Т. А. Клименко, В. Л. Петрик, Л. О. Філіпковська

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ:
ТЕОРІЯ, ЗАВДАННЯ, ТЕСТИ

2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Т. А. Клименко, В. Л. Петрик, Л. О. Філіпковська

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ: ТЕОРІЯ, ЗАВДАННЯ, ТЕСТИ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Т. А. Клименко, В. Л. Петрик, Л. О. Філіпковська

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ:
ТЕОРІЯ, ЗАВДАННЯ, ТЕСТИ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2014

УДК [519.8+519.86](075.8)
ББК 22.18я73
К49

Рецензенти: д-р екон. наук, проф. Т. В. Шталь,
д-р екон. наук, проф. І. А. Федоренко

Клименко, Т. А.
К49 Дослідження операцій: теорія, завдання, тести [Текст] : навч. посіб. / Т. А. Клименко, В. Л. Петрик, Л. О. Філіпковська. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2014. – 78 с.

Розкрито науково-методичні принципи й особливості застосування математики в економіці. Викладено основні теоретичні поняття дослідження операцій, наведено механізми й приклади будування моделей сіткового планування в керуванні й економіці, керуванні запасами, теорії масового обслуговування та ін. Запропоновано завдання, контрольні запитання й тести для самоперевірки.

Для студентів економічних спеціальностей денної й заочної форм навчання при вивченні дисципліни «Дослідження операцій».

Іл. 17. Табл. 8. Бібліогр.: 14 назв

УДК [519.8+519.86](075.8)
ББК 22.18я73

ВСТУП

Дослідження операцій – це теорія використання наукових кількісних методів для прийняття найкращого рішення в різних галузях діяльності людини. Ця наука дає об'єктивні й кількісні рекомендації з керування цілеспрямованими діями людини. Як самостійний науковий напрям дослідження операцій сформувалося на початку 40-х років минулого століття. Перші публікації з досліджень операцій з'явилися в 1939–1940 рр., а в період Другої світової війни США використовували наук1овців, які давали поради військовим стосовно прийняття рішень при аналізі й дослідженні військових операцій. Звідси й виникла назва дисципліни. Пізніше принципи й методи дослідження операцій (ДО) стали використовувати у промисловості, сільському господарстві, сфері фінансів та ін.

З допомогою методів ДО можна здійснювати планування в політиці, народному господарстві, військових і фінансових справах.

Метою ДО є наукове кількісне обґрунтування рішень, які приймаються стосовно керування в господарських, військових і державних структурах. *Предметом вивчення дисципліни «Дослідження операцій»* є моделі й методи системного аналізу, способи дослідження й оптимізації операцій.

Предмет «Дослідження операцій», який викладають після вивчення студентами дисципліни «Вища математика», передує вивченню курсів «Економетрія» й «Операційний менеджмент». *Основною метою викладення* є формування у майбутніх менеджерів теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач керування з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів. *Основними завданнями*, які має бути вирішено під час викладення дисципліни, є надання студентам знань про суть і етапи ДО, основні принципи й прийоми математичного моделювання операцій, принципи добору математичного й програмного забезпечення практичної реалізації задач, а також формування у студентів умінь:

- постановки й вирішення організаційних завдань з використанням математичного апарату;
- розв'язання задач оптимального розподілу ресурсів;
- розв'язання оптимізаційних задач керування ресурсами, масового обслуговування, упорядкування й координації;
- будування й оптимізації сіткових моделей;
- розв'язання задач будування моделей заміни;
- розв'язання задач з умовами невизначеності й конфлікту;
- використання методик багатокритеріальної оптимізації управлінських рішень;
- проведення післяоптимізаційного аналізу й розроблення практичних рекомендацій з прийняття рішень.

1. ПРИНЦИПИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЕКОНОМІЦІ

Математичні методи в економіці почали використовувати досить давно. Першу у світі економічну модель створив у XVIII столітті французький економіст Ф. Кене. У ХХ столітті його «Економічна таблиця» стала основою для будування й розвитку численних моделей суспільного відтворення. Так, міжгалузева модель Леонтьєва «Витрати – випуск» є продовженням економічної таблиці Кене. Математичні методи в економіці широко стали застосовувати у ХХ столітті. З їх використанням пов‘язані роботи майже всіх учених, нагороджених Нобелівською премією з економіки, наприклад Д. Хікса, Р. Солоу, В. Леонтьєва, П. Самуельсона. Перші роботи не виходили за межі найпростіших оброблень результатів спостережень. Подальший розвиток мікро- і макроекономіки, прикладних економічних дисциплін пов‘язаний з дедалі вищим рівнем їх формалізації. Основою цього став прогрес у самій математиці, особливо в галузі прикладної математики.

Яке ж конкретне значення мають математичні методи в економіці? Їх використання дає можливість:

– точно й компактно викладати положення економічної теорії;
– виокремлювати й формально описувати найістотніші зв'язки економічних змінних і характеристик;
– одержувати висновки про функціонування об'єкта;
– отримувати нові знання про об'єкт;
– передбачати майбутню поведінку об'єкта у разі змінення якихось його параметрів.

Звичайно, що використання математичних методів і будування на їх основі математичних моделей потребувало введення відповідних понять. Різні дослідники давали своє тлумачення вже сформованим термінам. Розглянемо їх коротко.

Модель – це такий матеріальний або уявлюваний об'єкт (об'єкт-замінник), який під час дослідження заміняє об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про об'єкт-оригінал.

Модель потрібна для такого:

– зрозуміти, з чого складається конкретний об‘єкт;
– навчитись керувати об‘єктом (процесом) і визначати найкращі способи керування за заданих умов;
– прогнозувати прямі й непрямі наслідки реалізації заданих форм впливу на об‘єкт.

Процес будування, вивчення й застосування моделей називають *моделюванням.*

Існує кілька прийомів моделювання (рис. 1.1), які умовно можна поєднати у дві групи: матеріальне (предметне) та ідеальне.

Відповідно усі моделі поділяються на два великих класи: моделі *матеріальні* й моделі *ідеальні.* Характерними представниками моделей першого класу є фізичні моделі. До другого класу належать усі створені людиною мислені уявлення про навколишній світ, зокрема й математичні моделі.

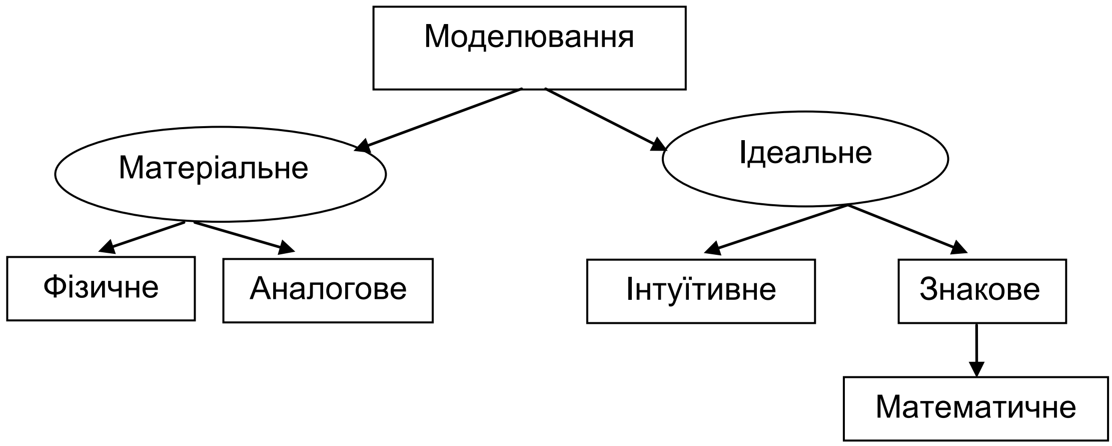


Рис. 1.1

Об'єктом дослідження математичного моделювання в економіці є економічна система.

Математична модель економічного об‘єкта (системи) – це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

У широкому розумінні *математичне моделювання* – це метод дослідження, що базується на аналогії процесів різної природи, але який описується однаковими математичними залежностями.

Необхідність використання моделювання визначається тим, що багато об'єктів і пов'язані з ними проблеми дослідити безпосередньо або зовсім неможливо, або ж їхнє дослідження потребує так багато сил і часу, що вже з цієї причини стає неможливим.

Будь-яка економічна модель є абстрактною, а отже, неповною, оскільки при визначенні основних закономірностей не враховуються інші фактори, за якими, незважаючи на їхню відносну малість, у сукупності або за певних умов можна визначити не тільки відхилення в поведінці об'єкта дослідження, але й саму поведінку. Однак за цим методом пізнання не залишається нічого іншого, як припускати, що невраховані фактори впливають на об'єкт незначно, або ж уводити їх у модель і враховувати, якщо це можливо.

Наприклад, у найпростішій моделі попиту вважається, що попит на товар визначається його ціною і доходом споживача. Насправді ж на попит впливають ще й інші фактори: смаки й очікування споживачів, ціни на інші товари, реклама, мода і т. д. Іноді значення деяких з них може бути визначальним.

Для математичних моделей, які використовують в економіці, застосовують різні види класифікації. Основні з них показано на рис. 1.2.

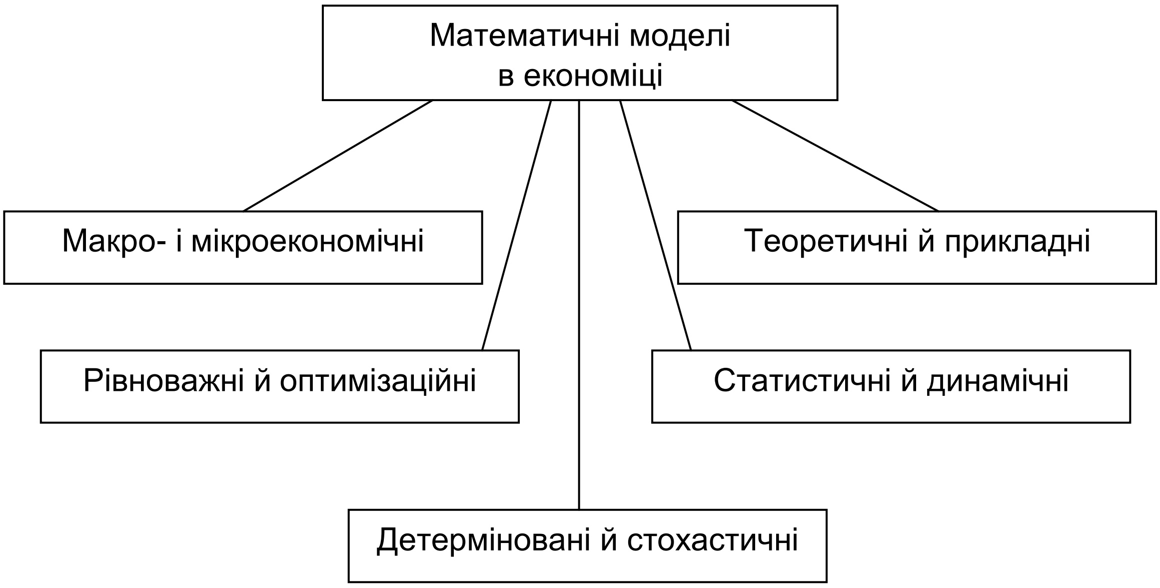


Рис. 1.2

При будуванні моделей визначають істотні фактори й відкидають деталі, щоб виокремити спільне й суттєве для всіх принципово однакових, але таких різних у деталях явищ. Приклади економічних моделей показано на рис. 1.3.

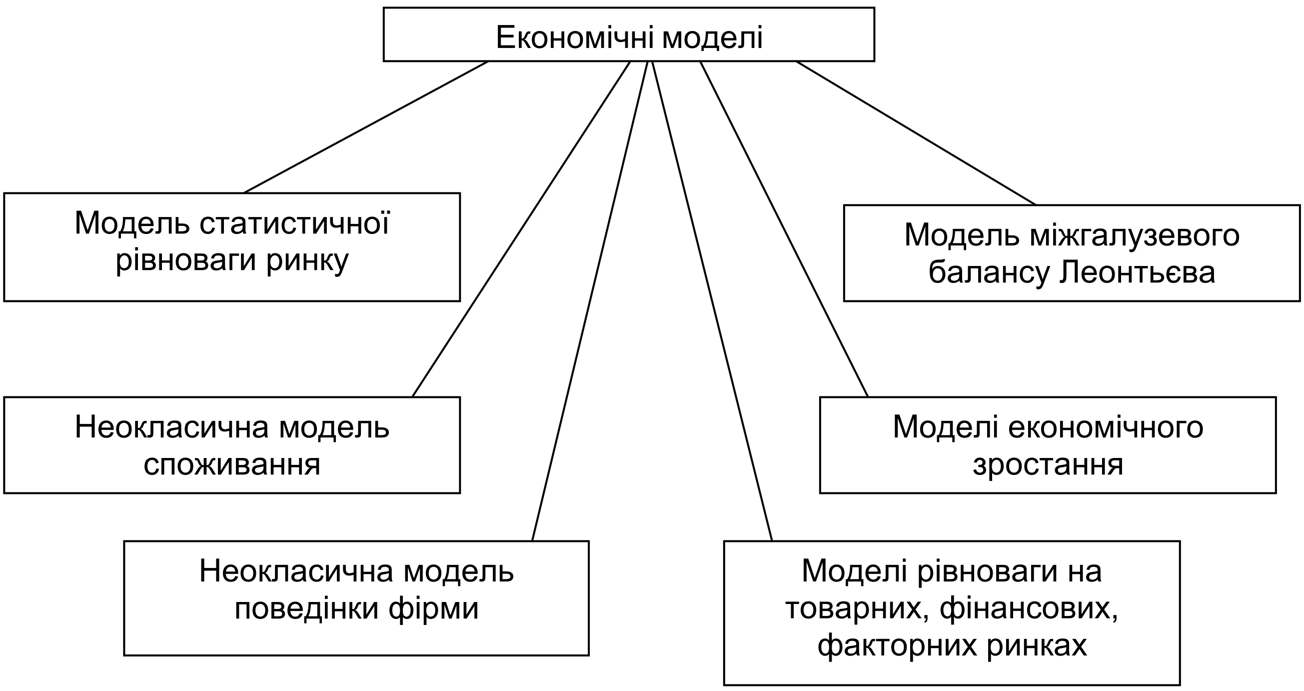


Рис. 1.3

Проникнення математики в економіку пов'язане з подоланням значних труднощів. Головними причинами цих труднощів є специфіка економічної науки, а також природа економічних процесів, для яких характерними є масовість, динамічність і стохастичність. Крім того, більшість об'єктів, які досліджуються в економічній науці, характеризується поняттям «складна система». Складність економічних процесів часто розглядається як обґрунтування неможливості їх формалізації і моделювання засобами математики. Хибність такої точки зору доводиться самою «живучістю» моделей. Моделювати можна об'єкт будь-якої природи й складності, тому що теза про принципову неможливість моделювання є рівносильною твердженню про принципову непізнаваність об'єкта. І саме складні об'єкти становлять найбільший інтерес для моделювання. Саме тут моделювання може дати і дає результати, яких не можна одержати жодними іншими способами дослідження.

У наш час моделювання набуло нової якісної форми, що тісно пов'язано з використанням можливостей, які надають комп'ютери.

2. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ. ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Під *операцією* розуміють будь-яку діяльність людини, що спрямована на досягнення якоїсь мети (у виробництві, військовій операції, перевезенні вантажів, плануванні робіт, прийнятті політичного рішення та ін.).

Припустимо, що людина приймає рішення (часто дуже важливе, оскільки від нього залежить її доля, доля її підприємства, доля військової операції, напрям розвитку держави). Виникає питання, наскільки це рішення є правильним, а також потреба об'єктивного *кількісного* оцінювання прийнятого рішення.

Дослідження психологів показали, що людина почуває себе невпевнено, якщо при прийнятті рішення потрібно врахувати понад 10 змінних або суперечливих факторів. Однак в реальних умовах виробництва на процеси впливають сотні (а іноді й тисячі) факторів. Тому науковий підхід до кількісного оцінювання прийнятого рішення з допомогою методів дослідження операцій є дуже важливим.

Існують кілька типових класів задач дослідження операцій.

Розподіл ресурсів. Ресурси – це гроші, матеріали, людська праця тощо, які завжди є обмеженими і в різних виробах забезпечують різний прибуток. Наприклад, є тканина, з якої можна виготовити або чоловічий, або жіночий, або дитячий одяг за різними цінами й прибутками. Виникає проблема розподілу людей, тканини та інших ресурсів між виробами з метою отримання найбільшого прибутку.

Керування запасами. Зі збільшенням запасів створюються умови для більш ритмічної роботи виробництва. Запас – це гарантія виконання будь-якого замовлення. Якщо запасів не вистачає, то можуть бути значні збитки через невиконання зобов'язань. Однак разом зі збільшенням запасів збільшується омертвілий капітал і витрати на зберігання. Недаремно існують підприємства, які зовсім не мають складів, їх замінюють майданчики для розвантаження отриманої і відвантаження виготовленої продукції. Виникає проблема керування запасами при найменших витратах.

У *задачах сіткового планування й керування* розглядаються співвідношення між термінами закінчення великого комплексу операцій і моментами початку всіх операцій комплексу. Потрібно знайти мінімальну тривалість комплексу операцій, оптимальні співвідношення вартості й термінів виконання.

Сіткові задачі полягають в оптимізації процесу обслуговування на сітках або самої структури сітки.

Задачі планування й розташування пов'язані з визначенням оптимальної кількості й місця розташування нових об'єктів з урахуванням їх взаємодії з наявними об'єктами і між собою.

Задачі дослідження конфліктних ситуацій полягають у виборі оптимальних стратегій поведінки учасників конфлікту.

У *задачах масового обслуговування* розглядаються питання створення і функціонування черг (на заводському конвеєрі; у залізничній касі; для літаків над аеропортом, що йдуть на посадку; клієнтів в ательє побутового обслуговування; абонентів міської телефонної станції тощо). Потрібно вирішити проблеми якісного обслуговування при мінімальних витратах на обладнання.

Задачі складання розкладів (календарного планування) полягають у визначенні оптимальної черговості виконання операцій на різних видах устаткування або при певному способі надання послуг.

Задачі ремонту й заміни встаткування. Застаріле обладнання потребує витрат на ремонт і має знижену продуктивність. Необхідно вміти розраховувати терміни ремонту і заміни обладнання, що забезпечить отримання найбільшого прибутку.

Задача рюкзака: рюкзак (вантажна машина, вагон, судно, літак) має обмежену вантажність. Потрібно так заповнити рюкзак, щоб отримати максимальний прибуток.

Задачі комівояжера, створення сумішей, наймання і звільнення робітників, сіткового планування робіт, порядку оброблення кількох різних деталей, комбіновані задачі та інші – усе це є предметом вивчення науки «*Математичні методи дослідження операцій*».

3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Як і кожна сформована наука, дослідження операцій має свою власну систему понять. Під *операцією* розуміють будь-який керований захід, спрямований на досягнення мети. Результат операції залежить від способу її проведення чи організації або від вибору деяких параметрів.

Будь-який вибір набору параметрів *називають рішенням. Оптимальними* вважаються ті рішення, які мають переваги над іншими. Виходячи з цієї теорії, можна сказати, що основним завданням дослідження операцій є знаходження оптимальних рішень у межах вибраної моделі.

Модель операції – це якомога точніший опис операції з допомогою математичного апарата.

Ефективність операції – це цільова функція, що відображає ступінь пристосованості операції до виконання поставленої мети. Від вибору критерію ефективності залежить практична цінність дослідження.

Під час формування стратегічних і тактичних рішень керівник змушений брати до уваги численні, часто взаємосуперечливі вимоги і спиратися на складні критерії досягнення кінцевих цілей. У цих умовах для досягнення високого рівня керування йому далеко не завжди вистачає професійних знань, власного досвіду, інтуїції й організаторських здібностей у їх традиційному розумінні. Потрібні науково обґрунтовані й точні методи прийняття рішень.

Однак зауважимо, що сам реальний процес прийняття рішення виходить за межі предмета дослідження операцій і належить до компетенції особи (частіше групи осіб), що приймає рішення (ОПР). Неодмінна присутність людини не скасовується навіть у разі повної автоматизації системи керування.

Основною особливістю дослідження операцій є будування математичних моделей і використання для їх аналізу математичного апарату. Це насамперед означає, що хоча б деякі дані, які фігурують у формулюванні задачі, повинні мати кількісне вираження. Якісні характеристики використовуваної моделі є додатковими.

Процес дослідження операцій складається з кількох основних етапів.

1. Отримання змісту задачі у вигляді текстового (технічного) завдання. Збір даних, їх аналіз. Формулювання задачі з точки зору Замовника. Консультації із Замовником. Виявлення факторів, які впливають на процес. Уточнення мети (варіантів мети).

2. Формалізація задачі у вигляді математичної моделі, яка складається з функції мети (показника якості або ефективності процесу) $F = F(X, У) = max\ (min)$ при обмеженнях $g_i(X, У) \leq b_i$, де X – вектор керованих змінних (ними розпоряджається керівна сторона); $У$ – вектор некерованих аргументів (некеровані, невизначені, випадкові фактори); $g_i(X, У)$ – функція споживання i-го ресурсу; b_i – величина i-го ресурсу (вага ресурсу, сума грошей, фонд машинного часу верстата та ін.).

З допомогою обмежень знаходять область припустимих розв'язків, а функція мети дає змогу визначити оптимальну точку в цій області. Отримати оптимальний розв'язок означає знайти такі величини X, при яких функція мети F досягає оптимуму при одночасному виконанні нерівностей.

3. Розв'язання задачі виконується такими найбільш розповсюдженими методами:

– лінійного програмування, якщо $F = F(X, У)$ і $g_i(X, У)$ – лінійні функції відносно X, $У$;

– нелінійного програмування, якщо $F = F(X, У)$ і $g_i(X, У)$ – нелінійні функції відносно X, $У$;

– динамічного програмування, якщо $F = F(X, У)$ є адитивною або мультиплікативною функцією від змінних X, $У$;

– дискретного програмування, якщо на змінні X і $У$ накласти умови дискретності (наприклад, вираження цілим числом);

– стохастичного програмування, якщо $У$ – випадкова величина, а замість функції мети $F = F(X, У)$ розглядають її математичне сподівання.

4. Перевірка й коригування моделі. Перевірка виконується шляхом порівняння поводження моделі з фактичним поводженням.

5. Реалізація на практиці. Отримане на основі дослідження операцій рішення має свої особливості.

Наукове кількісне обґрунтування рекомендованого варіанта рішення із визначенням найкращого способу дії повноти досягнення мети і ціни досягнутої мети, ступеня ризику.

Системний підхід: будь-яка задача розглядається стосовно її впливу на критерії функціонування всієї системи.

Дорогий фізичний експеримент замінюється відносно дешевим математичним моделюванням, яке дає змогу одержати відповіді на багато питань і прийняти оптимальне рішення. При цьому використовується ЕОМ.

Рекомендаційний висновок із дослідження операцій: людина, яка приймає рішення, має нести повну відповідальність за наслідки цих рішень.

Методи ДО мають багато математичних засобів:

– теорію лінійного, нелінійного, дискретного (цілочислового, бінарного, неподільного), динамічного, стохастичного програмування;

– теорію ігор;

– теорію систем масового обслуговування;

– прийняття рішень в умовах нечіткої інформації;

– теорію експертних систем;

– теорію ефективності та ін.

Будь-який розрахунок можна розглядати як дослідження операцій, оскільки з його допомогою можна прийняти обґрунтоване оптимальне рішення в багатофакторній області. Однак традиційно дослідження операцій стосується більш вузького кола питань: організації взаємодій та оптимального функціонування складних систем із множиною рішень і за умови дотримання певної форми математичної моделі.

4. ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ

Для діяльності будь-якої організації необхідні якісь запаси. Якщо їх не буде, то при найменшому порушенні збуту вся діяльність зупиниться. Зберігати ж занадто багато запасів економічно невигідно. Знайти баланс між цими двома крайнощами допоможуть задачі керування запасами.

Загальна постановка задачі полягає в такому: складання плану випуску деякого виду виробів на період із N інтервалів часу. Передбачається, що для кожного з цих інтервалів є точний прогноз попиту на продукцію, яка випускається. Для різних інтервалів попит є неоднаковим. Причому продукцію, що виготовляється протягом інтервалу часу t, можна використати для повного або часткового покриття попиту протягом цього інтервалу. До того ж, розміри виготовлених партій продукції впливають на економічні показники виробництва. У зв'язку з цим іноді доцільно виготовляти протягом деякого періоду продукцію, обсяг якої перевищує його попит в межах цього періоду, і зберігати надлишки для задоволення подальшого попиту. Проте зберігання запасів потребує затрат (плата за складські приміщення, страхові внески й витрати на утримання запасів тощо).

Мета підприємства – розробити таку програму, за якої загальна сума витрат на виробництво й утримання запасів мінімізується за умови повного і своєчасного задоволення попиту на продукцію. Для забезпечення безперервного й ефективного функціонування будь-якої організації необхідно створювати запаси. Залежно від ситуації під запасами можуть розумітися: готова продукція, сировина, напівфабрикати, верстати, інструмент, транспортні засоби, готівка та ін. Неправильний розрахунок необхідних запасів може призвести як до незначних збитків (втрати частини доходу від дефіциту товару), так і до катастрофічних наслідків (падіння літака при помилковому оціненні на ньому запасів палива).

До економічного збитку призводить як надмірна наявність запасів, так і їх нестача. Так, якщо деяка компанія має товарні запаси, то капітал, матеріалізований у цих товарах, заморожується. Цей капітал, який не можна використовувати, має для компанії втрачену вартість у формі невиплачених відсотків або невикористаних можливостей інвестування. До того ж, запаси, особливо продукти, що швидко псуються, потребують створення спеціальних умов для зберігання. Для цього необхідно виділити певні площі, найняти персонал, застрахувати запаси. Усе це призводить до певних витрат.

З іншого боку, чим менший рівень запасу, тим більшою буде ймовірність виникнення дефіциту, що може завдати збитків унаслідок втрати клієнтів, припинення виробничого процесу і т. д. До того ж, при малому рівні запасів доводиться часто поставляти нові партії товару, що призводить до великих витрат на доставку замовлень. Звідси випливає важливість розроблення і використання математичних моделей, які дають змогу знайти оптимальний рівень запасів, що мінімізують суму всіх описаних видів витрат.

Розглянемо основні характеристики моделей керування запасами.

Попит на продукт, що запасається, може бути *детермінованим* (у найпростішому випадку – постійним у часі) або *випадковим*. Випадковість описується або випадковим моментом попиту, або випадковим обсягом попиту в детерміновані або випадкові моменти часу.

Поповнення складу може відбуватися або періодично через конкретні інтервали часу, або у міру вичерпаності запасів, тобто зменшення їх до деякого рівня.

Обсяг замовлення. При періодичному поповненні й випадковому вичерпанні запасів обсяг замовлення може залежати від того стану, який спостерігається в момент його подання. Замовлення зазвичай подається на одну й ту саму величину при досягнення заданого рівня запасів – так званої *точки замовлення*.

Час доставки. В ідеалізованих моделях керування запасами передбачається, що замовлене поповнення поставляється на склад миттєво. В інших моделях розглядається затримка поставок на фіксований або випадковий інтервал часу.

Вартість поставки. Зазвичай передбачається, що вартість кожної поставки складається з двох компонент – разових витрат, які не залежать від величини партії, що замовляється, і затрат, які залежать (частіше за все – *лінійно*) від величини партії.

Витрати на зберігання. У більшості моделей керування запасами місткість складу вважається майже необмеженою, а контрольною величиною є обсяг запасів, що зберігаються.

Штраф за дефіцит. Будь-який склад створюється для того, щоб запобігти дефіциту конкретного виду виробів у системі, що обслуговується. Відсутність запасів у потрібний момент призводить до збитків, пов’язаних з простоєм обладнання, неритмічністю виробництва й т. ін., які й називають штрафом за дефіцит.

Номенклатура запасу. У найпростіших випадках передбачається, що на складі зберігається запас однотипних виробів або однотипної продукції. У більш складних випадках розглядається *багатономенклатурний запас*.

Критерієм ефективності прийнятої стратегії керування запасами є *функція затрат (витрат)*, що є сумарними затратами на зберігання й поставку продукту, що запасається (у тому числі втрати від псування продукту при зберіганні і його морального старіння, втрати прибутку від омертвіння капіталу й т. ін.) і затрати на штрафи.

Керування запасами полягає в пошуку такої стратегії поповнення й витрат запасів, за якої функція затрат набуває мінімального значення.

Узагальнена модель керування запасами є досить простою. Однак *різноманітність моделей* цього класу й *методів розв'язання відповідних задач*, які базуються на різному математичному апараті – від простих схем диференціального й інтегрального числення до складних алгоритмів динамічного й інших видів математичного програмування, – визначається *характером попиту*, який може бути *детермінованим* або *стохастичним*. На рис. 4.1 зображено схему класифікації попиту, яка зазвичай застосовується в моделях керування запасами.

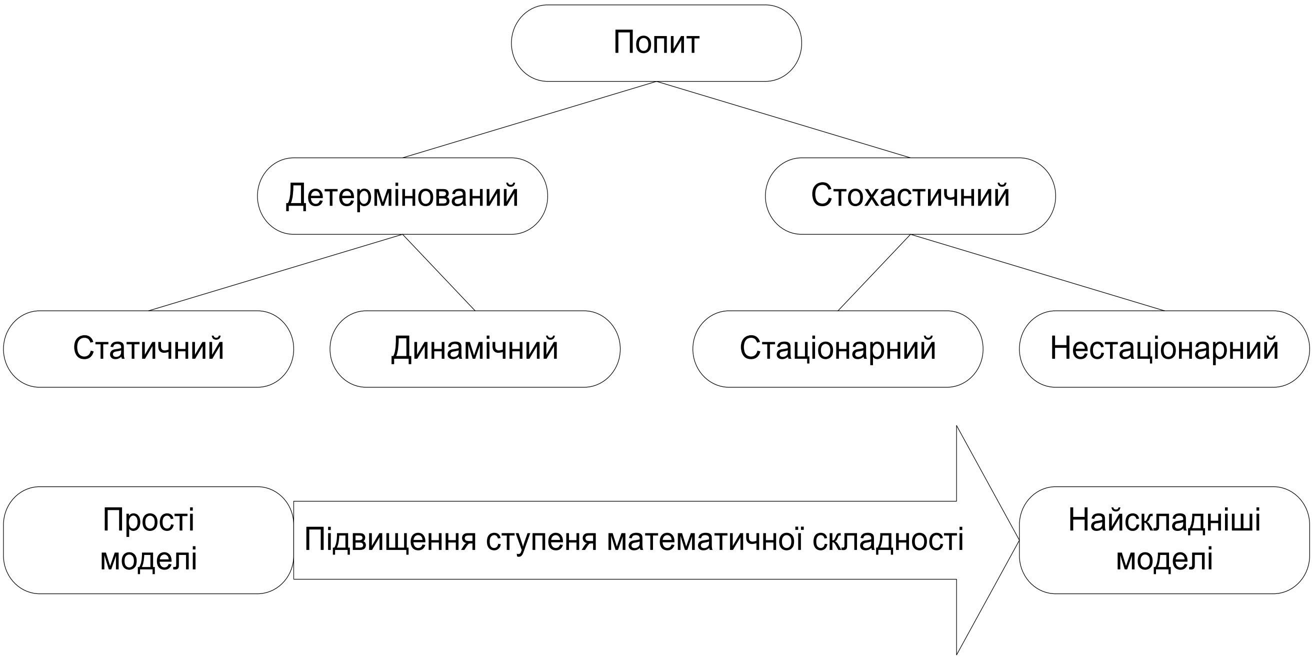


Рис. 4.1

Детермінований попит може бути *статичним,* якщо інтенсивність споживання залишається незмінною з часом, або *динамічним,* якщо попит є відомим достовірно, але змінюється залежно від часу.

Стохастичний попит є *стаціонарним,* якщо функція щільності ймовірності попиту є незмінною в часі, і *нестаціонарним,* якщо функція щільності попиту змінюється в часі.

У реальних умовах випадок детермінованого статичного попиту трапляється доволі рідко і є найпростішим. Наприклад, попит на деякі продукти масового споживання, такі, як хліб, може змінюватися кожного дня, однак ці зміни можуть бути настільки незначними, що припущення про статичність попиту спотворює дійсність несуттєво.

Найточніше характер попиту можна описати з допомогою *нестаціонарних розподілів імовірностей*. Зі збільшенням досліджуваного періоду часу модель значно ускладнюється.

Хоча характер попиту є основним фактором при будуванні моделі керування запасами, є й інші фактори, що впливають на вибір типу моделі.

Запізнювання надходжень виконання замовлень. Після розміщення замовлення його можна поставити відразу або ж через деякий час. Інтервал часу між моментом розміщення замовлення і його надходженням називають запізнюванням замовлення, або терміном виконання замовлень. Ця величина може бути детермінованою або стохастичною.

Поповнення замовлення. Хоча система керування запасами може функціонувати при запізнюванні надходжень, процес збільшення запасу в часі може здійснюватися миттєво або рівномірно. *Миттєве збільшення запасу* можна реалізувати за умови надходження замовлення від зовнішнього джерела. *Рівномірне збільшення* може бути тоді, коли продукцію, яку запасають, виробляє сама організація. У загальному випадку система може функціонувати при додатному запізнюванні надходження і рівномірному збільшенні запасу.

Період часу визначає інтервал, протягом якого змінюється рівень запасу. Залежно від інтервалу часу, на якому можна надійно прогнозувати, досліджуваний *період* уважається *скінченним* або *нескінченним*.

Кількість пунктів накопичення запасу. Система керування запасами містить декілька пунктів зберігання запасу. У деяких випадках ці пункти організовано таким чином, що один є постачальником для іншого. Ця схема іноді реалізується на різних рівнях так, що пункт-споживач на одному рівні може стати пунктом-постачальником на іншому. У цьому випадку така система є системою керування запасами з розгалуженою структурою.

Кількість видів продукції. У системі керування запасами може фігурувати *більше одного виду продукції*. Цей фактор ураховується за умови наявності деякої залежності між різними видами продукції. Так, для різних виробів може використовуватися одне й те саме складське приміщення або ж виробництво може здійснюватися при обмеженнях на загальні виробничі фонди.

4.1. Прості моделі керування запасами

Нехай функції $A(t)$, $D(t)$ і $R(t)$ є відповідно поповненням запасів, їхніми витратами і попитом на продукт, що запасається на інтервалі часу $[0, t]$. У моделях керування запасами використовуються похідні цих функцій за часом $a(t)$, $d(t)$, $r(t)$, що мають назви відповідно *інтенсивностей поповнень, витрат і попиту.*

Якщо функції $a(t)$, $d(t)$, $r(t)$ є невипадковими величинами, то модель керування запасами вважається *детермінованою*, якщо хоча б одна із них має випадковий характер – *стохастичною.* Якщо всі параметри моделі не змінюються в часі, то її називають *статичною*, якщо змінюються – *динамічною.* Статичні моделі використовуються, коли приймається разове рішення про рівень запасів на певний період, а динамічні – коли приймаються послідовні рішення про рівні запасу або коригування раніше прийнятих рішень з урахуванням змін, що відбуваються.

Рівень запасу в момент *t* визначається за формулою

$$J(t) = J_0 + A(t) - D(t), \tag{4.1}$$

де J_0 – початковий запас в момент $t = 0$.

Рівняння (4.1) частіше використовується в інтегральній формі:

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)dt - \int_0^t d(t)dt. \qquad (4.2)$$

Приклад 4.1. Інтенсивність надходження деталей на склад готової продукції становить на початку зміни 5 деталей за одну хвилину, протягом першої години лінійно зростає, досягаючи до кінця її 10 деталей за одну хвилину, а потім залишається постійною. Припускаючи, що надходження деталей на склад відбувається безперервно протягом всіх семи годин зміни, а вивозять деталі зі складу лише наприкінці роботи, записати вираз для рівня запасу в довільний момент часу та, використовуючи його, знайти кількість деталей на складі: а) через 30 хв після початку роботи; б) наприкінці зміни.

Розв'язання. За умовою протягом зміни деталі зі складу не видаються, тобто $d(t) = 0$. Інтенсивність поповнення запасу протягом першої години лінійно зростає, тобто $a(t) = kt + b$. Ураховуючи, що $a(0) = 5$, отримуємо $b = 5$. Оскільки наприкінці першої години, тобто при $t = 60$, $a(60) = 10$, тоді $10 = k \cdot 60 + 5$, звідки $k = 1/12$. Таким чином, для першої години зміни $a(t) = (1/12)t + 5$, тоді $a(t) = 10$. Ураховуючи тривалість зміни (7 год = 420 хв) і співвідношення (4.2), отримаємо:

$$J(t) = \int_0^t \left(\frac{t}{12} + 5\right)dt = \frac{t^2}{24} + 5t, \text{ якщо } 0 \le t \le 60,$$

$$J(t) = \int_0^{60} \left(\frac{t}{12} + 5\right)dt + \int_{60}^t 10dt = \left(\frac{t^2}{24} + 5t\right)\Bigg|_0^{60} + 10t\Big|_{60}^{t} =$$

$$= (60^2 : 24 + 5 \cdot 60) - 0 + 10t - 600 = 150 + 300 + 10t - 600 =$$
$$= 450 + 10t - 600 = 10t - 150, \text{ якщо } 0 \le t \le 420.$$

Кількість деталей на складі через 30 хв після початку роботи $J(30) = 900/24 + 5 \cdot 30 = 187{,}5$, а наприкінці зміни $J(420) = 10 \cdot 420 - 150 = 4\,050$.

4.2. Статична детермінована модель без дефіциту

Припущення про те, що дефіцит не допускається, означає повне задоволення попиту на продукт, що запасається, тобто збіг функцій $r(t)$ і $b(t)$. Нехай загальне споживання продукту, що запасається, за розглянутий інтервал часу θ дорівнює N. Розглянемо просту модель, у якій передбачається, що запас витрачається безперервно з постійною інтенсивністю, тобто $b(t) = b$. Цю інтенсивність можна знайти, розділивши загальне споживання продукту на час, протягом якого він витрачається:

$$b = N / \theta. \qquad (4.3)$$

Заказ поповнюється партіями однакового обсягу, тобто функція $a(t)$ не є безперервною: $a(t) = 0$ при всіх t, крім моментів поставки продукту, коли $a(t) = n$, де n – обсяг партії. Оскільки інтенсивність витрат дорівнює b, всю партію буде використано за час

$$T = n / b. \qquad (4.4)$$

Якщо відлік часу почати з моменту надходження першої партії, то рівень запасу в початковий момент дорівнює обсягу цієї партії n, тобто $J(0) = n$. Графічно рівень запасу залежно від часу показано на рис. 4.2.

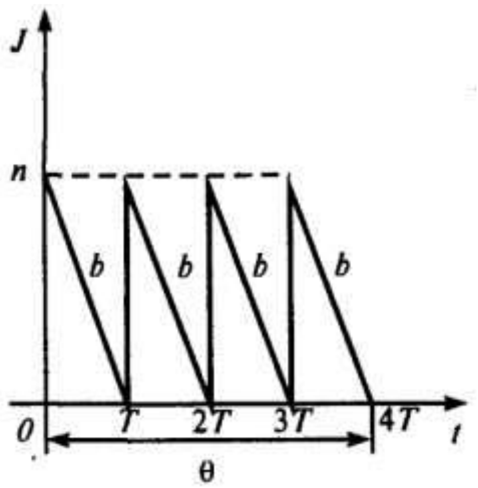


Рис. 4.2

Протягом часового інтервалу $[0, T]$ рівень запасу зменшується за залежністю $J(t) = n - bt$ від n до нуля. Оскільки дефіцит не допускається, у момент T рівень запасу миттєво збільшується до попереднього унаслідок надходження партії заказу. Таким чином, процес змінення $J(t)$ повторюється на кожному часовому інтервалі тривалістю T (див. рис. 4.2).

Задачею керування запасами є визначення такого обсягу партії n, при якому сумарні затрати на створення і зберігання запасу були б мінімальними.

Позначимо сумарні затрати через C, затрати на створення запасу – через C_1, а затрати на зберігання запасу – через C_2 і знайдемо ці величини за весь інтервал часу T.

Нехай затрати на доставку однієї партії продукту незалежно від обсягу партії дорівнюють c_1, а затрати на зберігання однієї одиниці продукції за одиницю часу – c_2. Оскільки за час θ створюється запас продукту обсягом N, який поставляється партіями обсягом n, кількість таких партій

$$k = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}. \qquad (4.5)$$

Звідси отримуємо

$$C_1 = c_1 k = c_1 \frac{N}{n}. \tag{4.6}$$

Моментальні затрати зберігання запасу в момент часу t дорівнюють $c_2 J(t)$. Отже, за інтервал часу $[0, T]$

$$c_2 \int_0^T J(t)dt = c_2 \int_0^T (n - bt)dt.$$

Середній запас за інтервал $[0, T]$ дорівнює $nT/2$, тобто затрати на зберігання всього запасу при лінійних (за часом) його витратах дорівнюють затратам на зберігання середнього запасу.

Ураховуючи періодичність функції $J(t)$ (усього за інтервал часу θ буде $k = N/n$ «зубців», аналогічних тим, що розглядалися на інтервалі $[0, T]$) і формулу (4.5), отримаємо, що за інтервал часу θ затрати на зберігання запасу

$$C_2 = \frac{c_2 nT}{2} k = \frac{\frac{c_2 nT}{2} N}{n} = \frac{c_2 TN}{2} = \frac{c_2 \theta n}{2}. \tag{4.7}$$

Неважко помітити, що затрати C_1 є обернено пропорційними, а затрати C_2 прямо пропорційними обсягу партії n. Графіки функцій $C_1(n)$ *і* $C_2(n)$, а також функції сумарних затрат

$$C = \frac{c_1 N}{n} + \frac{c_2 \theta}{2} n \tag{4.8}$$

зображено на рис. 4.3.

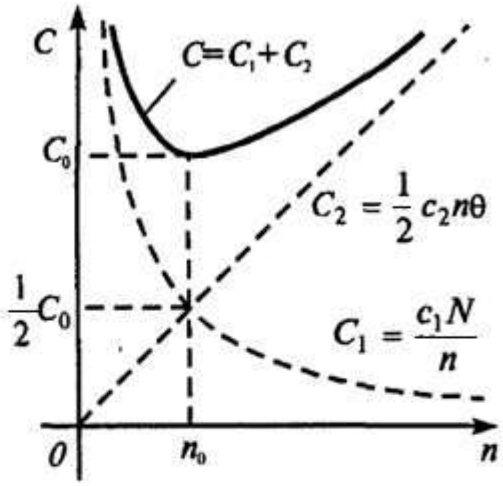


Рис. 4.3

У точці мінімуму функції $C(n)$ її похідна $C'(n) = \frac{-c_1 N}{n^2} + \frac{c_2\theta}{2} = 0$, звідки

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2\theta}} \tag{4.9}$$

або, враховуючи (4.3),

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2 p}}. \tag{4.10}$$

Формулу (4.10) називають *формулою Уілсона*, або *формулою найбільш економічного обсягу партії*, і широко використовують в економіці. Цю формулу можна отримати й іншим способом, якщо врахувати, що добуток $C_1 C_2 = 0{,}5 c_1 c_2 N\theta$ є величиною постійною, що не залежить від n. У цьому випадку, як відомо, сума двох величин набуває найменшого значення, коли вони дорівнюють одна одній ($C_1 = C_2$) або

$$\frac{c_1 N}{n} = \frac{c_2 n\theta}{2}, \tag{4.11}$$

звідки отримаємо (4.9).

Із (4.11) випливає, що мінімум загальних затрат у задачі керування запасами досягається тоді, коли затрати на створення запасу дорівнюють затратам на збереження запасів. При цьому мінімальні сумарні затрати

$$C_0 = C|n_0| = \frac{2c_1 N}{n}, \tag{4.12}$$

звідки, враховуючи (4.3) і (4.9), отримаємо

$$C_0 = \sqrt{2c_1 c_2 \theta N} \text{ або } C_0 = \theta\sqrt{2c_1 c_2 b}. \tag{4.13}$$

За час θ з урахуванням (4.3), (4.5) і (4.9) кількість оптимальних партій

$$k_0 = \frac{N}{n_0} = \sqrt{\frac{c_2 N\theta}{2c_1}} = \theta\sqrt{\frac{c_2 b}{2c_1}}.$$

На основі (4.4) з урахуванням (4.3) і (4.9) час витрати оптимальної партії

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = n_0\frac{\theta}{N}. \tag{4.14}$$

Приклад 4.2. Потреба складального підприємства в деталях певного типу становить 120 000 деталей за рік, причому ці деталі витрачаються під час виробництва рівномірно й безперервно. Деталі замовляються раз на рік і поставляються партіями однакового обсягу, зазначеного в замовленні. Зберігання деталі на складі коштує 0,35 грош. од. на добу, а поставка партії – 10 000 грош. од. Затримка виробництва через відсутність деталей є недопустимою. Визначити найбільш економічний обсяг партії та інтервал між поставками, які необхідно зазначити в замовленні (постачальник не допускає затримки поставок).

Розв'язання. За умовою затрати на одну партію c_1 = 10 000 грош. од., загальний інтервал часу θ = 1 рік = 365 днів, а загальний обсяг запасу за цей період $N = 120\,000$ деталей. За формулою (4.9)

$$n_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 120000}{0{,}35 \cdot 365}} \approx 4335 \ \text{деталей},$$

а за формулою (4.14)

$$T_0 = n_0 \frac{\theta}{N} = 13{,}2 \approx 13 \ \text{днів}.$$

Таким чином, найбільш економічний обсяг партії дорівнює 4 335 деталей, а інтервал між поставками – приблизно 13 днів.

На практиці ж обсяг партії може відрізнятися від отриманого n_0, розрахованого за (4.9). Так, у попередній задачі (приклад 4.1) може виявитися, що зручно замовити партії по 4 500 або навіть по 5 000 деталей, тому необхідно визначити, як змінюються сумарні затрати.

Для цього розкладемо функцію $C(n)$ у ряд Тейлора навколо точки n_0, обмежившись першими трьома членами ряду, при досить малих змінах обсягу партії Δn:

$$C(n) = C(n_0) + C'(n_0)\Delta n + \frac{C''(n_0)}{2!}\Delta n^2 + \dots .$$

Ураховуючи, що при $n = n_0$ $C'(n_0) = 0$, $C''(n_0) = \frac{2c_1 N}{n_0^3}$, а $C_0 = C(n_0)$ визначається за формулою (4.12), знайдемо, що

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{C(n) - C(n_0)}{C(n_0)} \approx \frac{C''(n_0)\Delta n^2}{2C(n_0)} = \frac{2c_1 N \Delta n^2}{n_0^3\left(\frac{2c_1 N}{n_0}\right)},$$

або

$$\frac{\Delta C}{C_0} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)^2. \tag{4.15}$$

Формула (4.15) свідчить про певну стійкість сумарних затрат відносно найбільш економічного обсягу партії, оскільки при малих Δn відносні зміни затрат приблизно на порядок менші за відносну зміну обсягу партії порівняно з оптимальним.

Приклад 4.3. За умовою задачі з прикладу 4.2 визначити, на скільки відсотків збільшаться затрати на створення й зберігання запасу порівняно з мінімальними затратами, якщо обсяг замовлених партій становитиме 5 000 деталей.

Розв'язання. Відносне змінення обсягу партії порівняно з оптимальним ($n_0 = 4\ 335$) $\Delta n/n_0 = (5\ 000 – 4\ 335)/4\ 335 = 0{,}153$. Відповідно до (4.15) відносне змінення сумарних затрат $\Delta C/C_0 = 0{,}153^2/2 \approx 0{,}012$, або всього 1,2 %.

Приклад 4.4. В умові задачі з прикладу 4.3 припустимо, що замовляються не всі партії відразу, а кожна окремо, причому термін виконання замовлення становить 16 днів. Визначити точки замовлення, тобто при якому рівні запасу слід замовляти наступну партію.

Розв'язання. Оскільки за результатами рішення задачі з прикладу 4.2 інтервал між поставками становить *13,2* дня, замовлення в умовах неналежного виробництва потрібно відновити, коли рівень запасу буде достатнім для задоволення потреби на $16 – 13{,}2 = 2{,}8$ дня. Оскільки за формулою (4.3) щоденна необхідність (інтенсивність витрат запасу) $b = 120\ 000/365 = 329$ деталей, замовлення необхідно робити регулярно при досягненні рівня запасу $329 \cdot 2{,}8 \approx 922$ деталі.

5. ЗАДАЧІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Очікування того чи іншого виду обслуговування є частиною повсякденного життя. Проте феномен очікування є характерним не тільки для людей, а навіть для робіт, поставлених у чергу для виконання на верстаті, групи пасажирських літаків, що чекають дозволу на посадку, і т. ін. Феномен очікування не можна виключити без надмірних витрат, проте можливим є скорочення часу небажаного очікування в черзі до деяких допустимих меж.

При ДО часто доводиться стикатися із системами, призначеними для багаторазового використовування при розв'язанні однотипних задач. Процеси, що виникають при цьому, називають *процесами обслуговування,* а системи – *системами масового обслуговування (СМО).*

Кожна СМО складається з *каналів обслуговування*, за кількістю яких СМО підрозділяють на *одноканальні* й *багатоканальні*.

Процес обслуговування характеризується *інтервалом між послідовними надходженнями* заявок або вимог і *часом обслуговування*.

Якщо заявки або вимоги надходять не регулярно, а випадково, то вони утворюють *випадковий потік заявок*. СМО завантажується нерівномірно: то скупчується велика кількість заявок, і вони стають у чергу або покидають СМО необслуженими, то немає жодної заявки.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, що пов'язують задані умови роботи СМО (кількість каналів, їхня продуктивність, характер потоку заявок і т. ін.) з показниками її ефективності.

Класи СМО:

– *СМО з відмовами* – заявка, що надійшла тоді, коли всі канали зайнято; дістає відмову, покидає СМО і в процесі обслуговування не бере участі;

– *СМО з очікуванням (чергою)* – заявка, що надійшла тоді, коли всі канали зайнято; не йде, а стає в чергу на обслуговування.

Процес роботи СМО – це випадковий процес з дискретним станом і безперервним часом. Це означає, що стан СМО змінюється стрибком у випадкові моменти виникнення якихось подій (надходження нової заявки, закінчення обслуговування й т. ін.).

У СМО заявки, що надходять, утворюють потік подій, який характеризується *інтенсивністю* λ-частоти появи подій або середньою кількістю подій, що надходять у СМО за одиницю часу.

Важлива характеристика СМО – час, або тривалість, обслуговування вимог у системі, що є випадковою величиною і описується експоненціальним (показовим) законом розподілу.

5.1. Одноканальна СМО з відмовами

Існує канал, на який надходить потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговувань має інтенсивність μ – середню кількість заявок, обслужених безперервно зайнятим каналом. Тривалість обслуговування – випадкова величина, що підпорядковується показовому закону розподілу.

Приклад 5.1. Знайти граничну ймовірність станів системи і показники її ефективності.

Розв’язання. Система масового обслуговування має два стани: S_0 – канал вільний (очікування); S_1 – канал зайнятий (заявка обслуговується).

1. *Гранична ймовірність станів* $P_к$. При цьому $P_0(t)$ – імовірність стану «канал вільний», $P_1(t)$ – імовірність стану «канал зайнятий», які визначають час перебування системи в стані S_0 (коли канал вільний) і в стані S_1 (коли канал зайнятий) (для аналізу їх зручно переводити у відсотки):

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \; P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

де $P_0 + P_1 = 1$.

2. *Імовірність відмови в обслуговуванні* $P_{відм}$. Величину можна інтерпретувати як середню частку необслужених заявок серед поданих

(для аналізу зручно переводити у відсотки):

$$P_{відм} = P_1 = 1 - Q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

3. *Середній час обслуговування* $\bar{t}_{об}$ – величина, обернена до інтенсивності:

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}.$$

4. *Відносна пропускна спроможність СМО Q* – середня кількість заявок, що надійшли і які обслуговує система. Для аналізу зручно переводити у відсотки. Для одноканальної СМО з відмовами відносна пропускна спроможність системи Q збігається з імовірністю $P_0(t)$:

$$Q = P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

5. *Абсолютна пропускна спроможність СМО A* – середня кількість заявок, які СМО обслуговує за одиницю часу:

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

6. *Номінальна пропускна спроможність системи*

$$A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{об}}.$$

5.2. Одноканальна СМО з очікуванням (чергою)

Одноканальна СМО з очікуванням має один канал, на який надходить потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговувань має інтенсивність μ. Заявка, що надійшла тоді, коли канал зайнято, стає в чергу і чекає обслуговування.

Середню кількість заявок, що надходить за середній час обслуговування однієї заявки, називають *зведеною інтенсивністю потоку заявок*, або *інтенсивністю навантаження каналу*, і визначають за формулою

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Якщо μ не задано, але середній час обслуговування є відомим, то

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{1/\bar{t}_{об}} = \lambda\bar{t}_{об}.$$

5.3. Одноканальна СМО з очікуванням з необмеженою чергою

Одноканальна СМО з очікуванням з необмеженою чергою не має обмежень на кількість заявок у черзі і може перебувати в одному із станів:

– S_0 – канал вільний;

– S_1 – канал зайнятий (обслуговує одну заявку), черги немає;

– S_2 – канал зайнятий (обслуговує одну заявку), одна заявка стоїть у черзі;

…

– S_n – канал зайнятий (обслуговує одну заявку), $(n – 1)$ заявок стоїть у черзі;

…

Якщо $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, тобто середня кількість заявок, що надходять, менша за середню кількість обслужених заявок за одиницю часу, то черга не може нескінченно зростати і гранична ймовірність існує. Якщо $\rho \geq 1$, то черга зростає до нескінченності.

Приклад 5.2. Знайти граничну ймовірність станів системи і показники її ефективності.

Розв'язання.

1. *Граничні (*або *фінальні) імовірності станів:*

$$P_o = 1 - \rho \ \text{при} \ \rho < 1,$$

$$P_1 = \rho(1 - \rho) = \rho P_0,$$

...

$$P_n = \rho^n(1 - \rho) = \rho^n P_0,$$

...

При $\rho < 1$ граничні ймовірності утворюють спадну геометричну прогресію із знаменником ρ, отже, імовірність P_0 є найбільшою. Це означає, що якщо СМО справляється з потоком заявок (при $\rho < 1$), то найімовірнішим буде відсутність заявок у системі.

2. *Середня кількість заявок у системі*

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

3. *Середню кількість заявок під обслуговуванням* визначимо за формулою математичного сподівання кількості заявок під обслуговуванням, що набуває значення *0* (якщо канал вільний) або *1* (якщо канал зайнятий):

$$L_{об} = \rho.$$

4. *Довжина черги (середня кількість заявок у черзі)*

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

5. *Середній час знаходження заявки в системі (черзі)*

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

6. *Середній час знаходження заявки в черзі*

$$T_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Решту показників ($\bar{t}_{об}$, $P_{відм,}$ Q, $A_{ном}$, $P_{зайн}$) знаходимо за формулами для СМО з відмовами.

5.4. Одноканальна СМО з обмеженою чергою

Одноканальна система з обмеженою чергою (черга + клієнти, що обслуговуються) не може вміщати більш ніж N заявок. Якщо нова заявка надходить тоді, коли всі місця в черзі зайнято, то вона залишає СМО необслуженою – отримує відмову. Отже, за умови, що в СМО вже є n ($n \leq N$) заявок, інтенсивність надходження заявок в систему

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0,\ 1,\ ...,\ N-1; \\ 0, & n = N,\ N+1,\ ..., \end{cases}$$

а інтенсивність вихідного потоку заявок $\mu_n = \mu$.

Приклад 5.3. Знайти граничну ймовірність станів системи і показники її ефективності.

Розв'язання. Система може перебувати в одному із станів:

- S_0 – канал вільний;
- S_1 – канал зайнятий (обслуговує заявку), черги немає;
- S_2 – канал зайнятий, одна заявка стоїть у черзі;

…
- S_n – канал зайнятий, (n – 1) заявок стоїть у черзі;

…
- S_N – канал зайнятий, (N – 1) заявок стоїть у черзі.

Максимальна довжина черги – (N – 1).

1. *Імовірність стану «канал вільний»*

$$P_o = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}.$$

2. *Імовірність стану* СМО в стані S_n

$$P_n = P_0 \rho^n .$$

3. *Ступінь завантаження каналу* – імовірність того, що канал зайнятий

$$P_{зайн} = 1 - P_0.$$

4. *Частота* виникнення ситуацій, коли заявка, що надходить в систему, не має змоги приєднатися до черги

$$m = \lambda P_n.$$

5. *Імовірність відмови обслуговування заявки*

$$P_{відм} = P_{N+1} = P_0 \rho^{N+1} .$$

6. *Відносна пропускна спроможність СМО*

$$Q = 1 - P_{відм.}$$

7. *Середня кількість заявок, що обслуговуються*,

$$L_{об} = P_{зайн} = 1 - P_0.$$

8. *Довжина черги*

$$L_{оч} = \frac{\rho^2 \left[1 - \rho^N (N + 1 - N\rho \right]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+2})} .$$

9. *Середня кількість заявок в системі*

$$L_{сист} = \begin{cases} \dfrac{\rho \left[1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1} \right]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}, \rho \neq 1; \\ \dfrac{N}{2}, \rho = 1. \end{cases}$$

Решту показників ($\bar{t}_{об}$, $T_{сист}$, $T_{оч}$, Q, A) знаходимо за формулами для СМО з відмовами.

5.5. Багатоканальна СМО з відмовами

Існує N каналів, на які надходить потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговувань має інтенсивність μ. Режим функціонування того чи іншого каналу, що обслуговується, не впливає на режим функціонування інших каналів СМО, причому тривалість процедури обслуговування кожним із каналів є випадковою величиною, що підпорядковується експоненціальному закону розподілу.

Приклад 5.4. Знайти граничну ймовірність станів системи і показники її ефективності.

Розв'язання. Система може перебувати в одному із станів:

- S_0 – усі канали вільні;
- S_1 –зайнято один канал (обслуговує заявку), інші вільні;
- S_2 – зайнято два канали;

  …
- $S_к$ – зайнято k каналів, інші вільні;

  …
- S_N – зайнято N каналів, заявка отримує відмову в обслуговуванні.

1. *Граничні ймовірності станів*:

$$P_o = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ \ldots\ +\frac{\rho^n}{к!}+\ \ldots\ +\frac{\rho^N}{N!}\right)^{-1} = \frac{1}{\left[\sum\limits_{к=0}^{N}\frac{\rho^к}{к!}\right]};$$

$$P_1 = \rho P_0;$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!}P_0;$$

$$\ldots$$

$$P_к = \frac{\rho^к}{к!}P_0;$$

$$\ldots$$

$$P_N = \frac{\rho^N}{N!}P_0.$$

2. *Імовірність відмови* – гранична ймовірність того, що всі N каналів системи будуть зайнятими (для аналізу зручно переводити у відсотки):

$$P_{отк} = \frac{\rho^N}{N!}P_0.$$

3. *Відносна пропускна спроможність СМО*

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^N}{N!}P_0.$$

4. *Абсолютна пропускна спроможність СМО*

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - \frac{\rho^n}{n!}P_0).$$

5. *Середня кількість зайнятих каналів*

$$\bar{к} = \sum_{k=0}^{N} kP_k \text{ , або } \bar{к} = \frac{A}{\mu} = \rho(1-\frac{\rho^n}{n!}P_0).$$

Приклад 5.5. *Заявки* в телевізійному ательє по телефону надходять з інтенсивністю $\lambda = 90$ заявок за годину, а середня тривалість розмови по телефону $\bar{t}_{об} = 2$ хв. Визначити показники ефективності роботи СМО (телефонного зв'язку) за наявності одного телефонного номера.

Розв'язання. Ця СМО є одноканальною з відмовами. Маємо $\lambda = 90$ год$^{-1}$, $\bar{t}_{об} = 2$ хв. Інтенсивність потоку обслуговування $\mu = 1/\bar{t}_{об} =$ $= 1/2 = 0,5$ хв$^{-1}$ $= 30$ год$^{-1}$.

Відносна пропускна спроможність $Q = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} = \dfrac{30}{90+30} = 0,25$, тобто в середньому по телефону буде обслужено тільки *25 %* заявок із тих, що надійшли.

Імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = \dfrac{90}{90+30} = 1 - Q = 0,75$, тобто близько *75 %* заявок отримають відмову.

Абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda Q = 90 \cdot 0,25 = 22,5$, тобто в середньому за годину буде обслужено *22,5* заявки на переговори.

Очевидно, що за наявності тільки одного телефону СМО погано справлятиметься з потоком заявок.

Приклад 5.6. У порту є один причал для розвантаження суден. Інтенсивність потоку суден становить 0,4 судна за добу. Середній час розвантаження одного судна становить 2 доби. Передбачається, що черга може бути необмеженої довжини. Знайти показники ефективності роботи причалу, а також імовірність того, що розвантаження чекають не більше двох суден.

Розв'язання. Розглянемо одноканальну СМО з необмеженою чергою. Маємо

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{1/\bar{t}_{об}} = \lambda\bar{t}_{об} = 0,4 \cdot 2 = 0,8 .$$

Оскільки $\rho = 0,8 < 1$, черга на розвантаження не може нескінченно збільшуватися і гранична ймовірність існує.

Імовірність того, що причал є вільним,

$$P_o = 1 - 0,8 = 0,2 .$$

Імовірність того, що біля причалу знаходяться (тобто чекають розвантаження) *1*, *2*, *3* судна:

$$P_1 = \rho P_0 = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16;$$
$$P_2 = \rho^2 P_0 = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128;$$
$$P_3 = \rho^3 P_0 = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024.$$

Імовірність того, що розвантаження чекають не більше двох суден,

$P = P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}3904$. Довжина черги, тобто середня кількість суден, що чекають розвантаження,

$$L_{оч} = \frac{0{,}8^2}{(1-0{,}8)} = 3{,}2 .$$

Середній час очікування розвантаження

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч} = \frac{3{,}2}{0{,}8} = 4 \text{ доби.}$$

Середня кількість суден біля причалу (середня кількість заявок у системі)

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4, \; або \; L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = 3{,}2 + (1-0{,}2) = 3{,}2 + 0{,}8 = 4 \text{ доби.}$$

Середній час перебування судна біля причалу (середній час перебування заявки в системі)

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист} = \frac{4}{0{,}8} = 5 \text{ діб.}$$

Ефективність розвантаження суден є невисокою. Для її підвищення необхідно зменшити середній час розвантаження судна $\bar{t}_{об}$ або збільшити кількість причалів n.

Приклад 5.7. У порту є один причал для розвантаження суден. Інтенсивність потоку суден дорівнює 0,4 судна за добу. Середній час розвантаження одного судна становить 2 доби. Відомо, що судно залишає причал без розвантаження, якщо в черзі на розвантаження стоять більше трьох суден. Знайти показники ефективності роботи причалу.

Розв'язання. Розглянемо одноканальну СМО з обмеженою чергою. За умовою $N = 3$.

Імовірність того, що причал вільний,

$$P_o = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} = \frac{1-0{,}6}{1-0{,}8^{3+2}} = 0{,}297.$$

Імовірність того, що судно залишає причал без розвантаження,

$$P_{отк} = P_{N+1} = P_0 \rho^{N+1} = 0{,}8^{3+1} \cdot 0{,}297 = 0{,}122 .$$

Відносна пропускна спроможність

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}122 = 0{,}878.$$

Абсолютна пропускна спроможність причалу

$$A = \lambda Q = 0{,}4 \cdot 0{,}878 = 0{,}351,$$

тобто в середньому за добу розвантажується 0,35 судна.

Довжина черги, тобто середня кількість суден, що чекають розвантаження,

$$L_{оч} = \frac{0{,}8^2\left[1 - 0{,}8^3(3 + 1 - 3 \cdot 0{,}8\right]}{(1 - 0{,}8)(1 - 0{,}8^{3+2})} = 0{,}861.$$

Середній час очікування розвантаження

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч} = \frac{0{,}861}{0.{,}8} = 1{,}076 \text{ доби.}$$

Середня кількість суден, що знаходяться біля причалу,

$$L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = 0{,}861 + (1 - 0{,}297) = 1{,}564.$$

Середній час перебування судна біля причалу

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист} = \frac{1{,}564}{0{,}8} = 1{,}955 \text{ доби.}$$

6. СУТЬ І ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ СІТКОВОГО ПЛАНУВАННЯ Й КЕРУВАННЯ

Чим складніше планована робота або проект, тим складнішими будуть задачі оперативного планування, контролю й керування. У цих умовах застосування календарного графіка не завжди може бути досить задовільним, особливо для великого й складного об’єкта, оскільки не дає змоги обґрунтовано й оперативно планувати, вибирати оптимальний варіант тривалості виконання робіт, використовувати резерви й коригувати графік під час діяльності. Перелічені недоліки лінійного календарного графіка значною мірою усуваються при використанні системи сіткових моделей, які дають змогу аналізувати графік, виявляти резерви й використовувати електронно-обчислювальну техніку. Застосування сіткових моделей забезпечує продуману детальну організацію робіт, створює умови для ефективного керування.

Весь процес відображається в графічній моделі, яку називають сітковим графіком, де враховуються всі роботи від проектування до запровадження в дію, визначаються найбільш важливі, критичні роботи, від виконання яких залежить термін закінчення проекту. Під час діяльності є можливість коригувати план, вносити зміни, забезпечувати безперервність в оперативному плануванні. Наявні методи аналізу сіткового графіка дають змогу оцінити ступінь впливу внесених змін на хід виконання програми, прогнозувати стан робіт на майбутнє. У сітковому графіку точно зазначено роботи, від яких залежить термін виконання програми.

Сіткове планування й керування (СПК) – це сукупність розрахункових методів, організаційних і контрольних заходів з планування комплексу робіт і керування ним з допомогою сіткового графіка (сіткової моделі).

Під комплексом робіт будемо розуміти будь-яку задачу, для виконання якої необхідно здійснити досить велику кількість різноманітних робіт. Для того щоб скласти план робіт з виконання великих і складних проектів, що містять тисячі окремих досліджень і операцій, необхідно описати їх з допомогою математичної моделі, якою є сіткова модель.

Сіткова модель – це план виконання певного комплексу взаємозалежних робіт, заданих у формі сітки, графічне зображення якої має назву сіткового графіка.

Головними елементами сіткової моделі є роботи й події. Термін «робота» в СПК має кілька значень. По-перше, це саме робота – процес, який триває в часі й потребує витрат ресурсів (наприклад, складання виробу, випробування приладу й т. ін.). Кожна робота повинна бути конкретною, чітко описаною і мати відповідального виконавця.

По-друге, це очікування, яке триває в часі, – процес, що не потребує витрат праці (наприклад, процес сушіння після фарбування, тужавіння бетону й т. ін.).

По-третє, це залежність, або фіктивна робота, – логічний зв’язок між двома або кількома роботами (подіями), які не потребують витрат праці, матеріальних ресурсів або часу. Це означає, що можливість однієї роботи безпосередньо залежить від результатів іншої. Звичайно, що тривалість фіктивної роботи береться такою, що дорівнює нулю.

Подія – це момент завершення певного процесу, що відображає окремий етап виконання проекту. Подією може бути частковий результат окремої роботи або сумарний результат декількох робіт. Подія може здійснитися тільки тоді, коли закінчаться всі роботи, що їй передують. Наступні роботи можуть початися тільки тоді, коли подія здійсниться. Звідси випливає двоїстий характер події: для всіх робіт, що безпосередньо їй передують, вона є кінцевою, а для всіх тих, що безпосередньо настають за нею, – початковою. При цьому передбачається, що подія не має тривалості й здійснюється нібито миттєво. Тому кожна подія сіткової моделі має бути повно, точно й усебічно визначеною, її формулювання має містити результат усіх робіт, що їй безпосередньо передують.

При складанні сіткових графіків (моделей) використовують умовні позначки (рис. 6.1). Події на сітковому графіку (або, як ще кажуть, на графі) зображують кружками (вершинами графа), а роботи – стрілками (орієнтованими дугами): $\bigcirc$ – подія; $\longrightarrow$ – робота (процес), $\dashrightarrow$ – фіктивна робота (застосовують для спрощення сіткових графіків (тривалість завжди дорівнює нулю)).

Серед подій сіткової моделі вирізняють вихідні й кінцеві події.

Вихідна подія не має попередніх робіт і подій, що належать до наведеного в моделі комплексу робіт. Кінцева подія не має наступних робіт і подій.

Існує й інший принцип будування сіток – без подій. На такій сітці вершини графа означають певні роботи, а стрілки – залежності між роботами, що визначають порядок їх виконання. Сітковий графік «Робота – зв’язок» на відміну від графіка «Події – роботи» має певні переваги: не містить фіктивних робіт, має більш просту техніку будування й перебудування, містить тільки добре знайоме виконавцям поняття роботи без менш звичного поняття події.

Разом з тим сітки без подій виявляються більш громіздкими, тому що подій зазвичай значно менше, ніж робіт (показник складності сітки дорівнює відношенню кількості робіт до кількості подій і істотно більше одиниці). Тому ці сітки є менш ефективними з огляду на керування комплексом. Цим і пояснюється той факт, що сьогодні найбільшого поширення набули сіткові графіки «Події – роботи».

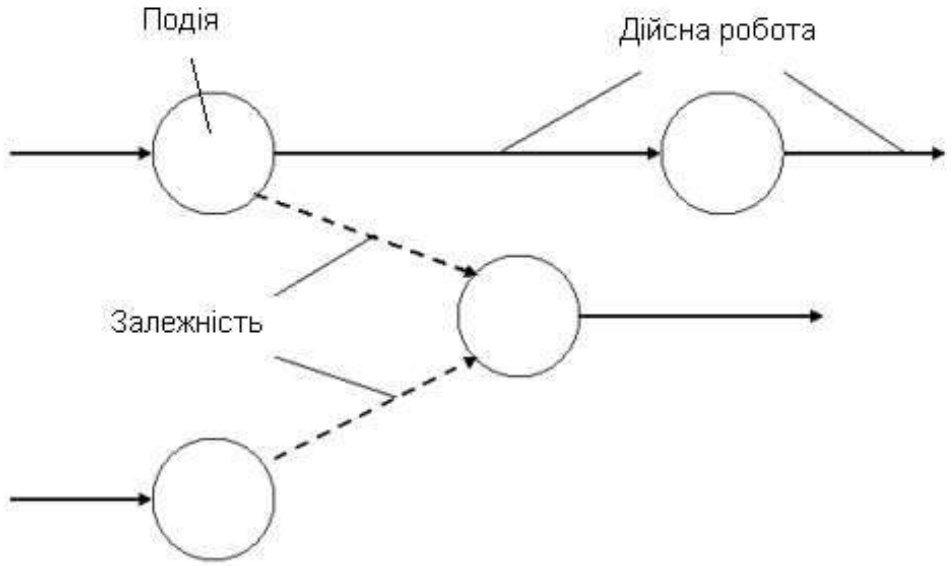


Рис. 6.1

Якщо в сітковій моделі немає числових оцінок, то така сітка має назву структурної. Однак на практиці найчастіше використовують сітки, у яких задано оцінки тривалості робіт, а також оцінки інших параметрів, наприклад трудомісткості, вартості й т. ін.

Темпи виробництва, його масштаби і спеціалізація окремих галузей, багатопрофільні зв’язки обумовлюють необхідність розроблення ефективних методів планування й керування, які б давали змогу оцінити змінний стан системи й передбачити її майбутнє, щоб оптимізувати відповідний процес і керувати ним. Системи об’єктів дослідження разом зі зв’язками між ними називають сіткою. Діапазон реального існування сіток дуже широкий: системи електропостачання, радіо- і телекомунікацій, транспортні (залізничні, автомобільні), об’єкти господарювання як в одному господарстві, так і в їх комплексі, плани виконання робіт з реалізації певних проектів і т. ін. Прикладами таких систем можуть бути також організація поточного виробництва, реконструкція існуючого виробництва, організація капітального будівництва, реконструкція і ремонт існуючих споруд, організація науково-дослідних робіт тощо, де також необхідно узгоджувати й оцінювати зв'язки між окремими елементами.

Методи планування сіток і керування ними забезпечують:

– складання календарного плану виконання певного комплексу робіт;

– оцінювання необхідних трудових, матеріальних і фінансових ресурсів, затрат часу;

– контроль комплексу робіт з прогнозуванням можливих зривів при виконанні робіт і запобіганням цьому;

– ефективне керування при чіткому розподілі відповідальності між керівниками різних рівнів і виконавцями робіт;

– оцінювання дієздатності і якості системи стосовно певних критеріїв.

Для одних систем зв'язки між об'єктами реалізовано фізично (система комунікацій між населеними пунктами), для інших ці зв'язки мають інформаційний характер або є поєднанням як фізичної реалізації, так і інформаційної.

Математичний апарат, який використовується при дослідженні сіток, розроблено у так званій теорії графів.

6.1. Елементи сіткового графіка, методика його будування

Щоб побудувати математичні моделі розв'язання задач планування сіток і керування ними, необхідно дослідити попарні (бінарні) зв'язки між об'єктами, які утворюють систему дослідження. Графічне зображення множини досліджуваних об'єктів і зв'язків між ними називають графом.

Граф доцільно зображати у вигляді діаграми, де об'єкти відтворюють пронумерованими точками або кружками, які називають вершинами, зв'язки між об'єктами – відрізками ліній, що з'єднують відповідні об'єкти. Якщо зв'язок між двома об'єктами *A* і *B* однобічний (від *A* до *B* є зв'язок, а зворотного зв'язку немає), то його зображують орієнтованим відрізком, стрілка якого відповідає напрямку зв'язку. Такий однобічний орієнтований відрізок називають дугою, а графічне зображення неорієнтованих попарних зв'язків між об'єктами – ребрами (ситуація, коли об'єкт *A* може бути пов'язаний з об'єктом *B* і навпаки). Надалі за термінологією поняття графа і його діаграми будуть однаковими. Граф, вершини якого мають лише однобічні зв'язки, називають орієнтованим, або орграфом.

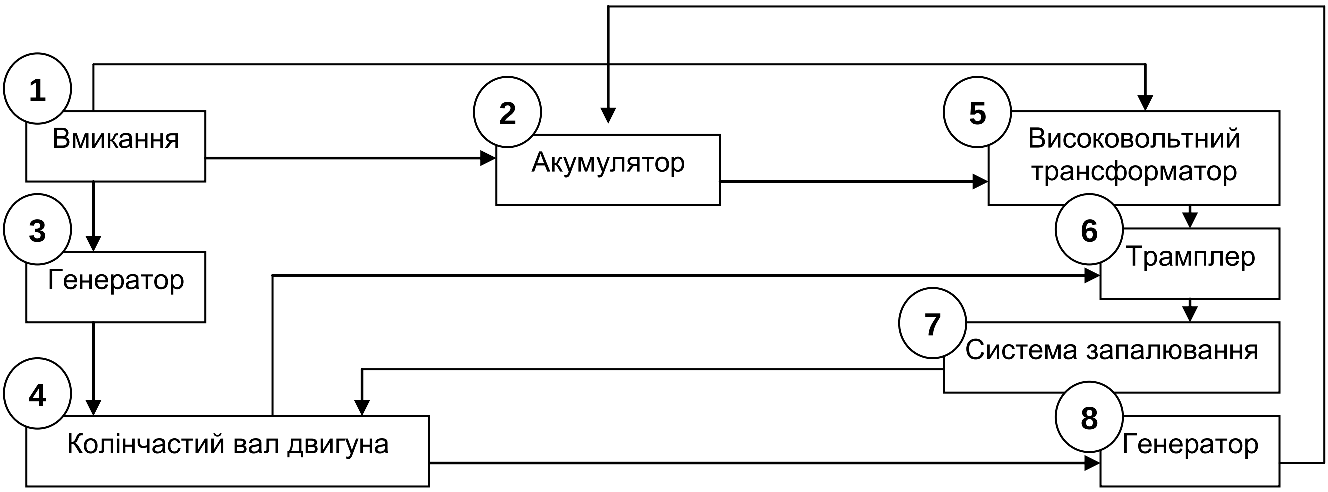
Приклад 6.1. Карта автомобільних доріг є графом, вершини якого – населені пункти, а зв'язки (ребра або дуги у випадку однобічного руху) – дороги, які з'єднують населені пункти.

Приклад 6.2. При розв'язанні задач технічної діагностики (наприклад, при пошуку зіпсованого елемента) досліджувану систему умовно поділяють на кілька взаємозв'язаних частин, кожна з яких виконує певну функцію. Схему функціонування такої системи зручно зобразити як орієнтований граф, вершинами якого будуть виділені частини системи, а дугами – функціональні зв’язки між цими частинами.

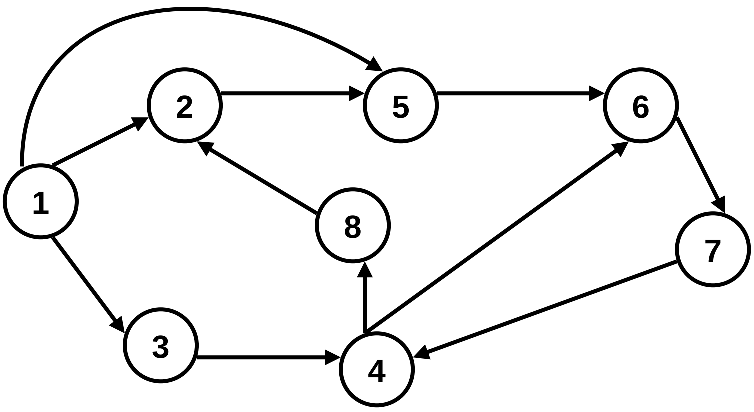
На рис. 6.2 зображено схему використання обладнання при запуску бензинового двигуна внутрішнього згоряння (*а*) і її граф (*б*).

Граф вважається *завантаженим,* якщо його визначено разом з певною функцією на множині ребер або дуг. Така функція може визначати відстань між вершинами (карта доріг), час або вартість перевезень між населеними пунктами, пропускну здатність лінії електропередач або каналу системи зрошення.

Маршрутом називають таку послідовність ребер, коли кожна пара суміжних ребер має одну загальну вершину.



а



б

Рис. 6.2

Простим ланцюгом (надалі – ланцюгом) називають маршрут, у якому вершини не повторюються.

Ланцюг визначається послідовністю вершин, через які він проходить.

Цикл – це ланцюг, початкова вершина якого збігається з кінцевою.

Шляхом називають орієнтований ланцюг. Отже, поняття «шлях» стосується лише орієнтованих графів.

6.2. Будування правильної нумерації вершин графа

Взагалі вершини графа можна нумерувати довільно, але для розв'язання багатьох практичних задач зручно виконувати так звану правильну нумерацію вершин. При такій нумерації будь-який шлях від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером буде проходити лише через вершини, які пронумеровано за збільшенням, правильна нумерація вершин виконується за так званим *алгоритмом викреслювання дуг*.

Опишемо зміст цього алгоритму, пояснюючи його етапи на прикладі завантаженого графа, зображеного на рис. 6.3, де у квадратах наведено деяку довільну нумерацію вершин.

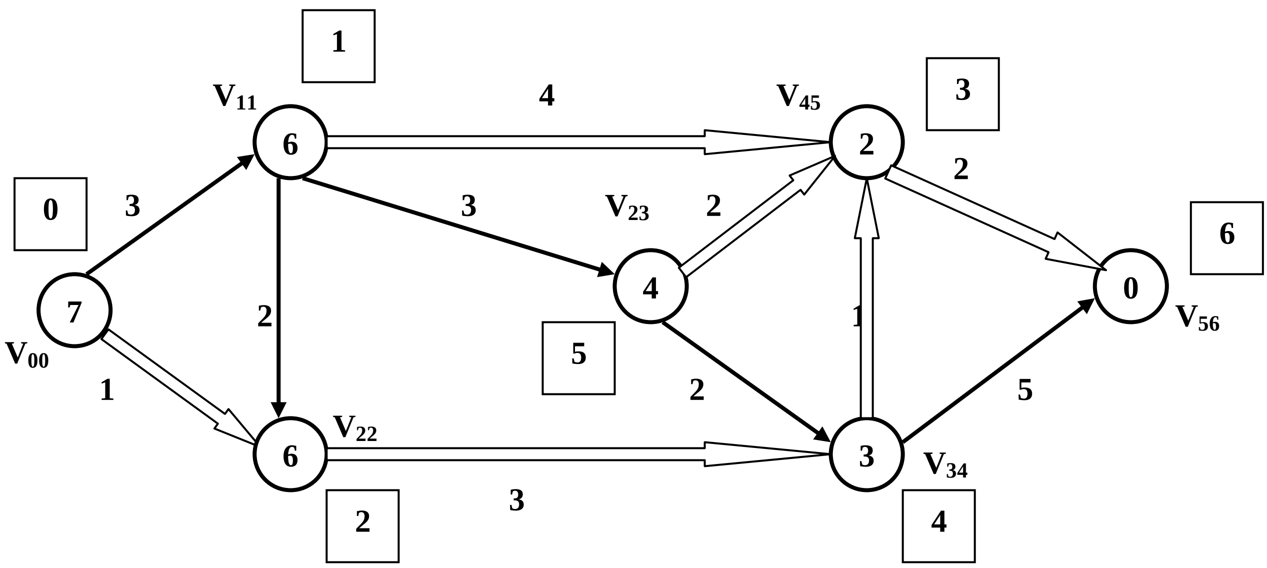


Рис. 6.3

Умовно виділимо всі дуги, які виходять з початкової вершини. Цю вершину назвемо вершиною *нульового рангу* й присвоїмо їй номер «*00*» (V_{00}). Тепер розглянемо вершини, у які не заходять інші дуги, окрім викреслених. Такі вершини назвемо вершинами *1-го рангу* і пронумеруємо їх у довільному порядку, дотримуючись неперервності в нумерації. За цих умов кожній вершині будемо присвоювати два індекси: перший – ранг вершини, другий – її порядковий номер серед усіх вершин однакового рангу. На графі (див. рис. 6.3) маємо одну вершину V_{11} *1*-го рангу.

Умовно викреслимо всі дуги, які виходять з вершин *1*-го рангу. Вершини, у які не заходять інші дуги, окрім уже позначених, назвемо вершинами *2*-го рангу і пронумеруємо їх у довільній послідовності, зберігаючи неперервність в нумерації відносно раніше використаних чисел натурального ряду. Для графа на рис. 6.3 це вершини V_{22} і V_{23}.

Припустимо, пройдено (*n* – *1*)-й етап і визначено вершини (*n* – *1*)-го рангу. Викреслимо всі дуги, які виходять з вершин (*n* – *1*)-го рангу. Розглянемо всі вершини, у яких закінчуються викреслені на цьому етапі дуги. Вершини, у які заходять лише дуги, визначені на (*n* – *1*)-му етапі, утворюють множину вершин *n*-го рангу. Пронумеруємо їх у довільному порядку, використовуючи числа натурального ряду, починаючи з найменшого, яке не було використано для нумерації вершин *(n – 1)-го* рангу. Алгоритм завершується після досягнення кінцевої вершини. Для графа на рис. 6.3 це вершина V_{56}, де індекс «*5*» означає ранг кінцевої вершини, а індекс «*6*» – її порядковий номер. Виконавши правильно нумерацію вершин графа, у подальшому індекс рангу вершини можна не вказувати.

6.3. Алгоритм пошуку найкоротшого шляху сітки (графа)

Виконавши правильну нумерацію графа сітки, можна ефективно реалізувати алгоритм пошуку найкоротшого шляху між заданими вершинами. Реалізацію алгоритму зведено до будування послідовності шляхів з однієї дуги, двох дуг, трьох дуг і т. д., які з'єднують вершини певного рангу з кінцевою вершиною. При цьому перегляд вершин виконується в порядку зменшення їхніх номерів. На кожному етапі алгоритму відбувається перехід від вершини більш високого рангу до вершини меншого рангу за умови, що з усіх шляхів, які починаються в одній і тій самій вершині, необхідно залишити для наступного кроку реалізації алгоритму лише найкоротший шлях від цієї вершини до кінцевої. При правильній нумерації вершин такий упорядкований перехід у послідовності зменшення рангів відбувається автоматично, навіть за умови, коли нумерації рангів вершин немає.

Розглянемо реалізацію алгоритму на прикладі графа, зображеного на рис. 6.3. Згідно з алгоритмом будемо рухатися від кінцевої вершини V_{56} до початкової V_{00}, послідовно від вершин більш високого рангу до вершин меншого рангу. У кружках, які зображають вершини графа, будемо записувати найкоротшу відстань від вершини (*n* – *1*)-го рангу до кінцевої вершини. Одночасно найкоротший шлях від кожної вершини до кінцевої будемо позначати подвійною стрілкою. У кружку кінцевої вершини V_{56} записуємо «*0*», оскільки звідси виконуємо відлік відстані. Потім переходимо до вершини *4*-го рангу – у прикладі це вершина V_{45}. Від цієї вершини до кінцевої маємо лише один шлях: (V_{45}, V_{56}). Його довжина дорівнює двом одиницям виміру, її і запишемо у вершині V_{45}, а відповідну дугу позначимо на графі подвійною стрілкою.

Переходимо до вершини *3*-го рангу V_{34}. З цієї вершини до кінцевої є два шляхи: (V_{34}, V_{56}) і (V_{34}, V_{45}, V_{56}). Найкоротшим є останній. Його одержуємо, додаючи дугу (V_{34}, V_{45}) до вже побудованого шляху (V_{45}, V_{56}) і відмічаючи шлях (V_{34}, V_{45}) подвійною стрілкою. Довжина шляху (V_{34}, V_{45}, V_{56}) становить $1 + 2 = 3$, записуємо це число у вершині V_{34}. Шлях (V_{34}, V_{56}) при наступних пошуках не використовуємо, тому що з вершини *3*-го рангу вже знайдено найкоротший шлях до кінцевої вершини.

Переходимо до вершин *2*-го рангу (V_{22}, V_{23}). Розглянемо шляхи, якими можна перейти від цих вершин до вершин вищого рангу. З вершини V_{22} до вершини вищого рангу можна потрапити лише по дузі (V_{22}, V_{34}). Її відмічаємо подвійною лінією і записуємо у вершину V_{22} найкоротшу відстань від V_{22} до V_{56} – $3 + 3 = 6$, враховуючи, що найкоротшу відстань від V_{34} до V_{56} уже визначено. З вершини V_{23} можна потрапити у вершини вищого рангу або по дузі (V_{23}, V_{34}), або по дузі (V_{23}, V_{45}). Обчислюємо шлях від V_{23} до V_{56} за умови руху із V_{23} по наведеним дугам. Шлях (V_{23}, V_{45}, V_{56}) має довжину $2 + 2 = 4$, шлях (V_{23}, V_{34}, V_{56}) – $2 + 3 = 5$. Порівнявши ці величини, робимо висновок, що найкоротшим шляхом від V_{23} до V_{56} буде шлях (V_{23}, V_{45}, V_{56}), отже, дугу (V_{23}, V_{45}) позначаємо подвійною лінією, а у вершині V_{23} ставимо цифру «*4*».

Розглянувши всі вершини *2*-го рангу, переходимо до вершин *1*-го рангу. У наведеному прикладі це лише V_{11}, з якої виходять дуги (V_{11}, V_{22}), (V_{11}, V_{23}) і (V_{11}, V_{45}). Розглядаємо й оцінюємо шляхи, які починаються цими дугами і закінчуються V_{56}: (V_{11}, V_{45}, V_{56}), (V_{45}, V_{23}, V_{45}, V_{56}) і (V_{11}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}). Інші шляхи, що починаються цими дугами й закінчуються в V_{56}, не розглядаємо, оскільки вони мають дуги, які не позначено подвійною стрілкою (шляхи з непозначеними подвійною стрілкою дугами не можуть бути найкоротшими до кінцевої вершини). Обчислюємо довжину кожного з трьох наведених шляхів і вибираємо найкоротший – (V_{11}, V_{45}, V_{56}). Довжину цього шляху ($4 + 2 = 6$) записуємо у V_{11}, позначивши подвійною лінією дугу (V_{11}, V_{45}). Отже, найкоротші шляхи як від V_{11}, так і від V_{22} до V_{56} мають однакову довжину – шість одиниць.

Перейдемо до розгляду вершини V_{00}. З неї виходять дві дуги – (V_{00}, V_{11}) і (V_{00}, V_{22}), користуючись якими, можна дістатися до вершин рангу, вищого за нульовий. З двох наведених дуг меншу довжину має дуга (V_{00}, V_{22}), тому найкоротший шлях від початкової вершини V_{00} до кінцевої V_{56} буде (V_{00}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}), його довжина – сім одиниць. Складові дуги шляху позначено подвійною лінією. Якщо завантаження графа (див. рис. 6.3) тлумачити не як відстані, а як тарифи перевезень вантажу, то знайдено шлях найменшої вартості перевезення з вершини V_{00} до V_{56}.

Зауваження 1. Використання описаного алгоритму дає можливість визначити найкоротший шлях і найменшу відстань від довільної вершини графа до кінцевої: найменша відстань записується в кружках, які зображують вершини, а найкоротший шлях помічається на графі подвійною лінією. *Наприклад* (див. рис. 6.3): найкоротший шлях з вершини V_{11} до V_{56} має довжину шість одиниць і проходить через вершини (V_{11}, V_{45}, V_{56}), з вершини V_{22} – також шість одиниць і проходить через вершини (V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}).

Зауваження 2. Описаний алгоритм побудовано на так званому принципі оптимальності: якщо найкоротший шлях від початкової вершини до кінцевої проходить через деяку вершину V_i, то відрізок цього шляху від вершини V_i, до кінцевої вершини є найкоротшим серед усіх шляхів, які з'єднують вершини V_i і кінцеву. Так, у розглянутому прикладі найкоротший шлях від V_{00} до V_{56} (V_{00}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}) як свої складові має найкоротші шляхи до кінцевої вершини від усіх вершин, через які він проходить.

6.4. Будування графа планування сіток і керування ними

Розглянемо методи планування сіток і керування (ПСК) ними при реалізації проектів створення складних систем, якими можуть бути як виробничі, так і науково-дослідні системи. Щоб скласти план виконання робіт за такими проектами, необхідно зобразити його у вигляді деякої математичної моделі, яка має назву моделі сітки і є відображенням певних послідовностей виконання робіт і взаємозв'язків між ними з урахуванням необхідних матеріальних ресурсів. Отже, під *моделлю сітки* будемо розуміти план виконання комплексу взаємозв'язаних робіт, наведений у специфічній формі графа, який має назву *графіка сітки.*

Основними елементами графіка сітки є поняття *події* і *роботи*.

Термін «*робота*» використовується в системі планування сіток і керування ними у широкому розумінні.

По-перше, це певна реальна робота, яка потребує затрат матеріальних ресурсів і відповідного терміну виконання. Кожна така робота має бути чітко визначеною, конкретною і стосуватися відповідального виконавця, без наявності якого марно говорити про планування.

По-друге, до поняття роботи відносять очікування – процес у часі, який не потребує ніяких матеріальних затрат (*наприклад*, тужавіння бетону після виконання відповідних робіт, висихання фарби тощо).

По-третє, *фіктивна робота* – це природний логічний взаємозв'язок між двома або кількома роботами або між їх завершеннями, який не потребує затрат праці, матеріальних ресурсів або часу. Такий взаємозв'язок є свідченням того, що можливість виконання однієї роботи безпосередньо залежить від результатів іншої. Термін виконання фіктивної роботи беруть таким, що дорівнює нулю.

Подія – це фіксація моменту завершення певного етапу виконання проекту. Подія може бути як результатом однієї роботи, так і підсумковим результатом декількох робіт. Подія може відбутися лише тоді, коли буде виконано всі роботи, які передують події. Наступні роботи можуть розпочатися лише за умови, що відповідна подія відбулася. Отже, для всіх попередніх робіт подія фіксує момент їх закінчення, а для наступних – початок.

Події, які визначають термін виконання певної роботи, називають *початковою* і *кінцевою.*

Початкова подія не має попередніх робіт і подій у досліджуваному комплексі робіт.

Кінцева подія не може мати наступних робіт і подій.

Подію на графі ПСК зображають кружками (вершини графу), а роботи – орієнтованими кутами, які є показниками того, які роботи необхідно виконати, щоб відбулася певна подія, і які можна виконувати, якщо подія відбулася. Отже, будь-яка робота на графі ПКС позначається двома подіями, між якими вона знаходиться. Подія ж може належати кільком роботам, які можна розпочинати, якщо відповідна подія відбулася. Фіктивні роботи на графі ПСК позначають штриховою лінією без зазначення часу. На рис. 6.4 наведено граф, з допомогою якого узагальнено можна описати комплекс будівельних робіт при спорудженні виробничого корпусу.

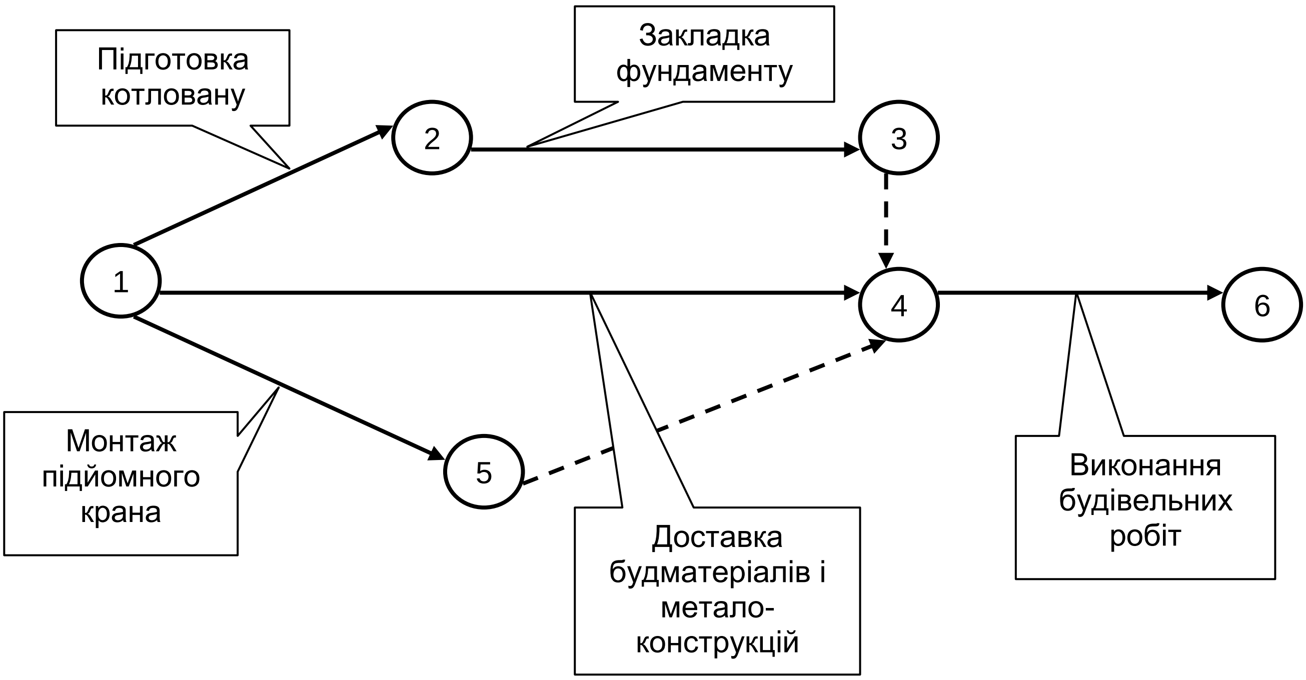


Рис. 6.4

І на початку, і після завершення реальної роботи має бути *лише одна подія,* оскільки роботи ідентифікуються за номерами подій, між якими виконуються, тому на графі введено фіктивні роботи (*3; 4*) і (*5; 4*).

Графи ПСК будують двома способами. При реалізації одного з них *роботи зображують дугами*, а *вершини відповідають подіям, які означають завершення робіт*. Це так званий граф «*Події – роботи*». Однак використовують і інший спосіб будування графів ПСК – *без подій*, де *роботи є вершинами графа*, а *дуги означають залежність між певними роботами в послідовності їх виконання*.

Побудовані за таким способом графи ПСК зазвичай є більш місткими й менш зручними для аналізу і реалізації в ЕОМ. Із зазначених причин на практиці ширше використовують будування графа ПСК за способом «*Події – роботи*». Саме цей спосіб будемо використовувати надалі.

6.5. Порядок і правила будування графів ПСК

План реалізації проекту виконання комплексу робіт починається з будування відповідного графа. На початку виділяють роботи, які відповідають певним етапам, складають реєстр робіт і подій, аналізують послідовність виконання робіт і взаємозв’язки між ними, за роботами закріплюють виконавців. Виходячи з розподілу процесу реалізації проекту на роботи й терміни їх виконання, будують відповідний граф ПСК. Потім виконують аналіз побудованого графа і його оптимізацію за вибраними критеріями. При будуванні графа ПСК необхідно дотримуватися певних правил, щоб надалі його можна було досліджувати. Правила будування графів ПСК графічно зображено на рис. 6.5 (позиції *а – л*).

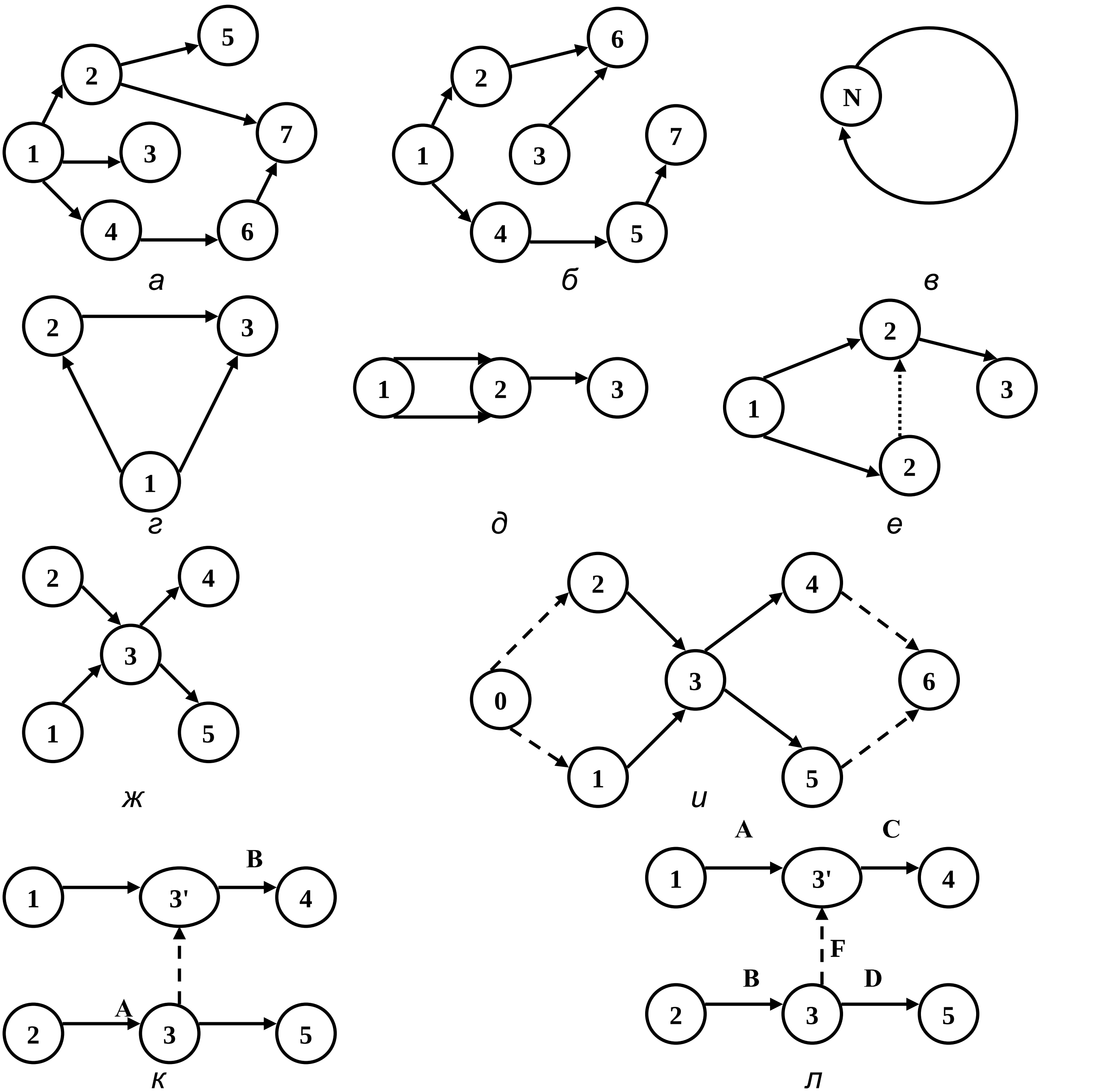


Рис. 6.5

1. *Граф ПСК не повинен мати* «глухих кутів» (тобто *подій, з яких не виходить жодної роботи*), *окрім кінцевої події* (рис. 6.5, *а*). Виникнення «глухих кутів» подій свідчить про не досить ретельно виконаний аналіз робіт і їх взаємозв'язків.

2. *На графі не може бути «хвостових*» *подій* (окрім вихідної події), тобто подій, яким не передує жодна робота. На рис. 6.5, *б* такою є подія *3*; вона не може відбутися, отже, не можуть відбутися й наступні події.

3. *Граф не може мати замкнених контурів і петель, тобто шляхів, які з'єднують певні події з ними самими* (рис. 6.5, *в*, *г*). Виникнення замкнених контурів потребує перегляду складу робіт і їх взаємозв'язків, після змістовного аналізу яких завжди можна уникнути замкнених контурів і петель.

4. *Дві довільні події мають бути безпосередньо пов'язаними не більш ніж однією дугою – роботою*. Це правило обумовлене тим, що роботи позначають двома індексами (*i*, *j),* які відповідають подіям «*i*» та «*j*». Якщо насправді треба виконати кілька робіт, які розпочинаються і завершуються одночасно, при одних і тих самих початкових і кінцевих подіях, то в таких випадках необхідно ввести фіктивні події і фіктивні роботи (рис. 6.5, *д*), паралельні роботи при цьому замикають на фіктивні події (рис. 6.5, *е*).

5. *На графі ПСК має бути лише одна початкова і лише одна кінцева події*. Якщо це об'єктивно не так (початок реалізації комплексу робіт можна розпочинати паралельно з декількома роботами (див. рис. 6.5, *ж*)), то необхідно ввести фіктивні події і роботи, як це показано на рис. 6.5 *и*.

Фіктивні події і роботи можна вводити й через інші умови. Однією з таких умов є відображення залежності подій, не пов'язаних з реальними роботами. *Наприклад*, роботи *А* і *В* (рис. 6.5, *к*) можна виконувати технологічно незалежно одна від одної, але в умовах конкретного виробництва роботу *В* не можна розпочати раніше, ніж завершиться *А.* За таких обставин необхідно ввести фіктивну роботу *С* (рис. 6.5, *л*).

Інший випадок – неповна залежність робіт.

Наприклад, роботу *С* можна розпочати лише після завершення робіт *А* і *В,* але роботу *D* – лише після завершення роботи *В*. Робота *D* не залежить від роботи *А.* У цьому випадку необхідно ввести фіктивну роботу *F* і фіктивну подію *3'*, як показано на рис. 6.5, *л*. Фіктивні роботи можна вводити і для відображення реальних відстрочень і очікувань – у цих випадках вони характеризуються відповідним часом.

6.6. Параметри планування сіток і керування ними за критерієм часу

Одним із визначальних основних понять графа ПСК є поняття шляху.

Шлях – це будь-яка послідовність робіт, коли кінцева подія кожної роботи є початковою подією наступної роботи. Серед шляхів графа ПСК вирізняють підмножини завершених шляхів.

Завершений шлях – це будь-який шлях, початком якого є початкова подія, а закінченням – кінцева. *Наприклад*, є завантажений граф ПСК з правильно введеною нумерацією. Термін шляху дорівнює сумі всіх термінів виконання робіт, які створюють шлях.

Завершений шлях з найбільшим терміном серед усіх завершених шляхів називають *критичним шляхом.* Роботи, які його створюють, називають *критичними*. Граф певної ПСК може мати кільки критичних шляхів.

Максимальним шляхом між двома подіями «i» та «j» називають шлях від i-ї до j-ї події, який має максимальний термін, тобто сума термінів робіт, які складають такий шлях, є не меншою ніж відповідна сума для довільного шляху від i-ї до j-ї події*.* *Наприклад*, для графа на рис. 6.6 завершеними шляхами будуть L_1 = [*2*; *6*; *7*] , L_2 = [*4*; *5*; *7*], L_3 = [3; 6; 7] і т. д. Їхні терміни – $t(L_1) = 3 + 5 + 16 = 24;$ $t(L_2) = 8 + 7 + 18 = 33;$ $t(L_3) = 4 + 10 + 16 = 30$. Критичний шлях слід визначати за алгоритмом, описаним у підрозд. 6.3, використовуючи завантаження дуги не пропускною спроможністю, а терміном виконання роботи, що відповідає дузі. Розглянемо інший спосіб обчислення терміну критичного шляху. Критичний шлях для графа $L_{кр}$ = [*1*; *2*; *4*; *5*; *7*], а його термін $t(L_{кр}) = 3 + 9 + 7 + 18 = 37$, на рисунку його зображено подвійною лінією. Критичними роботами будуть такі: (*1*; *2*), (*2*; *4*), (*4*; *5*), (*5*; *7*).

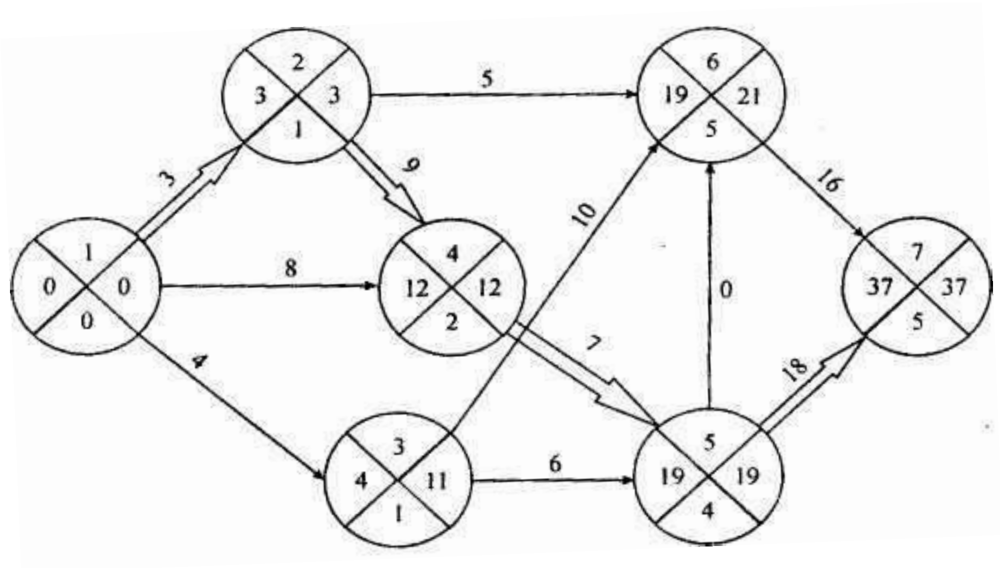


Рис. 6.6

Критичний шлях має особливе значення для ПСК, оскільки за роботами, що складають цей шлях, визначають загальний термін завершення всіх робіт комплексу, які плануються в цій системі ПСК.

Основні параметри ПСК за критерієм часу наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Елемент сітки, що характеризує параметр	Назва параметра	Умовні позначення
Подія i	Ранній термін звершення події	$t_р(i)$
	Пізній термін звершення події	$t_п(i)$
	Резерв часу події	$R_р(i)$
Робота (i, j)	Термін виконання роботи	$t(i,j)$
	Ранній термін початку роботи	$t_{рп}(i,j)$
	Ранній термін завершення роботи	$t_{рз}(i,j)$
	Пізній термін початку роботи	$t_{пп}(I,j)$
	Пізній термін завершення роботи	$t_{пз}(I,j)$
	Повний резерв часу роботи	$R_п(i,j)$
	Частковий резерв першого виду часу роботи	$R_1(i,j)$
	Частковий резерв другого виду часу роботи	$R_2(i,j)$
	Незалежний резерв часу роботи	$R_н(i,j)$
Шлях L	Термін шляху	$t(L)$
	Термін критичного шляху	t_{kp}
	Резерв часу шляху	$R_t(L)$

Розглянемо формули обчислення наведених параметрів. Використання формул покажемо на прикладі графа ПСК (див. рис. 6.6).

Результати обчислення параметрів записують у таблиці на зразок табл. 6.1, а якщо граф має невелику кількість подій (до двох десятків), то результати можна записувати на самому графі (рис. 6.7).

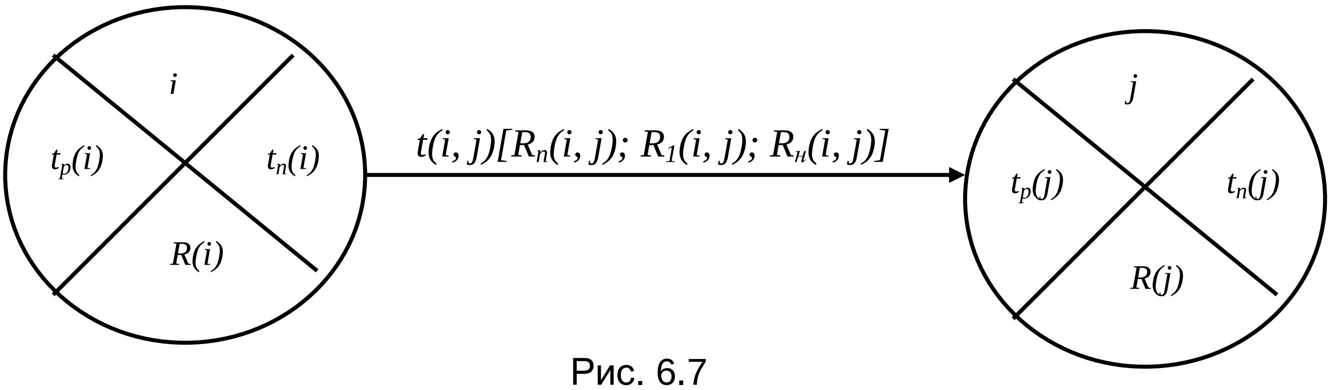


Рис. 6.7

Розглянемо параметри подій. Певна подія j не може відбуватися раніше, ніж завершаться всі роботи, які їй передують. Отже, ранній термін $t_р(j)$ можливого здійснення j-ї події визначається терміном максимального шляху:

$$t_р(j) = max\, t(L_{вj}), \tag{6.1}$$

де $L_{вj}$ – будь-який шлях, який передує j-й події, тобто шлях від вихідної до j-ї події.

Якщо подія j має кілька шляхів, які їй передують, тобто кілька попередніх подій i, то ранній термін $t_p(j)$ здійснення події j зручно обчислювати за формулою

$$t_p(j) = max\left[t_p(i) + t(i, j)\right]. \tag{6.2}$$

З формули (6.2) випливає, що обчислення параметра t_p доцільно починати з вихідної події, для якої t_p дорівнює нулю, розглядаючи наступні події в порядку збільшення їхніх номерів.

Затримка зі здійсненням i-ї події відносно свого раннього терміну не буде впливати на термін здійснення кінцевої події (отже, і на термін виконання досліджуваного комплексу робіт), поки сума термінів здійснення i-ї події і терміну максимального з усіх шляхів, які ідуть від i-ї події до кінцевої, не перевищить терміну критичного шляху. Таким чином, пізній (або граничний) термін t_n здійснення i-ї події обчислюється за формулою

$$t_n(i) = t_{kp} - \max_{L_{ік}} t(L_{ік}), \tag{6.3}$$

де $L_{ік}$ – будь-який шлях L від i-ї події до кінцевої.

Якщо подія «i» має кілька наступних шляхів і пов’язана з кількома наступними подіями «j», то пізній термін звершення події «i» зручно обчислити за формулою

$$t_n(i) = \min_{(i,j)}\left[t_n(j) - t(i, j)\right]. \tag{6.4}$$

Резерв часу $R(i)$ обчислюється як різниця пізнього й раннього термінів звершення i-ї події:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i) \ . \tag{6.5}$$

Резерв часу події є показником того, на який допустимий термін можна затримати здійснення події, не зменшуючи (не збільшуючи) при цьому термін виконання всього комплексу робіт сітки.

Критичні події не мають резервів часу, оскільки будь-яка затримка здійснення подій, розташованих на критичному шляху, спричинить таку ж затримку здійснення кінцевої події.

Отже, щоб визначити термін критичного шляху, необхідно й достатньо обчислити ранній термін кінцевої події, його величина і є визначенням цього терміну. Події з нульовим резервом часу визначають роботи, які складають критичний шлях.

6.7. Аналіз і оптимізація планування сіток і керування ними

Аналіз графа сітки дає змогу оцінити доцільність вибраної структури графа, тобто класифікацію робіт і їх послідовність, завантаження виконавців робіт, можливості зміщень у часі виконання робіт некритичних шляхів. Якщо оцінки термінів виконання робіт мають імовірний характер, то аналіз ПСК дає змогу оцінити ймовірність виконання повного комплексу робіт з реалізації плану в заданий термін.

На першому етапі аналізу графа досліджують його *топологію* (взаємне узгодження елементів графа відповідно до вимог його будування) та оцінюють доцільність вибору послідовності робіт і структури графа. На цьому етапі перевіряють доцільність виконаного рівня деталізації робіт та оцінюють наявні виробничі можливості.

На другому етапі виконують класифікацію робіт і групують роботи за величинами резервів термінів їх виконання, а також визначають рівень напруженості, пов'язаний зі своєчасним виконанням робіт некритичних шляхів.

Рівень напруженості терміну виконання роботи (i, j) прийнято характеризувати коефіцієнтом напруженості $K(i, j)$. Величина цього коефіцієнта визначається відношенням суми термінів виконання незбіжних робіт максимального шляху, якому належить ця робота, і критичного шляху:

$$K(i, j) = \frac{t(l_{\max}) - t'_{kp}}{t_{kp} - t'_{kp}} \quad , \tag{6.6}$$

де $t(L_{max})$ – термін виконання робіт максимального шляху, який містить роботу (i, j);

t_{kp} – термін виконання робіт критичного шляху;

t'_{kp} – сума термінів виконання тих робіт максимального шляху, що відповідає роботі (i, j), які збігаються з роботами критичного шляху.

Формулу (6.6) можна записати й у такому вигляді:

$$K(i, j) = 1 - \frac{R_n(i, j)}{t_{kp} - t'_{kp}}, \tag{6.7}$$

де $R_n(i, j)$– повний резерв часу роботи (i, j).

Коефіцієнт напруженості $K(i, j)$ набуває значень від *0* до *1*. Чим більше його величина, тим важче своєчасно виконати цю роботу.

Третім етапом аналізу ПСК є розрахунки запитів виробничих ресурсів і їх розподіл у часі.

На *четвертому етапі* визначають імовірність своєчасного виконання планового комплексу робіт з реалізації проекту. Ці розрахунки є досить складними. Зазвичай з певною мірою імовірності можна визначити найменший і найбільший можливі терміни виконання комплексу робіт. Вирізняють також роботи, які з високим рівнем надійності можуть потрапити на критичний шлях. Саме цим роботам приділяється особлива увага при розподілі виробничих ресурсів і під час реалізації робіт.

Усі наведені етапи аналізу системи ПСК передують її оптимізації.

Приклад 6.3. Побудувати сітковий графік проекту, що містить процеси, позначені латинськими буквами від *A* до *H*, з урахуванням відношення передування (табл. 6.2). Визначити часові параметри подій і критичний шлях для сіткового графіка проекту.

Таблиця 6.2

Робота	Попередня робота	Кількість діб
A	–	5
B	–	6
C	A	3
D	A	8
E	B, C	2
F	B, C	11
G	E	12
H	D	1

Розв'язання. На рис. 6.8 показано сітку, що відображає взаємозв'язок процесів цього проекту. Номери вершин збільшуються у напрямку виконання проекту. Фіктивний процес (*3*, *4*) уведено для того, щоб «розвести» паралельні процеси *G* і *H*.

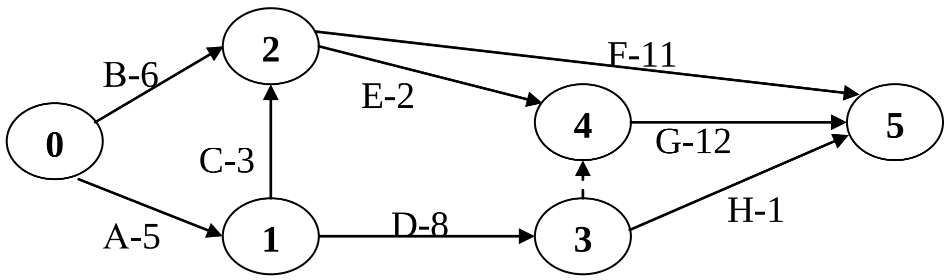


Рис. 6.8

Знайдені часові параметри подій зведемо у табл. 6.3. При визначенні ранніх термінів здійснення подій $t_p(i)$ рухаємося по сітці зліва направо. Для $i = 0$ (нульової події) очевидно, що $t_p(0) = 0$.

Таблиця 6.3

Номер події	Терміни здійснення події, кількість діб		Резерв часу $R(i)$, кількість діб
	Ранній $t_p(i)$	Пізній $t_n(i)$	
0	$t_p(0) = 0$	$t_n(0) = min\{ t_n(1) – t(0, 1); t_n(2) – t(0, 2)\} = min\{0; 5\} = 0$	$t_n(0) – t_p(0) = 0$
1	$t_p(1) = t_p(0) + t(0, 1) = = 0 + 5 = 5$	$t_n(1) = min\{ t_n(3) – t(1, 3); t_n(2) – t(1, 2)\} = min\{5; 8\} = 5$	$t_n(1) – t_p(1) = 0$

Закінчення табл. 6.3

Номер події	Терміни здійснення події, кількість діб		Резерв часу $R(i)$, кількість діб
	Ранній $t_p(i)$	Пізній $t_n(i)$	
2	$t_p(2) = max\{t_p(0) + t(0, 2);$ $t_p(1) + t(1, 2)\} = max\{6; 8\} = 8$	$t_n(2) = min\{t_n(5) – t(2, 5);$ $t_n(4) – t(2, 4)\} =$ $= min\{14; 11\} = 11$	3
3	$t_p(3) = t_p(1) + t(1, 3) =$ $= 5 + 8 = 13$	$t_n(3) = min\{ t_n(5) – t(3, 5);$ $t_n(4) – t(3, 4)\} =$ $= min\{24; 13\} = 13$	3
4	$t_p(4) = max\{t_p(2) + t(2, 4);$ $t_p(3) + t(3, 4)\} =$ $= max\{10; 13\} = 13$	$t_n(4) = t_n(5) – t(4, 5) =$ $= 25 – 12 = 13$	0
5	$t_p(5) = max\{t_p(3) + t(3, 5);$ $t_p(4) + t(4, 5); t_p(2) + t(2,5)\} =$ $= max\{14; 25; 19\} = 25$	$t_n(5) = 25$	0

Для визначення пізніх термінів здійснення подій $t_n(i)$ рухаємося по сітці справа наліво. Для $i = 5$ (кінцевої події) пізній термін здійснення події має дорівнювати його ранньому терміну (інакше зміниться довжина критичного шляху): $t_n(5) = t_p(5) = 25$ діб.

Ненульові резерви часу означають, що здійснення події можна затримати на цю величину без збільшення загального терміну виконання проекту. Події, що не мають резервів часу ($0, 1, 3, 4, 5$), утворюють критичний шлях.

7. ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ Й КОНФЛІКТУ

7.1. Загальна характеристика задач з умовами невизначеності й конфлікту

В економічній діяльності завжди мають місце невизначеність і ризик щодо доходу, витрат або прибутку, які є результатом купівлі-продажу на ринку ресурсів, продукції і послуг.

Якщо потрібно вибрати найкращу з m альтернатив у випадку, коли остаточний результат кожної i-ї альтернативи ($i = 1, ..., m$), буде визначатися j-м конкретним станом навколишнього середовища з деякої скінченної множини станів ($j = 1, ..., n$). Таким чином, у момент прийняття рішення кожна альтернатива характеризується n-вимірним вектором: $U_i = (u_{i1}, ..., u_{ij}, ..., u_{in})$, де u_{ij} – цінність цієї альтернативи, якщо природа перебуватиме в j-му стані.

Принциповим є те, що в момент прийняття рішення про вибір альтернативи конкретний стан, у якому буде перебувати навколишнє середовище, є невідомим, тому потрібно брати до уваги всю сукупність його можливих станів.

Такі задачі поділяють на два класи. Це, по-перше, задачі прийняття рішень за умов невизначеності, коли немає ніякої інформації про ймовірність виникнення кожного з можливих станів природи. По-друге, задачі прийняття рішень за умов ризику, коли можна дати певну суб'єктивну або об'єктивну оцінку ймовірнісному розподілу станів природи, тобто коли ймовірності виникнення кожного з можливих станів навколишнього середовища можна вважати відомими.

Теорія прийняття рішень має набір принципів (критеріїв), які можна використати для розв'язання таких задач, для цього їх складають у вигляді матриці цінностей альтернатив. Коли матрицю побудовано, можна починати порівняння альтернатив з огляду на невизначеність. Для кожної альтернативи існують її песимістична й оптимістична оцінки. Найпоширенішими критеріями визначення альтернатив є такі.

1. Критерій Вальда (песимістичний). Відповідно до максимінного критерію вибирається така альтернатива, песимістична оцінка якої є найкращою. Якщо $v(a_i, s_j)$ – прибуток, то оптимальним буде розв'язок

$$MV^* = \max_{a_i}\left\{\min_{s_j} v(a_i,\ s_j)\right\}.$$

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ – витрати, то використовують мінімаксний критерій

$$MV^* = \min_{a_i}\left\{\max_{s_j} v(a_i,\ s_j)\right\}.$$

2. Критерій Севіджа дає змогу уникнути дуже великого ризику в будь-яких умовах, з його допомогою можна пом'якшити консерватизм критерію Вальда, замінивши матрицю платежів (виграшів або програшів) $v(a_i, s_j)$ матрицею втрат $r(a_i, s_j)$:

$$r(a_i,\ s_j) = \begin{cases} \max\limits_{a_k}\left\{v(a_k,\ s_j)\right\} - v(a_i,\ s_j),\ \textit{якщо}\ v\ -\ \textit{дохід}, \\ v(a_i,\ s_j) - \min\limits_{a_k}\left\{v(a_k,\ s_j)\right\},\ \textit{якщо}\ v\ -\ \textit{витрати}. \end{cases}$$

Якщо $v(a_i, s_j)$ – прибуток, то відповідно до максимінного критерію оптимальним буде розв'язок $MV^* = \max\limits_{a_i}\left\{\min\limits_{s_j} v(a_i,\ s_j)\right\}$, якщо $v(a_i, s_j)$ – витрати, то застосовують мінімаксний критерій $MV^* = \min\limits_{a_i}\left\{\max\limits_{s_j} v(a_i,\ s_j)\right\}$.

3. Критерій Гурвіца (критерій песимізму-оптимізму). Цей критерій є комбінацією крайніх песимізму й оптимізму. Нехай $0 \le \alpha \le 1$ і $v(a_i, s_j)$ – дохід, тоді розв'язком буде

$$MV^* = \max_{a_i}\left\{\alpha \max_{s_j} v(a_i,\ s_j) + (1-\alpha)\min_{s_j} v(a_i,\ s_j)\right\}.$$

Параметр α – показник оптимізму. Якщо $\alpha = 0$, то критерій Гурвіца стає консервативним, якщо $\alpha = 1$, то дуже оптимістичним, оскільки вибираються найкращі з найкращих умов. Можна конкретизувати ступінь оптимізму (або песимізму), належним чином вибравши величини α з інтервалу [0, 1]. За відсутності чіткої схильності до оптимізму або песимізму вибір $\alpha = 0,5$ є найрозумнішим.

Якщо $v(a_i, s_j)$ є витратами, то критерій набуває такого вигляду:

$$MV^* = \min_{a_i}\left\{\alpha \min_{s_j} v(a_i,\ s_j) + (1-\alpha)\max_{s_j} v(a_i,\ s_j)\right\}.$$

4. Критерій Лапласа. Оцінку середньої цінності кожної альтернативи можна обчислити за формулою середнього арифметичного можливих оцінок у різних станах природи. Критерій є недостатньо обґрунтованим, оскільки розподіл імовірності станів $P(s_j)$ є невідомим, і тому немає причин уважати ці стани різними. Отже, використовується оптимістичне припущення, що ймовірності всіх станів природи дорівнюють одна одній, тобто $P(s_1) = P(s_2) = ... = P(s_n) = 1/n = const$. Якщо при цьому $v(a_i, s_j)$ є одержуваним прибутком, то найкращим розв’язком буде

$$MV^* = \max_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v(a_i,\ s_j)\right\}.$$

Якщо $v(a_i, s_j)$ – витрати особи, яка приймає рішення, то оператор max замінюється на min.

Якщо немає впевненості в рівності ймовірностей, то можливе ранжирування ймовірностей у ряд за ознакою їхніх величин: $q_1 > q_2 > q_3$. Уважаємо, наприклад, що ймовірність порівняно із сусідньою меншою збільшується в два рази. Тоді можна записати: $(q_1 = 4x) > (q_2 = 2x) > (q_3 = x)$. Ураховуючи, що всі ймовірності утворюють повну групу, отримаємо рівняння для їх знаходження. Можна використовувати критерій очікуваного значення.

5. Критерій Байєса–Лапласа. Замість середньої оцінки цінності кожної альтернативи розглядають зважену середню арифметичну оцінку (Байєса–Лапласа).

6. Критерій Ходжеса–Лемана є комбінацією максимінного критерію і критерію Байєса–Лапласа.

Приклад 7.1. Планується військова операція: нанесення авіаційного удару по деякому об'єкту, при цьому можливими є чотири стратегії:

A_1 – нанесення удару з півночі;

A_2 – нанесення удару зі сходу;

A_3 – нанесення удару з півдня;

A_4 – нанесення удару із заходу.

Ефективність дій авіації A залежить від станів природи B і ймовірності їх використання:

B_1 – ясно, імовірність q_1;

B_2 – похмуро, імовірність q_2;

B_3 – туман, дощ, імовірність q_3.

Кожна пара стратегій дає результат, ефективність якого наведено в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Дії (гравець A)	Стратегії природи (гравець B)		
	B_1	B_2	B_3
A_1	*0,32*	*0,4*	*0,25*
A_2	*0,6*	*0,7*	*0,4*
A_3	*0,8*	*0,6*	*0,2*
A_4	*0,65*	*0,25*	*0,3*

Забезпечити найбільший можливий виграш у найгірших умовах при різній імовірності використання гравцем B своїх стратегій.

Розв'язання. Використаємо різні критерії для розв'язання цієї задачі.

Критерій Лапласа. Якщо ймовірності є відомими ($q_1 = 0{,}6$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}1$), то кожну стратегію можна оцінити як суму добутків:

$A_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}32 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}343$;

$A_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}61$;

$A_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}65 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}695$;

$A_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}65 + 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}495$.

Максимальною буде стратегія A_3.

Якщо ймовірності є невідомими, але є деякі відомості про їхні відносні значення, то існують два способи розв'язання.

1. Всі стратегії є рівноймовірними, тобто $q_j = 1/3 = const$, тоді

$A_1 = (0{,}32 + 0{,}4 + 0{,}25)/3 = 0{,}323$;

$A_2 = (0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}4)/3 = 0{,}567$;

$A_3 = (0{,}8 + 0{,}65 + 0{,}2)/3 = 0{,}55$;

$A_4 = (0{,}65 + 0{,}25 + 0{,}3)/3 = 0{,}4.$

Максимальною буде стратегія A_2.

2. Імовірності ранжуються в ряд за їх величинами: $q_1 > q_2 > q_3$. Уважаємо, що кожна ймовірність порівняно із сусідньою меншою збільшується в два рази. Тоді можна записати $(q_1 = 4x) > (q_2 = 2x) > (q_3 = x)$. Ураховуючи, що всі ймовірності утворюють повну групу, отримаємо рівняння $4x + 2x + x = 1$, звідси $q_1 = 4/7$; $q_2 = 2/7$;

$q_3 = 1/7$. Після цього розраховуємо оцінки стратегій:

$A_1 = (4/7) \cdot 0{,}32 + (2/7) \cdot 0{,}4 + (1/7) \cdot 0{,}25 = 0{,}323$;

$A_2 = (4/7) \cdot 0{,}6 + (2/7) \cdot 0{,}7 + (1/7) \cdot 0{,}4 = 0{,}600$;

$A_3 = (4/7) \cdot 0{,}8 + (2/7) \cdot 0{,}65 + (1/7) \cdot 0{,}2 = 0{,}672$;

$A_4 = (4/7) \cdot 0{,}65 + (2/7) \cdot 0{,}25 + (1/7) \cdot 0{,}3 = 0{,}485$.

Максимальною буде стратегія A_3.

Максимінний критерій Вальда. Для розв'язання задачі використовують початкову матрицю вартостей:

	B_1	B_2	B_3	*мінімум рядків*
A_1	$0{,}32$	$0{,}4$	$0{,}25$	$0{,}25$
A_2	$0{,}6$	$0{,}7$	$0{,}4$	$0{,}4$ – *максимін*
A_3	$0{,}8$	$0{,}65$	$0{,}2$	$0{,}2$
A_4	$0{,}65$	$0{,}25$	$0{,}3$	$0{,}3$

Критерій Севіджа. Матрицю витрат визначають шляхом віднімання від максимального елемента у кожному стовпці усіх елементів стовпця від першого до четвертого відповідно:

	B_1	B_2	B_3	*мінімум рядків*
A_1	$0{,}8-0{,}32=0{,}48$	$0{,}3$	$0{,}15$	$0{,}15$ – *найбільше*
A_2	$0{,}8-0{,}6=0{,}2$	0	0	0
A_3	$0{,}8-0{,}8=0$	$0{,}05$	$0{,}2$	0
A_4	$0{,}8-0{,}65=0{,}15$	$0{,}45$	$0{,}1$	$0{,}1$

Критерій Гурвіца. Результати обчислень зведемо в таблицю:

Альтернатива	*Мінімум рядків*	*Максимум рядків*	α(*максимум рядка*) + $(1-\alpha)$(*мінімум рядка*)
A_1	$0{,}25$	$0{,}4$	$0{,}4\alpha+(1-\alpha)0{,}25=0{,}15\alpha+0{,}25$
A_2	$0{,}4$	$0{,}7$	$0{,}3\alpha+0{,}4$
A_3	$0{,}2$	$0{,}8$	$0{,}6\alpha+0{,}2$
A_4	$0{,}3$	$0{,}65$	$0{,}35\alpha+0{,}3$

Використовуючи відповідне значення для α, наприклад $\alpha = 0{,}5$ або $\alpha = 0{,}25$, можна визначити оптимальну альтернативу.

7.2. Загальна характеристика задач теорії ігор

В умовах ринкової економіки між суб'єктами господарювання виникають конфлікти:

– продавець має бажання продати свій товар за більшою ціною, а споживач хоче купити дешевше;

– фірми, що реалізують однакову за якістю продукцію, конкурують за ринок збуту.

Водночас суб’єкти економічної діяльності часто кооперуються, узгоджуючи свої дії.

Математична теорія, у якій досліджуються конфліктні ситуації, має назву теорії гри.

Зовнішня схожість принципів вибору поведінки учасників ігор стала основою того, щоб формалізовані моделі конфліктних ситуацій назвати іграми, а математичні методи їх аналізу – теорією ігор.

Поведінку гравця називають його стратегією.

Правила визначення виграшів гравців згідно з вибраними усіма учасниками гри стратегіями називають функцією виграшів.

Гра двох гравців, інтереси яких є прямо протилежними, називають грою з нульовою сумою (виграш одного дорівнює програшу другого).

Класифікація ігор:

– за кількістю гравців (з двома учасниками; зі скінченною кількістю гравців більше двох; із нескінченною кількістю гравців);

– за кількістю стратегій (скінченні; нескінченні);

– за властивостями функції виграшів (гра з нульовою сумою; гра з ненульовою сумою);

– за можливістю утворення коаліції до початку гри (кооперативні; некооперативні).

Кожна гра складається з кроків, які супротивники роблять по черзі. Такі кроки мають назву особистих.

Випадкові ходи дають змогу випадковим чином реалізувати одну з можливих позицій. У такому випадку гру можна подати у вигляді топологічного дерева, у якому виділено початкову вершину A_1, проміжні вершини (позиції) і множину кінцевих вершин, які відповідають кінцевим позиціям гри.

7.3. Матрична гра двох гравців з нульовою сумою

Гру з двома гравцями з нульовим виграшем називають антагоністичною. Кожен гравець намагається діяти таким чином, щоб його власний виграш був найбільшим.

Припустімо, що яку б чисту стратегію перший гравець не вибрав, другий гравець зможе діяти таким чином, щоб виграш першого гравця був найменшим. Тоді раціональний спосіб дії першого гравця полягає у виборі такої стратегії, при якій його найменший можливий виграш був би максимальним. Це значення називають нижньою ціною гри, а вибрану стратегію – максимінною стратегією першого гравця при будь якій стратегії другого гравця.

Якщо зробити аналогічні припущення з позицій другого гравця, дійдемо до верхньої ціни гри й до мінімаксної стратегії другого гравця.

Верхня ціна гри – гарантований програш другого гравця при будь-якій стратегії першого. У випадку, коли нижня ціна гри збігається з верхньою, відповідні чисті стратегії вважаються оптимальними стратегіями, а про гру кажуть, що вона має сідлову точку.

Якщо гравець вибирає одну з точок, то кажуть, що він застосовує змішану стратегію.

Оптимістична стратегія для матричної гри двох гравців з нульовою сумою визначається як розв’язок задач лінійного програмування.

Приклад 7.2. Фірма виготовляє встаткування для легкої промисловості. Експерти виробничого відділу фірми розглядають три конструкторські варіанти встаткування (*А-1, А-2, А-3*). Для спрощення припустимо, що за технічними характеристиками ці три типи є майже ідентичними, однак залежно від зовнішнього вигляду й зручності використання кожен тип може мати три модифікації (*М-1, М-2, М-3*) залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення встаткування, тис. ум. од., наведено в табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Тип устаткування	Модифікація		
	М-1	*М-2*	*М-3*
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає через необхідність вибирати той тип устаткування і його модифікації, який буде затверджено економічним відділом фірми. З огляду на виробництво найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу й конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду спеціалістів економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відвернення коштів. Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості й зовнішнього вигляду.

Розв'язання. Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення встаткування типу *А-1*, то економічний відділ наполягатиме на придбанні технології, що дає модифікацію *М-3*, оскільки цей варіант буде найдешевшим. Якщо запропонує встаткування типу *А-2* або *А-3*, то скоріш за все затверджено буде модифікацію *М-2*.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно наполягати на варіанті впровадження у виробництво встаткування типу *А-2*, оскільки при реалізації найгірших умов забезпечується найбільша собівартість – *7* тис. ум. од.

Визначимо максимінну стратегію:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min\{10;\ 6;\ 5\} = 5;\ \min_{i=2} a_{ij} = \min\{8;\ 7;\ 9\} = 7;$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{7;\ 5;\ 8\} = 5.$$

Нижня ціна гри

$$\alpha = \max_{j} \min_{i} a_{ij} = \max\{5;\ 7;\ 5\} = 7.$$

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу або третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише п'яти.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво встаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію *М-1*, може призвести до найбільших витрат у тому разі, якщо вдасться затвердити випуск устаткування типу *А-1*. При технології виготовлення встаткування *А-2* з модифікаціями *М-2* і *М-3* найбільші можливі витрати становитимуть *7* тис. ум. од. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших умов це дає найменші витрати – *7* тис. ум. од.

Визначимо мінімаксну стратегію:

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{10;\ 8;\ 7\} = 10;\quad \max_{j=2} a_{ij} = \max\{6;\ 7;\ 5\} = 7;$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{5;\ 9;\ 8\} = 9.$$

Верхня ціна гри

$$\beta = \min_{i} \max_{j} a_{ij} = \min\{10;\ 7;\ 9\} = 7.$$

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших витрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме *10*, а якщо третю – то *9*. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Приклад 7.3. Маємо гру двох гравців A і B, яку задано такою платіжною матрицею:

$$\begin{array}{cc} & \text{Гравець } B \\ \text{Гравець } A & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Необхідно визначити ціну гри й оптимальні стратегії гравців A і B.

Розв'язання. Для гравця A перша стратегія домінує над третьою, тому третю стратегію треба вилучити. Для гравця B перша стратегія домінує над п'ятою, яку можна виключити як більш затратну, невигідну для гравця B. Отже, отримуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо стратегії гравця A:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min\{6;\ 3;\ 8;\ 5\} = 3;\ \min_{i=2} a_{ij} = \min\{6;\ 5;\ 7;\ 6\} = 5;$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{4;\ 4;\ 3;\ 8\} = 3.$$

Нижня ціна гри

$$\alpha = \max_j \min_i a_{ij} = \max\{3;\ 5;\ 3\} = 5.$$

Отже, нижня ціна гри $\alpha = 5$, а гравець A для максимізації мінімального виграшу має вибрати другу з трьох можливих стратегій. Така стратегія є максимінною в цій грі.

Для гравця B:

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{6;\ 6;\ 4\} = 6;\ \max_{j=2} a_{ij} = \max\{3;\ 5;\ 4\} = 5;$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{8;\ 7;\ 3\} = 8;\ \max_{j=4} a_{ij} = \max\{5;\ 6;\ 8\} = 8.$$

Верхня ціна гри

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min\{6;\ 5;\ 8;\ 8\} = 5.$$

Гравцю B доцільно вибрати також другу стратегію, яка є мінімаксною у грі. Оскільки $\alpha = \beta$, ця гра має сідлову точку. Ціна гри $\nu = 5$. Оптимальною максимінною стратегією гравця A є друга з трьох можливих його стратегій. Для гравця B оптимальною є також друга із чотирьох можливих.

7.4. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Гра розміром $m \times n$ у загальному випадку не має геометричної інтерпретації. Її розв'язання є трудомістким при великих m і n, тому гру зводять до задачі лінійного програмування (ЗЛП).

Хай гру $m \times n$ задано платіжною матрицею $P = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Гравець A має в своєму розпорядженні стратегії A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а гравець B – стратегії B_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Необхідно визначити оптимальні стратегії $S^*_A = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ і $S^*_B = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$, де $p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1$, $q_1^* + q_2^* + \ldots + q_n^* = 1$.

Застосування гравцем A оптимальної стратегії S^*_A має забезпечити йому при будь-яких діях гравця B середній виграш не менше за ціну гри ν, тобто необхідно, щоб виконувалося співвідношення $\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \ge v,$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Ціна гри є невідомою. Однак якщо взяти $v > 0$, то виконання цього співвідношення можна добитися, зробивши всі елементи $a_{ij} \ge 0$ додаванням до всіх a_{ij} деякого додатного числа, величина якого дорівнює абсолютному значенню елемента, найменшого серед усіх від'ємних елементів матриці.

Для оптимальної стратегії S^*_A усі середні виграші є не меншими за ціну гри, тому одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m \ge v; \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m \ge v; \\ \qquad ... \qquad\qquad ... \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_n \ge v. \end{cases} \tag{7.1}$$

Кожну з нерівностей розділимо на $v > 0$ і введемо нові змінні:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, \; x_2 = \frac{p_2}{v}, \; ..., \; x_m = \frac{p_m}{v}. \tag{7.2}$$

Тоді система набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{m1} x_m \ge 1; \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{m2} x_m \ge 1; \\ \qquad ... \qquad\qquad ... \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + ... + a_{mn} x_n \ge 1. \end{cases} \tag{7.3}$$

Мета гравця A – максимізувати свій гарантований виграш – ціну гри. Розділивши рівність $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$ на $v > 0$, одержимо, що змінні x_i $(i = 1, 2, ..., m)$ задовольняють умову $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1/v$. Максимізація ціни гри v є еквівалентною мінімізації величини $1/v$, тому задачу можна сформулювати таким чином: визначити змінні $x_i \ge 0$ так, щоб вони відповідали обмеженням (7.3) і при цьому лінійна функція перетворювалася на мінімум. Це є задачею лінійного програмування. Розв'язуючи задачу, знаходимо значення x_i і величину $1/v$, потім одержуємо оптимальний розв'язок $p_i^* = v x_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$ і оптимальну стратегію $S^*_{A.}$

Стратегія S^*_B має забезпечити при будь-яких стратегіях гравця A програш, що не перевищує величину v. Іншими словами, необхідним є виконання співвідношення $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v,$ $\quad i = 1, 2, ..., m,$ тобто змінні

$q_1, q_2, ..., q_n$ мають задовольняти нерівностям

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \le v; \\ \quad ... \quad\quad ... \\ a_{m1}q_m + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_n \le v. \end{cases}$$

Якщо позначити $y_j = \dfrac{q_j}{v}$, $(j = 1, 2, ... , n)$, то отримаємо

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1; \\ \quad ... \quad\quad ... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases} \quad (7.4)$$

Елементи змішаних стратегій мають задовольняти умову

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1.$$

Ця умова з новими змінними $q_j = y_j v$, $(j = 1, 2, ..., n)$ набуває такого вигляду: $y_1 + y_2 + ... + y_n = \dfrac{1}{v}$.

Для визначення оптимальної стратегії $S^*_B = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ слід урахувати, що гравець B прагне мінімізувати гарантований виграш, тобто знайти $max\dfrac{1}{v}$.

Гра зводиться до ЗЛП: визначити змінні $y_i \ge 0$, які відповідають лінійним обмеженням (7.4) і максимізують функцію $L = \sum_{j=1}^{n} y_j$. Розв’язуючи задачу, знаходимо y_i і $1/v$, потім одержуємо оптимальний розв’язок $q_j^* = vy_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ і оптимальну стратегію S^*_B.

Отримані для гравців A і B ЗЛП утворюють симетричну пару подвійних задач. Властивість симетричності дає змогу розв’язувати ту задачу, яка потребує менше обчислювальних дій, а розв’язання другої задачі визначають на основі теорем подвійності.

Приклад 7.4. Магазин може завести в різних пропорціях товари трьох типів (A_1, A_2, A_3). Їх реалізація і прибуток магазина залежать від виду товару і стану попиту. Передбачається, що попит може мати три стани (B_1, B_2, B_3) і не прогнозується. Визначити оптимальні пропорції для запуску товарів за умови максимізації середнього гарантованого прибутку, якщо матриця прибутку $P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Визначимо нижню й верхню ціни гри:

$$\alpha = max\{3;\ 2;\ 4\} = 4;\ \beta = min\{9;\ 6;\ 8\} = 6.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, сідлової точки немає і оптимальний розв'язок слід шукати в змішаних стратегіях гравців: $S^*_A = (p_1, p_2, p_3)$ и $S^*_B = (q_1, q_2, q_3)$.

Позначивши $x_i = \dfrac{p_i}{v}, i = 1,\ 2,\ 3$ і $y_j = \dfrac{q_j}{v}, j = 1,\ 2,\ 3$, складемо дві двоїсті ЗЛП:

1. Для визначення оптимальної стратегії гравця A: знайти $minZ = x_1 + x_2 + x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1, \end{cases} \quad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$$

2. Для визначення оптимальної стратегії гравця B: знайти $maxL = y_1 + y_2 + y_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \leq 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq 1, \end{cases} \quad y_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Розв'яжемо симплексним методом одну із задач, наприклад другу, оскільки для неї перший базисний розв'язок буде допустимим. Унаслідок цього одержимо таке рішення: $Y = (1/2;\ 0;\ 17/27;\ 2/27;\ 0;\ 1/9)$, $maxL = 5/27$.

Визначимо відповідність між змінними двоїстих ЗЛП і оптимальний базисний розв'язок задачі 1 з допомогою теорем двоїстості:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 2/27 & 0 & 1/9 & 1/2 & 0 & 17/27 \end{array}$$

Оптимальний базисний розв'язок задачі 1: $X = (2/27;\ 0;\ 1/9;\ ½;\ 0;\ 17/27)$, причому $minZ = maxL = 5/27$. Знайдемо ціну гри: $v = \dfrac{1}{L_{max}} = \dfrac{1}{Z_{min}} = 27/5 = 5{,}4$. Оптимальну стратегію $S^*_A = (p_1, p_2, p_3)$ знайдемо, використовуючи $p_i^* = vx_i\ (i = 1, 2, 3)$: $S^*_A = (0{,}4;\ 0;\ 0{,}6)$.

Отже, підприємство має виготовити $40\ \%$ продукції A_1 и $60\ \%$ продукції A_3, а продукцію A_2 не виготовляти.

Оптимальну стратегію $S^*_B = (q_1, q_2, q_3)$ знайдемо аналогічно: $q_j^* = vy_j$ ($j = 1, 2, 3$), тобто $S^*_B = (0{,}2;\ 0;\ 0{,}8;\ 0)$ (тут ураховано, що другий стовпець початкової матриці було відкинуто як невигідний). Таким чином, оптимальний попит у розмірі *20 %* перебуває в стані B_1 і в розмірі *80 %* – у стані B_3.

Приклад 7.5. Фірма розробила шість бізнес-планів (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) для їх здійснення наступного року. Залежно від зовнішніх умов (погоди, стану ринку тощо) виокремлено п'ять ситуацій (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5). Для кожного X_i ($i = 1, ..., 6$) бізнес-плану і Y_j ($j = 1, ..., 5$) зовнішньої ситуації обчислено прибутки, які наведено в табл. 7.3.

Необхідно вибрати найкращий варіант бізнес-плану або комбінацію із розроблених планів. Розв‘язати приклад з допомогою програми Excel шляхом зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

Таблиця 7.3

Варіант бізнес-плану	Зовнішня ситуація				
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
	Прибутки, тис. грн				
X_1	1,0	1,5	2,0	2,7	3,2
X_2	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1
X_3	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1
X_4	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8
X_5	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5
X_6	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0

Розв'язання. Маємо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи табл. 7.3. Як видно, домінуючих стратегій у цій грі немає.

Визначимо верхню і нижню ціни гри:

$$\alpha = max\{min(1,0; 1,5; 2; 2,7; 3,2); min(1,2; 1,4; 2,5; 2,9; 3,1);$$
$$min(1,3; 1,6; 2,4; 2,8; 2,1); min(2,1; 2,4; 3; 2,7; 1,8);$$
$$min(2,4; 2,9; 3,4; 1,9; 1,5); min(2,6; 2,7; 3,1; 2,3; 2)\} =$$
$$= max\{1,0; 1,2; 1,3; 1,8; 1,5; 2\} = 2;$$
$$\beta = min\{max(1,0; 1,2; 1,3; 2,1; 2,4; 2,6); max(1,5; 1,4; 1,6; 2,4; 2,9; 2,7);$$
$$max(2; 2,5; 2,4; 3; 3,4; 3,1); max(2,7; 2,9; 2,8; 2,7; 1,9; 2,3);$$
$$max(3,2; 3,1; 2,1; 1,8; 1,5; 2)\} = min\{2,6; 2,9; 3,4; 2,9; 3,2\} = 2,6.$$

Отже, $\alpha \neq \beta$, тобто немає сідлової точки, а це означає, що необхідно застосувати метод зведення гри до задачі лінійного програмування

$$min\, Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

за умов

$$\begin{cases} t_1 + 1{,}2t_2 + 1{,}3t_3 + 2{,}1t_4 + 2{,}4t_5 + 2{,}6t_6 \geq 1; \\ 1{,}5t_1 + 1{,}4t_2 + 1{,}6t_3 + 2{,}4t_4 + 2{,}9t_5 + 2{,}7t_6 \geq 1; \\ 2t_1 + 2{,}5t_2 + 2{,}4t_3 + 3t_4 + 3{,}4t_5 + 3{,}1t_6 \geq 1; \\ 2{,}7t_1 + 2{,}9t_2 + 2{,}8t_3 + 2{,}7t_4 + 1{,}9t_5 + 2{,}3t_6 \geq 1; \\ 3{,}2t_1 + 3{,}1t_2 + 2{,}1t_3 + 1{,}8t_4 + 1{,}5t_5 + 2t_6 \geq 1; \end{cases}$$

$$t \geq 0 \quad (i = \overline{1,\ 6}).$$

Знайдемо розв‘язок з допомогою програми Excel.

Виділимо комірки A1:A6 під значення $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$. У комірку B1 уводимо формулу цільової функції у вигляді = A1+A2+A3+A4+A5+A6, а в комірки C1:C5 – ліві частини обмежень у вигляді

=A1+1,2*A2+1,3*A3+2,1*A4+2,4*A5+2,6*A6
=1,5*A1+1,4*A2+1,6*A3+2,4*A4+2,9*A5+2,7*A6
=2*A1+2,5*A2+2,4*A3+3*A4+3,4*A5+3,1*A6
=2,7*A1+2,9*A2+2,8*A3+2,7*A4+1,9*A5+2,3*A6
=3,2*A1+3,1*A2+2,1*A3+1,8*A4+1,5*A5+2*A6

Наведемо курсор на комірку B1. Виберемо команду «Сервіс». Відкриємо діалогове вікно «Поиск решения» і задамо сценарій (рис. 7.1).

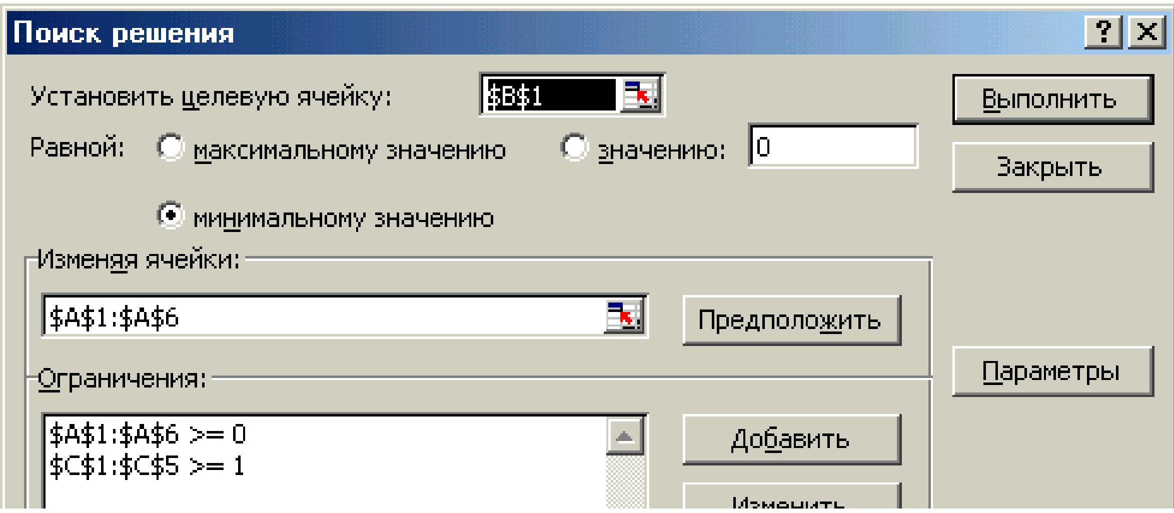


Рис. 7.1

Натиснути «Выполнить» і отримати результати. У комірку D1 записати формулу =A1/B1 і скопіювати її у комірки D2:D6 (*щоб увести позначки долара* B1, *треба після введення* B1 *натиснути клавішу* F4). Одержимо у комірках D2:D6 оптимальні значення частот. Щоб знайти ціну гри, треба в комірку B2 ввести формулу =1/B1. Результати одержимо у вигляді таблиці (рис. 7.2).

B1 = =A1+A2+A3+A4+A5+A6

	A	B	C	D	E
1	0,00	**0,44**	1,00	0,00	
2	0,11	**2,26**	1,05	0,24	
3	0,00		1,31	0,00	
4	0,00		1,08	0,00	
5	0,00		1,00	0,00	
6	0,34			0,76	
7					

Рис. 7.2

Оптимальний розв'язок задачі: $t_2 = 0{,}11$; $t_6 = 0{,}34$. Звідси отримаємо оптимальний розв'язок для початкової задачі: $x_2^* = 0{,}24$; $x_6^* = 0{,}76$. Ціна гри $v = 2{,}264$.

8. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 8.1. Задано триканальну СМО з відмовами. Інтенсивність потоку викликів за хвилину $\lambda = 0{,}8$. Середня тривалість розмови $\overline{t_{обс}} = 1{,}5$ хв. Визначити:

– імовірність відмови $P_{від}$;
– відносну пропускну спроможність СМО (q);
– абсолютну пропускну спроможність СМО (A);
– середню кількість зайнятих каналів.

Завдання 8.2. Знайти характеристики ефективності одноканальної СМО з трьома місцями ($m = 3$) у черзі при умовах: кількість заявок за одну годину $\lambda = 4$, $\overline{t_{обс}} = \frac{1}{\mu} = 0{,}5.$

З‘ясувати, як ці характеристики зміняться, якщо збільшити кількість місць у черзі до $m = k$.

***Завдання 8.3*.** СМО – білетна каса з одним вікном ($n = 1$) і необмеженою чергою. У касі продаються квитки до пунктів A і B. За 20 хвилин до каси підходять усередньому троє пасажирів, що купують квитки до пункту A, і двоє – до пункту B. Потік пасажирів можна вважати найпростішим. Касир у середньому обслуговує трьох пасажирів за 10 хвилин. Визначити, чи існують фінальні ймовірності станів СМО, і якщо існують – обчислити перші три з них. Знайти характеристики ефективності СМО.

Зауваження: кількість заявок за одну хвилину $\lambda_A = \frac{3}{20} = 0{,}15;$

кількість заявок за одну хвилину $\lambda_B = \frac{2}{20} = 0{,}10.$

Загальна кількість заявок $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 0{,}25$, кількість заявок за одну хвилину $\mu = \frac{3}{10} = 0{,}3$, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \approx 0{,}833 < 1$, отже, фінальні ймовірності існують.

Завдання 8.4. *Мета:* розглянути методи розв‘язання задач, у яких досліджуються різні СМО.

Завдання: дослідити роботу різних СМО, знайти характеристики їх ефективності й надати рекомендації щодо використання цих СМО.

8.4.1. У касі метрополітену, де продають жетони на проїзд, є три вікна. Час, який витрачає касир на обслуговування одного пасажира, в середньому дорівнює $0{,}5$ хв. Пасажири підходять до кас у середньому по три чоловіки за хвилину. Розрахувати, як зміняться характеристики СМО у таких випадках:

а) кількість касирів зменшиться на одного;

б) кількість пасажирів, що підходять, зросте удвічі.

Результати обчислень записати у звіт, зробити висновки.

Зразок оформлення звіту

Задано:

До змін: *назва СМО*, *n* = , *λ* = , $t_{обсл}$ = .

Після змін: а) *назва СМО*, *n* = , *λ* = , $t_{обсл}$ = .

б) *назва СМО*, *n = 3*, *λ* = , $t_{обсл}$ = .

Таблиця результатів обчислення:

Параметр	Початкова умова	Пункт а)	Пункт б)
	n = 3	*n = 2*	*n = 3, λ =*
μ			
α			
ω			
p_0			
$p_к$			
p_{n+i}			
P_{vidm}			
q			
A			
k			
R			
z			
$t_{чер}$			
$t_{сист}$			

Висновки.

8.4.2. У невеликому магазині покупців обслуговує один продавець. Середній час обслуговування одного покупця – чотири хвилини. Інтенсивність потоку покупців – три людини за хвилину. Магазин може вмістити 20 людей. Покупець, який прийшов, коли в магазині всі місця зайнято, не чекає, а йде до іншого магазину. Визначити основні характеристики ефективності цієї СМО. Розрахувати, як зміняться ці характеристики, якщо почнуть працювати ще два продавці?

Результати обчислень записати у звіт, зробити висновки.

Зразок оформлення звіту

Задано:
До змін: *назва СМО*, $n =$, $\lambda =$, $t_{обсл} =$, $m =$.
Після змін: *назва СМО*, $n =$, $\lambda =$, $t_{обсл} =$, $m =$.

Таблиця результатів обчислення:

Параметр	Початкова умова	Після змін
	$n =$	$n =$
μ		
α		
ω		
p_0		
$p_к$		
p_{n+i}		
P_{vidm}		
q		
A		
k		
R		
z		
$t_{чер}$		
$t_{сист}$		

Висновки.

8.4.3. До обчислювального центру колективного використання з трьома ЕОМ надходять заявки від підприємств на обчислювальні роботи. Якщо всі три ЕОМ працюють, то нове замовлення не приймається. Середній час роботи з одним замовленням становить три години. Інтенсивність вхідного потоку заявок – $0{,}25$ год$^{-1}$. Визначити основні характеристики ефективності цієї СМО. Розрахувати, як зміняться ці характеристики у таких випадках:

а) якщо поставити ще одну ЕОМ;

б) якщо утвориться черга з двох заявок.

Результати обчислень записати у звіт, зробити висновки.

Зразок оформлення звіту

Задано:
До змін: *назва СМО*, $n =$, $\lambda =$, $t_{обсл} =$.
Після змін: а) *назва СМО*, $n =$, $\lambda =$, $t_{обсл} =$.
б) *назва СМО*, $n = 3$, $\lambda =$, $m =$, $t_{обсл} =$.

Таблиця результатів обчислення:

Параметр	Початкова умова	Пункт а)	Пункт б)
	n =	n =	n = , m =
μ			
α			
ω			
p_0			
$p_к$			
p_{n+i}			
P_{vidm}			
q			
A			
k			
R			
z			
$t_{чер}$			
$t_{сист}$			

Висновки.

Завдання 8.5. Проаналізувати роботу АЗС, яка має N колонок. Майданчик при АЗС, де машини чекають заправки, може вмістити не більше M машин одночасно, і якщо вільного місця немає, то наступна машина у чергу не стає, а їде до сусідньої станції. Машини прибувають на станцію з інтенсивністю λ машин за одну хвилину. Інтенсивність процесу обслуговування – μ машин за одну хвилину. Скласти граф станів СМО. Визначити основні характеристики ефективності цієї СМО. Як зміняться ці характеристики, якщо одна колонка вийде з ладу? Дати рекомендації власнику АЗС.

Дані для задачі:

Номер студента в журналі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N	9	8	8	9	5	7	9	7	8	10	11	9	5	7	9	8
M	11	11	7	8	10	11	5	9	8	9	8	7	8	10	11	5
λ	0,5	0,6	0,3	0,5	0,6	0,7	0,3	0,5	0,4	0,5	0,7	0,5	0,6	0,3	0,5	0,6
μ	0,4	0,5	0,2	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	0,3	0,3	0,3	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4

Завдання 8.6. Задано матрицю гри. Знайти нижню й верхню ціни гри та мінімаксні стратегії сторін.

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 10 \\ 4 & 7 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 10 \\ 5 & 11 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.

Завдання 8.7. Спростити гру.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;   б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 8.8. Розв‘язати графічно ігри.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;   б) $A=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & k & 3 \end{pmatrix}$;   г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -k & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Тут k – номер студента в журналі.

Завдання 8.9. Розглянемо модель конфліктної ситуації «Боротьба за ринки». Фірми A і B виготовляють один і той самий сезонний товар, який надходить на ринок у моменти часу i ($i = 1, 2, ..., n$) і j ($j = 1, 2, ..., n$). Мета фірм: розорити конкурентну фірму і стати монополістом на ринку, пішовши на деякі витрати.

Товар має таку властивість: чим довше він перебуває у виробництві, тим вища його якість. Для цього краще поставляти товар більш високої якості, але при цьому встигнути раніше, ніж конкурентна фірма. Фірма, що поставила товар раніше, одержує гарантований прибуток, який дорівнює ціні гри v, а та, що спізнилася, зазнає збитків, які теж дорівнюють v. Сторони A і B мають протилежні інтереси, отже, конфлікт є антагоністичним. Фірма A має набір стратегій $S_A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ при поставках товару в момент часу i, а фірма B – набір стратегій $S_B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ при поставках товару в момент часу j. Можливими є три варіанти порівняння моментів поставки товару: $i < j$, $i = j$, $i > j$.

При $n = 4$ фірма A має набір стратегій $S_A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ при поставках товару в момент часу i, а фірма B – набір $S_B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ при поставках товару в момент часу j. За умови трьох можливих варіантів порівняння моментів поставки товару ($i < j$, $i = j$, $i > j$) елементи платіжної матриці a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) можна обчислити за формулою

$$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \ при \ i < j; \\ c(n-i+j)/2, \ при \ i = j; \\ c(n-i+1), \ при \ i > j. \end{cases} \tag{8.1}$$

У табл. 8.1 наведено отримані за формулою (8.1) платежі для цієї моделі.

Таблиця 8.1

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$2c$	c	$2c$	$3c$
A_2	$3c$	$2c$	c	$2c$
A_3	$2c$	$2c$	$2c$	c
A_4	c	c	c	$2c$

Завдання

1. На робочому листі в MS Excel ввести дані згідно з варіантами (табл. 8.2). Для заповнення елементів платіжної матриці скористатися відповідною формулою.

2. Визначити оптимальні стратегії поведінки фірм A і B, їхній гарантований середній прибуток (або збиток), використовуючи зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

3. Зробити висновки про кількість товару (у відсотках відносно загальної кількості товару, що випускають фірми) і моменти часу, протягом яких фірми мають випустити на ринок цей товар.

Порядок виконання завдання

1. На робочому листі з ім'ям «Базовий» побудувати таблицю платежів (див. табл. 8.1). Заповнити елементи таблиці за формулою, наведеною в табл. 8.2 для кожного варіанта. Приклад оформлення робочого листа при $n = 4$, $c = 1$ показано на рис. 8.1.

2. Визначити верхню α і нижню β ціни гри і переконатися, що отримана матрична гра не має сідлової точки.

3. Для визначення змішаної оптимальної стратегії фірми B $S^*_B = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ побудувати відповідну задачу лінійного програмування й розв’язати її, використовуючи надбудову «Пошук рішення».

4. Для визначення змішаної оптимальної стратегії фірми A $S^*_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ побудувати відповідну задачу лінійного програмування й розв’язати її, використовуючи надбудову «Пошук рішення».

Примітка. Для отримання матриці, транспонованої до початкової платіжної матриці, використовувати команду «Спеціальна вставка».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			j1	j2	j3	j4	c	n	y1	y2	y3	y4		B
2	i1	1,00	1,00	2,00	3,00	4,00	1,00	4,00	0	0,285714	0,142857	0,142857	<=	
3	i2	2,00							2	1	2	3	1	1
4	i3	3,00							3	2	1	2	1	1
5	i4	4,00							2	2	2	1	1	1
6									1	1	1	2	0,714286	1
7			2	1	2	3			1	1	1	1	0,571429	L=max
8		A=	3	2	1	2			q1	q2	q3	q4	v	
9			2	2	2	1			0	0,5	0,25	0,25	1,75	
10			1	1	1	2								
11														
12			α=	1					x1	x2	x3	x4		B
13			β=	2,00					0,142857	0,142857	0,285714	0	>=	
14									2	3	2	1	1,285714	1
15									1	2	2	1	1	1
16									2	1	2	1	1	1
17									3	2	1	2	1	1
18									1	1	1	1	0,571429	Z=min
19									p1	p2	p3	p4	v	
20									0,25	0,25	0,5	0	1,75	
21														

	`=ЕСЛИ($B$2<C$2;$G$2*(C$2-$B2);ЕСЛИ($B$2=C$2;$G$2*($H$2-$B$2+C$2)/2;$G$2*($H$2-$B$2+1)))`	`=ЕСЛИ($B$2<D$2;$G$2*(D$`	`=Е`
A=	`=ЕСЛИ($B$3<C$2;$G$2*(C$2-$B3);ЕСЛИ($B$3=C$2;$G$2*($H$2-$B$3+C$2)/2;$G$2*($H$2-$B$3+1)))`	`=ЕСЛИ($B$3<D$2;$G$2*(D$`	
	`=ЕСЛИ($B$4<C$2;$G$2*(C$2-$B4);ЕСЛИ($B$4=C$2;$G$2*($H$2-$B$4+C$2)/2;$G$2*($H$2-$B$4+1)))`	`=ЕСЛИ($B$4<D$2;$G$2*(D$`	`=Е`
	`=ЕСЛИ($B$5<C$2;$G$2*(C$2-$B5);ЕСЛИ($B$5=C$2;$G$2*($H$2-$B$5+C$2)/2;$G$2*($H$2-$B$5+1)))`	`=ЕСЛИ($B$5<D$2;$G$2*(D$`	`=Е`
	α=	`=МАКС(МИН(C7:F7);МI`	
	β=	`=МИН(МАКС(C7:C10);N`	

Рис. 8.1

Таблиця 8.2

Номер варіанта	n	c	Формула обчислення елементів платіжної матриці	Номер варіанта	n	c	Формула обчислення елементів платіжної матриці
1	3	1	$a_{ij}=\begin{cases} c(j-i), & при\ i<j; \\ c(n-i+j)/2, & при\ i=j; \\ c(n-i+1), & при\ i>j. \end{cases}$	5	4	3	$a_{ij}=\begin{cases} c(j-i), & при\ i<j; \\ c(n-i+j)/2, & при\ i=j; \\ c(n-i+1), & при\ i>j. \end{cases}$
2	4	3	$a_{ij}=\begin{cases} c(j-i), & при\ i>j; \\ c(n-j+i)/2, & при\ i=j; \\ c(n-i+1), & при\ i<j. \end{cases}$	6	5	5	$a_{ij}=\begin{cases} c(j-i), & при\ i>j; \\ c(n-j+i)/2, & при\ i=j; \\ c(n-i+1), & при\ i<j. \end{cases}$
3	5	5	$a_{ij}=\begin{cases} c(j-i), & при\ i<j; \\ c(n-i+j)/2, & при\ i>j; \\ c(n-i+1), & при\ i=j. \end{cases}$	7	3	7	$a_{ij}=\begin{cases} c(j-i), & при\ i>j; \\ c(n-i+j)/2, & при\ i<j; \\ c(n-j+1), & при\ i=j. \end{cases}$
4	3	7	$a_{ij}=\begin{cases} c(j-i), & при\ i<j; \\ c(n-i+j)/2, & при\ i=j; \\ c(n-i+1), & при\ i>j. \end{cases}$	8	4	9	$a_{ij}=\begin{cases} c(j-i), & при\ i<j; \\ c(n-i+j)/2, & при\ i=j; \\ c(n-i+1), & при\ i>j. \end{cases}$

Закінчення табл. 8.2

Номер варіанта	n	c	Формула обчислення елементів платіжної матриці	Номер варіанта	n	c	Формула обчислення елементів платіжної матриці
9	4	9	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i<j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i>j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i=j. \end{cases}$	16	5	1	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i<j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i>j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i=j. \end{cases}$
10	5	1	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i>j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i=j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i<j. \end{cases}$	17	3	3	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i<j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i=j; \\ c(n-j+1), \text{ при } i>j. \end{cases}$
11	3	3	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i<j; \\ c(n-i+j), \text{ при } i=j; \\ c(n-i+1)/2, \text{ при } i>j. \end{cases}$	18	4	5	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i<j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i=j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i>j. \end{cases}$
12	3	5	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i<j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i=j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i>j. \end{cases}$	19	5	7	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i>j; \\ c(n-j+i)/2, \text{ при } i=j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i<j. \end{cases}$
13	4	7	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i>j; \\ c(n-j+i)/2, \text{ при } i=j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i<j. \end{cases}$	20	3	9	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i<j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i>j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i=j. \end{cases}$
14	5	9	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i<j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i>j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i=j. \end{cases}$	21	4	1	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i>j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i<j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i=j. \end{cases}$
15	3	1	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i>j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i<j; \\ c(n-i+1), \text{ при } i=j. \end{cases}$	22	5	3	$a_{ij} = \begin{cases} c(j-i), \text{ при } i>j; \\ c(n-i+j)/2, \text{ при } i=j; \\ c(n-j+1), \text{ при } i<j. \end{cases}$

Завдання 8.10. Підприємство випускає три види продукції (*А, Б, В*) й одержує при цьому прибуток, що залежить від попиту. Попит може набувати одного з чотирьох станів (*I*, *II*, *III*, *IV*). Задано матрицю прибутку:

Продукція	Стан			
	I	*II*	*III*	*IV*
А	*k*	3	6	2
Б	4	5	6	5
В	1	7	4	*k*

Тут k – номер студента в журналі.

Визначити оптимальні пропорції випуску продукції.

Розв‘язати завдання з допомогою програми Excel шляхом зведення матричної гри до ЗЛП.

Завдання 8.11. Розв‘язати матричну гру з платіжною матрицею.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix},$$

де k – номер студента у журналі.

Завдання 8.12. Гру двох гравців A і B задано платіжною матрицею:

$$\begin{pmatrix} 6 & m+2 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & k & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix},$$

де m – номер групи ($1, 2, 3$), k – номер студента в журналі.

Визначити ціну гри й оптимальні стратегії гравців A і B.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Тести з множинним вибором

1. Виберіть означення роботи при сітковому плануванні й керуванні (СПК), яке застосовується в широкому значенні:

а) це дійсна робота – довгочасний процес проекту;

б) це залежність або фіктивна робота – логічний зв'язок між двома або декількома роботами (подіями), що не потребують витрат;

в) це момент завершення деякого процесу;

г) це партія, що складається з випадкових ходів.

2. Виберіть означення події при СПК:

а) це момент встановлення відношення передування серед процесів проекту;

б) це довгочасний процес, що не потребує витрат праці;

в) це момент встановлення логічного зв'язку між двома або декількома роботами;

г) це подія, що здійснюється за невизначений період часу.

3. Як називають дію, що здійснюється за сітковим графіком і полягає в певному розташуванні подій і робіт: для будь-якої роботи подія, що передує їй, розташована зліва і має менший номер порівняно з подією, що завершає цю роботу:

а) упорядковування;

б) сортування;
в) фільтрація;
г) пошук робіт?

4. Виберіть формули для розрахунку роботи:
а) $t_{po}(i, j) = t_p(i, j) + t(i, j)$;
б) $R(L) = t_{кр} - t(L)$;
в) $t_n(i) = \min\limits_{i,j}\left[t_n(j) - t(i,j)\right]$;
г) $R(i) = t_п(i) - t_р(i)$;
д) $t_p(j) = \max\limits_{i,j}[t_p(i) + t(i,j)]$.

5. Що називають критичним шляхом:
а) найтриваліший повний шлях у сітковому графіку;
б) будь-який шлях, початок якого збігається з початковою подією сітки, а кінець – з кінцевою;
в) строго визначена послідовність робіт;
г) загальна тривалість виконання проекту?

6. Виберіть формули для подій:
а) $t_p(j) = \max\limits_{i,j}[t_p(i) + t(i,j)]$;
б) $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$;
в) $t_{рн}(i, j) = t_p(i)$;
г) $R(L) = t_{кр} - t(L)$;
д) $t_{рн}(i, j) = t_p(i)$.

7. Оптимізація сіткового графіка полягає:
а) у скороченні довжини критичного шляху;
б) у раціональному використанні ресурсів;
в) у визначенні ранніх термінів виконання робіт;
г) у впорядковуванні сіткового графіка;
д) у пошуку критичного шляху;
е) в аналізі повних шляхів сіткового графіка.

8. Назвіть умови реалізації процесу прийняття рішень у теорії ігор:
а) ризик;
б) невизначеність;
в) виграш і програш;
г) банкрутство;
д) послідовний вибір стратегій.

9. Як називають ситуації в теорії ігор, коли в грі беруть участь два або більше супротивники, які мають конфліктні (протилежні) цілі й кожний з них прагне оптимізувати свої рішення завдяки іншим:

а) ігри розумних супротивників;
б) «ігри з природою»;
в) сітьові ігри;
г) нерівноважні ігри?

10. Критерію Гурвіца відповідає твердження:

а) це критерій оптимізму–песимізму;

б) якщо a_{ij} – витрати, то для $0 \le \alpha \le 1$ розв'язок має такий вигляд: $v^* = \min\limits_{i=1,2,...,m}\left(\alpha \min\limits_{j=1,2,...,n}(a_{ij}) + (1-\alpha)\max\limits_{j=1,2,...,n}(a_{ij})\right)$;

в) це критерій оптимістичного прийняття рішень;
г) це критерій, що вносить певність у прийняття рішення;
д) це критерій, при якому ураховується суб'єктивна оцінка рішення гравця.

11. Виберіть вираз для розрахунку величини ризику в теорії ігор, якщо платіжну матрицю задано у вигляді a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$) ($j = 1, 2, ..., n$):

а) $r_{ij} = \alpha_i^{max} - a_{ij}$;

б) $\alpha_i^{max} = \max\limits_{j=1,...,n} a_{ij}$;

в) $v^* = \max\limits_{i=1,2,...,m}(v_i)$;

г) $\alpha_i^{min} = \min\limits_{j=1,...,n} a_{ij}$.

12. Критерію Лапласа відповідає твердження:

а) якщо a_{ij} – прибуток, то розв'язок має вигляд $v^* = \max\limits_{i=1,2,...,m}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$;

б) якщо a_{ij} – витрати, то розв'язок має вигляд $v^* = \min\limits_{i=1,2,...,m}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$;

в) це прийняття рішень в умовах визначеності;
г) це вибір найкращої альтернативи з найгірших.

13. Критерію Вальда відповідає твердження:

а) критерій реалізує песимістичний підхід до прийняття рішень;

б) якщо a_{ij} – прибуток, то розв'язок має вигляд $v^* = \max\limits_{i=1,2,...,m}\left(\min\limits_{j=1,2,...,n}(a_{ij})\right)$;

в) це прийняття рішень в умовах невизначеності;

г) $q(S_1) = q(S_2) = \ldots = q(S_n) = \dfrac{1}{n} = const$;

д) якщо a_{ij} – прибуток, то розв’язок має вигляд $v^* = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$.

14. Критерію Севіджа відповідає твердження:

а) з допомогою цього критерію можна пом'якшити консерватизм прийняття рішення шляхом заміни матриці платежів a_{ij} матрицею витрат, що складається з ризиків $r(A_i, S_j) = r_{ij}$;

б) якщо a_{ij} – прибуток, то розв’язок має вигляд $v^* = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}\left\{\min\limits_{j=1,2,\ldots,n}(a_{ij})\right\}$;

в) при використанні критерію обчислюються найбільші витрати;

г) якщо a_{ij} – прибуток, то розв’язок має вигляд $v^* = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$.

15. Критерію Гурвіца відповідає твердження:

а) з допомогою цього критерію дотримуються деякого компромісу, коли враховується можливість як найгіршої, так і найкращої поведінки «природи»;

б) якщо a_{ij} – витрати, то для $0 \le \alpha \le 1$ розв’язок має такий вигляд: $v^* = \min\limits_{i=1,2,\ldots,m}\left(\alpha \min\limits_{j=1,2,\ldots,n}(a_{ij}) + (1-\alpha)\max\limits_{j=1,2,\ldots,n}(a_{ij})\right)$;

в) це прийняття рішень в умовах невизначеності;

г) це вибір стратегії є консервативним.

16. Стратегією гравця в теорії ігор називають:

а) сукупність правил, що визначають вибір дій під час кожного особистого ходу залежно від ситуації, що склалася;

б) випадковий вибір дій залежно від ситуації, що склалася;

в) послідовний вибір ходів;

г) безліч ходів, які приводять гру до кінцевого стану.

17. Яку властивість має гра за наявності сідлової точки:

а) сідлова точка є ознакою стійкості рішення гри;

б) гравець не може відхилитися від вибраної стратегії;

в) сідлова точка забезпечує максимальний виграш;

г) сідлова точка гарантує безпрограшну гру?

18. Гра з нульовою сумою – це гра:

а) у якій виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого;

б) у якій не обов'язково, щоб один з учасників вигравав, а інший програвав;

в) у якій гравці можуть утворювати коаліції;

г) у якій інтереси гравців є різними, але не обов'язково протилежними.

19. Змішаною стратегією називають:

а) випадковий вибір гравцем своїх чистих стратегій;

б) послідовний вибір гравцем своїх стратегій;

в) програші обох гравців;

г) оптимальні стратегії кожного гравця.

20. Чисті стратегії гравців A і B, що належать до оптимальних змішаних стратегій, для яких імовірності p_i і q_j є відмінними від нуля, називають

а) активними;

б) пасивними;

в) корисними;

г) програшними.

21. Для змішаної гри виберіть стратегії, яким відповідають однакові значення елементів у платіжній матриці (платіжна матриця містить однакові рядки або стовпці):

а) дублювальні;

б) домінуючі;

в) виграшні;

г) пасивні.

22. Для змішаної гри виберіть стратегію, якій у платіжній матриці відповідає рядок з елементами, меншими за значення відповідних елементів іншого рядка:

а) домінуюча;

б) виграшна;

в) сідлова;

г) складова.

23. Для зведення матричної гри до задачі лінійного програмування використовують певну залежність. Виберіть правильні твердження:

а) змінні $x_i = \dfrac{p_i}{v}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ мають задовольняти умову $x_1 + x_2 + ... + x_m = \dfrac{1}{v}$;

б) $x_1 = \dfrac{p_1}{v}$, $x_2 = \dfrac{p_2}{v}$, ..., $x_m = \dfrac{p_m}{v}$;

в) функція $L = \sum_{j=1}^{n} y_j$ має бути мінімальною;

г) $\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} = 1$, $i = 1, 2, ..., m$;

д) $y_1 = vq_1$, $y_2 = vq_2$, ..., $y_n = vq_n$.

24. Біматрична гра – це гра:

а) у якій інтереси гравців є різними, але не обов'язково протилежними;

б) у якій гравці можуть утворювати коаліції;

в) для повного завдання якої достатньо навести величину виграшу або програшу;

г) у якій сума виграшів сторін дорівнює нулю.

25. Виберіть тип біматричної гри:

а) некооперативна;

б) кооперативна;

в) акціонерна;

г) відкрита;

д) закрита.

26. Гра з ненульовою сумою – це гра:

а) у якій не обов'язково, щоб один із учасників вигравав, а другий програвав;

б) у якій гравці можуть утворювати коаліції;

в) у якій виграш одного з гравців дорівнює програшу другого;

г) у якій інтереси гравців є різними, але не обов'язково протилежними;

д) для повного завдання якої достатньо навести величину виграшу або програшу.

27. Кооперативна гра – це гра:

а) у якій гравці можуть утворювати коаліції;

б) після якої спільний виграш розподіляють між членами коаліції;

в) у якій виграш одного з гравців дорівнює програшу другого;

г) для повного завдання якої достатньо навести величину виграшу або програшу;

д) у якій сума виграшів сторін дорівнює нулю.

28. Некооперативна гра – це гра:

а) з ненульовою сумою, коли гравці приймають рішення незалежно один від одного;

б) після якої спільний виграш розподіляють між членами коаліції;

в) у якій виграш одного з гравців дорівнює програшу другого;

г) для повного завдання якої достатньо навести величину виграшу або програшу;

д) у якій сума виграшів сторін дорівнює нулю.

29. Виберіть елементи системи керування запасами:
а) номенклатура запасу;
б) обсяг замовлення;
в) чиста стратегія;
г) сітковий графік;
д) гра, у якій сума виграшів сторін дорівнює нулю.

30. Виберіть елементи системи керування запасами:
а) стратегія керування запасами;
б) функція витрат;
в) часова діаграма робіт;
г) корпоративна гра;
д) функція корисності.

31. Метою керування запасами є:
а) мінімізація функції витрат;
б) максимізація функції споживання;
в) визначення оптимальної стратегії;
г) обчислення виробничої функції;
д) обчислення ціни гри.

32. Основне допущення статичної детермінованої моделі без дефіциту (моделі Уїлсона):
а) інтенсивність споживання апріорно є відомою і постійною в часі;
б) запас поповнюється миттєво;
в) витрати на поповнення залежать від розміру замовлення;
г) можна поставити відразу кілька партій товару.

33. Виберіть формулу для розрахунку тривалості циклу замовлення:

а) $T = \frac{n}{d}$;

б) $T = \frac{d}{n} s$;

в) $T = \frac{n}{2} h$;

г) $T = cd$.

34. Виберіть формулу для розрахунку сумарних витрат за одиницю часу:

а) $C = cd + s\frac{d}{n} + h\frac{h}{2}$;

б) $C^{'}(n) = -\frac{sd}{n^2} + \frac{h}{2} = 0$;

в) $n^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}$;

г) $k^* = \frac{d}{n^*}$.

35. Метою розв’язання задачі керування запасами є:
а) вивільнення оборотних коштів;
б) послідовний вибір стратегій керування запасами;
в) розподіл ресурсів за роботами;
г) розроблення сіткової моделі.

Тести з альтернативним вибором (П – правильно, Н – неправильно)

1. Будь-яка конфліктна ситуація є антагоністичною.
2. Будь-яка антагоністична ситуація є конфліктною.
3. Мета теорії ігор – розроблення рекомендацій щодо розумного поводження учасників конфлікту.
4. Недоліком теорії ігор є припущення про повну розумність супротивників.
5. У теорії ігор передбачається, що не всі можливі стратегії супротивника є відомими.
6. Теорія ігор містить елементи ризику, що неминуче супроводжують розумні рішення в реальних конфліктах.
7. У теорії ігор знаходження оптимальної стратегії здійснюється за багатьма критеріями.
8. Стратегічні ігри складаються тільки з особистих ходів.
9. У парній грі кількість стратегій кожного учасника дорівнює двом.
10. Ігри, у яких дії гравців спрямовано на максимізацію виграшів коаліцій без наступного їх розподілу між гравцями, називають коаліційними.
11. Результатом кооперативної гри є поділ виграшу коаліції, що виникає не як наслідок тих або інших дій гравців, а як результат їхніх наперед визначених угод.
12. За описом ігри поділяються на ігри з повною або неповною інформацією.
13. Кінцеву множинну гру з нульовою сумою називають матричною.
14. Кінцеву парну гру з нульовою сумою називають биматричною грою.
15. Якщо гра розміром $2 \times n$ не має оптимального розв’язку в чистих стратегіях, то оптимальний розв’язок в змішаних стратегіях містить дві активні стратегії кожного з гравців.

16. У грі розміром $m \times 2$ кількість активних стратегій в оптимальній стратегії кожного з гравців може дорівнювати або одиниці, або двом.

17. Оптимальне рішення в грі двох осіб з нульовою сумою завжди є стійким незалежно від того, змішані або чисті стратегії використовують гравці.

18. Якщо оптимальна ціна матричної гри є негативною, то кінцевий результат гри буде збитковим для гравця A.

19. Додавання того самого числа до всіх елементів платіжної матриці не впливає на ціну гри.

20. Множення всіх елементів платіжної матриці на одне й те саме додатне число не змінює оптимальних стратегій гравців.

21. Ціна матричної гри зміниться, якщо з платіжної матриці виключити рядки й стовпці, що відповідають дублювальним і домінуючим стратегіям.

22. Будь-яку матричну гру розміром $2 \times n$ або $m \times 2$ можна звести до гри розміром 2×2.

23. Якщо всі елементи платіжної матриці в матричній грі є додатними, то й ціна гри є додатною.

24. Будь-яку матричну гру можна звести до пари двоїстих задач лінійного програмування.

25. У прямій задачі лінійного програмування, до якої зводиться матрична гра, цільова функція підлягає максимізации.

26. У зворотній задачі лінійного програмування, до якої зводиться матрична гра, обмеження одержують зі знаком «≤» .

27. Ціна матричної гри, яку одержують із розв'язання прямої і зворотної задач, може бути різною.

28. Кожну матричну гру можна подати парою прямої і двоїстої задач лінійного програмування.

29. Теорія ігор не може дати результатів у тих випадках, коли елементи платіжної матриці задано неточно (наприклад, коли їх тільки упорядковано).

30. Ігри називають нескінченними, якщо множина чистих стратегій кожного гравця є нескінченною.

31. Нескінченні антагоністичні ігри вирішувати складніше, ніж скінченні.

32. У нескінченній антагоністичній грі принципом оптимальності є принцип максиміну.

33. Нескінченні антагоністичні ігри розраховуються тільки в чистих стратегіях.

34. Для антагоністичних симетричних ігор оптимальні стратегії гравців A і B збігаються.

34. Для антагоністичних симетричних ігор ціна гри $\nu > 0$.

35. У строго опуклій грі гравець B має тільки оптимальну стратегію, яка є чистою.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Зайченко, Ю. П. Дослідження операцій [Текст] / Ю. П. Зайченко. – К. : ЗАТ «Віпол», 2000. – 688 с.

2. Наконечний, С. І. Математичне програмування [Текст] : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.

3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст] / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1988. – 208 с.

4. Кутковецький, В. Я. Дослідження операцій [Текст] : навч. посіб. / В. Я. Кутковецький. – К. : Вид-во ТОВ «Вид. дім "Професіонал”», 2004. – 350 с.

5. Катренко, А. В. Дослідження операцій [Текст] : підручник / А. В. Катренко. – Л. : Магнолія Плюс, 2004. – 549 с.

6. Кремер, Б. А. Исследование операций в экономике [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 407 с.

7. Зайченко, Ю. П. Исследование операций. Сборник задач [Текст] / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – К. : Освіта, 1990. – 534 с.

8. Салманов, О. Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel [Текст] / О. Н. Салманов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 464 с.

9. Карлин, С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике [Текст] / С. Карлин. – М. : Мир, 1964. – 834 с.

10. Вентцель, Е. С. Введение в исследование операций [Текст] / Е. С. Вентцель. – М. : Сов. радио, 1964. – 388 с.

11. Пономаренко, О. І. Системні методи в економіці, бізнесі й менеджменті [Текст] / О. І. Пономаренко, В. О. Пономаренко. – К. : Либідь, 1995. – 240 с.

12. Пономаренко, О. І. Основи математичної економіки [Текст] / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Інформтехніка, 1995. – 320 с.

13. Горелик, В. А. Исследование операций [Текст] / В. А. Горелик, И. А. Ушаков. – М. : Машиностроение, 1986. – 286 с.

14. Філіпковська, Л. О. Економіко-математичні моделі в управлінні та економіці [Текст] : навч. посіб. / Л. О. Філіпковська, В. Л. Петрик, Т. А. Клименко. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2013. – 141 с.

ЗМІСТ

Вступ …………………………………………………………………. 3
1. Принципи застосування математики в економіці ……………………….. 4
2. Загальні відомості про дослідження операцій. Історія розвитку методів дослідження операцій ……………………………………………….. 7
3. Основні поняття дослідження операцій ………………………………….. 8
4. Оптимізаційні задачі керування запасами ……………………............. 11
4.1. Прості моделі керування запасами ……………………………….. 14
4.2. Статична детермінована модель без дефіциту …………………..... 15
5. Задачі масового обслуговування ……………………………………….. 20
5.1. Одноканальна СМО з відмовами ………………………………….. 21
5.2. Одноканальна СМО з очікуванням (чергою) ……………………..... 22
5.3. Одноканальна СМО з очікуванням з необмеженою чергою …….. 23
5.4. Одноканальна СМО з обмеженою чергою ………………………. 24
5.5. Багатоканальна СМО з відмовами ………………………………... 25
6. Суть і основні елементи сіткового планування й керування ………….. 29
6.1. Елементи сіткового графіка, методика його будування ………….. 32
6.2. Будування правильної нумерації вершин графа ………………….. 34
6.3. Алгоритм пошуку найкоротшого шляху сітки (графа) …………….. 35
6.4. Будування графа планування сіток і керування ними ……………. 37
6.5. Порядок і правила будування графів ПСК ………………………. 39
6.6. Параметри планування сіток і керування ними за критерієм часу ……………………………………………………………………... 40
6.7. Аналіз і оптимізація планування сіток і керування ними ………… 43
7. Задачі з умовами невизначеності й конфлікту ………………………….. 46
7.1. Загальна характеристика задач з умовами невизначеності й конфлікту ……………………………………………………………. 46
7.2. Загальна характеристика задач теорії ігор ………………………… 50
7.3. Матрична гра двох гравців з нульовою сумою …………………….. 51
7.4. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування ……. 54
8. Завдання для самостійної роботи ……………………………………. 60
Тестові завдання ………………………………………………………. 68
Бібліографічний список ………………………………………………… 77

Навчальне видання

Клименко Тетяна Анатоліївна
Петрик Валерія Леонідівна
Філіпковська Лариса Олексіївна

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ:
ТЕОРІЯ, ЗАВДАННЯ, ТЕСТИ

Редактор О. Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2014
Підписано до видання 15.08.2014
Ум. друк. арк. 4,4. Обл.-вид. арк. 4,9. Електронний ресурс

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001