beta(\omega)}{\Delta(\omega)} = \beta(\omega).$$

Будуємо графік $\beta(\alpha)$ на площині параметрів α, β при зміні частоти $-\infty \leq \omega \leq \infty$ (рисунок 6.27).

Функції $\Delta_\alpha(\omega), \Delta_\beta(\omega), \Delta(\omega)$ – визначники, $\Delta(\omega)$ – головний визначник. Система рівнянь має розв'язок, якщо визначники, не перетворюються одночасно в нуль.

Функції $\alpha(\omega)$ і $\beta(\omega)$ є кратними, тому криву $\beta(\alpha)$ проводять двічі: для додатних частот і від'ємних. Тому її заштриховують подвійною штриховкою. Якщо $\Delta(\omega) > 0$, криву D -розбиття штрихують зліва, якщо $\Delta(\omega) < 0$ – справа. В точці M , де $\Delta_\alpha = \Delta_\beta = \Delta = 0$, виникає особлива пряма. Якщо в особливій точці M визначник $\Delta(\omega)$ змінює свій знак, то особливу пряму штрихують, якщо ні – не штрихують. Якщо особлива пряма виникає при $\omega = 0$, то її штрихують один раз. Якщо в особливій точці $\omega \neq 0$, то особливу пряму штрихують подвійною штриховкою. Напрямок штриховки особливої прямої збігається в особливій точці M зі штриховкою кривої D -розбиття.

Приклад. Та ж спостережувана система $D(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k$, k, T_1 – var; $T_2 = 0.6$ – const.

При яких значеннях параметрів k та T_1 система буде стійкою?

Нехай k буде першим параметром, T_1 – другим. Записуємо рівняння трьох меж стійкості:

$$a_0 = T_1 T_2 = 0; a_3 = 0; D(j\omega) = T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + k = 0.$$

Виділяємо параметри:

$$D(j\omega) = k \cdot \underbrace{1}_{P(j\omega)} + T_1 \underbrace{(T_2 (j\omega)^3 + (j\omega)^2)}_{Q(j\omega)} + T_2 \underbrace{(j\omega)^2 + j\omega}_{R(j\omega)} = 0.$$

Розбиваємо ці рівняння на два – дійсне та уявне:

$$\begin{cases} k - T_1\omega^2 - T_2\omega^2 = 0, \\ k \cdot 0 - T_1T_2\omega^3 + \omega = 0, \end{cases} \Rightarrow \Delta(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & -T_2\omega^3 \end{vmatrix} = -T_2\omega^3;$$

$$k = \frac{\Delta_k(\omega)}{\Delta(\omega)} = \frac{T_2^2\omega^2 + 1}{T_2} = \frac{1}{T_2} + \omega^2 T_2; \quad \Delta_k(\omega) = \begin{vmatrix} T_2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega & -T_2\omega^3 \end{vmatrix} = -T_2^2\omega^3 - \omega^3;$$

$$T_1 = \frac{\Delta_{T_1}(\omega)}{\Delta(\omega)} = \frac{1}{T_2\omega^2}; \quad \Delta_{T_1}(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & T_2\omega^2 \\ 0 & -\omega \end{vmatrix} = -\omega.$$

Ці рівняння легко розв'язувати без визначників, але головний визначник $\Delta(\omega)$ є необхідним для нанесення штриховки. Будуємо графіки $T_1(k)$ для всіх трьох меж стійкості.

При $\omega = 0$ визначники перетворюються в нуль: $\Delta_k(0) = \Delta_{T_1}(0) = \Delta(0) = 0$. Виникає особлива пряма на частоті $\omega = 0$. Її рівняння: $k = 0$. Особлива пряма збігається з аперіодичною межею стійкості.

Штрихуємо криву D -розбиття справа при зміні частоти від 0 до ∞ , оскільки при цьому $\Delta(\omega) = -T_2\omega^3 < 0$. Штрихуємо криву D -розбиття зліва при зміні частоти від $-\infty$ до 0, оскільки при цьому $\Delta(\omega) = -T_2\omega^3 > 0$, тобто криву штрихують подвійною штриховкою (рисунок 6.28).

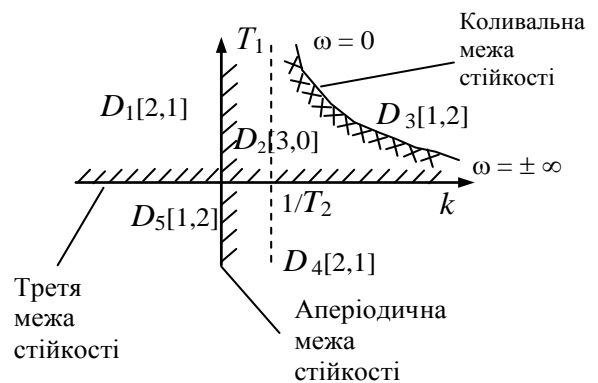


Рисунок 6.28

Особливу пряму штрихують одинарною штриховкою, оскільки вона виникає при $\omega = 0$ та визначник $\Delta(\omega)$ в особливій точці змінює знак. Третю межу штрихують зверху, оскільки система є стійкою тільки при $a_i > 0; i = 0, 1, 2, 3$, $a_0 = T_1T_2 > 0 \rightarrow T_1 > 0$. Позначаємо області D_1, \dots, D_5 .

Виділяємо найбільш заштриховану область – це D_2 . Перевірку на стійкість системи при $k = 1, T_1 = 0, 1$ вже виконували. Отже, $D_2[3, 0]$ – область стійкості. Відмічаємо інші області шляхом переходу із D_2 в D_1, D_3 та D_4 . Із D_4 переходимо в D_5 .

Тема 7 ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ УПРАВЛІННЯ

7.1 Оцінювання якості управління за перехідними характеристиками

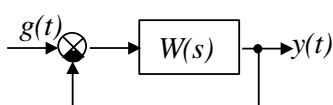


Рисунок 7.1

Для САУ (рисунок 7.1) вводять прямі та непрямі показники якості управління. Прямі вводять за перехідною характеристикою, непрямі – за іншими характеристиками.

Розглянемо прямі показники якості.

Розрізняють монотонні, аперіодичні та коливальні перехідні характеристики (рисунок 7.2).

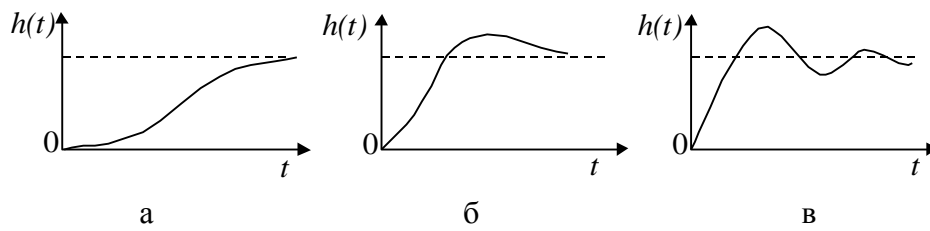


Рисунок 7.2

Розглянемо прямі показники на прикладі перехідної характеристики на основі задавальної дії.

Прямі показники поділяють на основні та додаткові.

До **основних показників** (рисунок 7.3) належать:

1 Усталене значення $h_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$. Це значення можна знайти за допомогою теореми про граничне значення оригіналу:

$$h_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s)G(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(s)}{1+W(s)} \frac{1}{s} s = \begin{cases} \frac{k}{1+k}, & \text{якщо САУ - статична } (\nu = 0), \\ 1, & \text{якщо САУ - астатична } (\nu \neq 0); \end{cases}$$

$$g(t) = 1(t), \quad G(s) = \frac{1}{s};$$

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n} = \frac{W_0(s)}{s^\nu};$$

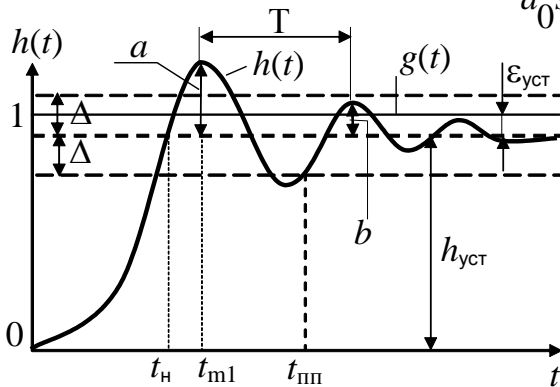


Рисунок 7.3

Оскільки

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{s^\nu}, \quad \text{тг} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(s)}{1+W(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_0(s)}{s^\nu + W_0(s)},$$

то при $\nu = 0$ отримаємо

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_0(s)}{s^\nu + W_0(s)} = \frac{k}{1+k},$$

$$\text{а при } \nu \neq 0 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_0(s)}{s^\nu + W_0(s)} = 1,$$

де $k = \lim_{s \rightarrow 0} W(s)s^\nu$,

$$k = \frac{b_m}{a_n} \quad \text{або} \quad \frac{b_m}{a_{n-1}} \quad (\text{при } a_n = 0)$$

$$\text{або} \quad \frac{b_m}{a_{n-2}} \quad (\text{при } a_n = a_{n-1} = 0) \dots$$

2 Усталена статична похибка $\varepsilon_{уст} = \varepsilon_{ст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$.

Цю похибку також можна знайти за допомогою теореми про межовий перехід:

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}(s)G(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+W(s)} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu}}{s^{\nu} + W_0(s)} = \begin{cases} \frac{1}{1+k} & \text{при } \nu = 0 \text{ (статична система),} \\ 0 & \text{при } \nu \neq 0 \text{ (астатична система).} \end{cases}$$

Усталену похибку можна знайти за перехідною характеристикою

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) \Rightarrow \varepsilon_{уст} = 1 - h_{уст} = \begin{cases} \frac{1}{1+k}, & \text{якщо } \nu = 0, \\ 0, & \text{якщо } \nu \neq 0. \end{cases}$$

3 Перерегулювання $\sigma = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} 100 \%$.

Зазвичай перерегулювання $\sigma = 10...30 \%$ є нормальним. Однак існують системи, для яких перерегулювання не допускається, наприклад, система стикування КА з орбітальною станцією, система управління подачею різця в токарному верстаті та ін.

4 Час перехідного процесу $t_{\text{пт}}$ – найменший час, після якого відхилення $h(t)$ від $h_{уст}$ не перевищує значення Δ . Зазвичай $\Delta = 0.05h_{уст}$.

Додаткові показники:

1. Кількість коливань N за час $t_{\text{пт}}$. Як правило, $N = 1,5...2$.
2. Час наростання t_n – це час першого досягнення сталого значення.
3. Час першого максимуму t_{m1} .
4. Ступінь затухання (декремент; *decrementum* – зменшення (лат.)

$$\chi = \frac{a}{b} = \frac{h_{\max 1} - h_{уст}}{h_{\max 2} - h_{уст}}$$

5 Період коливань T ; кругова частота коливань $\omega = 2\pi/T$, циклічна частота $f = 1/T$ і так далі.

Перехідна характеристика може бути знайдена експериментально, за рівнянням «вхід-вихід», за передавальною функцією, ваговою функцією за допомогою матриць методу простору станів, формулою Хевісайда, рівняннями стану та виходу, ВЧХ:

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{B(s)}{D(s)} \begin{matrix} \text{передавальна} \\ \text{функція} \end{matrix};$$

$$y(t) = \frac{B(p)}{D(p)} g(t);$$

$$D(p)y(t) = B(p)g(t) \text{ – рівняння "вхід - вихід";}$$

$$g(t) = 1, y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0).$$

Рівняння «вхід-вихід» можна розв'язати за допомогою перетворення Лапласа

$$D(s)Y(s) - Y_0(s) = B(s)G(s).$$

Наведемо зображення входу у вигляді

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{G_2(s)}; Y(s) = \frac{B(s)G_1(s)}{D(s)G_2(s)} + \frac{Y_0(s)}{D(s)}.$$

Переходимо до оригіналів:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)G_1(s_i)}{D'(s_i)G_2(s_i)} e^{s_i t} + \sum_{j=1}^l \frac{B(s_j)G_1(s_j)}{D(s_j)G_2'(s_j)} e^{s_j t} + \sum_{k=1}^n \frac{Y_0(s_k)}{D'(s_k)} e^{s_k t},$$

де s_i, s_k – полюси передавальної функції,
 s_j – полюси зображення вхідної дії;

$$D'(s_i) = \left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_i}; \quad G_2'(s_j) = \left. \frac{dG_2(s)}{ds} \right|_{s=s_j}.$$

У випадку перехідної характеристики $h(t) = y(t) \Big|_{g(t)=1}$ маємо

$$G(s) = \frac{1}{s}; \quad G_1(s) = 1; \quad G_2(s) = s; \quad l = 1; \quad s_1 = 0; \quad G_2'(s) = 1; \quad y(0) = \dots y^{(n-1)}(0) = 0;$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{s_i D'(s_i)} e^{s_i t} + \frac{B(0)}{D(0)} \quad \text{— формула розкладання Хевісайда для некратних}$$

коренів;

$$h(t) = C \int_0^t \Phi(t-\tau) B d\tau + D \quad \text{— визначення перехідної характеристики за допомогою}$$

методу простору станів;

$$h(t) = \int_0^t w(t-\tau) d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad \text{— визначення характеристики за ваговою функцією};$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\Phi(s)}{s} \right\} \quad \text{— визначення перехідної характеристики за допомогою таблиць}$$

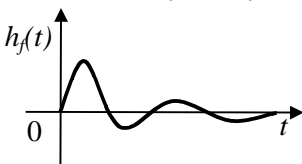


Рисунок 7.4

перетворення Лапласа.

Окрім відтворення задавального впливу $g(t)$, САУ ще має подавляти збурювальні впливи. Саме тому якість управління оцінюють за перехідною характеристикою на основі збурення $h_f(t)$ (рисунок 7.4).

7.2 Оцінювання якості управління за частотними характеристиками

Оцінювання за АЧХ замкненої системи.

1 Усталене значення

$$h_{CT} = \Phi(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(s)}{1+W(s)} = \begin{cases} \frac{k}{k+1} & \text{для} \\ & \text{статичної системи,} \\ 1 & \text{для} \\ & \text{астатичної системи;} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{CT} = 1 - \Phi(0).$$

2 Показник коливальності

$$M = \frac{|\Phi(j\omega)|_{\max}}{\Phi(0)}$$

Як правило, допускається $M=1,2\dots 1,7$.

3 Полоса пропускання $(0, \omega_{\text{пр}})$ (з одного боку, чим ширша полоса пропускання системи, тим вища її швидкодія, з іншого боку, чим ширша полоса пропускання, тим більше перешкод проходить через систему).

4 Частота резонансу $\omega_{\text{рез}}$. Вона не має збігатися з частотою резонансу літального апарата (рисунок 7.5).

γ_3	30^0	45^0	60^0
$t_{\text{пн}}$	$9/\omega_{3p}$	$8/\omega_{3p}$	$7/\omega_{3p}$

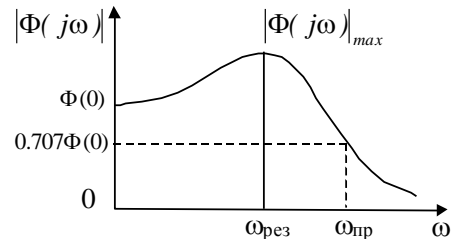


Рисунок 7.5

Оцінювання запасів стійкості A_3, γ_3 за АФЧХ розімкненої системи:

$$A(\omega_{3p}) = 1; \quad t_{\text{пн}} = (1\dots 2)2\pi / \omega_{3p}; \quad t_{m1} \approx \frac{\pi}{\omega_{3p}}$$

Оцінювання за ЛАЧХ розімкненої системи. За нахилом низькочастотної асимптоти ЛАЧХ визначаємо ν (кількість інтегруючих ланок). Якщо $\nu = 0$, то система є статичною: $\varepsilon_{\text{ст}} = \frac{1}{1+k}$. Якщо $\nu \neq 0$, то $\Rightarrow \varepsilon_{\text{ст}} = 0$. Величину k знаходимо при $\omega = 1$, $\omega_{3p} = \omega_{\text{пр}}$ (рисунки 7.6-7.9).

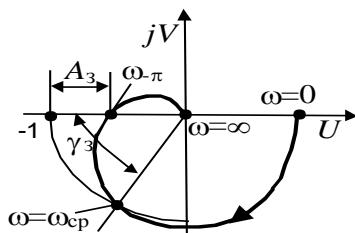


Рисунок 7.6

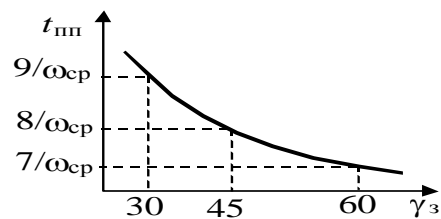


Рисунок 7.7

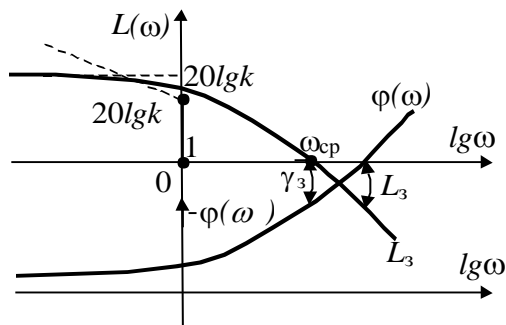


Рисунок 7.8

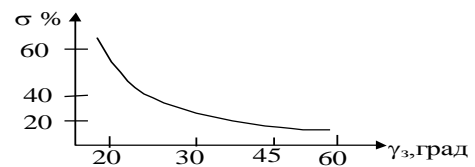


Рисунок 7.9

7.3 Оцінювання якості управління за полюсами та нулями передавальної функції

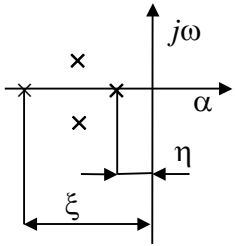


Рисунок 7.10

Нехай передавальна функція замкненої системи

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 (s - s_{0j}) \dots (s - s_{0m})}{a_0 (s - s_1) \dots (s - s_n)}, \quad m \leq n,$$

де s_i – полюси передавальної функції,
 s_{0j} – нулі передавальної функції.

Кожному полюсу відповідає вільна складова $y_i(t) = c_i e^{s_i t}$.

Найближчі до уявної осі полюси називають домінуючими (рисунок 7.10). η – ступінь стійкості.

Якщо домінуючий полюс є дійсним, то йому відповідає складова $c_i e^{\alpha_i t}$.

Приклад: $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}; h(t) = k(1 - e^{-\alpha t}) = k(1 - e^{-\eta t}) = \left|_{\eta = \frac{1}{T}} k(1 - e^{-t/T})\right.$

Для $t = t_{III}$: $h(t_{III}) = 0.95 \cdot h_{уст}$;

$$k(1 - e^{-\eta t_{III}}) = 0.95k; \quad e^{-\eta t_{III}} = 0.05; \quad t_{III} = \frac{\ln 20}{\eta} \approx \frac{3}{\eta} = 3T.$$

Для апериодичної ланки $t_{III} \approx 3T$. Якщо домінуючі полюси є комплексними, то

$$t_{III} \leq \frac{3}{\eta} \quad (\text{рисунок 7.11}).$$

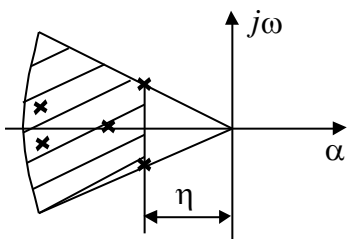


Рисунок 7.11

З'ясувати, чи має система задану міру стійкості можна таким чином: беремо знаменник передавальної функції

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n, \quad \text{робимо заміну } s = q - \eta.$$

Отримуємо

$$D(q) = a'_0 q^n + a'_1 q^{n-1} + \dots + a'_n. \quad \text{Перевіряємо, чи стійка}$$

наша нова система. Якщо так, то початкова система має задану міру стійкості:

$$\mu = \left| \frac{\omega_i}{\alpha_i} \right|_{\max} \quad \text{– коливальність.}$$

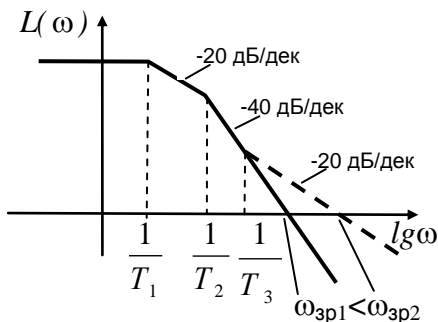


Рисунок 7.12

Вимоги до системи можуть бути висунуті у вигляді допустимої (бажаної) зони розташування полюсів.

Наявність нулів s_{0j} в системі приводить до розширення полоси пропускання, збільшенню швидкодії, збільшенню запасу стійкості за амплітудою A_3 та за фазою γ_3 , якщо $|s_{0j}| < \omega_{зр}$.

На рисунку 7.12 показано ЛАЧХ для двох систем, які описуються передавальними функціями

$$W_1 = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \text{ та } W_2 = \frac{k(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

Нулі, які розташовані поблизу полюсів, компенсують вплив цих полюсів. Нехай передавальна функція замкненої системи має вигляд

$$\Phi(s) = \frac{b_0(s-s_{01})\dots(s-s_{0j})\dots(s-s_{0m})}{a_0(s-s_1)\dots(s-s_i)\dots(s-s_n)}.$$

Тоді, якщо $s_{0j} \approx s_i$, то скорочуються множники $(s-s_{0j})$ і $(s-s_i)$.

$$\text{Середньгеометричний корінь } \sqrt[n]{s_1s_2\dots s_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}.$$

7.4 Аналіз якості управління за допомогою інтегральних оцінок

Розглянемо систему, що зображена на рисунку 7.13.

При $W_{oc}(s) = 1$; $y_{oc}=y$; g – задавальна дія;

$$g = y_{33\text{потр}} = y_{33\text{баж}},$$

f – збурювальний вплив, u – керуюча дія,

$$\varepsilon = g - y_{33} = y_{33\text{потр}} - y_{33} \text{ – похибка}$$

відхилення.

Похибка ε залежить як від бажаної дії g , так і від збурювальної f (рисунк 7.14). Для лінійних систем на основі принципу суперпозиції похибку ε можна подати як суму складових ε_g -похибки, викликаній задавальною дією та ε_f -похибки, викликаній збурювальною дією $\varepsilon = \varepsilon_g + \varepsilon_f$ або в зображеннях

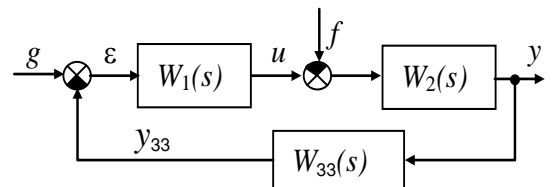
$$E(s) = E_g(s) + E_f(s) = \Phi_{\varepsilon g}(s)G(s) + \Phi_{\varepsilon f}(s)F(s).$$

Нехай $f(t) \equiv 0$, тобто розглянемо похибку, викликану тільки задавальною дією (рисунк 7.15). Нехай перехідна характеристика має монотонний характер. Наведемо похибку у вигляді суми

$$\varepsilon(t) = \underbrace{\varepsilon_{\Pi}(t)}_{\text{перехідна складова}} + \underbrace{\varepsilon_{уст}}_{\text{усталена складова}}; \quad \varepsilon_{\Pi}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_{уст}.$$

Введемо лінійні інтегральні оцінки якості процесу

$$\text{регулювання } I_{0m} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\Pi}(t)t^m dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$



$W(s) = W_1(s)W_2(s)W_{33}(s)$ – передавальна функція контуру

Рисунок 7.13

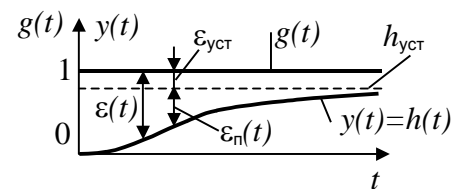


Рисунок 7.14

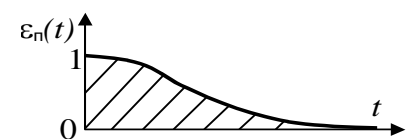


Рисунок 7.15

При $m = 0$ отримаємо $I_{00} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\Pi}(t) dt$ – це площа під кривою $\varepsilon_{\Pi}(t)$. Чим менша

ця площа, тим система більш точна та швидкодіюча (рисунок 7.16, а). При синтезі систем намагаються зменшити оцінки I_{00} . Для збільшення швидкодії систем мінімізують інтегральні оцінки I_{01}, I_{02} і т.д. Зручність інтегральної лінійної оцінки якості I_{00} полягає в тому, що її можна розраховувати, не знаходячи перехідну характеристику $h(t)$ або $\varepsilon_{\Pi}(t)$.

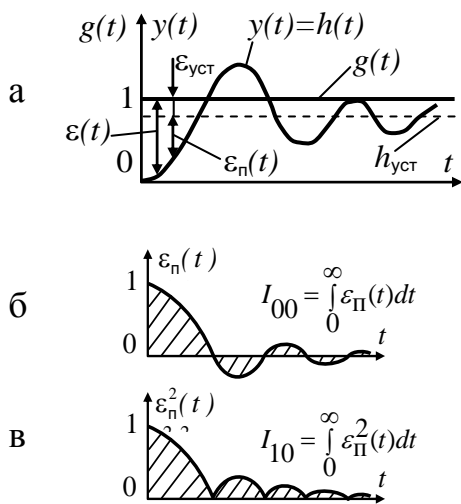


Рисунок 7.16

Зображення перехідної складової похибки $\varepsilon_{\Pi}(t)$ за Лапласом має вигляд $E_{\Pi}(s) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\Pi}(t) e^{-st} dt$. При $s = 0$ це зображення збігається з лінійною інтегральною оцінкою якості

$$I_{00} = E_{\Pi}(s) \Big|_{s=0} = E_{\Pi}(0) = \left[\Phi_{\varepsilon}(s) G(s) - E_{\text{уст}}(s) \right] \Big|_{s=0}.$$

Отже

$$I_{00} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi_{\varepsilon}(s)}{s} - E_{\text{уст}}(s) \right] \begin{matrix} \text{для} \\ \text{статичних;} \\ \text{систем} \end{matrix}$$

$$I_{00} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi_{\varepsilon}(t)}{s} \right] \begin{matrix} \text{для астатичних систем,} \\ \text{оскільки } \varepsilon_{\text{уст}} = 0 \text{ при } \nu \neq 0. \end{matrix}$$

Однак лінійні інтегральні оцінки не можна застосовувати для оцінювання коливальних перехідних характеристик. У цьому випадку площа під кривою $\varepsilon_{\Pi}(t)$ може бути малою через компенсацію додатних та від'ємних значень, а якість регулювання в системі може виявитись неприйнятною (рисунок 7.16, б). У разі коливальних перехідних характеристик застосовують квадратичні інтегральні оцінки якості

$$I_{1m} = \int_0^{\infty} \left[\varepsilon_{\Pi}^2(t) + \tau_1^2 \left(\frac{d\varepsilon_{\Pi}}{dt} \right)^2 + \dots + \tau_m^2 \left(\frac{d^m \varepsilon_{\Pi}}{dt^m} \right)^2 \right] dt.$$

При $m = 0$ отримаємо $I_{10} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\Pi}^2(t) dt$ (рисунок 7.16, в). Квадратичну інтегральну оцінку I_{10} також можна розраховувати, не маючи перехідної характеристики $h(t)$. Запишемо перетворення Фур'є для перехідної складової похибки $\varepsilon_{\Pi}(t)$:

$$E_{\Pi}(j\omega) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\Pi}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Оригінал має вигляд $\varepsilon_{\Pi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\Pi}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$. Підставимо останній вираз у квадратичну інтегральну оцінку: $I_{10} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\Pi}(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\Pi}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega dt$. Після нескладних перетворень отримаємо:

$$I_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\Pi}(j\omega) \times \underbrace{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\Pi}(t) e^{j\omega t} dt}_{\text{перетворення Фур'є для аргумента } (-j\omega)} \times d\omega,$$

тобто $I_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\Pi}(j\omega) E_{\Pi}(-j\omega) d\omega$

Остаточно запишемо $I_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\Pi}(j\omega)|^2 d\omega$ – формулу Рейлі.

Зображення похибки може бути описано передавальною функцією:

$$I_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\varepsilon}(j\omega) G(j\omega)|^2 d\omega \text{ – для астатичних систем;}$$

$$I_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\varepsilon}(j\omega) G(j\omega) - E_{\text{уст}}(j\omega)|^2 d\omega \text{ – для статичних систем;}$$

$$I_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+W(j\omega)} \frac{1}{j\omega} - E_{\text{уст}}(j\omega) \right|^2 d\omega, \text{ де } W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)W_{33}(j\omega).$$

Для розрахунку квадратичної оцінки використовують табличний інтеграл

$$I_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_0}{|a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n|} d\omega.$$

У роботі [3] наведено формули для визначення $n = 1, 2, \dots, 10$.

У загальному випадку $I_{10} = \frac{(-1)^{n-1} \det(N)}{2a_0 \det(M)}$,

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & 0 \\ a_0 & a_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & a_n \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdot & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & a_n \end{bmatrix}.$$

Тема 8 АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ САУ

8.1 Оцінювання точності САУ в сталих режимах при ступеневих входніх впливах
Розглянемо систему (рисунок 8.1).

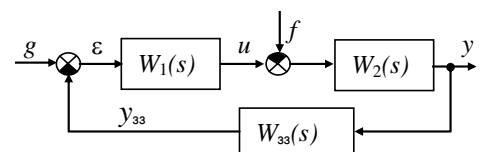


Рисунок 8.1

Нехай $f(t) \equiv 0$; $g(t) = g_r t^r$, r – порядок вхідного впливу.

При $r = 0$ величина $g(t) = g_0 = const$.

При $r = 1$ значення $g(t) = g_1 t = Vt = \Omega t$ – лінійно зростаючий вплив.

При $r = 2$ величина $g(t) = g_2 t^2 = \frac{at^2}{2}$ – квадратичний вплив.

Зображення за Лапласом вхідного ступеневого впливу має вигляд

$$G(s) = L\{g_r t^r\} = \frac{g_r r!}{s^{r+1}}.$$

На основі теореми про межове значення оригіналу маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(s)G(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+W(s)} G(s)s,$$

де $W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{W_0(s)}{s^\nu}$,

$\nu = 0, 1, 2, \dots$ – кількість інтегруючих ланок в передавальній функції розімкненої системи на основі задавальної дії.

Після підстановки отримаємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{W_0(s)}{s^\nu}} \frac{g_r r!}{s^{r+1}} s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^\nu}{s^\nu + W_0(s)} \frac{g_r r!}{s^r}$$

або

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu-r} g_r r!}{s^\nu + k},$$

де k – коефіцієнт передачі розімкненої системи на основі задавальної дії;

ν – порядок астатизму САУ на основі задавальної дії;

r – порядок вхідної дії.

З цієї формули маємо:

1) при $\nu > r$ (порядок астатизму САУ вище порядку вхідного сигналу) $\varepsilon_{уст} = 0$;

2) при $\nu = r$

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_r r!}{s^\nu + k} = \begin{cases} \frac{g_0}{1+k} & \text{при } \nu = 0 \text{ (статична система),} \\ \frac{g_r r!}{k} & \text{при } \nu \neq 0 \text{ (астатична система).} \end{cases}$$

3) при $\nu < r$ величина $\varepsilon_{уст} = \infty$.

Примітка: у всіх випадках ν – порядок астатизму САУ на основі задавальної дії (рисунок 8.2).

Приклади

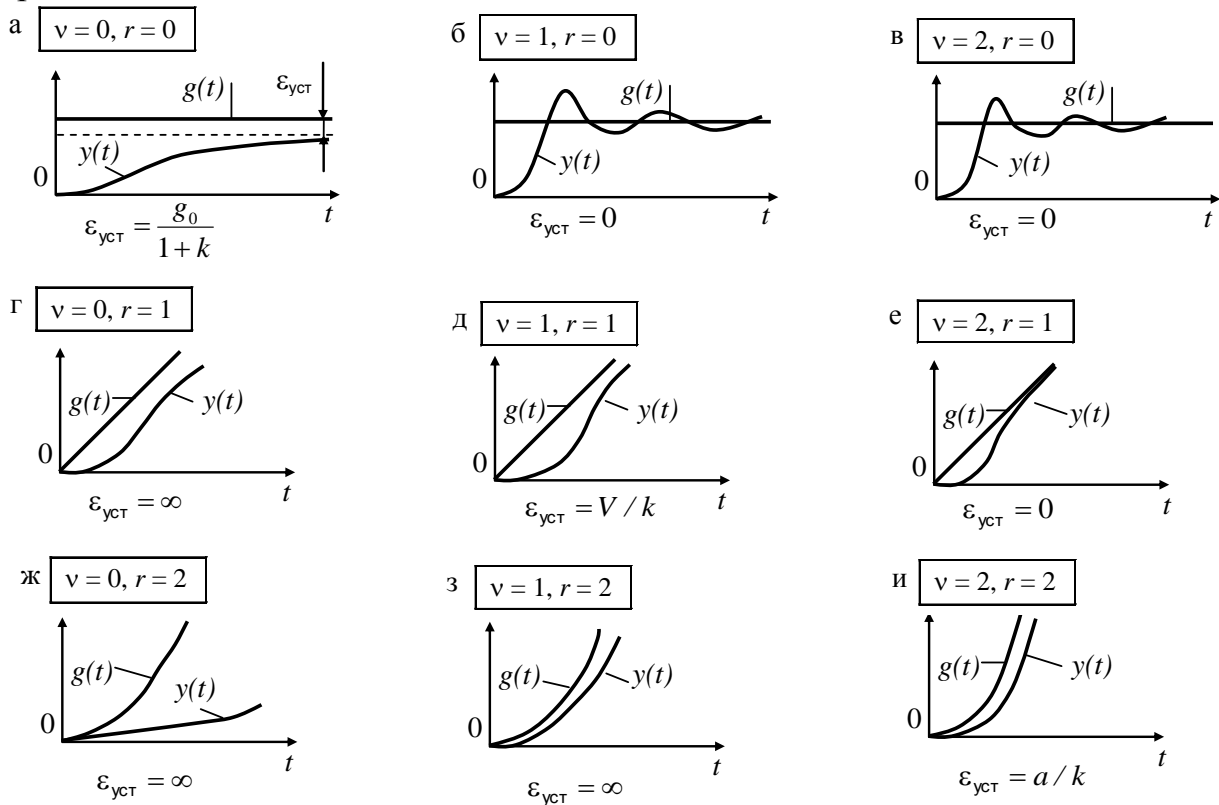


Рисунок 8.2

Тепер оцінімо точність САУ за наявності збурювальної дії. Нехай $g(t) \equiv 0, f(t) \neq 0$.

Нехай $f(t) = f_r t^r$ – степенева збурювальна дія, r – порядок збурювальної дії.

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E_f(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{ef}(s)F(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-W_f(s)W_{OC}(s)}{1+W(s)} F(s)s.$$

Обидві передавальні функції $W_f(s) = W_2(s)$ і $W(s)$ можуть мати інтегруючі ланки. Виділимо їх:

$$W_f(s) = \frac{W_{f0}(s)}{s^m}, \quad W(s) = \frac{W_0(s)}{s^v},$$

де m – кількість інтегруючих ланок в передавальній функції розімкненої системи на основі збурювальної дії;

v – кількість інтегруючих ланок в передавальній функції розімкненої системи на основі задавальної дії.

Після підстановки отримуємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{v-m-r} k_f k_{OC} f_r r!}{s^v + k},$$

де k_f – коефіцієнт передачі розімкненої системи на основі збурення. З цієї формули випливає:

- 1) при $\nu - m > r$ система – астатична на основі збурювальної дії, тобто $\varepsilon_{уст} = 0$;
 2) при $\nu - m = r$ система – статична на основі збурювальної дії:

$$\varepsilon_{f \text{ уст}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_{OC} k_f f r!}{s^\nu + k} = \begin{cases} \frac{k_{OC} k_f f_0}{1+k} & \text{при } \nu = m = r = 0; \\ \frac{k_{OC} k_f f r!}{k} & \text{при } \nu \neq 0. \end{cases}$$

- 3) при $\nu - m < r$ в системі $\varepsilon_{f \text{ уст}} = \infty$.

Порядок астатизму САУ на основі збурювальної дії дорівнює $(\nu - m)$. Для того, щоб система була астатичною на основі збурювальної дії, необхідно щоб виконувалась умова $\nu > m$.

8.2 Оцінювання точності САУ в сталих режимах при повільно змінних вхідних діях

Розглянемо ту ж систему. Нехай $g(t)$ – повільно змінний сигнал, $\varepsilon' \approx 0$, $f(t) \equiv 0$.

Розкладемо зображення $\Phi_\varepsilon(s)$ в формулі $E(s) = \Phi_\varepsilon(s)G(s)$ у ряд Тейлора навколо $s = 0$.

$$\text{Отримаємо } E(s) = \left[\Phi_\varepsilon(0) + \frac{d\Phi_\varepsilon(s)}{ds} \Big|_{s=0} s + \frac{1}{2!} \frac{d^2\Phi_\varepsilon(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} s^2 + \dots \right] G(s).$$

Тепер перейдемо до оригіналів

$$\varepsilon(t) = \Phi_\varepsilon(0)g(t) + \frac{d\Phi_\varepsilon(s)}{ds} \Big|_{s=0} \frac{dg}{dt} + \frac{1}{2!} \frac{d^2\Phi_\varepsilon(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} \frac{d^2g}{dt^2} + \dots$$

$$\text{або } \varepsilon(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg}{dt} + \frac{1}{2!} c_2 \frac{d^2g}{dt^2} + \dots + \frac{1}{i!} c_i g^{(i)}(t) + \dots,$$

$$\text{де } c_i = \frac{d^i \Phi_\varepsilon(s)}{ds^i} \Big|_{s=0} \text{ – коефіцієнти похибки,}$$

c_0 – коефіцієнт похибки за положенням,

c_1 – коефіцієнт похибки за швидкістю,

c_2 – коефіцієнт похибки за прискоренням і т.д.

При повільно змінному сигналі $g(t)$ в цьому ряду буде нескінченне число доданків.

Часто вводять поняття **добротності**, а саме:

$$D_\Omega = \frac{1}{c_1} \text{ – добротність системи за швидкістю};$$

$$D_\varepsilon = \frac{2}{c_2} \text{ – добротність системи за прискоренням};$$

$$D_\varepsilon = \frac{3!}{c_3} \text{ – добротність системи за третьою похідною входу і т.д.}$$

Коефіцієнти похибки c_i можна розрахувати, якщо

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m \leq n, \quad \text{тоді } \Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{A(s)}{A(s)+B(s)}.$$

Розкладемо цей вираз у ряд Тейлора:

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{A(s)}{A(s)+B(s)} = c_0 + c_1 s + \frac{1}{2!} c_2 s^2 + \dots = C(s).$$

Звідси випливає $A(s) = [A(s) + B(s)]C(s)$. Коефіцієнти при однакових степенях s^i мають бути однаковими в цьому виразі:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = \left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n + b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m \right) \times \left(c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2!} s^2 + \dots \right).$$

При $i = 0$ одержуємо $a_n = (a_n + b_m)c_0$, звідки

$$c_0 = \frac{a_n}{a_n + b_m} = \frac{1}{1 + b_m/a_n} = \begin{cases} 1/(1+k) & \text{при } a_n \neq 0 \text{ (статична ситема),} \\ 0 & \text{при } a_n = 0 \text{ (астатична система).} \end{cases}$$

При $i = 1$ одержуємо $a_{n-1} = (a_n + b_m)c_1 + (a_{n-1} + b_{m-1})c_0$, звідки

$$c_1 = \frac{a_{n-1} - (a_{n-1} + b_{m-1})c_0}{a_n + b_m} = \begin{cases} \frac{a_{n-1}(a_n + b_m) - (a_{n-1} + b_{m-1})a_n}{(a_n + b_m)^2} & \text{при } a_n \neq 0, (v=0), \\ a_{n-1}/b_m = 1/k_V & \text{при } a_n = 0, (v=1), \text{ где } k_V = W_0(s) \Big|_{\substack{v=1 \\ s=0}} \\ 0 & \text{при } a_n = a_{n-1} = 0, (v=2). \end{cases}$$

При $i = 2$, якщо $v=2$, то $a_n = a_{n-1} = 0$ і $a_{n-2} = b_m \frac{1}{2} c_2 + b_{m-1} c_1 + (a_{n-2} + b_{m-2})c_0$;

$$c_2 = 2a_{n-2}/b_m = 2/k_\varepsilon.$$

При $v = 1$ величина $D_\Omega = k_v$ – це добротність за швидкістю. При $v = 2$ величина $D_\varepsilon = k_\varepsilon$ – добротність за прискоренням.

Приклад: $g(t) = Vt, v = 1$;

$$\varepsilon(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg}{dt} + \frac{1}{2!} c_2 \frac{d^2 g}{dt^2} + \dots, \quad \varepsilon(t) = c_1 \frac{dg}{dt},$$

оскільки $c_0 = 0$ і $\frac{d^2 g}{dt^2} = \frac{d^3 g}{dt^3} = \dots = 0$;

$$c_1 = \frac{1}{k}, \quad \frac{dg}{dt} = V, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_{уст} = \frac{V}{k}$$

Результат збігається з прикладом із попереднього пункту.

8.3 Оцінювання точності САУ при гармонічних вхідних діях

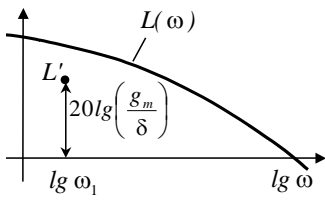


Рисунок 8.3

Нехай $g(t) = g_m \sin \omega_1 t$, $f(t) \equiv 0$.

Тоді $y_{уст}(t) = b_m \sin(\omega_1 t + \varphi)$ та

$$\varepsilon_{уст}(t) = \varepsilon_m \sin(\omega_1 t + \varphi_0),$$

$$\text{де } \varepsilon_m = |\Phi_\varepsilon(j\omega_1)| g_m = \left| \frac{1}{1+W(j\omega_1)} \right| g_m \approx \frac{g_m}{|W(j\omega_1)|}.$$

Якщо необхідно, щоб $\varepsilon_m \leq \delta$ при $\omega = \omega_1$, то вибирають ЛАЧХ таким чином: $L(\omega)$ має проходити вище точки $L' = (\omega_1, 20\lg(g_m/\delta))$ (рисунок 8.3). Амплітуда похибки на частоті ω_1 :

$$\varepsilon_m \approx g_m / 10^{L(\omega_1)/20}.$$

$$\text{Оскільки } \varepsilon_m = \frac{g_m}{|W(j\omega_1)|} \leq \delta, \text{ то } L(\omega_1) = 20\lg|W(j\omega_1)| \geq 20\lg \frac{g_m}{\delta}.$$

8.4 Оцінювання точності САУ при випадкових діях

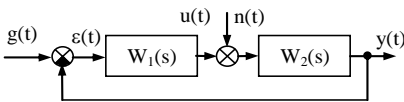


Рисунок 8.4

Розглянемо САУ, показану на рисунку 8.4.

Нехай $g(t)$, $\varepsilon(t)$, $n(t)$, $y(t)$ – центровані стаціонарні випадкові процеси, ($n(t)$ – шум, перешкода, *noise*).

Випадковий процес – зміна деякої змінної в часі; при такій зміні в кожний момент часу ця змінна є

величиною випадковою.

Приведемо основні характеристики випадкових процесів.

Центрований випадок – це процес, математичне очікування якого дорівнює нулю $(\overset{0}{x}, \overset{0}{g})$.

Математичне очікування – це

$$M[x(t)] = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f(x,t) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) - \text{середнє значення за множиною реалізацій.}$$

При стаціонарних процесах $M[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$ – середнє за часом;

$F(x(t)) = P(x(t) \leq x_1)$ – **функція розподілу** випадкового процесу;

$f(x,t) = \frac{dF(x(t))}{dx}$ – **щільність розподілу** випадкового процесу;

$R_x(t, \tau) = M[x(t)x(\tau)]$ – **кореляційна функція** випадкового процесу.

Стаціонарний (в широкому сенсі) **випадковий процес** – це процес, в якому математичне очікування не залежить від часу $M[x(t)] = m_x = \text{const}$, а кореляційна функція залежить тільки від одного аргументу $R_x(t, \tau) = R_x(t - \tau) = R_x(\lambda)$ (лат.: *correlatio* – взаємозв’язок, *dispersus* – розсіяний, *spectrum* –

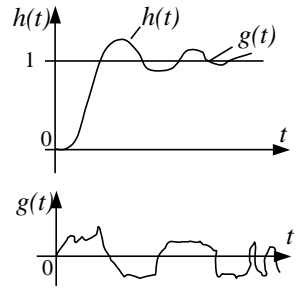


Рисунок 8.5

видиме).
Дисперсія $D_x = M[x^2(t)]$.

Середньоквадратичне відхилення $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ характеризує відхилення випадкової величини від середнього значення.

Кореляційна функція $R_x(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)]$.

Спектральна щільність $S_x(\omega) = F\{R_x(\tau)\}$.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; D_x = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

Спектральна щільність характеризує розподіл дисперсії за частотами.

При детермінованих діях для оцінювання САУ вводять показники $\varepsilon_{уст}$, σ , $t_{ПП}$, M , $\omega_{рез}$, γ_3 , A_3 , ... При випадкових діях ці показники втрачають сенс.

В цьому випадку застосовують такий показник, як **середньоквадратичне**

відхилення (СКВ) похибки: $\sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon} = \sqrt{M[\varepsilon^2]} = \sqrt{R_\varepsilon(0)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega}$.

Наведемо задачу оцінювання точності САУ при випадкових діях. Дано передавальні функції системи $W_1(s)$, $W_2(s)$; імовірнісні характеристики задавальної $g(t)$ та збурювальної $n(t)$ дій $R_g(\tau)$, $S_g(\omega)$, $R_n(\tau)$, $S_n(\omega)$, $R_{gn}(\tau)$, $S_{gn}(\omega)$, $R_{ng}(\tau)$, $S_{ng}(\omega)$. Знайти імовірнісні характеристики вихідного сигналу $y(t)$ та похибки $\varepsilon(t)$: $R_y(\tau)$, $S_y(\omega)$, $S_\varepsilon(\omega)$, σ_ε .

Розв’язання

На основі властивості суперпозиції, яку мають лінійні сигнали, приймаємо, що вихідний сигнал є сумою реакцій системи на вхідні сигнали:

$$Y(s) = \Phi(s)G(s) + \Phi_n(s)N(s), \text{ де } \Phi(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} \text{ і } \Phi_n(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

Нехай $L^{-1}\{\Phi(s)\} = k(t)$, $L^{-1}\{\Phi_n(s)\} = k_n(t)$.

Знайдемо кореляційну характеристику вихідного сигналу:

$$R_y(\tau) = M[y(t), y(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t+\tau) dt;$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\lambda)k(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} n(t-\lambda)k_n(\lambda) d\lambda,$$

$$\text{а } y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau-\eta)k(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} n(t+\tau-\eta)k_n(\eta) d\eta.$$

Підставимо ці вирази в кореляційну функцію:

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\lambda)k(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau-\eta)k(\eta)d\eta dt + \\
&+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} n(t-\lambda)k_n(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} n(t+\tau-\eta)k_n(\eta)d\eta dt + \\
&+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\lambda)k(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} n(t+\tau-\eta)k_n(\eta)d\eta dt + \\
&+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} n(t-\lambda)k_n(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau-\eta)k(\eta)d\eta dt.
\end{aligned}$$

Змінімо порядок інтегрування:

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t-\lambda)g(t+\tau-\eta)dt \cdot k(\lambda)k(\eta)d\lambda d\eta + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t-\lambda)n(t+\tau-\eta)dt \cdot k_n(\lambda)k_n(\eta)d\lambda d\eta + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t-\lambda)n(t+\tau-\eta)dt \cdot k(\lambda)k_n(\eta)d\lambda d\eta + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t-\lambda)g(t+\tau-\eta)dt \cdot k_n(\lambda)k(\eta)d\lambda d\eta.
\end{aligned}$$

Звідси виходить:

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\lambda+\tau-\eta)k(\lambda)k(\eta)d\lambda d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\lambda+\tau-\eta)k_n(\lambda)k_n(\eta)d\lambda d\eta + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{gn}(\lambda+\tau-\eta)k(\lambda)k_n(\eta)d\lambda d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ng}(\lambda+\tau-\eta)k_n(\lambda)k(\eta)d\lambda d\eta.
\end{aligned}$$

При незалежних задавальній та збурювальній діях два останні додатки відсутні в цьому виразі.

Знайдемо *спектральну щільність вихідного сигналу*, для чого застосуємо перетворення Фур'є:

$$S_y(\omega) = F\{R_y(\tau)\} = \Phi(j\omega)\Phi(-j\omega)S_g(\omega) + \Phi_n(j\omega)\Phi_n(-j\omega)S_n(\omega) \text{ або}$$

$$S_y(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_n(j\omega)|^2 S_n(\omega).$$

Аналогічно можна отримати *спектральну щільність похибки*

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_n(j\omega)|^2 S_n(\omega).$$

Якщо збурювальна дія $n(t)$ прикладена до входу системи, то

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega).$$

Тепер знайдемо *середньоквадратичне відхилення похибки*

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{D_{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [|\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_n(j\omega)|^2 S_n(\omega)] d\omega}.$$

Якщо спектральну щільність $S_{\varepsilon}(\omega)$ навести у вигляді

$$S_{\varepsilon}(\omega) = \frac{b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}}{|a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2},$$

то дисперсія $D_{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) d\omega$ буде являти собою табличний інтеграл

$$D_{\varepsilon} = \frac{(-1)^{n-1} \det N_n}{2a_0 \det M_n},$$

де $N_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$ - матриця Гурвіца, в якій замість першого рядка стоять коефіцієнти b_0, b_1, \dots, b_{n-1} ,

$M_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$ - матриця Гурвіца.

Так, при $n = 1$ отримаємо $D = \frac{b_0}{2a_0 a_1}$;

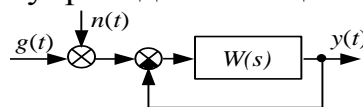
при $n = 2$ отримаємо $D = \frac{a_0 b_1 - b_0 a_2}{2a_0 a_1 a_2}$;

при $n = 3$ отримаємо $D = \frac{a_2 a_3 b_0 - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}$.

У роботі [3] наведено формули для розрахунку цього інтеграла до $n = 10$.

8.5 Приклад оцінювання точності САУ при випадкових діях

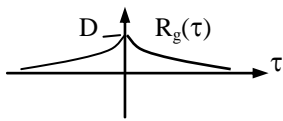
Спостережувана система супроводження цілі антеною радіолокатора має вигляд



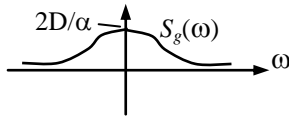
Проаналізувавши вихідні дані, можна записати такі співвідношення:

$$M[g(t)] = 0; \quad R_{gn}(\tau) = R_{ng}(\tau) = 0; \quad \varepsilon = g - y;$$

$$M[n(t)] = 0; \quad S_{gn}(\omega) = S_{ng}(\omega) = 0; \quad W(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}.$$

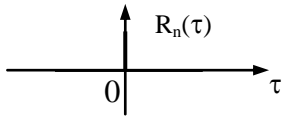


Кореляційна функція корисного сигналу $R_g(\tau) = De^{-\alpha\tau}$



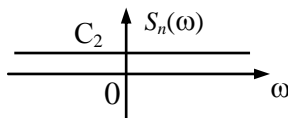
Спектральна щільність корисного сигналу

$$S_g(\omega) = \frac{2D\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



Кореляційна функція перешкоди

$$R_n(\tau) = c^2\delta(\tau)$$



Спектральна щільність перешкоди

$$S_n(\omega) = c^2 \text{ (білий шум)}$$

Необхідно знайти математичне очікування, дисперсію сигналу похибки системи $\varepsilon(t)$ в сталому режимі та СКВ похибки σ_ε .

Розв'язання

Знайдемо зображення сигналу похибки $E(s)$ за формулою Лапласа:

$$E(s) = \Phi_\varepsilon(s)G(s) - \Phi_n(s)N(s) = \frac{1}{1+W(s)}G(s) - \frac{W(s)}{1+W(s)}N(s) = E_g(s) + E_n(s).$$

Оскільки $M[g(t)] = M[n(t)] = 0$, то $M[\varepsilon(t)] = 0$.

Знайдемо дисперсію сигналу $\varepsilon_g(t)$: $D_{\varepsilon g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon g}(\omega) d\omega$,

де $S_{\varepsilon g}(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_g(\omega)$ або

$$S_{\varepsilon g}(\omega) = \left| \frac{j\omega(Tj\omega + 1)}{j\omega(Tj\omega + 1) + k} \right|^2 \cdot \frac{2D\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2D\alpha\omega^2(T^2\omega^2 + 1)}{|j\omega(Tj\omega + 1) + k|^2 \cdot |\alpha + j\omega|^2}.$$

Наведемо спектральну щільність $S_{\varepsilon g}(\omega)$ сигналу похибки, викликаной задавальною дією $\varepsilon_g(t)$, у вигляді

$$S_{\varepsilon g}(\omega) = \frac{2D\alpha[T^2(j\omega)^4 - (j\omega)^2]}{|T(j\omega)^3 + (\alpha T + 1)(j\omega)^2 + (\alpha + k)(j\omega) + \alpha k|^2} = \frac{2D\alpha[b_0(j\omega)^4 + b_1(j\omega)^2]}{|a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3|^2},$$

де $b_0 = T^2$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0$, $a_0 = T$, $a_1 = \alpha T + 1$, $a_2 = \alpha + k$, $a_3 = \alpha k$, $n = 3$.

Застосувавши табличний інтеграл, отримаємо:

$$D_{\varepsilon g} = \frac{a_2 a_3 b_0 - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} 2D\alpha = \frac{2D\alpha[(\alpha + k)\alpha k T^2 + T\alpha k + T(\alpha T + 1) \cdot 0]}{2T\alpha k[(\alpha T + 1)(\alpha + k) - T\alpha k]} =$$

$$= \frac{D\alpha(1 + \alpha T + Tk)}{\alpha^2 T + \alpha + k}.$$

Аналогічно розраховуємо дисперсію сигналу похибки, викликані перешкодою

$$S_{\varepsilon n}(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega) = \frac{k^2}{|j\omega(Tj\omega + 1) + k|^2} c^2 =$$

$$= \frac{k^2 c^2}{|T(j\omega)^2 + j\omega + k|^2} = \frac{b_1}{|a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_2|^2},$$

де $b_0 = 0; b_1 = k^2 c^2; a_0 = T; a_1 = 1; a_2 = k; n = 2$.

При $n = 2$ отримуємо $D_{\varepsilon n} = \frac{a_0 b_1 - b_0 a_2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{T k^2 c^2}{2T k} = \frac{k c^2}{2}$.

Оскільки сигнали $g(t)$ та $n(t)$ є некорельованими, то дисперсія сигналу похибки системи D_ε дорівнює сумі дисперсій сигналів ε_g та ε_n , тобто

$$D_\varepsilon = \frac{D\alpha(1 + \alpha T + kT)}{\alpha^2 T + \alpha + k} + \frac{k c^2}{2}.$$

Середньоквадратичне відхилення похибки

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon} = \sqrt{\frac{D\alpha(1 + \alpha T + kT)}{\alpha^2 T + \alpha + k} + \frac{k c^2}{2}}.$$

Для збільшення СКВ похибки ε_g слід збільшити k .

Для зменшення СКВ похибки ε_n слід збільшити k .

Для мінімізації СКВ загальної похибки вибирають k_{opt} .

Виникає задача оптимізації СКВ похибки (рисунок 8.6).

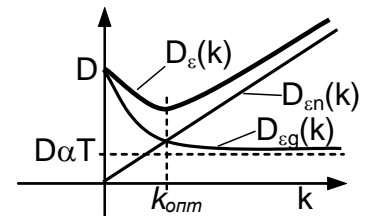


Рисунок 8.6

Тема 9 ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЧАСТОТНИМИ ТА ЧАСОВИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЛІНІЙНИХ САУ

9.1 Побудова частотних характеристик замкнених САУ

Розглянемо замкнену систему (рисунок 9.1).

Вхід та вихід пов'язані відношеннями:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{Y(s)}{G(s)};$$

$$Y(s) = \Phi(s)G(s) \text{ або } Y(j\omega) = \Phi(j\omega)G(j\omega).$$

Таким чином, АФЧХ розімкненої системи можна побудувати за відомою АФЧХ розімкненої системи (рисунок 9.2), застосувавши формулу $\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}$.

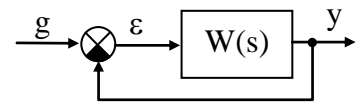


Рисунок 9.1

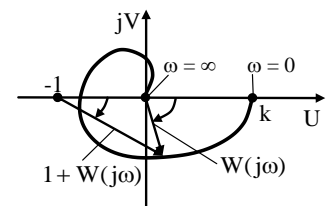


Рисунок 9.2

При $\omega = 0$ (рисунок 9.3, а)

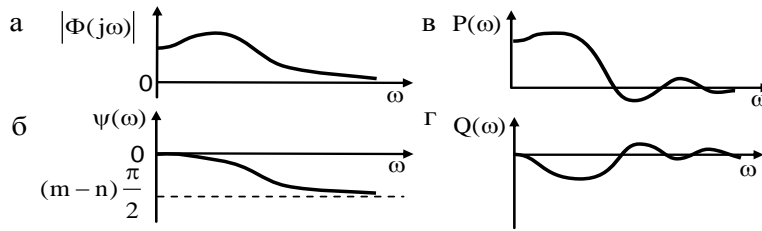


Рисунок 9.3

$$\Phi(0) = \begin{cases} \frac{k}{1+k}, & v=0 \text{ (статична система)}, \\ 1, & v \neq 0 \text{ (астатична система)}. \end{cases}$$

При $\omega \neq 0$ (рисунок 9.3, б) поділимо $|W(j\omega)|$ на $|1+W(j\omega)|$ та віднімемо фазу вектора $1+W(j\omega)$ із фази вектора $W(j\omega)$.

АФЧХ замкненої системи можна побудувати інакше:

$$\begin{aligned} \Phi(j\omega) &= \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + U(\omega) + jV(\omega)} = \frac{U(\omega)(1 + U(\omega)) + V^2(\omega)}{(1 + U(\omega))^2 + V^2(\omega)} + j \frac{V(\omega)}{(1 + U(\omega))^2 + V^2(\omega)} = \\ &= P(\omega) + jQ(\omega) = |\Phi(j\omega)| e^{j\psi(\omega)}, \end{aligned}$$

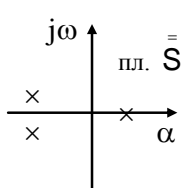
де $P(\omega) = |\Phi(j\omega)| \cos \psi(\omega)$ і $Q(\omega) = |\Phi(j\omega)| \sin \psi(\omega)$.

При $\omega = 0$ (рисунок 9.3, в) отримуємо $\Phi(0) = P(0)$; $Q(0) = 0$; $\psi(0) = 0$.

При $\omega = \infty$ (рисунок 9.3, г) отримуємо $P(\infty) = Q(\infty) = 0$; $\psi(\infty) = (m - n) \cdot \pi / 2$.

9.2 Розрахунок часових характеристик САУ за її частотними характеристиками

Вихідний сигнал в системі можна знайти за допомогою його зображення (рисунок 9.4) та зворотного перетворення Лапласа або Фур'є: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{\Phi(s)G(s)\}$, оскільки $Y(s) = \Phi(s)G(s)$.



При $g(t) = \delta(t)$ отримуємо $G(s) = 1$ і $y(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\} = h'(t)$.

При $g(t) = 1(t)$ отримуємо $G(s) = \frac{1}{s}$ і $y(t) = L^{-1}\left\{\frac{\Phi(s)}{s}\right\} = h'(t)$.

Результат зворотного перетворення Лапласа залежить від полюсів зображення $Y(s)$, які можуть знаходитись як в лівій півплощині, так і в правій. Наведемо $Y(s)$ у вигляді двох складових: $Y_r(s)$ – регулярної складової, що має полюси тільки в лівій півплощині, $Y_n(s)$ – нерегулярної складової, що має полюси на уявній осі та в правій півплощині $Y(s) = Y_r(s) + Y_n(s)$.

Відповідно і оригінал складається з двох складових: $y(t) = y_r(t) + y_n(t)$.

До регулярної складової $Y_r(s)$ можна застосовувати зворотнє перетворення Фур'є, а до нерегулярної – тільки перетворення Лапласа:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y_n(s) e^{st} ds.$$

Розглянемо регулярну складову $Y_r(j\omega) = R(\omega) + jS(\omega)$,

де $R(\omega) = \text{Re}[Y_r(j\omega)]$, $S(\omega) = \text{Im}[Y_r(j\omega)]$;

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + jS(\omega)] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + jS(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{[R(\omega) \cos \omega t - S(\omega) \sin \omega t]}_{\text{кратна функція}} d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{[R(\omega) \sin \omega t + S(\omega) \cos \omega t]}_{\text{некратна функція}} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - S(\omega) \sin \omega t] d\omega. \end{aligned}$$

При $t < 0$ $y_r(t) = 0$; $y_r(t) = 0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t + S(\omega) \sin \omega t] d\omega$.

Додавши та віднявши останні два вирази, отримаємо

$$y_r(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega \quad \text{або} \quad y_r(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad \text{Таким чином, у}$$

мінімально-фазових системах існує однозначний зв'язок вихідного сигналу з частотними характеристиками САУ.

Знайдемо імпульсну перехідну характеристику $h(t)$. Для цього використаємо $g(t) = \delta(t)$. При цьому $G(s) = 1$. Тоді $Y(s) = H'(s) = \Phi(s)$.

Для стійкої системи $\Phi(s) = \Phi_r(s)$, оскільки всі її полюси знаходяться в лівій півплощині. Отже, нерегулярна складова відсутня:

$$H'(j\omega) = Y(j\omega) = Y_r(j\omega) = \Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = R(\omega) + jS(\omega).$$

Підставивши значення $R(\omega)$ та $S(\omega)$ у вираз для визначення $y_r(t)$, отримаємо

$$h'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega; \quad h'(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Таким чином, вагову характеристику системи $h'(t)$ можна вирахувати за цими формулами, якщо знати дійсну частотну характеристику (ДЧХ) або уявну частотну характеристику (УЧХ) замкненої САУ.

ДЧХ та УЧХ мінімально-фазової системи виявляються пов'язаними між собою парним перетворенням Гільберта:

$$P(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(u)}{u - \omega} du, \quad Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(u)}{u - \omega} du.$$

Знайдемо перехідну характеристику $h(t)$. Для цього візьмемо $g(t) = 1(t)$. Тоді $G(s) = 1/s$ і $G(j\omega) = 1/j\omega$.

$H(s) = Y(s) = \Phi(s)G(s) = \Phi(s)/s = Y_r(s) + Y_n(s)$. Зображення $G(s) = 1/s$ має нульовий полюс, який знаходиться на уявній осі. Саме тому є присутньою нерегулярна складова. Знайдемо її.

Нульовому полюсу відповідає стале значення сигналу:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi(s)}{s} s = \Phi(0) = P(0) = \begin{cases} k & \text{при } v = 0, \\ k+1 & \\ 1 & \text{при } v \neq 0. \end{cases}$$

Тож $y_n(t) = P(0)$. Тоді $Y_n(t) = P(0)/s$. Оскільки $Y(s) = Y_r(s) + Y_n(s)$, то $Y_r(s) = Y(s) - Y_n(s) = \frac{\Phi(s)}{s} - \frac{P(0)}{s} = \frac{\Phi(s) - P(0)}{s}$.

До регулярної складової можна застосувати перетворення Фур'є:

$$Y_r(j\omega) = \frac{\Phi(j\omega) - P(0)}{j\omega} = \frac{P(\omega) + jQ(\omega) - P(0)}{j\omega} = \frac{Q(\omega)}{\omega} + j \frac{P(0) - P(\omega)}{\omega} = R(\omega) + jS(\omega).$$

Звідки $R(\omega) = \frac{Q(\omega)}{\omega}$; $S(\omega) = \frac{P(0) - P(\omega)}{\omega}$. Підставимо ці вирази у формули для визначення $y_n(t)$ та додамо нерегулярну складову для розрахунку

$$h(t) = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega;$$

$$h(t) = P(0) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(0) - P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = P(0) - \frac{2}{\pi} P(0) \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{\sin \omega t}{\omega t}}_{\frac{\pi}{2}} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega.$$

Таким чином, $h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega$, тобто перехідна характеристика

однозначно визначається дійсною частотною характеристикою замкненої системи.

9.3 Оцінювання властивостей перехідної характеристики за ВЧХ замкненої системи

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega, \\ H(s) = \frac{\Phi(s)}{s}, \end{cases}$ можна зробити такі

ВИСНОВКИ:

1. Кінцеве значення перехідної характеристики дорівнює початковому значенню ВЧХ $h(\infty) = P(0)$ (рисунок 9.5). Доведення:

$$h(\infty) \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi(s)s}{s} = \Phi(0) = P(0).$$

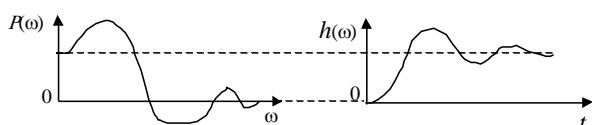


Рисунок 9.5

2. Кінцеве значення ВЧХ дорівнює початковому значенню перехідної характеристики $h(0) = P(\infty) = 0$ при $m < n$.

Доведення:

$$h(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s)s = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Phi(s)s}{s} = \Phi(\infty) = P(\infty) \text{ при } m < n \quad \Phi(\infty) = 0.$$

3. Приблизно однаковим ВЧХ відповідають приблизно однакові $h(t)$. Це впливає з властивості інтеграла згладжувати функції. На основі цієї властивості можна замінити точну ВЧХ складної форми частково лінійною ламаною функцією, для якої легше вибирають інтеграл.

4. Якщо ВЧХ являє собою суму декількох характеристик, то і $h(t)$ буде сумою перехідних характеристик, які відповідають окремим ВЧХ:

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^m P_i(\omega) \rightarrow h(t) = \sum_{i=1}^m h_i(t).$$

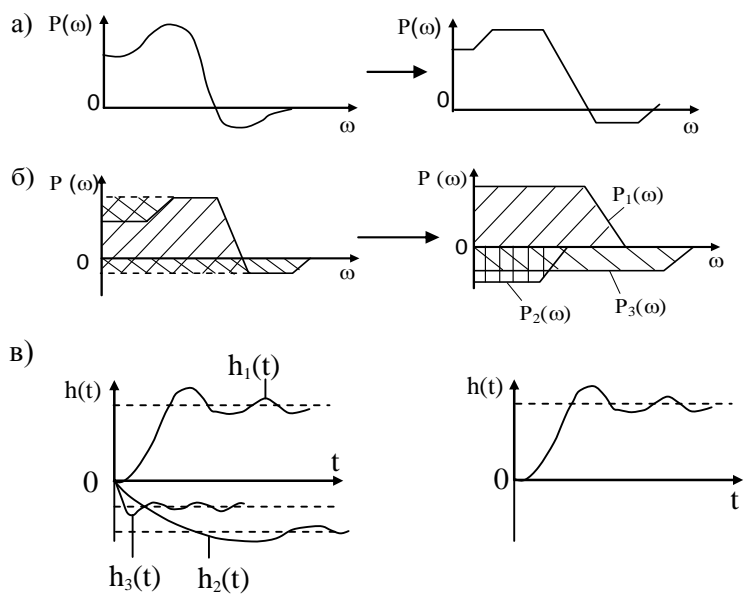


Рисунок 9.6

Це виходить із властивості лінійності операції інтегрування. На цій властивості ґрунтується метод В. В. Солодовнікова (метод трапецій) для побудови перехідних характеристик:

$$P(\omega) = P_1(\omega) + P_2(\omega) + P_3(\omega) \rightarrow h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t).$$

5. Якщо дві ВЧХ відрізняються між собою тільки масштабом по осі ординат, то відповідні їм $h(t)$ також відрізняються тільки масштабом по осі ординат (рисунок 9.7):

$$P_1(\omega), P_2(\omega) = mR(\omega);$$

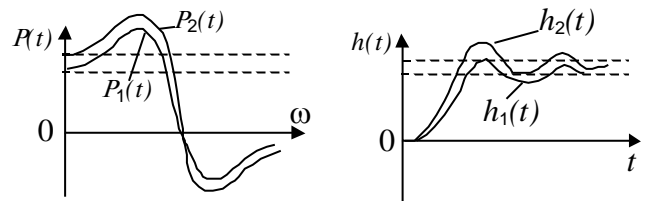


Рисунок 9.7

$$h_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_2(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{mP_1(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = mh_1(t).$$

6. Якщо дві ВЧХ відрізняються між собою тільки масштабом по осі абсцис, то відповідні їм $h(t)$ також відрізняються тільки масштабом по осі абсцис. Чим ширше ВЧХ, тим вужче $h(t)$. Чим більша смуга пропускання, тим вища швидкість системи (рисунок 9.8 і 9.9):

$$P_1(\omega), P_2(\omega) = P_1(m\omega);$$

$$h_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_2(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{mP_1(\omega)}{m\omega} \sin(m\omega \frac{t}{m}) \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_1(\lambda)}{\lambda} \sin \lambda \frac{t}{m} \, d\lambda = h_1\left(\frac{t}{m}\right).$$

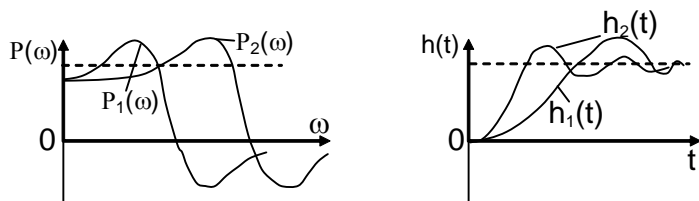


Рисунок 9.8

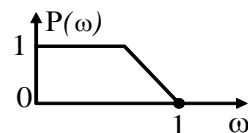


Рисунок 9.9

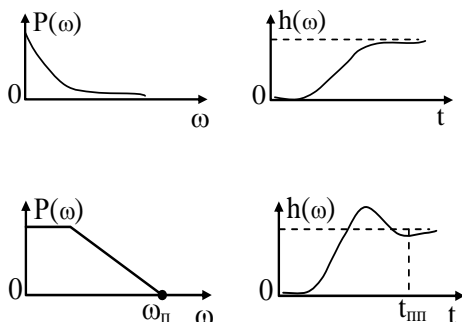


Рисунок 9.10

Існують таблиці h -функцій, в яких наведено перехідні характеристики, які розраховують для одиничних трапецій.

За допомогою цих характеристик можна знайти перехідні процеси, які відповідають трапеціям довільної висоти та ширини, при використанні виводів 5 та 6 (рисунок 9.10).

7. Якщо ВЧХ – додатна спадна випукла функція, тобто $P(\omega) > 0$; $\frac{dP(\omega)}{d\omega} < 0$; $\frac{d^2P(\omega)}{d\omega^2} > 0$, то

$h(t)$ – монотонна, тобто $\sigma = 0$.

8. Якщо ВЧХ можна замінити трапецією, то $\sigma < 18\%$ і $\frac{\pi}{\omega_n} < t_{nn} < \frac{4\pi}{\omega_n}$, ω_n – частота додатна (рисунок 9.11).

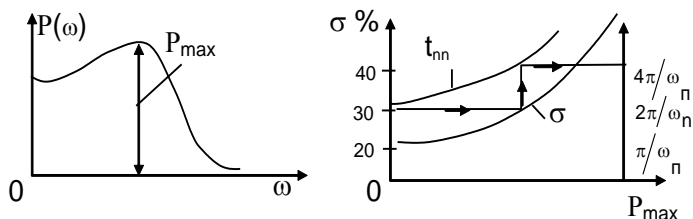


Рисунок 9.11

9. Для додатних ВЧХ, що мають $P_{max} > P(0)$, перерегулювання

$$\sigma = \frac{1.18P_{max} - P(0)}{P(0)} 100\% \text{, час } t_{nn}$$

знаходимо за графіками (рисунок 9.12).

10. Якщо ВЧХ має розрив при $\omega = 0$, то значення $h(t)$ спрямовано в ∞ .

Система знаходиться на аперіодичній межі стійкості (рисунок 9.13).

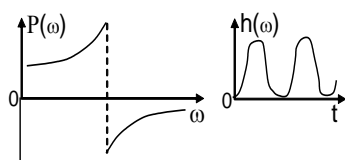


Рисунок 9.12

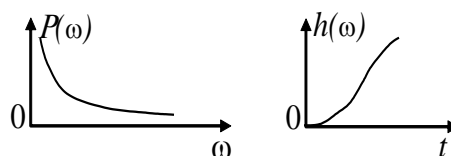


Рисунок 9.13

11. Якщо ВЧХ має розрив при $\omega \neq 0$, то система знаходиться на коливальній межі стійкості.

Тема 10 МЕТОД КОРЕНЕВИХ ГОДОГРАФІВ

10.1 Основи методу корневих годографів

Кореневий годограф – це сукупність траєкторій коренів характеристичного рівняння замкненої системи на комплексній площині при зміні одного з параметрів системи, наприклад, $0 \leq k \leq \infty$ або $-\infty \leq k \leq 0$.

Метод корневих годографів запропонували в Росії К. Ф. Теодорчик, Г. А. Бендриков, С. П. Стрелков (1948 – 1949 рр), в США – У. Р. Еванс (1950 р.). Цей метод дозволяє проводити аналіз системи та вибрати k , що забезпечує найбільш вигідне розташування полюсів.

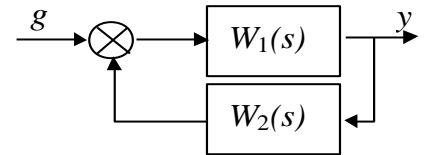


Рисунок 10.1

Розглянемо систему (рисунок 10.1).

Передавальна функція цієї системи має вигляд $\Phi(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W(s)}$.

Передавальна функція розімкненої системи

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m \leq n \text{ може бути подана у вигляді}$$

(рисунок 10.2)

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{kB_1(s)}{A(s)} = \frac{ka(s-s_{01})(s-s_{02})\dots(s-s_{0m})}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = \frac{ka \prod_{i=1}^m (s-s_{0i})}{\prod_{j=1}^n (s-s_j)},$$

де s_{0i} – нулі передавальної функції розімкненої системи;

s_j – полюси передавальної функції розімкненої системи.

Характеристичне рівняння замкненої системи має вигляд $1+W(s) = 0$. Корені цього рівняння $s_k, k = 1, 2, \dots, n$ є полюсами передавальної функції замкненої системи. При зміні параметра k полюси рухаються по комплексній площині \bar{s} та описують траєкторії. Сукупність n таких траєкторій і формує кореневий годограф (рисунок 10.3).

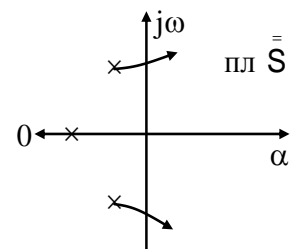


Рисунок 10.2

Із характеристичного рівняння отримуємо $W(s) = 1$. Цей комплексний вираз можна розбити на два $|W(s)| = 1; \arg W(s) = \pm\pi(2i+1), i = 0, 1, 2, \dots$. Запишемо вираз для визначення модуля $|W(s)|$:

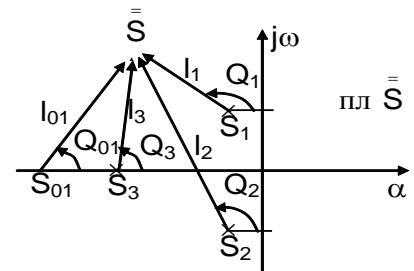


Рисунок 10.3

$$\frac{ka \prod_{i=1}^m |s - s_{0i}|}{\prod_{j=1}^n |s - s_j|} = 1 \text{ або } \frac{ka \prod_{i=1}^m l_{0i}}{\prod_{j=1}^n l_j} = 1,$$

де $l_{0i} = |s - s_{0i}|$; $l_j = |s - s_j|$. Виділимо з останнього виразу параметр

$$k = \frac{\prod_{j=1}^n l_j}{a \prod_{i=1}^m l_{0i}}. \quad (10.1)$$

Запишемо вираз для опису аргументу вектора $W(s)$

$$\arg W(s) = \arg \prod_{i=1}^m (s - s_{0i}) - \arg \prod_{j=1}^n (s - s_j) = \pm(2i + 1) \quad i = 0, 1, 2, \dots, \text{ звідки знаходимо}$$

$$\sum_{i=1}^m Q_{0i} - \sum_{j=1}^n Q_j = \pm\pi(2i + 1), i = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.2)$$

де Q_{0i} – фаза вектора, проведеного із i -го нуля розімкненої системи в досліджувану точку \bar{s} ;

Q_j – фаза вектора, проведеного із j -го полюса розімкненої системи в досліджувану точку \bar{s} .

Будь-яка точка Δ на площині \bar{s} , що задовольняє рівняння (10.2), належить годографу, тобто є полюсом замкненої системи для деякого значення параметра k . Це значення параметра k розраховують за формулою (10.1).

Рівняння (10.2) зручне тим, що в нього не входить значення параметра k .

За рівнянням (10.2) можна побудувати кореневий годограф. Потім вибрати найбільш відповідне розташування полюсів замкненої системи і за рівнянням (10.1) визначити значення параметра k , що забезпечує необхідне розташування полюсів.

При “ручному” способі побудування кореневого годографа вибирають точку Δ на площині \bar{s} та перевіряють, чи задовольняє вона рівняння (10.2). Якщо так, то ця точка належить кореневому годографу. Якщо ні, то зміщують точку по горизонталі або вертикалі і знову перевіряють умову (10.2). Існує спеціальна лінійка Еванса, що полегшує розрахунок сум фаз.

У наш час кореневі годографи будують за допомогою ЕВМ.

Розглянемо властивості корневих годографів, що виходять із рівняння (10.2) та характеристичного рівняння:

- кореневий годограф має n зв’язків, де n – порядок системи;
- зв’язки кореневого годографа симетричні відносно дійсної осі;
- зв’язки кореневого годографа при $k = 0$ починаються з полюсів розімкненої системи.

Характеристичне рівняння замкненої системи має вигляд

$$1 + \frac{kB_1(s)}{A(s)} = 0 \text{ або } A(s) + kB_1(s) = 0.$$

При $k = 0$ отримуємо $A(s) = 0$, тобто характеристичне рівняння замкненої системи при $k = 0$ збігається з характеристичним рівнянням розімкненої системи. Отже, полюси замкненої системи при $k = 0$ збігаються з полюсами розімкненої системи: $s_k = s_j, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$, тому полюси розімкненої системи s_j є початковими точками кореневого годографа;

– при $k = \infty$ m зв'язків закінчуються в нулях розімкненої системи.

Із характеристичного рівняння $A(s) + kB_1(s) = 0$ одержуємо $\frac{A(s)}{k} + B_1(s) = 0$, що при $k = \infty$ приводить до виразу $B_1(s) = 0$; $s_k = s_{0i}, k = 1, 2, \dots, m$, тобто при $k = \infty$ характеристичне рівняння замкненої системи має корені, що збігаються з нулями розімкненої системи, тому нулі розімкненої системи s_{0i} є кінцевими точками кореневого годографа;

– інші $n - m$ зв'язки кореневого годографа при $k = \infty$ отримують значення нескінченності вздовж асимптот;

– центр асимптот знаходиться на дійсній осі внаслідок симетричності зв'язків (рисунок 10.4). Координати центра асимптот визначають за формулою

$$a^* = \frac{\sum_{j=1}^n s_j - \sum_{i=1}^m s_{0i}}{n - m};$$

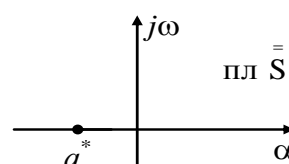


Рисунок 10.4

– кути, під якими розходяться асимптоти, розраховують

за формулою $\Theta_i = \frac{\pi}{n - m} (2i + 1), i = 0, 1, \dots;$

– будь-яка точка Δ дійсної осі, справа від якої знаходиться некрата кількість нулів та полюсів розімкненої системи, належить кореневому годографу (рисунок 10.5).

Ця властивість виходить з рівняння (10.2). Ділянки дійсної осі, що належить кореневому годографу, виділяємо та розставляємо стрілки від полюсів до нулів;

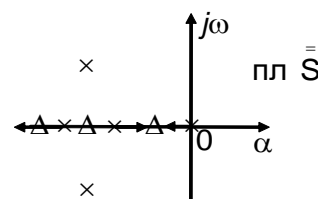


Рисунок 10.5

– при деякому значенні параметра k полюси можуть збігатися. Виникає кратна точка. Координати точок одержують з рівняння (10.2), записаного для тангенсів кутів (рисунок 10.6):

$$\sum_{i=1}^m \frac{\omega}{|\alpha - s_{0i}|} - \sum_{j=1}^n \frac{\omega}{|\alpha - s_j|} = 0 \text{ або } \sum_{i=1}^m \frac{1}{|\alpha - s_{0i}|} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\alpha - s_j|} = 0;$$

– при збільшенні k полюси розходяться із кратної точки під кутами $Q_i = \frac{\pi}{2} (2i + 1), i = 0, 1, \dots;$

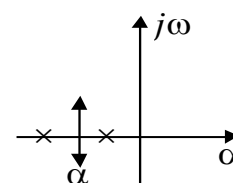


Рисунок 10.6

– кути виходу полюсів із комплексних початкових точок s_j або кути входу зв'язків Q_r в комплексні кінцеві точки s_{0i}

знаходять з виразів, що одержують із рівняння (10.2):

$$Q_l = \sum_{i=1}^m Q_{0i} - \sum_{j=1}^n Q_j - \pi(2i+1); \quad Q_r = \sum_{j=1}^n Q_j - \sum_{i=1}^m Q_{0i} - \pi(2i+1);$$

$j \neq l$ $i \neq r$

– точки перетину зв'язків кореневого годографа з уявною віссю площини s знаходять за одним із критеріїв стійкості;

– заданому розташуванню полюсів замкненої системи на корневому годографі відповідає перехідна характеристика

$$h(t) = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{s_k D'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{b_0 \prod_{i=1}^m |s_k - s_{0i}| e^{j \sum_{i=1}^m Q_{0i}}}{|s_k| e^{j Q_k} a_0 \prod_{j=1}^n |s_k - s_j| e^{j \sum_{j=1}^n Q_j}} e^{s_k t}.$$

10.2 Приклад побудови кореневого годографа

Надано систему з передавальною функцією

$$W(s) = \frac{k(s+3)}{s(s+4)(s^2+2s+2)} = \frac{kB_1(s)}{A(s)};$$

$$\Phi(s) = \frac{k(s+3)}{s(s+4)(s^2+2s+2)+k(s+3)} = \frac{k(s+3)}{s^4+6s^3+10s^2+(8+k)s+3k};$$

$m=1, n=4$. Характеристичний поліном замкненої системи

$$D(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (8+k)s + 3k.$$

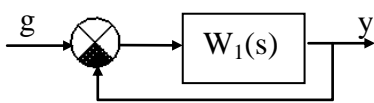


Рисунок 10.7

Характеристичний поліном розімкненої системи $A(s) = s(s+4)(s^2+2s+2)$. Побудувати корневий годограф замкненої системи при зміні параметра k в діапазоні $0 \leq k \leq \infty$ (рисунок 10.7).

Знаходимо початкові та кінцеві точки кореневого годографа та наносимо їх на площину s :

$$B_1(s) = 0 \rightarrow s_{0i} = -3; \quad A(s) = 0 \rightarrow s_1 = 0, s_2 = -4;$$

$$s_3 = -1+j; \quad s_4 = -1-j.$$

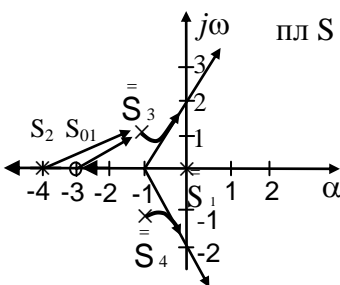


Рисунок 10.8

Відмічаємо ділянки дійсної осі α , що належить корневому годографу (рисунок 10.8). Стрілки спрямовуємо від полюсів i до нуля. Знаходимо координату центра зірки асимптот

$$a^* = \frac{\sum_{j=1}^n s_j - \sum_{i=1}^m s_{0i}}{n-m} = \frac{0 + (-4) + (-1+j) + (-1-j) - (-3)}{4-1} = -1.$$

Із центра розходяться $n-m=3$ асимптоти під кутами $\Theta_i^* = \frac{\pi}{n-m}(2i+1), i=0,1,\dots$, при $i=0 \quad \Theta_0^* = \frac{\pi}{3}$, при $i=1 \quad \Theta_1^* = \pi$, при $i=2 \quad \Theta_2^* = \frac{5\pi}{3}$. При подальшому збільшенні i кути будуть повторюватись. Кути, під якими зв'язки кореневого годографа виходять із комплексних початкових точок s_3 та s_4 , розраховують за формулою

$$\Theta_3 = \sum_{i=1}^m \Theta_{0i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^n \pi = 25^0 - 135^0 - 20^0 - 90^0 + 180^0 = -40^0 \quad \Theta_4 = 40^0.$$

Складаємо матрицю Гурвіца. Знаходимо рівняння коливальної межі стійкості

$$\Delta_{T-1} = \Delta_3 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8+k & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 10 & 3k & \cdot & 0 \\ 0 & 6 & 8+k & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 10 & \cdot & 3k \end{vmatrix}$$

$-3k(6 \cdot 6) + (8+k)(6 \cdot 10 - (8+k)) = 0 \rightarrow k = 5.95$. Підставляємо знайдене k в поліном

$$D(j\omega) = (j\omega)^4 + 6(j\omega)^3 + 10(j\omega)^2 + 13.95j\omega + 17.85 = 0;$$

$$\omega = 1.525; \quad s_3^* = j1.525; \quad s_4^* = -j1.525; \quad s_1^* = -1.87; \quad s_2^* = -4.13.$$

Тема 11 ЧУТЛИВІСТЬ САУ

Чутливість – це властивість системи, що характеризує зміну її виходу, передавальної функції, коефіцієнта передачі, вектора стану, критерія якості під впливом зміни параметрів, характеристик, умов навколишнього середовища.

Зміна параметрів САУ може призвести до втрати стійкості системи та її працездатності.

Розглянемо процес, що описується передавальною функцією $W_{\text{пр}}(s)$.

Зображення виходу в розімкненій системі $Y(s) = W_{\text{пр}}(s) \cdot U(s)$ (рисунок 11.1).

Під впливом зміни умов навколишнього середовища, через старіння елементів у процесі

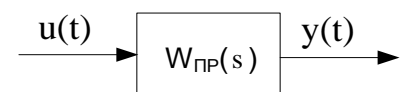


Рисунок 11.1.

функціонування, параметри $W_{np}(s)$ змінюються. Змінюється і передавальна функція. Припустимо вона має значення $W'_{np}(s) = W_{np}(s) + \Delta W(s)$.

Тоді зображення виходу $Y(s) = (W_{np}(s) + \Delta W(s)) \cdot U(s)$.

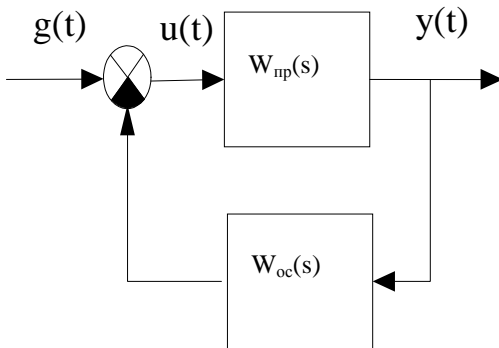


Рисунок 11.2

Знаходимо відхилення зображення виходу

$$\Delta Y(s) = Y'(s) - Y(s) = \Delta W(s) \cdot U(s).$$

Таким чином, зміна параметрів процесу має прямий вплив на зміни виходу.

Замкнемо систему, показану на рисунку 11.2.

При номінальних значеннях параметрів процесу зображення виходу має вигляд

$$Y(s) = \frac{W_{np}(s)}{1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s)} \cdot G(s).$$

А після зміни параметрів процесу отримаємо

$$Y'(s) = \frac{W_{np}(s) + \Delta W(s)}{1 + (W_{np}(s) + \Delta W(s)) \cdot W_{зз}(s)} \cdot G(s).$$

Знайдемо зображення зміни виходу:

$$\begin{aligned} \Delta Y(s) &= Y'(s) - Y(s) = \\ &= \left(\frac{W_{np}(s) + \Delta W(s)}{1 + (W_{np}(s) + \Delta W(s)) \cdot W_{зз}(s)} - \frac{W_{np}(s)}{1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s)} \right) \cdot G(s) = \\ &= \frac{W_{np}(s) + \Delta W(s) + W_{np}^2(s) \cdot W_{зз}(s) + \Delta W(s) \cdot W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s) - W_{np}(s) -}{(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))^2} \times \\ &\quad \times \frac{-\Delta W(s) \cdot W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s)}{(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))^2} \cdot G(s) = \frac{\Delta W(s)}{(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))^2} \cdot G(s) \end{aligned}$$

при $1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s) \gg 1$.

Щоб порівняти якість замкненої та розімкненої систем, знайдемо відносні зміни зображень їхніх виходів.

У разі розімкненої системи
$$\frac{\Delta Y(S)}{Y(S)} = \frac{\Delta W(s) \cdot U(s)}{W_{np}(s) \cdot U(s)} = \frac{\Delta W(s)}{W_{np}(s)}.$$

У разі замкненої системи

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{\Delta W(s) \cdot G(s) \cdot (1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))}{(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))^2 \cdot W_{np}(s) \cdot G(s)} = \frac{\Delta W(s) / W_{np}(s)}{(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))}.$$

Таким чином, відносна зміна зображення виходу в замкненій системі в $(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))$ раз менше, ніж в розімкненій системі. Таким чином, замкнена система менш чутлива до змін параметрів процесу, ніж розімкнена.

Для зменшення чутливості замкненої системи до змін її параметрів потрібно, щоб на всьому діапазоні робочих частот виконувалась умова $(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s)) \gg 1$.

А як же властивість чутливості оцінювати кількісно?

Функцію чутливості V вперше формально визначив в 1945 р. американський дослідник Г. Боде для оцінювання впливу величини опору на величину коефіцієнта підсилювача:

$$V_R^K = \frac{\partial K}{\partial R}.$$

Кількісною оцінкою чутливості САУ може бути функція чутливості, котра є частинною похідною досліджуваного показника якості J за параметром p , що змінюється під впливом навколишнього середовища: $V_p^J = \frac{\partial J}{\partial p}$.

Поряд з функцією чутливості V використовують відносну чутливість S , яку розраховують за формулою

$$S_p^J = \frac{\Delta J/J}{\Delta p/p}.$$

При малих відхиленнях параметра p та при переході до меж отримаємо

$$S_p^J = \frac{\partial J}{\partial p} \frac{p}{J}.$$

Знайдемо чутливість передавальної функції розімкненої системи до змін її параметрів: $S_{W_{np}}^{W_{np}} = \frac{\partial W_{np}(s) \cdot W_{np}(s)}{\partial W_{np}(s) \cdot W_{np}(s)} = 1$.

Таким чином, всі зміни параметрів розімкненої системи безпосередньо позначаються на її виході. Для компенсації відхилень виходу в розімкненій системі необхідно точно знати її параметри (як старі, так і нові).

Тепер знайдемо чутливість передавальної функції замкненої системи

$\Phi(s) = \frac{W_{np}(s)}{1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s)}$ до змін параметрів процесу:

$$\begin{aligned} S_{W_{np}}^\Phi &= \frac{\partial \Phi(s)/\Phi(s)}{\partial W_{np}(s)/W_{np}(s)} = \\ &= \frac{(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s) - W_{зз}(s) \cdot W_{np}(s)) \cdot W_{np}(s) \cdot (1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))}{(1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s))^2 \cdot W_{np}(s)} = \\ &= \frac{1}{1 + W_{np}(s) \cdot W_{зз}(s)}. \end{aligned}$$

З останнього виразу видно, що чутливість замкненої системи $S_{W_{np}}^{\Phi}$ може бути зменшена порівняно з чутливістю розімкненої системи $S_{W_{np}}^{W_{np}}$ збільшенням $W_{np}(s)$, $W_{зз}(s)$ у всьому робочому діапазоні частот. У замкненій системі можна більш-менш точно визначати параметри процесів.

Знайдемо чутливість замкненої системи до зміни передавальної функції елемента зворотного зв'язку: $S_{W_{np}}^{\Phi} = \frac{\partial \Phi(s)/\Phi(s)}{\partial W_{np}(s)/W_{np}(s)} \approx -1$,

тобто зміни в елементі зворотного зв'язку напряму впливають на зміни виходу. Отже, дуже важливо використовувати в зворотному зв'язку такі компоненти, які мало змінюються в процесі роботи.

Якщо передавальну функцію наведено у вигляді дроби $\Phi(s) = \frac{B(s)}{D(s)}$, то її

чутливість до змін параметра p можна розрахувати так:

$$S_{W_{np}}^{\Phi} = \frac{\partial \Phi(s)/\Phi(s)}{\partial W_{np}(s)/W_{np}(s)} = \frac{\partial \ln \Phi(s, p)}{\partial \ln p} = \frac{\partial \ln B(s, p)}{\partial \ln p} - \frac{\partial \ln D(s, p)}{\partial \ln p} = s_p^B - s_p^D.$$

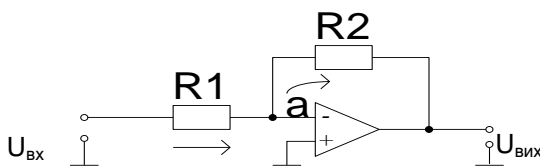


Рисунок 11.3

Приклад.

Розглянемо інвертувальний підсилювач, оснований на ОУ (рисунок 11.3).

Коефіцієнт підсилення ОУ $A \geq 10^4$.

Вхідний струм ОУ є дуже малим через високу вхідну напругу. Саме тому можемо записати рівняння для

інвертувального входу ОУ:

$$\frac{U_{вх} - U_a}{R_1} = \frac{U_a - U_{вих}}{R_2}; \quad U_{вих} = -U_a \cdot A. \text{ Виключаємо з цих рівнянь потенціал}$$

точки а:

$$\frac{U_{вх}}{R_1} + \frac{U_{вих}}{A \cdot R_1} = -\frac{U_{вих}}{A \cdot R_1} - \frac{U}{R_2}.$$

Виразимо вихідний сигнал через вхідний:

$$R_2 \cdot U_{вих} + R_1 \cdot U_{вих} + A \cdot R_1 \cdot U_{вих} = -A \cdot R_2 \cdot U_{вх}$$

$$\text{або } U_{вих} = -\frac{A \cdot R_2}{R_1 + R_2 + A \cdot R_1} \cdot U_{вх} \rightarrow U_{вих} \approx -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_{вх};$$

$$U_{вих} = -\frac{A \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + \frac{A \cdot R_1}{R_1 + R_2}} \cdot U_{вх}; \quad \Phi = -\frac{A \cdot R_2}{R_1 + R_2 + A \cdot R_1}.$$

Структурну схему інвертувального пристрою зображено на рисунку 11.4.

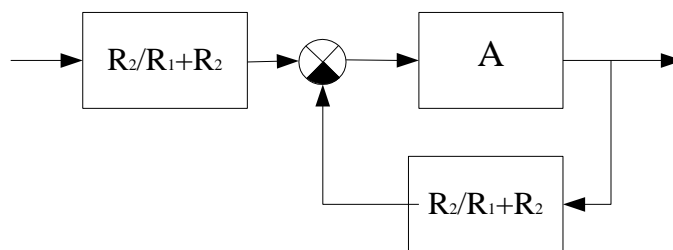


Рисунок 11.4

Знайдемо чутливість цієї схеми за параметром A при $A=10^4$; $R_1=0,1$ Мом; $R_2=1$ м:

$$S_A^\Phi = \frac{\partial \Phi / \Phi}{\partial A / A} = \frac{1}{1 + W_{\text{пр}} \cdot W_{\text{зз}}} = \frac{1}{1 + \frac{A \cdot R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{1 + \frac{10^4 \cdot 10^5}{10^5 + 10^6}} \approx 0,001.$$

Таким чином, інвертувальний підсилювач майже не є чутливим до змін параметра A .

Чутливість цієї схеми до змін елемента зворотного зв'язку R_2 знайдемо за формулою

$$S_{R_2}^\Phi = \frac{\partial \Phi / \Phi}{\partial R_2 / R_2} = \frac{(-A \cdot (R_1 + R_2 + A \cdot R_1) + A \cdot R_2) R_2}{(R_1 + R_2 + A \cdot R_1)^2 \cdot (-A \cdot R_2)} = \frac{R_1 + A \cdot R_2}{R_1 + R_2 + A \cdot R_1} \approx 1,$$

тобто зміна величини опору резистора зворотного зв'язку R_2 напряму впливає на зміну виходу інвертувального підсилювача.

Зараз поняття чутливості застосовують при аналізі, ідентифікації та синтезі САУ. Розглядають чутливість стану виходу, коефіцієнта передачі, критерію якості до змін параметрів, збурень, керувань. Складемо рівняння чутливості стану до зміни параметрів p для системи $\dot{x} = f(x, u, t, p)$.

Введемо функцію чутливості $V_p^x = \frac{\partial x}{\partial p}$. Продиференціюємо рівняння системи

за параметром p : $\frac{\partial dx}{\partial p \cdot \partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}$, або $\dot{V}_p^x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot V + \frac{\partial f}{\partial p}$ – це рівняння

чутливості, з якого знаходимо V . Запишемо це рівняння в скалярній формі.

Рівняння системи має вигляд $\dot{x}_i = f_i(x, u, t, p), i = 1, 2, \dots, n$.

Введемо функцію чутливості для векторного параметра

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_4 \end{bmatrix}, \quad V_{p_k}^{x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial p_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Рівняння чутливості в скалярній формі має вигляд

$$\dot{V}_{p_k}^{x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot V_{p_k}^{x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial p_k}, \quad i=1,2,\dots,n; \quad k=1,2,\dots,m.$$

Ці рівняння є лінійними відносно функції чутливості $V_{p_k}^{x_i}$. Розв'язуючи їх, знаходимо функцію чутливості кожної змінної стану x_i ($i=1,2,\dots,n$) за кожним параметром p_k ($k=1,2,\dots,m$).

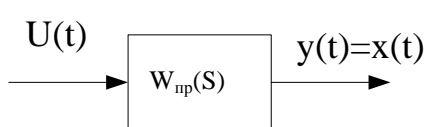
Для лінійних систем

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot U; \quad \dot{V}_p^x = A \cdot V_p^x + \frac{\partial A}{\partial p} x + \frac{\partial B}{\partial p} U$$

або в скалярній формі

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{l=1}^r b_{il} U_l; \quad \dot{V}_{p_k}^{x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} V_{p_k}^{x_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k} x_j + \sum_{l=1}^r \frac{\partial b_{il}}{\partial p_k} U_l.$$

Приклад. Знайти функцію чутливості виходу y до зміни параметрів k та T для об'єкта з передавальною функцією (рисунок 11.5)



$$W(S) = \frac{k}{TS + 1}$$

Рисунок 11.5

Запишемо рівняння «вхід-вихід»

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = kU(t), \quad \text{звідки} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T} y(t) + \frac{k}{T} U(t),$$

$$\text{або} \quad \dot{x} = -\frac{1}{T} x + \frac{k}{T} U; \quad A = -\frac{1}{T}; \quad B = \frac{k}{T}.$$

$$\text{Вводимо дві функції чутливості: } V_k^x = V_k^y = \frac{\partial y}{\partial k} = \frac{\partial x}{\partial k}; \quad V_T^x = V_T^y = \frac{\partial y}{\partial T} = \frac{\partial x}{\partial T}.$$

Диференціюємо рівняння об'єкта за параметром k : $\dot{V}_k^x = -\frac{1}{T} V_k^x + \frac{1}{T} U$. Звідки

$$V_k^x(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) U_0 \quad \text{при} \quad U(t) = U_0.$$

Диференціюємо рівняння об'єкта за параметром T :

$$\dot{V}_T^x = -\frac{1}{T} \cdot V_T^x(t) - \frac{k}{T^2} \cdot U(t) + \frac{1}{T^2} \cdot y(t). \quad \text{Звідки} \quad V_T^x(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot \left(\frac{y}{T} - \frac{k \cdot U}{T} \right).$$

$$\text{Приріст виходу при зміні обох параметрів} \quad \Delta y = V_k^y(t) \cdot \Delta k + V_T^y(t) \cdot \Delta T.$$

Частотні характеристики об'єкта мають вигляд

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}}; \quad \varphi(\omega) = \text{arctg} T \cdot \omega; \quad V_k^A = \frac{\partial A}{\partial k} = \frac{1}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}}; \quad V_k^\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial k} = 0.$$

Функції чутливості цих характеристик за параметром T мають вигляд

$$V_T^A = \frac{\partial A(\omega)}{\partial T} = -\frac{k\omega^2}{(T^2 \cdot \omega^2 + 1)^{3/2}};$$

$$V_T^\varphi = \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial T} = \frac{\omega}{T^2 \cdot \omega^2 + 1};$$

$$\Delta A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}} \cdot \Delta k - \frac{k\omega^2}{(T^2 \cdot \omega^2 + 1)^{3/2}} \cdot \Delta T; \Delta \varphi(\omega) = \frac{\omega}{T^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \Delta T.$$

Тема 12 МЕТОДИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НЕОБХІДНОЇ ТОЧНОСТІ САУ

12.1 Забезпечення необхідного порядку астатизму САУ

Точність системи автоматичного управління визначається її структурою, параметрами та вхідними впливами $g(t)$ та $f(t)$ (рисунок 12.1).

Раніше для систем з одним входом і одним виходом та одиничним зворотним зв'язком були отримані вирази для визначення похибок, що викликані задавальною та збурювальною діями: $\varepsilon_g = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu-r} g_r r!}{s^{\nu} + K}$ та

$$\varepsilon_f = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu-m-r} K_f f_r r!}{s^{\nu} + K}.$$

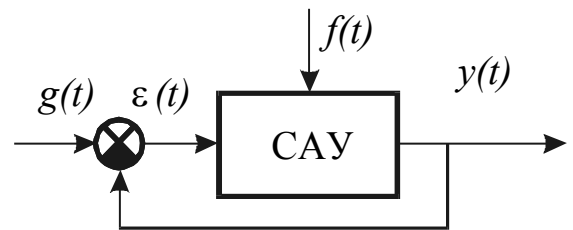


Рисунок 12.1

Із цих формул випливає таке: підвищити точність можна шляхом збільшення порядку астатизму ν , тобто шляхом введення інтегровальних ланок. При цьому інтегровальні ланки слід вводити в систему до точки прикладення збурення $f(t)$, щоб не підвищувати число m – кількість інтегровальних ланок в передавальній функції розімкненої системи на основі задавальної дії. Необхідний порядок астатизму на основі задавальної дії $\nu_{\text{треб}}$ визначають за допустимими похибками – статичною $\varepsilon_{\text{ст}}$ та швидкісною $\varepsilon_{\text{шв}}$:

- якщо $\varepsilon_{\text{ст. доп}} \neq 0$, то $\nu_{\text{необ}} = 0$;
- якщо $\varepsilon_{\text{ст. доп}} = 0$; $\varepsilon_{\text{шв. доп}} \neq 0$, то $\nu_{\text{необ}} = 1$;
- якщо $\varepsilon_{\text{ст. доп}} = \varepsilon_{\text{шв. доп}} = 0$, то $\nu_{\text{необ}} = 2$.

Припустимо, що порядок астатизму ν дорівнював нулю, тобто в системі не було ні однієї інтегровальної ланки. Коефіцієнт передачі K не змінюємо, $\nu_{\text{необ}} = 1$. Вводимо інтегровальну ланку $1/s$: $\nu = 1$. ЛФЧХ піднімається на $-\pi/2$. Нахили ЛАЧХ збільшуються на -20 дБ/дек . Полоса пропускання та $\omega_{\text{зр}}$

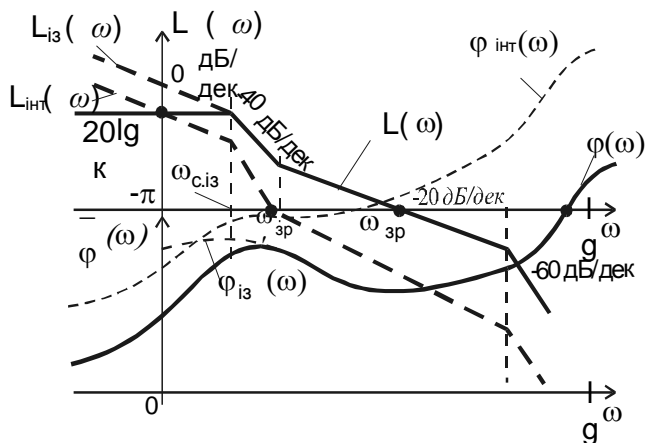


Рисунок 12.2

зменшуються. Вісь частот перетинається ЛАЧХ під нахилом $-60 \dots -40 \text{ дБ/дек}$. Процес стає коливальним. Час перехідного процесу збільшується. Погіршуються показники якості $\sigma, t_{\text{ПП}}, \gamma, L, M$. Система може стати нестійкою (рисунок 12.2).

Більш відповідним способом підвищення порядку астатизму є введення ізодромної ланки

$$W_K(s) = k_{\text{із}} \frac{T_{\text{із}} s + 1}{s}$$

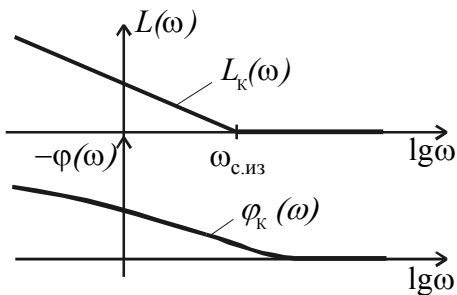


Рисунок 12.3

Ця ланка змінює ЛАЧХ та ЛФЧХ системи на низьких частотах і не вносить змін на середніх та високих частотах, що дозволяє підвищувати точність САУ в сталому режимі без погіршення показників якості процесу регулювання в перехідному режимі (рисунок 12.3).

Для усунення швидкісної похибки в систему вводять ще одну ізодромну ланку.

12.2 Вибір необхідного коефіцієнта передачі розімкненої системи

Найпростішим способом підвищення точності САУ є збільшення коефіцієнта передачі k розімкненої системи. Як впливає з формули для визначення похибки ε_f , коефіцієнт передачі слід збільшувати в тих блоках, які розташовано перед точкою прикладення збурення $f(t)$. Інакше буде збільшуватись не тільки k , але і k_f . Таким чином, підвищення точності буде відсутнім.

Необхідне значення $k_{\text{тр}}$ знаходиться з умов $\varepsilon_g \leq \varepsilon_{g\text{доп}}$ та $\varepsilon_f \leq \varepsilon_{f\text{доп}}$. Із отриманих двох значень $k_{\text{тр}}$ вибирають більше.

При збільшенні k ЛАЧХ розімкненої системи піднімається. При цьому збільшується $\omega_{\text{ср}}$, розширяється смуга пропускання, швидкодія системи збільшується, але це приводить до збільшення σ, M та до зменшення γ_K, L_K . Система може стати нестійкою. Необхідно вводити корегувальні пристрої, що забезпечуються заданими показниками якості σ, M, γ_3, L_3 .

12.3 Масштабування задавального впливу та сигналу зворотного зв'язку

12.3.1 Масштабування задавального впливу

Вводимо корегувальну ланку W_K для масштабування задавального впливу (рисунок 12.4). В цьому випадку сигнал на вході порівняльного пристрою вже не дорівнює похибці ε : $z = g_1 - y \neq \varepsilon$; $E(s) = G(s) - Y(s)$.

Знайдемо передавальну функцію корегувального пристрою $W_K(s)$, що забезпечує підвищення точності САУ:

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = 1 - \Phi(s);$$

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = 1 - \frac{W_K(s)W(s)}{1 + W(s)} = \frac{1 + W(s) - W_K(s)W(s)}{1 + W(s)}$$

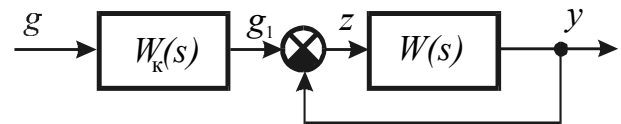


Рисунок 12.4

Якщо вибрати $W_K(s) = \frac{1 + W(s)}{W(s)} = 1 + \frac{1}{W(s)}$, то $\Phi_{\varepsilon}(s) = 0$ і похибка ε в системі буде відсутньою при будь-якому задавальному впливі. Такі системи, для котрих $\Phi_{\varepsilon}(s) = 0$, називають абсолютно інваріантними за задавальним впливом.

Однак передавальну функцію $1 + \frac{1}{W(s)}$ не завжди можна реалізувати. Так, якщо

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m < n,$$

то порядок чисельника передавальної функції $W_K(s)$ буде більше порядку її знаменника, що не реалізується. В цьому випадку передавальну функцію $W_K(s)$ реалізують наближено:

$$W_K(s) \approx 1 + \frac{1}{W(s)},$$

так, щоб порядок чисельника не був вище порядку знаменника. В цьому випадку вважають, що система інваріантна до ε , тобто з деякою похибкою. В найпростішому випадку вибирають

$$W_K(s) = 1 + \frac{1}{K}.$$

Тоді стала похибка ε при постійній дії $g = const$ буде відсутньою: $\varepsilon_{cm} = 0$. Система стає астатичною без введення інтегрувальної ланки.

12.3.2 Масштабування сигналу зворотного зв'язку

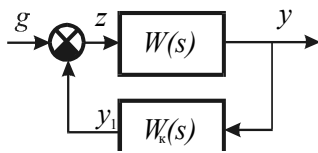


Рисунок 12.5

Вводимо корегувальну ланку $W_k(s)$ в коло зворотного зв'язку (рисунок 12.5). В цьому випадку на вході порівнювального пристрою не дорівнює похибці ε : $z = g - y_1 \neq \varepsilon$.

Знайдемо передавальну функцію системи за похибкою

$$E(s) = G(s) - Y(s);$$

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = 1 - \Phi(s) = 1 - \frac{W(s)}{1 + W(s)W_k(s)} = \frac{1 + W(s)W_k(s) - W(s)}{1 + W(s)W_k(s)}.$$

Якщо вибрати

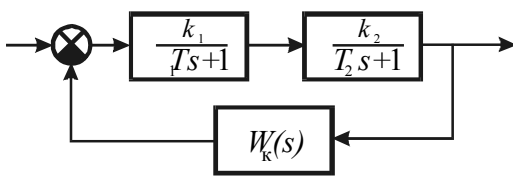


Рисунок 12.6

$$W_k(s) = \frac{-1 + W(s)}{W(s)} = 1 - \frac{1}{W(s)}, \text{ то } \Phi_\varepsilon(s) = 0.$$

Система буде абсолютно інваріантною на основі задавальної дії. Такий корегувальний пристрій можна реалізувати при $m = n$ та неможливо реалізувати при $m < n$.

Передавальну функцію можна реалізувати з

точністю до ε :

$$W_k(s) \approx 1 - \frac{1}{W(s)}.$$

У найпростішому випадку вибирають $W_k(s) = 1 - \frac{1}{K}$ для усунення статичної похибки $\varepsilon_{ст}$.

Приклад. Ввести в САУ, структура якої показана на рисунку 12.6, таку корегувальну ланку $W_k(s)$, щоб статична та швидкісна похибки в системі були відсутніми, тобто $\varepsilon_{ст} = 0$ та $\varepsilon_{шв} = 0$. Це рівнозначно вимозі забезпечити порядок астатизму $\nu = 2$ без введення інтегровальних ланок.

Запишемо передавальну функцію системи за похибкою

$$\Phi_\varepsilon(s) = 1 - \Phi(s) = 1 - \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_k(s)}.$$

Виберемо $W_k(s) = \frac{k_k}{T_k s + 1}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(s) &= 1 - \frac{k_1 k_2 (T_k s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_k s + 1) + k_1 k_2 k_k} = \\ &= \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_k s + 1) - k_1 k_2 (T_k s + 1) + k_1 k_2 k_k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_k s + 1) + k_1 k_2 k_k} \end{aligned}$$

Абсолютно інваріантна система в цьому випадку не реалізується, оскільки $m < n$, $m = 0$ і $n = 2$.

Для забезпечення $\varepsilon_{cm} = 0$ слід домогтися рівності $c_n = 0$ в передавальній функції:

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1} s + c_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Вибираємо $k_K = 1 - \frac{1}{k_1 k_2}$.

Для забезпечення $\varepsilon_{шв} = 0$ домагаємося рівності $c_{n-1} = 0$, тому вибираємо T_K з умови $c_{n-1} = T_1 + T_2 + T_K - k_1 k_2 T_K = 0$, звідки отримуємо $T_K = \frac{T_1 + T_2}{k_1 k_2 - 1}$.

12.3.3 Масштабування задавальної дії та сигналу зворотного зв'язку

Вводимо два корегувальні пристрої $W_{K1}(s)$ и $W_{K2}(s)$

Знайдемо передавальну функцію системи (рисунок 12.7) за похибкою

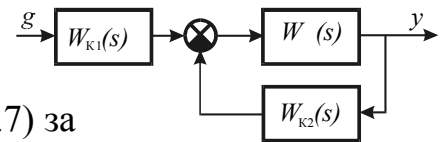


Рисунок 12.7

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = 1 - \Phi(s) = 1 - \frac{W_{K1}(s)W(s)}{1 + W(s)W_{K2}(s)} = \frac{1 + W(s)W_{K2}(s) - W_{K1}(s)W(s)}{1 + W(s)W_{K2}(s)}.$$

Якщо вибрати корегувальні пристрої $W_{K1}(s)$ та $W_{K2}(s)$, що задовольняють рівність

$$W_{K2}(s) = \frac{W(s)W_{K1}(s) - 1}{W(s)} = W_{K1}(s) - \frac{1}{W(s)},$$

то система буде абсолютно інваріантною на основі задавальної дії. Для усунення статичної похибки вибирають

$$k_{K2} = k_{K1} - \frac{1}{k}.$$

12.4 Комбіноване управління

12.4.1 Комбіноване управління на основі задавальної дії

Вводимо корегувальний пристрій $W_K(s)$ для забезпечення управління і за відхиленням, і на основі задавальної дії, тобто $u = u(\varepsilon, g)$ (рисунок 12.8).

Знайдемо передавальну функцію системи за

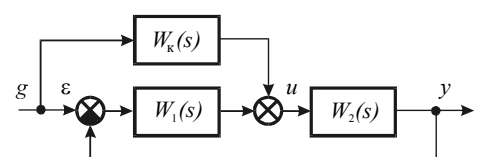


Рисунок 12.8

похибкою ε

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{1 - W_K(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

Якщо вибрати $W_K(s) = \frac{1}{W_2(s)}$, то система буде абсолютно інваріантною на основі задавальної дії. В найпростішому випадку вибирають $k_K = \frac{1}{k_2}$ для забезпечення $\varepsilon_{ст} = 0$.

12.4.2 Комбіноване управління на основі збурювальної дії

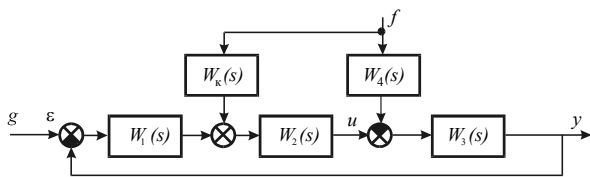


Рисунок 12.9

Для того, щоб система була абсолютно інваріантною на основі збурювальної дії, необхідно забезпечити $\Phi_f(s) = 0$.

Знайдемо передавальну функцію системи за збуренням.

Вводимо корегувальну ланку $W_K(s)$ для забезпечення залежності $u = u(\varepsilon, g)$ (рисунок 12.9):

$$\Phi_{f_{\text{інв}}}^f(s) = \frac{-W_4(s)W_3(s) + W_K(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)} = 0.$$

Звідси одержуємо

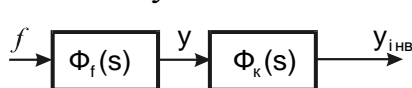
$$W_K(s) = \frac{W_4(s)}{W_2(s)}.$$

Якщо цю рівність реалізувати неможливо або складно, тоді вибирають $k_K = \frac{k_4}{k_2}$ для забезпечення $\varepsilon_{fст} = 0$.

Оцінимо похибку в системі ε_f , якщо $W_K(s) \neq \frac{W_4(s)}{W_2(s)}$;

$$\begin{aligned} \Phi_{f_{\text{інв}}}^f(s) &= \frac{-W_4(s)W_3(s) + W_K(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)} = \\ &= -\frac{W_4(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)} \left[1 - \frac{W_K(s)W_2(s)}{W_4(s)} \right] = \Phi_f(s)\Phi_K(s), \end{aligned}$$

тобто систему можна навести у вигляді



Позначимо $L^{-1}\{\Phi_f(s)\} = \phi_f(t)$.

Тоді $y_{\text{ІНВ}}(s) = \Phi_f(s)\Phi_K(s)F(s) = \Phi_K(s)y(s)$.

Перейдемо до оригіналів:

$$y_{\text{ІНВ}}(t) = \int_0^t \varphi_K(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_0^t \left[y(t) + \dot{y}\tau + \frac{1}{2!} \ddot{y}\tau^2 + \dots + \frac{1}{r!} y^{(r)}\tau^r + R \right] \varphi_K(\tau) d\tau.$$

Введемо коефіцієнти $c_i = \frac{1}{i!} \int_0^t \tau^i \varphi_K(\tau) d\tau$.

З урахуванням цих позначень отримаємо $y_{\text{ІНВ}}(t) = \sum_{i=0}^r c_i y^{(i)} + \int_0^t R \varphi_K(\tau) d\tau$.

Якщо всі $c_i = 0, i = 0, 1, 2, \dots$, то $y_{\text{ІНВ}}(t) = 0$ і система буде абсолютно інваріантною на основі збурювальної дії.

Якщо не всі $c_i = 0$, то система інваріантна до ε .

При $c_0 = 0$ $\varepsilon_{fcm} = 0$.

При $c_0 = c_1 = 0$ $\varepsilon_{fcc} = 0$.

Збільшення порядку астатизму шляхом введення комбінованого управління зручно тим, що цей спосіб не змінює полюсів початкової системи, а тільки додає полюси корегувального пристрою. Тому введення стійкого корегувального пристрою зберігає стійкість початкової системи.

Тема 13 КОРЕКЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

13.1 Корегувальні пристрої

13.1.1 Види корегувальних пристроїв

Для забезпечення стійкості САУ та необхідних показників якості в системі вводять корегувальні пристрої (*correctus* – лат., виправлений) (рисунок 13.1).

За місцем ввімкнення корегувальні пристрої бувають таких видів:

- послідовні (КП1);
- паралельні (правильніше називати їх зустрічно-паралельними, КП2);
- прямі паралельні (КП3).

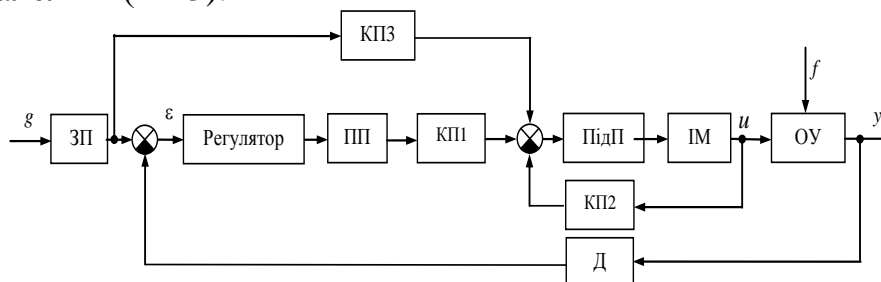


Рисунок 13.1

Послідовний КП1 розташовують після порівняльного пристрою або після попереднього підсилювача.

Паралельні КП2 охоплюють зворотним зв'язком ПідП та/або ВМ. При цьому

$$W_e(s) = \frac{W_{\text{ПідП}}(s)W_{\text{ІМ}}(s)}{1 + W_{\text{ПідП}}(s)W_{\text{ІМ}}(s)W_{\text{КП2}}(s)} \approx \frac{1}{W_{\text{КП2}}(s)}$$

За виглядом рівнянь, що їх описують, корегувальні пристрої поділяють на лінійні й нелінійні.

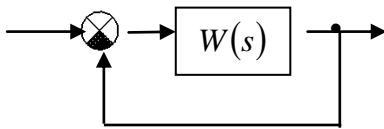


Рисунок 13.2

За наявністю додаткового джерела енергії – пасивні й активні.

За характером процесів – неперервні й дискретні.

За родом струму – постійного струму й змінного струму.

Найбільше поширення отримали активні лінійні послідовні та паралельні неперервні постійного струму

корегувальні пристрої (рисунок 13.2) $W(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$.

13.1.2 Стабілізація та демпфування САУ шляхом введення випередження за фазою

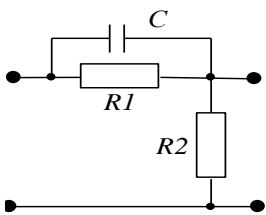


Рисунок 13.3

Розглянемо систему, що показана на рисунку 13.3. Для неї

$$\varepsilon_{\text{ст}} = 0, \varepsilon_{\text{шв}} = V/k_v.$$

Для зменшення швидкісної похибки $\varepsilon_{\text{шв}}$ необхідно збільшити значення добротності системи за швидкістю $D_v = k_v$.

При цьому АФЧХ розшириться і може охопити точку $(-1, j0)$.

Система може стати нестійкою. Забезпечити стійкість при необхідному значенні k можна шляхом введення корегувальної

ланки з випередженням за фазою, наприклад, пропорційно-диференційованої ланки, яку показано на рисунку 13.4.

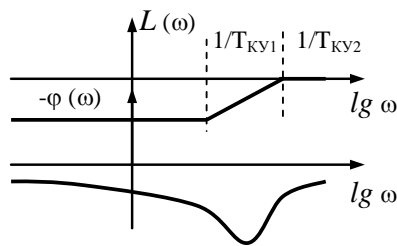


Рисунок 13.4

Передавальну функцію такої схеми визначають за формулою:

$$W_{\text{КП}}(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_2}{(R_1 \cdot 1/Cs)/(R_1 + 1/Cs) + R_2} = \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_1 + R_2(R_1Cs + 1)} = \frac{k_{\text{КУ}}(T_{\text{КУ}2}s + 1)}{T_{\text{КУ}2}s + 1},$$

$$\text{де } k_{\text{КП}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; T_{\text{КП1}} = R_1C; T_{\text{КП2}} = \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2}; T_{\text{КП1}} > T_{\text{КП2}}.$$

Система стає стійкою. При цьому збільшується $\omega_{\text{зр}}$, підвищується швидкодія, але погіршується перешкодозахищеність.

13.1.3 Стабілізація та демпфування САУ шляхом видалення середніх частот

Добитися стійкості можна і за допомогою пропорційно-інтегродиференційованої ланки:

$$W_{КИ}(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$$

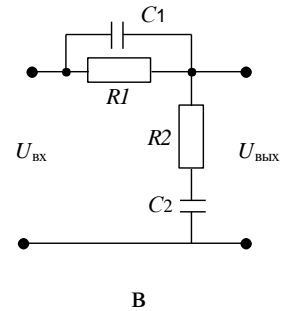
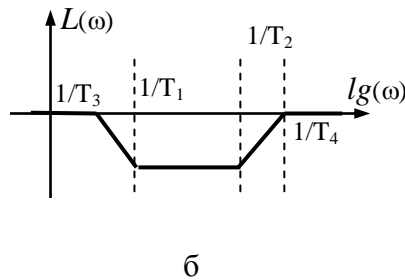
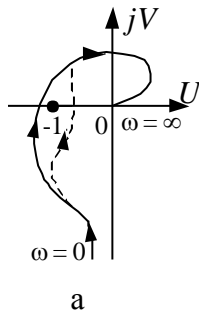


Рисунок 13.5

Нехай $T_3 > T_1 > T_2 > T_4$.

Ця ланка заглушує середні частоти, забезпечуючи «неохоплення» АФЧХ точки $(-1, j0)$ (рисунок 13.5).

13.1.4 Підвищення швидкодії САУ шляхом охоплення зворотним зв'язком інерційних елементів

Розглянемо аперіодичну (інерційну) ланку $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$

Охопимо її від'ємним зворотним зв'язком за допомогою пропорційної ланки (рисунок 13.6). Після корекції отримаємо

$$W_{СК}(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)k_{33}} = \frac{k}{Ts + 1 + k_{33}k}$$

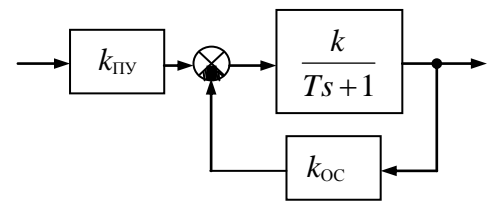


Рисунок 13.6

Наведемо передавальну функцію $W_{СК}(s)$ скорегованої ланки в стандартній формі:

$$W_{СК}(s) = \frac{k_{СК}}{T_{СК}s + 1}; \quad k_{СК} = \frac{k}{1 + k_{33}k}; \quad T_{СК} = \frac{T}{1 + k_{33}k}$$

При такій корекції характер ланки не змінився. Вона залишилась аперіодичною, але постійна часу зменшилась: $T_{СК} < T$. При введенні від'ємного зворотного зв'язку швидкодія збільшується. Зменшення коефіцієнта передачі за необхідності компенсують збільшенням коефіцієнта підсилення попереднього підсилювача: $k_{ПП} = 1 + k_{33}k$ (компенсує знаменник $k_{СК}$) (рисунок 13.7).

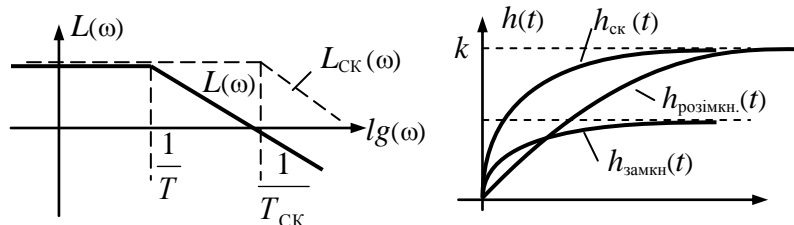


Рисунок 13.7

Збільшення швидкодії ланки досягається за рахунок збільшення коефіцієнта підсилення або збільшення вхідної дії. Охоплення аперіодичної ланки жорстким зворотним зв'язком є еквівалентним введенню послідовної пропорційно-диференційованої ланки. За допомогою зворотних зв'язків можна не тільки змінювати параметри, але й змінювати характер ланки. Наприклад, інтегральну ланку можна перетворити в аперіодичну.

13.2 Синтез послідовних корегувальних пристроїв за допомогою ЛАЧХ

При проектуванні САУ частина системи зазвичай є заданою. Це – об'єкт управління, підсилювач потужності, виконавчий механізм, датчики. До системи ставлять вимоги у вигляді набору показників якості $\epsilon_{\text{СТ}}$, $\epsilon_{\text{ШВ}}$, σ , M , γ_z , L_z , $t_{\text{шп}}$ і т.д. Необхідно визначити, який корегувальний пристрій слід ввести в систему для забезпечення виконання поставлених вимог до якості управління. Існує декілька методів вирішення цієї задачі.

Розглянемо метод синтезу послідовних корегувальних пристроїв за допомогою ЛАЧХ розімкненої системи.

1. На основі заданих значень $\epsilon_{\text{СТ}}$, $\epsilon_{\text{ШВ}}$, $\epsilon_{\text{Гарм}}$, що характеризують точність системи в сталому режимі, визначають порядок астатизму системи $\nu_{\text{тр}}$ та необхідне значення коефіцієнта передачі розімкненої системи $k_{\text{необ}}$. Необхідний порядок астатизму на основі задавальної дії $\nu_{\text{необ}}$ забезпечується введенням інтегральних ланок в $W(s)$. Необхідний порядок астатизму за збуренням (що дорівнює $\nu-m$) забезпечується введенням інтегральних ланок до точки прикладення збурювальної дії. Необхідний коефіцієнт $k_{\text{необ}}$ забезпечується попереднім підсилювачем, який розташовано до точки прикладення збурення. Якщо задана вхідна дія $g(t) = a \sin \omega_k t$ та $\epsilon_{\text{Гарм}}$, то контрольна точка L' розміщена на ЛАЧХ розімкненої системи. Систему з необхідним порядком астатизму та необхідним коефіцієнтом передачі називають **заданою**: $W_{\text{зад}}(s) = \frac{k_{\text{необ}}(\dots)}{s^{\nu_{\text{необ}}(\dots)}}$.

2. За передавальною функцією $W_{\text{зад}}(s)$ будують асимптотичну ЛАЧХ заданої системи $L_{\text{зад}}(\omega)$. Вона має проходити вище контрольної точки (рисунки 13.8, 13.9).

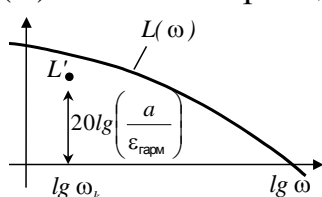


Рисунок 13.8

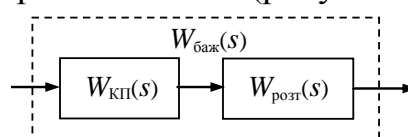


Рисунок 13.9

3. За вимогами σ , $t_{\text{пп}}$, M , ..., що визначають якість перехідного процесу, будують середньочастотну ділянку бажаної ЛАЧХ. Низькочастотну ділянку бажаної ЛАЧХ поєднують з низькочастотною ділянкою заданої ЛАЧХ. Високочастотна ділянка ЛАЧХ знаходиться значно нижче осі $lg\omega$. Коефіцієнт передачі на високих частотах є незначним. З цього визначаємо, що сигнал через систему не проходить. Саме тому форма ЛАЧХ на високих частотах не впливає на показники якості САУ. Проводять високочастотну ділянку бажаної ЛАЧХ, поєднуючи її з $L_{\text{зад}}(\omega)$, або паралельно $L_{\text{зад}}(\omega)$ з метою спрощення необхідної корегувальної ланки.

4. Знаходять ЛАЧХ послідовного корегувального пристрою шляхом віднімання ЛАЧХ заданої системи та ЛАЧХ бажаної системи. На основі $L_{\text{КП}}(\omega)$ записують передавальну функцію $W_{\text{КП}}(s)$:

$$W_B(s) = W_{\text{КП}}(s)W_{\text{зад}}(s); W_{\text{КП}}(s) = \frac{W_B(s)}{W_{\text{зад}}(s)}; L_{\text{КП}}(\omega) = L_B(\omega) - L_{\text{зад}}(\omega).$$

5. За таблицями корегувальних ланок знаходять схему корегувального пристрою, що має бажану ЛАЧХ $L_{\text{КП}}(\omega)$. Розраховують параметри резисторів та конденсаторів, що забезпечують необхідні постійні часу.

6. Будують перехідні характеристики скорегованої замкненої системи та перевіряють, чи задовольняють вони задані вимоги. Якщо ні, то з'ясовують, який саме показник не задовольняється і уточнюють корегувальну ланку.

Приклад. Дано $W(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$; $k = 50$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 0.05$, $\epsilon_{\text{СТ}} = 0$, $\epsilon_{\text{шв}} \leq 0.01$

при $g = Vt$, $V = 1$; $\epsilon_1 \leq 0.02$ при $g(t) = a \sin(\omega_1 t)$, $a = 0.04$, $\omega_1 = 5$, $\sigma \leq 30\%$, $t_{\text{пп}} \leq 1$.

Знайти схему та параметри послідовного корегувального пристрою, що забезпечує задані показники якості.

Розв'язання

Для забезпечення заданої точності у сталому режимі необхідно мати одну інтегрувальну ланку $\nu_{\text{необ}} = 1$.

Величину $k_{\text{необ}}$ розраховують за співвідношенням

$$\epsilon_{\text{шв}} = \frac{V}{k} \leq \epsilon_{\text{шв.доп}}, \quad k_{\text{необ}} \geq \frac{V}{\epsilon_{\text{шв.доп}}} = \frac{1}{0.01} = 100.$$

Вводимо попередній підсилювач з $K_{\text{ПП}}=2$, оскільки $\frac{k_{\text{необ}}}{k} = \frac{100}{50} = 2$.

$$\text{Отримуємо } W_{\text{зад}}(s) = \frac{k_{\text{необ}}}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

Будуємо асимптотичну ЛАЧХ заданої системи.

Будуємо бажану ЛАЧХ. Перевіряємо $L_B(\omega_1) \geq 20 \lg \frac{a}{\epsilon_1}$, якщо ця умова не виконується, то збільшуємо величину $L_{\text{баз}}(\omega)$.

Віднімаємо $L_{\text{зад}}(\omega)$ із $L_{\text{баж}}(\omega)$ (рисунки 13.10 і 13.11).

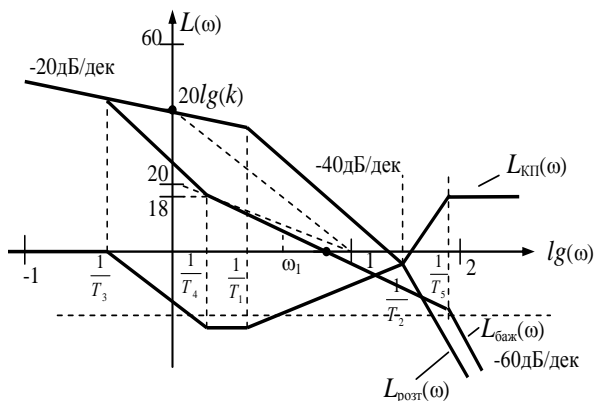
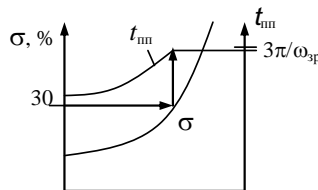
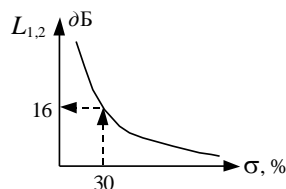


Рисунок 13.10



$$\omega_{\text{зр}} \geq \frac{2.8\pi}{t_{\text{nn}}} \approx 9.$$



$$L_1 = 20 \lg \frac{M}{M-1};$$

$$L_2 = 20 \lg \frac{M}{M+1}.$$

Рисунок 13.11

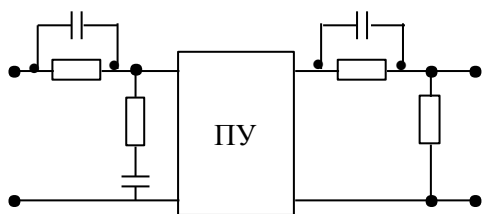


Рисунок 13.12

Знаходимо $W_{\text{КП}}(s) = \frac{(T_4s+1)(T_1s+1)(T_2s+1)}{(T_3s+1)(T_5s+1)^2}$.

Знаходимо ЛАЧХ корегувального пристрою. Схеми такого пристрою в таблиці немає. Складаємо її з двох ланок. З'єднуємо їх послідовно через попередній підсилювач (рисунок 13.12).

Тема 14 СИНТЕЗ СИСТЕМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

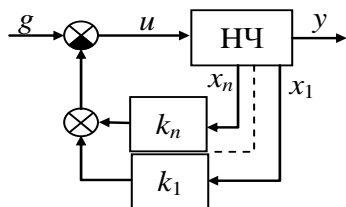


Рисунок 14.1

14.1 Стандартні форми характеристичного полінома САУ

Одним із методів проектування САУ є метод модального управління. Суть методу полягає в тому, що регулятор виконується у вигляді набору пропорційних зв'язків за кожною змінною стану. Коефіцієнти цих зв'язків вибирають так, щоб полюси замкненої системи були розташовані деяким бажаним способом. Структурну схему такої системи показано на рисунку 14.1 (НЧ – незмінна частина). Мода – це складова системи, що визначається окремим полюсом.

При цьому характеристичне рівняння синтезованої системи буде мати відомі коефіцієнти. Наприклад,

$$D_B(s) = a_0 s^n + a_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + a_n \omega_0^n = \sum_{i=0}^n a_i \omega_0^i s^{n-i},$$

де ω_0 є параметром, що визначає реальний час перехідного процесу: чим більше ω_0 , тим швидше протікають процеси.

Існують різноманітні підходи до вибору бажаного розташування коренів характеристичного рівняння замкненої системи. Якщо вибрати дійсні та однакові корені, що дорівнюють $(-\omega_0)$, то характеристичне рівняння перетворюється в біном Ньютона:

$$D(s) = (s + \omega_0)^n = \sum_{i=0}^n \alpha_i \omega_0^i s^{n-i}, \alpha_i = c_n^i, i = \overline{0, n}.$$

Біноміальні коефіцієнти розраховують за формулою $c_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, рівнянням вчасності $\alpha_0 = \alpha_n = 1$.

Стандартні форми такого типу називають біноміальними.

У цьому випадку передавальна функція замкненої системи має вигляд

$$\Phi(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{A(s)}{D_B(s)}.$$

Для відносного часу $\tau = \omega_0 t$ перехідні характеристики таких систем показано на рисунку 14.2.

Алгоритм визначення бажаної передавальної функції:

1. Визначаємо порядок системи n .
2. Для цього n знаходимо тривалість перехідного процесу у відносному часі ($\tau_{ПП}$).
3. Розраховуємо $\omega_0 \geq \frac{\tau_{ПП}}{t_{ПП \text{ доп}}}$.
4. Знаходимо $\alpha_i, D_B(s), \Phi(s)$.

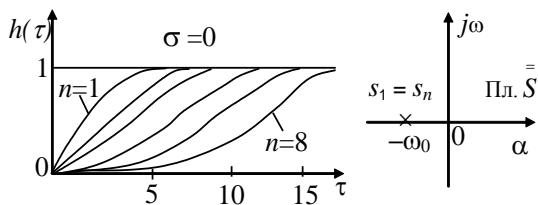


Рисунок 14.2.

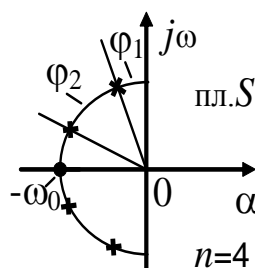


Рисунок 14.3

Інше розташування полюсів, запропоноване Баттервортом, показано на рисунку 14.3. Полюса розташовані на півокружності радіуса ω_0 в лівій півплощині \bar{S} . Кут між уявною віссю та променем, що проходить через найближчий до неї корінь φ_1 , дорівнює половині кута між сусідніми променями φ_2 : $\varphi_1 = \varphi_2/2$.

Коефіцієнти стандартних форм, що задають розташування полюсів Баттерворта, і коефіцієнти біноміальної форми наведено в таблицях 14.1 і 14.2. У наш час розроблено багато інших стандартних форм розподілення полюсів (рисунку 14.4).

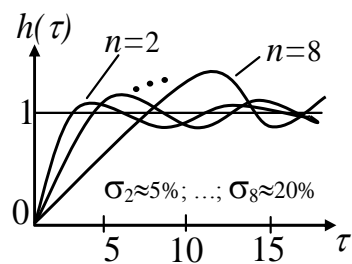


Рисунок 14.4

Таблиця 14.1

Порядок системи n	Коефіцієнти форми Баттерворта								
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1	-	-	-	-	-	-	-
2	1	1.4	1	-	-	-	-	-	-
3	1	2	2	1	-	-	-	-	-
4	1	2.6	3.4	2.6	1	-	-	-	-
5	1	3.24	5.24	5.24	3.24	1	-	-	-
6	1	3.86	7.46	9.13	7.46	3.86	1	-	-
7	1	4.5	10.1	14.6	14.6	10.1	4.5	1	-
8	1	5.18	13.14	21.84	25.69	21.84	13.14	5.18	1

Таблиця 14.2

Порядок системи n	Коефіцієнти біноміальної форми								
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1	-	-	-	-	-	-	-
2	1	2	1	-	-	-	-	-	-
3	1	3	3	1	-	-	-	-	-
4	1	4	6	4	1	-	-	-	-
5	1	5	10	10	5	1	-	-	-
6	1	6	15	20	15	6	1	-	-
7	1	7	21	35	35	21	7	1	-
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

14.2 Модальне управління при доступному для виміру вектора стану

Всі змінні стану є доступними для вимірювання. Необхідно перемістити всі n полюсів у задані точки.

Дано незмінну частину, що описується системою
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases},$$

$[g] = [u] = r; [x] = n; [y] = m$ (рисунок 14.5).

Тоді $D(s) = \det[sI - A] = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

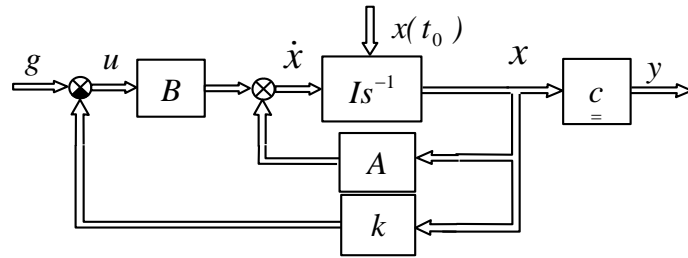


Рисунок 14.5

Після замикання $u = -kx + g$. Бажаний характеристичний поліном визначається бажаним розташуванням коренів: $D_B(s) = s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \dots + \gamma_n$ – заданий (одна із стандартних форм).

Знайти k , що забезпечить необхідні коефіцієнти характеристичного полінома. Якщо $r = 1$, задача має один розв’язок.

Якщо $r > 1$, задача має декілька розв’язків.

Наведемо початкову замкнену систему в формі керуючого канонічного подання:

$$\dot{x} = Ax - Bkx + Bg = (A - Bk)x + Bg = A_3 x + Bg, \text{ де } A_3 = A - Bk.$$

$$D_B(s) = D_3(s) = \det(sI - A + Bk) = \det(sI - A_3).$$

$$A_3 = A - Bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \times [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & \dots & -a_1 - k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -\gamma_n & -\gamma_{n-1} & \dots & -\gamma_1 \end{bmatrix} = A_B.$$

Звідки $-a_n - k_1 = -\gamma_n, \dots, -a_1 - k_n = -\gamma_1$; $k_1 = \gamma_n - a_n, \dots, k_n = \gamma_1 - a_1$

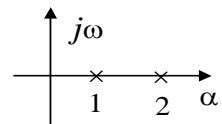
або $k_i = \gamma_{n-i+1} - a_{n-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Приклад.

Дано

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + u, \end{cases} \quad \text{Визначаємо } a_1 = -3; a_2 = 2;$$

$$D(s) = s^2 - 3s + 2; \quad \text{полюси: } s_1 = 1, s_2 = 2.$$



Розташування полюсів НЧ не є задовільним.

Знайти: k_1, k_2 , що забезпечують полюса замкненої системи: $\lambda_1 = -3$ та $\lambda_2 = -1$ (рисунок 14.6).

Визначаємо бажаний характеристичний поліном

$$D_B(s) = D_3(s) = (s - (-3))(s - (-1)) = s^2 + 4s + 3.$$

Його коефіцієнти $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 3$.

Розраховуємо коефіцієнти регулятора:

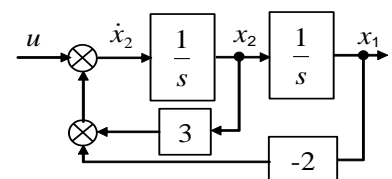


Рисунок 14.6

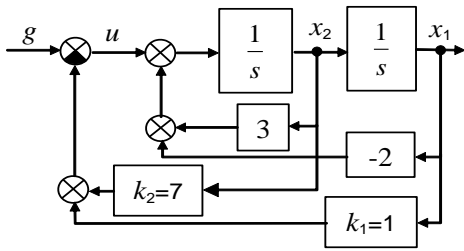


Рисунок 14.7

$k_1 = \gamma_2 - a_2 = 3 - 2 = 1$, $k_2 = \gamma_1 - a_1 = 4 - (-3) = 7$.
 На рисунку 14.7 показано систему, що забезпечує необхідне розташування полюсів системи.

14.3 Модальне управління при не повністю вимірювальному векторі стану

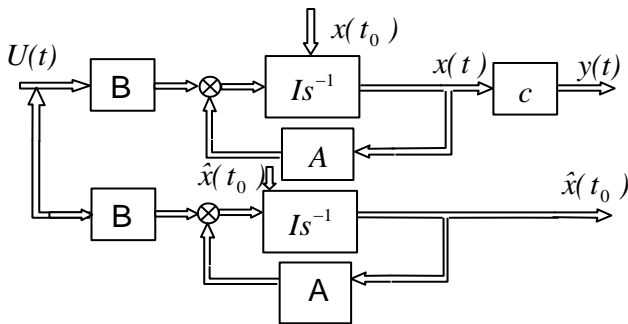


Рисунок 14.8

Управління всіма полюсами за допомогою зворотних зв'язків за станом є можливим, якщо доступні зміненню всі n -змінні стану. Якщо частина змінних стану не доступна зміненню, застосовують спеціальні пристрої, що розраховують відсутні змінні стану за вимірними сигналами u та y . Ці пристрої розв'язують задачу спостереження та називаються

спостерігачами, фільтрами оцінювання та естиматорами.

Розглянемо систему (рисунок 14.8) $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$,

де u – r -вимірний вектор; y – m -вимірний вектор, що доступний для виміру.

Матриці A, B, C – відомі.

Побудуємо таку модель системи, в якій всі змінні стану $\hat{x}(t)$ доступні для виміру.

На вхід цієї моделі подається той же вхідний сигнал $u(t)$, що і на вхід досліджуваної системи. Саме тому $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu$. При правильно заданих початкових умовах $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ змінні стану в моделі $\hat{x}(t_0)$ будуть відповідати

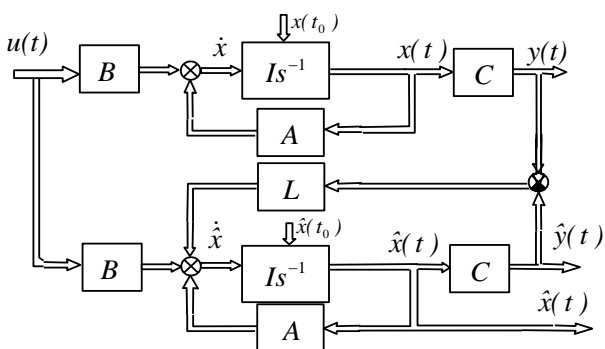


Рисунок 14.9

змінним стану $x(t)$.

Недолік такого найпростішого спостерігача полягає в тому, що він працює в розімкненому режимі. Через те, що матриці системи A, B, C та її початковий стан точно не є відомими, а також через викривлення вхідних сигналів системи не можуть точно бути введені в модель, оцінка вектора стану $\hat{x}(t)$ після деякого часу роботи моделі

буде відрізнятись від оцінки вектора $x(t)$.

Найпростіший естиматор використовує не всю наявну інформацію в системі. В оцінюванні вектора стану $\hat{x}(t)$ не бере участі доступний для зміни вихід $y(t)$. Вдосконалимо найпростіший естиматор (рисунок 14.9).

Вихідний сигнал системи $y(t)$ порівнюється з вихідним сигналом естиматора $\hat{y}(t)$ та їх різниця подається на вхід естиматора:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = [A - LC]\hat{x}(t) + Bu(t) + LCx(t), \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \end{cases} \quad - \text{ фільтр}$$

Люєнбергера або фільтр Калмана.

Віднімаючи з формули системи рівняння естиматора, отримуємо рівняння динаміки для визначення похибки вектора стану (\tilde{x}):

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \quad \text{або} \quad \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t).$$

Якщо власні значення матриці $A-LC$ мають від'ємні дійсні величини, то $\hat{x}(t)$ дорівнюватиме $x(t)$ після того, як закінчиться перехідний процес в естиматорі:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x(t).$$

Динамічні властивості естиматора залежать від вибору матриці L . Вибираючи елементи матриці L , можна забезпечувати будь-який бажаний набір s_1, s_2, \dots, s_n власних чисел матриці $A-LC$ (спостерігача).

Якщо початкова система спостережувана, то естиматор оцінює всі n змінних стану $x_i(t)$. Якщо система не повністю спостережувана, то можна оцінити тільки самоспостережувану частину вектора стану.

Фільтр оцінювання, в якому $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$, називається асимптотичним.

Розмірність такого естиматора дорівнює n . Саме тому він називається фільтром повного порядку. Якщо частина змінних стану доступна для зміни та необхідно оцінити тільки відсутні змінні вектора стану, будують фільтри оцінювання неповного порядку.

З урахуванням застосування естиматора опишемо систему модального управління (рисунок 14.10).

Матрицю зворотного зв'язку k слід вибирати так, щоб характеристичний поліном матриці $(A-Bk)$ збігався з бажаним:

$$D_B(s) = s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \dots + \gamma_n.$$

Рівняння естиматора має вигляд $\dot{\hat{x}} = (A-LC)\hat{x} + Ly + Bu$. Його характеристичний поліном $D_E(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n = D_{EB}(s)$ може мати будь-який бажаний вигляд.

Управління буде таким: $u = g - k\hat{x}$.

Розглянемо, чи можна в замкненій системі отримувати бажаний характеристичний поліном $D_3(\lambda)$ і який ефект вносить в систему естиматор.

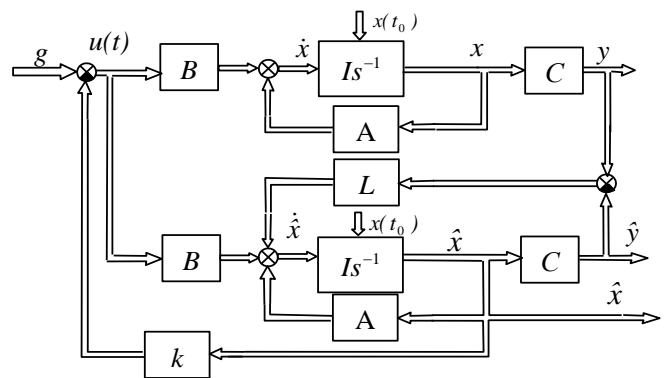


Рисунок 14.10

Вибираємо матрицю k так, щоб характеристичний поліном $D_{[A-Bk]}(s) = D_B(s)$, а матрицю L – так, щоб $D_{[A-LC]}(s) = D_{EB}(s)$. Тоді характеристичний поліном

замкненої системи $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bg - Bk\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = (A-LC-Bk)\hat{x} + Bg + LCx \end{cases}$ має вигляд

$D_3(s) = D_{Ж}(s)D_E(s)$. Доведемо цей факт. Перейдемо до нової змінної стану

$$\tilde{x} = x - \hat{x}, \quad \begin{cases} \dot{x} = [A - Bk]x + Bk\tilde{x} + Bg \\ \dot{\tilde{x}} = [A - LC]\tilde{x} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk & Bk \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} g;$$

$$D_3(s) = \det(sI - A_3) = \det \begin{bmatrix} sI - A + Bk & -Bk \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} = \det(sI - A + Bk) \cdot \det(sI - A + LC) = D_{[A-Bk]}(s)D_{[A-LC]}(s) = D_B(\lambda\lambda)_{EB}(\lambda\lambda).$$

Приклад. Дано систему $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$ де $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0]$. Приведемо

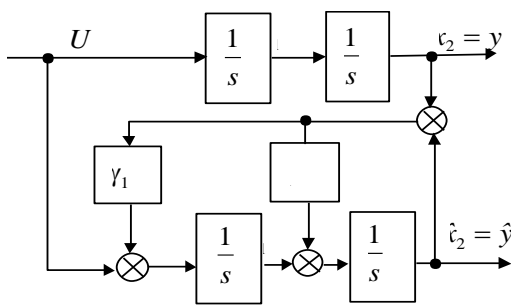


Рисунок 14.11

систему до канонічної форми ІКП за допомогою матриці перетворення

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1], y = x_2.$$

Знайти $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} - ?$, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. $D_{HЧ}(s) = s^2$.

Нехай заданий характеристичний поліном $D_B(s) = s^2 + \gamma_1 s + \gamma_2$.

Тоді $l_1 = \gamma_2 - \alpha_2 = \gamma_2, l_2 = \gamma_1 - \alpha_1 = \gamma_1$;

$$\dot{\hat{x}} = (A-LC)\hat{x} + L(y) + Bu \quad \text{або} \quad \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_2 \\ 1 & -\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, конструювання ланцюга зворотного зв'язку та естиматора можна реалізувати незалежно.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Зайцев, Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования / Г. Ф. Зайцев. – Киев: Вища школа, 1988. – 431 с.
2. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В. А. Бесекерского. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
3. Топчеев, Ю. И. Атлас для проектирования САР / Ю. И. Топчеев. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.
4. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп ; пер. с англ. Б. И. Копылова. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

ЗМІСТ

Тема 1	ВВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ	3
1.1	Основні поняття ТАУ	3
1.2	Приклади САР	5
Тема 2	ОСНОВИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ	7
2.1	Принципи управління	7
2.2	Основні закони управління	11
2.3	Функціональні елементи систем управління	13
2.4	Класифікація САУ	15
Тема 3	МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС САУ	16
3.1	Побудова математичної моделі САУ	16
3.2	Приклад математичного опису САР	18
3.3	Форми запису рівнянь САУ	22
3.4	Нормальна форма Коши	24
3.5	Статичні та динамічні характеристики елементів та САУ	25
Тема 4	ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ САУ	28
4.1	Передавальні функції послідовного, паралельного та зустрічно-паралельного з'єднання ланок	28
4.2	Правила перетворення структурних схем САУ	31
4.3	Виведення передавальних функцій систем за допомогою формули Мейсона	33
4.4	Передавальні функції САУ на основі задавального та збурювального впливів та за відхиленням	34
Тема 5	МЕТОД ПРОСТОРУ СТАНУ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ САУ	35
5.1	Рівняння стану та виходу для неперервних лінійних САУ	35
5.2	Розв'язання рівнянь стану і виходу неперервних лінійних САУ	37
5.3	Векторно-матрична структурна схема та матричні передавальні функції неперервних лінійних САУ	39
5.4	Виведення рівнянь стану та виходу неперервної лінійної САУ за допомогою методу керуючого канонічного подання	41
5.5	Керованість і спостережуваність неперервних лінійних САУ	44
Тема 6	СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ	45
6.1	Поняття про стійкість САУ	45
6.2	Оцінювання стійкості лінійних систем за коренями характеристичного рівняння	46

6.3	Критерій стійкості Е. Рауса	48
6.4	Критерій А. Гурвіца	49
6.5	Критерій стійкості О. В. Михайлова	50
6.6	Критерій стійкості Найквіста	51
6.7	Логарифмічний критерій стійкості (частотний)	54
6.8	Критерій стійкості В. І Зубова.	56
6.9	Виділення областей стійкості САУ за допомогою методу D-розбиття площини одного параметра	56
6.10	Виділення областей стійкості САУ за допомогою методу D-розбиття площини двох параметрів	59
Тема 7	ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ УПРАВЛІННЯ	61
7.1	Оцінювання якості управління за перехідними характеристиками	61
7.2	Оцінювання якості управління за частотними характеристиками	64
7.3	Оцінювання якості управління за полюсами та нулями передавальної функції	66
7.4	Аналіз якості управління за допомогою інтегральних оцінок	67
Тема 8	АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ САУ	69
8.1	Оцінювання точності САУ в сталих режимах при ступеневих вхідних впливах	69
8.2	Оцінювання точності САУ в сталих режимах при повільно змінних вхідних діях	72
8.3	Оцінювання точності САУ при гармонічних вхідних діях	74
8.4	Оцінювання точності САУ при випадкових діях	74
8.5	Приклад оцінювання точності САУ при випадкових діях	77
Тема 9	ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЧАСТОТНИМИ ТА ЧАСОВИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЛІНІЙНИХ САУ	79
9.1	Побудова частотних характеристик замкнених САУ	79
9.2	Розрахунок часових характеристик САУ за її частотними характеристиками	80
9.3	Оцінювання властивостей перехідної характеристики за ВЧХ замкненої системи	82
Тема 10	МЕТОД КОРЕНЕВИХ ГОДОГРАФІВ	85
10.1	Основи методу кореневих годографів	85
10.2	Приклад побудови кореневого годографа	88
Тема 11	ЧУТЛИВІСТЬ САУ	89
Тема 12	МЕТОДИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НЕОБХІДНОЇ ТОЧНОСТІ САУ	95
12.1	Забезпечення необхідного порядку астатизму САУ	95
12.2	Вибір необхідного коефіцієнта передачі розімкненої системи	96
12.3	Масштабування задавального впливу та сигналу	97

	зворотного зв'язку	
12.4	Комбіноване управління	99
Тема 13	КОРЕКЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ	101
13.1	Корегувальні пристрої	101
13.2	Синтез послідовних корегувальних пристроїв за допомогою ЛАЧХ	104
Тема 14	СИНТЕЗ СИСТЕМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ	106
14.1	Стандартні форми характеристичного полінома САУ	106
14.2	Модальне управління при доступному для виміру вектора стану	108
14.3	Модальне управління при не повністю вимірювальному векторі стану	110
	БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	113

Навчальне видання

Фірсов Сергій Миколайович
Білоконська Юлія Валентинівна

ОСНОВИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА УПРАВЛІННЯ

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2018

Підписано до видання 20.12.2018

Ум. друк. арк. 6,5. Обл.-вид. арк. 7,31. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, м. Харків, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>
Видавничий центр «ХАІ»
61070, м. Харків, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001