

О. А. Цирюк, Г. Г. Смоленко

**БАЛІСТИЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ**

2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

О. А. Цирюк, Г. Г. Смоленко

БАЛІСТИЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2014

УДК 629.78.01: 531.55 (075.8)  
Ц78

Рецензенти: канд. воєн. наук, доц. О. Д. Малько,  
канд. фіз.-мат. наук, доц. М. І. Несвіт

**Цирюк, О. А.**

Ц78 Балістичне проектування літальних апаратів [Текст] : навч. посіб. / О. А. Цирюк, Г. Г. Смоленко. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2014. – 36 с.

Наведено методику визначення відносного запасу палива й програми роботи двигуна на ранніх етапах проектування літальних апаратів для різних окремих випадків. Розглянуто задачу пошуку оптимального часу активного польоту за критерієм мінімуму запасу палива. Подано розв'язання задачі визначення параметрів пасивної ділянки траєкторії.

Для студентів денного відділення, що навчаються за спеціальністю «Ракетні та космічні комплекси».

Іл. 3. Табл. 7. Бібліогр.: 2 назви

**УДК 629.78.01: 531.55 (075.8)**

© Цирюк О. А., Смоленко Г. Г., 2014  
© Національний аерокосмічний  
університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут», 2014

# 1. ПОВНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ РУХУ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА. СПРОЦУВАЛЬНІ ПРИПУЩЕННЯ

Одним із основних етапів технічної пропозиції є етап балістичного проектування, на якому визначаються такі важливі характеристики літального апарата (ЛА), як **запас палива, програма роботи двигуна, профіль швидкостей, форма траєкторії**.

На початковій стадії проектування багато характеристик ЛА є ще невідомими, тому проектування ведеться в умовах часткової невизначеності.

У технічному завданні (ТЗ) указують початкову, кінцеву або середню швидкість, що не визначає однозначно профіль швидкостей. Тому практично завжди існує багато варіантів профілів швидкостей і програм роботи двигуна, які їм відповідають і задовольняють умови ТЗ.

Зв'язки між профілем швидкостей, формою траєкторії й програмою роботи двигуна відображають рівняння руху. Для розкриття цих залежностей необхідно зінтегрувати рівняння руху. Але через відсутність на початковому етапі проектування багатьох важливих характеристик ЛА без спрощувальних припущень зробити це неможливо.

Роблять такі припущення:

- а) розглядається лише поздовжній рух ЛА;
- б) керування виконується ідеально, перехідні процеси в контурі керування відбуваються миттєво, кут атаки ЛА визначається лише умовами керування;
- в) ЛА розглядається як матеріальна точка, кінематичні параметри руху визначаються з рівнянь руху центра мас;
- г) метод наведення виконується ідеально.

З урахуванням цих припущень повна система рівнянь руху у швидкісній системі координат буде мати такий вигляд [1]:

**а) динамічні рівняння:**

$$\begin{aligned} m\dot{V}_{\infty} &= P \cos \alpha - X_a - mg \sin \theta; \\ mV_{\infty}\dot{\theta} &= Y_a + P \sin \alpha - mg \cos \theta; \\ \dot{m} &= -m_c(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

де  $m$  – поточна маса ЛА;  $V_{\infty}$  – швидкість ЛА;  $P$  – тяга двигуна;  $\alpha$  – кут атаки ЛА;  $\theta$  – кут нахилу траєкторії ЛА;  $X_a$  – сила аеродинамічного опору;  $Y_a$  – піднімальна сила ЛА;  $m_c(t)$  – секундна витрата палива;  $g$  – прискорення вільного падіння;

б) кінематичні рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_{\infty c} \cos(\varphi - \theta_c) - V_{\infty} \cos(\varphi - \theta); \\ \dot{\varphi} r &= V_{\infty} \sin(\varphi - \theta) - V_{\infty c} \sin(\varphi - \theta_c); \\ y_g &= H = V_{\infty} \sin \theta; \\ \dot{x}_g &= V_{\infty} \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де  $r$  – радіус-вектор дальності (відстань від ЛА до цілі);  $V_{\infty c}$  – швидкість цілі;  $\varphi$  – кут візування цілі;  $\theta_c$  – кут нахилу траєкторії цілі;  $H$  – поточна висота польоту ЛА;  $x$  – поточна горизонтальна дальність ЛА;

в) рівняння методу наведення:

$$\begin{aligned} &\text{– паралельного зближення } \varphi = \text{const}; \\ &\text{– погоні } \dot{\theta} = \dot{\varphi} \\ &\text{– пропорційного зближення } \dot{\theta} = a \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Перше динамічне рівняння системи (1.1) називають енергетичним. Запишемо його в такому вигляді ( $\cos \alpha \approx 1$ ):

$$P = m \dot{V}_{\infty} + X_a + mg \sin \theta. \quad (1.4)$$

Із цього рівняння випливає, що тяга двигуна витрачається на прискорення ЛА, подолання аеродинамічного опору та гравітаційних сил.

Розглянемо визначення відносного запасу палива для кількох окремих випадків, а потім – для загального випадку. Відносним запасом палива називають відношення маси палива до стартової маси ЛА:

$$\mu_t = m_t / m_0.$$

## 2. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОГО ЗАПАСУ ПАЛИВА ЗА ВІДСУТНОСТІ АЕРОДИНАМІЧНИХ І ГРАВІТАЦІЙНИХ СИЛ

Енергетичне рівняння в цьому випадку буде мати такий вигляд:

$$m \frac{dV_{\infty}}{dt} = P. \quad (2.1)$$

З урахуванням того, що  $P = m_c I = -\frac{dm}{dt} I$ , де  $I$  – питомий імпульс палива, рівняння (2.1) набуває вигляду

$$m \frac{dV_{\infty}}{dt} = -\frac{dm}{dt} I. \quad (2.2)$$

Розділимо змінні й зінтегруємо ліву й праву частини рівняння:

$$\int_{v_0}^{v_k} dV_{\infty} = -I \int \frac{m_k}{m} dm, \quad (2.3)$$

де  $V_0, V_k$  – початкова та кінцева швидкості ЛА;  $m_0, m_k$  – початкова та кінцева маси ЛА.

Зінтегрувавши (2.3), одержимо

$$v_k - v_0 = -I \ln \left( \frac{m_0 - m_t}{m_0} \right) = -I \ln(1 - \mu_t), \quad (2.4)$$

звідки

$$\mu_t = 1 - e^{-\frac{v_k - v_0}{I}}. \quad (2.5)$$

### 3. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОГО ЗАПАСУ ПАЛИВА ДЛЯ КРИЛАТИХ РАКЕТ ВЕЛИКОЇ ДАЛЬНОСТІ

Уважаємо відомими аеродинамічну схему ЛА та її основні характеристики ( $c_{xa}$  – коефіцієнт аеродинамічного опору,  $c_{ya}$  – коефіцієнт піднімальної сили,  $K = c_{ya} / c_{xa}$  – аеродинамічна якість). Задано розрахункові значення швидкості  $V$ , дальності  $L$  і висоти польоту  $H$ . На ЛА цього класу встановлюють частіше за все повітряно-реактивні двигуни. За розрахунковими швидкістю й висотою польоту підбирають двигун із необхідними характеристиками.

У цьому випадку тяга двигуна витрачається лише на подолання аеродинамічного опору:

$$P = X_a. \quad (3.1)$$

За кожну годину польоту витрати палива становитимуть

$$c_e = c_e P, \quad (3.2)$$

де  $c_e$  – питома витрата палива (кілограмів палива/кілограмів споживаної тяги за годину).

Кілометрова витрата палива визначається формулами

$$c_k = c_e / V_{\infty}; \quad (3.3)$$

$$c_k = -\frac{dG}{dL}, \quad (3.4)$$

де  $G = mg$ .

Прирівняємо праві частини рівнянь (3.3) і (3.4), тоді з урахуванням рівності (3.2) і того, що при горизонтальному польоті з постійною швидкістю  $Y_a = G$  і  $P = X_a$  ( $Y_a / X_a = K$ ,  $P = G / K$ ), одержимо

$$\frac{c_e}{KV_\infty} G = -\frac{dG}{dL}. \quad (3.5)$$

Розділимо змінні й зінтегруємо ліву й праву частини рівняння (3.5):

$$\int_0^L \frac{c_e}{KV_\infty} dL = -\int_{G_0}^{G_k} \frac{dG}{G}, \quad (3.6)$$

де  $G_0$  і  $G_k$  – початкова й кінцева вага ЛА.

Отже,

$$\frac{c_e L}{KV_\infty} = \ln(1 - \mu_t). \quad (3.7)$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $\mu_t$ , маємо

$$\mu_t = 1 - e^{-\frac{c_e L}{V_\infty K}}. \quad (3.8)$$

Із цього рівняння випливає: для забезпечення мінімуму  $\mu_t$  необхідно, щоб добуток  $V_\infty K$  був максимальним. Це досягається при  $K = 0,87 K_{max}$ , де  $K_{max}$  – максимальна аеродинамічна якість.

Для забезпечення максимальної аеродинамічної якості на крилах ЛА цього класу використовують несиметричні кризостійкі профілі, крила встановлюють під кутом до поздовжньої осі ЛА (кут установлення або заклинювання), який дорівнює потрібному середньому куту атаки ЛА на траєкторії. У цьому випадку підвищити аеродинамічну якість можна шляхом зменшення аеродинамічного опору корпусу, який зменшується більше, ніж піднімальна сила.

#### 4. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОГО ЗАПАСУ ПАЛИВА ПРИ ПОХИЛОМУ ПРЯМОЛІНІЙНОМУ РУСІ З ПОСТІЙНОЮ ТЯГОЮ ДВИГУНА

Цей випадок має важливе значення, тому що криволінійний політ здебільшого з певним наближенням можна замінити на прямолінійний.

У цьому випадку рівняння руху буде мати такий вигляд:

$$m \dot{V}_\infty = P - X_a - mg \sin \theta, \quad (4.1)$$

де  $P = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ .

При постійній тязі буде постійною й секундна витрата палива  $m_c$ , тоді масу ЛА в будь-який момент часу можна визначити таким чином:

$$m(t) = m_0 - m_c t = m_0(1 - \mu_c t), \quad (4.2)$$

де  $\mu_c = m_c / m_0$ .

Помножимо рівняння (4.1) на  $\frac{dt}{lm_0}$  і з урахуванням (4.2) зінтегруємо

його:

$$I_1 = I_2 - \mu_{ta} - I_3, \quad (4.3)$$

$$\text{де } I_1 = \frac{1}{l} \int_{v_0}^{v_k} (1 - \mu_c t) dv; \quad I_2 = \int_0^{t_k} \mu_c dt;$$

$$\mu_{ta} = \int_0^{t_k} \frac{X_a}{lm_0} dt; \quad I_3 = \frac{g}{l} \sin \theta \int_0^{t_k} (1 - \mu_c t) dt;$$

$t_k$  – час польоту ступеня ЛА.

Обчислимо інтеграли:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{l} \int_{v_0}^{v_k} dv - \frac{\mu_c}{l} \int_{v_0}^{v_k} t dv = \frac{v_k - v_0}{l} - \frac{\mu_c}{l} \left( t_k v_k - \int_0^{t_k} v dt \right) = \\ &= \frac{v_k - v_0}{l} - \frac{\mu_c}{l} (t_k v_k - v_{\text{сеп}} t_k) = \frac{v_k - v_0}{l} - \mu_t \frac{v_k - v_{\text{сеп}}}{l}; \end{aligned}$$

$$I_2 = \mu_c t_k = \mu_t;$$

$$I_3 = \frac{g}{l} \sin \theta (t_k - 0,5 \mu_c t_k^2) = \frac{g t_k \sin \theta}{l} (1 - 0,5 \mu_t).$$

Підставивши ці інтеграли в (4.3) і виконавши елементарні перетворення, одержимо

$$\mu_t = \frac{\mu_{tv} + \mu_{ta} + \mu_{th}}{1 + \mu_{tv_{\text{сеп}}} + 0,5 \mu_{th}}, \quad (4.4)$$

$$\text{де } \mu_{tv} = \frac{v_k - v_0}{l}; \quad \mu_{tv_{\text{сеп}}} = \frac{v_k - v_{\text{сеп}}}{l}; \quad \mu_{th} = \frac{g t_k \sin \theta}{l};$$

$v_{\text{сеп}}$  – середня швидкість ЛА.

Підрахуємо значення  $\mu_{ta}$ :

$$\mu_{ta} = \int_0^{t_k} \frac{X_a}{lm_0} dt = \int_0^{t_k} \left( \frac{c_{xa} S \rho_{\infty} V_{\infty}^2}{m_0 2l} \right) dt, \quad (4.5)$$

де  $c_{xa}$  – коефіцієнт сили аеродинамічного опору;  $S$  – площа крила;  $\rho_{\infty}$  – густина повітря.

У першому наближенні

$$c_{xa} \approx k_0 + k_1 / M_{\infty}, \quad (4.6)$$

де  $M_{\infty}$  – число Маха; для  $M_{\infty} > 1$   $k_0 \approx 0,04$ ,  $k_1 \approx 0,02$ .



З урахуванням (4.6) формула (4.5) набуває такого вигляду:

$$\mu_{ta} = \frac{1}{2l} \int_0^{t_k} (A + B/M_\infty) \rho_\infty V_\infty^2 dt, \quad (4.7)$$

де  $A = 0,04 / p_0$ ;  $B = 0,02 / p_0$ ;  $p_0 = m_0 / S$ .

Розглянемо інтеграл у цій формулі:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_k} (A + B/M_\infty) \rho_\infty V_\infty^2 dt &= v_{сеп} A \int_0^{t_k} \rho_\infty V_\infty dt + B \int_0^{t_k} a_\infty \rho_\infty V_\infty dt = \\ &= v_{сеп} \frac{A}{\sin \theta} \int_{h_0}^{h_k} \rho_\infty dh + \frac{B}{\sin \theta} \int_{h_0}^{h_k} a_\infty \rho_\infty dh = \\ &= \frac{v_{сеп} A}{\sin \theta} (I_{h_k} - I_{h_0}) + \frac{B}{\sin \theta} (I_{ah_k} - I_{ah_0}), \end{aligned}$$

де  $a_\infty$  – швидкість звуку;  $h_0$ ,  $h_k$  – початкова й кінцева висота польоту;

$$I_h = \int_0^h \rho_\infty dh; \quad I_{ah} = \int_0^h a_\infty \rho_\infty dh.$$

Під час інтегрування було використано теорему про середнє й таку залежність:

$$V_\infty dt = ds = dh / \sin \theta,$$

де  $ds$  – елементарний шлях.

Остаточно формула для визначення  $\mu_{ta}$  набуває такого вигляду:

$$\mu_{ta} = \frac{1}{2l \sin \theta} (A v_{сеп} (I_{h_k} - I_{h_0}) + B (I_{ah_k} - I_{ah_0})). \quad (4.8)$$

Якщо за модель атмосфери взяти стандартну атмосферу, то інтеграли  $I_h$  та  $I_{ah}$  можна підрахувати для будь-якої висоти.

Візьмемо таку апроксимацію стандартної атмосфери для густини повітря (див. додаток):

– для висот 0...20 км

$$\rho_\infty = 1,225 - 0,1158h + 0,003845h^2 - 0,0000448h^3;$$

– для висот 20...35 км

$$\rho_\infty = 2,0779e^{-0,1577h};$$

– для висот 35...80 км

$$\rho_\infty = 0,5796e^{-0,1235h};$$

– для висот 80...200 км

$$\rho_\infty = 10^{23} h^{-14,549}.$$

(4.9)

У залежності (4.9) висоту  $h$  треба підставляти в кілометрах, при цьому одиницею густини повітря буде  $1 \text{ кг/м}^3$ .

Для швидкості звуку можна взяти таку апроксимацію:

– для  $h < 11 \text{ км}$

$$a_{\infty} = 340 - 4,0909h; \quad (4.10)$$

– для  $h > 11 \text{ км}$

$$a_{\infty} = 295 \text{ м/с.}$$

У залежності (4.10) висоту  $h$  треба підставляти в кілометрах, при цьому одиницею швидкості буде  $1 \text{ м/с}$ .

Значення  $I_h$  та  $I_{ah}$  до висоти 20 км наведено в табл. 4.1, 4.2.

Таблиця 4.1

$h, \text{ км}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20
$I_h, \text{ кг/м}^2$	0	2228	4053	5528	6704	7630	8342	8884	9286	9788

Таблиця 4.2

$h, \text{ км}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20
$I_{ah} / 10^3, \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$	0	749	1347	1819	2185	2466	2678	2838	2958	3108

Ці значення підраховувались за такими формулами:

$$I_h = 1225h - 57,9h^2 + 1,28h^3 - 0,0112h^4; \quad (4.11)$$

а) для  $h < 11 \text{ км}$

$$I_{ah} = 416,5h \cdot 10^3 - 22,19h^2 \cdot 10^3 + 594h^3 - 7,75h^4 + 0,03666h^5; \quad (4.12)$$

б) для  $h > 11 \text{ км}$

$$I_{ah} = I_{ah11} + 361,375(h - 11) \cdot 10^3 - 17,0805(h^2 - 11^2) \cdot 10^3 + 0,378(h^3 - 11^3) \cdot 10^3 - 0,00330(h^4 - 11^4) \cdot 10^3, \quad (4.13)$$

де  $I_{ah11} - I_{ah}$  для  $h = 11 \text{ км}$ .

Для висот 20...35 км

$$I_h = 13176(0,786 - e^{-0,1577h});$$

$$I_{ah} = 3887002(0,84 - e^{-0,1577h}). \quad (4.14)$$

Для висот 35...80 км

$$I_h = 4693(2,2 - e^{-0,1235h});$$

$$I_{ah} = 1407900(2,32 - e^{-0,1235h}). \quad (4.15)$$

При  $h = 80$  км  $I_h = 10324$  кг/м<sup>2</sup>,  $I_{ah} = 3266255$  кг/(м·с<sup>2</sup>), і при подальшому збільшенні висоти ці величини практично не змінюються.

У формули (4.11) – (4.15) висоту  $h$  треба підставляти в кілометрах. У випадку, коли траєкторія польоту проходить на постійній висоті ( $\theta = 0$ ), з

урахуванням того, що  $\int_0^{t_k} V_\infty dt = v_{cep} t_k$ , формула (4.7) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \mu_{ta} &= \frac{A\rho_\infty v_{cep}}{2l} \int_0^{t_k} V_\infty dt + \frac{Ba_\infty \rho_\infty}{2l} \int_0^{t_k} V_\infty dt = \\ &= \frac{\rho_\infty v_{cep} t_k}{2l} (Av_{cep} + Ba_\infty). \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 5. ФІЗИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИН $\mu_{tv}$ , $\mu_{tv_{cep}}$ , $\mu_{th}$ , $\mu_{ta}$

Розглянемо таку задачу: нехай ЛА розганяється від швидкості  $V_0$  до швидкості  $V_k$  при постійних величинах маси ЛА й тяги двигуна за умов відсутності аеродинамічних і гравітаційних сил. Необхідно знайти відносний запас палива.

Енергетичне рівняння для цієї задачі має вигляд

$$m_0 \frac{dV_\infty}{dt} = P = I m_c. \quad (5.1)$$

Візьмемо інтеграл від лівої й правої частин цього рівняння:

$$\begin{aligned} \int_{V_0}^{V_k} dV_\infty &= I \frac{m_c}{m_0} \int_0^{t_k} dt = I \frac{m_c t_k}{m_0} = I \mu_{tv}; \\ V_k - V_0 &= I \mu_{tv}; \\ \mu_{tv} &= \frac{V_k - V_0}{I}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отже,  $\mu_{tv}$  – це умовний відносний запас палива, необхідний для розганяння ЛА від швидкості  $V_0$  до швидкості  $V_k$  при постійних масі ЛА й тязі двигуна за умов відсутності аеродинамічних і гравітаційних сил.

Аналогічне фізичне значення має величина  $\mu_{tv_{cep}}$ .

Тепер розглянемо таку задачу: нехай ЛА з постійною масою рухається під дією постійної тяги по похилій прямолінійній траєкторії з постійним кутом нахилу  $\theta$ . Нехай при цьому інерційні й аеродинамічні сили не діють. Необхідно знайти відносний запас палива.

Енергетичне рівняння в цьому випадку має вигляд

$$P = I m_c = m_0 g \sin \theta. \quad (5.3)$$

Помножимо обидві частини рівняння (5.3) на  $dt$  і візьмемо інтеграл від лівої й правої частин:

$$I m_c \int_0^{t_k} dt = m_0 g \sin \theta \int_0^{t_k} dt;$$

$$\mu_{th} = \frac{g t_k \sin \theta}{I}. \quad (5.4)$$

Отже,  $\mu_{th}$  – це умовний відносний запас палива, необхідний для набору висоти ЛА постійної маси під час його руху під дією постійної тяги по похилій прямолінійній траєкторії з постійним кутом нахилу  $\theta$  за умов відсутності інерційних та аеродинамічних сил.

Величина  $\mu_{ta}$  – це умовний відносний запас палива, необхідний для подолання аеродинамічного опору.

## 6. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОГО ЗАПАСУ ПАЛИВА ПРИ ДОВІЛЬНІЙ ТРАЄКТОРІЇ

Це фактично загальний випадок руху. Обмеження тут мінімальні – постійність питомого імпульсу палива  $I$ , що здебільшого на практиці виконується.

Рівняння руху в цьому випадку має такий вигляд:

$$m \frac{dV_\infty}{dt} = -I \frac{dm}{dt} - X_a - g m \sin \theta, \quad (6.1)$$

або

$$\frac{dm}{dt} + m \frac{1}{I} \left( \frac{dV_\infty}{dt} + g \sin \theta \right) = -\frac{X_a}{I}. \quad (6.2)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Позначимо:

$$\alpha(t) = \frac{1}{I} \left( \frac{dV_\infty}{dt} + g \sin \theta \right); \quad \beta(t) = \frac{X_a}{I}. \quad (6.3)$$

Тоді рівняння (6.2) набирає такого вигляду:

$$\frac{dm}{dt} + \alpha(t)m = -\beta(t). \quad (6.4)$$

Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{dm}{dt} + \alpha(t)m = 0. \quad (6.5)$$

Для цього розділимо змінні й візьмемо інтеграл від обох частин рівняння:

$$\int \frac{dm}{m} = -\int \alpha(t) dt; \quad \ln m(t) = -\int \alpha(t) dt + \ln c;$$

$$m(t) = ce^{-\int \alpha(t) dt}. \quad (6.6)$$

Розв'язок рівняння (6.4) знайдемо методом варіювання довільної сталої  $c$  ( $c = c(t)$ ). Продиференціюємо (6.6):

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dc}{dt} e^{-\int \alpha(t) dt} - c\alpha(t)e^{-\int \alpha(t) dt}. \quad (6.7)$$

Підставивши (6.6) і (6.7) у рівняння (6.4), одержимо

$$\frac{dc}{dt} e^{-\int \alpha dt} - c\alpha e^{-\int \alpha dt} + \alpha c e^{-\int \alpha dt} = -\beta;$$

$$dc = -\beta e^{\int \alpha dt} dt;$$

$$c = -\int \beta e^{\int \alpha dt} dt + c_1. \quad (6.8)$$

Підставивши (6.8) у (6.6), знайдемо розв'язок рівняння (6.4) у вигляді

$$m(t) = \left( c_1 - \int \beta e^{\int \alpha dt} dt \right) e^{-\int \alpha dt}. \quad (6.9)$$

Подамо невизначені інтеграли як функції верхніх меж:

$$m(t) = \left( c_1 - \int_0^t \beta(\tau) e^{\int_0^{\tau} \alpha(\tau_1) d\tau_1} d\tau \right) e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau}. \quad (6.10)$$

Довільну сталу  $c_1$  знайдемо з початкової умови  $m(0) = m_0$ . Отже,  $c_1 = m_0$  і маса ЛА буде змінюватись за таким законом:

$$m(t) = \left( m_0 - \int_0^t \beta(\tau) e^{\int_0^{\tau} \alpha(\tau_1) d\tau_1} d\tau \right) e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau}. \quad (6.11)$$

Кінцеву масу ЛА визначимо за формулою

$$m_0 - m_t = m(t_k), \quad (6.12)$$

де  $m_0$  – стартова маса ЛА,  $m_t$  – маса палива,  $t_k$  – час польоту ступеня ЛА.

З урахуванням (6.11) маємо

$$m_0 - m_t = \left( m_0 - \int_0^{t_k} \beta(\tau) e^{\int_0^{\tau} \alpha(\tau_1) d\tau_1} d\tau \right) e^{-\int_0^{t_k} \alpha(\tau) d\tau},$$

отже,

$$\mu_t = 1 - \left( 1 - \frac{1}{m_0} \int_0^{t_k} \beta(\tau) e^{\int_0^\tau \alpha(\tau_1) d\tau_1} d\tau \right) e^{-\int_0^{t_k} \alpha(\tau) d\tau}. \quad (6.13)$$

Формулу (6.13) можна використовувати як у випадку повністю активного польоту, так і за умов наявності пасивної ділянки польоту [1]. Це має дуже важливе значення, тому що на початку розрахунків час активного польоту є невідомим.

Обчислимо інтеграли, які входять до формули (6.13):

$$\begin{aligned} \int_0^{t_k} \alpha(\tau) d\tau &= \frac{1}{I} \int_0^{t_k} (dV_\infty + g \sin \theta dt) = \\ &= \frac{v_k - v_0}{I} + \frac{g}{I} \int_0^{t_k} \sin \theta dt = \mu_{tv} + \mu_{th}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\text{де } \mu_{tv} = \frac{v_k - v_0}{I}; \quad \mu_{th} = \frac{g}{I} \int_0^{t_k} \sin \theta dt;$$

$$\int_0^\tau \alpha(\tau_1) d\tau_1 = \mu_{tv_\tau} + \mu_{th_\tau}, \quad (6.15)$$

де  $\mu_{tv_\tau}$ ,  $\mu_{th_\tau}$  – значення  $\mu_{tv}$  і  $\mu_{th}$ , які відповідають часу польоту  $\tau$ .

Підставивши (6.14) і (6.15) у (6.13), одержимо

$$\mu_t = 1 - \left( 1 - \frac{1}{m_0} \int_0^{t_k} \beta(\tau) e^{(\mu_{tv_\tau} + \mu_{th_\tau})} d\tau \right) e^{-(\mu_{tv} + \mu_{th})}. \quad (6.16)$$

Використовуючи теорему про середнє, можна одержати простішу формулу для обчислення  $\mu_t$ :

$$\mu_t = 1 - \left( 1 - e^\xi \frac{1}{m_0 I} \int_0^{t_k} X_a dt \right) e^{-(\mu_{tv} + \mu_{th})},$$

або

$$\mu_t = 1 - (1 - e^\xi \mu_{ta}) e^{-(\mu_{tv} + \mu_{th})}, \quad (6.17)$$

$$\text{де } 0 < \xi < \int_0^{t_k} \alpha(\tau) d\tau, \quad \mu_{ta} = \frac{1}{m_0 I} \int_0^{t_k} X_a dt.$$

Величину  $\xi$  можна взяти такою:

$$\xi = \mu_{tv_{\text{сер}}} + 0,5 \mu_{th}, \quad (6.18)$$

$$\text{де } \mu_{tv_{\text{сер}}} = \frac{V_k - V_{\text{сер}}}{I}.$$

Із аналізу формул (6.16) і (6.17) випливає, що скористатися ними можна лише за наявності залежностей  $V_{\infty}(t)$ ,  $H(t)$ ,  $\theta(t)$  і  $X_a(t)$ . Перші три залежності можна знайти з динамічного розрахунку, а четверту – з аеродинамічного розрахунку.

У розд. 7 наведено методику наближеного обчислення  $V_{\infty}(t)$ ,  $H(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $X_a(t)$  і  $\mu_t$ .

## 7. НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВІДНОСНОГО ЗАПАСУ ПАЛИВА ПРИ ДОВІЛЬНІЙ ТРАЄКТОРІЇ

У першому наближенні профіль швидкостей і форму траєкторії задають гладкими функціями, а кут нахилу траєкторії (через його слабкий вплив на результат) вважають постійним.

### 7.1. Вибір форми траєкторії

Для наближеного визначення запасу палива траєкторію можна задати у вигляді полінома, степінь якого характеризується кількістю відомих умов

$$H = H_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad (7.1)$$

де  $H_0$  – початкова висота польоту ЛА;  $a_j$  – невідомі коефіцієнти.

Оскільки кут пуску й координата кінцевої точки польоту завжди є відомими, траєкторію можна описати поліномом другого степеня

$$H = H_0 + a_1 x + a_2 x^2. \quad (7.2)$$

Невідомі коефіцієнти полінома визначають з такої системи рівнянь:

$$\frac{dH}{dx} = a_1 + 2a_2 x \Big|_{x=0} = a_1 = \text{tg}\theta_0; \quad (7.3)$$

$$H_k = a_1 x_k + a_2 x_k^2,$$

де  $x_k$ ,  $H_k$  – координати кінцевої точки польоту ЛА;  $\theta_0$  – кут пуску ЛА.

Отже, маємо

$$a_1 = \text{tg}\theta_0;$$

$$a_2 = \frac{H_k - H_0 - a_1 x_k}{x_k^2}.$$

У цьому випадку можна розрахувати довжину траєкторії  $S$ :

$$dS = \sqrt{dx^2 + dH^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dH}{dx}\right)^2} dx;$$

$$S = \int_0^{x_k} \sqrt{1 + (dH/dx)^2} dx = \int_0^{x_k} \sqrt{A + Bx + Cx^2} dx,$$

де  $A = 1 + a_1^2$ ;  $B = 4a_1a_2$ ;  $C = 4a_2^2$ .

Після інтегрування одержимо

$$S(x) = \frac{(2Cx + B)\sqrt{R}}{4C} + \frac{\Delta}{8C^{3/2}} \ln\left(\frac{2\sqrt{CR} + 2Cx + B}{2\sqrt{C}}\right); \quad (7.4)$$

$$S = S(x_k) - S(0),$$

де  $R = A + Bx + Cx^2$ ;  $\Delta = 4AC - B^2$ .

Шлях, який пролітає ЛА, зв'язаний із середньою швидкістю й часом польоту такою залежністю:

$$S = v_{сер} t_k. \quad (7.5)$$

Із (7.5) можна знайти або  $v_{сер}$ , або  $t_k$  залежно від того, що задано в технічному завданні.

У випадку, коли кут пуску ЛА  $\theta_0 = 90^0$ , траєкторію можна описати рівнянням

$$H = a_1 x^{1/m} + a_2 x^2, \quad (7.6)$$

де  $m > 1$ .

Передбачається, що при  $x = x_k$  кут  $\theta = 0$ . Тоді невідомі коефіцієнти функції (7.6) визначають із системи рівнянь

$$\left.\frac{dH}{dx}\right|_{x=x_k} = 0; \quad (7.7)$$

$$H = H_k.$$

Розв'язком системи (7.7) є

$$a_1 = \frac{2m}{2m-1} \frac{H_k}{x_k^{1/m}}, \quad a_2 = -\frac{1}{2m-1} \frac{H_k}{x_k^2} \quad (7.8)$$

Значення  $m$  визначається дальністю розгінної ділянки. Чим довшою є вертикальна ділянка, тим більше  $m$ . У першому наближенні  $m = 2$ .

## 7.2. Вибір профілю швидкостей

Профіль швидкостей можна задати у вигляді полінома, степінь якого характеризується кількістю відомих умов.



Якщо функціональні залежності швидкості від часу забезпечують незмінність початкової, середньої й кінцевої швидкостей, то вигляд цих залежностей практично не впливає на запас палива [2].

Якщо  $v_{\text{сеп}} > \frac{v_0 + v_k}{2}$ , де  $v_{\text{сеп}}$ ,  $v_0$ , і  $v_k$  – середня, початкова й кінцева швидкості, то раціональною може бути наявність пасивної ділянки польоту.

У випадку комбінації активної й пасивної ділянок польоту профіль швидкостей краще описувати поліномом другого степеня

$$V_{\infty}(t) = v_0 + b_1 t + b_2 t^2, \quad (7.9)$$

а невідомі коефіцієнти  $b_i$  визначити з умов

$$\begin{aligned} V_{\infty}(t_k) &= v_k, \\ v_{\text{сеп}} &= \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} V_{\infty} dt. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Розв'язавши систему (7.10), маємо

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{t_k} (3v_{\text{сеп}} - 2v_0 - v_k), \\ b_2 &= \frac{3}{t_k^2} (v_0 + v_k - 2v_{\text{сеп}}). \end{aligned} \quad (7.11)$$

При повністю активному польоті профіль швидкостей можна описати поліномом третього степеня

$$V_{\infty}(t) = v_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3, \quad (7.12)$$

а невідомі коефіцієнти визначити з умов

$$\begin{aligned} V_{\infty}(t_k) &= v_k, \\ v_{\text{сеп}} &= \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} V_{\infty} dt, \\ \left. \frac{d^2 V_{\infty}}{dt^2} \right|_{t=t_k} &= 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Із системи (7.13) одержимо

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{t_k} (8v_{\text{сеп}} - 3v_k - 5v_0), \\ b_3 &= \frac{2}{t_k^3} (2v_{\text{сеп}} - v_k - v_0), \\ b_2 &= -3b_3 t_k. \end{aligned} \quad (7.14)$$

### 7.3. Узгодження профілю швидкостей і форми траєкторії

Найбільш трудомістким етапом під час розрахунку відносного запасу палива є визначення складової  $\mu_{ta}$  – умовного запасу палива, необхідного для подолання аеродинамічного опору. Розраховуючи  $\mu_{ta}$ , необхідно брати інтеграл за часом, до якого входять швидкість, що залежить від часу, густина повітря і швидкість звуку, що залежать від висоти польоту, яка, у свою чергу, залежить від горизонтальної дальності. Якщо як модель взяти стандартну атмосферу, то, для того щоб обчислити цей інтеграл, необхідно знати залежність густини повітря і швидкості звуку від часу, тобто висоти польоту від часу, а отже, горизонтальної дальності від часу.

Залежність горизонтальної дальності від часу можна знайти з такого рівняння:

$$\int_0^t V_{\infty} dt = \int_0^x \sqrt{1 + H dx}. \quad (7.15)$$

Залежність висоти польоту від часу можна знайти графічно. Для цього для кожного моменту польоту  $t_i$  за формулою

$$S(t_i) = \int_0^{t_i} V_{\infty} dt. \quad (7.16)$$

треба розрахувати пройдені шляхи і відкласти їх на графіку  $H(x)$ . Таким чином можна знайти висоту польоту в кожний момент часу  $t_i$ .

Для забезпечення потрібної точності на графіку  $H(x)$  краще відкладати прирости шляху.

### 7.4. Визначення відносного запасу палива

У розд. 6 було одержано таку формулу для розрахунку відносного запасу палива при довільній траєкторії:

$$\mu_t = 1 - (1 - e^{\xi \mu_{ta}}) e^{-(\mu_{tv} + \mu_{th})},$$

де  $\mu_{ta} = \frac{1}{m_0 l} \int_0^{t_k} X_a dt$ ;  $\xi = \mu_{tv_{сер}} + 0,5 \mu_{th}$ ;  $t_k$  – час польоту ступеня ЛА.

Спочатку треба розрахувати величини  $\mu_{tv}$ ,  $\mu_{th}$ , і  $\mu_{tv_{сер}}$ . При визначенні  $\mu_{th}$  кут  $\theta$  можна вважати постійним і таким, що дорівнює деякому середньому куту  $\theta_{сер}$ :

$$\mu_{tv} = \frac{V_k - V_0}{l}; \quad \mu_{tv_{cep}} = \frac{V_k - V_{cep}}{l}; \quad \mu_{th} = \frac{gt_k \sin \theta_{cep}}{l}.$$

Далі в масштабі слід накреслити вибрану траєкторію польоту ЛА. Формулу для розрахунку  $\mu_{ta}$  подамо в такому вигляді:

$$\mu_{ta} = \int_0^{t_k} \frac{c_{xa} S}{l m_0} \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{2} dt = \frac{1}{2lp_0} \int_0^{t_k} c_{xa} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 dt, \quad (7.17)$$

де  $p_0 = \frac{m_0}{S}$  – стартове питоме навантаження на крило.

Інтеграл у формулі (7.17) візьмемо чисельно:

$$\mu_{ta} = \frac{1}{2lp_0} \sum_{i=1}^n f_i \Delta t, \quad (7.18)$$

де  $n$  – кількість інтервалів часу ( $n \geq 5$ );  $\Delta t = t_k / n$ ;  $f_i = c_{xai_{cep}} \rho_{\infty i_{cep}} V_{\infty i_{cep}}^2$ ;  $c_{xai_{cep}}$ ,  $\rho_{\infty i_{cep}}$ ,  $V_{\infty i_{cep}}$  – величини на середині інтервалу.

Коефіцієнти визначаються так:

$$c_{xai_{cep}} = 0,04 + 0,02a_{\infty i_{cep}} / V_{\infty i_{cep}} \text{ для } M \geq 1, \quad (7.19)$$

$$c_{xai_{cep}} = 0,03 \text{ для } M < 1.$$

Значення  $\rho_{\infty i_{cep}}$  і  $a_{\infty i_{cep}}$  можна знайти для всіх ділянок за визначеною середньою висотою на ділянці, яка розглядається. Ці величини можна знайти з допомогою графіків або таблиць стандартної атмосфери. Апроксимацію цих величин наведено в формулах (4.9) і (4.10).

Усі розрахунки доцільно заносити до таблиць.

Спочатку розраховують швидкості в кінці кожної ділянки й середні швидкості на ділянках і заносять ці значення до табл. 7.1.

Далі за формулою (7.16) визначають шлях  $S_i$ , який пролітає ЛА за час  $t_i$ , і приріст шляху  $\Delta S_i$  за інтервал часу  $\Delta t$  (табл. 7.2).

Таблиця 7.1

$i$	$t_i$	$V_{\infty i}$	$V_{\infty i_{cep}}$
1	$\Delta t$	$V_{\infty 1}$	$(V_{\infty 0} + V_{\infty 1})/2$
2	$2\Delta t$	$V_{\infty 2}$	$(V_{\infty 1} + V_{\infty 2})/2$
...	...	...	...

Таблиця 7.2

$i$	$t_i$	$S_i$	$\Delta S_i$
1	$\Delta t$	$S_1$	$\Delta S_1 = S_1$
2	$2\Delta t$	$S_2$	$\Delta S_2 = S_2 - S_1$
3	$3\Delta t$	$S_3$	$\Delta S_3 = S_3 - S_2$
...	...	...	...

Після заповнення табл. 7.2 на траєкторії польоту ЛА з урахуванням масштабу відкладають приріст шляху  $\Delta S_i$  і знаходять для кожної ділянки середню висоту  $h_{i\text{сер}}$  (рис. 7.1).

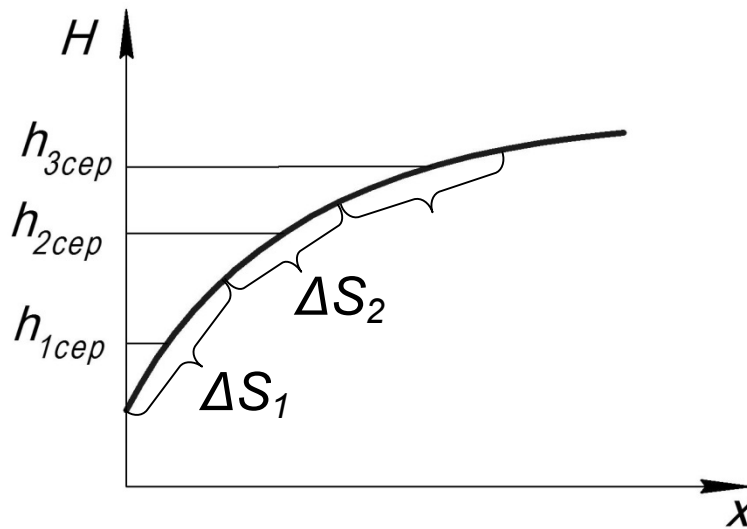


Рис. 7.1. До визначення середньої висоти польоту

Далі заповнюють табл. 7.3.

Таблиця 7.3

$i$	$t_i$	$v_{\infty i\text{сер}}^2$	$h_{i\text{сер}}$	$\rho_{\infty i\text{сер}}$	$a_{\infty i\text{сер}}$	$C_{xai\text{сер}}$	$f_i$	$f_i \Delta t$
1	$0,5\Delta t$							
2	$1,5\Delta t$							
3	$2,5\Delta t$							
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Значення  $\mu_{ta}$  розраховують за формулою

$$\mu_{ta} = \frac{1}{2I\rho_0} \mathbf{c}, \quad (7.20)$$

(де  $\mathbf{c}$  – сума всіх елементів останнього стовпця табл. 7.3), а відносний запас палива – за формулою (6.17).

## 8. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОГО ЗАПАСУ ПАЛИВА ДЛЯ ДВОСТУПЕНЕВОГО ЛА І ЛА З ДВОРЕЖИМНИМ ДВИГУНОМ

Розглянемо спочатку двоступеневий ЛА.

Відносний запас палива першого  $\mu_{t1}$  і другого  $\mu_{t2}$  ступенів ЛА можна визначити за однією з методик, які було наведено вище.

Якщо початкова швидкість ЛА дорівнює нулю і першим ступенем є прискорювач, який розганяє ЛА до швидкості  $v_0$ , то відносний запас палива наближено можна розрахувати за формулою

$$\mu_{t1} \approx \frac{1,1}{l/v_0 + 0,5}, \quad (8.1)$$

де  $l$  – питомий імпульс палива.

Сумарний запас палива  $m_t$  визначається формулою

$$m_t = \mu_{t1}m_{01} + \mu_{t2}m_{02}, \quad (8.2)$$

де  $m_{01}$  і  $m_{02}$  – початкові маси першого й другого ступенів ЛА.

Залежність між початковими масами ступенів має такий вигляд:

$$m_{02} = m_{01}(1 - \mu_{t1} - \mu_{t1}\alpha_d), \quad (8.3)$$

де  $\alpha_d$  – коефіцієнт конструктивної досконалості двигуна.

З урахуванням (8.2) і (8.3) сумарний відносний запас палива двоступеневого ЛА можна знайти за формулою

$$\mu_t = \frac{m_t}{m_{01}} = \mu_{t1} + \mu_{t2}[1 - \mu_{t1}(1 + \alpha_d)]. \quad (8.4)$$

Маса одноступеневого ЛА з дворезимним двигуном на початку роботи другого режиму визначається формулою

$$m_{02} = m_{01}(1 - \mu_{t1}). \quad (8.5)$$

З урахуванням (8.2) і (8.5) вираз для сумарного відносного запасу палива одноступеневого ЛА з дворезимним двигуном набуває вигляду

$$\mu_t = \frac{m_t}{m_{01}} = \mu_{t1} + \mu_{t2}(1 - \mu_{t1}). \quad (8.6)$$

## 9. НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ БАЛІСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛА ЗА НАЯВНОСТІ ПАСИВНОЇ ДІЛЯНКИ ТРАЄКТОРІЇ

Комбінація активної (коли двигун працює) і пасивної (коли двигун не працює) ділянок траєкторії дає можливість одержувати *високі середні швидкості*, більші від кінцевої швидкості, і при цьому *запас палива може бути значно меншим* за запас палива при повністю активному польоті.

Для деяких типів ЛА (особливо для висотних ЛА класу «повітря – повітря» невеликої й середньої дальності) пасивна ділянка траєкторії може становити (50...70) % від усієї траєкторії польоту.

Пасивна ділянка траєкторії може бути доцільною, якщо виконується нерівність

$$V_{сер} > \frac{V_0 + V_k}{2}. \quad (9.1)$$

У цьому розділі наведено методику наближеного розрахунку часу активного польоту й основних характеристик пасивної ділянки траєкторії.

### 9.1. Визначення часу активного польоту

Профіль швидкостей (рис. 9.1) на активній (крива ABC) і пасивній (крива CED) ділянках траєкторії в першому наближенні апроксимують лінійними функціями. На активній ділянці (лінія AF)

$$V_{\infty 1} = v_0 + bt, \quad (9.2)$$

на пасивній (лінія FD) –

$$V_{\infty 2} = v_k - \dot{v}_k(t_k - t), \quad (9.3)$$

де  $\dot{v}_k = -g \left( \frac{\sigma_k}{1 - \mu_t} q_k + \sin \theta_k \right)$  – прискорення наприкінці польоту;

$g$  – прискорення вільного падіння;  $\sigma_k = \frac{c_{xa} S}{m_0 g}$  – балістичний коефіцієнт

наприкінці польоту;  $q_k$  і  $\theta_k$  – швидкісний натиск і кут нахилу траєкторії наприкінці польоту.

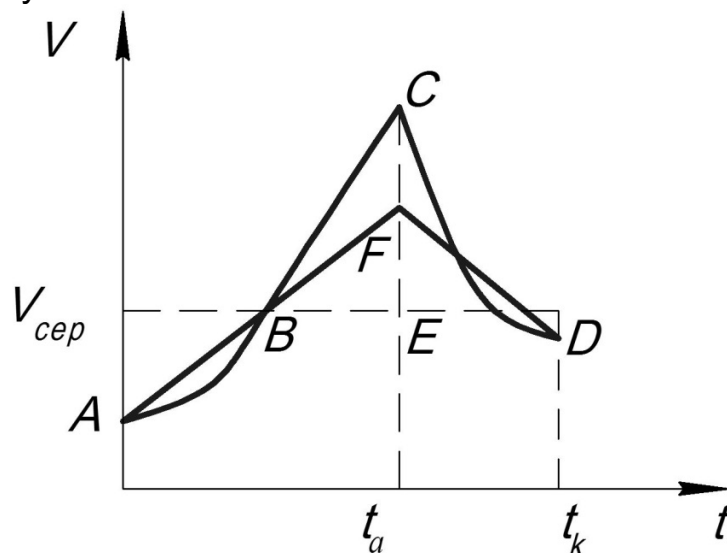


Рис. 9.1. Профіль швидкостей

З умови  $V_{\infty 1}(t_a) = V_{\infty 2}(t_a)$ , де  $t_a$  – час активного польоту,

$$b = \frac{1}{t_a} [v_k - v_0 - \dot{v}_k(t_k - t_a)]. \quad (9.4)$$

Із вимоги забезпечення заданої середньої швидкості

$$v_{\text{сеп}} = \left( \int_0^{t_a} V_{\infty 1} dt + \int_{t_a}^{t_k} V_{\infty 2} dt \right) / t_k \quad (9.5)$$

з урахуванням (9.4) знайдемо

$$t_a = t_k (2v_{\text{сеп}} - 2v_k + \dot{v}_k t_k) / (v_0 - v_k + \dot{v}_k t_k). \quad (9.6)$$

Формула (9.6) має прийнятну точність при пасивному польоті невеликої тривалості ( $t_a > 0,5t_k$ ) за умови, що  $\dot{v}_k < 0$ .

Підвищити точність можна шляхом параболічної апроксимації активної й пасивної ділянок польоту [2].

У цьому випадку за величиною  $t_a$ , знайденою за формулою (9.6), визначають початкове прискорення на активній і пасивній ділянках польоту:

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= g(\bar{P} - \sigma_0 q_0 - \sin \theta_0), \\ \dot{v}_a &= -g \left( \frac{\sigma_a q_a}{1 - \mu_t} + \sin \theta_a \right). \end{aligned} \quad (9.7)$$

де  $\bar{P} = \frac{\mu_t l}{gt_a}$  – тягооснащеність ЛА.

Подамо швидкість активного польоту як

$$V_{\infty 1} = v_0 + \dot{v}_0 t + pt^2, \quad (9.8)$$

а пасивного –

$$V_{\infty 2} = r + st + ut^2. \quad (9.9)$$

Значення коефіцієнтів у рівнянні (9.9) знаходимо з умов забезпечення величин  $\dot{v}_a$ ,  $\dot{v}_k$  і  $v_k$ :

$$\begin{aligned} r &= v_k - \dot{v}_k t_k + 0,5t_k^2 (\dot{v}_k - \dot{v}_a) / (t_k - t_a), \\ s &= \dot{v}_k - t_k (\dot{v}_k - \dot{v}_a) / (t_k - t_a), \\ u &= 0,5(\dot{v}_k - \dot{v}_a) / (t_k - t_a). \end{aligned} \quad (9.10)$$

З умови  $V_{\infty 1}(t_a) = V_{\infty 2}(t_a)$  знаходимо

$$p = [v_k - v_0 - \dot{v}_0 t_a - 0,5(\dot{v}_k - \dot{v}_a)(t_k - t_a)] / t_a^2. \quad (9.11)$$

З умови (9.5) знайдемо

$$\frac{t_a}{t_k} = \frac{1}{2a} (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad (9.12)$$

де

$$a = \frac{t_k}{6} (\dot{v}_0 - \dot{v}_k);$$

$$b = \frac{2}{3} (v_k - v_0) - \frac{t_k}{2} \left( \dot{v}_k + \frac{\dot{v}_a}{3} \right);$$

$$c = v_k - v_{сер} - \frac{t_k}{6} (2\dot{v}_k + \dot{v}_a).$$

Знак перед коренем у формулі (9.12) вибираємо, зважаючи на умову  $1 > \frac{t_a}{t_k} > 0$ .

## 9.2. Визначення параметрів пасивної ділянки траєкторії

Розглянемо два окремі випадки, які є найбільш характерними для пасивної ділянки траєкторії (рис. 9.2). У першому випадку кут нахилу траєкторії на пасивній ділянці приблизно дорівнює нулю, у другому – є приблизно постійним.

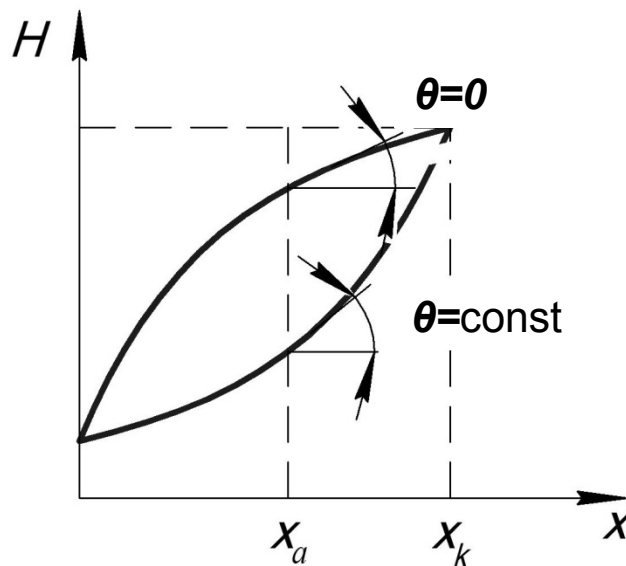


Рис. 9.2. Форма траєкторії

Уважаємо, що в кінці активної ділянки відомими є координати ЛА  $x_a$  і  $H_a$ , швидкість  $v_a$  і відносний запас палива  $\mu_t$ .

1. Розглянемо випадок пасивної ділянки з кутом нахилу траєкторії  $\theta \approx 0$ . Рівняння руху в цьому випадку має такий вигляд:



$$\frac{dV_\infty}{dt} = -\frac{X_a}{m_0(1-\mu_t)} = -\frac{c_{xa}}{p_0(1-\mu_t)} \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}, \quad (9.13)$$

де  $p_0 = m_0 / S$  – стартове питоме навантаження на крило.

Залежність  $c_{xa} = c_{xa}(M)$  можна подати у вигляді

$$c_{xa} = k_0 + \frac{k_1}{M} = k_0 + \frac{k_1 a_\infty}{V_\infty}. \quad (9.14)$$

Підставимо (9.14) у (9.13):

$$\frac{dV_\infty}{dt} = -\frac{k_0 \rho_\infty}{2p_0(1-\mu_t)} V_\infty^2 - \frac{k_1 a_\infty \rho_\infty}{2p_0(1-\mu_t)} V_\infty; \quad (9.15)$$

$$\frac{dV_\infty}{dt} + A_1 V_\infty^2 + A_2 V_\infty = 0, \quad (9.16)$$

$$\text{де } A_1 = \frac{k_0 \rho_\infty}{2p_0(1-\mu_t)}, \quad A_2 = \frac{k_1 a_\infty \rho_\infty}{2p_0(1-\mu_t)}.$$

Отримали нелінійне диференціальне рівняння першого порядку. Для лінеаризації рівняння введемо нову змінну

$$y(t) = A_1 + \frac{A_2}{V_\infty(t)}, \quad (9.17)$$

тоді

$$V_\infty(t) = \frac{A_2}{y(t) - A_1}, \quad \frac{dV_\infty}{dt} = -\frac{A_2}{(y(t) - A_1)^2} \frac{dy}{dt}. \quad (9.18)$$

Підставивши (9.18) у (9.16), одержимо

$$\frac{dy}{dt} - A_2 y = 0. \quad (9.19)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\ln(y) = A_2(t + c), \quad (9.20)$$

де  $c$  – довільна стала, яку можна знайти з умови, що при  $t = t_a$   $V_\infty = v_a$ .  
Урахувавши (9.17), маємо

$$\ln\left(A_1 + \frac{A_2}{v_a}\right) = A_2(t_a + c); \quad (9.21)$$

$$c = \frac{1}{A_2} \ln\left(A_1 + \frac{A_2}{v_a}\right) - t_a.$$

Підставимо (9.21) у (9.20), урахувавши формулу (9.17), а також те, що  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{k_0}{k_1 a_\infty}$ :

$$V_\infty(t) = \frac{v_a}{\left(1 + \frac{k_0}{k_1 a_\infty} v_a\right) e^{A_2(t-t_a)} - \frac{k_0}{k_1 a_\infty} v_a}. \quad (9.22)$$

Шлях, який пролітає ЛА на пасивній ділянці траєкторії за час  $t$ , визначається формулою

$$S(t) = \int_{t_a}^t V_\infty(t) dt = c_1 \ln\left(\frac{v_a}{V_\infty(t)}\right) - \frac{k_1 a_\infty}{k_0} (t - t_a), \quad (9.23)$$

де  $c_1 = \frac{k_1 a_\infty}{k_0 A_2}$ .

Для наближеного розрахунку можна взяти  $k_0 \approx 0,04$ ,  $k_1 \approx 0,02$ .

2. Розглянемо випадок пасивної ділянки з кутом нахилу траєкторії  $\theta \approx \text{const}$ . Рівняння руху в цьому випадку має вигляд

$$\frac{dV_\infty}{dt} = -\sigma \frac{\rho_\infty}{2(1-\mu_t)} V_\infty^2 - g \sin \theta, \quad (9.24)$$

де  $\sigma = \frac{c_{xa}}{\rho_0}$  – балістичний коефіцієнт.

З урахуванням (9.14)

$$\sigma = K + \frac{N}{M}, \quad (9.25)$$

де  $K = k_0 / \rho_0$ ,  $N = k_1 / \rho_0$ .

Подамо балістичний коефіцієнт у більш простому вигляді:

$$\sigma \approx \frac{\bar{N}}{M}, \quad (9.26)$$

де  $\bar{N}$  – величина, яку підбирають таким чином, щоб при середньому значенні числа Маха  $M_{\text{сер}}$  на пасивній ділянці траєкторії значення балістичного коефіцієнта, розраховане за формулою (9.26), збігалось зі значенням цього коефіцієнта, розрахованим за формулою (9.25):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{N}}{M_{\text{сер}}} &= K + \frac{N}{M_{\text{сер}}}; \\ \bar{N} &= N + KM_{\text{сер}}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Підставляємо (9.26) у (9.24):

$$\frac{dV_{\infty}}{dt} = -\frac{\bar{N}a_{\infty}\rho_{\infty}}{2(1-\mu_t)}V_{\infty} - g \sin \theta; \quad (9.28)$$

$$\frac{dV_{\infty}}{dt} + A_1V_{\infty} + g \sin \theta = 0, \quad (9.29)$$

де  $A_1 = \frac{\bar{N}a_{\infty}\rho_{\infty}}{2(1-\mu_t)}$ .

Зі змінням висоти польоту змінюється і швидкість звуку  $a_{\infty}$  й густина повітря  $\rho_{\infty}$ . Візьмемо значення цих величин на деякій середній висоті пасивної ділянки траєкторії (на висотах, більших за 11 км, це не спричиняє великих похибок). Тоді рівняння (9.29) можна розглядати як лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами.

Для розв'язання рівняння (9.29) уведемо нову функцію

$$y(t) = A_1V_{\infty}(t) + g \sin \theta, \quad (9.30)$$

тоді

$$V_{\infty}(t) = \frac{1}{A_1}[y(t) - g \sin \theta], \quad (9.31)$$

$$\frac{dV_{\infty}}{dt} = \frac{1}{A_1} \frac{dy}{dt}.$$

Підставивши (9.31) у (9.29) і виконавши елементарні перетворення, маємо

$$\frac{dy}{y} = -A_1 dt. \quad (9.32)$$

Розв'язком рівняння (9.32) є

$$\ln y = -A_1(t + c), \quad (9.33)$$

або

$$\ln(A_1V + g \sin \theta) = -A_1(t + c), \quad (9.34)$$

де  $c$  – довільна стала, яку можна знайти з умови, що при  $t = t_a$   $V_{\infty} = v_a$ :

$$\ln(A_1v_a + g \sin \theta) = -A_1(t_a + c), \quad (9.35)$$

$$c = -t_a - \frac{1}{A_1} \ln(A_1v_a + g \sin \theta). \quad (9.36)$$

Підставивши (9.36) у (9.34) і виконавши елементарні перетворення, одержимо профіль швидкостей на пасивній ділянці траєкторії

$$V_{\infty}(t) = \left( v_a + \frac{1}{A_1} g \sin \theta \right) e^{-A_1(t-t_a)} - \frac{1}{A_1} g \sin \theta. \quad (9.37)$$

Шлях, який пролітає ЛА на пасивній ділянці траєкторії за час  $t$ , визначається формулою

$$S(t) = \frac{1}{A_1} [v_a - V_\infty(t) - g(t - t_a) \sin \theta]. \quad (9.38)$$

### 9.3. Визначення оптимального часу активного польоту

Розглянемо задачу оптимізації часу активного польоту за критерієм мінімуму запасу палива.

Задано такі величини:  $V_0, V_k$  – початкова й кінцева швидкість ЛА;  $h_0, h_k$  – початкова й кінцева висота польоту ЛА;  $x_k, t_k$  – горизонтальна дальність і час перехоплення цілі.

Як проектні параметри можна вибрати час активного польоту  $t_a$ , швидкість у кінці активної ділянки траєкторії  $v_a$  і горизонтальну дальність активної ділянки траєкторії  $x_a$ .

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mu_t(t_a, v_a, x_a) &\rightarrow \min; \\ 0 \leq t_a \leq t_k; v_a &\geq 0; v_{kp} \geq v_k; \\ s_{tz} + \Delta s &\geq s_a + s_p \geq s_{tz}; n_x \leq n_{x \max}, \end{aligned} \quad (9.39)$$

де  $v_{kp}$  – швидкість ЛА наприкінці польоту;  $s_a, s_p, s_{tz}, \Delta s$  – довжина шляху на активній і пасивній ділянках траєкторії, загальна довжина шляху до цілі, допуск на довжину траєкторії;  $n_x, n_{x \max}$  – поздовжнє перевантаження ЛА та його допустиме значення.

Для визначення відносного запасу палива можна використати методику, яку наведено в розд. 4, – політ по прямолінійній траєкторії з постійною тягою двигуна.

Максимальне поздовжнє перевантаження

$$n_x = \frac{P}{m_0(1 - \mu_t)g} = \frac{m_0 \mu_t l}{t_a m_0(1 - \mu_t)g} = \frac{\mu_t l}{t_a g(1 - \mu_t)}, \quad (9.40)$$

де  $l$  – питомий імпульс палива;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $P$  – тяга двигуна.

Максимальне допустиме поздовжнє перевантаження становить близько 40 одиниць.

Відстані  $s_a$  і  $s_{tz}$  визначаються формулами:

$$s_a = x_a / \cos \theta, \quad (9.41)$$

$$s_{tz} = x_k / \cos \theta, \quad (9.42)$$

де  $\theta = \arctg[(h_k - h_0) / x_k]$  – кут нахилу траєкторії.

Відстань  $s_p$  розраховують за формулою (9.23) або (9.38).

Задача математичного програмування (9.39) розв'язується в будь-якому інтегрованому середовищі, де це є можливим.

## 10. ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГРАМИ РОБОТИ ДВИГУНА

Програма роботи двигуна – це залежність тяги двигуна від часу.

Тяга двигуна визначається формулою

$$P(t) = m_c(t)l = -\frac{dm}{dt}l, \quad (10.1)$$

тобто тяга залежить від секундної витрати палива  $m_c$ , яка, у свою чергу, залежить від стартової маси  $m_0$ .

На етапі балістичного проектування стартова маса є невідомою, тому розраховують відносну секундну витрату палива

$$\mu_c = m_c / m_0. \quad (10.2)$$

При постійній тязі

$$m_c = \frac{m_t}{t_a} = \frac{m_0 \mu_t}{t_a}; \quad (10.3)$$

$$\mu_c = \frac{\mu_t}{t_a}.$$

Знайдемо  $m_c$  у загальному випадку, для чого здиференціюємо (6.11):

$$m_c(t) = -\frac{dm}{dt} = \beta(t) + \alpha(t)e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau} \left( m_0 - \int_0^t \beta(\tau) e^{\int_0^\tau \alpha(\tau_1) d\tau_1} d\tau \right), \quad (10.4)$$

$$\text{де } \alpha(t) = \frac{1}{l} \left( \frac{dV_\infty}{dt} + g \sin \theta \right); \beta(t) = \frac{X_a}{l}.$$

Поділимо праву й ліву частини рівняння (10.4) на  $m_0$  з урахуванням (6.14) і (6.15):

$$\mu_c(t) = \frac{c_{xa} \rho_\infty V_\infty^2}{2lp_0} +$$

$$+ \alpha(t) e^{-[\mu_{tv}(t) + \mu_{th}(t)]} \left( 1 - \frac{1}{2lp_0} \int_0^t c_{xa} \rho_\infty V_\infty^2 e^{(\mu_{tv\tau} + \mu_{th\tau})} d\tau \right), \quad (10.5)$$

де  $\rho_0 = m_0 / S$  – питоме масове навантаження на крило;

$$\mu_{tv}(t) = \frac{V_\infty(t) - v_0}{l}; \mu_{th}(t) = \frac{g}{l} \int_0^t \sin \theta d\tau.$$

Використовуючи теорему про середнє, можна одержати простішу формулу для обчислення  $\mu_c$ :

$$\mu_c(t) = \frac{c_{xa} \rho_\infty V_\infty^2}{2l\rho_0} + \alpha(t) e^{-[\mu_{tv}(t) + \mu_{th}(t)]} [1 - e^{\xi \mu_{ta}(t)}], \quad (10.6)$$

$$\text{де } \xi = \int_0^{t_{cep}} \alpha(t) dt \approx 0,5[\mu_{tv}(t) + \mu_{th}(t)]; t_{cep} \approx 0,5t;$$

$$\mu_{ta}(t) = \frac{1}{2l\rho_0} \int_0^t c_{xa} \rho_\infty V_\infty^2 d\tau.$$

## 11. НАБЛИЖЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГРАМИ РОБОТИ ДВИГУНА ПРИ ДОВІЛЬНІЙ ТРАЄКТОРІЇ

Спочатку необхідно розрахувати час активного польоту  $t_a$ , який розбивається на  $n$  ділянок ( $n \geq 5$ ). Бажано, щоб ці інтервали збігалися з інтервалами, які використовувалися під час визначення  $\mu_t$  (підрозд. 7.4). Якщо  $t_a$  не є кратним  $\Delta t$ , яке використовується в формулі (7.19), то його краще зробити кратним.

Тоді для кожного  $i$ -го інтервалу часу (наприкінці цього часу)

$$\mu_{ci} = \frac{f_i}{2l\rho_0} + \alpha_i e^{-(\mu_{tvi} + \mu_{thi})} (1 - e^{\xi_i \mu_{tai}}), \quad (11.1)$$

$$\text{де } f_i = c_{xai} \rho_{\infty i} V_{\infty i}^2; \alpha_i = \frac{1}{l} \left( \left. \frac{dV_\infty}{dt} \right|_{t=t_i} + g \sin \theta_{cep} \right);$$

$$\mu_{tvi} = \frac{V_{\infty i} - v_0}{l}; \mu_{thi} = \frac{g \sin \theta_{cep}}{l} t_i;$$

$$\xi_i = 0,5(\mu_{tvi} + \mu_{thi});$$

$$\mu_{tai} = \frac{1}{2l\rho_0} \sum_{j=1}^i (f_{jcep} \Delta t); f_{jcep} = c_{xajcep} \rho_{\infty jcep} V_{\infty jcep}^2.$$

Значення  $f_{j\text{сеп}} \Delta t$  треба брати з останнього стовпця табл. 7.3, тобто, щоб знайти суму  $\sum_{j=1}^i (f_{j\text{сеп}} \Delta t)$ , треба скласти з першого по  $i$ -й рядки останнього стовпця табл. 7.3.

У початковий момент часу ( $t = 0$ )

$$\mu_{c0} = \frac{c_{xa0} \rho_{\infty 0} v_0^2}{2lp_0} + \frac{1}{l} \left( \frac{dV_{\infty}}{dt} \Big|_{t=0} + g \sin \theta_{\text{сеп}} \right). \quad (11.2)$$

Усі розрахунки доцільно вести за допомогою табл. 11.1.

Таблиця 11.1

$i$	$t_j$	$\alpha_j$	$\mu_{tvi}$	$\mu_{thi}$	$e^{-(\mu_{tvi} + \mu_{thi})}$	$\xi_j$	$e^{\xi_j}$	$\langle 3 \rangle \cdot \langle 6 \rangle$	$a_j$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0								
1	$\Delta t$								
2	$2\Delta t$								
3	$3\Delta t$								
...	...								

Закінчення табл. 11.1

$c_{xi}$	$\rho_{\infty i}$	$v_{\infty i}^2$	$\frac{f_i}{2lp_0}$	$\mu_{tai}$	$e^{\xi_i} \mu_{tai}$	$\mu_{ci}$	$\mu_{ci\text{сеп}}$
11	12	13	14	15	16	17	18
						$\mu_{c0}$	
						$\mu_{c1}$	$(\mu_{c0} + \mu_{c1})/2$
						$\mu_{c2}$	$(\mu_{c1} + \mu_{c2})/2$
						...	...

Для контролю розрахунків необхідно скласти елементи останнього стовпця табл. 11.1 і цю суму помножити на  $\Delta t$ . При  $t_k = t_a$  результат має збігатися із запасом палива, який було знайдено за методикою, наведеною в розд. 7. При  $t_a < t_k$  ці результати повинні бути близькими.

## 12. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ БАЛІСТИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОВНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РУХУ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА

Повна система рівнянь руху містить динамічні (1.1) і кінематичні (1.2) рівняння і рівняння методу наведення (1.3).

Якщо задатися профілем швидкостей, то система розпадеться на дві автономні системи: систему динамічних рівнянь і систему кінематичних рівнянь. У цьому випадку спочатку розв'язують систему кінематичних рівнянь і знаходять усі кінематичні параметри. Потім за формулами (6.16) або (6.17) і (10.5) або (10.6) визначають запас палива й програму роботи двигуна.

Алгоритм визначення кінематичних параметрів:

- 1) довжину траєкторії беруть такою, що дорівнює похилій дальності ( $\mathbf{S} = \mathbf{D}$ );
- 2) визначають середню швидкість  $\mathbf{v}_{\text{сеп}} = \mathbf{S} / t_k$ ;
- 3) знаходять профіль швидкостей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ ;
- 4) інтегрують систему (1.2) і (1.3);
- 5) порівнюють одержаний промах  $|\mathbf{r}|$  (відстань між ЛА й ціллю в момент часу  $t_k$ ) з максимально допустимим: якщо одержаний промах є меншим за допустимий, то розрахунки припиняють, інакше – беруть  $\mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{r}$  і переходять до п. 2.

Якщо задатися програмою роботи двигуна, то доведеться розв'язувати повну систему рівнянь руху. У цьому випадку алгоритм розрахунків має такий вигляд:

- 1) знаючи час активного польоту  $t_a$  ( $t_a \leq t_k$ ) і середньостатистичну масу ЛА  $m_0$ , як перше наближення беруть значення відносного запасу палива  $\mu_t \approx 0,3$ ;

$$2) m_c = \frac{m_0 \mu_t}{t_a};$$

- 3) інтегрують повну систему рівнянь руху;

4) якщо  $|\mathbf{r}(t_k)| > \Delta r$  і  $\mathbf{r}(t_k) > \mathbf{0}$  або  $|\mathbf{r}(t_k)| < \Delta r$  і  $\mathbf{v}(t_k) < \mathbf{v}_k - \Delta \mathbf{v}$  ( $\Delta r$  – допустимий промах,  $\mathbf{v}_k$  – кінцева швидкість,  $\Delta \mathbf{v}$  – допуск на кінцеву швидкість), то  $\mu_t = \mu_t + \Delta \mu_t$  ( $\Delta \mu_t$  – абсолютна точність визначення  $\mu_t$ ), і повертаються до п. 2; якщо  $|\mathbf{r}(t_k)| > \Delta r$  і  $\mathbf{r}(t_k) < \mathbf{0}$  або  $|\mathbf{r}(t_k)| < \Delta r$  і



$v(t_k) > v_k + \Delta v$ , то  $\mu_t = \mu_t - \Delta\mu_t$ , і повертаються до п. 2; якщо  $|r(t_k)| < \Delta r$  і  $v_k + \Delta v \geq v(t_k) \geq v_k - \Delta v$ , то розрахунки припиняють.

Назвемо цей алгоритм алгоритмом **A**.

При розглянутому підході можна розв'язати таку оптимізаційну задачу:

$$\begin{aligned} \mu_t(t_a) &\rightarrow \min; \\ t_{a \min} &\leq t_a \leq t_k. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Це задача одновимірної оптимізації, кожну пробну точку якої визначають за алгоритмом **A**.

Значення  $t_{a \min}$  можна наближено розрахувати за такою формулою:

$$t_{a \min} \approx \frac{\mu_t I}{n_{x \max} g(1 - \mu_t)}. \quad (12.2)$$

Після визначення відносного запасу палива треба скорегувати стартову масу  $m_0$  і знову провести розрахунок  $\mu_t$ , повторювати цю операцію доти, доки процес не стане узгодженим.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Лебедев, А. А. Динамика полёта [Текст] / А. А. Лебедев, Л. С. Чернобровкин. – М. : Оборонгиз, 1962. – 549 с.
2. Дракин, И. И. Основы проектирования беспилотных летательных аппаратов с учетом экономической эффективности [Текст] / И. И. Дракин. – М. : Машиностроение, 1973. – 224 с.

## ЗМІСТ

1. Повна система рівнянь руху літального апарата. Спрощувальні припущення .....	3
2. Визначення відносного запасу палива за відсутності аеродинамічних і гравітаційних сил.....	4
3. Визначення відносного запасу палива для крилатих ракет великої дальності.....	5
4. Визначення відносного запасу палива при похилому прямолінійному русі з постійною тягою двигуна .....	6
5. Фізичне значення величин $\mu_{tv}$ , $\mu_{tv_{cep}}$ , $\mu_{th}$ , $\mu_{ta}$ .....	10
6. Визначення відносного запасу палива при довільній траєкторії.....	11
7. Наближене обчислення відносного запасу палива при довільній траєкторії .....	14
7.1. Вибір форми траєкторії .....	14
7.2. Вибір профілю швидкостей.....	15
7.3. Узгодження профілю швидкостей і форми траєкторії.....	17
7.4. Визначення відносного запасу палива .....	17
8. Визначення відносного запасу палива для двоступеневого ЛА і ЛА з дворежимним двигуном .....	20
9. Наближене обчислення балістичних характеристик ЛА за наявності пасивної ділянки траєкторії.....	20
9.1. Визначення часу активного польоту .....	21
9.2. Визначення параметрів пасивної ділянки траєкторії.....	23
9.3. Визначення оптимального часу активного польоту .....	27
10. Визначення програми роботи двигуна .....	28
11. Наближене визначення програми роботи двигуна при довільній траєкторії .....	29
12. Розв'язання задачі балістичного проектування з використанням повної системи рівнянь руху літального апарата .....	31
Бібліографічний список .....	32
Додаток .....	34

## Стандартна атмосфера

Геометрична висота, м	Температура, °С	Температура, К	Тиск, мбар (1 мбар = 100 Па)	Густина, кг/м <sup>3</sup>	Швидкість звуку, м/с
0	15	288,15	1012,565	1,225	340,28
500	11,75	284,9	953,883	1.16727	338,36
1000	8,5	281,65	898,1504	1,1117	336,43
1500			845,0834		334,48
2000	2,004	275,15	794,437	1,0066	332,52
2500			746,4268		330,55
3000	-4,491	268,66	700,7784	9.0941·10 <sup>-1</sup>	328,56
3500			657,2958		326,56
4000	-10,984	262,16	616,1456	8.1942·10 <sup>-1</sup>	324,56
4500			577,1078		322,54
5000	-17,474	255,68	540,0878	7.3654·10 <sup>-1</sup>	320,51
5500			505,0038		318,41
6000	-23,963	249,19	471,8112	6.6022·10 <sup>-1</sup>	316,41
6500			440,2944		314,34
7000	-30,45	242,7	410,6984	5.9010·10 <sup>-1</sup>	312,25
7500			382,641		310,15
8000	-36,935	236,22	356,2398	5.2591·10 <sup>-1</sup>	308,05
8500			331,2498		305,92
9000	-43,417	229,733	307,7004	4.6712·10 <sup>-1</sup>	303,78
9500			285,5916		301,63
10000	-50	223,252	264,7274	4.1357·10 <sup>-1</sup>	299,45
10500			245,1176		297,27
11000			226,7426		295,07
11500			209,622		295,07
12000	-56,5	216,65	193,7754	3.118·10 <sup>-1</sup>	295,07
12500	-56,5	216,65	179,1342		295,07
13000	-56,5	216,65	165,6102		295,07
13500	-56,5	216,65	153,1054		295,07
14000	-56,5	216,65	141,5414	2.2776·10 <sup>-1</sup>	295,07
14500	-56,5	216,65	130,8594		295,07
15000	-56,5	216,65	120,9908		295,07
15500	-56,5	216,65	110,7158		295,07
16000	-56,5	216,65	102,3544	1.664·10 <sup>-1</sup>	295,07
16500	-56,5	216,65	94,63514		295,07
17000	-56,5	216,65	87,49691		295,07
17500	-56,5	216,65	80,898		295,07
18000	-56,5	216,65	74,7967	1.2159·10 <sup>-1</sup>	295,07
18500	-56,5	216,65	69,15712		295,07

## Закінчення додатка

Геометрична висота, м	Температура, °С	Температура, К	Тиск, мбар (1 мбар = 100 Па)	Густина, кг/м <sup>3</sup>	Швидкість звуку, м/с
19000	-56,5	216,65	63,94434		295,07
19500	-56,5	216,65	59,12344		295,07
20000	-56,5	216,65	54,66823	$8,887 \cdot 10^{-2}$	295,07
21000	-56,5	216,65	46,74042		295,07
22000	-56,5	216,65	39,964	$6,4966 \cdot 10^{-2}$	295,07
23000	-56,5	216,65	34,17116		295,07
24000	-56,5	216,65	29,21931	$4,7501 \cdot 10^{-2}$	295,07
25000	-56,5	216,65	24,9872		295,07
26000	-50,606	222,544	21,3885	$3,4336 \cdot 10^{-2}$	296,93
27000			18,34367		298,78
28000	-48,623	224,527	15,77026	$2,4701 \cdot 10^{-2}$	300,61
29000			13,57612		302,43
30000	-46,641	226,509	11,70693	$1,7901 \cdot 10^{-2}$	304,25
40000	-5	268	2,9	$3,9 \cdot 10^{-3}$	
50000	3	276	0,97	$1,15 \cdot 10^{-3}$	330
60000	-13	260	0,28	$3,9 \cdot 10^{-4}$	
70000	-54	219	0,08	$1,1 \cdot 10^{-4}$	
80000	-68	205	0,014	$2,7 \cdot 10^{-5}$	283
90000	-63	210	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-6}$	
100000	-43	230	$5,8 \cdot 10^{-4}$	$8,8 \cdot 10^{-7}$	
110000	-13	260	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-7}$	
120000	27	300	$6 \cdot 10^{-5}$	$5,6 \cdot 10^{-8}$	
150000	177	450	$5 \cdot 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^{-9}$	
200000	427	700	$5 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-10}$	
250000	527	800	$9 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-11}$	
300000	627	900	$4 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-12}$	
400000	727	1000	$8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-12}$	
500000	727	1000	$2 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-13}$	
700000	727	1000	$2 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-14}$	
1000000	727	1000	$1 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-15}$	

Гравітаційне прискорення  $g$ , м/с<sup>2</sup>, наближено можна розрахувати за такою формулою:

$g = 9,82(6371110 / (6371110 + h))^2$ , де  $h$  – висота над рівнем моря в метрах.

Навчальне видання

**Цирюк Олександр Анатолійович  
Смоленко Ганна Григорівна**

## **БАЛІСТИЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ**

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2014

Підписано до видання 05.03.2014

Ум. друк. арк. 2. Обл.-вид. арк. 2,25. Електронний ресурс

---

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК №391 від 30.03.2001