МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

П. Т. Кощавець, В. А. Кобзаренко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2018

П. Т. Кощавець, В. А. Кобзаренко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

2018

УДК 519.21
К76

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук В. О. Дорошенко,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. М. Колодяжний

Кощавець, П. Т.
К76 Теорія ймовірностей і математична статистика [Електронний ресурс] : навч. посіб. / П. Т. Кощавець, В. А. Кобзаренко. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2018. – 246 с.

Стисло викладено теоретичний матеріал з теорії ймовірностей і математичної статистики. Розглянуто приклади та їх розв'язання за кожним з розділів посібника, а також завдання для самостійної роботи. Наведено 30 варіантів контрольних робіт.

Для студентів гуманітарного, економічного та технічних факультетів.

Табл. 4. Бібліогр.: 16 назв

УДК 519.21

Навчальне видання

Кощавець Петро Тихонович
Кобзаренко Валентина Анатоліївна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Редактор Є. О. Александрова

Зв. план, 2018
Підписано до видання 14.11.2018
Ум. друк. арк. 13,7. Обл.-вид. арк. 15,37. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http:// www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001

Зміст

Вступ

Теорія ймовірності – це математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Починаючи з другої половини XX століття, спостерігається усе більш зростаючий інтерес до теорії ймовірності, математичної статистики, теорії випадкових процесів і до застосування вірогідно статистичних методів у найрізноманітніших галузях науки, техніки, виробництва і економіки. Вивчення різного роду випадкових явищ, стохастичних відхилень від норми є важливим засобом запобігання надзвичайних ситуацій, техногенних катастроф, випуску неякісної і ненадійної продукції і тому подібне.

З розвитком сучасних засобів обчислювальної мікропроцесорної техніки розширюються можливості зберігання, пошуку і оброблення великих масивів ймовірнісно-статистичної інформації про реальні об'єкти, виявлення причинно-наслідкових зв'язків між процесами і явищами. Методи теорії ймовірності й математичної статистики знаходять все більше застосування, наприклад, до аналізу помилок різних вимірів, а також у фізиці, біології, екології, соціології, у телефонії й процесах обслуговування і так далі.

Розглянемо поняття «Випадкове явище». При науковому дослідженні різних фізичних і технічних завдань часто доводиться зустрічатися з особливого типу явищами, які прийнято називати випадковими.

Випадкове явище – це таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного і того ж випробування протікає кожний раз дещо інакше.

Наведемо приклад випадкового явища.

Проводиться стрільба із гармати, встановленої під заданим кутом до горизонту. Користуючись методами балістики, можна знайти теоретичну траєкторію снаряда. Ця траєкторія цілком визначається умовами стрільби: початковою швидкістю снаряда, кутом пострілу і балістичним коефіцієнтом снаряда . Фактична траєкторія кожного окремого снаряда неминуче дещо відхиляється від теоретичної внаслідок сукупного впливу багатьох чинників.

Серед цих чинників можна, наприклад, назвати: помилки виготовлення снаряда, відхилення ваги заряду від стандарту, неоднорідність структури заряду, помилки установлення ствола у задане положення, метеорологічні умови і таке інше. Якщо зробити декілька пострілів за незмінних основних умов, ми отримаємо не одну теоретичну траєкторію, а цілий пучок траєкторій, що утворює так званий «еліпс розсіювання снарядів».

У наведеному прикладі були задані основні умови, котрі залишались незмінними, проте не враховувалися менш важливі, другорядні умови.

Неоднакові результати дослідів завжди пов'язані з наявністю якихось другорядних чинників, що впливають на результат досвіду, але не заданих у числі його основних умов. Основні умови досвіду, що визначають у загальних і грубих рисах його протікання, зберігаються незмінними; другорядні – змінюються від досвіду до досвіду і вносять випадкові відмінності у їхні результати.

Абсолютно очевидно, що у природі немає жодного фізичного явища, у якому не були б присутні так чи інакше елементи випадковості. Як би точно і детально не були фіксовані умови експерименту, неможливо досягти того, щоб при повторенні експерименту результати повністю співпадали. Випадкові відхилення неминуче супроводять будь-яке закономірне явище. Проте у ряді практичних завдань цими випадковими елементами можна нехтувати, аналізуючи замість реального явища його спрощену схему і припускаючи, що у цих умовах експерименту явище протікає, як належно. При цьому з незліченної безлічі чинників, що впливають на це явище, виділяються найголовніші, а впливом інших, другорядних чинників просто нехтують. Така схема вивчення явищ постійно застосовується у фізиці, механіці, техніці. При користуванні цією схемою для вирішення будь-якого завдання, передусім, виділяють основне коло умов, що враховуються, і з'ясовують, на які параметри експерименту вони впливають. Потім застосовують той або інший математичний апарат.

Таким чином, виявляється основна закономірність, властива цьому явищу, – це дає можливість передбачити результат досліду за заданими умовами. У міру розвитку науки кількість чинників, що враховуються, стає все більше, явище досліджується детальніше, науковий прогноз стає точнішим.

Проте для вирішення низки запитань описана схема – класична схема так званих «точних наук» – виявляється погано пристосованою.

Існують такі завдання, де результат досвіду, що цікавить нас, залежить від такої великої кількості чинників, що всіх їх практично неможливо зареєструвати і врахувати. Ці завдання, у яких численні другорядні чинники, тісно перетинаючись між собою, відіграють суттєву роль, а між тим число їх таке велике і вплив такий складний, що застосування класичних методів дослідження себе не виправдовує.

Повернемося до прикладу про стрільбу з гармати. Траєкторії снарядів не співпадають між собою, у результаті точки падіння снарядів на землю розсіюються. Якщо розміри об’єкта великі у порівнянні з областю розсіювання, то цим розсіюванням, вочевидь, можна знехтувати. При правильній установці гармати будь-куди випущений снаряд попадає у ціль. Якщо ж область розсіювання снарядів перевищує розміри об’єкта, тоді деякі з снарядів, у зв'язку з впливом випадкових чинників, у об’єкт не попадуть. Виникає низка запитань, наприклад: Який відсоток випущених снарядів у середньому попадає у ціль? Скільки треба витратити снарядів для того, щоб досить надійно уразити ціль? Які слід прийняти заходи для зменшення витрати снарядів?

Щоб відповісти на подібні запитання, звичайна схема точних наук виявляється недостатньою. Ці запитання органічно пов'язані з випадковою природою явища. Для того, щоб на них відповісти, не можна просто нехтувати випадковістю, – потрібно вивчити випадкове явище розсіювання снарядів з точки зору закономірностей, властивих йому саме як випадковому явищу. Потрібно досліджувати закон, за яким розподіляються точки падіння снарядів. Треба з'ясувати випадкові явища, що спричиняють розсіювання, порівняти їх між собою, якщо це важливо, і тому подібне.

Які ж існують шляхи і методи для дослідження випадкових явищ?

З суто теоретичної точки зору ті чинники, які умовно назвали «випадковими», принципово нічим не відрізняються від інших, які ми визначили як «основні». Теоретично можна необмежено підвищувати точність розв’язання кожної задачі, враховуючи усі нові й нові групи чинників, від найістотніших до найнікчемніших. Проте практично така спроба однаково детально і ретельно проаналізувати вплив рішуче усіх чинників, від яких залежить явище, привела б тільки до того, що розв’язання задачі, через її непомірну громіздкість й складність, виявилося б практично нездійсненним і до того ж не мало б ніякої пізнавальної цінності.

Теоретично можна було б поставити і вирішити завдання про визначення траєкторії цілком певного снаряда, з урахуванням усіх конкретних погрішностей його виготовлення, точної ваги і конкретної структури цього, цілком визначеного порохового заряду при точно певних метеорологічних даних у кожній точці траєкторії.

Таке розв’язання не лише було б неозоро складним, але і не мало б ніякої практичної цінності, оскільки відносилося б тільки до цього конкретного снаряда у цих конкретних умовах, які практично більше не повторяться.

Очевидно, повинна існувати принципова різниця у методах обліку основних, вирішальних чинників, що визначають у основних рисах течію явища, і вторинних, другорядних чинників, що впливають на течію явища як «погрішності». Елемент невизначеності, складності, багатопричинності, властивий випадковим явищам, вимагає створення спеціальних методів для вивчення таких явищ.

Такі методи розробляються у теорії ймовірності. Її предметом є специфічні закономірності, які спостерігаються у випадкових явищах.

Практика показує, що, спостерігаючи у сукупності маси однорідних випадкових явищ, у них зазвичай виявляються цілком певні закономірності, свого роду стійкості, властиві масовим випадковим явищам.

Наприклад, якщо багато разів підряд кидати монету, частота появи герба (відношення числа гербів, що з'явилися, до загального числа кидань) поступово стабілізується, наближаючись до цілком певного числа, а саме до 0,5. Така ж властивість «стійкості частот» виявляється і при багатократному повторенні будь-якого іншого досвіду, результат якого є заздалегідь невизначеним, випадковим. Так, при збільшенні числа пострілів частота попадання у деяку ціль теж стабілізується, наближаючись до деякого постійного числа.

Подібні специфічні, так звані " статистичні", закономірності спостерігаються завжди, коли маємо справу з масою однорідних випадкових явищ. Закономірності, що проявляються у цій масі, виявляються практично незалежними від індивідуальних особливостей окремих випадкових явищ, що входять до маси. Ці окремі особливості у масі немов би взаємно погашаються, нівелюються, і середній результат маси випадкових явищ виявляється практично вже закономірним. Саме ця багаторазово підтверджена досвідом стійкість масових випадкових явищ і служить базою для застосування імовірнісних (статистичних) методів дослідження. Методи теорії ймовірності природньо пристосовані тільки для дослідження масових випадкових явищ; вони не дають можливості передбачити результат окремого випадкового явища, але дають можливість передбачити середній сумарний результат маси однорідних випадкових явищ, передбачити середній результат маси аналогічних дослідів, конкретний результат кожного з яких залишається невизначеним, випадковим.

Чим більша кількість однорідних випадкових явищ бере участь у експерименті, тим виразніше проявляються властиві їм специфічні закони, тим з більшою упевненістю і точністю можна здійснювати науковий прогноз.

В усіх випадках, коли застосовуються ймовірнісні методи дослідження, мета полягає у тому, щоб, минувши занадто складне вивчення окремого явища, обумовленого занадто великою кількістю чинників, звернутися безпосередньо до законів, що управляють масами випадкових явищ. Вивчення цих законів дозволяє не лише здійснювати науковий прогноз у своєрідній області випадкових явищ, але у ряді випадків допомагає цілеспрямовано впливати на хід випадкових явищ, контролювати їх, обмежувати сферу дії випадковості, звужувати її вплив на практику.

Імовірнісний, або статистичний, метод у науці не протиставляє себе класичному методу точних наук, а є його доповненням, що дозволяє глибше аналізувати явище з урахуванням властивих йому елементів випадковості.

Характерним для сучасного етапу розвитку природних і технічних наук є дуже широке і плідне застосування статистичних методів в усіх галузях знання. Це цілком природньо, оскільки при поглибленому вивченні будь-якого кола явищ неминуче настає етап, коли потрібне не лише виявлення основних закономірностей, але і аналіз можливих відхилень від них. У одних науках, завдяки специфіці предмета та історичним умовам, впровадження статистичних методів спостерігається раніше, у інших – пізніше. Нині немає майже жодної природної науки, у якій так чи інакше не застосовувалися б ймовірнісні методи. Цілі розділи сучасної фізики базуються на методах теорії ймовірності.

Все ширше застосовуються ймовірнісні методи у сучасній електротехніці й радіотехніці, метеорології та астрономії, теорії автоматичного регулювання і машинній математиці. Велике поле застосування знаходить теорія ймовірності у різноманітних областях військової техніки: теорія стрільби і бомбометання, теорія боєприпасів, теорія прицілів і приладів керування вогнем, аеронавігація, тактика і безліч інших розділів військової науки широко користуються методами теорії ймовірності та її математичним апаратом.

Математичні закони теорії ймовірності – це відображення реальних статистичних законів, об'єктивно існуючих у масових випадкових явищах природи. До вивчення цих явищ теорія ймовірності застосовує математичний метод і завдяки цьому є одним з розділів математики, також логічно точним і строгим, як інші математичні науки.

Історія розвитку і становлення теорії ймовірності

Теорія ймовірності, подібно до інших математичних наук, розвивалася з потреб практики. Історія теорії ймовірності відмічена багатьма унікальними особливостями. На відміну від тих, що з'явилися приблизно у той же час інших розділів математики, у теорії ймовірності не було античних або середньовічних попередників. Довгий час теорія ймовірності вважалася чисто досвідченою наукою і «не зовсім математикою», її строге обґрунтування було розроблено тільки у 1929 році, тобто навіть пізніше, ніж аксіоматика теорії множин (1922).

Історики виділяють у розвитку теорії ймовірності декілька періодів.

1. *Передісторія, до XVI століття включно*. У античні часи і у Середньовіччі натурфілософи обмежувалися метафізичними міркуваннями про походження випадковості та її ролі у природі. Математики у цей період розглядали та іноді вирішували завдання, пов'язані з теорією ймовірності, але ніяких загальних методів і тематичних понять ще не з'явилося. Голов-

ним досягненням цього періоду можна вважати розвиток комбінаторних методів, які пізніше згодилися творцям теорії ймовірності.

2. *Початок формування у другій половині XVII століття основних понять і методів теорії ймовірності для випадкових величин з кінцевим числом значень*. Стимулом спочатку служили переважно проблеми, що виникають у азартних іграх, проте сфера застосування теорії ймовірності майже відразу починає розширюватися – до неї входять прикладні завдання демографічної статистики, страхової справи і теорії наближених обчислень. На цьому етапі важливий вклад у ідеї нової науки внесли Паскаль і Ферма. Гюйгенс увів два фундаментальні поняття – це числова міра ймовірності події, а також поняття математичного очікування випадкової величини.

3. *У XVIII столітті з'явилися монографії з систематичним викладом теорії ймовірності*. Першою з них стала книга Якоба Бернуллі «Мистецтво припущень» (1713 рік). У ній Бернуллі запропонував класичне визначення ймовірності випадкової події як відношення числа однаково імовірних результатів, пов'язаних з цією подією, до загального числа результатів. Він також виклав правила підрахунку ймовірності для складних подій і дав перший варіант ключового «закону великих чисел», що роз'яснює, чому частота події у серії випробувань не змінюється хаотично, а у деякому розумінні прагне до свого граничного теоретичного значення, тобто ймовірності.

4. *Ідеї Бернуллі розвинули на початку XIX століття Лаплас, Гаус, Пуассон*. Застосування імовірнісних методів у прикладній статистиці значно розширилося. Поняття ймовірності було визначене і для безперервних випадкових величин, завдяки чому з'явилася можливість використання методів математичного аналізу. Були перші спроби застосування теорії ймовірності у фізиці. До кінця XIX століття з'являються статистична фізика,

строга теорія помилок виміру, ймовірнісні методи використовуються у різних прикладних науках.

5. *У XX столітті у фізиці була створена теорія мікросвіту, а у біології – теорія спадковості, обидві вони істотно ґрунтовані на імовірнісних методах*. Карл Пірсон розробив алгоритми математичної статистики, які були широко і всюди вживані для аналізу прикладних вимірів, перевірки гіпотез і ухвалення рішень. А. Н. Колмогоров дав класичну аксіоматику теорії ймовірності. З інших нових областей застосувань теорії ймовірності необхідно згадати теорію інформації і теорію випадкових процесів. Філософські суперечки про те, що таке ймовірність і у чому причина її стійкості, продовжуються.

Перші завдання теорії ймовірності виникли у різних азартних іграх. Французький канонік XIII століття Рішар де Фурніваль правильно підрахував усі можливі суми очок після кидка трьох кісток і вказав число способів, якими може вийти кожна з цих сум. Це число способів можна розглядати як першу числову міру сприятливих подій.

У великій математичній енциклопедії «Сума арифметики, геометрії, стосунків і пропорцій» італійця Луки Пачоли (1494) містяться оригінальні завдання на тему: як поділити ставку між двома гравцями, якщо серія ігор перервана достроково.

Великий алгебрист XVI століття Джероламо Кардано присвятив аналізу гри змістовну монографію «Книга про гру у кістки» (1526 рік, опублікована посмертно). Кардано провів повний комбінаторний аналіз для значень суми окулярів при киданні трьох кісток і вказав для різних подій очікуване значення долі «сприятливих» подій.

У XVII столітті почало формуватися виразне уявлення про проблематику теорії ймовірності й з'явилися перші математичні методи розв’язання імовірнісних завдань. Це були комбінаторні методи. Засновниками математичної теорії ймовірності стали Блез Паскаль і П’єр Ферма.

Паскаль у своїх працях далеко просунув застосування комбінаторних методів, які систематизував у своїй книзі «Трактат про арифметичний трикутник» (1665). Спираючись на імовірнісний підхід, Паскаль навіть доводив, що бути віруючим вигідніше, ніж атеїстом.

У трактаті Гюйгенса детально викладаються запитання, розглянуті Ферма і Паскалем, але ставляться і нові запитання. Головним досягненням нідерландського ученого стало введення поняття математичного очікування, тобто теоретичного середнього значення випадкової величини. Гюйгенс запропонував класичний спосіб його підрахунку.

У трактаті «Мистецтво припущень» Якоб Бернуллі сформулював класичне визначення ймовірності події як відношення кількості результатів, пов'язаних з цією подією, до загального числа результатів. Визначив, що ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, а ймовірність неможливого дорівнює нулю. Бернуллі систематично вивчена імовірнісна схема, яка зараз називається біномним розподілом або розподілом Бернуллі.

Раніше математики найчастіше оперували кількістю результатів. Історики вважають, що заміна кількості на «частоту» була стимульована статистичними міркуваннями. Частота, на відміну від кількості, зазвичай має тенденцію до стабілізації при збільшенні кількості спостережень. Визначення ймовірності по Бернуллі відразу стало загальноприйнятим, його відтворювали Абрам де Муавр у книзі «Вчення про випадки» (1718) і усі подальші математики. Важливе уточнення, яке зробив П’єр-Симон Лаплас у 1812 році, полягає у тому, що усі «елементарні результати» зобов'язані бути рівно вірогідні. Якщо для події неможливо підрахувати класичну ймовірність, то Бернуллі запропонував використати статистичний підхід, тобто оцінити ймовірність за результатами спостережень цієї події або пов'язаних з цією подією.

Величезне значення, як для теорії ймовірності, так і для науки у цілому мав доведений Бернуллі перший варіант закону великих чисел. Назву закону дав пізніше Пуассон. Цей закон пояснює, чому статистична частота при збільшенні числа спостережень зближується з теоретичним її значенням – ймовірністю, і тим самим зв'язує два різні визначення ймовірності.

Абрам де Муавр дав перший варіант теореми Муавра – Лапласа, що досліджує розподіл можливих відхилень статистичної частоти від ймовірності. Муавр розглянув окремий випадок, коли ймовірність дорівнює 1/2, загальний же випадок для будь-якої ймовірності довів Лаплас. Ще одним досягненням Муавра було введення у науку нормального розподілу (1733), який з'явився у нього як апроксимація біномного розподілу.

Наступний важливий крок зробив англійський математик Томас Сімпсон, який ввів визначення геометричної ймовірності, придатне для дослідження безперервних випадкових величин з безкінечною кількістю значень. У завданні XXVI Сімпсон знайшов ймовірність того, що навмання кинутий на площину паралелепіпед зупиниться на заданій своїй грані.

Було вирішено найважливіше завдання розрахунку ймовірності для складних подій. Англійський математик Томас Байєс першим у виразному вигляді привів теорему складання ймовірності для декількох несумісних подій й засадничі у теорії ймовірності і статистику формули Байєса (1763). У сучасній термінології формули Байєса дозволяють розрахувати умовну ймовірність, а також уточнити розраховану ймовірність після отримання нових даних. Теорему множення ймовірності раніше відкрив Муавр (1718) і дав їй цілком сучасне, хоча і словесне формулювання: ймовірність появи двох залежних подій дорівнює твору ймовірності появи одного з них на ймовірність того, що інше повинне з'явитися, якщо перше з них вже з'явилося.

До середини XVIII століття аналіз ігор все ще має деякий інтерес. Великий математик Леонард Ейлер дав детальний аналіз різних типів лотерей, але центром уваги математиків усе більшою мірою стають демографічна статистика, страхування і оцінка помилок. Статистиці та страхуванню

Ейлер присвятив багато робіт; він, зокрема, вирішував задачу: оцінити за статистичними таблицями, яка ймовірність того, що людина у віці n років проживе ще m років.

У XIX столітті кількість робіт за теорією ймовірності продовжувала рости. Були спроби розповсюдити методи теорії ймовірності далеко за розумні межі, наприклад, на мораль, психологію, право застосування і навіть на богослов'я. Зокрема, валлійський філософ Річард Прайс, а слідом за ним і Лаплас, вважали за можливе розрахувати за формулами Байєса ймовірність майбутнього сходу Сонця. Пуассон намагався провести імовірнісний аналіз справедливості судових вироків і достовірності свідчень свідків. Філософ Дж. С. Мілль у 1843 році, вказавши на подібні спекулятивні застосування, назвавши числення ймовірності "ганьбою математики". Ця і інші оцінки свідчили про недостатню суворість обґрунтування теорії ймовірності.

Математичний апарат теорії ймовірності тим часом продовжував удосконалюватися. Основною сферою її застосування у той період було математичне оброблення результатів спостережень, що містять випадкові погрішності, а також розрахунки ризиків у страховій справі та інших статистичних параметрів. Серед головних прикладних завдань теорії ймовірності і математичної статистики XIX століття можна назвати такі:

- знайти ймовірність того, що сума незалежних випадкових величин з однаковим законом розподілу знаходиться у заданих межах. Особливу важливість ця проблема мала для теорії помилок виміру, у першу чергу для оцінки погрішності спостережень;
- встановлення статистичної значущості відмінності випадкових значень або серій таких значень. Приклад: порівняння результатів застосування нового і старого видів ліків для ухвалення розв’язання про те, чи дійсно нові ліки кращі;

- дослідження впливу заданого чинника на випадкову величину (факторний аналіз).

Вже до середини XIX століття формується імовірнісна теорія артилерійської стрільби. У більшості великих країн Європи були створені національні статистичні організації. у кінці століття сфера застосування імовірнісних методів почала успішно поширюватися на фізику, біологію, економіку, соціологію.

Карл Фрідріх Гаус, що постійно займався астрономічними обчисленнями, розробив імовірнісну методику роботи з вимірами, що містять погрішності (1809). Вчений глибоко вивчив нормальний розподіл, показав, що він у багатьох практичних ситуаціях є граничним для випадкових значень, обґрунтував застосування методу найменших квадратів для оцінки вимірюваного значення і параметрів його можливого діапазону розкиду. Хоча нормальний закон був відомий задовго до Гауса, його вклад у теорію цього найважливішого розподілу настільки великий, що довгий час нормальний закон називали "законом Гауса"; сучасний термін закріпився завдяки роботам Карла Пірсона у кінці XIX століття.

Основні досягнення теорії ймовірності підсумовані у капітальній монографії Лапласа «Аналітична теорія ймовірності» (1812), яка завершила «класичний етап» розвитку цієї науки. У XIX столітті праця Лапласа витримала у Франції три перевидання і була перекладена на багато мов світу. Лаплас досліджував як дискретні, так і безперервні випадкові величини. Для безперервних випадкових величин він дав ключове поняття щільності розподілу ймовірності. Інтегральне поняття функції розподілу виникало набагато пізніше. Його у 1912 році ввів А. М. Ляпунов. Загальний термін «випадкова величина» також уперше з'явився у роботах російської імовірнісної школи.

Введення поняття щільності ймовірності та характеристичних функцій дозволило Лапласу застосувати для вирішення імовірнісних завдань потужні аналітичні засоби, в тому числі диференціальні рівняння у приватних похідних.

Лаплас привів формулу повної ймовірності для декількох неспільних «причин» (у сучасній термінології, «гіпотез»), довів ряд граничних теорем, у тому числі теорему Муавра – Лапласа і збіжність біномного розподілу до нормального при збільшенні кількості випробувань. Для оцінки можливого діапазону значень вимірюваної величини Лаплас, як і Гаус, рекомендував метод найменших квадратів.

Лаплас описав і своє розуміння суті випадковості та ймовірності. На його думку, хід реальних процесів повністю зумовлений, випадковість з'являється лише у людському сприйнятті й тільки там, де людина не володіє повним знанням того, що відбувається.

Симеон Дені Пуассон у 1837 році узагальнив закон великих чисел Бернуллі, знявши умову про те, що ймовірність події у кожній грі одна і та ж; за цих нових умов статистична частота сходитиметься до середнього арифметичного для ймовірності окремих ігор. Він же опублікував формулу Пуассона, зручну для описання схеми Бернуллі у тому випадку, коли ймовірність події близька до нуля або до одиниці. Розподіл Пуассона є одним з основних у прикладних завданнях. Йому підкоряються радіоактивний розпад, народження трійні, статистика аварій і нещасних випадків.

Основна проблема у теорії помилок виміру полягає в наступному. Нехай послідовні виміри деякої величини дали близькі, але нерівні значення. Мається на увазі, що систематичні помилки і залежність величини від часу виміру (скажімо, при обертанні небесного склепіння) враховані, тобто відмінність даних спричинена чисто випадковими погрішностями. Потрібно за результатами вимірів знайти найкращу оцінку істинного значення досліджуваної величини.

Перше математичне дослідження цієї практично важливої теми, особливо у астрономії, зробив Томас Сімпсон (1755). Він виходив з невірної гіпотези, що помилки виміру розподілені за «трикутним законом», але зробив правильний висновок – середнє арифметичне результатів виміру ближче до істинного значення, чим окремий вимір. Данило Бернуллі (1778) вважав, що щільність розподілу помилок є дугою кола, що і підтвердило результати отримані Сімпсоном. Ідеї Сімпсона розвинув И. Г. Ламберт, він уперше застосував метод «производящих функций» і метод максимальної правдоподібності, пізніше узагальнений Р. Э. Фішером.

У XIX столітті Лаплас визначив, що спостережувані погрішності виміру є зазвичай результатом підсумовування безлічі випадкових помилок, і тому їх розподіл має бути близький до нормального розподілу. Замість середнього арифметичного він запропонував статистичну медіану. Проте майже одночасно був опублікований набагато більше практичний метод найменших квадратів Гауса (1809), який і став загальновживаним. У 1853 році Коши виявив приклад розподілу, для якого середнє арифметичне є дуже негативною оцінкою. До кінця XIX століття статистична теорія оброблення помилок була в основному завершена.

У 1889 році французький математик Жозеф Бертран у своєму курсі «Аналіз ймовірності» запропонував ряд парадоксів, пов'язаних з геометричною ймовірністю. У кожному парадоксі різне тлумачення понять «навмання» або «узяте довільно» призводило до різних рішень задачі. Приклад одного з парадоксів Бертрана : знайти ймовірність того, що вибрана навмання хорда кола виявиться довша за сторону вписаного у це коло трикутника. При різних методах вибору хорди «навмання» виходять різні відповіді.

До середини XIX століття практичне застосування теорії ймовірностей було у основному обмежено статистикою і наближеними обчисленнями, тому загальний термін «випадкова величина» з'явився досить пізно. Одним з перших випадкових процесів у фізиці став вивчений Робертом Броуном у 1827 році під мікроскопом хаотичний рух квіткового пилку, який плавав у воді («броунівський рух»). Математична модель Броуна, проте, з'явилася тільки на початку XX століття (А. Ейнштейн, М. Смолуховський, Н. Вінер).

Перші фізичні ймовірнісні моделі виникли у статистичній фізиці, яку розробили у другій половині XIX століття Л. Больцман, Д. К. Максвелл і Д. У. Гіббс. Больцман у серії робіт (1860-і роки) показав, що термодинамічні закони мають імовірнісний – статистичний характер і пов'язані з переходом фізичних систем з менш вірогідного стану у вірогідніший, причому мірою ймовірності є ентропія. Максвелл у ці ж роки вивів закон розподілу швидкостей молекул у газі, який дозволяє розрахувати енергію, довжину вільного пробігу й інші характеристики молекул. У 1902 році Гіббс опублікував монографію «Основні принципи статистичної механіки», що мала великий вплив на розвиток фізики.

До кінця XIX століття величезне практичне значення імовірнісних методів стало загальновизнаним фактом.

У Росії у першій половині XIX століття почали виникати власні серйозні дослідження з теорії ймовірності. Перший навчальний курс почав читати С. Ревковський у Вільнюському університеті (1829 рік), там же у 1830 році була створена перша у Російській імперії кафедра теорії ймовірності. У Петербурзькому університеті лекції з 1837 року читав спочатку В. А. Анкудович, а з 1850 року В. Я. Буняковський. Фундаментальний підручник «Основи математичної теорії ймовірності» Буняковський опублікував у 1846 році, і придумана ним російська термінологія стала загальноприйнятою. У Московському університеті курс лекцій «Основи математичної теорії ймовірності» почали викладати у 1850 році. Лекції читав А. Ю. Давидів, майбутній президент Московського математичного суспільства.

Статті, присвячені імовірнісним темам, публікували багато великих математиків Росії, у тому числі М. В. Остроградський, М. Д. Брашман, М. І. Лобачевський, М. Є. Зернов. У значній частині цих робіт відчувається сильний вплив праць і поглядів Лапласа.

Першими російськими математиками світового рівня у теорії ймовірності були П. Л. Чебишев і його учні А. А. Марков і О. М. Ляпунов. Чебишев, з самого початку своєї наукової кар'єри, приділяв найбільшу увагу теорії ймовірності, разом з теорією чисел. З 1860 року змінив Буняковського на кафедрі теорії ймовірності й почав свій цикл лекцій. Він опублікував з цієї теми всього чотири роботи, але фундаментального характеру. Особливо цікава його стаття «Про середні величини» (1866 рік), де розглянуто «нерівність Чебишева», пізніше посилена Марковим.

У 1887 році з'явилася стаття Чебишева «Про дві теореми відносно ймовірності». У цій роботі він встановив, що за деяких (досить загальних) умов виконується гранична теорема: сума великого числа незалежних випадкових величин (наприклад, погрішностей виміру) розподілена приблизно за нормальним законом, і тим точніше, чим більше складових. Цей результат за своєю спільністю далеко перекриває теорему Муавра – Лапласа і усі її аналоги. Пізніше А. А. Марков і А. М. Ляпунов уточнили і ще більше узагальнили цю теорему Чебишева.

Якщо Чебишев досліджував незалежні випадкові величини, то А. А. Марков у 1907 році розширив поле досліджень, аналізуючи і випадок, коли нове випадкове значення залежить від давнішнього. Марков довів варіант закону великих чисел для деяких розповсюджених типів залежних величин, увівши у термінологію світової науки «ланцюги Маркова». Аналізу і класифікації цих ланцюгів Марков присвятив багато робіт. Ланцюги Маркова і марківські випадкові процеси застосовуються не лише у математиці, але і у інших науках, таких, як статистична фізика, квантова механіка, теорія автоматичного керування і багато інших. Маркову належить також імовірнісне обґрунтування методу найменших квадратів.

У XX столітті дослідження Чебишева і Маркова продовжили А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров й інші. Зокрема, Линдберг (1922) і Колмогоров (1926) знайшли умови, необхідні й достатні для виконання закону великих чисел.

Математичний апарат теорії ймовірності значно збагатився у багатьох напрямах. Виявилося, що після введення теорії міри це загальне поняття зручно застосовувати до теорії ймовірності, тобто розглядати ймовірність як міру (кінцевого або нескінченного) безлічі «сприятливих подій». Такий підхід дозволяє описувати і досліджувати властивості ймовірності на добре розробленій мові теорії великих кількостей.

У теорії динамічних систем було виявлено, що розв’язання диференціальних рівнянь деяких систем поводяться як випадкові процеси. Це велике відкриття привело до створення поняття «Динамічний хаос» і загальної «Теорії хаосу».

До XX століття використовувалися у основному нормальне, біномне і пуассоновське розподіли, проте практично корисними виявилися і багато інших теоретичних законів. Наприклад, логонормальний розподіл часто зустрічається у ситуаціях, коли досліджувана величина – є твір декількох незалежних позитивних випадкових величин.

Методи теорії ймовірності виявилися корисними у багатьох областях теоретичної і прикладної математики, навіть у таких класичних, як теорія чисел і логіка. У свою чергу, сучасна теорія ймовірності використовує методи і підходи, розроблені у функціональному аналізі, топології й інших розділах математики, що з'явилися у XX столітті.

Математична статистика як основа для ухвалення рішень про випадкові величини виникла на межі XIX – XX віків завдяки засадничим роботам Карла Пірсона. Пірсон розробив теорію кореляції, критерії згоди, регресійний аналіз, алгоритми перевірки гіпотез, ухвалення рішень і оцінки параметрів. Алгоритми, запропоновані Пірсоном, знаходять широке застосування у фізиці, медицині, біології, соціології, сільському господарстві й багатьох інших областях. Математична статистика як основа для ухвалення рішень про випадкові величини виникла на межі XIX – XX віків завдяки засадничим роботам Карла Пірсона. Пірсон розробив теорію кореляції, критерії згоди, регресійний аналіз, алгоритми перевірки гіпотез, ухвалення рішень і оцінки параметрів. Алгоритми, запропоновані Пірсоном, знаходять широке застосування у фізиці, медицині, біології, соціології, сільському господарстві й багатьох інших областях.

Продовжувачем робіт Пірсона за прикладною математичною статистикою у першій половині XX століття став Рональд Елмер Фішер. Він опублікував роботи з планування експерименту, розробив метод максимальної правдоподібності, тест статистичної значущості, дисперсійний аналіз і розв'язання ряду інших практично важливих статистичних проблем. Спільно з Єжи Нейманом розробив концепцію довірчого інтервалу (1937). Фішер – автор загально-визнаного терміна «дисперсія випадкової величини».

Починаючи з 1920-х років, швидко розвивається теорія статистичного контролю якості промислової продукції. Першу проблему по цій темі розглянув ще Томас Сімпсон у 1846 році. У масовому виробництві потрібно визначати, за якою методикою слід вилучити предмети з однієї або декількох партій продукції для перевірки їхньої якості.

Безліч статистичних досліджень, що нерідко дають протилежні результати (наприклад, про наявність або відсутність шкоди від мобільних телефонів або генно-модифікованих продуктів), зробило актуальною і часто обговорюваною проблему забезпечення достовірних висновків із статистичного обстеження. Найбільш часта помилка оголошення, що статистична залежність (кореляція) чинників, що вивчаються, нібито свідчить про причинний зв'язок між ними, хоча часто зв'язок цих чинників реально пояснюється їх залежністю від одного або декількох третіх чинників.

Поняття випадкового (чи стохастичного) процесу, що з'явилося на початку XX століття, стало одним з центральних і таких, що швидко розвиваються, і найбільш корисних понять, які застосовуються у теорії ймовірності. Випадковий процес – це змінна у часі випадкова величина. Перші дослідження випадкових процесів торкалися в основному електроніки і повідомлень теорії зв'язку. У наші дні можна привести як приклади тимчасові ряди в економіці або медицині, регистрограми теорії механізмів, статистику життя, біології популяцій. Широку сферу практичного застосування має теорія масового обслуговування. Серед типових завдань аналізу випадкових процесів :

- прогнозування розвитку процесу, виходячи з його минулої історії;
- надійне виділення сигналу на тлі шумових перешкод;
- оцінка і оптимізація параметрів (наприклад, вірогідного часу безвідмовної роботи);
- фільтрація вхідного випадкового процесу для отримання бажаного вихідного процесу.

Проведена класифікація типів випадкових процесів. Розроблені аналітичні засоби їх дослідження. Для аналізу процесів розроблені такі нові засоби, як стохастичні диференціальні рівняння, стохастичний інтеграл, засоби спектрального аналізу і фільтрації.

До моменту створення теорії ймовірності основою математики були два класи об'єктів – числа і геометричні фігури. Для теорії ймовірності потрібно було додати у цей список абсолютно особливий об'єкт: випадкову подію, а також тісно пов'язані з ним поняття (ймовірність, випадкова величина та ін.). Своєрідність нової науки проявлялася і у тому, що її твердження носили не безумовний характер, як раніше було прийнято у математиці, а ймовірно-ймовірнісний.

У міру розвитку теорії ймовірності не припинялися суперечки про те, чи можна вважати подію, що ідеалізується, математичним поняттям (і тоді теорія ймовірності є частиною математики) або ж це факт, спостережуваний у досвіді (і тоді теорію ймовірності слід віднести до природних наук). Різні учені висловлювали найрівніші думки із цього приводу. П. Л. Чебишев упевнено вважав теорію ймовірності математичною дисципліною, завдання якої, згідно з відомою ймовірністю деяких подій, визначити невідому ймовірність досліджуваної події. На думку Давида Гілберта, теорія ймовірності споріднена з механікою, тобто є математизованою «фізичною дисципліною». Серпень де Морган і його послідовник У. С. Джевонс вважали базовим поняттям «Суб'єктивну ймовірність», тобто кількісну міру нашого розуміння предмета дослідження, і поєднували теорію ймовірності з логікою. Проблеми, пов'язані з неоднозначною суб'єктивною ймовірністю, неодноразово обговорювалися, їх часто формулюють у вигляді «ймовірнісних парадоксів».

Ще Бернуллі дав фактично два визначення ймовірності: як долі «сприятливих випадків» і як статистичної частоти; щоб звести друге розуміння до першого, знадобився закон великих чисел. Австрійський математик і механік Ріхард фон Мізес запропонував зворотний підхід (1914): вважати визначенням ймовірності саме межу частоти. Теорію ймовірності Мізес до математики не відносив, він вважав її досвідченою наукою, що вивчає спостережувані факти. Визначення Мізеса і викладена ним аксіоматика піддалися критиці за беззмістовність, оскільки не існує засобів для з'ясування, чи має частота заданої події межу. Обговорення концепції Мізеса іноді триває і у наші дні. Були й інші спроби обґрунтування: Джон Мейнард Кейнс (1921) і Гарольд Джеффрис (1939) запропонували розуміти ймовірність твердження як «міру правдоподібності» цього твердження. Цей підхід також час від часу згадується при обговоренні цього питання.

На початку XX століття школа Д. Гілберта поставила такі класичні розділи математики, як геометрія і аналіз, на строгу аксіоматичну основу. Аксіоматика з'явилася і в інших розділах математики, таких як теорія великих кількостей, математична логіка та ін. Назріла необхідність розробити аксіоматику і для теорії ймовірності, оскільки давнішнє, наполовину інтуїтивне і неформальне обґрунтування Бернуллі й Лапласа давно застаріло. Перший варіант такої аксіоматики дав радянський математик С. Н. Бернштейн у своєму курсі «Теорія ймовірності» (1927). Загальновизнаним у науці став варіант А. Н. Колмогорова, опублікований у 1929 – 1933 роках, він спирається на ідеях теорії міри. У другій половині XX століття Альфред Рені й А. Н. Колмогоров досліджували можливість дати обґрунтування теорії ймовірності на базі теорії інформації. В наші дні склалося чітке розуміння того, що теорія ймовірності є достовірно математичною наукою, що має у той же час найтісніші й безпосередні зв'язки з широким спектром наук про природу, а також з технічними і соціально-економічними дисциплінами.

Характерною особливістю наукових праць Петербурзької математичної школи була виняткова чіткість постановки завдань, повна математична суворість вживаних методів і разом з цим тісний зв'язок теорії з безпосередніми вимогами практики. Працями учених Петербурзької математичної школи теорія ймовірності була виведена із задвірок науки і поставлена як повноправний член у ряд точних математичних наук. Умови застосування її методів були строго визначені, а самі методи доведені до високої міри досконалості.

Учнем П. Л. Чебишева був і А. М. Ляпунов (1857 – 1918), з ім'ям якого пов'язано перше доведення центральної граничної теореми за надзвичайно загальних умов. Для доведення своєї теореми А. М. Ляпунов розробив спеціальний метод характеристичних функцій, широко вживаний у сучасній теорії ймовірності.

Учнем П. Л. Чебишева був А. А. Марков (1856 – 1922), який збагатив теорію ймовірності відкриттями і методами великої важливості. А. А. Марков істотно розширив сферу застосування закону великих чисел і центральної граничної теореми, розповсюдивши їх не лише на незалежні, але і на залежні досліди. Найважливіша заслуга А. А. Маркова полягає в тому, що він заклав основи абсолютно нової гілки теорії ймовірності – теорії випадкових, або «стохастичних», процесів. Розвиток цієї теорії становить основний зміст сучасної теорії ймовірності.

Сучасний розвиток теорії ймовірності характерний загальним зростанням зацікавленості до неї і різким розширенням кола її практичних застосувань. За останні десятиліття теорія ймовірності перетворилася на одну з наук, що найшвидше розвиваються, найтіснішим чином пов'язану з потребами практики і техніки.

С. Н. Бернштейн розробив першу закінчену аксіоматику теорії ймовірності, а також істотно розширив сферу застосування граничних теорем.

А. Я. Хинчин (1894 – 1959) відомий своїми дослідженнями в області подальшого узагальнення і посилення закону великих чисел, але головним чином своїми дослідженнями в області так званих стаціонарних випадкових процесів.

Ряд найважливіших засадничих робіт в різних областях теорії ймовірності й математичної статистики належить А. Н. Колмогорову. Він дав найбільш досконалу аксіоматичну побудову теорії ймовірності, з'єднавши її з одним з найважливіших розділів сучасної математики – метричною теорією функцій. Особливе значення мають роботи А. Н. Колмогорова в області теорії випадкових функцій (стохастичних процесів), які нині є основою усіх досліджень у цій області. Роботи А. Н. Колмогорова, що відносяться до оцінювання ефективності, лягли у основу цілого нового наукового напряму у теорії стрільби, яка потім перетворилась у ширшу науку про ефективність бойових дій.

В. І. Романівський (1879 – 1954) і М. В. Смирнов відомі своїми роботами у області математичної статистики, Є. Є. Слуцький (1880 – 1948) – у теорії випадкових процесів, Б. В. Гнеденко – у області теорії масового обслуговування, Є. Б. Динкин – у області марківських випадкових процесів, В. С. Пугачов – у області випадкових процесів при застосуванні до завдань автоматичного керування.

Розвиток зарубіжної теорії ймовірності у наш час також відбувається посиленими темпами у зв'язку з наполегливими вимогами практики. Переважною увагою користуються, як і у нас, запитання, що відносяться до випадкових процесів. Значні роботи у цій області належать, наприклад, Н. Вінеру, Д. Дубу. Важливі роботи з теорії ймовірності й математичної статистики належать Р. Фішеру, Д. Нейману і Г. Крамеру.

Останні роки ми є свідками зародження нових і своєрідних методів прикладної теорії ймовірності, поява якої пов'язана із специфікою досліджуваних технічних проблем. Йдеться, зокрема, про такі нові дисципліни, як «теорія інформації» і «теорія масового обслуговування». Виниклі з безпосередніх потреб практики, ці розділи теорії ймовірності набувають загального теоретичного значення, а круг їх застосувань швидко збільшується.

Незважаючи на доведену практикою ефективність імовірнісних методів, роль випадковості у природі, причина і межі статистичної стійкості залишаються предметом дискусій. «За 200 років, що минули з часів Лапласа і Гауса, наука так і не досягла успіху у просуванні фундаментального запитання: Коли виникає статистична стійкість?».

Елементи комбінаторики

В теорії ймовірності часто доводиться мати справу з завданнями, в яких необхідно підраховувати число можливих способів здійснення якихнебудь дій. Завдання такого типу називаються комбінаторними, а розділ математики, що присвячений розв’язанню таких завдань, – комбінаторикою.

У XVII столітті почало формуватися виразне уявлення про проблематику теорії ймовірності, з'явилися перші математичні методи розв’язання ймовірнісних завдань. Це були комбінаторні методи. Засновниками математичної теорії ймовірності стали Блез Паскаль і П’єр Ферма. Паскаль у своїх працях далеко просунув застосування комбінаторних методів, які систематизував у своїй книзі «Трактат про арифметичний трикутник» (1665).

Розглянемо деяку множину S, що складається з n різних елементів. Нехай $1 \leq k \leq n$. Множина, що складається з k елементів, називається впорядкованою, якщо кожному елементу цієї великої кількості поставлено у відповідність число від 1 до k, причому різним елементам великої кількості відповідають різні числа.

Розміщеннями з n елементів по k елементах називаються впорядковані підмножини множини S, що складаються з k різних елементів і відрізняються один від одного складом елементів або порядком їх розташування.

Число розміщень з n елементів по k дорівнює

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Перестановками з n елементів називаються впорядковані підмножини множини S, що складаються з усіх елементів цієї великої кількості та відрізняються один від одного тільки порядком їх розташування. Число переставлянь з n елементів дорівнює

$$P_n = n!.$$

Поєднаннями з n елементів по k елементах називаються впорядковані підмножини множини S, що складаються з k різних елементів і відрізняються один від одного тільки складом елементів.

Число поєднань з n елементів по k дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Наведемо декілька прикладів застосування комбінаторики для вирішення завдань.

Приклад 1. Маша посварилася з Петром і не бажає їхати з ним в одному автобусі. Від гуртожитку до інституту з 7-ї до 8-ї години відправляються п'ять автобусів. Той, хто не встиг на останній з цих автобусів, спізнюється на лекцію. Скількома способами Маша і Петро можуть доїхати до інституту у різних автобусах і не запізнитися на лекцію?

Рішення. Петро може доїхати до інституту $n_1 = 5$ різними способами, тобто на одному з п'яти автобусів. Маші залишається тільки $n_2 = 4$ способи, оскільки в один з автобусів сяде Петро. Таким чином, за правилом твору у Петра і Маші є $n_1 n_2 = 4 \cdot 5 = 20$ різних способів доїхати до інституту у різних автобусах і не запізнитися на лекцію.

Відповідь: Маша і Петро можуть доїхати до інституту 20-ма різними способами.

Приклад 2. Начальник служби безпеки банку повинен щодня розставляти десять охоронців по десяти постах. У цілях посилення безпеки одна і та ж комбінація розставлення охоронців по постах не може повторюватися частіше за один раз у місяць. Щоб оцінити, чи можливо це, знайти число різних комбінацій розставлення охоронців.

Рішення: Число способів розставлення десяти охоронців по десяти постах, існуючих у начальника служби безпеки, описується числом перестановок з 10 елементів, тобто

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800.$$

Відповідь: Кількість різних комбінацій розставлення охоронців буде дорівнювати $3\,628\,800$.

Приклад 3. Новий президент банку повинен призначити двох нових віце-президентів з числа десяти директорів. Скільки способів існує у президента, якщо: а) один з віце-президентів (перший) за посадою вище за іншого; б) віце-президенти за посадою рівні між собою.

Рішення:

а) Число способів вибору двох кандидатів на дві різні посади з десяти претендентів описується числом розміщень з 10 елементів по 2, тобто

$$A_{10}^{2} = \frac{10!}{8!} = 90.$$

б) Число способів вибору двох кандидатів на дві однакові посади з десяти претендентів описується числом елементів із 10 елементів по 2, тобто

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45.$$

Відповідь: а) 90; б) 45.

Завдання для самостійного вирішення

1. Визначити, скількома способами можна розмістити на шахівниці вісім тур так, щоб вони не били один одного.
2. У кредитному відділі банку працюють вісім чоловік. Скільки існує способів розподілити між ними три премії : а) однакового розміру; б) різних розмірів, відомих заздалегідь?
3. Одна із сторін, що воюють, захопила у полон 12 солдатів, а інша – 15. Визначити, скількома способами сторони можуть обміняти семеро військовополонених.
4. Петро і Маша колекціонують відеокасети. У Петра є 30 комедій, 80 бойовиків і 7 мелодрам, у Маші – 20 комедій, 5 бойовиків і 90 мелодрам. Скількома способами Петро і Маша можуть обмінятися трьома комедіями, двома бойовиками і однією мелодрамою?

5. У сесію впродовж 20 днів студенти однієї групи повинні скласти п'ять іспитів. Скількома способами можна скласти розклад іспитів, якщо: а) забороняється складати два іспити у один день; б) між двома іспитами має пройти хоч би один день для підготовки?

6. У банку дев'ять засновників. Реєстраційні документи зберігаються у сейфі. Скільки замків повинен мати сейф і скільки ключів до них треба виготовити, щоб доступ до вмісту сейфа був можливий тільки тоді, коли збереться не менше шести засновників?

7. Маша вирішила помиритися з Петром і подзвонити йому, але не пам’ятає дві останні цифри його телефону і набирає їх навмання. Знайти найбільш можливе число невдалих спроб, які зробить Маша, перш ніж додзвониться до Петра.

8. Скількома способами можна розподілити 6 яблук, 8 груш і 10 слив між трьома дітьми? Скількома способами це можна зробити так, щоб кожна дитина отримала, щонайменше, одно яблуко, одну сливу і одну грушу?

9. Логін повинен розпочинатися з англійської букви S і складатися з чотирьох букв (у англійському алфавіті 26 букв). Скільки можна утворити таких логінів, якщо: а) усі букви у ньому мають бути різними? б) букви можуть повторюватися?

10. Кожен з учнів класу під час канікул побував у поході або на екскурсії. У поході були 75 % учнів класу, а на екскурсії – 60 % класу, причому деякі учні встигли прийняти участь у обох заходах. Який відсоток таких учнів?

11. Скільки існує різних автомобільних номерів, які складаються з чотирьох цифр, якщо перша з них не дорівнює нулю?

12. З восьми депутатів потрібно вибрати голову рахункової комісії і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

13. Скількома способами сім'я з чотирьох осіб може бути розсаджена на одному дивані?

14. У бібліотеці на книжковій полиці стоять 30 однакових посібників. Скількома способами можна зняти з полиці шість посібників?

15. Скількома способами можна скласти пароль з шести цифр, якщо жодна цифра не повторюється?

16. Скільки існує різних діагоналей у опуклому багатокутнику?

17. Скільки існує різних перестановок букв у слові " дорога"?

18. У групі з 20 студентів 12 відмінників. Скількома способами можна у цій групі розподілити сім пільгових путівок між п'ятьма відмінниками і двома, які не є відмінниками.

19. У магазині після розпродажу залишилося 14 ноутбуків, 10 сканерів, 18 принтерів, 24 стільникові телефони однієї моделі. Скількома способами можна закупити для офісу п'ять ноутбуків, три сканери, чотири принтери і вісім телефонів?

20. У магазині продається п'ять моделей стільникових телефонів однієї марки. Скількома способами можна закупити для організації 10 телефонів?

21. Скількома способами можуть впасти N гральних кісток?

22. Для шкільного комітету самоврядування обирається по дві людини (президент і віце-президент) з кожного 9-го, 10-го і 11-го класу. Скількома способами можна скласти комітет, якщо у трьох дев'ятих класах вчиться по 25 чоловік, у двох десятих і у двох одинадцятих класах вчиться по 20 чоловік у кожному?

23. Скількома способами можна розмістити 12 чоловік за круглим столом, якщо серед цих 12-ти є присутніми дві людини, які не повинні сидіти поруч.

24. Скількома різними маршрутами можна рознести кореспонденцію по п’яти адресах?

25. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, якщо: а) цифри не повторюються; б) цифри можуть повторюватися?

26. Студентам треба скласти 4 іспити за 8 днів. Скількома способами можна скласти розклад складання іспитів?

27. Скількома способами можна вибрати одну квітку з кошику, у якому є 9 гвоздик, 15 троянд і 7 хризантеми?

28. У хокейному турі беруть участь 6 команд. Кожна команда повинна зіграти з кожною одну гру. Скільки буде зіграно ігор у турнірі?

29. З трьох класів спортивної школи треба скласти команду з трьох чоловік, узявши по одному учневі з кожного класу. Скільки різних команд можна скласти, якщо у класах, відповідно, до 18, 20 і 22 учнів?

30. Є 5 конвертів без марок і 4 види марок однакової вартості. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою для листа?

31. Скільки словників треба видати, щоб перекладати з будь-якої з п'яти мов на будь-яку іншу з цих мов?

32. У баскетболі у заявці дванадцять гравців, з яких два центрових, п'ять гравців середньої лінії і п'ять захисників. На поле виходять п'ять гравців. Скількома способами тренер може сформувати п'ятірку, якщо у ній мають бути центровий, два гравці середньої лінії і два захисники?

33. На свято прийшло десять гостей, причому парами, – жінка і чоловік. Скількома способами їх можна розсадити за святковим столом, якщо жінка повинна сидіти зліва від чоловіка? Необхідно врахувати і хазяїв свята.

Основні поняття теорії ймовірності

Дослід, експеримент, спостереження називаються випробуванням. Здійснено випробування. Подія розглядається як результат цього випробування.

Визначення. Події називають ***незалежними***, якщо поява однієї з подій у випробуванні не залежить від появи інших подій у цьому ж випробуванні.

Визначення. Події називають ***несумісними,*** якщо поява однієї з них виключає появу інших подій у одному і тому ж випробуванні.

Визначення. Подія називається ***достовірною,*** якщо при випробуванні вона станеться обов'язково.

Визначення. Подія називається ***неможливою***, якщо при випробуванні вона не станеться.

Визначення. Декілька подій утворюють ***повну групу подій***, якщо у результаті випробування з'явиться хоч би одна з них. Іншими словами, повна група подій є достовірною подією.

Теорія ймовірності є одним з розділів математики, тому необхідно ввести операцію суми і добутку подій.

Визначення. Сумою подій A і B називається подія C, яка полягає у тому, що у результаті випробування станеться або подія A, або подія B, або події A і B станутьcя одночасно. Сума подій позначається

$$A + B = C \ (A \cup B = C).$$

Визначення. Добутком подій A і B називається подія C, яка полягає у тому, що у результаті випробування події A і B станутьcя одночасно.

Добуток подій позначається

$$A \cdot B = C \ (A \cap B = C).$$

Визначення. Протилежною до події A називається подія $\bar{A}$ така, що події A і $\bar{A}$ складають повну групу несумісних подій. Іншими словами, у результаті випробування з'явиться подія A або подія $\bar{A}$.

Класичне визначення ймовірності

Ймовірність – це одно з основних понять теорії ймовірності. Існує декілька визначень цього поняття. Приведемо класичне визначення ймовірності.

Визначення. Ймовірністю події A у випробуванні називається числова міра можливості появи події A, коли випробувань досить багато і усі вони проводяться в однакових умовах. Ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m – кількість сприятливих результатів випробування, тобто поява події A, а n – кількість усіх результатів випробування.

Ймовірність змінюється у межах

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Виходячи з визначення ймовірності, вичислимо ймовірність суми і твору подій. Ймовірність суми двох подій A і B визначається за формулою

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Ймовірність добутку двох подій A і B обчислюється таким чином:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Тут $P(B|A)$ – умовна ймовірність, тобто ймовірність події B, обчислена у припущенні, що подія A вже настала.

Якщо події A і B незалежні, то $P(B|A) = P(B)$.

Якщо події A і B несумісні, тоді $P(B|A) = 0$ і, як наслідок цього, $P(A \cdot B) = 0$.

У разі, коли події A і B несумісні, ймовірність події $A + B$ обчислюється таким чином:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Наведемо приклади визначення ймовірності події.

Приклад 1. Номер машини містить 5 цифр, виключається номер 00000. Знайти ймовірність того, що у номері зустрічаються рівно 3 цифри «6», причому розташовані вони підряд.

Рішення. Для вирішення завдання скористаємося класичною формулою знаходження ймовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

тут m – кількість сприятливих результатів досвіду, а n – кількість усіх результатів досвіду.

Кількість усіх результатів $n = 99999$, оскільки виключається номер машини 00000.

Порахуємо кількість сприятливих результатів.

Оскільки за умовами завдання цифр «6» три і вони розташовані підряд, то нас задовольняють такі варіанти:

666XX, X666X, XX666.

Де X це числа від 0 до 9, виключаючи 6, отже, кожною з цих комбінацій буде 9·9=81, а оскільки їх три, то

$$m = 81 \cdot 3 = 243.$$

І остаточно

$$P(A) = \frac{243}{99999} = \frac{27}{11111} = 0{,}0024\,.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}0024.$

Приклад 2. У партії з 20 виробів 5 виробів мають прихований дефект. Яка ймовірність того, що з узятих навмання 4-х виробів 2 вироби мають прихований дефект.

Рішення. У партії з 20-ти виробів 5 виробів мають прихований дефект. Нам необхідно взяти 4 вироби, з яких 2 вироби мають прихований дефект. Ця подія полягає у тому, що необхідно навмання узяти 2 вироби, що мають прихований дефект, і 2 вироби без дефекту, тобто

$$A = A_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_2.$$

A_1 – подія полягає у тому, що візьмемо виріб з прихованим дефектом. A_2 – подія полягає у тому, що візьмемо виріб без дефекту.

Підібрати такий набір можна C_4^2 способами.

Тоді ймовірність події A обчислюватиметься за формулою

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_2) =$$

$$= P(A_1) \cdot \; P(A_1|A_1) \cdot \; P\Big(A_2\Big|(A_1 \cdot A_1)\Big) \cdot P(A_2|(A_1 \cdot A_1 \cdot A_2)) \cdot C_4^2 \, .$$

Використовуючи класичну формулу обчислення ймовірності

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

маємо

$$P(A_1) = \frac{5}{20}, \qquad P(A_1|A_1) = \frac{4}{19}, \qquad P(A_2|(A_1 \cdot A_1)) = \frac{15}{18},$$

$$P(A_2|(A_1 \cdot A_1 \cdot A_2)) = \frac{14}{17}.$$

І остаточно маємо

$$P(A) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{15}{18} \cdot \frac{14}{17} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 0{,}2167.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}2167$.

Приклад 3. На склад з трьох підприємств надходить продукція першого й другого сорту. У продукції першого підприємства міститься 15 % другосортних виробів, у продукції другого підприємства – 25%, у продукції третього підприємства – 30 %. Чому дорівнює ймовірність того, що серед трьох виробів, по одному з продукції кожного підприємства, виявляться першосортними два вироби.

Рішення.

Позначимо події:

A_1 – виріб першого підприємства виявився першосортним;

A_2 – виріб другого підприємства виявився першосортним;

A_3 – виріб третього підприємства виявився першосортним.

Тоді ймовірність того, що серед трьох виробів (по одному з продукції кожного підприємства) виявляться першосортними два вироби, буде дорівнювати

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$$

Тут подія $\bar{A}_1$ протилежна події A_1. За умовою $P(A_1) = 0{,}85$, тоді $P(\bar{A}_1) = 0{,}15$. Подія $\bar{A}_2$ протилежна події A_2. За умовою $P(A_2) = 0{,}75$, тоді $P(\bar{A}_2) = 0{,}25$. Подія $\bar{A}_3$ протилежна події A_3. За умовою $P(A_3) = 0{,}7$, тоді $P(\bar{A}_3) = 0{,}3$.

В силу того, що події $A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$, $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$, $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ попарно несумісніі, то

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3) + P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot$$
$$\cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}85 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + 0{,}85 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 + 0{,}15 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 0{,}4188.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}4188$.

Приклад 4. При грі у великий теніс гравець, який подає, бере 2 м'ячики з кошика. Відіграні м'ячики повертаються у кошик. Вважається, що гравець використовує обидва м'ячики. Скільки треба покласти у кошик м'ячиків, щоб три подання гравець виконував неграними м'ячиками з ймовірністю більше 0,5?

Рішення. Припустимо, що у кошику n м'ячиків. Перший раз гравець бере два м'ячики. Коли гравець бере м'ячики на друге подання невикористаних м'ячиків у кошику $n-2$. Тоді ймовірність узяти два невикористаних м'ячика обчислюється за формулою

$$P=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}.$$

Беручи м'ячики на третє подання, гравець може узяти з кошика використаних м'ячиків $n - 4$. При цьому ймовірність узяти два невикористаних м'ячики визначатиметься таким чином:

$$P(A)=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n}\cdot\frac{n-5}{n-1}.$$

Для вирішення завдання необхідно розв’язати нерівність

$$\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n}\cdot\frac{n-5}{n-1}>\frac{1}{2}.$$

Вирішувати цю нерівність будемо методом підбору. Покладемо

$$n=20$$

$$P(A)=\frac{18}{20}\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}=0{,}5086>0{,}5.$$

Тепер візьмемо $n=19$:

$$P(A)=\frac{17}{19}\cdot\frac{16}{18}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}=0{,}4884<0{,}5.$$

Отже, у кошик треба покласти не менше 20 м'ячиків.

Відповідь: щоб гравець три подання зробив не використаними м'ячиками з ймовірністю більше 0,5, у кошик треба покласти не менше 20 м'ячиків

Завдання для самостійного вирішення

1. Кинуто дві гральні кістки. Знайти ймовірність таких подій: а) сума тих очок, що випали, дорівнює семи; б) сума очок, які випали, дорівнює восьми, а різниця – чотирьом; в) сума очок, які випали, дорівнює восьми, якщо відомо, що їх різниця дорівнює чотирьом; г) сума очок, які випали, дорівнює п'яти, а додаток – чотирьом.

2. Куб, усі грані якого забарвлені, розпилений на тисячу кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик має забарвлених граней: а) одну; б) дві; в) три.

3. Монета кинута двічі. Знайти ймовірність того, що хоч би один раз з'явиться «герб».

4. У коробці шість однакових, занумерованих кубиків. Навмання по одному витягають усі кубики. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих кубиків з'являться у зростаючому порядку.

5. Визначити ймовірність того, що при киданні трьох гральних кісток шестірка випаде на одній (байдуже якій) кістці, якщо на гранях двох інших кісток випадуть числа очок, які не однакові між собою (і не дорівнюють шести).

6. У партії з 20 виробів 5 виробів мають прихований дефект. Яка ймовірність того, що з узятих навмання 4-х виробів 2 вироби є дефектними.

7. У ящику 100 деталей, з них 10 бракованих. Навмання витягнуто чотири деталі. Знайти ймовірність того, що серед витягнутих деталей : а) немає бракованих; б) немає якісних.

8. В урні дві білі і чотири чорні кулі. З урни одна за іншою виймаються усі кулі, що знаходяться у ній. Знайти ймовірність того, що остання вийнята куля буде чорною.

9. У старовинній грі у кістки необхідно було для виграшу отримати при киданні трьох гральних кісток суму очок, що перевищує 10. Знайти ймовірність: а) викинути 11 і 12 очок; б) виграшу.

10. На склад з трьох підприємств надходить продукція першого і другого сорту. В продукції першого підприємства міститься 15 % другосортних виробів, у продукції другого підприємства – 25 %, у продукції третього підприємства – 30 %. Чому дорівнює ймовірність того, що серед трьох ви-

робів (по одному з продукції кожного підприємства) виявляться першосортними два вироби.

11. Суспільство складається з 5 чоловіків і 10 жінок. Знайти ймовірність того, що при випадковому угрупуванні їх на 5 підгруп по три чоловіка у кожній групі буде чоловік.

12. Двадцять чоловік, серед яких 10 чоловіків і 10 жінок, випадковим чином групуються попарно. Знайти ймовірність того, що кожна з 10 пар складається з осіб різної статі.

13. 9 пасажирів навмання розсаджуються у трьох вагонах. Знайти ймовірність того, що а) у кожен вагон сяде по 3 пасажири; б) у один вагон сядуть 4, в інший – 3 і у третій – 2 пасажири.

14. Скільки разів треба кидати пару гральних кісток, щоб з ймовірністю, більшою 0,5, чекати суму очок, яка дорівнює 12, хоч би один раз?

15. Три літаки, незалежно один від одного, роблять поодиноке бомбометання по деякій цілі. Перший літак скидає 4 бомби по 250 кг, другий – 2 бомби по 500 кг, третій - одну бомбу у 1000 кг. Ймовірність попадання для першого літака дорівнює 0,2, для другого – 0,3, для третього – 0,4. Для руйнування цілі досить попадання однієї бомби вагою не менше 500 кг або двох – вагою по 250 кг. Знайти ймовірність руйнування цілі.

16. Два гравці по черзі кидають гральну кістку, кожен по одному разу. Вважається, що виграє той, хто отримає найбільше число очок. Знайти ймовірність виграшу першого гравця.

17. Літак-бомбардувальник для виконання бойового завдання повинен пройти через зону зенітної оборони супротивника, у якій, незалежно один від одного, ведуть вогонь чотири зенітні знаряддя. Кожне знаряддя робить по 10 пострілів. Ймовірність попадання у літак при одному пострілі дорівнює 0,02. Щоб збити літак досить одного попадання. У випадку, якщо літак не буде збитий вогнем зенітної артилерії, він виходить на мету і скидає бомби. Ймовірність виконання бойового завдання при цьому дорівнює

0,6, Знайти ймовірність того, що бомбардувальник виконає завдання, незважаючи на протидію зенітної артилерії.

18. Радист тричі викликає кореспондента. Ймовірність того, що буде прийнятий перший виклик, дорівнює 0,2, другий виклик – 0,3, третій виклик – 0,4. За умовами прийому, події, які полягають у тому, що цей виклик буде почутий, незалежні. Знайти ймовірність того, що кореспондент взагалі почує виклик.

19. Два гравці кидають монету по 4 рази кожен. ВиграВцем вважається той, хто отримає більше гербів. Знайти ймовірність того, що виграє перший гравець.

20. Робиться три незалежних постріли по мішені, що складається з «яблучка» і двох концентричних кілець. При одному пострілі ймовірність попадання у «яблучко» – 0,12, у перше кільце – 0,15, у друге кільце – 0,18. Знайти ймовірність того, що у результаті стрільби буде два попадання у яблучко і одно – у перше кільце.

21. Ведеться стрільба по деякій цілі, ймовірність попадання у яку при одному пострілі дорівнює 0,2. Стрільба припиняється при першому попаданні. Знайти ймовірність того, що буде зроблено рівно 6 пострілів.

22. Два гравці виймають по черзі по одній кістці з повного набору доміно. Кожен має право вийняти не більше трьох кісток. Виграє той, хто перший візьме подвійну кістку («дупель»). Знайти ймовірність виграшу кожного гравця.

23. Боєзапас літака налічує 120 патронів. Стрільба ведеться чергами, тривалістю 1 сек. Швидкострільність зброї – 600 пострілів у хвилину. Стрільба припиняється при попаданні у ціль. Ймовірність хоч би одного попадання для кожної черги дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що літак витратить увесь свій боєзапас.

24. Літак складається з трьох різних по уразливості частин. Для виведення із ладу літака досить одного попадання у першу частину, або двох

попадань у другу, або трьох попадань у третю частину. За умови попадання снаряда у літак ймовірність потрапити у першу частину – 0,15, у другу – 0,30, у третю – 0,55. Знайти ймовірність виведення літака з ладу за наявності: а) одного, б), двох, в) трьох попадань.

25. З повної колоди (52 карти) виймають одночасно три карти. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих карт знайдеться хоч би одна карта червоної масті.

26. В урні 2 білі, 3 чорні і 5 червоних куль. Три кулі виймають навмання. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль хоча б дві будуть різного кольору.

27. Ймовірність попадання у мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. По мішені робиться 7 незалежних пострілів. Знайти ймовірність того, що буде хоча б одне попадання у мішень.

28. Дві виробничі ділянки, що випускають однотипну продукцію за зміну видали однакову кількість виробів. Можливий відсоток браку на першій ділянці становить 5 %, на другому – 4 %. Знайти ймовірність того, що навмання узята деталь, з числа виробів тих, що надійшли на склад, не відповідає встановленим вимогам.

29. На склад поступило 1500 виробів з першої фабрики і 2000 виробів з другої. Відомо, що середній відсоток нестандартних виробів серед продукції першої фабрики дорівнює 3 %, другий, – 2 %. Знайти ймовірність того, що навмання узятий із складу виріб буде нестандартним.

30. В урні 4 білі і 6 чорних куль. З урни навмання витягнуто дві кулі. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.

31. Сім різних куль довільно розкладаються по семи різних коробках. Яка ймовірність того, що : а) у кожній коробці буде по кулі; б) рівно одна коробка виявиться порожньою.

32. У накладі «Спортлото 6 з 49» бере участь 10000000. Знайти ймовірність події А – хоч би у одній з цих карток закреслені 6 виграшних номерів.

33. Екзаменаційний білет має 3 запитання. Ймовірність того, що студент відповість на перше й друге запитання однакова й дорівнює 0,9; на третє запитання – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент дасть відповідь : а) на усі запитання; б) принаймні, на два запитання.

34. У правій і лівій кишенях є по три монети у 10 коп. і по чотири монети у 5 коп. З правої кишені у ліву навмання перекладають 5 монет. Визначити ймовірність витягання з лівої кишені після перекладання монети гідністю у 10 коп.

35. У результаті систематичного контролю якості деталей, що виготовляються підприємством, встановлено, що брак дорівнює у середньому 5 %. Скільки виготовлених деталей треба узяти, щоб найбільш вірогідне число придатних серед них дорівнювало 60 шт.?

36. Турист, заблукавши у лісі, вийшов на полянку, від якої у різні сторони ведуть 5 стежок. Якщо турист піде по першій стежці, то ймовірність виходу його з лісу впродовж години становила 0,6; якщо по другій – 0,3; якщо по третій – 0,2; якщо по четвертій – 0,1; якщо по п'ятій – 0,1. Яка ймовірність того, що турист пішов по першій стежці, якщо через годину він вийшов з лісу?

37. У фотоаматора у коробці є 5 однакових касет з фотоплівками, з яких 3 плівки вже засняті, а дві – чисті. Будучи не у змозі встановити, які з них засняті, він вирішує відібрати навмання дві плівки, а інші проявити. Яка ймовірність того, що з відібраних плівок виявляться чистими : а) обидві плівки; б) хоч би одна плівка?

38. У магазині є 5 холодильників. Ймовірність виходу з ладу кожного холодильника впродовж року дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що впродовж року ремонту потребує : 1) 4 холодильника; 2) не менше 2 холо-

дильників; 3) не більше одного холодильника; 4) не менше одного холодильника.

39. З шести букв М, А, Ш, І, Н, А вибирають одну за одною і приставляють одна до одній у порядку вибору чотири букви. Яка ймовірність того, що при цьому вийде слово : а) «ШИНА»; б) «МАША».

40. Для трьох роздрібних торгових підприємств визначений плановий рівень прибутку. Ймовірність того, що перше підприємство виконає план прибутку, дорівнює 90 %, для другого вона становить 95 %, для третього 100%. Яка ймовірність того, що плановий рівень прибутку буде досягнутий : а) усіма підприємствами; б) тільки двома підприємствами; в) хоча би одним підприємством.

41. Ймовірність поломки одного з п'яти працюючих верстатів незалежно один від одного дорівнює 0,2. Якщо відбувається поломка верстата, то він до кінця дня не працює. Яка ймовірність того, що : а) два верстати зламаються впродовж дня; б) не менше одного верстата працюватимуть без поломки?

42. Студент складає три іспити. Ймовірність успішної здачі першого іспиту 0,9, другого – 0,65, третього – 0,35. Знайти ймовірність того, що він не зможе скласти хоча би один іспит.

43. Ймовірність того, що виріб є дефектним, дорівнює 0,1. Скільки потрібно вибрати виробів, щоб серед них з ймовірністю більше 0,96 виявилося хоч би одно бездефектне?

44. Адвокат виграє у суді у середньому 70 % справ. Знайдіть ймовірність того, що він з 8 справ виграє більше половини.

45. У бібліотеці є 5 методичок випуску 1992 року і 9 методичок з тієї ж теми випуску 1996 року. Бібліотекар видає на групу 6 методичок. Яка ймовірність того, що першій групі, яка прийшла, буде видано 5 методичок випуску 1996 року, якщо бібліотекар бере методички довільно?

46. З 28 приватних банків, працюючих у місті, порушення у платі податків є у 12 банках. Податкова інспекція здійснює перевірку трьох банків, вибираючи їх з N банків випадковим чином. Вибрані банки перевіряються незалежно один від одного. Допущені у банку, що перевіряється, порушення можуть бути виявлені інспекцією з ймовірністю $p = 0,7$. Яка ймовірність того, що у ході перевірки буде встановлений факт наявності серед приватних банків міста таких банків, які допускають порушення у сплаті податків?

47. У телеательє є три кінескопи. Ймовірність несправності кожного з них, відповідно, дорівнює 0,1; 0,2; 0,1. Яка ймовірність того, що серед цих кінескопів справними виявляться : а) два кінескопи; б) хоч би один кінескоп.

48. Пароль для входу у комп'ютерну базу даних складається з 7 цифр. Яка ймовірність правильного набору пароля з першого разу, якщо комбінація цифр є строго зростаючою послідовністю.

49. Кожен з 4-х свідків може вказати на один з 4-х предметів. Свідки вибирають предмети випадково і незалежно один від одного. Знайдіть ймовірність того, що усі свідки вкажуть на один і той же предмет.

50. Електричний ланцюг складається з трьох послідовно увімкнених і незалежно працюючих приладів. Ймовірність виходу з ладу першого, другого і третього приладу, відповідно, дорівнює 0,25, 0,05 і 0,1. Вичисліть ймовірність того, що у ланцюзі не буде струму.

51. На заводі 35% деталей випускаються бракованими. Партія складається з 8 деталей. Знайдіть найвірогідніше число бракованих деталей у партії і ймовірність того, що у партії буде така кількість бракованих деталей.

52. Троє мисливців одночасно вистрілили у ведмедя. Той був убитий, і у шкурі опинилися дві кулі. Відомо, що перший мисливець попадає у

ціль з ймовірністю 0,3, другий – 0,5, третій – 0,8. Визначте ймовірність таких подій : у ведмедя влучили перші два мисливці.

53. Відділ технічного контролю перевіряє вироби, що надходять з двох цехів, на стандартність. Ймовірність того, що виріб цеху № 1, виконаний стандартно, дорівнює 0,9; для виробу цеху № 2 ця ймовірність дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів (по одному від кожного цеху) тільки один стандартний.

54. Для кожної з трьох виробничих ділянок ймовірність невиконання плану, відповідно, дорівнює: 0,02; 0,05 і 0,01. Знайти ймовірність того, що до моменту підведення підсумків роботи планове завдання буде виконано двома ділянками.

55. На підносі 5 пиріжків з картоплею і 4 пиріжка з капустою. Навмання узяли 3 пиріжка. Яка ймовірність того, що серед них хоч би 2 з капустою?

56. У магазині виставлено для продажу 10 виробів, серед яких 4 вироби не якісні. Яка ймовірність того, що узяті випадково 2 вироби будуть не якісними.

57. У цеху працюють три верстати. Ймовірність відмови впродовж зміни для верстатів, відповідно, дорівнює 0,1, 0,2 і 0,15. Знайти ймовірність того, що впродовж зміни безвідмовно пропрацюють два верстати.

58. Гральну кістку кидають двічі. Знайти ймовірність того, що обидва рази з'явиться однакове число очок.

59. В урні 3 білі кулі і 5 чорних. Одночасно виймають 3 кулі. Що вірогідніше: вийняти дві білі кулі і одну чорну кулю або 2 чорні і одну білу кулю?

60. В урні 20 куль з номерами 1, 2,., 20. Навмання вибирають 6 куль. Знайти ймовірність того, що серед них є кулі з номерами 1 і 2.

61. З 12 лотерейних білетів, серед яких 4 виграшних, беруть 6. Яка ймовірність того, що серед них хоч би один виграшний?

62. Кидають дві гральні кістки. Яка ймовірність того, що сума очок, які випали, не більше трьох?

63. У першому ящику знаходяться кулі з номерами 1 і 5, у другому – з номерами 6 і 10. З кожного ящика виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль : а) не менше 7; б) дорівнює 11?

64. У лотерейному білеті треба закреслити 6 номерів з 49. Яка ймовірність вгадати: а) 6 номерів; б) 5 номерів; в) 4 номери; г) 3 номери; д) 2 номери; е) один номер?

65. У розіграші першості з баскетболу беруть участь 18 команд, з яких випадковим чином формуються 2 групи по 9 команд у кожній. Серед учасників змагань є 5 команд екстракласу. Знайти ймовірність таких подій: А ={усі команди екстракласу потраплять до однієї і тієї ж групи}; б ={дві команди екстракласу потраплять до однієї з груп, а три – до іншої}.

66. З 40 запитань, що входять у екзаменаційні білети, студент знає 30. Знайти ймовірність того, що серед трьох вибраних запитань студент знає відповідь на : а) 3 запитання; б) 2 запитання; в) одне запитання.

67. З букв А, З, Н, Н, А, А розрізної азбуки складається навмання слово, що має 6 букв. Яка ймовірність того, що вийде слово «АНАНАС»?

68. Технічний пристрій, що складається з 10 блоків, вийшов з ладу через відмови якогось блока. Для його відшукування перевіряють усі блоки по черзі, поки не виявиться несправний блок. Визначити ймовірність того, що перевіряти доведеться не менше половини усіх блоків.

69. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 навмання складається тризначне число без цифр, що повторюються. Яка ймовірність того, що це число буде парним?

70. У шаховому турнірі беруть участь 12 чоловік, які по долі розбиваються на дві групи по 6 чоловік. Знайти ймовірність того, що двоє найбільш сильних шахістів потраплять у різні групи.

71. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі увійшли три людини. Кожен з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому

поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність таких подій : А ={усі пасажири вийдуть на четвертому поверсі}; В ={усі пасажири вийдуть одночасно (на одному і тому ж поверсі)}; С ={усі пасажири вийдуть на різних поверхах}.

72. Через автобусну зупинку проходять автобуси п'яти маршрутів з рівними проміжками у часі. Пасажир чекає автобус одного з маршрутів № 1 або № 3. Яка ймовірність того, що потрібний йому автобус буде одним з перших двох, що підійшли до зупинки?

73. При грі у великий теніс гравець, який подає, бере 2 м'ячики з кошику. Відіграні м'ячики повертаються у кошик. Вважається, що гравець використовує обидва м'ячики. Скільки треба покласти у кошик м'ячиків, щоб два подання гравець виконував не граними м'ячиками з ймовірністю більше 0,5?

74. При грі у великий теніс гравець, який подає, бере 2 м'ячики з кошику. Відіграні м'ячики повертаються у кошик. Вважається, що гравець використовує обидва м'ячики. Скільки треба покласти у кошик м'ячиків, щоб три подання гравець виконував не граними м'ячиками з ймовірністю більше 0,5?

75. У барабані револьвера сім гнізд, з них у п'яти закладені патрони, а два залишені порожніми. Барабан наводиться у обертання, внаслідок чого проти ствола випадковим чином виявляється одно з гнізд. Після цього натискається спусковий гачок. Якщо осередок був порожній, пострілу не відбувається. Знайти ймовірність того, що, повторивши такий досвід двічі підряд, ми обидва рази не вистрілимо; що обидва рази постріл станеться.

76. З повної колоди карт (52 листи, 4 масті) виймається відразу декілька карт. Скільки карт треба вийняти для того, щоб з ймовірністю, більшою чим 0,50, стверджувати, що серед них будуть карти однієї масті?

77. Чотири кульки випадковим чином розкидаються по чотирьох лунках; кожна кулька потрапляє у ту або іншу лунку з однаковою ймовірністю

і незалежно від інших (перешкод до попадання у одну і ту ж лунку декількох кульок немає). Знайти ймовірність того, що у одній з лунок опиниться три кульки, в іншій – одна, а у двох інших лунках кульок не буде.

78. Троє грають у преферанс. Кожному гравцеві здано по десять карт, і дві залишені у прикупі. У одного з тих, що грають, на руках шість карт бубнової масті, а чотири – інших мастей. Він скидає дві карти з цих чотирьох і бере собі прикуп. Знайти ймовірність того, що у прикупі опиняться дві бубнові карти.

79. Відомо, що курс євро до гривні може зрости з ймовірністю 0,55, а курс долара до рубля може зрости з ймовірністю 0,35. Ймовірність того, що зростуть обидва курси, становить 0,3. Знайти ймовірність того, що курс євро або долара по відношенню до гривні зросте.

80. У партії 100 виробів, з яких шість мають дефекти. Партія довільно розділена на дві рівні частини, які відправлені двом споживачам. Знайти ймовірність таких подій : а) усі браковані вироби дістануться одному споживачеві; б) браковані вироби дістануться обом споживачам порівну.

81. Петро шукає роботу. Він побував на співбесідах у банку і страховій компанії. Ймовірність свого успіху у банку він оцінює у 0,5, а у страховій компанії – у 0,6. Крім того, він сподівається, що з ймовірністю 0,3 йому надійдуть пропозиції від двох організацій відразу. Знайти ймовірність того, що Петро отримає хоч би одну пропозицію роботи.

82. Менеджер з кадрів розмістив у мережі Internet оголошення про те, що банку потрібен начальник відділу боргових зобов'язань, і отримав 300 резюме. З минулого досвіду відомо, що ймовірність того, що претендент має вищу економічну освіту, дорівнює 0,3, ймовірність того, що претендент має досвід керівної роботи у банку, – 0,7, а ймовірність того, що претендент має і вищу економічну освіту, і досвід керівної роботи, – 0,2.

Оцінити кількість претендентів, що мають досвід керівної роботи або вищу економічну освіту.

83. Відомо, що п'ять з сорока пасажирів літака замішані у викраденні великої грошової суми. В аеропорту до трапа літака підійшов інспектор кримінального розшуку і заявив, що для виявлення хоч би одного злочинця йому досить зробити обшук у шести навмання вибраних пасажирів. Що керувало інспектором: тверезий розрахунок або ризик?

84. На автомобілі «Мерседес-600», що належить президентові банку і до якого проявляють інтерес викрадачі, встановлені електронна сигналізація і механічне блокування важеля перемикання передач. Ймовірність того, що викрадач впорається з сигналізацією, дорівнює 0,2, а ймовірність того, що він зламає блокування, дорівнює 0,1. Сьогодні президент, ризикнувши, відправився у гості без водія і охорони. Знайти ймовірність таких подій: а) автомобіль буде викрадений; б) викрадач впорається тільки з однією системою захисту.

85. Журі складається з трьох суддів, що виносять ухвалу незалежно один від одного: двоє з них, кожен з ймовірністю 0,8, приймають правильне рішення, а третій для винесення ухвали підкидає монету. Остаточне рішення приймається більшістю голосів. Знайти ймовірність винесення правильної ухвали.

86. Нафтовидобувна компанія проводить бурові роботи у трьох різних місцях: A, B і C. Ймовірність успішного буріння у A, B і C дорівнює відповідно до 0,5, 0,4 і 0,1. Припустивши, що буріння ведеться успішно у місцях A, B і C, є незалежними подіями, обчислити ймовірність таких подій: а) хоч би одно буріння виявиться успішним; б) лише одно буріння виявиться успішним.

87. З кошику, що містить три червоних яблука і сім зелених, виймають по черзі усі яблука. Знайти ймовірність того, що другим за рахунком буде вийнято червоне яблуко.

88. З кошику, що містить три червоних яблука і сім зелених, виймають одно за іншим усі яблука, окрім одного. Знайти ймовірність того, що останнє яблуко, що залишилося у кошику, буде зеленим.

89. Петро знає не усі запитання програми. У якому випадку ймовірність витягнути невідомий білет буде менша, коли він тягне білет першим або останнім?

90. Студенти вважають, що з 50 екзаменаційних білетів 10 є «хорошими». Петро і Маша по черзі тягнуть по одному білету. Знайти ймовірність таких подій : а) Петру дістався «хороший» білет; б) Маші дістався «хороший» білет; в) їм обом дісталися «хороші» білети.

91. Маша прийшла на іспит, знаючи відповіді на 20 запитань програми з 25. Професор ставить три запитання. Знайти ймовірність таких подій : а) Маша відповість на усі три запитання; б) Маша відповість на два запитання; в) Маша відповість на одне запитання; г) Маша відповість хоч би на одне запитання; д) Маша не відповість ні на одне запитання.

92. Ймовірність того, що кредитна карта знаходиться у письмовому столі, дорівнює р, причому з однаковою імовірністю карта може знаходитися у будь-якому з восьми ящиків столу. Її власник оглянув сім ящиків і не знайшов свою кредитну карту. Знайти ймовірність того, що вона знаходиться у восьмому ящику.

Геометрична ймовірність

Класичне визначення ймовірності припускає, що число елементарних результатів випробування кінцеве. На практиці часто зустрічаються випробування, число можливих результатів яких нескінченно велике. У таких випадках класичне визначення непридатне. Ця обставина вказує на обмеженість класичного визначення. Цей недолік може бути здоланий введенням геометричної ймовірності.

Найбільш слабка сторона класичного визначення полягає у тому, що дуже часто неможливо уявити результат випробування у вигляді сукупності елементарних подій. Ще трудніше вказати підстави, що дозволяють вважати елементарні події однаково можливими. Зазвичай про можливості елементарних результатів випробування доводять з міркувань симетрії. Так, наприклад, припускають, що гральна кістка має форму правильного куба і виготовлена з однорідного матеріалу. Проте завдання, у яких можна виходити з міркувань симетрії, на практиці зустрічаються дуже рідко.

Щоб здолати недолік класичного визначення ймовірності, вводять геометричну ймовірність – ймовірність попадання точки у область:

$$P = \frac{m_{\text{б}}}{n_{\text{в}}}.$$

У цій формулі, за аналогією з класичним визначенням ймовірності, $m_{\text{б}}$ – множина точок, сприятливих очікуваній події;

$n_{\text{в}}$ – множина точок усіх результатів випробування.

Наведемо декілька прикладів застосування введеного поняття геометричної ймовірності.

Приклад 1 (завдання про зустріч). Двоє умовилися зустрітися у визначеному місці між полуднем і 13-ю годиною дня. Кожен з тих, хто прийшов першим, чекає іншого 15 хвилин, після чого уходить. Чому дорівнює ймовірність зустрічі друзів, якщо прихід кожного з них впродовж зазначеної години відбувається навмання і моменти приходу незалежні.

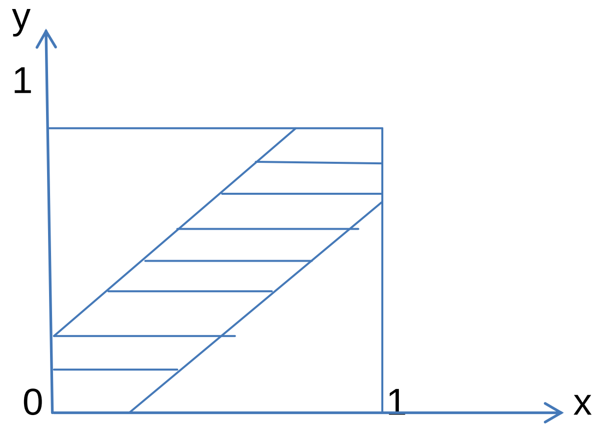
Рішення. Нехай x і y – моменти приходу представників сторін, що домовилися; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ (у годинах). Тоді формула умови зустрічі запишеться у вигляді

$$|x - y| \le \frac{1}{4}.$$

Тепер завдання можна інтерпретувати таким чином. У квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ у декартовій системі координат навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що її координати задовольнятимуть умову $|x-y| \le 0{,}25$.

Шукана ймовірність, очевидно, дорівнює відношенню виділеного шестикутника до площі квадрата:

$$P(A) = \frac{1-\frac{9}{16}}{1} = \frac{7}{16}.$$



Відповідь: $P(A) = 7/16$.

Завдання для самостійного вирішення

1. Точку кидають навмання у круг $x^2 + y^2 \le 1$. Знайти ймовірність того, що:

а) відстань від точки до центра круга перевищить 1/2;

б) абсциса точки буде не більше 1/2;

в) точка опиниться поза квадратом, вписаним у цей круг?

2. Промінь локатора переміщається у горизонтальній площині з постійною кутовою швидкістю. Яка ймовірність того, що ціль буде виявлена у кутовому секторі α радіан, якщо поява мети по будь-якому напряму однаково можлива?

3. У випадковий момент часу $x \in [0,T]$ з'являється радіосигнал тривалістю t_1. У випадковий момент часу $x \in [0,T]$ включається приймач

на якийсь час $t_1 < t_1$. Знайти ймовірність виявлення сигналу, якщо приймач настроюється миттєво.

4. На відрізку довжини l навмання вибирають дві точки: M_1 і M_2. Визначити ймовірність того, що з отриманих трьох відрізків можна побудувати трикутник.

5. На коло одиничного радіуса навмання ставляться три точки: A, B і C. Яка ймовірність того, що трикутник ABC гострокутний?

6. На підлогу, покриту кахельною плиткою із стороною $a = 6$ см, випадково падає монета радіуса $r = 2$ см. Знайти ймовірність того, що монета виявиться цілком усередині квадрата.

7. Площина розграфлена паралельними прямими, що знаходяться одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кинута монета радіуса $r < a$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної з прямих.

8. Всередину кола радіуса R навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться усередині вписаного у коло: а) квадрата; б) правильного трикутника.

9. Диск, що швидко обертається, розділений на парне число рівних секторів, поперемінно забарвлених у білий і чорний колір. По диску зроблений постріл. Знайти ймовірність того, що куля потрапить у один з білих секторів. Передбачається, що ймовірність попадання кулі у плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури.

10. Завдання Бюффона (французький дослідник природи XVIII ст.). Площина розграфлена паралельними прямими, віддаленими одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кидають голку довжини $2l$ $(l < a)$. Знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь пряму.

11. Під час грози на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної лінії стався обрив проводу. Вважаючи, що обрив однаково можливий у

будь-якій точці, знайти ймовірність того, що місце обривання розташовано між 40-м і 45-м кілометрами.

12. На 200-кілометровій ділянці газопроводу між компресорними станціями А і В сталось витікання газу, яке однаково можливе у будь-якій точці газопроводу. Знайти ймовірність таких подій:

а) місце витікання розташоване не далі 20 км від А або В;

б) місце витікання розташоване ближче до А, ніж до В.

13. Радар автоінспектора має точність 10 км/год і округлює свої свідчення у найближчу сторону. Визначити, що відбувається частіше – радар округлює швидкість «на користь водія» або «на користь ДІБДР»?

14. При проведенні інвентаризації для визначення наявної на складі кількості рідкого хімічного реактиву використовується вимірювальний прилад з ціною поділки шкали 0,2 л. Показання приладу округляються до найближчої поділки шкали. Знайти ймовірність того, що помилка округлення не перевищить 0,04 л.

15. Місткість цистерни для зберігання бензину на автозаправній станції дорівнює 50 т. Знайти ймовірності подій, які полягають у тому, що при випадковій перевірці у цистерні буде виявлено : а) менше 5 т бензину; б) більше 20 т бензину; в) хоч би одна т бензину.

16. Маша витрачає на дорогу в інститут від 40 до 50 мін, причому будь-який час у цьому проміжку є рівно імовірним. Знайти ймовірність того, що у день іспиту вона витратить на дорогу від 45 до 50 хв.

17. Щоб добратися до інституту, Петро може скористатися автобусом одного з двох маршрутів. Автобуси першого маршруту слідують з інтервалом у 18 мін, другого маршруту – з інтервалом у 15 хв. Знайти ймовірність того, що Петро чекатиме автобус не більше 10 хв.

Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Розглянемо випробування, у якому нас цікавить поява події A. Відомо, що подія A може настати за умови появи однієї з неспільних подій $\{H_i\}_{i=1}^{n}$,, які утворюють повну групу подій і називаються гіпотезами. Це означає, що

$$A = \sum_{i=1}^{n} A \cdot H_i.$$

Те, що гіпотези $\{H_i\}_{i=1}^{n}$ утворюють повну групу попарно неспільних подій, означає, що

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} H_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\,H_i) = 1.$$

Нехай відомі ймовірність подій H_i і умовна ймовірність події $P(A|H_i)$ $(i = \overline{1,n})$. Як знайти ймовірність події A? Відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема. Ймовірність події A, яка може настати лише за умови появи однієї з неспільних подій $\{H_i\}_{i=1}^{n}$, що утворюють повну групу подій, дорівнює сумі творів ймовірності кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i).$$

Цю формулу називають формулою повної ймовірності або теоремою гіпотез. Припустимо, що здійснено випробування, у результаті якого з'явилася подія А. Поставимо своїм завданням визначити, як змінилася, у зв'язку з тим, що подія А вже настала, ймовірність гіпотез. Іншими словами, шукатимемо умовну ймовірність $P(A|H_i)$. Згідно теореми множення подій маємо

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i|\mathrm{A}) = P(H_i)P(A|H_i),$$

з якої виходить

$$P(H_i|\mathrm{A}) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, \qquad (i = \overline{1,n}) .$$

Ці формули називають формулами Байеса (за ім'ям англійського математика, який їх вивів; опубліковані у 1764 р.). Формули Байеса дозволяють переоцінити ймовірність гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, внаслідок якого з'явилася подія А. Наведемо приклади використання формули повної ймовірності або теорему гіпотез.

Приклад 1. У першому ящику було 10 білих куль і 5 чорних; у другому – 10 білих і 10 чорних; у третьому – 2 білі і 8 чорних. Кулю витягають навмання з довільно вибраного ящика. Яка ймовірність того, що вона чорна?

Рішення. За умовою завдання подія витягнути чорну кулю може статися при виконанні однієї з таких гіпотез.

Гіпотеза H_1 – подія витягнути кулю з першого ящика $P(H_1) = 1/3$.

Гіпотеза H_2 – подія витягнути кулю з другого ящика $P(H_1) = 1/3$.

Гіпотеза H_3 – подія витягнути кулю з третього ящик а $P(H_1) = 1/3$.

Перевіримо, що $\{H_i\}_{i=1}^{3}$ утворюють повну групу попарно неспільних подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^{3} H_i\right) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Умовна ймовірність витягнути з першого ящика чорну кулю – $P(A|H_1) = 1/3$. Умовна ймовірність витягнути з другого ящика чорну кулю – $P(A|H_2) = 1/2$. Умовна ймовірність витягнути з третього ящика чорну кулю – $P(A|H_3) = 4/5$.

Для вирішення завдання скористаємося формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

І остаточно маємо

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{49}{90}.$$

Відповідь: $P(A) = 49/90$.

Приклад 2. Два цехи виготовляють однотипні деталі, причому перший цех дає 5 % браку, а другий 7 %. Для контролю узяті 10 деталей з першого цеху і 15 деталей з другого цеху; усі 25 деталей змішані, і з них навмання вибрана одна. Знайти ймовірність того, що вона бракована.

Рішення. Подія А, що навмання вибрана деталь бракована, може статися з однієї з гіпотез:

гіпотеза H_1 – вибрана деталь виготовлена у першому цеху,

гіпотеза H_2 – вибрана деталь виготовлена у другому цеху.

Знайдемо ймовірність цих гіпотез.

Усіх деталей 10+15=25. Деталей, виготовлених у першому цеху – 10, отже $P(H_1) = 10/25$. Усіх деталей 25. Деталей, виготовлених у другому цеху – 15, тоді $P(H_2) = 15/25$.

Перевіримо, що гіпотези утворюють повну групу попарно неспільних подій:

$$P(H_1) + P(H_2) = \frac{10}{25} + \frac{15}{25} = 1.$$

Умовна ймовірність витягнути браковану деталь першого цеху $P(A|H_1) = 5/100$. Ймовірність витягнути браковану деталь другого цеху $P(A|H_2) = 7/100$.

Для вирішення завдання скористаємося формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Після нескладних обчислень отримуємо

$$P(A) = \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{100} + \frac{15}{25} \cdot \frac{7}{100} = \frac{31}{500}.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}31$.

Приклад 3. З колоди у 36 карт одну карту загублено. З решти 35 карт узяли одну навмання. Яка ймовірність того, що це виявиться туз?

Рішення. Подія A, що навмання вибрана карта туз, може статися з однієї з гіпотез:

гіпотеза H_1 – подія, що полягає у тому, що з колоди був загублений туз;

гіпотеза H_2, – з колоди втратили не туза.

Ймовірність цієї гіпотези H_1

$$P(H_1) = \frac{4}{35}.$$

При цьому ймовірність узяти туза з карт, що залишилися, буде дорівнювати

$$P(A|H_1) = \frac{3}{35}.$$

Аналогічно знаходимо ймовірність цієї гіпотези H_2 :

$$P(H_2) = \frac{32}{35}.$$

При цьому ймовірність узяти туза з карт, що залишилися, буде

$$P(A|H_1) = \frac{4}{35}.$$

Склавши ймовірність гіпотез

$$P(H_1) + P(H_2) = \frac{4}{35} + \frac{32}{35} = 1\ ,$$

переконуємося, що гіпотези утворюють повну групу попарно неспільних подій.

Скориставшись формулою повної ймовірності, остаточно ймовірність узяти туза буде

$$P(A) = \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} + \frac{32}{36} \cdot \frac{4}{35} = \frac{1}{9}.$$

Відповідь: $P(A) = 1/9$.

Приклад 4. У тирі є п'ять рушниць, ймовірність влучення з яких, відповідно, дорівнює 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 і 0,9. Стрілець бере навмання одну з рушниць. Знайти ймовірність влучення у ціль.

Рішення. Скористаємося формулою повної ймовірності. Ймовірність попадання у ціль дорівнює

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i),$$

де $P(H_i)$ – ймовірність вибору стрільцем i -ї рушниці; очевидно, що

$$P(H_i) = \frac{1}{5}\ , \qquad i = 1,2,3,4,5.$$

Ймовірність попадання стрільцем з i -ї рушниці відома з умови

$$P(A|H_1) = 0{,}5;\ P(A|H_2) = 0{,}6; P(A|H_3) = 0{,}7;$$

$$P(A|H_4) = 0{,}8; P(A|H_5) = 0{,}9.$$

Підставивши у формулу повної ймовірності, маємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(H_i) \cdot P(A|H_i) =$$

$$= \frac{1}{5}0{,}5 + \frac{1}{5}0{,}6 + \frac{1}{5}0{,}7 + \frac{1}{5}0{,}8 + \frac{1}{5}0{,}9 = 0{,}7\ .$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}7$.

Приклад 5. На склад поступило 1500 виробів з першої фабрики і 2000 виробів з другої. Відомо, що середній відсоток нестандартних виробів серед продукції першої фабрики дорівнює 3 %, другої – дорівнює 2 %. Знайти ймовірність того, що навмання узятий зі складу виріб буде нестандартним.

Рішення. Ймовірність того, що навмання узятий зі складу виріб буде нестандартним, дорівнює

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2),$$

де гіпотеза H_1 – подія, яка полягає у тому, що навмання узятий зі складу виріб поступив з першої фабрики; гіпотеза H_2 – подія, що полягав в тому, що навмання узятий зі складу виріб надійшов з другої фабрики.

Вичислимо ймовірність гіпотез за класичною формулою.

Всього на складі деталей 1500+2000=3500, тоді

$$P(H_1) = \frac{1500}{3500} = \frac{3}{7}, \qquad P(H_2) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}.$$

Якщо вироби з першої фабрики, то ймовірність узяти нестандартний виріб дорівнює

$$P(A|H_1) = 0{,}03.$$

Ймовірність узяти нестандартний виріб з другої фабрики

$$P(A|H_2) = 0{,}02.$$

Звідси шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) =$$

$$= \frac{3}{7} \cdot 0{,}03 + \frac{4}{7} \cdot 0{,}02 = 0{,}0214\,.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}0214$.

Приклад 6. Була проведена одна і та ж контрольна робота у трьох групах. У першій групі з 30 студентів 8 виконали роботу на «відмінно», у другій, де 28 студентів, – 6 «відмінних» робіт, у третій, де 27 студентів, – 9 робіт виконані на «відмінно». Знайти ймовірність того, що перша вибрана навмання робота з тих робіт, що належать групі, яка також вибрана навмання, виявиться «відмінною».

Рішення. Є три гіпотези:

гіпотеза H_1 – вибрана робота з першої групи;

гіпотеза H_2 – вибрана робота з другої групи;

гіпотеза H_3 – вибрана робота з третьої групи.

Враховуючи рівноправність груп, вибрати контрольні роботи з першої, другої або третьої групи, ймовірність гіпотез буде

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Позначимо шукану подію A – вибрана робота, виконана на «відмінно». Визначимо за класичною формулою умовну ймовірність:

$$P(A|H_1) = \frac{8}{30};\ \ P(A|H_1) = \frac{6}{28};\ P(A|H_1) = \frac{7}{27}.$$

Тоді за формулою повної ймовірності маємо

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{28} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{27} = 0{,}271\,.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}271.$

Приклад 7. Закупорювання банок з томатним соком виконується двома автоматами, продукція яких надходить на загальний конвеєр. Продуктивність другого автомата у 1,5 рази вище за продуктивність першого. Доля банок з дефектами упаковки у середньому становить 0,5 % – у першого і 0,02 % – у другого автомата. Яка ймовірність того, що узята навмання банка соку матиме дефекти упаковки?

Рішення. Позначимо шукану подію А – узята навмання банка соку матиме дефекти упаковки. Ймовірність цієї події за формулою повної ймовірності дорівнює

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2).$$

Гіпотеза H_1 – закупорювання банки томатного соку зроблене першим автоматом; гіпотеза H_2 – закупорювання банки томатного соку зроблене другим автоматом.

З умови завдання продуктивність другого автомата у 1,5 рази вище за продуктивність першого, тобто кількість випущеної продукції визначається співвідношенням $m_2 = 1{,}5m_1$. Кількість продукції, яка надходить на загальний конвеєр, дорівнює

$$n = m_1 + 1{,}5m_1 = 2{,}5m_1.$$

Використовуємо класичну формулу визначення ймовірності гіпотез

$$P(H_1) = \frac{m_1}{2{,}5m_1} = 0{,}4; \ \ P(H_2) = \frac{1{,}5m_1}{2{,}5m_1} = 0{,}6\ .$$

Умовну ймовірність події А при виконанні зазначених гіпотез знаходимо з умови завдання

$$P(A|H_1) = 0{,}005; \ P(A|H_2) = 0{,}0002\ .$$

Підставивши знайдену ймовірність у формулу повної ймовірності, отримаємо

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}005 + 0{,}6 \cdot 0{,}0002 = 0{,}00212\ .$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}00212$.

Завдання для самостійного вирішення із застосуванням теореми гіпотез

1. З трьох працюючих друкарок перша опиниться на робочому місці з ймовірністю 0,9, друга – 0,8, а третя – 0,5. Якщо усі троє друкуватимуть разом, то з ймовірністю 1 вони за день надрукують звіт; якщо їх буде

дві, то вони закінчать роботу з ймовірністю 0,8, а якщо одна, то з ймовірністю 0,5. Чому дорівнює ймовірність того, що звіт буде надрукований за день?

2. У ящику лежать 20 тенісних м'ячів, у тому числі 15 нових і 5 граних. Для гри навмання вибирають два м'ячі й після гри повертають на місце. Потім для другої гри також навмання виймають ще два м'ячі. Яка ймовірність того, що друга гра проводитиметься новими м'ячами?

3. З 10 студентів, що складають іспит з теорії ймовірності, два студенти знають по 20 білетів з 30, один – 15 білетів, інші знають усі білети. Чому дорівнює ймовірність того, що випадково запрошений студент складе іспит, якщо знання білета забезпечує складання іспиту з ймовірністю 0,85, а незнання – з ймовірністю 0,1.

4. У двох коробках знаходяться батареї – у першій 12, з них одна розряджена, у другій – 10 і одна розряджена. З першої коробки у другу перекладена випадково узята батарея. Знайти ймовірність того, що узята навмання з другої коробки батарея буде розряджена.

5. У першій урні 10 куль, з них 8 білих, у другій – 20 куль, з яких 4 білі. З кожної урни беруть навмання по одній кулі, а потім з цих двох куль вибирають навмання одну. Знайти ймовірність того, що вона біла.

6. У студентській групі 70 % – юнаки. 20 % юнаків і 40 % дівчат мають стільникові телефони. Після зайняття в аудиторії був знайдений кимось забутий телефон. Яка ймовірність того, що він належав : а) юнакові; б) дівчині?

7. Військовий корабель може пройти уздовж протоки шириною 1 км з мінним загородженням у будь-якому місці. Ймовірність його підривання на міні у правій частині загородження шириною 200 м дорівнює 0,3, а на іншій частині – 0,8. 1) Знайти ймовірність того, що корабель благополучно пройде протоку. 2) Корабель благополучно пройшов протоку. Яка ймовірність того, що він пройшов благополучно у лівій частині протоки?

8. Ймовірність попадання у ціль для трьох стрільців дорівнює, відповідно, – 4/5, 3/4 і 2/3. Для ураження цілі у неї треба попасти не менше двох разів. У результаті одночасного пострілу усіх трьох стрільців ціль була уражена. Яка ймовірність того, що у ціль влучив третій стрілець?

9. По об'єкту робиться три поодиноких постріли. Ймовірність попадання при першому пострілі дорівнює 0,4, при другому - 0,5, при третьому - 0,7. Для виведення об'єкта із ладу свідомо досить трьох попадань; при двох попаданнях він виходить з ладу з ймовірністю 0,6; при одному – з ймовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що у результаті трьох пострілів об'єкт буде виведений з ладу.

10. В умовах підвищеної температури прилад виходить з ладу з ймовірністю 0,1, при вібрації – з ймовірністю 0,2, а при одночасному перегріванні й вібрації – з ймовірністю 0,6. Прилад працює на рухомій станції в умовах, коли з ймовірністю 0,4 виникає вібрація і незалежно від цього з ймовірністю 0,7 – підвищена температура. Знайти ймовірність виходу приладу з ладу.

11. У ящику було 15 тенісних м'ячиків, з яких 9 неграних. Для першої гри навмання взяли 2 м'ячики, потім їх повернули до ящика. Для другої гри знову взяли 2 м'ячики. Визначити ймовірність того, що обидва виявляться неграними м'ячами.

12. На іспит студентам було запропоновано 25 екзаменаційних білетів. Студент вивчив 20 білетів. Яка ймовірність того, що він узяв вивчений білет, якщо він йде на іспит не першим, а третім.

13. На іспит студентам було запропоновано 25 екзаменаційних білетів. У групі, що складає іспит, 8 студентів. Яким, по черзі, треба йти студенту, що вивчив 20 білетів, щоб з найбільшою ймовірністю узяти вивчений білет?

14. При грі у великий теніс гравець, який подає, бере 2 м'ячики з кошику. У кошику 20 м'ячиків. Відіграні м'ячики повертають у кошик. Вва-

жається, що гравець використовує при поданні один м'ячик з ймовірністю 0,7, а обидва м'ячики з ймовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що три подання гравець виконував неграними м'ячиками?

15. При грі у великий теніс гравець, який подає, бере 2 м'ячики з кошику. Відіграні м'ячики повертаються у кошик. Вважається, що гравець використовує один м'ячик з ймовірністю 0,7, а обидва м'ячики з ймовірністю 0,3. Скільки треба покласти у кошик м'ячиків, щоб три подання гравець виконував неграними м'ячиками с ймовірністю більше 0,5?

16. У першому ящику було 3 білі і 3 чорні кулі, у другому – 2 білі. З першого у другий навмання переклали 3 кулі, після чого з другого вийняли одну. Яка ймовірність того, що ця куля виявилась білою?

17. Статистика запитів кредитів у банку така: 10 % – державні органи, 20 % – інші банки, інші кредитори – фізичні особи. Ймовірність того, що узятий кредит не буде повернений, становить 0,01, 0,05 і 0,2 відповідно. Визначити, яка доля кредитів у середньому не повертається.

18. Ймовірність того, що тижневий оборот торговця морозивом перевищить 2000 крб., при сонячній погоді дорівнює 80 %, при мінливій хмарності – 50 %, а при дощовій погоді – 10 %. Знайти ймовірність того, що наступного тижня оборот перевищить 2000 крб., якщо ймовірність сонячної погоди в теперішній час становитиме 20 %, ймовірність мінливої хмарності та ймовірність дощової погоди – 40 %, відповідно.

19. З посудини, що містить 2 білі і 4 чорні кулі, дві особи по черзі витягають кулю. Знайти ймовірність вийняти першим білу кулю кожному з учасників.

20. На склад поступають деталі з двох автоматів. Перший дає у середньому 0,2 % браку, другий – 0,1 %. Знайти ймовірність потрапляння на склад бракованої деталі, якщо з першого автомата надійшло 2000 деталей, а з другого – 3000.

21. Якщо відомо, що ймовірність двом близнюкам бути однакової статі удвічі більша, ніж ймовірність бути різностатевими, причому взагалі ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,50, знайти ймовірність того, що другий з близнюків - хлопчик, після того, як встановлено, що перший з них – хлопчик.

22. У піраміді п'ять рушниць, три з яких забезпечені оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець уразить мішень при пострілі з рушниці з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для рушниці без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що мішень буде уражена, якщо стрілець зробить один постріл з навмання узятої рушниці.

23. У першій урні є 10 куль, з яких 8 білі; у другій урні 20 куль, з яких 4 білі. З кожної урни навмання витягнули по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання узяли одну кулю. Знайти ймовірність того, що узято білу кулю.

24. У кожній з трьох урн містяться 6 чорних і 4 білі кулі. З першої урни навмання витягнута одна куля і перекладена у другу урну, після чого з другої урни навмання витягнута одна куля і перекладена у третю урну. Знайти ймовірність того, що куля, навмання витягнута з третьої урни, виявиться білою.

25. Ймовірність того, що під час роботи цифрової електронної машини станеться збій у арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті та в інших пристроях, відноситься як 3: 2: 5. Ймовірність виявлення збою у арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті або в інших пристроях відповідно дорівнює 0,8; 0,9; 0,9. Знайти ймовірність того, що збій, який виник у машині, буде виявлений.

26. Прилад може працювати у двох режимах: 1) нормальному і 2) ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80 % усіх випадків роботи приладу; ненормальний – у 20 %. Ймовірність виходу приладу з

ладу за час t у нормальному режимі дорівнює 0,1; у ненормальному – 0,7. Знайти ймовірність виходу приладу з ладу за час t.

27. У групі з 10 студентів, що прийшли на іспит, 3 підготовлених відмінно, 4 – добре, 2 – посередньо і один – слабо. У екзаменаційних білетах є 20 запитань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на усі 20 запитань, добре підготовлений – на 16, посередньо підготовлений – на 10, слабо підготовлений – на 5. Студент, допрошений навмання, відповів на три довільно заданих запитання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений : а) відмінно; б) посередньо; в) слабо.

28. З 28 приватних банків, працюючих у місті, порушення у сплаті податків виявлені у 12 банках. Податкова інспекція проводить перевірку трьох банків, вибираючи їх з банків випадковим чином. Вибрані банки перевіряються незалежно один від одного. Допущені у банку, що перевіряється, порушення можуть бути виявлені інспекцією з ймовірністю 0,7. Яка ймовірність того, що у ході перевірки буде встановлений факт наявності серед приватних банків міста таких банків, які допускають порушення при сплаті податків?

29. На складання потрапляють деталі з трьох автоматів. Відомо, що перший автомат дає 3 % браку, другий – 2 % і третій – 4 %. Знайти ймовірність того, що на складання потрапить бракована деталь, якщо з першого автомата надходить 100, з другого – 200, з третього – 250 деталей.

30. Троє робітників виготовили за зміну 60 деталей. Продуктивність робітників відноситься як 1: 2: 3. Перший робітник виготовляє у середньому 95 % придатних деталей, другий – 85 %, третій, – 90 %. Знайти ймовірність того, що навмання узята з числа виготовлених за зміну деталь низької якості.

31. Є три завода, що виробляють одну і ту ж продукцію. При цьому 1-й завод робить 25 %, 2-й завод – 35 % і 3-й завод – 40 % усієї вироблю-

ваної продукції. Брак становить 5 % від продукції 1-го заводу, 3 % від продукції 2-го і 4 % від продукції 3-го заводу. Уся продукція змішується і надходить у продаж. Знайти ймовірність купити бракований виріб.

Формула Байєса

Приклад 1. Вироби задовольняють стандарту з ймовірністю 0,96. Недосконала система контролю з ймовірністю 0,02 може забракувати стандартний виріб і з ймовірністю 0,05, навпаки, пропустить неякісний. Яка ймовірність того, що вироби, які пройшли контроль, насправді стандартні?

Рішення: Для вирішення завдання скористаємося формулою Байєса

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)},$$

де H_i – гіпотези, що становлять повну групу подій.

У нас буде подія H_1 – деталь стандартна, за умовою завдання $P(H_1) = 0{,}96$. При цьому ймовірність стандартної деталі пройти контроль $P(A|H_1) = 0{,}98$.

Подія H_2 – деталь не стандартна, за умовою завдання $P(H_2) = 0{,}04$. При цьому ймовірність стандартної деталі пройти контроль $P(A|H_2) = 0{,}05$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Тоді

$$P(A) = 0{,}96 \cdot 0{,}98 + 0{,}04 \cdot 0{,}05 = 0{,}9428$$

ймовірність того, що вироби, що пройшли контроль, насправді стандартні?

$$P(A) = \frac{0{,}9408}{0{,}9428} = 0{,}9979\,.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}9979$.

Приклад 2. Два стрільця стріляють по мішені. Перший попадає з ймовірністю 0,8, другий – 0,5. Перед пострілом вони кидають монету для визначення черговості. Першим же пострілом мішень вражена. Яка ймовірність того, що стріляв перший стрілець?

Рішення: Для вирішення завдання скористаємося формулою Байєса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Ймовірність $P(A)$ обчислюється за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Тут H_i- гіпотези, що становлять повну групу подій. У нас буде подія H_1 – стріляв перший стрілець, тоді

$P(H_1) = 0{,}5.$

При цьому у першого стрільця ймовірність поцілити $P(A|H_1) = 0{,}8$.

Подія H_2 – стріляв другий стрілець, тоді $P(H_2) = 0{,}5$.

При цьому у другого стрільця ймовірність поцілити $P(A|H_2) = 0{,}5$.

Тоді ймовірність того, що мішень уражена:

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}65.$$

І остаточно, ймовірність того, що стріляв перший стрілець:

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}65} = 0{,}6154.$$

Відповідь: $P(H_1|A) = 0{,}6154$.

Приклад 3. Прилад складається з двох вузлів, сполучених послідовно. Ймовірність відмови першого вузла дорівнює 0,2, ймовірність відмови другого вузла 0,3 впродовж місяця. Відомо, що впродовж місяця сталася відмова приладу. Знайти ймовірність того, що відмовив перший вузол.

Рішення: Для вирішення завдання скористаємося формулою Байєса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Знайдемо ймовірність відмови приладу.

Може відмовити перший прилад, а другий працювати або відмовить другий, а перший працюватиме, або відмовлять обоє.

Тоді ймовірність відмови приладу:

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}42\,.$$

Підставляючи відповідні значення у формулу Байєса, отримуємо

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}42} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $P(H_1|A) = 1/3$.

Приклад 4. Турист, заблукавши у лісі, вийшов на полянку, від якої у різні боки ведуть 5 стежок. Якщо турист піде по першій стежці, то ймовірність виходу туриста з лісу впродовж години буде 0,6; якщо по другій – 0,3; якщо по третій – 0,2; якщо по четвертій – 0,1; якщо по п'ятій – 0,1. Яка ймовірність того, що турист пішов по першій стежці, якщо за годину він вийшов з лісу?

Рішення. У даному випадку подія А (турист за годину вийшов з лісу) сталася. Тому використовуємо формулу Байєса.

Знайдемо величини, які входять до формули Байєса.

Вибір туристом дороги має однакову ймовірність, отже

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = 0{,}2\,.$$

Значення умовної ймовірності наведено в умові прикладу:

$$P(A|H_1) = 0{,}6;\; P(A|H_2) = 0{,}3;\; P(A|H_3) = 0{,}2;$$

$$P(A|H_4) = P(A|H_5) = 0{,}1\,.$$

Знайдемо

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}26.$$

Шукана ймовірність того, що турист пішов по першій стежці, якщо за годину він вийшов з лісу, дорівнює

$$P(H_1|A) = \frac{0,12}{0,26} = 0,462\,.$$

Відповідь: $P(H_1|A) = 0,462$.

Завдання для самостійного вирішення із застосуванням формули Байєса

1. Магазин отримує товар від трьох постачальників: 55 % товару надходить від першого постачальника, 20 % – від другого і 25 % – від третього. Продукція, що надходить від першого постачальника, містить 5 % браку, що надходить від другого постачальника – 6 % браку, а що надходить від третього постачальника – 8 % браку. Покупець залишив у Книзі побажань покупця скаргу про низьку якість придбаного товару. Знайти ймовірність того, що неякісний товар, який викликав нарікання покупця, надійшов від першого постачальника.

2. Магазин отримує товар від трьох постачальників: 55 % товару надходить від першого постачальника, 20 % – від другого і 25 % – від третього. Продукція, що надходить від першого постачальника, містить 5% браку, що надходить від другого постачальника – 6% браку, а що надходить від третього постачальника – 8% браку. Покупець залишив в Книзі побажань покупця скаргу про низьку якість придбаного товару. Знайти ймовірність того, що неякісний товар, що викликав нарікання покупця, надійшов від другого постачальника.

3. Магазин отримує товар від трьох постачальників: 55 % товару надходить від першого постачальника, 20 % від другого і 25 % від третього. Продукція, що надходить від першого постачальника, містить 5 % браку, що надходить від другого постачальника – 6 % браку, а що надходить від третього постачальника – 8 % браку. Покупець залишив у Книзі побажань покупця скаргу про низьку якість придбаного товару. Знайти ймовір-

ність того, що неякісний товар, що викликав нарікання покупця, надійшов від третього постачальника.

4. При розслідуванні злочину, здійсненого на автозаправній станції (АЗС), було встановлено, що потік автомобілів, які проїжджають повз АЗС, становить на 60 % з вантажних і на 40 % з легкових автомобілів. За свідченнями свідків, під час скоєння злочину на АЗС знаходився автомобіль. Відомо, що ймовірність заправлення вантажного автомобіля дорівнює 0,1, легкового автомобіля – 0,3. Знайти ймовірність того, що під час скоєння злочину на АЗС знаходився вантажний автомобіль.

5. При розслідуванні злочину, здійсненого на автозаправній станції (АЗС), було встановлено, що потік автомобілів, що проїжджають повз АЗС, перебуває на 60 % з вантажних і на 40 % з легкових автомобілів. За свідченнями свідків, під час скоєння злочину на АЗС знаходився автомобіль. Відомо, що ймовірність заправлення вантажного автомобіля дорівнює 0,1, легкового автомобіля – 0,3. Знайти ймовірність того, що під час скоєння злочину на АЗС знаходився легковий автомобіль.

6. У кожному з трьох кошиків знаходиться по сім червоних яблук і три зелених. З першого кошика навмання дістали одно яблуко і переклали його у другий, потім з другого кошика навмання дістали яблуко і переклали його у третій. Знайти ймовірність того, що яблуко, навмання витягнуте після цих маніпуляцій з третього кошика, виявиться зеленим.

7. У кожному з трьох кошиків знаходиться по сім червоних яблук і три зелених. З першого кошика навмання дістали одно яблуко і переклали його у другий, потім з другого кошика навмання дістали яблуко і переклали його у третій. Знайти ймовірність того, що яблуко, навмання витягнуте після цих маніпуляцій з третього кошика, виявиться червоним.

8. Два автомати роблять однакові деталі, які поступають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата удвічі більше продуктивності другого. Перший автомат виготовляє у середньому 60 % деталей ві-

дмінної якості, а другий – 84 %. Навмання узята з конвеєра деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь зроблена першим автоматом.

9. Два автомати роблять однакові деталі, які поступають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата удвічі більше продуктивності другого. Перший автомат виготовляє у середньому 60 % деталей відмінної якості, а другий – 84 %. Навмання узята з конвеєра деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь зроблена другим автоматом.

10. У піраміді 10 рушниць, з яких 4 забезпечені оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець уразить мішень при пострілі з рушниці з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для рушниці без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,8. Стрілець уразив мішень з навмання узятої рушниці. Що вірогідніше: стрілець стріляв з рушниці з оптичним прицілом або без нього?

11. Число вантажних автомашин, що проїжджають по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до числа легкових машин, що проїжджають по тому ж шосе як 3: 2. Ймовірність того, що заправлятиметься вантажна машина, дорівнює 0,1; для легкової машини ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхала для заправки машина. Знайти ймовірність того, що це вантажна машина.

12. Число вантажних автомашин, що проїжджають по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до числа легкових машин, що проїжджають по тому ж шосе як 3 : 2. Ймовірність того, що заправлятиметься вантажна машина, дорівнює 0,1; для легкової машини ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхала для заправки машина. Знайти ймовірність того, що це легкова машина.

13. У спеціалізовану лікарню поступають у середньому 50 % хворих із захворюванням До, 30 % – із захворюванням L, 20 % – із захворюванням

М. Ймовірність повного лікування хвороби До дорівнює 0,7; для хвороби L і М ця ймовірність відповідно дорівнює 0,8 і 0,9. Хворий, що поступив у лікарню, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав на захворювання К.

14. У спеціалізовану лікарню поступають у середньому 50 % хворих із захворюванням До, 30 % – із захворюванням L, 20 % – із захворюванням М. Ймовірність повного лікування хвороби До дорівнює 0,7; для хвороби L і М ця ймовірність відповідно дорівнює 0,8 і 0,9. Хворий, що поступив у лікарню, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав на захворювання L .

15. У спеціалізовану лікарню поступають у середньому 50 % хворих із захворюванням К, 30 % – із захворюванням L, 20 % – із захворюванням М. Ймовірність повного лікування хвороби К дорівнює 0,7; для хвороби L і М ця ймовірність відповідно дорівнює 0,8 і 0,9. Хворий, що поступив у лікарню, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав на захворювання М.

16. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох товарознавців. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,55, а до другого – 0,45. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнаний як такий першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці був визнаний стандартним. Знайти ймовірність того, що цей виріб був перевірений першим товарознавцем.

17. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох товарознавців. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,55, а до другого – 0,45. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнаний як такий першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці був визнаний стандартним. Знайти ймовірність того, що цей виріб був перевірений другим товарознавцем.

18. Є три партії деталей по 20 деталей у кожній. Число стандартних деталей у першій, другій і третій партіях відповідно дорівнює 20, 15, 10. З навмання вибраної партії навмання витягнута деталь, що виявилася стандартною. Деталь повертають у партію і повторно з тієї ж партії навмання витягають деталь, яка також виявляється стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі були витягнуті з першої партії.

19. Є три партії деталей по 20 деталей у кожній. Число стандартних деталей у першій, другій і третій партіях відповідно дорівнює 20, 15, 10. З навмання вибраної партії навмання витягнута деталь, що виявилася стандартною. Деталь повертають до партії і повторно з тієї ж партії навмання витягають деталь, яка також виявляється стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі були витягнуті з другої партії.

20. Є три партії деталей по 20 деталей у кожній. Число стандартних деталей у першій, другій і третій партіях відповідно дорівнює 20, 15, 10. З навмання вибраної партії навмання витягнута деталь, що виявилася стандартною. Деталь повертають до партії і повторно з тієї ж партії навмання витягають деталь, яка також виявляється стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі були витягнуті з третьої партії.

21. Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди влучили в ціль. Знайти ймовірність того, що по цілі влучила перша гармата, якщо ймовірність влучення у ціль першою, другою і третьою гарматами, відповідно, дорівнює 0,4; 0,3; 0,5.

22. Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди влучили в ціль. Знайти ймовірність того, що в ціль влучила друга гармата, якщо ймовірність влучення у ціль першою, другою і третьою гарматами, відповідно, дорівнює 0,4; 0,3; 0,5.

23. Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди влучили в ціль. Знайти ймовірність того, що в ціль влучила третя гармата,

якщо ймовірність влучення у ціль першою, другою і третьою гарматами, відповідно, дорівнює 0,4; 0,3; 0,5.

24. Три стрільці зробили постріл, причому дві кулі уразили мішень. Знайти ймовірність того, що перший стрілець уразив мішень, якщо ймовірність попадання у мішень першим, другим і третім стрілками, відповідно, дорівнює 0,6, 0,5 і 0,4.

25. Три стрільці зробили постріл, причому дві кулі уразили мішень. Знайти ймовірність того, що другий стрілець уразив мішень, якщо ймовірність попадання у мішень першим, другим і третім стрільцями, відповідно, дорівнює 0,6, 0,5 і 0,4.

26. Три стрільці зробили постріл, причому дві кулі уразили мішень. Знайти ймовірність того, що третій стрілець уразив мішень, якщо ймовірність попадання у мішень першим, другим і третім стрільцями, відповідно, дорівнює 0,6, 0,5 і 0,4.

27. Два з трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший і другий елементи, якщо ймовірність відмови першого, другого і третього елементів, відповідно, дорівнює 0,2; 0,4 і 0,3.

28. Дві з чотирьох незалежно працюючих ламп приладу відмовили. Знайти ймовірність того, що вийшли з ладу перша і друга лампи, якщо ймовірність відмови першої, другої, третьої і четвертої ламп відповідно дорівнює 01; 0,2; 0,3; 0,4.

29. 1/3 ламп робиться на першому заводі, 1/4 – на другому, інші – на третьому. Ймовірність браку у продукції першого, другого і третього заводів, відповідно, дорівнює 0,2, 0,15 і 0,05. Знайдіть ймовірність того, що бракована лампа зроблена на першому, другому або третьому заводі.

30. Є три заводи, що виробляють одну і ту ж продукцію. При цьому 1-й завод виготовляє 25 %, 2-й завод – 35 % і 3-й завод – 40 % усієї вироблюваної продукції. Брак становить 5 % від продукції 1-го заводу, 3 % від

продукції 2-го і 4 % від продукції 3-го заводу. Уся продукція змішується і надходить у продаж. Знайти ймовірність того, що куплений виріб виготовлений першим заводом, якщо цей виріб бракований.

31. Є три заводи, що виробляють одну і ту ж продукцію. При цьому 1-й завод виготовляє 25 %, 2-й завод – 35 % і 3-й завод – 40 % усієї вироблюваної продукції. Брак становить 5 % від продукції 1-го заводу, 3 % від продукції 2-го і 4 % від продукції 3-го заводу. Уся продукція змішується і надходить у продаж. Знайти ймовірність того, що куплений виріб, виготовлений другим заводом, якщо цей виріб бракований.

32. Є три заводи, що виробляють одну і ту ж продукцію. При цьому 1-й завод виготовляє 25 %, 2-й завод – 35 % і 3-й завод – 40 % усієї вироблюваної продукції. Брак становить 5 % від продукції 1-го заводу, 3 % від продукції 2-го і 4 % від продукції 3-го заводу. Уся продукція змішується і надходить у продаж. Знайти ймовірність того, що куплений виріб, виготовлений третім заводом, якщо цей виріб бракований.

Розподіл Бернуллі

Нехай виконують n незалежних випробувань, у кожному з яких може з'явитися проста подія A або їй протилежна подія $\bar{A}$.

Визначення. Випробування називаються незалежними, якщо ймовірність кожного результату будь-якого випробування не змінюється від того, які результати мали інші випробування.

Визначення. Подія називається простою, якщо у результаті випробування станеться подія A або їй протилежна подія $\bar{A}$.

При цьому $P(A+\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.

Відома ймовірність настання події A, яка в усіх випробуваннях постійна і дорівнює p. Ймовірність протилежної події $\bar{A}$, відповідно, також постійна і дорівнює $q = 1 - p$.

Розглянемо як дискретну випадкову величину X число появи події A у цих випробуваннях.

Розглянемо завдання: знайти закон розподілу випадкової величини X. Значення X може мінятися від 0 до n включно.

Тоді ймовірність того, що у n незалежних дослідах подія А з'явиться рівно k разів, обчислюється за формулою

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Цей розподіл ймовірності називається біномним розподілом, або розподілом Бернуллі.

Число $k = k_0$, при якому ймовірність $P_n(k)$ набуває найбільшого значення, називається най вірогіднішим числом появи події.

При обчисленні ймовірності події $k_1 \leq X \leq k_2$ скористаємося формулою

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Для розподілу Бернуллі математичне очікування обчислюється за формулою

$$M[X] = \sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = np.$$

Нескладно вичислити дисперсію

$$D[X] = \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 P_n(k) = npq.$$

Середньоквадратичне відхилення для розподілу Бернуллі

$$\sigma = \sqrt{D[X]}\,.$$

Наведемо приклади розв’язання завдань з використанням розподілу Бернуллі.

Приклад 1. Припустимо, що 30% студентів нашого університету займаються спортом. Яка ймовірність того, що серед перших п'яти зустрічних студентів виявиться тільки один спортсмен? Яка ймовірність того, що серед них є хоч би один спортсмен? Яке найбільш вірогідне число спортсменів серед них?

Рішення. Оскільки студентів у університеті багато (декілька тисяч), то у міру опитування декількох з них пропорції у частині, що залишилася, практично не змінюються. Тому можна вважати опитування кожного студента незалежним досвідом. Всього дослідів роблять $n = 5$, а ймовірність позитивної відповіді $p = 0{,}3$.

За формулою Бернуллі маємо

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^4 = 0{,}36015\,.$$

Ймовірність хоч би однієї правильної відповіді простіше обчислювати, якщо перейти до протилежної події:

$$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - 0{,}7^5 = 1 - 0{,}16807 = 0{,}83193\,.$$

Оскільки $(n + 1)p = (5 + 1) \cdot 0{,}3 = 1{,}8$. Ціла частина числа дорівнює 1, то найбільш вірогідне число спортсменів серед п'яти опитаних $k_0 = 1$.

Відповідь: $P_5(k \geq 1) = 0{,}83193$.

Приклад 2. На кожне запитання пропонується три можливі відповіді, з яких слід вибрати одну правильну. Поставлено п'ять запитань. Яка ймовірність того, що шляхом простого вгадування вдасться правильно відповісти на чотири запитання? Яка ймовірність вгадати правильну відповідь хоча б на одне запитання?

Рішення. Вибір відповіді на запитання можна розглядати як незалежний досвід. Усього таких дослідів виконують $n = 5$, а ймовірність успіху у кожному досвіді дорівнює $p = 1/3$. Тоді ймовірність вгадати правильні відповіді на чотири запитання дорівнює

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{243} = 0{,}0412\,.$$

Ймовірність вгадати хоч би одну правильну відповідь дорівнює

$$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243} = 0{,}8683\,.$$

Відповідь: $P_5(k \geq 1) = 0{,}8683$.

Приклад 3. Ймовірність попадання у ціль при пострілі дорівнює 0,3. Скільки треба зробити пострілів, щоб ймовірність ураження цілі була більше 0,9?

Рішення. Кожен постріл можна розглядати як незалежне випробування, і у кожному з них ймовірність появи події (попадання у ціль) дорівнює $p = 0{,}3$. Ціль буде уражена, якщо у n пострілах буде хоч би одно попадання, ймовірність чого дорівнює

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - (0{,}7)^n > 0{,}9\,.$$

І ми отримуємо нерівність

$$0{,}1 > (0{,}7)^n,$$

звідки

$$n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}7)} \approx 6{,}457\,.$$

Таким чином, треба зробити більше 7 пострілів, щоб ймовірність ураження цілі була більше 0,9.

Приклад 4. Кожен з двох стрільців чотири рази стріляє в ціль. Ймовірності попасти в ціль при кожному пострілі дорівнює для них, відповідно, 0,6 і 0,8. Яка ймовірність того, що у першого стрільця буде два промахи, а у другого тільки один? Яка ймовірність того, що у стрільців буде однакова кількість влучень?

Рішення. Кожен постріл можна вважати незалежним досвідом.

Перший стрілець має у чотирьох пострілах потрапити двічі, ймовірність цієї події вичислимо за формулою Бернуллі:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \ (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^2 = 6 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}16 = 0{,}3465\ .$$

Другий повинен потрапити три рази, ймовірність чого дорівнює

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \ (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^1 = 4 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096\ .$$

Ймовірність двох промахів у першого стрільця і одного промаху у другого стрільця дорівнює, завдяки незалежності дослідів:

$$P = 0{,}3456\ \cdot 0{,}4096\ =\ 0{,}1416.$$

Ймовірність того, що у кожного стрільця буде по m попадань:

$$C_4^m \cdot \ (0{,}6)^m \cdot (0{,}4)^{4-m} \cdot C_4^m \cdot \ (0{,}8)^m \cdot (0{,}2)^{4-m}.$$

Ймовірність того, що обидва стрільці влучать рівну кількість разів у мішені, підрахуємо за формулою

$$\sum_{m=0}^{4} C_4^m \cdot \ (0{,}6)^m \cdot (0{,}4)^{4-m} \cdot C_4^m \cdot \ (0{,}8)^m \cdot (0{,}2)^{4-m} =$$

$$= (0{,}4)^4 \cdot (0{,}2)^4 + 4 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^3 \cdot 4 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^3 +$$

$$+6 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^2 \cdot 6 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^2 + 4 \cdot (0{,}6)^3 \cdot (0{,}4)^1 \cdot 4 \cdot (0{,}6)^3$$
$$\cdot (0{,}4)^1 + (0{,}6)^4 \cdot (0{,}8)^4 = 0{,}2102\ .$$

Завдання для самостійного вирішення

1. Для гравця у баскетбол ймовірність закинути м'яч у кошик зі штрафного кидка дорівнює $p = 0{,}5$. Скільки кидків потрібно надати гравцеві, щоб ймовірність попадання у кошик хоч би один раз була більше $P = 0{,}9$?

2. У відділі технічного контролю перевірку кожної великої партії

виробів роблять таким чином: відбирається навмання n виробів, і якщо серед них виявиться хоча б один бракований виріб, то партію відправляють на пересортовування. Який має бути обсяг вибірки n, щоб партії, які містять більше 5 % браку, були знехтувані з ймовірністю, більшою, ніж $P = 0{,}9$.

3. Біатлоністові на кожному з двох рубежів необхідно уразити п'ять мішеней. Ймовірність уразити мішень при пострілі лежачи (на першому рубежі) дорівнює 0,95, а при пострілі стоячи (на другому рубежі) ця ймовірність дорівнює 0,85. Яка ймовірність того, що обидва рубежі біатлоніст здолає без промахів? Яка ймовірність того, що на кожному рубежі біатлоніст зробить по одному промаху. Яка ймовірність того, що біатлоніст зробить тільки один промах? Яка ймовірність того, що на першому рубежі біатлоніст не допустить промаху, а на другому зробить 2 промахи.

4. Ймовірність того, що у п'яти дослідах подія A з'явиться хоч би один раз, дорівнює 0,92224. Яка ймовірність того, що у трьох дослідах ця подія з'явиться не більше одного разу?

5. Два гравці A і B підкидають монету. Якщо монета випадає гербом вгору, то A отримує очко. Якщо випадає решка, то очко отримує гравець B. Яка ймовірність того, що після 10 кидків монети рахунок буде рівним? Яка ймовірність того, що після цих кидків у гравця A буде на два очки більше?

6. З урни, що містить дуже велике число білих і чорних куль, змішаних у рівній пропорції, виймаються послідовно 10 куль. Кулі, вийняті до першої появи чорної кулі, повертаються в урну; перша чорна куля, що з'явилася, і усі подальші перекладаються у другу, спочатку порожню урну. Визначити математичні очікування числа білих і числа чорних куль у другій урні. Вирішити те ж завдання у припущенні, що число X вийнятих куль є випадковим, і згідно закону Пуассона, з параметром a = 10.

7. Гра полягає у тому, що монету кидають до появи герба. Якщо герб випав при киданні монети, то гравець A отримує гроші від гравця B.

Скільки грошей повинен сплатити гравець А гравцеві В перед початком гри для того, щоб математичні очікування програшу для кожного гравця дорівнювали нулю (щоб гра була «нешкідливою»)?

8. З посудини, що містить m білих і n чорних куль, виймають кулі до тих пір, поки не з'явиться біла куля. Знайти математичне очікування і дисперсію числа вийнятих чорних куль, якщо кожна куля після витягання поверталася.

9. Ймовірність того, що у чотирьох незалежних дослідах подія А станеться двічі, дорівнює 3/8. Яка ймовірність того, що у шести незалежних дослідах подія теж станеться двічі?

10. У цеху шість верстатів, які працюють незалежно один від одного. Впродовж робочого дня (вісім годин) кожен верстат простоює у сумі дві години. Яка доля часу, впродовж якої у цеху працює не менше п'яти верстатів?

11. На світлофорі червоне і зелене світло горить по 30 с., а жовте – 5 с. Автомобілю слід проїхати 5 перехресть, на яких світлофори працюють незалежно один від одного. Знайдіть ймовірність того, що : а) усі світлофори автомобіль проїде без зупинки; б) автомобіль чекатиме у світлофора не менше двох разів.

12. Незалежні випробування апаратури повторюються до тих пір, поки не станеться відмова. Ймовірність відмови від випробування до випробування не міняється і дорівнює p. Знайти математичне очікування і дисперсію числа безвідмовних випробувань.

13. Вважаючи число викликів, що надходять на комутатор за заданий проміжок часу, випадковою величиною, що згідно з законом Пуассона з параметром, пропорційним довжині проміжку, визначити ймовірність того, що за 30 с не буде жодного виклику, якщо математичне очікування числа викликів за годину дорівнює 60.

14. Рахуючи число викликів, що поступають на комутатор за зада-

ний проміжок часу випадковою величиною, що підкоряється закону Пуассона з параметром, пропорційним довжині проміжку, визначити вірогідність того, що за 30 сік не буде жодного виклику, якщо математичне очікування числа викликів за годину дорівнює 60.

15. Випадкове число помилкових з'єднань, що доводиться на одного телефонного абонента за даний проміжок часу, підкоряється закону Пуассона з параметром, рівним 8. Визначити вірогідність того, що для цього абонента за цей проміжок часу число помилкових з'єднань перевершить 4 рази.

Розподіл Пуассона

Нехай робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких може з'явитися проста подія A або їй протилежна подія $\bar{A}$. Ймовірність настання події A, яка в усіх випробуваннях постійна і дорівнює p. Ймовірність протилежної події $\bar{A}$, відповідно, також постійна і дорівнює $q = 1 - p$. Для визначення ймовірності k появ події у цих випробуваннях використовують формулу Бернуллі. Якщо ж n велике, то користуватися формулою Бернуллі досить складно. Перейдемо у формулі Бернуллі до границі

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \lim_{n\to\infty} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} .$$

Якщо зробити припущення, що $pn = a$ зберігає постійне значення, тобто математичне очікування постійна величина. З цього припущення виходить, що при великих значеннях n ймовірність події буде мала:

$$p = \frac{a}{n}.$$

Здійснюючи граничний перехід, з урахуванням зробленого припущення, отримуємо розподіл Пуассона

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

Очевидно, що цей розподіл виконується при ймовірності, близькій до нуля. Коли ймовірність події мала, тобто близька до одиниці, обчислюють ймовірність події $k_1 \leq X \leq k_2$ за формулою

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = e^{-a} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{a^k}{k!}.$$

Для розподілу Пуассона математичне очікування обчислюється за формулою

$$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a} = a.$$

Нескладно вичислити дисперсію

$$D[X] = \sum_{k=0}^{n} (k-a)^2 P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{a^k}{k!}e^{-a} - a^2 = a.$$

Середньоквадратичне відхилення для розподілу Пуассона буде

$$\sigma = \sqrt{a}\,.$$

Наведемо приклади розв'язання завдань з використанням розподілу Пуассона.

Приклад 1. Ймовірність того, що виріб при транспортуванні із заводу отримає пошкодження, дорівнює 0,0005. Із заводу відправлено чотири тисячі виробів. Яка ймовірність того, що у дорозі буде пошкоджено більше двох виробів?

Рішення. Транспортування кожного виробу, число яких велике $n = 4000$, можна розглядати як незалежний досвід. Ймовірність же появи події у кожному досвіді мала і $p = 0{,}0005$. Це дає можливість скористатися для обчислень формулою Пуассона

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

У цій формулі $a = np = 4000 \cdot 0{,}0005 = 2$.

За умовою завдання необхідно знайти ймовірність того, що у дорозі ушкодиться більше двох виробів. Цю ймовірність визначають за формулою

$$P_{4000}(k > 2) = \sum_{i=3}^{4000} P_{4000}(i) .$$

Враховуючи, що

$$\sum_{i=0}^{4000} P_{4000}(i) = 1,$$

можна розписати:

$$\sum_{i=0}^{4000} P_{4000}(i) = P_{4000}(0) + P_{4000}(1) + P_{4000}(2) + \sum_{i=3}^{4000} P_{4000}(i) = 1 .$$

Звідки

$$\sum_{i=3}^{4000} P_{4000}(i) = 1 - P_{4000}(0) - P_{4000}(1) - P_{4000}(2) =$$

$$= 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} - 2e^{-2} == 1 - 5e^{-2}$$

$$\approx 0{,}31 .$$

Відповідь: $P_{4000}(k > 2) \approx 0{,}31$.

Приклад 2. Відомо, що з кожної тисячі елементів у середньому 999 зберігають свою працездатність впродовж гарантійного терміну. Яка ймовірність того, що з 3000 елементів усі до єдиного збережуть свою працездатність впродовж гарантійного терміну?

Рішення. Роботу кожного елемента впродовж гарантійного терміну можна вважати незалежним досвідом. Число дослідів велике ($n = 3000$). Ймовірність того, що елемент збереже працездатність упродовж гарантійного терміну, дорівнює 0,999. При застосуванні формули Пуассона будемо мати на увазі не працездатні елементи, а ті елементи, що вийшли з ладу. Ймовірність виходу з ладу елемента $p = 0{,}001$. Тоді $a = np = 3000 \cdot 0{,}001 = 3$.

Усі 3000 елементів збережуть свою працездатність, якщо жоден з них не вийде з ладу. За формулою Пуассона

$$P_{3000}(0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} \approx 0{,}03 \,.$$

Відповідь: $P_{3000}(k = 0) \approx 0{,}03$.

Завдання для самостійного вирішення

1. При дальньому радіозв'язку через перешкоди кожен сигнал незалежно від інших з ймовірністю 0,01 може бути прийнятий помилково. Передано 200 сигналів. Яка ймовірність того, що три з них будуть прийняті помилково? Яка ймовірність того, що буде прийнято не менше трьох сигналів з помилкою?

2. Кожен виріб незалежно від інших стандартний з ймовірністю 0,98. Зроблено 100 виробів. Яка ймовірність того, що 96 деталей будуть стандартні?

3. У студентському будівельному загоні працює 400 студентів. Ймовірність того, що студент упродовж усього терміну роботи отримає травму, що вимагає введення протиправцевої сироватки, дорівнює 0,005. Яка мінімальна кількість доз сироватки має бути у медичному пункті цього загону, щоб з ймовірністю не менше 0,95 її вистачило у разі потреби?

4. У аудиторіях навчального корпуса встановлено 250 ламп для освітлення. Ймовірність того, що ця лампа впродовж місяця перегорить, дорівнює 0,004. Один раз у місяць електротехнік обходить аудиторії і замінює лампи, що перегоріли. Який запас лампочок він повинен мати, щоб з ймовірністю 0,9 їх вистачило для заміни усіх лампочок, що перегоріли?

5. Належить зробити профілактичний огляд 400 пристроїв. Ймовірність того, що у пристрої, що оглядається, деякий елемент потрібно буде замінити, дорівнює 0,005. Яка ймовірність того, що доведеться замінити не більше чотирьох елементів?

6. Відомо, що тільки 1 % раковин містять перлину. Знайдіть ймовірність того, що у 100 здобутих раковинах виявиться не більше 3 перлин.

Локальна й інтегральна теореми Муавра – Лапласа

Користуватися формулою Бернуллі при великих значеннях n досить важко, оскільки формула вимагає виконання дій над великими числами. У процесі обчислень накопичуються погрішності, а тому остаточний результат може значно відрізнятися від істинного результату.

Локальна теорема Лапласа і дає асимптотичну формулу, яка дозволяє приблизно знайти ймовірність появи події рівно k разів у n випробуваннях, якщо число випробувань досить велике.

Для окремого випадку, а саме для $p = 0{,}5$, асимптотична формула була відкрита у 1730 р. Муавром; у 1783 р. Лаплас узагальнив формулу Муавра для довільного p, відмінного від 0 і 1. Тому теорему називають *теоремою Муавра – Лапласа.*

Доведення локальної теореми Лапласа досить складне, тому ми наведемо лише формулювання теореми і приклади, що ілюструють її використання.

Локальна теорема Лапласа. Якщо ймовірність p появи події A у кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться у n випробуваннях дорівнює k разам, приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше n) значенню функції

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

На запитання, як вичислити ймовірність того, що подія A з'явиться у n випробуваннях не менше k_1 і не більше k_2 разів, відповідає інтегральна теорема Лапласа.

Теорема. Якщо ймовірність р настання події A у кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність того, що подія A з'явиться у n випробуваннях не менше k_1 і не більше k_2 разів, приблизно дорівнює певному інтегралу

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Тут

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Якщо використати функцію Лапласа$\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

тоді інтегральна теорема Муавра – Лапласа запишеться так:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Значення функції Лапласа задається таблицею або її можна знайти у Інтернеті. Для розподілу Муавра – Лапласа математичне очікування буде дорівнювати

$$M[X] = np.$$

Дисперсія

$$D[X] = npq.$$

Середньоквадратичне відхилення для розподілу Пуассона буде

$$\sigma = \sqrt{npq}\,.$$

Приклад 1. Вісімдесят відсотків приладів після їх складання потребують регулювання. Яка ймовірність того, що серед 400 зібраних за зміну приладів регулювання потребують : не менше 310; не більше 350; від 304 до 336?

Рішення. Складання кожного приладу можна вважати незалежним випробуванням з ймовірністю появи події, яка дорівнює р = 0,8. Оскільки число дослідів велике, то можна скористатися інтегральною теоремою Муавра – Лапласа

$$P(k < 310) = \Phi\left(\frac{400 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{310 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= \Phi(10) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944\,;$$

$$P(0 < k < 350) = \Phi\left(\frac{350 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= \Phi(3{,}75) - \Phi(-40) = 0{,}4999 + 0{,}5 = 0{,}9999;$$

$$P(304 < k < 336) = \Phi\left(\frac{336 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{304 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 0{,}9545.$$

Відповідь: $P(304 < k < 336) = 0{,}9545$.

Завдання для самостійного вирішення.

1. Знайти ймовірність того, що подія А відбудеться рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,25.

2. Знайти ймовірність того, що подія А відбудеться 1400 разів у 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,6.

3. Ймовірність поразки мішені при одному пострілі дорівнює 0,8.

Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.

4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявляться 50 хлопчиків. Монета кинута 2n разів (N велике!).

5. Знайти ймовірність того, що «герб» випаде рівно N разів.

6. Монета кинута 2n разів. Знайти ймовірність того, що «герб» випаде на 2m разів більше, ніж напис.

7. Ймовірність появи події у кожному з 100 незалежних випробувань постійна і дорівнює p=0,8. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться: а) не менше 75 разів і не більше 90 разів; б) не менше 75 разів; в) не більше 74 разів.

8. Ймовірність появи події у кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'являється : а) не менше 1470 і не більше 1500 разів; б) не менше 1470 разів; в) не більше 1469 разів.

9. Ймовірність появи події у кожному з 21 незалежного випробування дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться у більшості випробувань.

Функція розподілу ймовірності випадкової величини

Розглянемо випадкову величину X, можливі значення якої суцільно заповнюють інтервал (a, b). Вводиться загальний спосіб завдання будь-яких типів випадкових величин. З цією метою і вводять функції розподілу ймовірності випадкової величини.

Функцією розподілу випадкової величини X називають функцію $F(x)$, визначальну ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, яке менше x.

Аналітично це записується таким чином:

$$F(x) = P(-\infty < X < x).$$

Іноді замість термін «функція розподілу» використовують термін «інтегральна функція».

Властивості функції розподілу випадкової величини.

Властивість 1. ***Значення функції розподілу належить відрізку [0;1]:***

$$0 \leq F(x) \leq 1\ .$$

Властивість 2. ***Функція розподілу випадкової величини неубутна функція, тобто, якщо*** $a < b$***, то*** $F\ (a)\ \leq F\ (b)$.

Висновок. ***Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, поміщеного в інтервал*** (a, b)***, дорівнюватиме збільшенню функції розподілу на цьому інтервалі:***

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Властивість 3. ***Функція розподілу випадкової величини неперивчаста функція.***

Властивість 4. $F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1\ .$

Функцію розподілу можна задати і для безперервної випадкової величини і для дискретної випадкової величини. Для дискретної випадкової величини функція розподілу є функцією накопиченої ймовірності:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i).$$

Щільність розподілу випадкової величини

Визначення. Щільністю розподілу випадкової величини називається межа відношення приросту ймовірності до приросту випадкової величини, коли останнє прагне до нуля, тобто

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}\ .$$

Якщо замість ймовірності підставити функцію розподілу випадкової величини, маємо

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Це похідна $F'(x)$. Отримуємо

$$f(x) = F'(x).$$

Зворотний зв'язок між функцією розподілу випадкової величини і щільністю розподілу випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Властивості функції щільності ймовірності.

1. Умова позитивності

$$f(x) \geq 0.$$

2. Умова нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 .$$

Для визначення ймовірності попадання безперервної випадкової величини X у інтервал $[\alpha, \beta]$ використовують формулу

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

Числа, призначення яких означати основні особливості випадкових величин, називаються числовими характеристиками.

Визначення. ***Математичним очікуванням*** (або середнім значенням) дискретної випадкової величини X називається число

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ .$$

Визначення. ***Математичним очікуванням безперервної випадкової величини***, що має щільність розподілу випадкової величини $f(x)$, називається число

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \ ,$$

якщо інтеграл абсолютно сходиться.

Якщо інтеграл не сходиться абсолютно, то говорять, що математичне очікування не існує.

Властивості математичного очікування

1. Математичне очікування постійної величини дорівнює самій цій постійній величині,
$$M[C] = C.$$
2. Константу можна виносити за знак математичного очікування
$$M[CX] = CM[X].$$
3. Математичне очікування суми випадкових величин дорівнюється сумі математичних очікувань кожної з випадкових величин:
$$M[X + Y] = M[X] + M[Y] \ .$$
4. Математичне очікування добутку випадкових величин дорівнюється добутку математичних очікувань кожної з випадкових величин:
$$M[X + Y] = M[X] + M[Y] \ .$$

Визначення. Дисперсією випадкової величини X називається математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування:

$$D[X] = M[(X - M[Y])^2] \ .$$

Для обчислення дисперсії зручно використати формулу

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2.$$

Властивості дисперсії:

1. $D[C] = 0$.
2. $D[CX] = C^2 D[X]$.
3. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$.
4. $D[XY] = D[X] \cdot D[Y] + D[X]M[Y]^2 + D[Y]M[X]^2$.

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини. Це позбавляє наочності дисперсію як числову характеристику. Тому для характеристики розкиду значень випадкової величини використовують середнє квадратичне відхилення, квадрат якого дорівнює дисперсії :

$$D[X] = \sigma[X]^2 \Longrightarrow \sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Середнє квадратичне відхилення має ту ж розмірність, що і сама випадкова величина.

Дискретна випадкова величина

Приклад 1. Хтось носить на зв'язці п'ять ключів. При відкриванні замка він послідовно випробовує ключі, поки не підбере потрібний. Вважаючи вибір ключів неповторним, написати закон розподілу числа випробуваних ключів. Вичислити математичне очікування і дисперсію цієї випадкової величини.

Рішення. Позначимо через X – число випробуваних ключів. Оскільки вибір ключів неповторний, то X може набувати значень: 1, 2, 3, 4, 5.

Випадкова величина X набуває значення $x_1 = 1$, якщо з першої спроби буде вибраний потрібний ключ, ймовірність цієї події $P(x_1) = 1/5$. Значення $x_2 = 2$ випадкова величина набуде, якщо при першій спробі ключ буде вибраний помилково, ймовірність чого дорівнює 4/5, а при другій спробі буде вибраний потрібний ключ з тих чотирьох, що залишилися. Ймовірність цієї події дорівнює 1/4. Тому:

$$P(x_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}.$$

Для варіанта $x_3 = 3$ аналогічна ситуація, тобто

$$P(x_3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}.$$

Для варіанта $x_4 = 4$:

$$P(x_4) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

І нарешті, для варіанта $x_5 = 5$:

$$P(x_5) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{5}.$$

Складемо таблицю закону розподілу дискретної випадкової величини X:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P(x_i)$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

Перевіримо правильність складання варіаційного ряду. Для цього складемо усю ймовірність:

$$P(-\infty < X < \infty) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

Варіаційний ряд складений правильно.

Знайдемо математичне очікування, коли середнє число спроб дорівнюється

$$M[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Знайдемо середнє квадратичне відхилення. Для цього вичислимо дисперсію

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2,$$

$$M[X^2] = \sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 p_i = 1 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \frac{1}{5} + 16 \cdot \frac{1}{5} + 25 \cdot \frac{1}{5} = \frac{55}{5} = 11.$$

Тоді $D[X] = M[X^2] - M[X]^2 = 11 - 9 = 2$.

И остаточно $\sigma[X] = \sqrt{2}$.

Приклад 2. У ящику в повному безладі лежать п'ять пар туфель. Туфлі по одній, без повернення, виймають з ящика, поки серед вибраних туфель не виявиться яка-небудь пара. Скільки у середньому туфель доведеться витягнути з ящика?

Рішення. Позначимо через X – число витягнутих туфель. Випадкова величина X набуває тільки значень: 2, 3, 4, 5, 6. Щоб сформувати пару, треба витягнути мінімум дві туфлі, а серед шести туфель хоч би одна пара неодмінно знайдеться. Знайдемо ймовірність цих значень:

$$P(X = 2) = \frac{1}{9},$$

оскільки після вибору першої туфлі у пару до неї годиться тільки одна з дев'яти, що залишилися;

$$P(X = 3) = \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9},$$

оскільки друга туфля має бути непарною до першої, ймовірність чого дорівнює 8/9, а третя має бути парною або до першої, або до другої туфлі, ймовірність чого дорівнює 2/8;

$$P(X = 4) = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{63},$$

оскільки друга туфля має бути непарною до першої, ймовірність чого 8/9, третя – непарною до перших двох, ймовірність чого 6/8, а четверта має бути однією туфлею з трьох вже розукомплектованих пар, ймовірність чого 3/7;

$$P(X=5)=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{16}{63},$$

оскільки друга туфля має бути непарною до першої, ймовірність чого 8/9, третя – непарною до перших двох, ймовірність чого 6/8, четверта – непарною до перших трьох, ймовірність чого дорівнює 4/7, а п'ята має бути однією туфлею з чотирьох уже розукомплектованих пар, ймовірність чого 4/6;

$$P(X=6)=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{8}{63},$$

оскільки для цього необхідно, щоб кожну з п'яти перших туфель вибирали зі ще не зворушеної пари.

Отже, випадкова величина має закон розподілу :

x_i	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	$\frac{7}{63}$	$\frac{14}{63}$	$\frac{18}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$

Перевіримо правильність складання варіаційного ряду. Для цього складемо усю ймовірність:

$$P(-\infty<X<\infty)=\frac{7}{63}+\frac{14}{63}+\frac{18}{63}+\frac{16}{63}+\frac{8}{63}=1\,.$$

Варіаційний ряд складений правильно.

Знайдемо математичне очікування або середнє число спроб:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{5}x_ip_i=2\cdot\frac{7}{63}+3\cdot\frac{14}{63}+4\cdot\frac{18}{63}+5\cdot\frac{16}{63}+6\cdot\frac{8}{63}=\frac{256}{63}.$$

Приклад 3. З чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 навмання без повернення вибирають чотири числа. Нехай X – найбільше з цих чисел. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X і її математичне очікування.

Рішення. Випадкова величина X може набувати значень 4, 5, 6, 7. Вичислимо ймовірність цих значень. Усього є $C_7^4=35$ способів вибрати будь-яких чотири числа з семи.

Реалізується значення $X = 4$, якщо будуть вибрані перші чотири числа 1, 2, 3, 4. Це можна зробити єдиним способом. Тому

$$P(X = 4) = \frac{1}{35}.$$

Значення $X = 5$ вийде, якщо буде вибрано число п'ять і на додаток до цього три числа з перших чотирьох. Це можна зробити $C_4^3 = 4$ способами. І ми маємо

$$P(X = 5) = \frac{4}{35}.$$

Знайдемо ймовірність для величини $X = 6$. Якщо буде вибрана цифра «шість» і на додаток до неї будь-які три числа з перших п'яти. Це можна зробити $C_5^3 = 10$. Отже

$$P(X = 6) = \frac{10}{35}.$$

І нарешті, якщо буде вибрана цифра 7 і на додаток до неї будь-які три з перших шести, то реалізується значення $C_6^3 = 20$.

Ймовірність для $X = 7$ буде

$$P(X = 7) = \frac{20}{35}.$$

У результаті маємо закон розподілу :

x_i	4	5	6	7
$P(x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$

Перевіримо правильність складання варіаційного ряду. Для цього складемо усю ймовірність:

$$P(-\infty < X < \infty) = \frac{1}{35} + \frac{4}{35} + \frac{10}{35} + \frac{20}{35} = 1\,.$$

Варіаційний ряд складений правильно.

Математичне очікування, або середнє число спроб, дорівнює

$$M[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 4 \cdot \frac{1}{35} + 5 \cdot \frac{4}{35} + 6 \cdot \frac{10}{35} + 7 \cdot \frac{20}{63} = \frac{224}{35} = 6{,}4\,.$$

Завдання для самостійного вирішення

1. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкового числа попадань м’ячем у кошик при одному кидку, якщо ймовірність попадання м’ячем у кошик при одному кидку p=0,3. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

2. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу для числа появи гербів при п'яти киданнях однієї монети. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

3. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу для числа появи гербів при семи киданнях однієї монети. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

4. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу для числа появ гербів при одноразовому киданні трьох монет. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

5. Ведуться послідовні незалежні випробування п'яти приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробовується тільки у тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Побудувати ряд розподілу випадкового числа випробуваних приладів, якщо ймовірність витримати випробування для кожного з них дорівнює 0,9. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

6. Два баскетболісти по черзі закидають м'яч у кошик до тих пір, поки один з них не попаде. Побудувати ряд розподілу функції випадкових чисел кидків, вироблюваних кожним з баскетболістів, якщо ймовірність попадання для першого p_1, а для другого p_2. Знайти математичне очікуван-

ня і дисперсію випадкової величини.

7. Мішень складається з круга № 1 і двох концентричних кілець з номерами № 2 і № 3. Попадання у круг № 1 дає 10 очок, у кільце № 2 дає 5 очок, у кільце № 3 дає (- 1) очко. Ймовірність попадання у круг № 1 і кільця № 2 і № 3 відповідно дорівнює 0,5; 0,3; 0,2. Побудувати ряд розподілу для випадкової суми отриманих очок у результаті трьох попадань. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

8. Сигнали на вмикання приладів подаються через кожні 5 сек. Час від моменту передачі сигналу до вмикання приладу 16 сек. Подання сигналів припиняється відразу ж після того, як включиться хоч би один прилад. Знайти ряд розподілу функції для випадкового числа поданих сигналів, якщо ймовірність включення для кожного приладу дорівнює 1/2. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

9. Монету підкидають до тих пір, поки вона не випаде стороною з гербом, або підкидають п'ять разів, поки не випаде «цифра». Нехай X – число кидків монети. Напишіть закон розподілу випадкової величини X і знайдіть її математичне очікування.

10. Стрілець стріляє у ціль, поки не попаде, або доки не зробить 3 промахи. Ймовірність попасти у ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Нехай X – число зроблених пострілів. Напишіть закон розподілу для випадкової величини X і знайдіть її математичне очікування.

11. Ймовірність попадання у ціль при кожному пострілі дорівнює 1/3. Є сім патронів. Стрільба триває до тих пір, поки не буде трьох попадань або доки не закінчяться патрони. Нехай X – число пострілів. Знайдіть математичне очікування випадкової величини X.

12. З 12 виробів три мають приховані дефекти. Навмання вибрані чотири вироби. Напишіть закон розподілу числа виробів з прихованими дефектами серед вибраних деталей.

13. Банк видав позику у 510 000 грн. під 10 % річних терміном в

один рік під заставу будинку клієнта. У разі, якщо будинок згорить, зруйнується і т. п. (тобто станеться страховий випадок), клієнт нічого не поверне банку, тому для зменшення ризику банк зобов'язав клієнта придбати страховий поліс на 500 000 грн., заплативши за нього 10 000 грн. Будинок був оцінений експертами страхової компанії у 500 000 грн., а ймовірність настання страхового випадку з таким будинком упродовж року – у 0,001. Скласти ряди розподілу доходу банку $X_б$ і доходу страхової компанії $X_{ск}$ за рік. Знайти очікувані доходи банку і страхової компанії.

14. Увечері Петру знадобилося обміняти валюту. Він знає, що з трьох пунктів обміну валюти, розташованих поблизу, у цей час працює лише один, але не пам'ятає, який саме. Скласти ряд розподілу числа обмінних пунктів, які доведеться відвідати Петру, якщо вважати, що кожен з пунктів може працювати з ймовірністю 1/3. Оцінити очікуваний час T, який Петро витратить на обмін валюти, якщо на кожне відвідування йде півгодини.

15. Початковий капітал торговця – "човника" становить 10 000 грн. Досвідчені колеги повідали йому, що після кожної поїздки торговця його капітал з ймовірністю 1/2 збільшується у півтора рази, з ймовірністю 1/4 залишається без змін і з ймовірністю 1/4 зменшується у півтора рази. Скласти ряд розподілу капіталу торговця після двох поїздок і знайти його математичне очікування.

16. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу для числа випадання окулярів при киданні двох кубиків. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

17. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу для числа випадання окулярів при киданні трьох кубиків. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини.

Безперервна випадкова величина

Приклад 1. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -1,\\ \dfrac{x+1}{4}, & \text{при } -1<x\le 3,\\ 1, & \text{при } 3<x.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що у результаті випробування X набуде значення, що належить інтервалу (0, 2).

Рішення. Перевіримо властивості функції розподілу випадкової величини. Функція розподілу випадкової величини безперервна функція.

На інтервалі $x\le -1$, $F(x)=0$ – це безперервна функція.

При $-1<x\le 3$

$$F(x)=\frac{x+1}{4}.$$

Це також безперервна функція.

На інтервалі $3<x$, $F(x)=1$ – безперервна функція.

Перевіримо безперервність у точках $x=-1$ і $x=3$.

1) $x=-1$. Для безперервності функції у точці x_0 мають виконуватися такі рівності:

$$F(x_0-0)=F(x_0+0)=F(x_0),$$

$$F(-1-0)=0,\qquad F(-1+0)=\frac{-1+1}{4}=0,\qquad F(-1)=0\,.$$

Рівності виконуються.

2) $x=3$,

$$F(3-0)=\frac{3+1}{4}=1,\qquad F(3+0)=1,\quad F(3)=\frac{3+1}{4}=1.$$

Рівності виконуються.

Ймовірність того, що у результаті випробування X набуде значення, що належить інтервалу (0, 2), знаходимо за формулою

$$\mathrm{P}(0<X<2)=F(2)-\mathrm{F}(0).$$

На інтервалі (0, 2) за умовою приклада,

$$F(x) = \frac{x+1}{4}.$$

Тоді

$$\mathrm{P}(0 < X < 2) = \frac{2+1}{4} - \frac{0+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\mathrm{P}(0 < X < 2) = 0{,}5.$

Завдання для самостійного вирішення

1. На круговому екрані локатора рівнозначна поява плями у кожній точці екрану. Радіус екрану дорівнює R. Записати закон розподілу відстані від центра екрану до плями. Знайти математичне очікування і дисперсію цієї відстані.

2. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0; 1]$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1, \\ c(x+1), & \text{при } -1 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1, & \text{при } \dfrac{1}{3} < x. \end{cases}$$

3. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [-1; 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2, \\ 0{,}5 + c \cdot \arcsin(0{,}5x), & \text{при } -2 < x \le 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x. \end{cases}$$

4. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини

$F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [3; 3{,}5]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ c(x-2)\ , & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } 4 < x\ . \end{cases}$$

5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0; 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ cx^2\ , & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x. \end{cases}$$

6. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0; \pi/6]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -\dfrac{\pi}{2}, \\ c(1 + sinx), & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{при } \dfrac{\pi}{2} < x\ . \end{cases}$$

7. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [-\pi/3; 0]$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\pi/2, \\ c\cdot cosx, & \text{при } -\pi/2 < x \le 0, \\ 1, & \text{при } 0 < x\,. \end{cases}$$

8. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0;1]$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ cx^3\,, & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x. \end{cases}$$

9. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0;1/2]$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ cx^4\,, & \text{при} 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{при } 2 < x\,. \end{cases}$$

10. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0;1]$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1, \\ c(x+1)^2\,, & \text{при} -1 < x \le 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x\,. \end{cases}$$

11. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання

випадкової величини у проміжок $X \in [2; 3]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ c(x-1)^2, & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } 4 < x. \end{cases}$$

12. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0; 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ c(x+1)^3, & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x. \end{cases}$$

13. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [2; 3]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ c(x-1)^3, & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } 4 < x. \end{cases}$$

14. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [d; d + 1/2]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq d, \\ c\sqrt{x-d}, & \text{при } d < x \leq d+1, \\ 1, & \text{при } d+1 < x. \end{cases}$$

15. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньок-

вадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0; d/4]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ c(dx - x^2), & \text{при } 0 < x \le d/2, \\ 1, & \text{при } \dfrac{d}{2} < x\,. \end{cases}$$

16. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0; 2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c - e^{-x}, & x \in (0; \infty), \\ 0, & x \notin (-\infty; 0). \end{cases}$$

17. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0; 2]$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 + ce^{-x}, & x \in (0; \infty), \\ 0, & x \notin (-\infty; 0). \end{cases}$$

18. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0; 2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - e^{-x}), & x \in (0; \infty), \\ 0, & x \notin (-\infty; 0). \end{cases}$$

19. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання

випадкової величини у проміжок $X \in [0;2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - e^{-3x}), & x \in (0;\infty), \\ 0, & x \notin (-\infty;0). \end{cases}$$

20. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0;2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - e^{-5x}), & x \in (0;\infty), \\ 0, & x \notin (-\infty;0). \end{cases}$$

21. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0;2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - x^{-4}), & x \in (1;\infty), \\ 0, & x \notin (-\infty;0). \end{cases}$$

22. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини у проміжок $X \in [0;3]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - x^{-6}), & x \in (1;\infty), \\ 0, & x \notin (-\infty;0). \end{cases}$$

23. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P\left(-\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{\pi}{4}\right)$:

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot cosx, & x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\\ 0, & x\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

24. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P\left(0\le X\le\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot sinx, & x\in[0;\pi],\\ 0, & x\notin[0;\pi].\end{cases}$$

25. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(0\le X\le 1)$:

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot e^{-x}, & x\in(0;\infty),\\ 0, & x\notin(-\infty;0).\end{cases}$$

26. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$:

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot x^3, & x\in[0;1],\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$$

27. Дано щільність розподілу $f(x)=\mathrm{c}\cdot e^{-|x|}$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність:

$$P(-1\le X\le 1).$$

28. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(3/2 \le X \le 2)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-3}, & x \in [1;2], \\ 0, & x \notin [1;2]. \end{cases}$$

29. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(2 \le X \le 3)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-2}, & x \in [1;4], \\ 0, & x \notin [1;4]. \end{cases}$$

30. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(2 \le X \le 3)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-1}, & x \in [1;4], \\ 0, & x \notin [1;4]. \end{cases}$$

31. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(1 \le X \le 5)$:

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-5}, & x \in (1;\infty), \\ 0, & x \notin (-\infty;0). \end{cases}$$

32. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньок-

вадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(1 \leq X \leq 3)$:

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-4}, & x \in (1; \infty), \\ 0, & x \notin (-\infty; 0). \end{cases}$$

33. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(1 \leq X \leq 4)$:

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-3}, & x \in (1; \infty), \\ 0, & x \notin (-\infty; 0). \end{cases}$$

Центральна гранична теорема

Сформулюємо центральну граничну теорему для однаково розподілених випадкових величин.

Нехай $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ – послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин.

Якщо дисперсії випадкових величин кінцеві й відмінні від нуля, то при досить великих значеннях n закон розподілу суми:

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

скільки завгодно близький до нормального закону розподілу.

Тоді ймовірність $P(C_1 < Y_n < C_2)$ можна вичислити за формулою

$$P(C_1 < Y_n < C_2) = P\left(\alpha < \frac{Y_n - A_n}{\sqrt{nB_n}} < \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

в цій формулі

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} M[X_k], \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} D[X_k],$$

$$\alpha = \frac{C_1 - A_n}{\sqrt{nB_n}}\ , \qquad \beta = \frac{C_2 - A_n}{\sqrt{nB_n}}.$$

$\Phi(\beta)$ – функції Лапласа, яку знаходять із таблиць або в Інтернеті.

Наведемо приклад використання центральної граничної теореми.

Приклад 1. Стрілець у десятку попадає з ймовірністю 0,4, у дев'ятку – з ймовірністю 0,3, у вісімку – з ймовірністю 0,2, у сімку -- з ймовірністю 0,1. Яка ймовірність того, що при 25 пострілах стрілець набере від 220 до 240 очок?

Рішення. Нехай при i -му пострілі стрілець вибиває X_i очок. Величини X_i незалежні й мають однаковий розподіл.

Сума очок

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

як сума великого числа незалежних, однаково розподілених додатків, які мають обмежену дисперсію, має закон розподілу, близький до нормального розподілу з параметрами $M[X_k]$ и $D[X_k]$.

Обчислимо:

$$M[X_k] = 7 \cdot\ 0{,}1 + 8 \cdot\ 0{,}2 + 9 \cdot\ 0{,}3 +\ 10 \cdot\ 0{,}4 = 9;$$

$$D[X_k] = (7-9)^2\ 0{,}1 + (8-9)^2\ 0{,}2 + (9-9)^2\ 0{,}3 +$$
$$+(10-9)^2\ 0{,}4 = 1.$$

Для обчислення ймовірності того, що при 25 пострілах стрілець набере від 220 до 240 очок, використовуємо центральну граничну теорему

$$P(C_1 < Y_n < C_2) = P\left(\alpha < \frac{Y_n - A_n}{\sqrt{nB_n}} < \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Знайдемо α й β. Для цього обчислимо:

$$A_n = M[X_k] \cdot 25 = 9 \cdot 25 = 225,$$

$$nB_n = 25 \cdot 1 = 25,\ \sqrt{nB_n} = 5.$$

Тоді

$$\alpha = \frac{220 - 225}{5} = -1,\ \ \beta = \frac{240 - 225}{5} = 3.$$

І остаточно маємо

$$P(220 < Y_n < 240) = \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) + \Phi(1).$$

Значення функції Лапласа знаходимо із таблиць:

$$\Phi(3) = 0{,}4986, \qquad \Phi(1) = 0{,}3413$$

Ймовірність набрати стрільцем від 220 до 240 очок з 25 пострілів:

$$P(220 < Y_n < 240) = 0{,}8399.$$

Завдання для самостійного вирішення

1. Гральний кубик підкидають 60 разів. Оцінити ймовірність того, що сумарне число окулярів перевищить 190.

2. Регулювання приладу займає від 4 до 10 хв. Регулювальникові треба відрегулювати 50 приладів. Уважаючи для кожного приладу рівно можливими усі значення часу регулювання у зазначених межах, оцінити ймовірність того, що регулювальник впорається з роботою за шість годин.

3. Жетон для грального автомата коштує 10 грн. При використанні одного жетона (в окремій грі) ймовірність не отримати нічого дорівнює 0,8, ймовірність отримати 20 грн дорівнює 0,15, ймовірність отримати 50 грн дорівнює 0,04 і ймовірність отримати 100 грн дорівнює 0,01. Гравець купив

жетонів на 1000 грн. Яка ймовірність того, що гравець не опиниться у програші?

4. Лотерейний квиток коштує 20 грн З ймовірністю 0,9 квиток виявиться без виграшу, з ймовірністю 0,8 на нього припаде виграш ціною у 100 грн із ймовірністю 0,2 на квиток виграє 200 грн. Яка ймовірність залишитися у програші, якщо придбати 20 білетів?

5. У районі десять універсамів. Сумарний добовий виторг у них дорівнює у середньому 10 000 грн і у 90 % випадків відрізняється від 10 000 грн не більше, ніж на 1 000 грн. Знайти ймовірність того, що черговий сумарний добовий виторг опиниться у межах від 8 000 до 12 000 грн.

6. Банкомат видає стандартні суми у 500, 100 і 50 грн, причому перші становлять 10 %, а останні – 60 % усіх видач. У середньому банкомат робить 100 видач у добу. Визначити розмір грошової суми, яку необхідно закласти у банкомат уранці, щоб цієї суми з ймовірністю 0,9 вистачило для видачі готівки вкладникам до наступного ранку.

7. При складанні статистичного звіту треба було скласти 104 числа, кожне з яких було округлене з точністю до 10^{-m}. Припускаючи, що помилки, які виникають при округленні, незалежні у сукупності й розподілені рівномірно на відрізку $[-0,5 \cdot 10^{-m}; 0,5 \cdot 10^{-m}]$, визначити межі, у яких з ймовірністю, більшою 0,987, лежатиме сумарна помилка.

8. Ймовірність появи події при одному досвіді дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що частота цієї події при 100 дослідах лежатиме у межах від 0,2 до 0,4?

9. Є 100 верстатів, приводи яких вмикаються незалежно один від одного. Яка ймовірність того, що у цей проміжок часу виявляться увімкненими від 70 до 86 приводів, якщо для кожного приводу ймовірність бути увімкненим у момент часу, що належить цьому проміжку, дорівнює 0,8?

10. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що за час T із 100 конденсаторів вийдуть з ладу не менше 20.

11. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що за час T із 100 конденсаторів вийдуть з ладу менше 28 конденсаторів.

12. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що за час T із 100 конденсаторів вийдуть з ладу від 14 до 26 конденсаторів.

13. При виготовленні деталі ймовірність отримання дефектної деталі дорівнює 0,2. Скільки необхідно запланувати відливок до виготовлення, щоб з ймовірністю не менше 0,95 була забезпечена програма випуску виробів, для виконання якої потрібні 50 бездефектних деталей, якщо якість кожної з них не залежить від інших?

14. Скільки необхідно зробити незалежних випробувань для того, щоб з ймовірністю 0,9 стверджувати, що частота події, що цікавить нас, відрізнятиметься від ймовірності появи цієї події, рівної 0,4, не більше ніж на 0,1?

15. Ймовірність появи деякої події у одному випробуванні дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що ця подія з'явиться у більшості з 60 незалежних випробувань?

16. Цех заводу випускає кульки для підшипників. За зміну виготовлюється $n = 10\,000$ кульок. Ймовірність того, що одна кулька виявиться дефектною, дорівнює 0,05. Причини дефектів для окремих кульок незалежні. Продукція проходить контроль відразу після виготовлення, причому дефектні кульки бракуються і зсипаються у бункер, а небраковані поступають у цех складання. Визначити, на яку кількість кульок має бути розрахований бункер, щоб з ймовірністю 0,99 після зміни він не виявився переповненим.

17. Лотерея організована таким чином. Учасникам продаються білети, на кожному з яких є таблиця з номерами: 1, 2,..., 90. Учасник має вибрати довільно п'ять різних номерів, позначити ці номери і відіслати білет організаторам лотереї, які зберігають усі прислані білети у запечатаному вигляді до дня розіграшу. Розіграш лотереї полягає у тому, що випадковим чином вибираються (розігруються) п'ять різних номерів з дев'яноста; про номери, які випали, повідомляється учасникам. Якщо у гравця сходяться з оголошеними менше двох номерів (0 або 1), він ніякого виграшу не отримує. Якщо сходяться з оголошеними два номери, він виграє 1 грн; якщо три номери – 100 грн; якщо чотири номери – 10 000 грн; якщо усі п'ять номерів – 1 000 000 грн. Визначити нижню межу ціни білета, при якому лотерея у середньому ще не приносить збитку її організаторам.

18. Лотерея організована таким чином. Учасникам продаються білети, на кожному з яких є таблиця з номерами: 1, 2,..., 90. Учасник має вибрати довільно п'ять різних номерів, позначити ці номери і відіслати білет організаторам лотереї, які зберігають усі прислані білети у запечатаному вигляді до дня розіграшу. Розіграш лотереї полягає у тому, що випадковим чином вибираються (розігруються) п'ять різних номерів з дев'яноста; про номери, які випали, повідомляється учасникам. Якщо у гравця сходяться з оголошеними менше двох номерів (0 або 1), він ніякого виграшу не отримує. Якщо сходяться з оголошеними два номери, він виграє 1 грн; якщо три номери – 100 грн; якщо чотири номери – 10 000 грн; якщо усі п'ять номерів – 1 000 000 грн. Визначити середній доход М, який приносить лотерея організаторам, якщо у ній беруть участь 1 000 000 чоловік, що призначають свої номери незалежно один від одного, кожен купує один білет, а ціна його 30 коп.

19. Лотерея організована таким чином. Учасникам продаються білети, на кожному з яких є таблиця з номерами: 1, 2,..., 90. Учасник має вибрати довільно п'ять різних номерів, позначити ці номери і відіслати білет

організаторам лотереї, які зберігають усі прислані білети у запечатаному вигляді до дня розіграшу. Розіграш лотереї полягає у тому, що випадковим чином вибираються (розігруються) п'ять різних номерів з дев'яноста; про номери, які випали, повідомляється учасникам. Якщо у гравця сходяться з оголошеними менше двох номерів (0 або 1), він ніякого виграшу не отримує. Якщо сходяться з оголошеними два номери, гравець виграє 1 грн; якщо три номери – 100 грн; якщо чотири номери – 10 000 грн; якщо усі п'ять номерів – 1 000 000 грн. Користуючись «правилом трьох сигм», знайти межі практично можливих виплат з лотереї; чи можна враховувати сумарну виплату з лотереї, розподілену за нормальним законом?

20. Міра довжини "фут", як видно з назви, має пряме відношення до ноги: це – довжина ступні. Але, як відомо, розміри ніг бувають різні. Німці у XVI ст. виходили з положення так. У недільний день ставили поруч 16 чоловіків, що першими вийшли з церкви. Сума довжин їх лівих стоп ділилися на 16 – середня довжина і була «правильним і законним футом». Відомо, що розмір стопи дорослої людини того часу описується випадковою величиною з математичним очікуванням 262,5 мм і середнім квадратичним відхиленням 12 мм. Знайти ймовірність того, що два «правильних і законних фути», розрахованих зазначеним способом у різні дні, відрізняються один від одного більше, ніж на 5 мм. Скільки треба було б узяти чоловік для того, щоб з ймовірністю, більшою 0,99, середній розмір їх ступні відрізнявся б від 262,5 мм менш, ніж на 0,5 мм?

21. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на прийняття бізнес-плану прийме позитивне розв’язання про кредитування фірми, що дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі прийме один банк.

22. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на прийняття бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що розв'язання про надання кредитів цій фірмі приймуть 15 банків.

23. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на прийняття бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть 30 банків.

24. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на прийняття бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть 50 банків.

25. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на прийняття бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі прийме хоч би один банк.

26. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на прийняття бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма

звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть більш ніж 15 банків.

27. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на прийняття бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть більш ніж 50 банків.

28. Ймовірність появи успіху у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що у серії з 300 випробувань успіх настане рівно 75 разів.

29. Ймовірність появи успіху у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що у серії з 300 випробувань успіх настане від 70 до 100 разів.

30. Ймовірність смерті тридцятирічного чоловіка дорівнює 0,006. Страхова компанія уклала 10 000 страхових контрактів з чоловіками у віці тридцяти років, згідно з якими у разі смерті застрахованої особи впродовж найближчого року його спадкоємцям буде виплачуватися 100 000 грн. Вартість одного контракту дорівнює 1200 грн. Знайти ймовірності того, що до кінця року страхова компанія опиниться у збитку.

31. Ймовірність смерті тридцятирічного чоловіка дорівнює 0,006. Страхова компанія уклала 10 000 страхових контрактів з чоловіками у віці тридцяти років, згідно з якими у разі смерті застрахованої особи впродовж найближчого року його спадкоємцям буде виплачуватися 100 000 грн. Вартість одного контракту дорівнює 1200 грн. Знайти ймовірність того, що до кінця року доход страхової компанії перевищить 4 000 000 грн.

32. У страховій компанії 10 000 клієнтів, внесок кожного з яких становить 1 000 грн Ймовірність настання страхового випадку дорівнює (за оцінками експертів компанії) 0,005, а страхова виплата при настанні стра-

хового випадку становить 100 000 грн. Визначити, на який прибуток може розраховувати страхова компанія з ймовірністю 0,99.

33. У страховій компанії 10 000 клієнтів, внесок кожного з яких становить 1 000 грн. Ймовірність настання страхового випадку дорівнює (за оцінками експертів компанії) 0,005, а страхова виплата при настанні страхового випадку становить 100 000 грн. Визначити мінімальний розмір страхової премії, при якій страхова компанія отримає прибуток, не менший 1 000 000 грн, з ймовірністю 0,999.

34. Під час канікул Петро працював у передвиборчому штабі відносно кандидатів у депутати. Він проводив вибіркове опитування виборців. Зразковий розподіл голосів був відомий: по 40 % виборців за і проти кандидата, інші утрималися. Скільки треба опитати людей, щоб з ймовірністю, не меншою 0,9, гарантувати відхилення відсотка голосів, відданих за кандидата при вибірковому опитуванні, від істинної думки виборців не більше, ніж на 2 % від усього електорату?

35. У дачному селищі 2 500 жителів, кожен з яких приблизно шість разів на місяць їздить на потягу до міста, вибираючи дні поїздок випадковим чином і незалежно від інших жителів. Яку найменшу місткість повинен мати потяг, щоб він переповнювався у середньому не частіше за один раз у 100 днів (потяг ходить раз на добу).

Нормальний розподіл

Нормальним розподілом називають розподіл ймовірності безперервної випадкової величини, яке описується щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальний розподіл визначається двома параметрами. Параметр a – це математичне очікування, а параметр σ - середнє квадратичне відхилення нормального розподілу. Досить знати ці параметри, щоб задати нормальний розподіл.

Нормованим нормальним розподілом називають нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$.

Щільність нормованого розподілу

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Для цієї функції складені таблиці.

Функція розподілу нормального закону розподілу випадкової величини має вигляд

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Якщо покласти параметри $a = 0$ і $\sigma = 1$, то отримана функція розподілу називається нормованою функцією розподілу:

$$\mathrm{F}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Вводиться функція Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Функції $\mathrm{F}_0(x)$ і $\Phi(x)$ пов'язані співвідношенням

$$\mathrm{F}_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Значення функцій $\mathrm{F}_0(x)$ і $\Phi(x)$ наведені у відповідних таблицях.

Якщо користуватися таблицею для $\Phi(x)$, то у ній $x \geq 0$. Як у цьому випадку вичислити значення $\Phi(x)$ при $x < 0$? Треба скористатися властивістю функції $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Відомо, що якщо випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$, то ймовірність попадання випадкової величини X у інтервал $(\alpha;\beta)$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

Тоді, якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом, ймовірність попадання випадкової величини X у інтервал $(\alpha;\beta)$ дорівнює

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Після нескладних перетворень отримуємо

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Правило трьох сигм

Добре відомо, що

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Якщо покласти $\delta = \sigma t,$ тоді маємо

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t).$$

Для $t = 3$ ймовірність буде такою:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Це означає, що ймовірність відхилення за абсолютною величиною буде менше потрійного середнього квадратичного відхилення і дорівнює 0,9973.

Іншими словами, ймовірність того, що абсолютна величина відхилення перевищить потрійне середнє квадратичне відхилення, дуже мала, а саме дорівнює 0,0027. Це означає, що лише у 0,27 % випадків так може статися. Такі події, виходячи з принципу неможливості маловірогідних подій, можна вважати практично неможливими. У цьому і полягає суть правила трьох сигм : якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного очікування не перевищує потрійного середнього квадратичного відхилення.

На практиці правило трьох сигм застосовують так: якщо розподіл випадкової величини, що вивчається, невідомий, але умова, зазначена у наведеному правилі, виконується, тобто основа припускати, що величина, що вивчається, розподілена нормально; інакше вона не розподілена нормально.

Завдання для самостійного вирішення

1. Яка ймовірність того, що помилка виміру X не перевищить за абсолютною величиною 5 м, якщо математичне очікування $a = 5\text{м}$, а середньоквадратичне відхилення $\sigma = 75$ м.

2. Помилка X утримання висоти літаком має $a = 20$ м, а $\sigma = 75$ м. Яка ймовірність, що літак летітиме нижче, усередині і вище за коридор заввишки 100 м, якщо літаку задана висота, що відповідає середині коридору.

3. Незалежні випадкові величини X і Y розподілені за нормальним законом з параметрами $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$ м, $a_1 = -a_2 = 5$ м. Яка ймовірність того, що хоч би одна з них за абсолютною величиною не перевершить 15 м.

4. Випадкове відхилення розміру деталі від номіналу при виготовленні її на цьому верстаті має нульове математичне очікування і середнє квадратичне відхилення, що дорівнює 5 мк. Скільки необхідно виготовити деталей, щоб з ймовірністю не менше 0,9 серед них була хоч би одна якісна, якщо для якісної деталі допустиме відхилення розміру від номіналу не

більше, ніж на 2 мк?

5. Дано дві випадкові величини X і Y, що мають однакові дисперсії, але перша розподілена за нормальним законом, а друга рівномірно. Визначити співвідношення між серединними відхиленнями δ_x і δ_y, скориставшись рівністю

$$P(|X - a_x| < \delta_x) = P\left(\left|X - a_y\right| < \delta_y\right) = \frac{1}{2}.$$

6. Нормально розподілена випадкова величина X має математичне очікування x =-15 м і середнє квадратичне відхилення 15 м. Вичислити таблицю функції розподілу для значень аргументу через кожні 15 м і побудувати графік. Цех заводу випускає кульки для підшипників. За зміну робиться n = 10 000 кульок. Ймовірність того, що одна кулька виявиться дефектною, дорівнює 0,05. Причини дефектів для окремих кульок незалежні.

7. Продукція проходить контроль відразу після виготовлення, причому дефектні кульки бракуються і зсипаються у бункер, а небраковані спрямовуються до цеху складання. Визначити, на яку кількість кульок має бути розрахований бункер, щоб з ймовірністю 0,99 після зміни він не виявився переповненим.

8. Лотерея організована таким чином. Учасникам продаються білети, на кожному з яких є таблиця з номерами: 1, 2, ..., 90. Учасник має вибрати довільним чином п'ять різних номерів, відмітити ці номери і надіслати білет організаторам лотереї, які зберігають усі прислані білети у запечатаному вигляді до дня розіграшу. Розіграш лотереї полягає у тому, що випадковим чином вибираються (розігруються) п'ять різних номерів з дев'яноста; виграшні номери повідомляються учасникам. Якщо у гравця зійшлися з оголошеними менше двох номерів (0 або 1), він ніякого виграшу не отримує. Якщо з оголошеними зійшлися два номери, він виграє 1 грн; якщо три номери – 100 грн; якщо чотири номери – 10 000 грн; якщо усі

п'ять номерів – 1 000 000 грн. 1) Визначити нижню межу ціни білета, при якому лотерея у середньому ще не приносить збитку її організаторам; 2) визначити середній доход М, який приносить лотерея організаторам, якщо у ній беруть участь 1 000 000 чоловік, що призначають свої номери незалежно один від одного, кожен купує один білет, а ціна білета 30 коп.; 3) користуючись "правилом трьох сигм", знайти межі практично можливих виплат по лотереї.

9. Математичне очікування і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X, відповідно, дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що у результаті випробування X набуде значення, розміщеного в інтервалі (12, 14).

10. Математичне очікування і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X, відповідно, дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що у результаті випробування X набуде значення, розміщеного в інтервалі (15, 25).

11. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, яка розподілена нормально з математичним очікуванням (проектна довжина), що дорівнює 50 мм. Фактично довжина виготовлених деталей не менше 32 і не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання узятої деталі : а) більше 55 мм; б) менше 40 мм.

12. Робиться зважування деякої речовини без систематичних помилок. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням 20 р. Знайти ймовірність того, що зважування буде зроблено з помилкою, яка не перевищує абсолютну величину 10 р.

13. Випадкові помилки виміру підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням 20 мм і математичним очікуванням 0. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірів помилка хоч би одного не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.

14. Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менше 0,7 мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням 0,4 мм, знайти, скільки у середньому буде придатних кульок серед ста виготовлених.

15. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення її контрольованого розміру від проектного не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення контрольованого розміру від проектного підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням 5 мм і математичним очікуванням 0. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

16. Бомбардувальник, що пролетів уздовж моста, довжина якого 30 м і ширина 8 м, скинув бомби. Випадкові величини X і У (відстані від вертикальної і горизонтальної осей симетрії моста до місця падіння бомби) незалежні й розподілені нормально з середніми квадратичними відхиленнями, відповідно, рівними 6 і 4 м, і математичними очікуваннями, що дорівнюють нулю. Знайти ймовірність попадання у міст однієї скинутої бомби.

17. Бомбардувальник, що пролетів уздовж моста, довжина якого 30 м і ширина 8 м, скинув бомби. Випадкові величини X і У (відстані від вертикальної і горизонтальної осей симетрії моста до місця падіння бомби) незалежні й розподілені нормально з середніми квадратичними відхиленнями, що дорівнюють 6 і 4 м, і математичними очікуваннями, рівними нулю. Знайти ймовірність руйнування моста, якщо скинуто дві бомби, причому відомо, що для руйнування моста досить одного попадання.

18. Випадкова величина X розподілена нормально із математичним очікуванням 10. Ймовірність попадання X у інтервал (10, 20) дорівнює 0,3. Чому дорівнює ймовірність попадання X у інтервал (0, 10)?

19. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним очікуванням 10 і середнім квадратичним відхиленням 5. Знайти інтервал,

симетричний відносно математичного очікування, у який з ймовірністю 0,9973 потрапить величина X у результаті випробування.

20. Випадкова величина X розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням 5 мм. Знайти довжину інтервалу, симетричного відносно математичного очікування, у який з ймовірністю 0,9973 потрапить X у результаті випробування.

21. Верстат-автомат виготовляє валики, причому контролюється їх діаметр X. Вважаючи, що X нормально розподілена випадкова величина з математичним очікуванням 10 мм і середнім квадратичним відхиленням 0,1 мм, знайти інтервал, симетричний відносно математичного очікування, у якому з ймовірністю 0,9973 будуть належати діаметри виготовлених валиків.

22. Випадкові помилки висотоміра X мають математичне очікування 20 м. Яке вони повинні мати середнє квадратичне відхилення, щоб з ймовірністю, яка дорівнює 0,9, помилка виміру висоти за абсолютною величиною була менше 100 м?

23. Визначити для нормально розподіленої випадкової величини X, що має математичне очікування 0:

$$P(X \geq k\sigma) \text{ и } P(|X| \geq k\sigma)\ (k = 1,2,3).$$

24. Кількість заряду мисливського пороху зважують на вагах, що мають середню квадратичну помилку зважування 150 мг. Номінальна вага порохового заряду 2,3 г. Визначити ймовірність ушкодження рушниці, якщо максимально допустима вага порохового заряду 2,5 г.

25. Роблять два незалежні виміри приладом, помилки виміру якого X мають математичне очікування 10 м і середньо квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що кожна з помилок виміру, маючи різні знаки, за абсолютною величиною перевищить 10 м?

26. Якої ширини має бути поле допуску, щоб з ймовірністю не більше 0,0027 виходила деталь з контрольованим розміром поза полем допус-

ку, якщо випадкові відхилення розміру від середини поля допуску підкоряються закону нормального розподілу з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 5\ \text{мк}$?

27. Виріб вважається вищої якості, якщо відхилення його розмірів від номіналу не перевищує за абсолютною величиною 3,45 мм. Відхилення Х, контрольованого розміру виробу від номіналу, підкоряються закону нормального розподілу з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 3$ мм. Визначити математичне очікування числа виробів вищої якості, якщо виготовляються 4 вироби.

28. Яка найбільша відстань допустима між двома риболовецькими суднами, що йдуть паралельними курсами, щоб ймовірність виявлення косяка, який знаходиться посередині між ними, була не менше 0,5, якщо дальність виявлення косяка для кожного з суден є незалежною нормально розподіленою випадковою величиною з а=3,7км і середнім квадратичним відхиленням σ =1,1км ?

29. Нормально розподілена випадкова величина Х має нульове математичне очікування. Визначити середнє квадратичне відхилення σ, при якому ймовірність $P(\alpha < X < \beta)$ була б найбільшою $(0 < \alpha < \beta)$.

30. Випадкова величина Х розподілена нормально. Математичне очікування і середнє квадратичне відхилення Х дорівнюють, відповідно, 20 і 10. Знайти ймовірність того, що відхилення за абсолютною величиною буде менше трьох.

31. Випадкове відхилення Х розміру деталі від номіналу розподілене за нормальним законом з математичним очікуванням а і середнім квадратичним відхиленням σ. Придатними деталями є ті, для яких $\alpha < X < \beta$. Деталями, що підлягають переробленню, є ті, для яких $X > \beta$. Знайти функцію розподілення випадкових відхилень розмірів деталей, що підлягають переробленню.

32. Випадкове відхилення Х розміру деталі від номіналу розподіле-

не за нормальним законом з математичним очікуванням а і середнім квадратичним відхиленням σ. Придатними деталями є ті, для яких $\alpha < X < \beta$. Деталями, що підлягають переробленню, є ті, для яких $X > \beta$. Знайти функцію розподілення випадкових відхилень розмірів придатних деталей.

Лінійна кореляція

Дві випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набула інша величина. З цього визначення виходить, що умовні розподіли незалежних величин дорівнюють їх безумовним розподілам. Необхідною і достатньою умовою незалежності випадкових величин є наступне твердження: для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб функція розподілу $F(x,y)$ дорівнювала твору функцій розподілу складових:

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Слідство з цього твердження таке: для того, щоб безперервні випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб щільність спільного розподілу $f(x,y)$ дорівнювала твору щільності розподілу складових

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Для опису системи двох випадкових величин, окрім математичних очікувань і дисперсії складових, використовують й інші характеристики, такі як кореляційний момент і коефіцієнт кореляції. Розглянемо двовимірну випадкову величину (X,Y). Припустимо, що одна з величин є функцією іншої:

$$Y = g(X).$$

Обмежимося наближеним представленням (точне наближення, взагалі кажучи, неможливо) величини Y у вигляді лінійної функції величини X:

$$Y = \alpha X + \beta,$$

де α і β — параметри, що підлягають визначенню. Це можна зробити різними способами. Найчастіше користуються методом найменших квадратів.

Функція $g\ (X)$ називається «найкращим наближенням» у сенсі методу найменших квадратів.

Якщо математичне очікування

$$M[\left(Y - g(X)\right)^2]$$

набуває найменшого можливого значення, то функцію $g(X)$ називають середньоквадратичною регресією Y на X. Використовуючи метод найменших квадратів, після нескладних міркувань і перетворень визначаємо параметри α і β:

$$\alpha = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \beta = m_y - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x.$$

Остаточне найкраще наближення у сенсі методу найменших квадратів запишеться так:

$$Y = g(X) = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x).$$

Рівняння прямої

$$y - m_y = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$$

називається *прямою середньоквадратичної регресії* Y на X.

Кореляційним моментом μ_{xy} випадкових величин X і Y називають математичне очікування твору відхилень цих величин :

Кореляційним моментом випадкових величин і називають математичне очікування твору відхилень цих величин :

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)f(x, y)dxdy\,.$$

З визначення кореляційного моменту виходить, що він має розмірність, яка дорівнює твору розмірності величин X і Y. Це означає, що величина кореляційного моменту залежить від одиниць виміру випадкових величин. З цієї причини для одних і тих же двох величин величина кореляційного моменту має різні значення залежно від того, у яких одиницях були виміряні величини.

Така особливість кореляційного моменту є недоліком цієї числової характеристики, оскільки порівняння кореляційних моментів різних систем випадкових величин стає скрутним. Для того, щоб усунути цей недолік, уводять нову числову характеристику-коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Оскільки розмірність μ_{xy} дорівнює додатку розмірності величин X і Y, а σ_x має розмірність величин X і σ_y має розмірність величини Y, тоді r_{xy} – безрозмірна величина. Таким чином, величина коефіцієнта кореляції не залежить від вибору одиниць виміру випадкових величин.

У цьому полягає перевага коефіцієнта кореляції перед кореляційним моментом. Очевидно, коефіцієнт кореляції незалежних випадкових величин дорівнює нулю. Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці:

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

Наведемо приклад визначення кореляції між двома величинами.

Приклад 1. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot x, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.

Рішення: Щільність розподілу випадкової величини двох змінних пов'язана з функцією розподілу випадкової величини двох змінних співвідношенням

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\theta,\eta)d\theta d\eta.$$

Враховуючи властивості функції розподілу випадкової величини двох змінних, напишемо рівняння, яке називають рівнянням нормування:

$$F(\infty,\infty)=1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\eta)d\theta d\eta\,.$$

З цієї тотожності знайдемо константу

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\eta)d\theta d\eta=\iint_D c\cdot xdxdy.$$

Вичислимо подвійний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\eta)d\theta d\eta=\iint_D c\cdot xdxdy=\mathrm{c}\int_0^1\int_0^{1-x} xdxdy=$$

$$=c\int_0^1(1-x)xdx=c\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}=c\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=c\frac{1}{6}=1.$$

Звідки $c=6$.

Щільність розподілу випадкової величини двох змінних, з урахуванням знайденої константи, запишеться так:

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}.$$

Знайдемо щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$. Вони обчислюються за відомими формулами

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)d\eta, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,y)d\theta .$$

Знайдемо щільність $f_1(x)$. Розглянемо три інтервали.

1. $x \in (-\infty; 0)$.

На цьому інтервалі $f(x,y) = 0$, тоді

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 d\eta = 0.$$

2. $x \in [0; 1]$.

На цьому інтервалі $f(x,y) = 6x$, тоді

$$f_1(x) = \int_{0}^{1-x} 6x d\eta = 6x(1-x).$$

3. $x \in (1; \infty)$.

На цьому інтервалі $f(x,y) = 0$, тоді

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 d\eta = 0.$$

І остаточно

$$f_1(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}.$$

Знайдемо щільність $f_2(y)$. Розглянемо три інтервали.

1. $y \in (-\infty; 0)$.

На цьому інтервалі $f(x,y) = 0$, тоді

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0d\theta = 0.$$

2. $y \in [0; 1]$.

На цьому інтервалі $f(x, y) = 6x$, тоді

$$f_2(y) = \int_{0}^{1-y} 6\theta d\theta = 6x(1 - x).$$

3. $y \in (1; \infty)$.

На цьому інтервалі $f(x, y) = 0$, тоді

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0d\eta = 0.$$

І ми маємо

$$f_2(y) = \begin{cases} 3(1 - y)^2, & y \in [0; 1] \\ 0, & y \notin [0; 1] \end{cases}.$$

Коефіцієнт кореляції знаходять за формулою

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

У цій формулі μ_{xy} – кореляційний момент, σ_x і σ_y відповідні середньоквадратичні відхилення:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dxdy\ ,$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f_1(x) dx\,, \qquad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f_2(y) dy\,.$$

Величини m_x і m_y – математичні очікування відповідних змінних

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx\,, \qquad m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)dy.$$

Вичислимо спочатку математичні очікування

$$m_x = \int_0^1 x6x(1-x)dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^4\Big|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$m_y = \int_0^1 y3(1-y)^2 dy = \frac{3}{2}y^2 - 2y^3 + \frac{3}{4}y^4\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Знайдемо дисперсії відповідних змінних

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx - {m_x}^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^1 x^2 6x(1-x)dx = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10} \Rightarrow$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{3}{10} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{20}}\ ;$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - m_y\right)^2 f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy - {m_y}^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy = \int_0^1 y^2 3(1-y)^2 dy = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{10} - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{80}}.$$

Тепер вичислимо μ_{xy}

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - m_x\, m_y,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} xy6xdxdy = 6\int_0^1 x^2\frac{1}{2}(1-x)^2dx =$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10},$$

$$\mu_{xy} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{40}.$$

Тоді коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = -\frac{1}{40}\cdot\sqrt{\frac{20}{1}}\cdot\sqrt{\frac{80}{3}} = -\frac{20\cdot 2}{40\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

І остаточно:

$$r_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Рівняння прямої середньоквадратичної регресії Y на X має такий вигляд:

$$y - m_y = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x),$$

Підставив значення m_y, r_{xy}, σ_y, σ_x, m_x, остаточно приходимо до рівняння

$$y = -\frac{1}{2}(x-1).$$

Приклад 2. Система випадкових величин(ξ; η) має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot e^{-x-2y}, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\geq 0, y\geq 0\}$.

Рішення: Щільність розподілу випадкової величини двох змінних пов'язана з функцією розподілу випадкової величини двох змінних співвідношенням

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(\theta,\eta)d\theta d\eta.$$

Зважаючи на властивості функції розподілу випадкової величини двох змінних, напишемо рівняння, яке називають рівнянням нормування:

$$F(\infty,\infty)=1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\eta)d\theta d\eta\,.$$

З цієї тотожності знайдемо константу

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\eta)d\theta d\eta=\iint\limits_{D} c\cdot x dxdy.$$

Вичислимо подвійний інтеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\theta,\eta)d\theta d\eta=\iint\limits_{D} c\cdot e^{-x-2y}dxdy=\mathrm{c}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x-2y}dxdy=$$

$$=c(-e^{-x})\Big|_0^\infty\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right)\Big|_0^\infty=\frac{c}{2}=1.$$

Звідки $c=2$.

Щільність розподілу випадкової величини двох змінних, з урахуванням знайденої константи, запишеться так:

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x-2y}, & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Знайдемо щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$. Вони обчислюються за відомими формулами

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)d\eta, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,y)d\theta.$$

Знайдемо щільність $f_1(x)$. Розглянемо два інтервали.

1. $x \in (-\infty; 0]$.

На цьому інтервалі $f(x,y) = 0$, тоді

$$f_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0d\theta = 0.$$

2. $x \in (0; \infty)$.

На цьому інтервалі $f(x,y) = 2e^{-x-2y}$, вичислимо інтеграл

$$f_1(x) = \int_{0}^{\infty} 2e^{-x-2\eta}d\eta = e^{-x}.$$

І остаточно

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Знайдемо щільність $f_2(y)$.

1. $y \in (-\infty; 0]$.

На цьому інтервалі $f(x,y) = 0$, тоді

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0d\theta = 0.$$

2. $y \in (0; \infty)$.

На цьому інтервалі $f(x,y) = 2e^{-x-2y}$, вичислимо інтеграл

$$f_2(y) = \int_{0}^{\infty} 2e^{-\eta-2y}d\eta = 2e^{-2y}.$$

І ми маємо

$$f_2(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Коефіцієнт кореляції знаходять за формулою

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

У цій формулі μ_{xy} – кореляційний момент, σ_x і σ_y, відповідно, середньоквадратичні відхилення

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)f(x, y)dxdy ,$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f_1(x)dx , \qquad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)^2 f_2(y)dy .$$

У нас виходить, що $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

Дійсно, нехай $x \geq 0, y \geq 0$, тобто це перша чверть, тоді

$$f(x, y) = e^{-x} \cdot 2e^{-2y}.$$

Розглянемо другу чверть. Це $x \leq 0, y \geq 0$, і ми отримуємо

$$f(x, y) = 0 \cdot 2e^{-2y} = 0.$$

Перейдемо до третьої чверті. У цій чверті $x \leq 0, y \leq 0$. Тоді щільність розподілу випадкової величини буде

$$f(x, y) = 0 \cdot 0 = 0.$$

І нарешті, четверта чверть. Четверта чверть визначається таким чином: $x \geq 0, y \leq 0$. Ми отримуємо

$$f(x, y) = e^{-x} \cdot 0.$$

І тоді щільність розподілу випадкової величини дорівнює

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x)f_2(y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Це означає, що $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$.

А якщо функцію подано у такому вигляді, тоді змінні x і y не корелюються, тобто $\mu_{xy} = 0$.

Отже, $r_{xy} = 0$.

Завдання для самостійного вирішення

1. Система випадкових величин $(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

2. Система випадкових величин $(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 1\}$.

3. Система випадкових величин $(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \leq 0, y \leq 0, -x - y \leq 1\}$.

4. Система випадкових величин $(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \leq 0, y \leq 0, -x - y \leq 1\}$.

5. Система випадкових величин $(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність

$f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

6. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x; y): x \leq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x; y): x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

8. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

9. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

10. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D' \end{cases}$$

де $D=\{(x;y): x\le 0, x^2+y^2\le R^2\}$.

11. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D' \end{cases}$$

де $D=\{(x;y): y\ge 0, x^2+y^2\le R^2\}$.

12. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D' \end{cases}$$

де $D=\{(x;y): y\le 0, x^2+y^2\le R^2\}$.

13. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D' \end{cases}$$

де $D=\{(x;y): x^2+y^2\le R^2\}$.

14. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D' \end{cases}$$

де $D=\{(x;y): 1\ge y, x^2\le y\}$.

15. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot y, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 1\}$.

16. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x + y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

17. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (y - 1), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

18. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x - 1), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

19. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x + y - 1), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

20. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x - y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases},$$

где $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

21. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot(x-y+1), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.

22. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot(x-y+4), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.

23. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x^2, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$.

24. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot y^2, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$.

25. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x^2\cdot y^2, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$.

26. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність

$f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x\cdot y, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

27. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x\cdot y, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

28. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot e^{-x-y}, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\ge 0, y\ge 0\}$.

29. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot e^{-2x-y}, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\ge 0, y\ge 0\}$.

30. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot e^{-2x-y}, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\ge 0, y\ge 0\}$.

Математична статистика

Встановлення закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, основане на дослідженні статистичних даних методами теорії ймовірності. Статистичні дані отримують при спостереженні тих або інших процесів.

Передусім, необхідно визначити число необхідних випробувань до початку дослідження, способи збирання і угрупування статистичних відомостей, отриманих у результаті спостережень.

Завдання математичної статистики полягає в створенні методів збирання і оброблення статистичних даних для отримання наукових і практичних висновків.

До методів аналізу статистичних даних відносяться:

- оцінювання ймовірності події, що вивчається;
- оцінювання невідомої функції розподілу;
- оцінювання параметрів розподілу, вид якого відомий;
- оцінювання залежності випадкової величини від інших випадкових величин;
- перевірка статистичних гіпотез про вид досліджуваного розподілу із вже відомим розподілом.

Нехай потрібно вивчити сукупність однорідних об'єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки, що характеризує ці об'єкти.

Іноді проводять суцільне обстеження, тобто обстежують кожного з об'єктів сукупності відносно ознаки, якою цікавляться. Суцільне обстеження застосовують порівняно рідко. Якщо сукупність містить дуже велике число об'єктів, то провести суцільне обстеження фізично неможливо. Якщо обстеження об'єкта пов'язане з його знищенням або вимагає великих матеріальних витрат, то проводити суцільне обстеження практично не має сенсу. У таких випадках випадково відбирають з усієї сукупності певне число об'єктів і піддають їх вивченню.

Генеральною сукупністю називають сукупність об'єктів, з яких робиться вибірка. Об'ємом сукупності (вибіркової або генеральної) називають число об'єктів цієї сукупності.

При складанні вибірки можна поступати двома способами. Після того, як об'єкт відібраний і над ним зроблено спостереження, він може бути повернений або не повернений до генеральної сукупності. Відповідно до цього вибірки підрозділяють на ***повторні й неповторні.***

Повторною називають вибірку, при якій відібраний об'єкт (перед відбором наступного) повертається до генеральної сукупності.

Неповторною називають вибірку, при якій відібраний об'єкт у генеральну сукупність не повертається. На практиці зазвичай користуються ***неповторним*** випадковим відбором.

Для того, щоб за даними вибірки можна було досить упевнено зробити висновок про ознаку генеральної сукупності, яка цікавить, необхідно, щоб об'єкти вибірки правильно його репрезентували. Іншими словами, вибірка повинна правильно відображати пропорції генеральної сукупності. Цю вимогу коротко формулюють так: вибірка має бути репрезентативною (представницькою).

Репрезентативна вибірка – це вибірка, яка відображає специфіку генеральної сукупності і за складом, і за індивідуальними характеристиками об'єктів.

Вибірка буде репрезентативною, якщо з генеральної сукупності вона проводиться випадково і усі об'єкти мають однакову ймовірність потрапити у вибірку.

На практиці застосовуються різні способи відбору. Принципово ці способи можна підрозділити на два види:

– відбір, що не потребує розбиття генеральної сукупності на частини. Сюди відносяться:

а) простий випадковий неповторний відбір;

б) простий випадковий повторний відбір;

– відбір, при якому генеральна сукупність поділяється на частини. Сюди відносяться:

а) типовий відбір;

б) механічний відбір;

в) серійний відбір.

Простим випадковим відбором називають відбір, при якому об'єкти витягають по одному з усієї генеральної сукупності.

Типовим відбором називають відбір, при якому об'єкти відбираються не з усієї генеральної сукупності, а з кожної її «типової» частини.

Механічним називають відбір, при якому генеральну сукупність «механічно» ділять на стільки груп, скільки об'єктів має увійти до вибірки, а з кожної групи відбирають один об'єкт.

Серійним називають відбір, при якому об'єкти відбирають з генеральної сукупності не по одному, а «серіями», які підлягають суцільному обстеженню.

Відповідно до завдань дослідження зроблено вибірку елементів генеральної сукупності $\{z_i\}_{i=1}^{n}$. Елементи вибірки називаються варіантами. Потім елементи z_i вибудовуються в порядку зростання. Елементи z_i, що повторюються, позначаються через x_k і складаються у варіаційний ряд:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\dots$	x_m
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	$\dots$	n_m

де n_i - частота варіант x_i.

Кількість відібраних варіант z_i називається об'ємом вибірки.

У разі, коли варіаційний ряд вже заданий, об'єм вибірки визначають за формулою

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Медіаною варіаційного ряду називається число, яке ділить варіаційний ряд на дві групи однакових за кількістю варіант.

Якщо об'єм вибірки $n = 2k$, тоді медіану визначають за формулою

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

У разі, коли об'єм вибірки буде $n = 2k + 1$, медіана визначається так:

$$m_e = x_{k+1}.$$

Медіана може не збігатися ні з однією з варіант.

Ще однією характеристикою варіаційного ряду є мода.

Мода – це варіант з найбільшою частотою.

Для наочності результатів випробування будують різні графіки статистичного розподілу, такі, як полігон і гістограму.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої послідовно сполучають точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$,…, $(x_n; n_n)$. Для побудови полігону частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – частоти n_i, що відповідають їм. Точки $(x_i; n_i)$ з'єднують відрізками прямих і отримують полігон частот.

Якщо змінити частоти n_i на відносні частоти $\omega_i = n_i/n$, то вийде полігон відносних частот.

Якщо інтервал, в який поміщені усі спостережувані значення ознаки, розбити на декілька часткових інтервалів завдовжки h і знайти для кожного часткового інтервалу $\widetilde{n_i}$ – суму частот варіант, що потрапили в i – й інтервал, то виходить інтервальний варіаційний ряд.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, підставами яких служать часткові інтервали завдовжки h, а висоти дорівнюють відношенню $\widetilde{n_i}/h$.

Площа гістограми частот дорівнює сумі усіх частот, тобто об'єму вибірки.

Гістограмою відносних частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, підставами яких служать часткові інтервали завдовжки h, а висоти дорівнюють відношенню ω_i/h.

Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі усіх відносних частот, що дорівнює одиниці.

Математичне очікування для дискретно розподіленої випадкової величини визначають за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \, .$$

З формули видно, що математичне очікування є середнім арифметичним дискретно розподіленої випадкової величини.

Для оцінювання розсіювання значення випадкової величини навколо її математичного очікування користуються числовою характеристикою, яку називають дисперсією.

Дисперсією (розсіянням) дискретної випадкової величини називають математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] = M[X^2] - M[X]^2.$$

Дискретно розподілену випадкову величину визначають за формулою

$$D[X] = \sigma^2 = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{m} {x_i}^2 \cdot n_i - \bar{x}^2.$$

При вивченні розподілів, відмінних від нормального розподілу, виникає необхідність кількісно оцінити цю відмінність. З цією метою вводять спеціальні характеристики – асиметрію і ексцес.

Асиметрією теоретичного розподілу називають відношення центрального моменту третього порядку до куба середнього квадратичного відхилення:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Третій центральний момент обчислюється за формулою

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^3 \cdot n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^3 \cdot n_i - \frac{3\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^2 \cdot n_i + 2\bar{x}^3 .$$

Якщо асиметрія позитивна, то довга частина кривої розподілу розташована праворуч від математичного очікування. Асиметрія від'ємна, якщо довга частина кривої розташована зліва від математичного очікування. Для нормального розподілу випадкової величини асиметрія дорівнює нулю.

Для оцінювання крутизни, тобто більшого або меншого підйому кривої теоретичного розподілу порівняно з нормальною кривою, користуються ще однією характеристикою випадкової величини – ексцесом.

*Ексцесом теоретичного розподіл*у називають характеристику, яка визначається за формулою

$$E_k = \frac{\mu_4}{s^4} - 3,$$

де μ_4 – це четвертий центральний момент, який знаходять за формулою

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^4 \cdot n_i =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^4 \cdot n_i - \frac{4\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^3 \cdot n_i + \frac{6\bar{x}^2}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^2 \cdot n_i - 3\bar{x}^4.$$

Для розподілу, у якого ексцес відмінний від нуля, крива цього розподілу відрізняється від нормальної кривої. Якщо ексцес позитивний, то крива має більш високу і гостру вершину, ніж нормальна крива. Якщо ексцес негативний, то порівнювана крива має нижчу і " плоскішу" вершину, ніж нормальна крива. При цьому передбачається, що нормальна крива і та, що розглядається, мають однакові математичні очікування і дисперсії.

Таким чином, якщо для розподілу, що вивчається, асиметрія і ексцес мають невеликі значення, то можна припустити близькість цього розподілу до нормального розподілу. Навпаки, великі значення асиметрії та ексцесу вказують на значне відхилення від нормального розподілу.

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, причому середньоквадратичне відхилення цього розподілу невідоме. Тоді невідоме математичне очікування a за вибірковою середньою $\bar{x}$ з надійністю γ лежить в інтервалі

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}.$$

де t_γ – визначається за відповідними таблицями.

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена за нормальним законом. Для оцінки невідомого генерального середньоквадратичного відхилення σ по виправленому вибірковому середньоквадратичному відхиленню s використовуємо відому оцінку

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

q – знаходять з таблиць.

Перевірка гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу робиться так само, як і перевірка гіпотези про параметри розподілу, тобто за допомогою спеціально підібраної випадкової величини – критерію згоди.

Критерієм згоди називають критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Є декілька критеріїв згоди Пірсона, Колмогорова, Смирнова та ін. Обмежимося описом застосування критерію Пірсона до перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності (критерій аналогічно застосовується і для інших розподілів, у цьому полягає його гідність). З цією метою порівнюватимемо емпіричні (спостережувані) і теоретичні (вичислені у припущенні нормального розподілу) частоти.

Зазвичай емпіричні й теоретичні частоти розрізняються. Можливо, що розбіжність випадкова і пояснюється або малим числом спостережень, або способом їх угрупування, або іншими причинами. Можливо, що розбіжність частот невипадкова (значуща) і пояснюється тим, що теоретичні частоти обчислені, виходячи з невірної гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Критерій Пірсона відповідає на поставлене вище запитання. Насправді, як і будь–який критерій, він не доводить справедливість гіпотези, а лише встановлює на прийнятому рівні значущості її згоду або незгоду з даними спостережень.

Уявимо, що у припущенні нормального розподілу генеральної сукупності вичислені теоретичні частоти. При рівні значущості α слід перевірити нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена нормально.

За критерій перевірки нульової гіпотези приймемо випадкову величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - \overline{n_i})^2}{\overline{n_i}},$$

де $\overline{n_i}$ – теоретична частота, яка обчислюється за формулою

$$\overline{n_i} = p_i \cdot m,$$

де p_i – теоретична ймовірність на i –му інтервалі, m – кількість інтервалів інтервального варіаційного ряду.

Величина χ^2 випадкова, оскільки в різних дослідах вона набуває різних, заздалегідь невідомих значень. Ясно, що чим менше розрізняються емпіричні й теоретичні частоти, тим менше величини критерію, отже, він певною мірою характеризує близькість емпіричного і теоретичного розподілів.

Зведенням у квадрат різниць частот усувають можливість взаємного погашення позитивних і негативних різниць. Діленням на $\overline{n_i}$ досягають зменшення кожного з доданків, інакше сума була б настільки велика, що призводила б до відхилення нульової гіпотези навіть і тоді, коли вона справедлива. Наведені міркування не є обґрунтуванням вибраного критерію, а лише поясненням. Число ступенів свободи знаходять за формулою:

$$k = m - 1 - r,$$

де m – число інтервалів інтервального варіаційного ряду, а r – число параметрів передбачуваного розподілу, які оцінені за даними вибірки.

Якщо передбачуваний розподіл – нормальний, то оцінюють два параметри, математичне очікування і середнє квадратичне відхилення, тому $r = 2$ і число ступенів свободи

$$k = m - 3.$$

Теоретична ймовірність на відповідному інтервалі визначається таким чином:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma}\right);$$

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dt = \Phi\left(\frac{x_{i+1}-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right), i = \overline{2, m-1} \quad ;$$

$$p_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_m}^{\infty} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_m-\bar{x}}{\sigma}\right) .$$

Тоді за таблицею критичних точок розподілу χ^2, за заданим рівнем значущості α і числом ступенів свободи $k = m - 3$ знаходимо критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}$.

Якщо $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – немає підстав відхилити нульову гіпотезу.

Якщо $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – нульову гіпотезу відхиляємо.

Приклад. За результатами випробувань отримано випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	18	18,3	18,6	19	19,3	19,6	19,8	20
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3

тут n_i– частоти вибірки

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти надійні інтервали для математичного очікування і дисперсії з надійною ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити за рівнем значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Рішення: Об'єм вибірки – це кількість всіх варіантів $n = 51$

x_i	18	18,3	18,6	19	19,3	19,6	19,8	20
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3

Розмах вибірки – це різниця між найбільшою і найменшою варіантами:

$$d = x_{max} - x_{min} = 20 - 18 = 2.$$

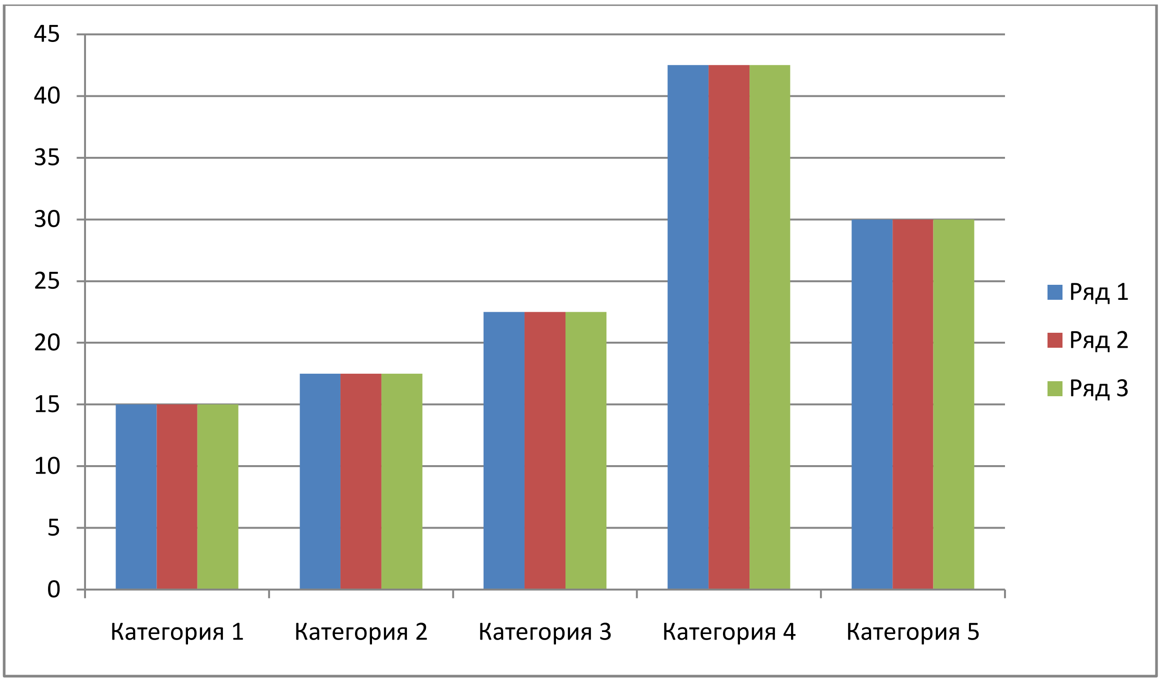
Складемо інтервальний варіаційний ряд. Розіб'ємо інтервал на 5 частин. Тоді довжина кожного інтервалу буде $h = 0{,}4$.

Після складання інтервального варіаційного ряду підсумуємо варіанти на відповідних інтервалах і напишемо їх в інтервальний ряд:

$x_{i+1}; x_i$	18;18,4	18,4;18,8	18,8;19,2	19,2;19,6	19,6;20
$\overline{n_i}$	6	7	9	17	12

На підставі отриманого ряду побудуємо гістограму.

По горизонтальній осі відкладаються варіанти, а по вертикальній осі – значення $\overline{n_i}/h$ з інтервального варіаційного ряду.



Знайдемо медіану. Медіана – це число, яке ділить варіаційний ряд на дві множини, що рівні за об'ємом. Оскільки наш варіаційний ряд містить 51 варіанту, то

$$m_e = x_{26} = 19{,}3.$$

Знайдемо точкові оцінки варіаційного ряду.

Математичне очікування для дискретно розподіленої випадкової величини знаходимо за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i \cdot n_i.$$

x_i	18	18,3	18,6	19	19,3	19,6	19,8	20	
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3	51
$x_i n_i$	18	91,5	130,2	171	212,3	176,4	118,8	60	978,2

$\bar{x} =$ 19,18.

У математичній статистиці математичне очікування називається середнім значенням. Його обчислення наведено в таблиці $\bar{x} = 19{,}18$.

Вичислимо дисперсію, яку для дискретно розподіленої випадкової величини визначають за формулою

$$D[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^2 \cdot n_i - \bar{x}^2.$$

Для обчислення дисперсії скористаємося програмою Excel

x_i	18	18,3	18,6	19	19,3	19,6	19,8	20	
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3	51
$x_i n_i$	18	91,5	130,2	171	212,3	176,4	118,8	60	978,2
${x_i}^2 n_i$	324	1674	2422	3249	4097	3457	2352	1200	18776

$$D[X] = \mathbf{0,2741}$$

Ми знайшли зміщену дисперсію. Незміщена дисперсія пов'язана зі зміщеною дисперсією співвідношенням

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D[X] = \mathbf{0,2836}.$$

Зміщене середньоквадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{D[X]} = 0{,}5236.$$

Незміщене середньоквадратичне відхилення, відповідно, буде дорівнювати

$$s = 0{,}5325.$$

Асиметрія варіаційного ряду визначається за формулою

$$A_s = \frac{\mu_3}{s^3},$$

де μ_3 – це третій центральний момент, який обчислюється таким чином:

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^3 \cdot n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^3 \cdot n_i - \frac{3\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^2 \cdot n_i + 2\bar{x}^3 = 0{,}0432.$$

x_i	18	18,3	18,6	19	19,3	19,6	19,8	20	
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3	51
$x_i n_i$	18	91,5	130,2	171	212,3	176,4	118,8	60	978,2
${x_i}^2 n_i$	324	1674	2422	3249	4097	3457	2352	1200	18776,2
${x_i}^3 n_i$	114,4	30642	45044	61731	79080	67766	46574	24000	354952

І остаточно $A_s = 0{,}3526.$

Асиметрія характеризує симетрію варіаційного ряду відносно його середнього значення.

Для оцінювання крутизни, тобто більшого або меншого підйому кривої теоретичного розподілу порівняно з нормальною кривою, користуються характеристикою – ексцесом.

Ексцесом теоретичного розподілу називають характеристику, яка визначається за формулою

$$E_k = \frac{\mu_4}{s^4} - 3,$$

де μ_4– це четвертий центральний момент, який обчислюється таким чином:

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^4 \cdot n_i =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^4 \cdot n_i - \frac{4\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^3 \cdot n_i + \frac{6\bar{x}^2}{n}\sum_{i=1}^{r} {x_i}^2 \cdot n_i - 3\bar{x}^4.$$

x_i	18	18,3	18,6	19	19,3	19,6	19,8	20	
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3	51
$x_i n_i$	18	91,5	130,2	171	212,3	176,4	118,8	60	978,2
${x_i}^2 n_i$	324	1674	2422	3249	4097	3457	2352	1200	18776,2

$x_i^{\ 3}n_i$	114,4	3064 2	45044	61731	79080	67766	46574	24000	354952
$x_i^{\ 4}n_i$	2058,35	560757	837818	1172889	1526237	1328210	922172	480000	6830141

І остаточно $E_k = -0{,}9144$.

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, причому середньоквадратичне відхилення цього розподілу невідоме. Тоді невідоме математичне очікування a, за вибірковою середньою $\bar{x}$ надійністю $\gamma = 0{,}9$, лежить в інтервалі

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma s/\sqrt{n},$$

де t_γ – величина, яка визначається за відповідними таблицями $t_\gamma = 2{,}009$. І остаточно

$$19{,}0306 < a < 19{,}3302.$$

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена за нормальним законом. Для оцінювання невідомого генерального середньоквадратичного відхилення σ, згідно з виправленим вибірковим середньоквадратичним відхиленням s, використовуємо відому оцінку

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

де q – знаходимо за таблицями $q = 0{,}21$. І остаточно

$$0{,}4207 < \sigma < 0{,}6444.$$

За критерій перевірки нульової гіпотези приймемо випадкову величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - \overline{n_i})^2}{\overline{n_i}},$$

де $\overline{n_i}$ – теоретична частота, яка обчислюється за формулою

$$\overline{n_i} = p_i \cdot m,$$

де p_i – теоретична ймовірність на i –му інтервалі, m – кількість інтервалів інтервального варіаційного ряду.

Величина χ^2 випадкова, оскільки в різних дослідах вона набуває різних, заздалегідь не відомих значень. Ясно, що чим менше розрізняються емпіричні й теоретичні частоти, тим менше величини критерію. Отже, критерій певною мірою характеризує близькість емпіричного і теоретичного розподілів.

Знайдемо теоретичну ймовірність на відповідному інтервалі:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma}\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_2}^{x_3} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dt = \Phi\left(\frac{x_3-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma}\right),$$

$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_3}^{x_4} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dt = \Phi\left(\frac{x_4-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_3-\bar{x}}{\sigma}\right),$$

$$p_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_4}^{x_5} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dt = \Phi\left(\frac{x_5-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_4-\bar{x}}{\sigma}\right),$$

$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_5}^{\infty} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_5-\bar{x}}{\sigma}\right).$$

x_i	x_{i+1}	$\overline{n_i}$	$\frac{x_5-\bar{x}}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x_5-\bar{x}}{\sigma}\right)$	p_i	$\widetilde{n_i}$	$\overline{n_i}-\widetilde{n_i}$	$(\overline{n_i}-\widetilde{n_i})^2$	$\frac{(\overline{n_i}-\widetilde{n_i})^2}{\widetilde{n_i}}$
18	18,4	6	–1,49052	–0,4319	0,0681	3,4731	2,5269	6,3852	1,8385
18,4	18,8	7	–0,72654	–0,2673	0,1646	8,3946	–1,3946	1,9449	0,2317
18,8	19,2	9	0,03745	0,016	0,2833	14,448	–5,4483	29,684	2,0545
19,2	19,6	17	0,801436	0,2881	0,2721	13,877	3,1229	9,7525	0,7028
19,6	20	12	1,565422	0,4418	0,2119	10,807	1,1931	1,4235	0,1317

У таблиці знайдене $\chi^2_{\text{набл}} = 4{,}9592$. Користуючись таблицями додатка 5, знайдемо $\chi^2_{\text{кр}} = 9{,}2$.

Оскільки $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то немає підстави не брати до уваги нульову гіпотезу. Іншими словами, розбіжність емпіричних і теоретичних частот незначуща. Отже, дані спостережень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання для самостійного вирішення

Завдання 1. За результатами випробувань отримано випадкові величини x_i, з яких складено дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,6	8,8	9	9,4	9,6	10	10,2	10,6
n_i	2	5	8	9	10	8	6	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінювання медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти надійні інтервали для математичного очікування і дисперсії з надійною ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 2. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8	8,4	8,8	9,2	9,8	10,2	10,8	11
n_i	2	6	9	12	9	6	4	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти надійні інтервали для математичного очікування і дисперсії з надійною ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 3. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складено дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,2	8,4	8,8	9,4	9,8	10,4	10,8	11,2
n_i	2	5	8	10	13	7	5	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінювання медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 4. За результатами випробувань отримано випадкові величини x_i, з яких складено дискретний варіаційний ряд:

x_i	8	8,6	8,8	9,2	9,8	10,2	10,8	11
n_i	1	7	8	11	11	8	4	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 5. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складено дискретний варіаційний ряд:

x_i	7,8	8,2	8,8	9	9,4	9,6	10,2	10,8
n_i	2	6	8	12	12	7	4	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 6. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	7,2	7,6	7,8	8,2	8,4	9	9,6	10,2
n_i	2	6	8	11	13	7	4	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 7. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	13,3	13,9	14,2	14,8	15,1	15,4	16	16,3
n_i	1	7	9	12	11	7	3	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.

6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,4	8,6	9	9,2	9,4	9,8	10	10,4
n_i	2	4	8	10	12	8	6	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 9. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	9	9,2	9,6	10	10,4	10,6	10,8	11
n_i	2	4	8	12	10	8	6	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 10. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	9,6	9,8	10,2	10,4	10,6	11	11,2	11,6
n_i	2	4	8	10	13	8	6	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 11. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	4	4,2	4,6	5	5,2	5,4	5,6	6
n_i	1	4	8	12	11	8	6	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.

3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 12. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	10	10,2	10,6	10,8	11,2	11,4	11,6	12
n_i	2	4	8	11	11	9	6	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 13. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	7,4	7,6	8	8,4	8,6	9	9,2	9,4
n_i	2	4	8	12	11	8	5	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 14. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,9	9,1	9,3	9,7	10,1	10,3	10,7	10,9
n_i	1	4	7	11	11	9	6	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 15. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,3	8,7	9,3	9,5	9,9	10,3	10,9	11,3
n_i	1	5	10	11	11	7	5	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 16. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12	12,2	12,6	13	13,4	13,6	13,8	14
n_i	1	4	8	13	10	7	5	3

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 17. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	10,9	11,5	11,8	12,4	12,7	13	13,6	13,9
n_i	1	6	8	13	10	9	3	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 18. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12	12,4	12,6	13	13,5	14	14,5	15
n_i	2	6	7	11	11	8	6	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.

6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 19. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	9,3	9,7	9,9	10,5	10,9	11,5	11,9	12,3
n_i	2	5	7	12	12	7	5	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 20. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12	12,4	12,8	13	13,2	13,6	13,8	14
n_i	2	6	10	12	11	8	5	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 21. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12,4	12,8	13	13,2	13,6	13,8	14	14,4
n_i	1	6	8	11	11	8	5	1

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 22. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12,8	13	13,2	13,6	13,8	14	14,4	14,8
n_i	1	5	7	11	13	11	7	3

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.

3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 23. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	13,2	13,6	13,8	14	14,4	14,8	15	15,2
n_i	1	5	7	10	11	9	7	4

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 24. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	13,6	13,8	14	14,4	14,8	15	15,2	15,6
n_i	1	3	5	10	12	9	8	3

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 25. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	14	14,4	14,8	15	15,2	15,6	15,8	16
n_i	1	3	7	11	12	9	6	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 26. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	15	15,2	15,6	15,8	16	16,3	16,7	16
n_i	1	3	7	11	12	9	6	2

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 27. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	15,6	15,8	16	16,3	16,7	17	17,2	17,6
n_i	1	4	6	10	12	9	6	3

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 28. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	16	16,3	16,7	17	17,2	17,6	17,8	18
n_i	1	5	8	12	12	9	6	3

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 29. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	16,3	16,7	17	17,2	17,6	17,8	18	18,3
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.

6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Завдання 30. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	17	17,2	17,6	17,8	18	18,3	18,6	19
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3

де n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіанти контрольних робіт

Варіант 1

Завдання 1. У партії з 20-ти виробів 5 виробів мають прихований дефект. Яка ймовірність того, що з узятих навмання 4-х виробів 2 вироби є дефектними.

Завдання 2. З трьох працюючих друкарок перша опиниться на місці з ймовірністю 0,9, друга – 0,8, а третя – 0,5. Якщо усі троє друкуватимуть разом, то з ймовірністю 1 вони за день надрукують звіт; якщо їх буде дві, то вони закінчать роботу з ймовірністю 0,8, а якщо одна, то з ймовірністю 0,5. Чому дорівнює ймовірність того, що звіт буде надрукований за день?

Завдання 3. Для гравця у баскетбол ймовірність закинути м'яч у кошик з штрафного кидка дорівнює p=0,5. Скільки кидків потрібно зробити гравцеві, щоб ймовірність попадання в кошик хоч би один раз була більше P=0,9?

Завдання 4. Знайти ймовірність того, що подія А настане рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,25.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 1]$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ c(x+1), & \text{при } -1 < x \le \dfrac{1}{3}. \\ 1, & \text{при } \ 1/3 < x \end{cases}$$

Завдання 6. Гральний кубик підкидають 60 разів. Оцінити ймовірність того, що сумарне число очок перевищить 190.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,6	8,8	9	9,4	9,6	10	10,2	10,6
n_i	2	5	8	9	10	8	6	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.

2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 2

Завдання 1. У старовинній грі в кістки необхідно було для виграшу отримати при киданні трьох гральних кісток суму очок, що перевищує 10. Знайти ймовірність: а) викинути 11 і 12 очок; б) виграшу.

Завдання 2. У ящику лежать 20 тенісних м'ячів, у тому числі 15 нових і 5 граних. Для гри навмання вибирають два м'ячі й після гри повертають назад. Потім для другої гри також навмання витягають ще два м'ячі. Яка ймовірність того, що друга гра проводитиметься новими м'ячами?

Завдання 3. У відділі технічного контролю перевірку кожної великої партії виробів роблять таким чином: відбирають навмання n виробів і якщо серед них виявиться хоч би один бракований виріб, то партію відправляють на пересортовування. Який має бути об'єм вибірки n, щоб партії, що містять більше 5 % браку, були знехтувані з ймовірністю більшою, ніж $P = 0{,}9$.

Завдання 4. Знайти ймовірність того, що подія А настане 1400 разів у 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини

$F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [-1; 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2 \\ 0{,}5 + c \cdot \arcsin(0{,}5x), & \text{при } -2 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } 2 < x \end{cases}.$$

Завдання 6. Регулювання приладу займає час від 4 до 10 хв. Регулювальникові належить відрегулювати 50 приладів. Вважаючи для кожного приладу однаково можливими усі значення часу регулювання у вказаних межах, оцінити ймовірність того, що регулювальник впорається з роботою за шість годин.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \le 0, y \ge 0, -x + y \le 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8	8,4	8,8	9,2	9,8	10,2	10,8	11
n_i	2	6	9	12	9	6	4	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 3

Завдання 1.На склад поступає з трьох підприємств продукція першого і другого сорту. У продукції першого підприємства міститься 15 % другосортних виробів, в продукції другого підприємства – 25 %, в продукції третього підприємства – 30 %. Чому дорівнює ймовірність того, що серед трьох виробів (по одному з продукції кожного підприємства) виявляться першосортними два вироби.

Завдання 2. З 10 студентів, що складають іспит з теорії ймовірності, два студенти знають по 20 білетів з 30, один – 15 білетів, інші знають усі білети. Чому дорівнює ймовірність того, що випадково узятий студент складе іспит, якщо знання білета забезпечує складання іспиту з ймовірністю 0,85, а незнання – з ймовірністю 0,1.

Завдання 3. Біатлоністові на кожному з двох рубежів необхідно уразити п'ять мішеней. Ймовірність уразити мішень при пострілі лежачи (на першому рубежі) рівна 0,95, а при пострілі стоячи (на другому рубежі) ця ймовірність дорівнює 0,85. Яка ймовірність того, що обидва рубежі біатлоніст здолає без промахів? Яка ймовірність того, що на кожному рубежі біатлоніст зробить по одному промаху. Яка ймовірність того, що біатлоніст припустить тільки один промах? Яка ймовірність того, що на першому рубежі біатлоніст не зробить промаху, а на другому припустить 2 промахи.

Завдання 4. Ймовірність поразки мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [3; 3{,}5]$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2 \\ c(x-2) \ , & \text{при } 2 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } 4 < x \end{cases}.$$

Завдання 6. Жетон для грального автомата коштує 10 грн. При використанні одного жетона (у окремій грі) ймовірність не отримати нічого дорівнює 0,8, ймовірність отримати 20 грн дорівнює 0,15, ймовірність отримання 50 грн – 0,04 і ймовірність отримання 100 грн – 0,01. Гравець купив жетонів на 1000 грн. Яка ймовірність того, то гравець не опиниться в програші?

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x;y): x \le 0, y \le 0, -x-y \le 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,2	8,4	8,8	9,4	9,8	10,4	10,8	11,2
n_i	2	5	8	10	13	7	5	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 4

Завдання 1. Колектив складається з 5 чоловіків і 10 жінок. Знайти ймовірність того, що при випадковому формуванні їх на 5 груп по три чоловіка в кожній групі буде один чоловік.

Завдання 2. У двох коробках знаходяться батареї: у першій – 12, з них одна розряджена, у другій – 10 і одна розряджена. З першої коробки в другу перекладена випадково узята батарея. Знайти ймовірність того, що узята навмання з другої коробки батарея буде розряджена.

Завдання 3. Ймовірність того, що в п'яти дослідах подія А з'явиться хоч би один раз, дорівнює 0,92224. Яка ймовірність того, що в трьох дослідах ця подія з'явиться не більше одного разу?

Завдання 4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявляться 50 хлопчиків. Монета кинута 2n разів (N велике!).

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0;1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ cx^2, & \text{при} 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } 2 < x \end{cases}.$$

Завдання 6. Лотерейний білет коштує 20 грн. З ймовірністю 0,9 білет виявиться без виграшу, з ймовірністю 0,8 на білет випаде виграш ціною 100 грн з ймовірністю 0,2 білет виграє 200 грн. Яка ймовірність залишитися в програші, якщо придбати 20 білетів?

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x; y): x \leq 0, y \leq 0, -x - y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8	8,6	8,8	9,2	9,8	10,2	10,8	11
n_i	1	7	8	11	11	8	4	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 5

Завдання 1. Двадцять чоловік, серед яких 10 чоловіків і 10 жінок, випадковим чином групуються попарно. Знайти ймовірність того, що кожна з 10 пар складається з осіб різної статі.

Завдання 2. У студентській групі 70 % – юнаки. 20 % юнаків і 40 % дівчат мають стільниковий телефон. Після зайняття в аудиторії був знайдений кимось забутий телефон. Яка ймовірність того, що він належав : а) юнакові; б) дівчині?

Завдання 3. Два гравці А і В підкидають монету. Якщо монета випадає «гербом» вгору, то А отримує очко. Якщо випадає решка, то очко отримує гравець В. Яка ймовірність того, що після 10 кидків монети рахунок буде однаковим? Яка ймовірність того, що після цих кидків у гравця А буде на двоє очок більше?

Завдання 4. Монета кинута 2 n разів. Знайти ймовірність того, що «герб» випаде на 2 m разів більше, ніж монета з цифрою.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; \pi/6]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ c(1 + sinx), & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } \dfrac{\pi}{2} < x \end{cases}.$$

Завдання 6. У районі десять універсамів. Сумарний добовий виторг в них дорівнює в середньому 10 000 грн і в 90 % випадків відрізняється від 10 000 грн не більше, ніж на 1 000 грн. Знайти ймовірність того, що черговий сумарний добовий виторг опиниться в межах від 8 000 до 12 000 грн.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D' \end{cases}$$

де $D=\{(x;y): x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	7,8	8,2	8,8	9	9,4	9,6	10,2	10,8
n_i	2	6	8	12	12	7	4	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 6

Завдання 1. 9 пасажирів навмання розсаджуються в трьох вагонах. Знайти ймовірність того, що: а) в кожен вагон сяде по 3 пасажири; б) в один вагон сядуть 4, в іншій – 3 і у третій – 2 пасажири.

Завдання 2. Военний корабель може пройти уздовж протоки шириною 1 км з мінним загородженням у будь-якому місці. Ймовірність його підривання на міні в правій частині загородження шириною 200 м дорівнює

0,3, а на іншій частині – 0,8. 1. Знайти ймовірність того, що корабель благополучно пройде протоку. 2. Корабель благополучно пройшов протоку. Яка ймовірність того, що він пройшов протоку в лівій частині?

Завдання 3. З урни, що містить дуже велике число білих і чорних куль, змішаних у рівній пропорції, виймають послідовно 10 куль. Кулі, вийняті до першої появи чорної кулі, повертають в урну; перша чорна куля, що з'явилася, і усі подальші перекладаються в другу, порожню урну. Визначити математичні очікування числа білих і числа чорних куль у другій урні. Вирішити те ж завдання в припущенні, що число X вийнятих куль є випадковим і згідно закону Пуассона з параметром a = 10.

Завдання 4. Ймовірність появи події в кожному з 100 незалежних випробувань постійна і дорівнює p=0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) не менше 75 разів і не більше 90 разів; б) не менше 75 разів; в) не більше 74 разів.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [-\pi/3; 0]$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\pi/2 \\ c\cdot cosx, & \text{при } -\pi/2 < x \le 0 \\ 1, & \text{при } 0 < x \end{cases}.$$

Завдання 6. Банкомат видає стандартні суми в 500, 100 і 50 дол., при цьому перші становлять 10 %, а останні – 60 % усіх видач. В середньому банкомат робить 100 видач на добу. Визначити розмір грошової суми, яку необхідно закласти у банкомат уранці, щоб цієї суми з ймовірністю 0,9 вистачило для видачі готівкою вкладникам до наступного ранку.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції.

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\le 0, y\ge 0, x^2+y^2\le R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд, де:

x_i	7,2	7,6	7,8	8,2	8,4	9	9,6	10,2
n_i	2	6	8	11	13	7	4	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 7

Завдання 1. Три літаки, незалежно один від одного, роблять поодиноке бомбометання по деякій цілі. Перший літак скидає 4 бомби по 250 кг, другий, – 2 бомби по 500 кг, третій – одну бомбу в 1000 кг. Ймовірність попадання для першого літака дорівнює 0,2, для другого – 0,3, для третього – 0,4. Для руйнування мети досить попадання однієї бомби вагою не менше 500 кг або двох – вагою по 250 кг Знайти ймовірність руйнування цілі.

Завдання 2. Ймовірність попадання в ціль для трьох стрільців дорівнює, відповідно, – 4/5, 3/4 і 2/3. Для ураження цілі в неї треба попасти не менше двох разів. У результаті одночасного влучення усіх трьох стрільців ціль уражена. Яка ймовірність того, що в ціль поцілив третій стрілець?

Завдання 3. Гра полягає в тому, що монету кидають до появи герба. Якщо «герб» випав при к–м киданні монети, то гравець А отримує до грошей від гравця В. Скільки грошей повинен сплатити гравець А гравцеві В перед початком гри для того, щоб математичні очікування програшу для кожного гравця дорівнювали нулю (щоб гра була «рівнозваженою»)?

Завдання 4. Ймовірність появи події в кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться : а) не менше 1470 і не більше 1500 разів; б) не менше 1470 разів; в) не більше 1469 разів.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ cx^3, & \text{при} 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } 2 < x \end{cases}.$$

Завдання 6. При складанні статистичного звіту треба було скласти 104 чисел, кожне з яких було закруглено з точністю до 10^{-m}. Припускаючи, що помилки, які виникають при округленні, незалежні в сукупності і розподілені рівномірно на відрізку $[-0,5 \cdot 10^{-m}; 0,5 \cdot 10^{-m}]$, визначити межі, в яких з ймовірністю, більшою 0,987, лежатиме сумарна помилка.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi; \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	13,3	13,9	14,2	14,8	15,1	15,4	16	16,3
n_i	1	7	9	12	11	7	3	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 8

Завдання 1. Літак–бомбардувальник для виконання бойового завдання повинен пройти через зону зенітної оборони супротивника, в котрій по ньому, незалежно один від одного, ведуть вогонь чотири зенітні знаряддя. Кожне знаряддя робить по 10 пострілів. Ймовірність попадання в літак при одному пострілі дорівнює 0,02. Щоб збити літак досить одного попадання. У випадку, якщо літак не буде збитий вогнем зенітної артилерії, він виходить на ціль і скидає бомби. Ймовірність виконання бойового завдання при цьому дорівнює 0,6, Знайти ймовірність того, що бомбардувальник виконає завдання, незважаючи на протидію зенітної артилерії.

Завдання 2. По об'єкту робиться три поодиноких постріли. Ймовірність попадання при першому пострілі дорівнює 0,4, при другому – 0,5, при третьому – 0,7. Для виведення об'єкта із ладу свідомо досить трьох попадань; при двох попаданнях він виходить з ладу з ймовірністю 0,6; при одному – з ймовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що в результаті трьох пострілів об'єкт буде виведений з ладу.

Завдання 3. З посудини, що містить m білих і n чорних куль, витягають кулі до тих пір, поки не з'явиться біла куля. Знайти математичне очікування і дисперсію числа вийнятих чорних куль, якщо кожна куля після витягання була повернена.

Завдання 4. Ймовірність появи події в кожному з 21 незалежного випробування дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з’явиться у більшості випробувань.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 1/2]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ cx^4\,, & \text{при} 0 < x \leq 1\,. \\ 1, & \text{при } 2 < x \end{cases}$$

Завдання 6. Ймовірність появи події при одному досвіді дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що частота цієї події при 100 дослідах лежатиме в межах від 0,2 до 0,4?

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y)\colon x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,4	8,6	9	9,2	9,4	9,8	10	10,4
n_i	2	4	8	10	12	8	6	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 9

Завдання 1.Радист тричі викликає кореспондента. Ймовірність того, що буде прийнятий перший виклик, дорівнює 0,2, другий виклик – 0,3, третій виклик – 0,4. За умовами прийому, події, що полягають в тому, що цей виклик буде почутий, незалежні. Знайти ймовірність того, що кореспондент взагалі почує виклик.

Завдання 2. В умовах підвищеної температури прилад виходить з ладу з ймовірністю 0,1, при вібрації – з ймовірністю 02, а при одночасному перегріванні та вібрації – з ймовірністю 0,6. Прилад працює на рухомій станції в умовах, коли з ймовірністю 0,4 виникає вібрація і незалежно від цього з ймовірністю 0,7 – підвищена температура. Знайти ймовірність виходу приладу з ладу.

Завдання 3. Ймовірність того, що в чотирьох незалежних дослідах подія А станеться двічі, дорівнює 3/8. Яка ймовірність того, що в шести незалежних дослідах подія теж станеться двічі?

Завдання 4. Яка ймовірність того, що помилка виміру X не перебільшить за абсолютною величиною 5 м, якщо математичне очікування $a = 5\text{м}$, а середньоквадратичне відхилення $\sigma = 75\text{м}$.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ c(x+1)^2, & \text{при } -1 < x \le 2. \\ 1, & \text{при } 2 < x \end{cases}$$

Завдання 6. Є 100 верстатів, приводи яких включаються незалежно один від одного. Яка ймовірність того, що в цей проміжок часу виявляться включеними від 70 до 86 приводів, якщо для кожного приводу ймовірність бути включеним у момент часу, що належить цьому проміжку, дорівнює 0,8?

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \ge 0, x^2 + y^2 \le R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	9	9,2	9,6	10	10,4	10,6	10,8	11
n_i	2	4	8	12	10	8	6	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 10

Завдання 1. Робиться три незалежні постріли по мішені, що складається з «яблучка» і двох концентричних кілець. При одному пострілі ймовірність попадання в «яблучко» – 0,12, у перше кільце – 0,15, у друге кільце – 0,18. Знайти ймовірність того, що в результаті стрільби буде два попадання в яблучко і одно – у перше кільце.

Завдання 2. У ящику було 15 тенісних м'ячів, з яких 9 неграних м'ячів. Для першої гри навмання узяті 2 м'ячі, після гри вони повернені назад. Для другої гри знову узяли 2 м'ячі. Визначити ймовірність того, що обидва виявляться неграними м'ячами.

Завдання 3. У цеху шість верстатів, які працюють незалежно один від одного. Впродовж робочого дня (вісім годин) кожен верстат простоює в сумі дві години. Яку долю часу в цеху працює не менше п'яти верстатів?

Завдання 4. Помилка X утримання висоти літаком має $a = 20$ м, а $\sigma = 75$ м. Яка ймовірність того, що літак летітиме нижче, усередині й вище за коридор заввишки 100 м, якщо літаку задана висота, що відповідає середині коридору.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [2;3]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ c(x-1)^2, & \text{при } 1 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } 4 < x \end{cases}.$$

Завдання 6. Ймовірність виходу з ладу за час Т одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що за час Т з 100 конденсаторів вийдуть з ладу не менше 20 конденсаторів.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \leq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	9,6	9,8	10,2	10,4	10,6	11	11,2	11,6
n_i	2	4	8	10	13	8	6	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 11

Завдання 1. Два гравці виймають по черзі по одній «кістці» з повного набору доміно. Кожен має право вийняти не більше трьох «кісток». Виграє той, хто перший візьме подвійну «кістку» ("дупель"). Знайти ймовірність виграшу кожного гравця.

Завдання 2. На іспит студентам було запропоновано 25 екзаменаційних білетів. Студент вивчив 20 білетів. Яка ймовірність того, що він узяв вивчений білет, якщо він йде на іспит не першим, а третім.

Завдання 3. На світлофорі червоне і зелене світло горять по 30 с., а жовтий – 5 с. Автомобілю належить проїхати 5 перехресть, на яких світлофори працюють незалежно один від одного. Знайдіть ймовірність того, що : усі світлофори автомобіль проїде без зупинки; автомобіль чекатиме у світлофора не менше двох разів.

Завдання 4. Незалежні випадкові величини X і Y розподілені за нормальним законом з параметрами $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$ м, $a_1 = -a_2 = 5$ м. Яка ймовірність того, що хоч би одна з них за абсолютною величиною не перевищить 15 м.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ c(x+1)^3\,, & \text{при} -1 < x \le 2\,. \\ 1, & \text{при } 2 < x \end{cases}$$

Завдання 6. Ймовірність виходу з ладу за час Т одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що за час Т зі 100 конденсаторів вийдуть з ладу менше 28 конденсаторів.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): y \ge 0, x^2 + y^2 \le R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	4	4,2	4,6	5	5,2	5,4	5,6	6
n_i	1	4	8	12	11	8	6	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 12

Завдання 1. Боєзапас літака складає 120 патронів. Стрільба ведеться чергами, тривалістю 1 с. Скорострільність зброї – 600 пострілів у хвилину. Стрільба припиняється при попаданні в ціль. Ймовірність хоч би одного попадання для кожної черги дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що літак витратить увесь свій боєзапас.

Завдання 2. При грі у великий теніс гравець, який подає, бере 2 м'ячики з кошику. У кошику 20 м'ячиків. Відіграні м'ячики повертаються в кошик. Уважається, що гравець використовує при поданні один м'ячик з ймовірністю 0,7, а обидва м'ячики з ймовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що три подання гравець виконував неграними м'ячиками?

Завдання 3. Двосторонній зв'язок встановлюється з n радіостанцією, яка першою прийме позивні станції, що дрейфує, причому ця подія однаково імовірна для усіх радіостанцій $(p = 1/n)$. Визначити ймовірність того, що радіостанція № 1 встановить двосторонній зв'язок, якщо станція, що дрейфує, виходить на зв'язок. Для неї ж знайти математичне очікування і дисперсію числа встановлення двостороннього зв'язку.

Завдання 4. Випадкове відхилення розміру деталі від номіналу при виготовленні її на цьому верстаті має нульове математичне очікування і середнє квадратичне відхилення, що дорівнює 5 мк. Скільки необхідно виготовити деталей, щоб з ймовірністю не менше 0,9 серед них була хоч би одна якісна, якщо для якісної деталі допустиме відхилення розміру від номіналу не більше, ніж на 2 мк?

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [2; 3]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1 \\ c(x-1)^3, & \text{при } 1 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } 4 < x \end{cases}.$$

Завдання 6. Ймовірність виходу з ладу за час Т одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що за час Т із 100 конденсаторів вийдуть з ладу від 14 до 26 конденсаторів.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x;y): y \le 0, x^2 + y^2 \le R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	10	10,2	10,6	10,8	11,2	11,4	11,6	12
n_i	2	4	8	11	11	9	6	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 13

Завдання 1. Літак складається з трьох різних по уразливості частин. Для виведення із ладу літака досить одного влучення в першу частину, або влучення двох у другу, або трьох влучення у третю частину. За умови влучення снаряда в літак ймовірність влучення в першу частину – 0,15, у другу – 0,30, у третю – 0,55. Знайти ймовірність виведення літака з ладу за наявності: а) одного влучення, б), двох влучень, в) трьох влучень.

Завдання 2. Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди влучили в ціль. Знайти ймовірність того, що в ціль влучили три гармати, якщо ймовірність влучення в ціль першою, другою і третьою гарматами, відповідно, дорівнює 0,4; 0,3; 0,5.

Завдання 3. Незалежні випробування апаратури повторюються до тих пір, поки не станеться відмова. Ймовірність відмови від випробування до випробування не змінюється і дорівнює р. Знайти математичне очікування і дисперсію числа безвідмовних випробувань.

Завдання 4. Дано дві випадкові величини X і Y, що мають однакові дисперсії, але перша розподілена за нормальним законом, а друга рівномірно. Визначити співвідношення між серединними відхиленнями δ_x і δ_y за рівністю

$$P(|X-a_x|<\delta_x)=P\left(\left|X-a_y\right|<\delta_y\right)=\frac{1}{2}.$$

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X\in[d;d+1/2]$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le d\\ c\sqrt{x-d}\,, & \text{при } d<x\le d+1\\ 1, & \text{при } d+1<x\end{cases}.$$

Завдання 6. При виготовленні деталі ймовірність отримання її дефектною дорівнює 0,2. Скільки необхідно запланувати відливок до виготовлення, щоб з ймовірністю не менше 0,95 була забезпечена програма випуску виробів, для виконання якої потрібні 50 бездефектних деталей, якщо якість кожної з них не залежить від інших?

Завдання 7. Система випадкових величин $(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	7,4	7,6	8	8,4	8,6	9	9,2	9,4
n_i	2	4	8	12	11	8	5	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 14

Завдання 1. При грі у великий теніс гравець, який подає, бере 2 м'ячики з кошику. Відіграні м'ячики повертаються в кошик. Вважається, що гравець використовує обидва м'ячики. Скільки треба покласти в кошик м'ячиків, щоб два подання гравець виконував неграними м'ячиками с ймовірністю більше 0,5?

Завдання 2. На автомобілі "Мерседес–600", що належить президентові банку і що має величезний інтерес для викрадачів, встановлені електронна сигналізація і механічне блокування важеля перемикання передач. Ймовірність того, що викрадач впорається з сигналізацією, дорівнює 0,2, а ймовірність того, що він її зламає, дорівнює 0,1. Сьогодні президент, ризикнувши, відправився у гості без водія і охорони. Знайти ймовірність наступних подій : а) автомобіль буде викрадений; б) викрадач впорається тільки з однією системою захисту.

Завдання 3. Вважаючи число викликів, що поступають на комутатор за заданий проміжок часу випадковою величиною, яка підпорядковується закону Пуассона з параметром, пропорційним довжині проміжку, визначити ймовірність того, що за 30 секунд не буде жодного виклику, якщо математичне очікування числа викликів за одну годину дорівнює 60.

Завдання 4. Нормально розподілена випадкова величина Х має математичне очікування х =–15м і середнє квадратичне відхилення 15м. Скласти таблицю функції розподілу для значень аргументу через кожні 15 м і побудувати графік.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; d/4]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ c(dx - x^2), & \text{при } 0 < x \le d/2 \\ 1, & \text{при } d/2 < x \end{cases}.$$

Завдання 6. Скільки необхідно зробити незалежних випробувань для того, щоб з ймовірністю 0,9 стверджувати, яка частота події, що цікавить нас, відрізнятиметься від ймовірності появи події, що дорівнює 0,4, не більше ніж на 0,1?

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): 1 \ge y, x^2 \le y\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,9	9,1	9,3	9,7	10,1	10,3	10,7	10,9
n_i	1	4	7	11	11	9	6	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 15

Завдання 1. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. По мішені робиться 7 незалежних пострілів. Знайти ймовірність того, що буде хоч би одно попадання в мішень.

Завдання 2. При грі у великий теніс гравець, який подає, бере 2 м'ячики з кошику. Відіграні м'ячики повертаються в кошик. Вважається, що гравець використовує один м'ячик з ймовірністю 0,7, а обидва м'ячики з ймовірністю 0,3. Скільки треба покласти в кошик м'ячиків, щоб три подання гравець виконував не граними м'ячиками с ймовірністю більше 0,5?

Завдання 3. Випадкове число помилкових з'єднань, що доводиться на одного телефонного абонента за даний проміжок часу, згідно закону Пуассона з параметром, що дорівнює 8. Визначити ймовірність того, що для цього абонента за цей проміжок часу число помилкових з'єднань перевищить 4 рази.

Завдання 4. Продукція проходить контроль відразу після виготовлення, причому дефектні кульки бракуються і зсипаються у бункер, а не браковані йдуть у цех складання. Визначити, на яку кількість кульок має бути розрахований бункер, щоб з ймовірністю 0,99 після зміни він не виявився переповненим.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0;2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c - e^{-x}, & x \in (0;\infty) \\ 0, & x \notin (-\infty;0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Ймовірність появи деякої події в одному випробуванні дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що ця подія з'явиться у більшості з 60 незалежних випробувань?

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції.

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot y, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	8,3	8,7	9,3	9,5	9,9	10,3	10,9	11,3
n_i	1	5	10	11	11	7	5	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 16

Завдання 1. Дві виробничі ділянки, що випускають однотипну продукцію, за зміну видали однакову кількість виробів. Можливий відсоток браку на першій ділянці дорівнює 5%, на другому – 4%. Знайти ймовірність того, що навмання узята деталь, з числа виробів тих, що надійшли на склад, не відповідає встановленим вимогам.

Завдання 2. У першому ящику було 3 білих і 3 чорних кулі, у другому – 2 білих. З першого у другий навмання переклали 3 кулі, після чого з другого вийняли одну. Яка ймовірність того, що куля виявиться білою?

Завдання 3. Коректура в 500 сторінок містить 500 друкарських помилок. Знайти ймовірність того, що на сторінці не менше трьох друкарських помилок, уважаючи число друкарських помилок на сторінці таким, що згідно закону Пуассона з параметром, що дорівнює середньому числу друкарських помилок, що доводиться на одну сторінку.

Завдання 4. Заряд мисливського пороху зважується на вагах, що мають середню квадратичну помилку зважування 150 мг. Номінальна вага порохового заряду 2,3 г. Визначити ймовірність ушкодження рушниці, якщо максимально допустима вага порохового заряду 2,5 г.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0;2]$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 + ce^{-x}, & x \in (0;\infty) \\ 0, & x \notin (-\infty;0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Цех заводу випускає кульки для підшипників. За зміну виготовлюється п = 10 000 кульок. Ймовірність того, що одна кулька виявиться дефектною, дорівнює 0,05. Причини дефектів для окремих кульок незалежні. Продукція проходить контроль відразу після виготовлення, причому дефектні кульки бракуються і зсипаються у бункер, а не браковані надходять до цеху складання. Визначити, на яку кількість кульок має бути розрахований бункер, щоб з ймовірністю 0,99 після зміни він не виявився переповненим.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції.

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x + y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складено дискретний варіаційний ряд:

x_i	12	12,2	12,6	13	13,4	13,6	13,8	14
n_i	1	4	8	13	10	7	5	3

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 17

Завдання 1. Сім різних куль довільно розкладаються по семи різних коробках. Яка ймовірність того, що : а) у кожній коробці буде по кулі; б) одна коробка виявиться порожньою.

Завдання 2. Статистика запитів кредитів у банку така: 10% – державні органи, 20% – інші банки, інші – фізичні особи. Ймовірність того, що узятий кредит не буде повернений, складають 0,01, 0,05 і 0,2 відповідно. Визначити, яка доля кредитів в середньому не повертається.

Завдання 3. При далекому радіозв'язку через перешкоди кожен сигнал незалежно від інших з ймовірністю 0,01 може бути прийнятий помилково. Передано 200 сигналів. Яка ймовірність того, що 3 з них будуть прийняті помилково? Яка ймовірність помилкового прийому не менше 3 сигналів?

Завдання 4. Математичне очікування і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X, відповідно, дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення, яке є в інтервалі (12, 14).

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - e^{-x}), & x \in (0; \infty) \\ 0, & x \notin (-\infty; 0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Лотерея організована таким чином. Учасникам продаються квитки, на кожному з яких є таблиця з номерами: 1, 2,..., 90. Учасник повинен вибрати довільно п'ять різних номерів, відмітити ці номери і відіслати квиток організаторам лотереї, які зберігають усі прислані квитки у запечатаному вигляді до дня розіграшу. Розіграш лотереї полягає в тому, що випадковим чином вибираються (розігруються) п'ять різних номерів з дев'яноста; про номери, які випали, повідомляються учасникам. Якщо у гравця збіглися з оголошеними менше двох номерів (0 або 1), він ніякого виграшу не отримує. Якщо збіглися з оголошеними два номери, він виграє 1 грн; якщо три номери – 100 грн; якщо чотири номери – 10 000 грн; якщо усі п'ять номерів – 1 000 000 грн. Визначити нижню межу ціни квитка, при якому лотерея в середньому ще не приносить збитку її організаторам.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції.

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot(y-1), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	10,9	11,5	11,8	12,4	12,7	13	13,6	13,9
n_i	1	6	8	13	10	9	3	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 18

Завдання 1. Екзаменаційний білет містить 3 запитання. Ймовірність того, що студент відповість на перше і друге запитання однакові й дорівнюють 0,9; на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент відповість : а) на усі запитання; б) принаймні, на два запитання.

Завдання 2. Ймовірність того, що тижневий оборот торговця морозиву перевищить 2000 крб., при сонячній погоді дорівнює 80 %, при мінливій хмарності – 50 %, а при дощовій погоді – 10 %. Знайти ймовірність того, що наступного тижня оборот перевищить 2000 крб., якщо ймовірність сонячної погоди зараз становлять 20 %, ймовірність мінливої хмарності і ймовірність дощової погоди – по 40 %.

Завдання 3. Кожен виріб незалежно від інших вироблений стандартно з ймовірністю 0,98. Зроблено 100 виробів. Яка ймовірність того, що 96 деталей будуть стандартні?

Завдання 4. Математичне очікування і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X, відповідно, дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення, розташованого в інтервалі (15, 25).

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - e^{-3x}), & x \in (0; \infty) \\ 0, & x \notin (-\infty; 0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Лотерея організована таким чином. Учасникам продаються білети, на кожному з яких є таблиця з номерами: 1, 2,..., 90. Учасник має вибрати довільним чином п'ять різних номерів, відмітити ці номери і відіслати білет організаторам лотереї, які зберігають усі надіслані їм квитки в запечатаному вигляді до дня розіграшу. Розіграш лотереї полягає в тому, що випадковим чином вибираються (розігруються) п'ять різних номерів з дев'яноста; про номери, які виграли, повідомляється учасникам. Якщо у гравця зійшлися з оголошеними менше двох номерів (0 або 1), він ніякого виграшу не отримує. Якщо зійшлися з оголошеними два номери, він виграє 1 грн; якщо три номери – 100 грн; якщо чотири номери – 10 000 грн; якщо усі п'ять номерів – 1 000 000 грн. Визначити середній доход M, який приносить лотерея організаторам, якщо в ній беруть участь 1 000 000 чоловік, що призначають свої номери незалежно один від одного, кожен купує один білет, а ціна білета 30 коп.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot(x-1), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12	12,4	12,6	13	13,5	14	14,5	15
n_i	2	6	7	11	11	8	6	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 19

Завдання 1. У правій і лівій кишенях є по три монети в 10 коп і по чотири монети в 5 коп. З правої кишені в ліву навмання перекладається 5 монет. Визначити ймовірність витягання з лівої кишені після перекладання монети гідністю в 10 коп.

Завдання 2. До складу поступають деталі з двох автоматів. Перший дає в середньому 0,2 % браку, другий – 0,1 %. Знайти ймовірність попадання до складу бракованої деталі, якщо з першого автомата поступило 2000 деталей, а з другого – 3000.

Завдання 3. У студентському будівельному загоні працює 400 студентів. Ймовірність того, що студент впродовж усього терміну роботи отримає травму, що потребує введення протиправцевої сироватки, дорівнює 0,005. Яка мінімальна кількість доз сироватки має бути в медичному пункті цього загону, щоб з ймовірністю не менше 0,95 їх вистачило у разі потреби?

Завдання 4. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі Х, яка розподілена нормально з математичним очікуванням (проектна довжина), що дорівнює 50 мм. Фактично довжина виготовлених деталей не менше 32 і не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання узятої деталі : а) більше 55 мм; б) менше 40 мм.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - e^{-5x}), & x \in (0; \infty) \\ 0, & x \notin (-\infty; 0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Лотерея організована таким чином. Учасникам продаються білети, на кожному з яких є таблиця з номерами: 1, 2,..., 90. Учасник повинен вибрати довільним чином п'ять різних номерів, відмітити ці номери і послати білет організаторам лотереї, які зберігають усі прислані білети в запечатаному вигляді до дня розіграшу. Розіграш лотереї полягає в тому, що випадковим чином вибираються (розігруються) п'ять різних номерів з дев'яноста; про номери, які випали, повідомляють учасників. Якщо у гравця зійшлися з оголошеними менше двох номерів (0 або 1), він ніякого виграшу не отримує. Якщо зійшлися з оголошеними два номери, він виграє 1 грн; якщо три номери – 100 грн; якщо чотири номери – 10 000 грн; якщо усі п'ять номерів – 1 000 000 грн. Користуючись «правилом трьох сигм», знайти межі практично можливих виплат з лотереї; чи можна вважати сумарну виплату з лотереї, розподілену за нормальним законом?

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x+y-1), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x;y): x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	9,3	9,7	9,9	10,5	10,9	11,5	11,9	12,3
n_i	2	5	7	12	12	7	5	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 20

Завдання 1. В результаті контролю якості деталей, що виготовляються підприємством, який систематично проводиться, встановлено, що брак становить в середньому 5 %. Скільки виготовлених деталей треба узяти, щоб найбільш вірогідне число придатних серед них дорівнювало 60 шт.?

Завдання 2. Якщо відомо, що ймовірність двом близнюкам бути однакової статі, удвічі більше, ніж ймовірність бути різностатевими, причому взагалі ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,50. Знайти ймовірність того, що інший з близнюків хлопчик, після того, як встановлено, що перший з них – хлопчик.

Завдання 3. В аудиторіях навчального корпусу встановлено 250 ламп для освітлення. Ймовірність того, що ця лампа впродовж місяця перегорить, дорівнює 0,004. Один раз у місяць електротехнік обходить аудиторії і замінює лампи, що перегоріли. Який запас лампочок він повинен мати, щоб з ймовірністю 0,9 їх вистачило для заміни усіх лампочок, що перегоріли?

Завдання 4. Зважування деякої речовини ведеться без систематичних помилок. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням 20 р. Знайти ймовірність того, що зважування буде зроблено з помилкою, яка не перебільшує за абсолютною величиною 10 р.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 2]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - x^{-4}), & x \in (1; \infty) \\ 0, & x \notin (-\infty; 0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Міра довжини " фут", як видно з назви, має пряме відношення до ноги: це – довжина ступні. Але, як відомо, розміри ніг бувають різні. Німці в XVI ст. виходили з цього положення так. У недільний день ставили поруч 16 перших чоловіків, що вийшли з церкви. Сума довжин їх лівих стоп ділилася на 16 – це середня довжина і була «правильним і законним футом». Відомо, що розмір стопи дорослого чоловіка того часу описується випадковою величиною з математичним очікуванням 262,5 мм і середнім квадратичним відхиленням 12 мм. Знайти ймовірність того, що два «правильних і законних фути», розрахованих вказаним способом у різні дні, відрізняються один від одного більше, ніж на 5 мм. Скільки треба було б узяти чоловік для того, щоб з ймовірністю, більшою 0,99, середній розмір їх стопи відрізнявся б від 262,5 мм менш, ніж на 0,5 мм?

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c\cdot(x-y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x;y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12	12,4	12,8	13	13,2	13,6	13,8	14
n_i	2	6	10	12	11	8	5	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 21

Завдання 1. Турист, заблукавши в лісі, вийшов на полянку, від якої в різні боки ведуть 5 доріг. Якщо турист піде по першій дорозі, то ймовірність виходу туриста з лісу впродовж години дорівнюватиме 0,6; якщо по другій – 0,3; якщо по третій – 0,2; якщо по четвертій – 0,1; якщо по п'ятій – 0,1. Яка ймовірність того, що турист пішов по першій дорозі, якщо за годину він вийшов з лісу?

Завдання 2. У піраміді п'ять рушниць, три з яких забезпечені оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець уразить мішень при пострілі з рушниці з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для рушниці без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що мішень буде уражена, якщо стрілець зробить один постріл з навмання узятої рушниці.

Завдання 3. Належить зробити профілактичний огляд 400 пристроїв. Ймовірність того, що в пристрої, що оглядається, деякий елемент потрібно буде замінити, дорівнює 0,005. Яка ймовірність того, що доведеться замінити не більше чотирьох елементів?

Завдання 4. Випадкові помилки виміру підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням 20 мм і математичним очікуванням 0. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірів помилка хоч би одного не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.

Завдання 5. Дана функція розподілу безперервної випадкової величини $F(x)$. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; побудувати графік $F(x)$; ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $X \in [0; 3]$:

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - x^{-6}), & x \in (1; \infty) \\ 0, & x \notin (-\infty; 0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на вступ бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі прийме один банк.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x - y + 1), & (x, y) \in D \\ \quad 0, & (x, y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12,4	12,8	13	13,2	13,6	13,8	14	14,4
n_i	1	6	8	11	11	8	5	1

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 22

Завдання 1. У фотоаматора в коробці знаходиться 5 однакових касет з фотоплівками, з яких 3 плівки вже засняті, а дві – чисті. Аматор не в змозі встановити, які з них засняті, тому вирішує відібрати навмання дві плівки, а інші проявити. Яка ймовірність того, що у відібраних плівках виявляться чистими : а) обидві плівки; б) хоч би одна плівка?

Завдання 2. У кожній з трьох урн містяться 6 чорних та 4 білі кулі. З першої урни навмання витягнута одна куля і перекладена в другу урну, після чого з другої урни витягнута одна куля і перекладена у третю урну. Знайти ймовірність того, що куля, навмання витягнута з третьої урни, виявиться білою.

Завдання 3. Відомо, що тільки 1 % раковин перлинних скойок містять перлину. Знайдіть ймовірність того, що у 100 здобутих раковинах виявиться не більше 3 перлин.

Завдання 4. Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менше 0,7 мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням 0,4 мм, знайти, скільки в середньому буде придатних кульок серед ста виготовлених.

Завдання 5. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(-\pi/4 \leq X \leq \pi/4)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot cosx, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Завдання 6. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на вступ бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть 15 банків.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x - y + 4), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	12,8	13	13,2	13,6	13,8	14	14,4	14,8
n_i	1	5	7	11	13	11	7	3

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 23

Завдання 1. У магазині 5 холодильників. Ймовірність виходу з ладу кожного холодильника впродовж року дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що впродовж року ремонту потребують : 1) 4 холодильника; 2) не менше двох холодильників; 3) не більше одного холодильника; 4) не менше одного холодильника.

Завдання 2. Ймовірність того, що під час роботи цифрової електронної машини станеться збій в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті, в інших пристроях, відноситься як 3: 2: 5. Ймовірність виявлення збою в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті та в інших пристроях, відповідно, дорівнює 0,8; 0,9; 0,9. Знайти ймовірність того, що виниклий в машині збій буде виявлений.

Завдання 3. Знайти ймовірність того, що подія А настане рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,25.

Завдання 4. Деталь, виготовлена автоматом, уважається придатною, якщо відхилення її контрольованого розміру від проектного не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення контрольованого розміру від проектного підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням 5 мм і математичним очікуванням 0. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

Завдання 5. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(0 \leq X \leq \pi/2)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot sinx, & x \in [0;\pi] \\ 0, & x \notin [0;\pi] \end{cases}.$$

Завдання 6. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку має намір скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на вступ бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть 30 банків.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot x^2, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x;y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	13,2	13,6	13,8	14	14,4	14,8	15	15,2
n_i	1	5	7	10	11	9	7	4

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 24

Завдання 1. Для трьох роздрібних торгових підприємств визначений плановий рівень прибутку. Ймовірність того, що перше підприємство виконає план прибутку, дорівнює 90 %, для другого вона дорівнює 95 %, для третього - 100 %. Яка ймовірність того, що плановий рівень прибутку буде досягнутий : а) усіма підприємствами; б) тільки двома підприємствами; в) хоч би одним підприємством.

Завдання 2. Прилад може працювати у двох режимах: 1) нормальному і 2) ненормальному. Нормальний режим спостерігається в 80 % усіх випадків роботи приладу; ненормальний – у 20 %. Ймовірність виходу приладу з ладу за час t у нормальному режимі дорівнює 0,1; у ненормальному – 0,7. Знайти ймовірність виходу приладу з ладу за час t.

Завдання 3. Знайти ймовірність того, що подія А настане 1400 разів у 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.

Завдання 4. Бомбардувальник, що пролетів уздовж моста, довжина якого 30 м і ширина 8 м, скинув бомби. Випадкові величини X і У (відстані від вертикальної і горизонтальної осей симетрії моста до місця падіння бомби) незалежні й розподілені нормально з середніми квадратичними відхиленнями, що відповідно дорівнюють 6 і 4 м, і математичними очікуваннями, що дорівнюють нулю. Знайти ймовірність попадання в міст однієї скинутої бомби.

Завдання 5. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(0 \leq X \leq 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-x}, & x \in (0;\infty) \\ 0, & x \notin (-\infty; 0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на вступ бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть 50 банків.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot y^2, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x;y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	13,6	13,8	14	14,4	14,8	15	15,2	15,6
n_i	1	3	5	10	12	9	8	3

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 25

Завдання 1. Ймовірність поломки одного з п'яти працюючих незалежно один від одного верстатів дорівнює 0,2. Якщо відбувається поломка, верстат до кінця дня працює. Яка ймовірність того, що : а) два верстати зламаються впродовж дня; б) не менше одного верстата працюватимуть справно?

Завдання 2. У групі з десяти студентів, що прийшли на іспит, три підготовлених відмінно, чотири – добре, два – задовільно і 1 – незадовільно. У екзаменаційних білетах є 20 запитань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на усі 20 запитань, добре підготовлений – на 16, посередньо підготовлений – на 10, погано підготовлений – на 5. Викликаний навмання студент відповів на три довільно заданих запитання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений : а) відмінно; б) посередньо; в) погано.

Завдання 3. Ймовірність поразки мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.

Завдання 4. Бомбардувальник, що пролетів уздовж моста, довжина якого 30 м і ширина 8 м, скинув бомби. Випадкові величини Х і У (відстані від вертикальної і горизонтальної осей симетрії моста до місця падіння бомби) незалежні й розподілені нормально з середніми квадратичними відхиленнями, що дорівнюють 6 і 4 м, і математичними очікуваннями, що дорівнюють нулю. Знайти ймовірність руйнування моста, якщо скинуто дві бомби, причому відомо, що для руйнування моста досить одного попадання.

Завдання 5. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(1/2 \leq X \leq 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^3, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}.$$

Завдання 6. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку має намір скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на вступ бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі прийме хоч би один банк.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot x^2 \cdot y^2, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x;y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	14	14,4	14,8	15	15,2	15,6	15,8	16
n_i	1	3	7	11	12	9	6	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.

3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 26

Завдання 1. Ймовірність того, що виріб є дефектним, дорівнює 0,1. Скільки потрібно вибрати виробів, щоб серед них з ймовірністю більше 0,96 виявився хоч би один бездефектний?

Завдання 2. З 28 приватних банків, працюючих у місті, порушення у сплаті податків допущені у 12 банках. Податкова інспекція проводить перевірку трьох банків, вибираючи їх з банків випадковим чином. Вибрані банки перевіряються незалежно один від одного. Допущені у банку, що перевіряється, порушення можуть бути виявлені інспекцією з ймовірністю 0,7. Яка ймовірність того, що в ході перевірки буде встановлений факт наявності серед приватних банків міста таких банків, які допускають порушення в сплаті податків?

Завдання 3. Ймовірність появи події в кожному з 100 незалежних випробувань постійна і дорівнює p=0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) не менше 75 разів і не більше 90 разів; б) не менше 75 разів; в) не більше 74 разів.

Завдання 4. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним очікуванням 10. Ймовірність попадання X в інтервал (10, 20) дорівнює 0,3. Чому дорівнює ймовірність попадання X в інтервал (0, 10)?

Завдання 5. Дано щільність розподілу $f(x) = \mathrm{c} \cdot e^{-|x|}$безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність

$P(-1 \leq X \leq 1)$.

Завдання 6. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на вступ бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть більш ніж 15 банків.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot y, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	15	15,2	15,6	15,8	16	16,3	16,7	16
n_i	1	3	7	11	12	9	6	2

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.

5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 27

Завдання 1. Адвокат виграє в суді в середньому 70 % справ. Знайдіть ймовірність того, що він з 8 справ виграє більше половини.

Завдання 2. На виготовлення апарату надходять деталі з трьох автоматів. Відомо, що перший автомат дає 3 % браку, другий – 2 % і третій – 4 %. Знайти ймовірність того, що на виготовлення апарату надходить бракована деталь, якщо з першого автомата поступає 100, з другого – 200, з третього – 250 деталей.

Завдання 3. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявляться 50 хлопчиків. Монета кинута 2n разів (N велике!).

Завдання 4. Випадкова величина X, розподілена нормально, є математичним очікуванням 10 і середньо квадратичним відхиленням 5. Знайти інтервал, симетричний відносно математичного очікування, в який з ймовірністю 0,9973 потрапить величина X в результаті випробування.

Завдання 5. Дана щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(3/2 \leq X \leq 2)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-3}, & x \in [1;2] \\ 0, & x \notin [1;2] \end{cases}.$$

Завдання 6. Будівельна фірма для залучення інвестицій у будівництво нового будинку збирається скористатися банківським кредитом. Ймовірність того, що який-небудь банк у відповідь на вступ бізнес-плану прийме позитивне рішення про кредитування фірми, дорівнює 0,3. Будівельна фірма звернулася до 100 банків. Знайти ймовірність того, що рішення про надання кредитів цій фірмі приймуть більш ніж 50 банків.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x\cdot y, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

де $D=\{(x;y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	15,6	15,8	16	16,3	16,7	17	17,2	17,6
n_i	1	4	6	10	12	9	6	3

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 28

Завдання 1. Троє мисливців одночасно вистрілили у ведмедя. Той був убитий, і в шкурі опинилися дві кулі. Відомо, що перший мисливець попадає в ціль з ймовірністю 0,3, другий – 0,5, третій – 0,8. Визначте ймовірність того, що у ведмедя попали кулі перших двох мисливців.

Завдання 2. Троє робітників виготовили за зміну 60 деталей. Продуктивність робітників відноситься як 1: 2: 3. Перший робітник виготовляє у середньому 95 % придатних деталей, другий – 85 %, третій – 90 %. Знайти ймовірність того, що навмання узята з числа виготовлених за зміну деталь низької якості.

Завдання 3. Ймовірність появи події в кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться : а) не менше 1470 і не більше 1500 разів; б) не менше 1470 разів; в) не більше 1469 разів.

Завдання 4. Випадкова величина X розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням 5 мм. Знайти довжину інтервалу, симетричного відносно математичного очікування, в який з ймовірністю 0,9973 потрапить X у результаті випробування.

Завдання 5. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(2 \leq X \leq 3)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-2}, & x \in [1;4] \\ 0, & x \notin [1;4] \end{cases}.$$

Завдання 6. Ймовірність появи успіху в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що в серії з 300 випробувань успіх настане рівно 75 разів.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x, y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-x-y}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D' \end{cases}$$

де $D = \{(x;y): x \geq 0, y \geq 0\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	16	16,3	16,7	17	17,2	17,6	17,8	18
n_i	1	5	8	12	12	9	6	3

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 29

Завдання 1. Для кожної з трьох виробничих ділянок ймовірності невиконання плану, відповідно, дорівнюють: 0,02; 0,05 і 0,01. Знайти ймовірність того, що до моменту підведення підсумків роботи планове завдання буде виконано двома ділянками.

Завдання 2. У кожному з трьох кошиків знаходиться по сім червоних яблук і три зелених. З першого кошика навмання дістали одно яблуко і переклали в другий, потім з другого кошика навмання дістали яблуко і переклали у третій. Знайти ймовірність того, що яблуко, навмання витягнуте після цих маніпуляцій з третього кошика, виявиться зеленим.

Завдання 3. Ймовірність появи події в кожному з 21 незалежного випробування дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться у більшості випробувань.

Завдання 4. Верстат–автомат виготовляє валики, причому контролюється їх діаметр X. Вважаючи, що X нормально розподілена випадкова величина з математичним очікуванням 10 мм і середнім квадратичним відхиленням 0,1 мм, знайти інтервал, симетричний відносно математичного очікування, в якому з ймовірністю 0,9973 будуть взаємозв'язані діаметри виготовлених валиків.

Завдання 5. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(2 \leq X \leq 3)$:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-1}, & x \in [1; 4] \\ 0, & x \notin [1; 4] \end{cases}.$$

Завдання 6. Ймовірність смерті тридцятирічного чоловіка становить 0,006. Страхова компанія уклала 10 000 страхових контрактів з чоловіками у віці тридцяти років, згідно з якими у разі смерті застрахованої особи впродовж найближчого року його спадкоємцям виплачується 100 000 грн. Вартість одного контракту дорівнює 1 200 грн. Знайти ймовірність того, що до кінця року страхова компанія опиниться у збитку.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-2x-y}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	16,3	16,7	17	17,2	17,6	17,8	18	18,3
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.
2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Варіант 30

Завдання 1. У лотерейному білеті треба закреслити 6 номерів з 49. Яка ймовірність вгадати: а) 6 номерів; б) 5 номерів; в) 4 номери; г) 3 номери; д) 2 номери; е) один номер?

Завдання 2. Два станка-автомати роблять однакові деталі, які надходять на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата удвічі більша продуктивності другого. Перший автомат робить у середньому 60 % деталей відмінної якості, а другий – 84 %. Навмання узята з конвеєра деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь зроблена першим станком-автоматом.

Завдання 3. Монета кинута 2n разів. Знайти ймовірність того, що «герб» випаде на 2m разів більше, ніж напис.

Завдання 4. Випадкові помилки висотоміра X мають математичне очікування 20 м. Яке вони повинні мати середнє квадратичне відхилення, щоб з ймовірністю, рівною 0,9, помилка виміру висоти за абсолютною величиною була менше 100 м?

Завдання 5. Дано щільність розподілу $f(x)$ безперервної випадкової величини. Знайти: параметр c; математичне очікування; дисперсію; середньоквадратичне відхилення; функцію розподілу випадкової величини і побудувати її графік; ймовірність $P(1 \le X \le 5)$:

$$f(x) = \begin{cases} \quad cx^{-5}, & x \in (1; \infty) \\ 0, & \quad x \notin (-\infty; 0) \end{cases}.$$

Завдання 6. Ймовірність смерті тридцятирічного чоловіка становить 0,006. Страхова компанія уклала 10 000 страхових контрактів з чоловіками у віці тридцяти років, згідно з якими у разі смерті застрахованої особи впродовж найближчого року його спадкоємцям виплачується 100 000 грн. Вартість одного контракту дорівнює 1 200 грн. Знайти ймовірність того, що до кінця року доход страхової компанії перевищить 4 000 000 грн.

Завдання 7. Система випадкових величин$(\xi;\ \eta)$ має спільну щільність $f(x,y)$. Знайти c, щільність $f_1(x)$, $f_2(y)$ і коефіцієнт кореляції:

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-2x-y}, & (x,y) \in D \\ \quad 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

де $D = \{(x;y): x \ge 0, y \ge 0\}$.

Завдання 8. За результатами випробувань отримані випадкові величини x_i, з яких складений дискретний варіаційний ряд:

x_i	17	17,2	17,6	17,8	18	18,3	18,6	19
n_i	1	5	7	9	11	9	6	3

тут n_i – частоти вибірки.

1. Знайти об'єм вибірки і її розмах.

2. Скласти інтервальний варіаційний ряд.
3. Побудувати гістограму і емпіричну функцію розподілу.
4. Знайти точкові оцінки медіани, моди, математичного очікування, дисперсії (зміщеної і незміщеної), асиметрії і ексцесу.
5. Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для математичного очікування і дисперсії з довірчою ймовірністю 0,9.
6. За допомогою критерію χ^2 перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

ДОДАТОК

Таблиця Д. 1

Щільність нормального розподілу

$$M[X] = 0,\ D[X] = 1,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	3989	3970	3910	3814	3683	3521	3332	3123	2897	2661
1	2420	2179	1942	1714	1497	1295	1109	940	790	656
2	540	440	355	283	224	175	136	104	79	60
3	44	33	24	17	12	9	6	4	3	2

У таблиці наведено значення $\varphi(\mathrm{x})10^4$. У першому стовпчику вказані цілі числа, а у верхньому рядку — десяті частки аргумента x.

Таблиця Д. 2

Функція Лапласа

$$M[X] = 0, \qquad D[X] = 1,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0	797	1585	2358	3108	3829	4515	5161	5763	6319
1	6827	7287	7699	8064	8385	8664	8904	9109	9231	9426
2	9545	9643	9722	9786	9836	9876	9907	9931	9949	9963
3	9973	9981	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9999	9999

У таблиці наведено значення $\Phi(x)10^4$. У першому стовпчику вказані цілі числа, а у верхньому рядку — десяті частки аргумента x.

Таблиця Д. 3

Функція розподілу Стьюдента

$$S(t,k)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}}\int_{-\infty}^{t}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx$$

t\ k	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16	18	∞
0,0	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500,00
0,1	532	535	537	537	538	539	539	539	539	539	539	539,83
0,2	563	570	573	574	576	577	577	578	578	578	578	579,26
0,3	593	604	608	610	613	614	615	615	616	616	616	617,91
0,4	621	636	642	645	648	650	651	652	652	653	653	655,42
0,5	648	667	674	678	683	685	686	687	688	688	688	691,46
0,6	672	695	705	710	715	717	719	720	721	722	722	725,75
0,7	694	722	733	739	745	748	750	751	752	753	754	758,04
0,8	715	746	759	766	773	777	779	780	781	782	783	788,14
0,9	733	768	783	790	799	803	805	807	808	809	810	815,94
1,0	750	789	804	813	822	827	830	832	833	834	835	841,34
1,2	779	823	842	852	862	868	871	873	875	876	877	884,93
1,4	803	852	872	883	894	900	904	907	908	910	911	919,24
1,6	822	875	896	908	920	926	930	932	934	935	936	945,20
1,8	839	893	915	927	939	945	949	952	953	955	956	964,07
2,0	852	908	930	942	954	960	963	966	967	969	970	977,25
2,4	874	931	952	963	973	978	981	983	985	986	986	991,80
2,8	891	946	966	976	984	988	991	992	993	994	994	997,44
3,2	904	957	975	984	991	994	995	996	997	997	997	999,31
3,6	914	965	982	989	994	996	998	998	999	999	999	999,84
4,0	922	971	986	992	996	998	999	999	999	999	999	999,97

У таблиці наведено значення $S(t,k)10^3$.

Таблиця Д. 4

Значення χ_α^2 для розподілу, які визначаються за формулою

$$P(\chi_\alpha^2 \geq \chi^2) = \alpha$$

$k \backslash \alpha$	0,10	0,05	0,01	0,001	$k \backslash \alpha$	0,10	0,05	0,01	0,001
1	2,7	3,8	6,6	10,8	19	27,2	30,1	36,2	43,8
2	4,6	6,0	9,2	13,8	20	28,4	31,4	37,6	45,3
3	6,3	7,8	11,3	16,3	21	29,6	32,7	38,9	46,8
4	7,8	9,5	13,3	18,5	22	30,8	33,9	40,3	48,3
5	9,2	11,1	15,1	20,5	23	32,0	35,2	41,6	49,7
6	10,6	12,6	16,8	22,5	24	33,2	36,4	43,0	51,2
7	12,0	14,1	18,5	24,3	25	34,4	37,7	44,3	52,6
8	13,4	15,5	20,1	26,1	26	35,6	38,9	45,6	54,1
9	14,7	16,9	21,7	27,9	27	36,7	40,1	47,0	55,5
10	16,0	18,3	23,2	29,6	28	37,9	41,3	48,3	56,9
11	17,3	19,7	24,7	31,3	29	39,1	42,6	49,6	58,3
12	18,5	21,0	26,2	32,9	30	40,3	43,8	50,9	59,7
13	19,8	22,4	27,7	34,5	35	46,1	49,8	57,3	66,5
14	21,1	23,7	29,1	36,1	40	51,8	55,8	63,7	73,6
15	22,3	25,0	30,6	37,7	45	57,5	61,7	70,0	80,1
16	23,5	26,3	32,0	39,2	50	63,2	67,5	76,2	86,5
17	24,8	27,6	33,4	40,8	75	91,1	96,2	106,4	118,5
18	26,0	28,9	34,8	42,3	100	118,5	124,3	135,6	149,0

Таблиця Д. 5

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$n\backslash\gamma$	0,95	0,99	0,999	$n\backslash\gamma$	0,95	0,99	0,099
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця Д. 6

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

$n\backslash\gamma$	0,95	0,99	0,999	$n\backslash\gamma$	0,95	0.99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Бібліографічний список

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М. : Академия, 2003. – 448 с.
2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М. : Академия, 2003. – 576 с.
3. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 448 с.
4. Калинина, В. Н. Основы математической логики, вероятность и анализ данных в правоприменительной деятельности / В. Н. Калинина. – М. : ГУУ, 2000. – 87 с.
5. Калинина, В. Н. Математическая статистика / В. Н. Калинина, В. Ф. Панкин. – М. : Высш. шк., 2000. – 90 с.
6. Кальберг, М. Я. Вероятность и статистика в примерах и задачах. В 2 т. Т. 2. / М. Я. Кальберг, Ю. М. Сухов. – М. : МЦНМО, 2010. – 48 с.
7. Кальберг, М. Я. Вероятность и статистика в примерах и задачах. В 2 т. Т. 1. / М. Я. Кальберг, Ю. М. Сухов. – М. : МЦНМО, 2007. – 44 с.
8. Карандаев, И. С. Прикладная математика / И. С. Карандаев, В. И. Малыхин, В. И. Соловьёв. – М. : Финстатин- форм, 2001. – 448 с.
9. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. – М. : ИНФРА–М, 2000. – 308 с.
10. Малыхин, В. И. Математика в экономике / В. И. Малыхин. – М. : ИНФРА–М, 2000
11. Задачник по теории вероятностей для экономистов / В. С. Мхитарян, Л. И. Трошин, В. А. Кошлякова, И. Г. Горбунов. – М. : Наука, 2000. – 200 с.
12. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А. А. Свешникова. – СПб. : Лань, 2007. – 448 с.

13. Секей, Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. – М. : Мир, 1990. – 240 с.
14. Соловьёв, В. И. Стохастические методы в экономике и финансах / В. И. Соловьев. – М. : ГУУ, 2000. – 120 с.
15. Соловьёв, В. И. Стохастические модели математической экономики и финансовой математики / В. И. Соловьев. – М. : ГУУ, 2001. – 100 с.
16. Колемаев, В. А. Теория вероятностей в примерах и задачах / В. А. Колемаев, В. М. Громенко, В. Н. Калинина. – М. : ГАУ, 1993. – 52 с.