Олексій ІЛЬЇН
аспірант кафедри міцності літальних апаратів літакобудівельного факультету
Національного аерокосмічного університету
ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна
e-mail: parfumer.ua@gmail.com,
ORCID: 0009-0005-7852-9873

УМОВИ КОНТАКТНОГО ТИПУ ПРИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВРІЗАНИМИ ОПОРАМИ У ВИГЛЯДІ ПОРОЖНИНИ ТА ТРУБИ

Анотація: Проведено дослідження поведінки багатошарової конструкції, що складається з основного шару з циліндричною порожниною та товстостінною циліндричною трубою. На зовнішні поверхні шару прикладено стале навантаження, а на внутрішніх поверхнях порожнини та труби задано умови гладкого контакту (нормальні переміщення та дотичні напруження). За допомогою математичного апарату узагальненого методу Фур'є, застосованого до рівнянь Ламе, в різних системах координат було створено систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. Застосувавши метод редукції було знайдено всі невідомі рівнянь Ламе, після чого отримано розподіл напружень та деформацій в різних точках шару та труби. Проведено аналіз напруженого стану в зонах концентрації напружень (навколо порожнини та обох поверхонь труби) при різних матеріалах включення.
Ключові слова: шар з порожнинами, узагальнений метод Фур'є, рівняння Ламе.

CONTACT-TYPE CONDITIONS FOR SOLVING THE PROBLEM OF ELASTICITY FOR A LAYER WITH CYLINDRICAL EMBEDDED SUPPORTS IN THE FORM OF A CAVITY AND A PIPE

Abstract: The behavior of a multilayer structure consisting of a base layer with a cylindrical cavity and a thick-walled cylindrical pipe is investigated. A steady load is applied to the outer surfaces of the layer, and smooth contact conditions (normal displacements and tangential stresses) are set on the inner surfaces of the cavity and pipe. Using the mathematical apparatus of the generalized Fourier method applied to the Lamé equations, a system of linear algebraic equations of the second kind was created in different coordinate systems. By applying the reduction method, all unknowns of the Lamé equations were found, after which the distribution of stresses and strains at different points of the layer and pipe was obtained. The stress state in the zones of stress concentration (around the cavity and both pipe surfaces) was analyzed for different inclusion materials.
Keywords: layer with cavities, generalized Fourier method, Lamé equation.

Циліндричні опори, що врізаються, виконують важливу роль у забезпеченні точності, надійності та довговічності різних механізмів в аерокосмічній та машинобудівній галузях. Вони дозволяють точно центрувати рухомі елементи, витримувати значні навантаження та захищають системи від витоків та деформацій. Наприклад, в авіації врізні опори використовуються для фіксації двигунів у моторних відсіках, забезпечуючи надійність кріплення в умовах сильних вібрацій, високих температур та значних навантажень. Умови контактного типу застосовуються в моделях, де предметом дослідження є втулка або підшипник.

Адекватне моделювання складних вузлів з різнорідними граничними умовами є непростим завданням. Через це для визначення напружено-деформованого стану таких систем переважно застосовуються чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів [1] та комп'ютерні програми на його основі [2]. Хоча цей метод є потужним інструментом, він має ряд обмежень. Серед них: неможливість точного моделювання нескінченних областей, необхідність аппроксимації геометрії та матеріальних властивостей, чутливість результатів до якості вхідних даних та складність інтерпретації отриманих розподілів напружень. Це суттєво ускладнює отримання достовірних результатів і вимагає додаткової верифікації чисельних розв'язків.

Класичні аналітичні методи, такі як ті, що описані в роботах [3] і [4], є цінним інструментом для точного визначення напружень та деформацій у конструкціях. Вони не лише забезпечують кількісні результати, але й дозволяють глибоко зрозуміти фізичні процеси, які відбуваються всередині матеріалу. Більше того, ці методи служать основою для розробки більш складних чисельних моделей. Однак, коли мова заходить про складні геометричні форми конструкцій, що мають більше трьох граничних поверхонь, застосування класичних аналітичних методів часто вимагає значних спрощень реальної моделі.

Іншим інструментом є аналітико-числові методи, що дозволяють з високою точністю отримати результат напружено-деформованого стану складних конструкцій. Серед таких найбільш потужним є узагальнений метод Фур'є [5].

Скориставшись узагальненим методом Фур'є, автори досліджень [6] та [7] знайшли точні розв'язки задач про напружений стан пружного циліндра, всередині якого розташовані порожнини або включення циліндричної форми. Отримані розв'язки подано у вигляді суми окремих розв'язків рівняння Ламе, кожен з яких відповідає певній системі координат, початок якої збігається з центром відповідної граничної поверхні циліндра або включення.

Інші роботи врахували перехід між циліндричною та декартовою системами координат, що відкрило нові можливості для розв'язання складніших задач. Наприклад, у роботі [8] такі формули були застосовані для вивчення півпростору з порожниною циліндричної форми, у роботі [9] – для шару з порожниною, на поверхні якого діють певні напруження, а в роботі [10] – для шару з циліндричним включенням іншого матеріалу.

Роботи [11-13] зосереджені на ускладненні моделей шляхом збільшення кількості об'єктів, що взаємодіють. Зокрема, в роботі [11] розглядається система з шару та півпростору, де для кожного з них використовується своя система координат: декартова для шару та півпростору, а циліндрична для порожнини. У роботі [12] досліджується шар, який закріплено на двох опорах (порожнинах), а в роботі [13] розглядається шар із двома циліндричними включеннями, де на різних поверхнях задаються різні граничні умови.

В цій роботі пропонується врахування різних неоднорідностей (порожнини та труби), а також умов контактного типу на поверхні циліндричної порожнини і внутрішньої поверхні труби. Розв'язок задачі оснований на формулах переходу базисних розв'язків між різними системами, що дозволяє врахувати кожну окрему поверхню, як доданок до системи рівнянь.

Постановка та розв'язок задачі.

В пружному однорідному шарі, паралельно один одному та межам шару, розташовані порожнина радіусом R_1 та труба зовнішнім радіусом R_2 , внутрішнім радіусом $\tilde{R}_2$. Верхня межа шару розташована на відстані $y = h$, нижня на відстані $y =-\tilde{h}$ від центру порожнини. Порожнину та трубу будемо розглядати у локальних циліндричних системах координат ρ_p, φ_p, z, межі шару у декартовій системі координат (x, y, z). Розв'язок рівняння Ламе будемо шукати виходячи з умов, що на верхній межі шару задано напруження $F\vec{U}(x,z)_{|y=h} = \vec{F}_h^0(x,z)$, на нижній межі шару напруження $F\vec{U}(x,z)_{|y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z)$, на поверхні порожнини та на внутрішній поверхні труби задані умови контактного типу

$$\left.\begin{aligned} &U_\rho(\phi_1,z)_{|y=h} = U_0^{(1)}(\phi_1,z),\\ &\tau_{\rho\phi|\rho=R_1} = \tau_1^{(1)}(\phi_1,z),\\ &\tau_{\rho z|\rho=R_1} = \tau_2^{(1)}(\phi_1,z)\end{aligned}\right\} \text{ та } \left.\begin{aligned} &U_\rho(\phi_2,z)_{|y=h} = U_0^{(2)}(\phi_2,z),\\ &\tau_{\rho\phi|\rho=\tilde{R}_2} = \tau_1^{(2)}(\phi_2,z),\\ &\tau_{\rho z|\rho=\tilde{R}_2} = \tau_2^{(2)}(\phi_2,z)\end{aligned}\right\}, \text{ відповідно.} \tag{1}$$

Задані функції

$$\vec{F}_h^0(x,z) = \tau_{yx}^{(h)}\vec{e}_x + \sigma_y^{(h)}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)}\vec{e}_z,$$

$$\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})}\vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})}\vec{e}_z, \tag{2}$$

вважаємо швидко спадними до нуля.

Шар жорстко поєднаний з трубою, де виконуються умови спряження

$$\vec{U}_0(\phi,z)_{|\rho=R_2} = \vec{U}_2(\phi,z)_{|\rho=R_2}, \tag{3}$$

$$F\vec{U}_0(\phi,z)_{|\rho=R_2} = F\vec{U}_2(\phi,z)_{|\rho=R_2}, \tag{4}$$

де $\vec{U}_0(\phi,z)$ – розв'язок для шару; $\vec{U}_p(\phi,z)$ – розв'язок для труб.

Розв'язання задачі шукаємо у вигляді:

$$\vec{U}_0 = \sum_{p=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\phi_p,z;\lambda)d\lambda +$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu) + \tilde{H}_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\right)d\mu d\lambda \tag{5}$$

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda) d\lambda, \quad (6)$$

де $H_k(\lambda,\mu)$, $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$ – невідомі функції, які необхідно знайти з крайових умов (1), (2) і умов спряження (3), (4); $\vec{S}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ базисні розв'язки рівняння Ламе [5].

При розв'язанні задачі використані особливі формули переходу в базисних розв'язках між локальними системами координат [5].

Для виконання граничних умов на межах шару, вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (5), за допомогою формул переходу [5], перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(-)}$ при $y = h$, та $\vec{u}_k^{(+)}$ при $y = -\tilde{h}$. Отримані вектори прирівняємо при $y = h$ заданому $\vec{F}_h^0(x,z)$, при $y = -\tilde{h}$ заданому $\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z)$, представленими через подвійний інтеграл Фур'є.

З цих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda,\mu)$ і $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Для виконання граничних умов на поверхні порожнини, праву частину (5), за допомогою формул переходу [5], перепишемо у циліндричній системі координат через базисні розв'язки зовні циліндра $\vec{S}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$ і всередині циліндра $\vec{R}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$, після чого прирівняємо, при $\rho = R$, заданому (1), представленому через ряд та інтеграл Фур'є.

Для виконання граничних умов на внутрішній поверхні труби, у ліву частину (6) підставимо відому функцію (1), представлену через ряд та інтеграл Фур'є.

Ще 6 рівнянь (по 3 на кожну проєкцію) можна записати для функцій (3), (4), прирівнявши праві частини рівнянь (5) та (6) в переміщеннях та в напруженнях.

Ці системи можна розв'язувати методом редукції і має місто збіжність наближених рішень до точного.

З отриманої системи рівнянь виключимо знайдені раніше функції $H_k(\lambda,\mu)$ і $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Звільнившись від рядів по m та інтегралів по λ отримаємо шість нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Знайдені функції $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ підставимо у вирази для $H_k(\lambda,\mu)$ і $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Чисельні дослідження

Проведений аналіз напруженого стану для шару з алюмінієвого сплаву Д16Т та труби з двома варіантами матеріалу (сталь ШХ15 та поліамід). Геометричні параметри: $h = \tilde{h} =$

15мм; радіус порожнини R_1 = 10мм, зовнішній та внутрішній радіус труби відповідно R_2 = 10 мм, $\tilde{R}_2$ = 6 мм.

На верхній межі шару між неоднорідностями задані нормальні напруження у вигляді одиничної хвилі $\sigma_y^{(h)}(x,z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot \left(\left(x - \frac{\ell_{12}}{2}\right)^2 + 10^2\right)^{-2}$ і нульові дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$. На нижній межі шару задані нульові напруження $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x,z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$. На поверхні порожнини і на внутрішній поверхні труби задані нульові нормальні переміщення та нульові дотичні напруження $U_\rho^{(p)} = \tau_1^{(p)} = \tau_2^{(p)} = 0$.

Для числового розв'язку задачі нескінчені системи лінійних алгебраїчних рівнянь були усічені по параметру m.

Висновки

Розв'язана просторова задача теорії пружності для шару з циліндричною порожниною та трубою при заданих на верхній і нижній межах шару напруженнях, на поверхні порожнини і внутрішній поверхні труби – умови контактного типу.

Створено алгоритм за яким одержано напружено – деформований стан в тілі шару та труби. Проведений аналіз напруженого стану та виявлені максимальні напруження.

Числові дослідження алгебраїчної системи дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції.

Подальший розвиток цього напряму необхідний для інших граничних умов.

Список використаних джерел:

1. Tekkaya, A. E., & Soyarslan, C. (2014). Finite Element Method in CIRP Encyclopedia of Production Engineering (c. 508–514). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699
2. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. Available online: https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation (accessed on 16.10.2024).
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А (1978). Дифракция упругих волн. Київ: Наук. Думка. 307 с.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. (1981). Гармонические колебания и волны в упругих телах. Київ: Наук. Думка. 284 с.
5. Николаев А. Г., Проценко В. С. (2011). Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм iнниверситет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 344 с.
6. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2015). The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. Numerical Analysis and Applications, 8(2), 148–158. https://doi.org/10.1134/s1995423915020068
7. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2016a). Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. Mechanics of Composite Materials, 52(2), 177–188. https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6

8. Ukrayinets, N., Murahovska, O., & Prokhorova, O. (2021). Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2(7 (110)), 48–57. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428

9. Miroshnikov, V., Denysova, T., & Protsenko, V. (2019). The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. Strength of Materials and Theory of Structures, (103), 208–218. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218

10. Miroshnikov, V. Y., Medvedeva, A. V., & Oleshkevich, S. V. (2019). Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. Materials Science Forum, 968, 413–420. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.968.413

11. Miroshnikov, V. Y. (2019). Investigation of the Stress State of a Composite in the Form of a Layer and a Half Space with a Longitudinal Cylindrical Cavity at Stresses Given on Boundary Surfaces. Journal of Mechanical Engineering, 22(4), 24–31. https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.024

12. Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Demenko, V. F. (2023). Analysis of the Stress State for a Layer with Two Incut Cylindrical Supports. Journal of Mechanical Engineering, 26(1), 15–22. https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015

13. Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Pohrebniak, O. A. (2022). Analysis of the Stress State of a Layer with Two Cylindrical Elastic Inclusions and Mixed Boundary Conditions. Journal of Mechanical Engineering, 25(1), 22–29. https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022