

Олександр ДЕНЬЩИКОВ

кандидат технічних наук

докторант кафедри міцності літальних апаратів

Факультету літакобудування

Національного аерокосмічного університету

ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна

e-mail: alex_day@ukr.net

ORCID: 0009-0008-2385-5841

ПЕРША ОСНОВНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ТОВСТОСТІННОЮ ТРУБОЮ НАВАНТАЖЕНОЮ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ

Анотація: Закріплення, які можуть бути промодельовані як товстостінні труби, часто зустрічаються в авіаційній техніці. Точні методи аналізу подібних моделей слабо розвинені і не охоплюють весь спектр задач. Тому розвиток та створення таких методів є актуальною задачею. Розв'язана просторова задача теорії пружності для нескінченного шару через який проходить товстостінна труба паралельно поверхням шару. На поверхнях шару та на внутрішній поверхні труби задані напруження. Шар розглядається у декартовій системі координат, труба у локальних циліндричних. Для вирішення використано узагальнений метод Фур'є, які застосовано до рівнянь Ламе. Спираючись на граничні умови і умови спряження між шаром та трубою сформована система інтегро-алгебраїчних рівнянь, до якої застосовано метод редукції. В чисельному дослідженні точність виконання граничних умов склала 10^{-5} для значень напружень від 0 до 1 при порядку системи рівнянь $m=4$. Отримані числові результати можуть бути застосовані про прогнозуванні геометричних параметрів під час проектування.

Ключові слова: узагальнений метод Фур'є, рівняння Ламе, умови спряження.

THE FIRST FUNDAMENTAL PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A LAYER WITH A THICK-WALLED PIPE LOADED ON THE INTERNAL SURFACE

Abstract: Joints that can be modeled as thick-walled pipes are often found in aeronautical engineering. Exact methods of analyzing such models are poorly developed and do not cover the entire range of problems. Therefore, the development and creation of such methods is an urgent task. The spatial problem of the theory of elasticity is solved for an infinite layer through which a thick-walled pipe passes parallel to the layer surfaces. Stresses are set on the surfaces of the layer and on the inner surface of the pipe. The layer is considered in the Cartesian coordinate system, the pipe in the local cylindrical coordinates. For the solution, the generalized Fourier method was used, which was applied to the Lamé equations. Based on the boundary conditions and conjugation conditions between the layer and the pipe, a system of integro-algebraic equations is formed, to which the reduction method is applied. In the numerical study, the accuracy of fulfilling the boundary conditions was 10^{-5} for stress values from 0 to 1 at the order of the system of equations $m=4$. The obtained numerical results can be applied to predict geometric parameters during design.

Keywords: generalized Fourier method, Lamé equation, conjugation conditions.

Вступ. Найбільш розповсюджений підхід в машино та авіабудуванні при моделюванні умов закріплення є представлення їх у вигляді циліндричних включень, наприклад

товстостінних труб с заданими значеннями напружень на внутрішній поверхні. Розв'язок таких задач відбувається різноманітними чисельними або аналітико-чисельними методами. При цьому слід зважати на те, що чисельні методи [1-5] є наближеними, що не гарантує точності результатів.

На думку авторів розв'язок задач контакту уздовж великих поверхонь найбільш перспективним є виконувати за допомогою узагальненого метод Фур'є [6]. В літературі представлені роботи в яких даним методом розв'язані задачі знаходження напружено деформованого стану в півпросторі з однією або декількома циліндричними порожнинами [7-9], та в шарі з однією циліндричною порожниною [10 – 16]. Знаходженню напруженого стану в моделях де неоднорідність представлена у вигляді труб присвячені роботи [17, 18]. Однак в оцих роботах зовнішнє навантаження представлено як прикладене по поверхні шару. Таким чином клас робіт де навантажена внутрішня поверхня неоднорідності, яка промодельована як товстостінна труба залишається нерозглянутою і розв'язання таких задач є актуальною задачею.

Постановка та розв'язок задачі.

Пружний однорідний шар розташований на товстостінній трубі, яка паралельна його межам (рис.1).

Труба з зовнішнім радіусом R_1 , та внутрішнім r_1 розглядається в циліндричній системі координат (ρ_1, φ_1, z) . Шар представлений у декартовій системі координат (x, y, z) . Відстань до меж шару $y = h$ та $y = -\tilde{h}$. Для спрощення аналізу вважається, що обидві системи координат мають початок в одній точці.

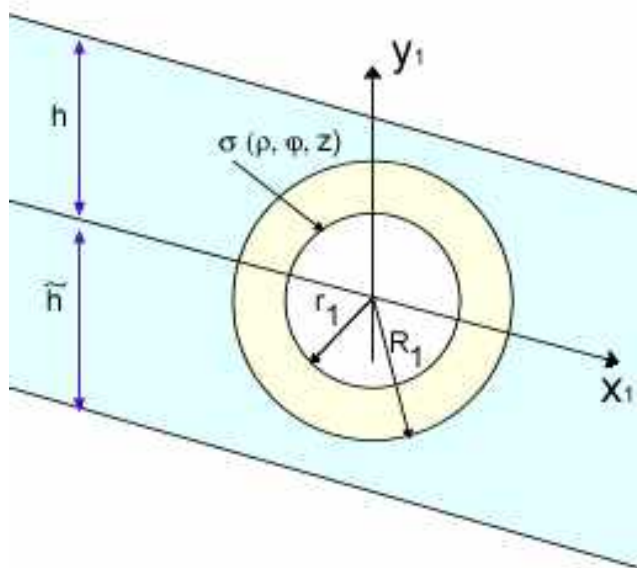


Рис. 1. Шар з врізаною товстостінною трубою

Необхідно знайти розв'язок рівняння Ламе $\Delta \vec{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0$.

На верхній та нижній межах шару, та на внутрішній поверхні труби задані напруження, відповідно

$$\begin{aligned} F\vec{U}(x, z)|_{y=h} &= \vec{F}_h^0(x, z), F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z), \\ F\vec{U}(\phi_p, z)|_{\rho_1=r_1} &= F\vec{U}_0^{(1)}(\phi_1, z) \end{aligned} \quad (1)$$

де \vec{U} – переміщення в шарі;

$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \vec{n} \cdot \overline{\operatorname{div} U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \overline{\operatorname{rot} U}) \right]$ – оператор напруження;

$$\vec{F}_h^0(x, z) = \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z, \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_z,$$

$$F\vec{U}_0^{(p)}(\phi_p, z) = \sigma_\rho^{(p)} \vec{e}_\rho + \tau_{\rho\phi}^{(p)} \vec{e}_\phi + \tau_{\rho z}^{(p)} \vec{e}_z \quad \text{– відомі функції.}$$

Умова спряження – рівність переміщень та напружень уздовж контактуючих поверхонь труби та шару.

$$\vec{U}_0(\phi, z)|_{\rho=R_1} = \vec{U}_p(\phi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (2)$$

$$F\vec{U}_0(\phi, z)|_{\rho=R_1} = F\vec{U}_p(\phi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (3)$$

При цьому, виходячи з умов статички, повинні виконуватись рівняння рівноваги

$$\iint_{(\sigma)} \vec{F}(M) d\sigma = 0, \quad \iint_{(\sigma)} \vec{r} \times \vec{F}(M) d\sigma = 0,$$

де $\sigma = \{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\}$, σ_1 – площина на $y = h$, σ_2 – площина на $y = -\tilde{h}$, σ_3 – поверхня циліндра

$$\rho = R, \vec{F}(M) = \begin{cases} \vec{F}_h^0(x, z) & \text{на } \sigma_1 \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) & \text{на } \sigma_2, \vec{r} \text{ – радіус вектор т.М.} \\ \vec{F}_R^0(\phi, z) & \text{на } \sigma_3 \end{cases}$$

Всі задані функції будемо вважати швидко спадаючими від початку координат по осі z і осі x .

Для розв'язання задачі переміщення в шарі представлено у вигляді [19] :

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda + \\ &+ \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

А переміщення в трубці у вигляді [8]

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda) d\lambda, \quad (5)$$

де $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$ – невідомі функції, які знайдено з крайових умов (1) та умов спряження (2), (3).

Базисні розв’язки рівняння Ламе $\vec{S}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$, $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ представлено у вигляді [17].

Нескінчена система інтегро-алгебраїчних рівнянь має 6 невідомих і складається з трьох рівнянь, що задовільняють граничним умовам (1) і дві умов спряження (3) та (4). У зв’язку з тим, що складові рівнянь (5) записані в різній системі координат було використано формули переходу між базисними розв’язками [18].

Після використання формул переходу базисних розв’язків між системами координат (6)-(7) система рівнянь була представлена в одній системі координат. Таким чином, нескінчену інтегро-алгебраїчну систему рівнянь було зведено до нескінченної лінійної системи рівнянь, до якої було застосовано метод редукції [9]. Порядок системи рівнянь m є параметром точності результатів розрахунку.

Чисельні дослідження напруженого стану. Крізь пружній ізотропний шар (рис.1) проходить однорідна товстостінна труба. Коефіцієнт Пуассона шару (Сплав Д16Т) $\sigma = 0,3$; модуль пружності $E = 71000$ Н/мм². Коефіцієнт Пуассона труби (Сталь ШХ15) $\sigma = 0,28$, модуль пружності $E = 216000$ Н/мм². Для порівняння був застосований інший матеріал труби: поліамід, коефіцієнт Пуассона $\sigma = 0,4$, модуль пружності $E = 1650$ Н/мм².

Геометричні параметри моделі: зовнішній радіус труби $R_1 = 16$ мм, внутрішній $r_1 = 5$ мм, відстань до верхньої та нижньої меж шару $h = 15$ мм, $\tilde{h} = 15$ мм.

На верхній та нижній межах шару задано нормальні напруження і дотичні напруження **дорівнюють нулю**. На внутрішній поверхні труби прикладені одиничні рівномірно розподілені по довжині b нормальні напруження $\sigma_p(z) = \begin{cases} |z| > b/2, & \sigma_p(z) = 0 \\ |z| \leq b/2, & \sigma_p(z) = 1 \end{cases}$ та дотичні $\tau_{\rho\phi}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(p)} = 0$.

Нескінчена система була зрізана по параметру $m = 4$ (кількість членів ряду Фур’є і порядок системи рівнянь).

Обчислення інтегралів виконано квадратурними формулами Філона. Точність виконання граничних умов при зазначених m і заданих геометричних параметрах не менше ніж 10^{-5} при значеннях від 0 до 1.

Висновки

Розв’язана просторова задача теорії пружності для шару з товстостінною циліндричною трубою, яка розташована паралельно межах шару.

Враховано локальний тиск всередині труби у вигляді рівномірно розташованого навантаження.

Визначені параметри інтегрування рівняння Ламе вздовж осі z при дії рівномірно розташованого навантаження.

Отримано напружено – деформований стан в тілі шару та труби. Проведений аналіз розподілу напружень на поверхнях шару, внутрішній поверхні труби та на межі спряження пружних тіл при різних матеріалах труби.

На основі числових досліджень алгебраїчної системи можна стверджувати, що розв'язок задачі може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Список використаних джерел

1. Tekkaya, A.E.; Soyarslan, C. Finite Element Method. In CIRP Encyclopedia of Production Engineering; Laperrière, L., Reinhart, G., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2014; pp. 508–514. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699.
2. Dashchenko, A.F.; Lazareva, D.V.; Sur'yaninoy, N.G. ANSYS v Zadachakh Inzhenernoy Mekhaniki; Astroprint: Odessa, Ukraine 2007.
3. Zasovenko, A., Fasoliak, A.: Mathematical modeling of the dynamics of an elastic half-medium with a cylindrical cavity reinforced by a shell under axisymmetric loads. *New Materials and Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering* 2. 67–73 (2023).
4. Азаров А.Д., Журавлев Г.А., Пискунов А.С. Сравнительный анализ аналитического и численного методов решения плоской задачи о контакте упругих цилиндров. *Инновационная наука*. 2015. №1-2, С. 5–13.
5. Smetankina, N., Kurennov, S., Barakhov K.: Dynamic Stresses in the Adhesive Joint. The Goland-Reissner Model. *International Conference on Reliable Systems Engineering* 762, 456–468. (2023).
6. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 2011. 344 с.
7. Проценко В. С., Українець Н. А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / *Вісник Запорізького національного університету*. – 2015. – Вып. 2. – С. 193–202.
8. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью / *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. – 2012. – Вип.20. – С. 253-259.
9. Miroshnikov, V. YU. Evaluation of the stress-strain state of half-space with cylindrical cavities. *Вісник Дніпровського університету. Серія: Механіка*. – 2018. – Vol. 26, № 5. – P. 109 – 118. DOI: <http://dx.doi.org/10.15421/371813>
10. Гребенніков М. М., Миронов К. В. Задача теорії пружності для шару з циліндричною порожниною при заданих мішаних граничних умовах на межах шару і умов гладкого контакту на поверхні порожнини. *Proceedings of the 9th International Scientific and Practical Conference "Scientific research in XXI century"* (18 – 19.06.2021). OTTAWA, CANADA, 2021. Pp. 412-417

11. Miroshnikov V. Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity / *Strength of Materials and Theory of Structures*. – 2019. – №102. – P. 77–90. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>
12. Miroshnikov V. , Denysova T., Protsenko V. The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*. Kiev, 2019. №103. P. 208–218. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>
13. Miroshnikov V. Y. Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation / *International Applied Mechanics*. – 2020. –№56(3). – P. 372–381. DOI: [10.1007/s10778-020-01021-x](https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x)
14. Miroshnikov V. Determination of the stress state of a layer with a cylindrical cavity, located on an elastic base and given boundary conditions in the form of displacements. *European Journal of Technical and Natural Sciences. Section 3. Machinery construction*. Vienna. 2019. №5-6. P.21–25 <https://doi.org/10.29013/EJTNS-19-5.6-21-26>
15. Гребенніков М. М., Миронов К. В. Аналіз напруженого стану шару з поздовжньою порожниною та заданими невласно мішаними граничними умовами. XXIX Міжнародна науково-практична конференція «Science, theory and practice» (08 – 10 июня, 2021). Токио, Япония, 2021. С. 536-540.
16. Нікічанов, В. Визначення напруженого стану шару з циліндричною порожниною за заданих на граничних поверхнях умов гладкого контакту// *InterConf*, 2021, вип. 72, <https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/interconf/article/view/14168>.
17. Miroshnikov, V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. *Journal of Mechanical Engineering*. Kharkiv, 2019. Vol. 22, N 2. P. 44-52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>
18. Vitaly, M. (2023). Rotation of the Layer with the Cylindrical Pipe Around the Rigid Cylinder. *Advances in Mechanical and Power Engineering* . CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, pp 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32
19. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. P 148–158.