

Тетяна АЛЬОШЕЧКІНА

*старша викладачка кафедри міцності літальних апаратів літакобудівельного факультету
Національного аерокосмічного університету
ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна
e-mail: t.aloshechkina@khai.edu,
ORCID: 0000-0001-7234-1558*

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ТА ПЕРІОДИЧНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ НА ВЕРХНІЙ МЕЖІ ШАРУ

Анотація. Розв'язана просторова задача теорії пружності для шару з поздовжньою круговою циліндричною порожниною та періодичним навантаженням по верхній межі шару. Порожнина розташована паралельно межах шару. Ми маємо змішані умови - на нижній межі шару задані переміщення, верхній межі задані напруження. На поверхні циліндричної порожнини задані переміщення. Ми маємо другу основну просторову задачу теорії пружності для шару з поздовжньою циліндричною порожниною при заданих на поверхні шару періодичних переміщеннях. Розв'язання виконано за допомогою аналітико-числового узагальненого методу Фур'є, застосованого до рівнянь Ламе в декартовій та локальній циліндричних системах координат. Для врахування періодичних навантажень застосовується додаткова задача з розкладанням розв'язку для шару (без порожнини) в ряди Фур'є. Загальним розв'язком є сума цих двох розв'язків. Задача зведена до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується методом редукції. Проведено аналіз напружено-деформованого стану шару на поверхні порожнини та перехийках від порожнини до меж шару.

Ключові слова: циліндрична порожнина в шарі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є.

SOLUTION OF THE ELASTICITY THEORY PROBLEM FOR A LAYER WITH A CYLINDRICAL CAVITY AND PERIODIC LOADING ON THE UPPER BOUNDARY OF THE LAYER

Abstract: The spatial elasticity problem for a layer with a longitudinal circular cylindrical cavity and periodic loading on the upper boundary of the layer is solved. The cavity is positioned parallel to the boundaries of the layer. We have mixed conditions: displacements are specified on the lower boundary of the layer, while stresses are specified on the upper boundary. This is the second main spatial problem of elasticity theory for a layer with a longitudinal cylindrical cavity under periodic displacements applied on the layer's surface. The solution is obtained using an analytical-numerical generalized Fourier method applied to the Lamé equations in Cartesian and local cylindrical coordinate systems. To account for periodic stresses, an auxiliary problem with a Fourier series expansion for the layer (without the cavity) is used. The overall solution is the sum of these two solutions. The problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations, which is solved using the reduction method. An analysis of the stress-strain state on the cavity surface and the ligaments between the cavity and the layer boundaries is presented.

Keywords: cylindrical cavity in a layer, Lamé equations, generalized Fourier method.

Основним завданням у проектуванні в аерокосмічній галузі є оптимізація конструкцій, що дозволяє досягти високої точності визначення напружено-деформованого

стану деталей під зовнішнім навантаженням. Через складну геометрію і навантаження часто неможливо використовувати точні методи розрахунку, тому застосовують випробування або спрощені моделі, що, на жаль, знижує точність результатів. Комбінація наближених і точних методів дозволяє поліпшити результати, особливо для складних багатошарових композитів. Деякі дослідження застосовують аналітичні та числові методи, зокрема метод скінченних елементів [1, 2], що ефективно розв'язує задачі з циліндричними отворами в пластинах.

Аналітико-числові методи, такі як узагальнений метод Фур'є [3], використовуються для моделювання просторових конструкцій з великою кількістю граничних поверхонь. Врахування формул додавання узагальненого методу Фур'є [4] для розв'язків рівняння Ламе [5] між декартовою та циліндричною системами координат враховано в багатьох роботах. Так в роботі [6] розв'язані задачі теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами змішаного типу. В роботі [7] враховується нижня межа та розв'язується задача для шару з однією циліндричною порожниною в переміщеннях. Аналогічна задача в напруженнях розглядається в роботі [8], мішаного типу в роботі [9]. В роботі [10] розглядається шар, спряжений з півпростором, який має циліндричну порожнину.

В роботах [6–10] до граничних умов застосовується подвійний інтеграл Фур'є, що обмежує коло використання тільки швидко спадаючими функціями. Це унеможливорює врахування періодичних переміщень або напружень (наприклад від розташованого обладнання або технологічного кріплення), коли навантаження періодично діють через деякий постійний проміжок відстані до нескінченості.

Тому, задачі з періодичними навантаженнями потребують додаткових методів і комбінацій для точнішого розрахунку, що обмежує застосування традиційних методів. Існує потреба у дослідженні, яке б враховувало періодичні навантаження та забезпечувало точні розрахунки для циліндричних порожнин у шарах, що робить такі роботи актуальними для практичного застосування в інженерії. Попри значну кількість публікацій, присвячених розрахунку шару з концентраторами напружень, на практиці все ще існують нерозв'язані задачі, що виникають у процесі проектування. Відсутність ефективного методу для їх розрахунку підкреслює актуальність проведення дослідження, спрямованого на просторовий аналіз шару з циліндричною порожниною та заданими періодичними навантаженнями.

Постановка та розв'язок задачі.

Об'єктом дослідження є напружено-деформований стан пружного однорідного шару з циліндричною порожниною та заданим періодичним навантаженням.

Пружний однорідний шар має поздовжню кругову циліндричну порожнину радіусом R . Порожнина розташована паралельно межах шару. Верхня межа шару розташована на

відстані $y = h$, нижня на відстані $y = -\tilde{h}$ від центру порожнини. Порожнину будемо розглядати у локальних циліндричних системах координат ρ, φ, z , межі шару у декартовій системі координат (x, y, z) .

Розв'язок рівняння Ламе будемо шукати виходячи з умов, що на верхній межі шару задано напруження $\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{f}_h^0(x, z)$, на нижній межі шару переміщення $\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{f}_h^0(x, z)$, на поверхні циліндричної порожнини переміщення $\vec{U}(\varphi, z)|_{\rho=R} = \vec{f}_p^0(\varphi, z)$

$$\begin{aligned}\vec{f}_h^0(x, z) &= \tau_{xy}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z, \\ \vec{f}_h^0(x, z) &= U_x^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + U_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + U_z^{(\tilde{h})} \vec{e}_z, \\ \vec{f}_p^0(\varphi, z) &= U_\rho^{(p)} \vec{e}_\rho + U_\varphi^{(p)} \vec{e}_\varphi + U_z^{(p)} \vec{e}_z\end{aligned}\quad (1)$$

відомі функції, серед яких $\tau_{xy}^{(h)}, \sigma_y^{(h)}, \tau_{yz}^{(h)}$ – періодичні функції вздовж осі x .

Базисні розв'язки рівняння Ламе виберемо у вигляді, що представлені в роботі [16].

Для врахування заданих періодичних навантажень була розв'язана допоміжна задача для шару без порожнини у вигляді

$$\vec{U}_0 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(H_{k,n}^{(0)}(\lambda) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu_n) + \tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu_n) \right) d\lambda, \quad (2)$$

де $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки, а невідомі функції $H_{k,n}^{(0)}(\lambda)$, $\tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов, які зображені періодичними функціями.

Для врахування граничних умов на нижній межі шару рівняння (2), при $y = -\tilde{h}$, прирівняне нулю. На верхній межі шару, вектор (2), при $y = h$, прирівняний заданому $\vec{f}_h^0(x, z)$, зображеному інтегралом та рядом Фур'є

$$\vec{f}_h^0(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{c}_h(\lambda, n) e^{i(\mu_n x + \lambda z)} d\lambda,$$

де

$$\vec{c}_h(\lambda, n) = \frac{1}{4\pi \cdot \ell} \int_{-\ell}^{\ell} dx \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}_h^0(x, z) \cdot e^{-i(\mu_n x + \lambda z)} dz; \quad (3)$$

2ℓ – період функції; $\mu_n = n\pi / \ell$.

Після прирівнювання векторних коефіцієнтів при $e^{i(\mu_n x + \lambda z)}$ отримано

$$\sum_{s=1}^3 H_{k,n}^{(0)}(\lambda) \vec{d}_s^{(\sigma)+}(h; \lambda, \mu_n) + \tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda) \vec{d}_s^{(\sigma)-}(h; \lambda, \mu_n) = \vec{c}_h(\lambda, n) \quad (4)$$

$$\sum_{s=1}^3 H_{k,n}^{(0)}(\lambda) \vec{d}_s^+(-\tilde{h}; \lambda, \mu_n) + \tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda) \vec{d}_s^-(-\tilde{h}; \lambda, \mu_n) = 0$$

Рівняння (4) спроектоване на осі координат (прирівняні проекції при базисних векторах $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) і виражені $H_{k,n}^{(0)}(\lambda)$ та $\tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda)$

$$H_{j,n}^{(0)}(\lambda) = \sum_{k=1}^3 \frac{A_{k,j}}{D} (\vec{c}_h(\lambda, n)) \cdot \vec{e}_k ; \quad \tilde{H}_{j,n}^{(0)}(\lambda) = \sum_{k=1}^3 \frac{A_{k,j+3}}{D} (\vec{c}_h(\lambda, n)) \cdot \vec{e}_k ,$$

де $\vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$ – орти декартової системи координат; $j=1, 2, 3$; $A_{1..6,1..6}$ – алгебраїчне доповнення системи рівнянь; D – визначник системи рівнянь.

Після визначення невідомих $H_{k,n}^{(0)}(\lambda)$ та $\tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda)$, за допомогою формул переходу [11], вираз (4) переписаний у циліндричній системі координат через базисні розв'язки $\vec{R}_{k,m}$ та знайдені переміщення на місці, де геометрично розташована поверхня порожнини. Звільнившись від інтеграла по λ та $e^{i(\lambda z + m\varphi)}$, отримано

$$\begin{aligned} \vec{h}_m^{(0)}(\lambda) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{s=1}^3 \left(r_{n,j}(R; m, \lambda) \cdot f_{k,n}^m(\lambda, \mu_n) \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{A_{k,s}}{D} (\vec{c}_h(\lambda, n)) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^3 \left(r_{n,j}(R; m, \lambda) \cdot \tilde{f}_{k,n}^m(\lambda, \mu_n) \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{A_{k,s+3}}{D} (\vec{c}_h(\lambda, n)) \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де $r_{n,j}(\rho; m, \lambda)$ – базисні розв'язки рівняння Ламе без $e^{i(\lambda z + m\varphi)}$;

$$\begin{aligned} f_{k,n}^m(\lambda, \mu) = & (i \cdot \omega_-(\lambda, \mu))^m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{m\mu}{\lambda^2} & \frac{\gamma}{\lambda^2} & \frac{4\mu(1-\sigma)}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{f}_{k,n}^m(\lambda, \mu) = & (i \cdot \omega_+(\lambda, \mu))^m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{m\mu}{\lambda^2} & -\frac{\gamma}{\lambda^2} & \frac{4\mu(1-\sigma)}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$A_{1..6,1..6}$ – алгебраїчне доповнення системи рівнянь; D – визначник системи рівнянь;

$\vec{c}_h(\lambda, n)$ – подані в формулі (3).

Після знаходження відбитку періодичної функції на місці розташування порожнини (5), була розв'язана основна задача на основні узагальненого методу Фур'є, розв'язок якої поданий у вигляді

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{U}_1,$$

де $\vec{U}_0$ – подано в формулі (2);

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 = & \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\lambda d\mu; \end{aligned} \quad (6)$$

$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки, які задані формулою (2), а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ і $B_{k,m}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов (1), враховуючи на поверхні порожнини додаткову функцію (5) з протилежним знаком.

Знаходження невідомих $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ і $B_{k,m}(\lambda)$ проведено як в роботі [7].

Тобто для виконання граничних умов на нижній межі шару $y = -\tilde{h}$, вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (6) за допомогою формул переходу переписані у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(+)}$. Отримані вектори прирівняні, при $y = -\tilde{h}$, заданому $\vec{f}_h^0(x, z)$, зображеному через подвійний інтеграл Фур'є

$$\vec{f}_h^0(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{c}_h(\lambda, \mu) e^{i(\lambda z + \mu x)} d\lambda d\mu.$$

На верхній межі шару граничні умови враховані в рівнянні (2), тому рівняння (6), при $y = h$, дорівнюється нулю. При цьому вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (6), за допомогою формул переходу, переписані у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(-)}$.

З цих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Для виконання граничних умов на циліндрі $\rho = R$ праву частину (6), за допомогою формул переходу (4), переписано у циліндричній системі координат через базисні розв'язки $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$. Отриманий вектор прирівняний

$$\vec{h}_m(\lambda) = \vec{h}_m^{(1)}(\lambda) - \vec{h}_m^{(0)}(\lambda),$$

де $\vec{h}_m^{(1)}(\lambda)$ – задана функція $\vec{f}_p^0(\varphi, z)$ (1), зображена інтегралом та рядом Фур'є;

$\vec{h}_m^{(0)}(\lambda)$ – щільність інтегрального зображення (5).

З отриманої системи рівнянь виключені знайдені раніше функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$. В результаті отримано сукупність трьох систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$.

Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції $B_{k,m}(\lambda)$ підставлені у вирази для $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$. Цим були визначені всі невідомі задачі.

Чисельні результати. Проведений аналіз напруженого стану для шару з модулем пружності $E = 3,25 \cdot 10^5$ МПа та коефіцієнтом Пуассона $\sigma = 0,16$.

Геометричні параметри. Радіус циліндричної порожнини $R=10$ см. Верхня та нижня межі шару розташовані відносно центра порожнини на відстані $h=\tilde{h}=20$ см.

На верхній межі шару вздовж осі x задана періодична функція у вигляді нормальних напружень

$$\sigma_y^{(*)}(x, z) = \begin{cases} -\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot (10^4 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2}), & 0 \leq |x| \leq 2, \\ 0, & 2 < |x| \leq \pi \end{cases},$$

та дотичних напружень $\tau_{xy}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$. На нижній межі задані переміщення

$$U_x^{(\tilde{h})} = U_y^{(\tilde{h})} = U_z^{(\tilde{h})} = 0, \text{ на поверхні порожнини переміщення } U_\rho^{(p)} = U_\varphi^{(p)} = U_z^{(p)} = 0.$$

Зображення функції $\sigma_y^{(h)}$ через ряд Фур'є по осі x і інтеграл Фур'є по осі z , має вигляд

$$f(x; \lambda, n) = -\left[\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 \cos nx \right) \right] \cdot \left[2,5e^{-|\lambda|10} (|\lambda|10 + 1) \right].$$

Висновки

Для врахування періодичного навантаження було запропоновано та застосовано допоміжну задачу (2) для шару без циліндричної порожнини, де навантаження розкладається в ряди Фур'є (3), а переміщення визначаються в точці, де має бути порожнина (5). Основна задача враховує ці переміщення із зворотним знаком, а кінцевий результат є сумою обох задач. Щоб отримати напружений стан, до розв'язків (2) і (6) застосовано оператор напруження, а завдяки формулам переходу стало можливо подати їх в єдиній системі координат та отримати чисельний результат.

У цій роботі було введено допоміжну задачу, що дозволяє враховувати граничні умови як функції, що розширюються до нескінченності. Запропонований метод високої точності дозволяє обчислювати міцність конструкцій, розрахунковою схемою яких є шар з циліндричною порожниною і періодичними граничними умовами. Враховуючи постійну геометрію вздовж осі z , періодичне навантаження в цьому напрямі можна врахувати без допоміжної задачі, використовуючи метод розділення змінних у поєднанні з узагальненим методом Фур'є.

Список використаних джерел:

1. Streng, G., Fiks, J. (1977). *Teoriya metodakonechnykh elementov*. M.: Mir, 352.
2. Dashchenko, A. F., Lazareva, D. V., Sur'yaninov, N. G. (2007). *ANSYS v zadachakh inzhenernoy mekhaniki*. Odessa: Astroprint, 484.
3. Николаев, А. Г., Проценко, В. С. (2011). Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 344.
4. Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. (2016). Stresses in an Infinite Circular Cylinder with Four Cylindrical Cavities. *Journal of Mathematical Sciences*, 217(3), 299–311.
5. Ukrayinets, N., Murahovska, O., Prokhorova, O. (2021). Solving a one mixed problem in the theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(7(110)), 48–57.
6. Protsenko, V., Miroshnikov, V. (2018). Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(7), 43 – 50.
7. Miroshnikov, V. Yu. (2019). The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 102, 77–90.
8. Miroshnikov, V., Denysova, T., Protsenko, V. (2019). The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 103, 208–218.
9. Miroshnikov, V. Yu. (2020). Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation. *International Applied Mechanics*, 56(3), 372-381.
10. Miroshnikov, V. (2019). Investigation of the stress state of a composite in the form of a layer and a half space with a longitudinal cylindrical cavity at stresses given on boundary surfaces. *Journal of Mechanical Engineering*, 22(4). 24-31.
11. Miroshnikov V., Younis B., Savin O., Sobol V. A linear elasticity theory to analyze the stress state of an infinite layer with a cylindrical cavity under periodic load. *Computation*, 2022, 10(9), 160. <https://doi.org/10.3390/computation10090160>