

**УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ФУР'Є ДЛЯ АНАЛІЗУ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ  
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ТІЛ З РІЗНИМИ  
ПРУЖНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ**

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

Узагальнений метод Фур'є (УМФ) дозволяє отримати точні розв'язки задачі. Це дає можливість верифікувати результати, що отримано чисельними методами. Актуальність представленої задачі обумовлена малою вивченістю багатозв'язних трансверсально-ізотропних тіл, важливістю аналітичного та чисельного аналізу напружено деформівного стану (НДС) залежно від взаємного розташування концентраторів напружень, граничних поверхонь та пружних властивостей матеріалу. Апарат УМФ для багатозв'язних трансверсально-ізотропних тіл було розроблено В.С. Проценко та О.Г. Ніколаєвим.

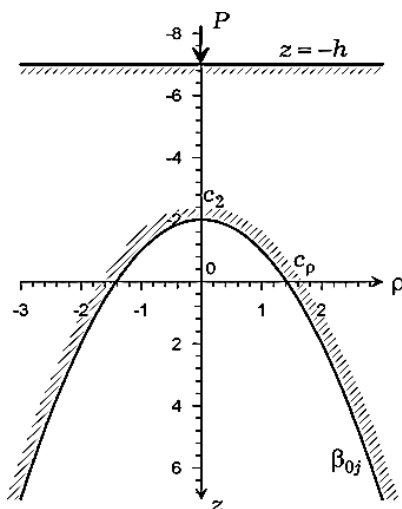


Рис. 1

Розглянуто НДС трансверсально-ізотропного півпростору з нерухомою параболоїдальною основою. Математичний апарат УМФ для трансверсально-ізотропних тіл такої геометрії було розроблено роботах автора у співпраці з О.Г. Ніколаєвим.

Метою цієї роботи є аналіз НДС для трансверсально-ізотропних матеріалів з різними пружними характеристиками, на прикладі задачі про тривимірне тіло, обмежене площиною та параболоїдом, коли параболоїдальна основа є закріпленою, а на граничну площину діє нормальна зосереджена сила  $P$  (напрямок співпадає з віссю симетрії параболоїда обертання, див. рис. 1). Досліджено НДС між площиною та параболоїдом обертання залежно від геометричних параметрів (форма параболоїда, відстань між поверхнями) для трансверсально-ізотропних матеріалів різними пружними характеристиками, які наведено в таблиці 1. Розрахунки напружень проводилися між

вершиною параболоїда та граничною площиною в напрямках, які паралельні границі півпростору. Зазначено, що концентрація напружень спостерігалась безпосередньо під точкою докладання зосередженої сили та в околі вершини параболоїда. Причому абсолютна величина тим більше, чим більше кривизна основи.

Таблиця 1

**Пружні постійні**

	кварц (Гпа)	піщаник (Гпа)	піщаний сланець(па)	алевроліт (па)	склопластик (па)
$C_{11}$	$1.184 \cdot 10^3$	58.576	$0.19301 \cdot 10^{-9}$	$7.2924 \cdot 10^5$	4318.1818
$C_{12}$	$0.19 \cdot 10^3$	25.019	$0.33976 \cdot 10^{-9}$	$2.2023 \cdot 10^5$	681.8182
$C_{13}$	$0.32 \cdot 10^3$	20.793	$0.62965 \cdot 10^{-9}$	$2.2787 \cdot 10^5$	2500
$C_{33}$	$1.07 \cdot 10^3$	61.105	$0.13547 \cdot 10^{-8}$	$6.7738 \cdot 10^5$	22500
$C_{44}$	$0.358 \cdot 10^3$	16.584	$0.11921 \cdot 10^{-9}$	$2.29 \cdot 10^5$	300

У таблиці 2 представлено дійсні корені  $v_1^2$  та  $v_2^2$  характеристичного рівняння

$$C_{11}C_{44}v^2 - (C_{33}C_{11} - 2C_{13}C_{44} - C_{13}^2)v + C_{33}C_{44} = 0,$$

про які доведено, що вони є додатними. Коефіцієнти  $v_j$  ( $j=1, 2$ ) визначають ступінь анізотропії матеріалу. Чим більше вони відрізняються один від одного, тим більше виражені анізотропні властивості. Вони використані во всіх розрахунках.

Таблиця 2

Корені характеристичного рівняння

	кварц	піщаник	піщаний сланець	алевроліт	склопластик
$v_1$	0.7371	0.7203	0.5032956855	0.8399	0.2749
$v_2$	1.2897	1.4181	2.914433209	1.1474	8.3031

НДС досліджувалося між граничними поверхнями в 5-ти площинах ізотропії, які паралельні границі півпростору та рівновіддалені одна від одної. Розрахунки було проведено для різної геометрії – відстань між граничними поверхнями та кривизна параболоїда.

На наведених нижче малюнках напруження  $\sigma = \frac{\sigma_z}{\sigma_0} \left( \sigma_0 = \frac{P}{2\pi} C_{44} \right)$  подано залежно від

змінної  $\rho$ .  $\sigma_z$  – нормальні напруження (перпендикулярні до площини ізотропії). Лінія 1 відповідає напруженням у піщанику, лінія 2 – у кварці, лінія 3 – у піщаному сланці, лінія 4 – в алевроліті, а лінія 5 – у склопластику. На рис. 2 – відносна відстань  $= L$ , на рис. 3 – на відстані  $\frac{1}{5}L$ . Нормуючий множник  $\sigma_0$  – свій для кожного матеріалу (залежить від  $C_{44}$ ).

Малюнки *a* та *b* є графіками розподілу напружень в різному масштабі для більшої наочності.

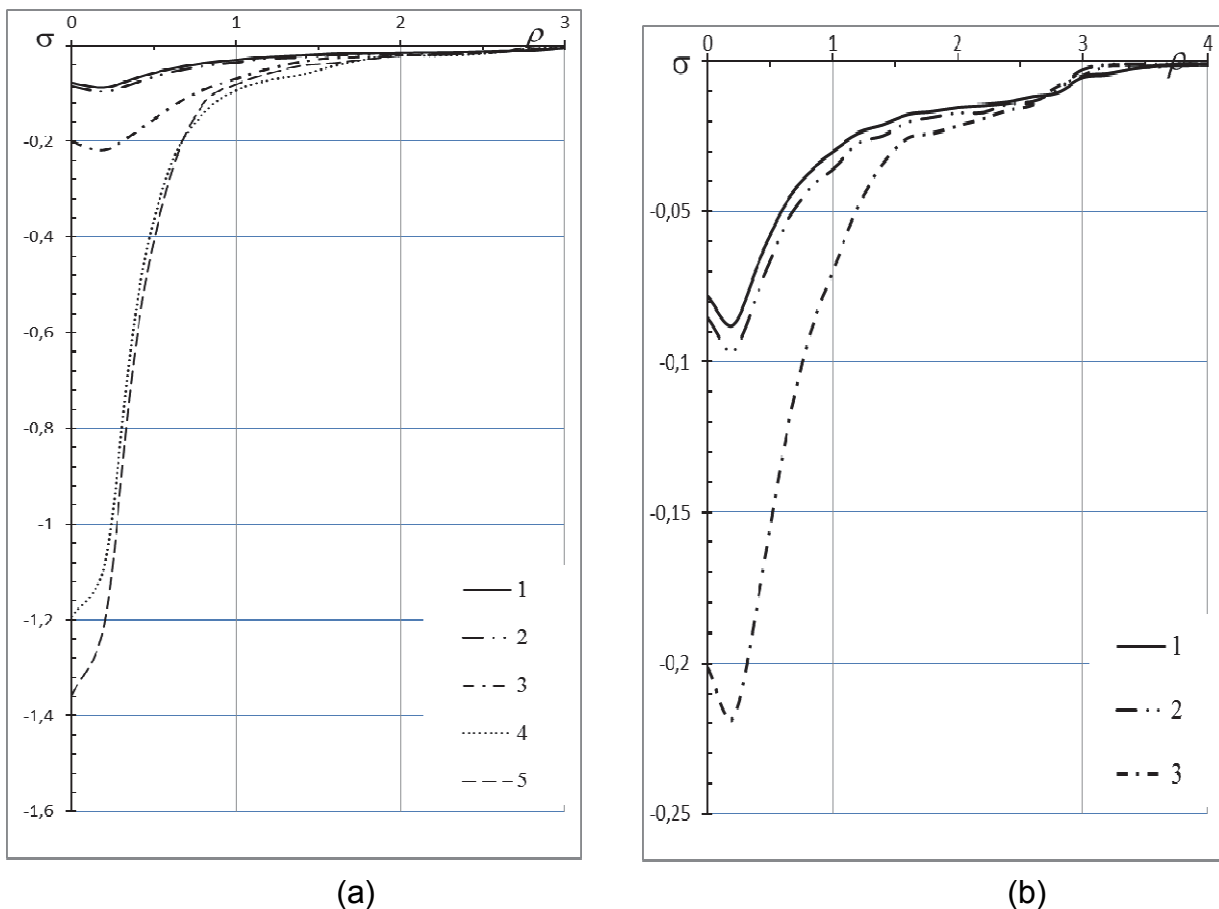


Рис. 1

Аналізуючи отримані результати слід зазначити, що з матеріалів, для яких відношення коренів характеристичного рівняння є близькими (наприклад, кварц і піщаник), розподіл напружень практично збігається. Матеріали, що мають різні значення відношення коренів характеристичного рівняння (наприклад, пісковика та алевроліт, кварц та склопластика) мають суттєві відмінності у напруженнях.

Також має місце залежність НДС досліджуваного тіла від коефіцієнтів Пуассона в поздовжньому та поперечному напрямках. Абсолютні величини пружних констант (табл. 2), які відрізняються на кілька порядків, меншою мірою відображені, бо нормуючим множником при розрахунках напруги обраний модуль зсуву  $G^*$ .

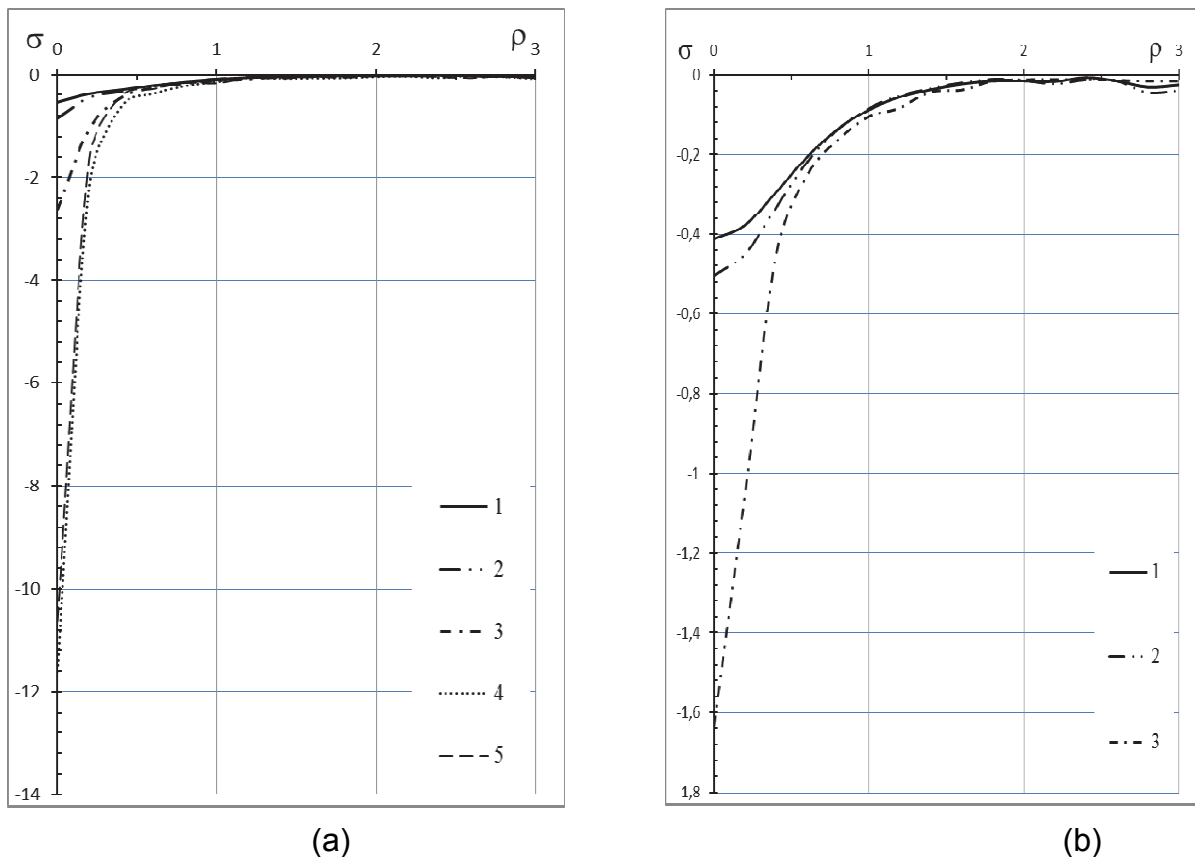


Рис. 2