Михайло КОСЕНКО
аспірант кафедри міцності літальних апаратів літакобудівельного факультету
Національного аерокосмічного університету
ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна
e-mail: Scs2012kh@gmail.com,
ORCID: 0009-0002-2005-2222

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВРІЗАНИМИ ОПОРАМИ У ВИГЛЯДІ ПОРОЖНИНИ ТА ТРУБИ. ЖОРСТКЕ ЗАКРІПЛЕННЯ

Анотація: Розв'язана просторова задача теорії пружності для шару з поздовжньою круговою циліндричною порожниною та повздовжньою циліндричною трубою. Порожнина та труба розташовані паралельно одна одній та межам шару. На верхній та нижній межах шару задані напруження, на поверхні циліндричної порожнини та на внутрішній поверхні труби задані переміщення. Між шаром та трубою враховані умови спряження. Розв'язання виконано за допомогою аналітико-чисельного узагальненого методу Фур'є, застосованого до рівнянь Ламе в декартовій та локальних циліндричних системах координат. Задача зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких застосовується метод редукції. Проведено аналіз напружено-деформованого стану навколо концентраторів напружень при різних матеріалах труби від дії постійного навантаження на верхній межі шару.
Ключові слова: шар з порожнинами, узагальнений метод Фур'є, рівняння Ламе.

SOLUTION OF THE ELASTICITY THEORY PROBLEM FOR A LAYER WITH CYLINDRICAL EMBEDDED SUPPORTS IN THE FORM OF A CAVITY AND A PIPE. RIGID FIXATION

Abstract: The spatial problem of elasticity theory for a layer with a longitudinal circular cylindrical cavity and a longitudinal cylindrical pipe is solved. The cavity and the pipe are parallel to each other and to the boundaries of the layer. Stresses are specified at the upper and lower boundaries of the layer, and displacements are specified on the surface of the cylindrical cavity and on the inner surface of the pipe. The conjugation conditions between the layer and the pipe are taken into account. The problem is solved using the analytical-numerical generalized Fourier method applied to the Lamé equations in the Cartesian and local cylindrical coordinate systems. The problem is reduced to a system of linear algebraic equations to which the reduction method is applied. The stress-strain state around the stress concentrators for different pipe materials under the action of a constant load at the upper boundary of the layer is analyzed.
Keywords: layer with cavities, generalized Fourier method, Lamé equation.

Врізані циліндричні опори це поширене явище в аерокосмічній галузі та машинобудуванні. До цієї категорії можна віднести опори валів і роторів, гідравлічні циліндри де врізані циліндричні опори забезпечують точне центрування поршнів і які захищають систему від витоків або деформацій під тиском. У двигунових відсіках врізані опори можуть використовуватися для кріплення двигунів, щоб витримувати вібрації, високі температури та навантаження, які виникають під час роботи силових установок.

Складність моделі шару з врізаними циліндричними опорами не дозволяє використовувати точні аналітичні методи розрахунку [1, 2]. Тому на даний час, при проєктуванні зазначених моделей, використовують числові методи [3], які мають свої недоліки, у тому числі необхідність нормування з аналітичними методами.

Тому найбільш потужним інструментом розв'язання задачі для моделі, що розглядається є узагальнений метод Фур'є [4].

За допомогою узагальненого методу Фур'є, отримані розв'язки для пружного циліндра з циліндричними порожнинами [5] та циліндричними включеннями [6]. Розв'язання представлене як суперпозиція точних базисних розв'язків рівняння Ламе для циліндра в системах координат, віднесених до центрів граничних поверхонь тіла.

Подальшим розвитком методу є застосування формул переходу базисних розв'язків між циліндричною та декартовою системами координат. Прикладом можуть бути наступні роботи: в роботі [7] такі формули запропоновані для півпростору з циліндричною порожниною, в роботі [8] для шару з порожниною на поверхні якої задані напруження, робота [9] показує розв'язок для шару з циліндричним включенням.

Збільшенню числа тіл, що враховуються в розрахунковій моделі, присвячені роботи [10 – 12]. Причому, в роботі [10] розглядається ситуація, коли для двох тіл (шар та півпростір) використовуються декартові системи координат, для неоднорідності – циліндрична. Задачі в яких шар закріплено на двох опорах [11] або має змішані крайові умови для шару з двома циліндричними включеннями [12].

В цій роботі запропоновано аналітико-числовий підхід, заснований на узагальненому методі Фур'є, який дозволяє з високою точністю отримати напружено-деформований стан в будь-якій точці комбінованого тіла.

Основною відмінністю від попередніх робіт є комбінація різних неоднорідностій (порожнини і труби).

Постановка та розв'язок задачі.

Пружний однорідний шар має поздовжню кругову циліндричну порожнину радіусом R_1 а також товстостінну трубу зовнішнім радіусом R_2 та внутрішнім радіусом $\tilde{R}_2$. Порожнина та труба розташовані паралельно одна одній та межам шару. Верхня межа шару розташована на відстані $y = h$, нижня на відстані $y = -\tilde{h}$ від центру порожнини. Порожнину та трубу будемо розглядати у локальних циліндричних системах координат ρ_p, φ_p, z, межі шару у декартовій системі координат (x, y, z). Розв'язок рівняння Ламе будемо шукати виходячи з умов, що на верхній межі шару задано напруження $F\vec{U}(x,z)_{|y=h} = \vec{F}_h^0(x,z)$, на нижній межі шару напруження $F\vec{U}(x,z)_{|y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^{0}(x,z)$, на поверхні порожнини та на внутрішній поверхні труби задані переміщення $\vec{U}(\phi_p,z)\big|_{\rho_p=R_p} = \vec{U}_0^{(p)}(\phi_p,z)$,

де p = 1 – порожнина, p = 2 – труба,

$$\vec{F}_{h}^{0}(x,z) = \tau_{yx}^{(h)}\vec{e}_x + \sigma_{y}^{(h)}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)}\vec{e}_z,$$
$$\vec{F}_{\tilde{h}}^{0}(x,z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})}\vec{e}_x + \sigma_{y}^{(\tilde{h})}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})}\vec{e}_z, \qquad (1)$$
$$\vec{U}_0^{(p)}(\phi_p,z) = U_\rho^{(p)}\vec{e}_\rho + U_\phi^{(p)}\vec{e}_\phi + U_z^{(p)}\vec{e}_z$$

відомі функції.

Шар жорстко поєднаний з трубою, де виконуються умови спряження

$$\vec{U}_0(\phi,z)_{|\rho=R_2} = \vec{U}_2(\phi,z)_{|\rho=R_2}, \qquad (2)$$
$$F\vec{U}_0(\phi,z)_{|\rho=R_2} = F\vec{U}_2(\phi,z)_{|\rho=R_2}, \qquad (3)$$

де $\vec{U}_0(\phi,z)$ – розв’язок для шару; $\vec{U}_p(\phi,z)$ – розв’язок для труб.

Розв’язання задачі шукаємо у вигляді:

$$\vec{U}_0 = \sum_{p=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\phi_p,z;\lambda)d\lambda +$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu) + \tilde{H}_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\right)d\mu d\lambda \qquad (4)$$

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda)\cdot\vec{R}_{k,m}(\rho_1,\phi_1,z;\lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}(\rho_1,\phi_1,z;\lambda)d\lambda, \qquad (5)$$

де $H_k(\lambda,\mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$ – невідомі функції, які необхідно знайти з крайових умов (1) і умов спряження (2), (3); $\vec{S}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ базисні розв’язки рівняння Ламе [4].

При розв’язанні задачі використані особливі формули переходу в базисних розв’язках між локальними системами координат [4].

Для виконання граничних умов на межах шару, вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (4), за допомогою формул переходу [4], перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв’язки $\vec{u}_k^{(-)}$ при $y = h$, та $\vec{u}_k^{(+)}$ при $y = -\tilde{h}$. Отримані вектори прирівняємо при $y = h$ заданому $\vec{F}_h^{0}(x,z)$, при $y = -\tilde{h}$ заданому $\vec{F}_{\tilde{h}}^{0}(x,z)$, представленими через подвійний інтеграл Фур’є.

З цих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Для виконання граничних умов на поверхні порожнини, праву частину (4), за допомогою формул переходу [4], перепишемо у циліндричній системі координат через базисні розв'язки зовні циліндра $\vec{S}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$ і всередині циліндра $\vec{R}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$, після чого прирівняємо, при $\rho = R$, заданому (1), представленому через ряд та інтеграл Фур'є.

Для виконання граничних умов на внутрішній поверхні труби, у ліву частину (5) підставимо відому функцію (1), представлену через ряд та інтеграл Фур'є.

Ще 6 рівнянь (по 3 на кожну проєкцію) можна записати для функцій (2), (3), прирівнявши праві частини рівнянь (4) та (5) в переміщеннях та в напруженнях.

Ці системи можна розв'язувати методом редукції і має місто збіжність наближених рішень до точного.

З отриманої системи рівнянь виключимо знайдені раніше функції $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Звільнившись від рядів по m та інтегралів по λ отримаємо шість нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Знайдені функції $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ підставимо у вирази для $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Чисельні результати. Проведений аналіз напруженого стану для шару з алюмінієвого сплаву Д16Т та труби з двома варіантами матеріалу (сталь ШХ15 та поліамід). Геометричні параметри: $h = \tilde{h} = 15$мм; радіус порожнини $R_1 = 10$мм, зовнішній та внутрішній радіус труби відповідно $R_2 = 10$ мм, $\tilde{R}_2 = 6$ мм.

На верхній межі шару між циліндричними неоднорідностями задані нормальні напруження у вигляді одиничної хвилі $\sigma_y^{(h)}(x,z) = -10^8 \cdot (z^2+10^2)^{-2} \cdot \left(\left(x-\frac{\ell_{12}}{2}\right)^2+10^2\right)^{-2}$ і нульові дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$. На нижній межі шару задані нульові напруження $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x,z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$. На поверхні порожнини і на внутрішній поверхні труби задані нульові переміщення $U_\rho^{(p)} = U_\phi^{(p)} = U_z^{(p)} = 0$.

Для числового розв'язку задачі нескінчені системи лінійних алгебраїчних рівнянь були усічені по параметру m.

Висновки. Розв’язана просторова задача теорії пружності для шару з циліндричною порожниною та трубою при заданих на верхній і нижній межах шару напруженнях, на поверхні порожнини і внутрішній поверхні труби – переміщень.

Створено алгоритм за яким одержано напружено – деформований стан в тілі шару та труби. Проведений аналіз напруженого стану та виявлені максимальні напруження.

Числові дослідження алгебраїчної системи дають можливість стверджувати, що її розв’язок може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції.

Подальший розвиток цього напряму необхідний для інших граничних умов.

Список використаних джерел:

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А (1978). Дифракция упругих волн. Київ: Наук. Думка. 307 с.

2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. (1981). Гармонические колебания и волны в упругих телах. Київ: Наук. Думка. 284 с.

3. Tekkaya, A. E., & Soyarslan, C. (2014). Finite Element Method in CIRP Encyclopedia of Production Engineering (с. 508–514). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699

4. Николаев А. Г., Проценко В. С. (2011). Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм іниверситет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 344 с.

5. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2015). The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. Numerical Analysis and Applications, 8(2), 148–158. https://doi.org/10.1134/s1995423915020068

6. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2016a). Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. Mechanics of Composite Materials, 52(2), 177–188. https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6

7. Ukrayinets, N., Murahovska, O., & Prokhorova, O. (2021). Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2(7 (110)), 48–57. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428

8. Miroshnikov, V., Denysova, T., & Protsenko, V. (2019). The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. Strength of Materials and Theory of Structures, (103), 208–218. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218

9. Miroshnikov, V. Y., Medvedeva, A. V., & Oleshkevich, S. V. (2019). Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. Materials Science Forum, 968, 413–420. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.968.413

10. Miroshnikov, V. Y. (2019). Investigation of the Stress State of a Composite in the Form of a Layer and a Half Space with a Longitudinal Cylindrical Cavity at Stresses Given on Boundary Surfaces. Journal of Mechanical Engineering, 22(4), 24–31. https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.024

11. Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Demenko, V. F. (2023). Analysis of the Stress State for a Layer with Two Incut Cylindrical Supports. Journal of Mechanical Engineering, 26(1), 15–22. https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015

12. Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Pohrebniak, O. A. (2022). Analysis of the Stress State of a Layer with Two Cylindrical Elastic Inclusions and Mixed Boundary Conditions. Journal of Mechanical Engineering, 25(1), 22–29. https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022