Л. О. Філіпковська, В. Л. Петрик, Т. А. Клименко

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
В УПРАВЛІННІ ТА ЕКОНОМІЦІ

2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Л. О. Філіпковська, В. Л. Петрик, Т. А. Клименко

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В УПРАВЛІННІ ТА ЕКОНОМІЦІ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Л. О. Філіпковська, В. Л. Петрик, Т. А. Клименко

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В УПРАВЛІННІ ТА ЕКОНОМІЦІ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2013

УДК [330.45:519.865:004.67+658.012.123](075.8)
Ф53

Рецензенти: д-р екон. наук, доц. Т. В. Шталь,
канд. екон. наук, проф. О. М. Гаврись

Філіпковська, Л.О.

Ф53 Економіко-математичні моделі в управлінні та економіці [Текст] : навч. посіб. / Л. О. Філіпковська, В. Л. Петрик, Т. А. Клименко. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2013. – 141 с.

Розкрито науково-методичні принципи й особливості побудови економіко-математичних моделей в управлінні та економіці суб'єктів підприємницької діяльності. Викладено теоретичні основи економіко-математичного моделювання, наведено механізми та приклади побудови моделей споживання, міжгалузевого балансу, сіткового планування й управління, корпоративних рішень в управлінні та економіці, управління запасами та ін. Запропоновано контрольні запитання для самоперевірки.

Для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання при вивченні дисципліни «Економіко-математичні моделі в управлінні та економіці».

Іл. 56. Табл. 9. Бібліогр.: 16 назв

УДК [330.45:519.865:004.67+658.012.123](075.8)

1. ВСТУП ДО ДИСЦИПЛІНИ «ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В УПРАВЛІННІ ТА ЕКОНОМІЦІ»

1.1. Характеристика економічної системи як об'єкта моделювання

Економіка – це суспільно-природна система, яка здійснює виробництво, розподіл, обмін і споживання необхідних суспільству матеріальних благ.

У математичному значенні *економічну систему (Е)* можна подати як перетин двох систем більш високого рівня: системи «суспільство» (С) і системи «ресурси» (Р) (рис. 1.1).

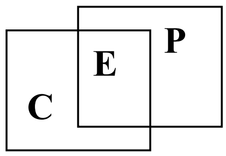


Рис. 1.1

При розгляді *економіки як суспільної підсистеми* значними є соціально-економічні аспекти її аналізу, *як підсистеми ресурсів* – виробничо-технологічні. *Люди* відіграють подвійну роль – вони є споживачами, які задають виробництву його кінцеву мету, і одночасно трудовими ресурсами – найважливішим функціональним елементом самого виробництва.

Особливості економіки як об'єкта моделювання подано на рис. 1.2.

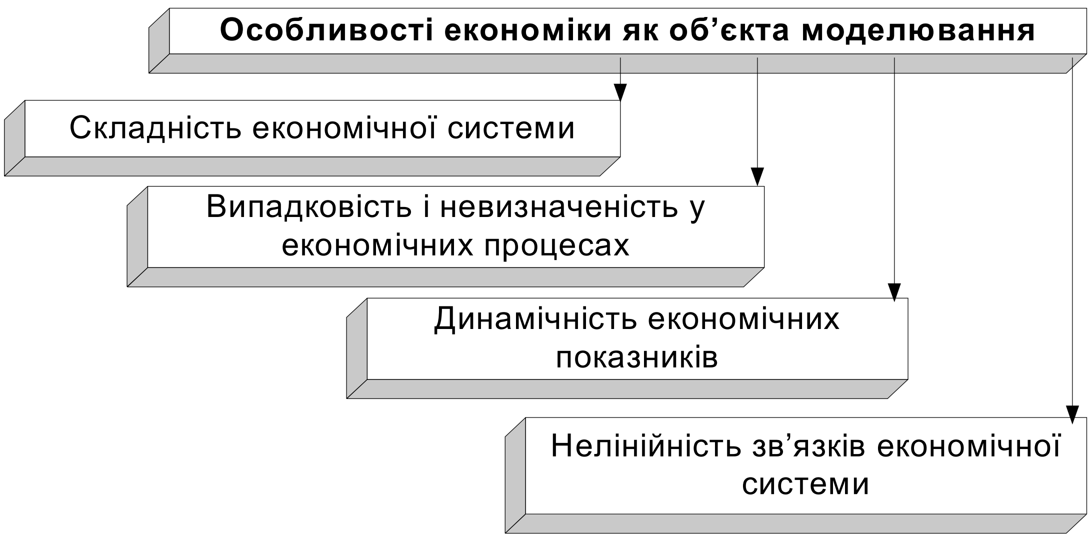


Рис. 1.2

Перша особливість – це складність економічних процесів і явищ. Більшість об'єктів економіки з огляду на кібернетику – складні системи.

Система – сукупність елементів, які взаємодіють та утворюють деяку цілісність, єдність. Важливою властивістю будь-якої системи є емерджентність – наявність таких властивостей, які не належать жодному елементу системи. *Економічні системи* мають усі ознаки дуже складних систем. Вони об'єднують велику кількість елементів, які характеризуються численними внутрішніми зв'язками й зв'язками з іншими системами (соціальними, технологічними, природними).

Другою особливістю економічних систем є *випадковість і невизначеність в економічних процесах*. Непередбачені випадковості можуть бути спричинені природними явищами, міжнародним станом, науково-технічними відкриттями, різноманітними суб'єктивними чинниками.

Розрізняють два типи невизначеності:

- *істинна* – обумовлена властивостями економічного процесу;
- *інформаційна* – пов'язана з неповнотою й неточністю інформації про цей процес.

Третя особливість економічних систем – це *динамічність економічних показників*. При функціонуванні система може переходити з одного стану в інший у будь-який момент часу.

Четверта особливість економіки – *нелінійність зв'язків економічної системи*. Приклади нелінійних зв'язків при розв’язанні економічних задач:

а) залежність ефективності використання ресурсів від збільшення обсягу виробництва;

б) змінення попиту й потреб населення зі зростанням його доходів і т.п.

1.2. Історія розвитку математичного моделювання в економіці

Використання математики для знаходження точних та оптимальних розв'язків реальних задач можна знайти в працях давніх єгипетських, грецьких і римських вчених.

Виділяють три основні напрями розвитку математико-економічних досліджень [2].

1. *Математична школа в політекономії.* Родоначальником математичної школи в політекономії є французький учений А. О. Курно (1801 – 1877), який 1838 року в Парижі опублікував книгу «Дослідження математичних принципів теорії багатства». Видатними представниками математичної школи були Г. Гюссен (1810 – 1858), Л. Вальрас (1834 – 1910), У. Джевонс (1835 – 1882), Ф. Еджворт (1845 – 1926), В. Парето (1848 – 1923), В. Дмитрієв (1868 – 1913).

Представники математичної школи досліджували важливі проблеми економічної теорії, проте їх роботи часто не мали практичного застосування.

2. *Статистичний напрям.* Статистичні методи, що виникли в ХХ столітті, полягають у вивченні економічних циклів і прогнозуванні показників господарської діяльності на основі статистичних даних. Цей

науковий напрям ще називають статистичною економікою.

У межах напряму було створено велику кількість математико-статистичних моделей економічних явищ. Наприклад, «Гарвардський барометр» для прогнозування «економічної погоди» був сукупністю трьох кривих: фонду ринку, товарного ринку, грошового ринку.

Термін «економетрика» увів норвезький учений Р. Фріш (1895 – 1973), який проголосив, що економетрика є синтезом економічної теорії, математики й статистики. 1931 року створено Міжнародне економетричне товариство розвитку економічної теорії і її зв'язку зі статистикою й математикою. З 1933 р. товариство видає журнал «Економетрика».

3. *Напрям теоретичних математичних моделей.* Іншим полюсом економетрики є математична економія, яка займається математичними дослідженнями теоретичних моделей економіки.

Видатним представником математичної економії є Джон фон Нейман (1903 – 1957). Йому належить багато фундаментальних результатів у математичних теоріях економічного зростання, економічної рівноваги, у теорії ігор і т.ін.

Математичне моделювання стало найпрестижнішим напрямом в економічній науці. Не випадково з моменту заснування (1969 р.) Нобелівські премії з економіки присуджуються зазвичай за економіко-математичні дослідження. Нобелівські лауреати – Р. Фріш, Я. Тінберген, П. Семюельсон, Д. Хікс, К.Ерроу, В. Леонтьєв, Т. Кумпанс – економетрики.

Відносно самостійним напрямом науки кінця XIX – початку XX сторіччя було дослідження використання математичної статистики. Провідну роль у той час відігравав О. О. Чупров (1874 – 1926), якому належать роботи з кореляційного аналізу економічних явищ. Найкрупнішим економістом-математиком був В. К. Дмитрієв. Основна його праця «Економічні нариси», опублікована 1904 року, набула широкого використання в моделюванні міжгалузевих зв'язків.

В історії економіко-математичних досліджень особливе місце належить Є. Є. Слуцькому (1880 – 1948). Його стаття «До теорії збалансованого бюджету споживача» має світову популярність. Ідеї Є. Є. Слуцького розвиваються й зараз.

Баланс народного господарства в нашій країні було складено в 20-ті роки, що набагато випередило зарубіжні статистичні дослідження. Родоначальником цього напряму досліджень став В. Леонтьєв.

Спроби використовувати математичні методи з метою вивчення структури й утворення народногосподарських витрат зробив Л. Лубни-Герцик. Г. О. Фельдман (1884 – 1958) розробив моделі економічного зростання, а С. С. Бюшгенс і О. О. Конюс – моделі споживання, індексів цін і купівельної спроможності грошей.

1939 року ленінградський математик Л. В. Канторович отримав завдання від фанерного тресту: розв’язати задачу про навантаження верстатів устаткуванням так, щоб або збільшити випуск продукції при тих самих витратах сировини, або на таку саму кількість виготовлених виробів зменшити витрати сировини. Для розв'язання цієї задачі Л. В. Канторович розробив метод послідовного поліпшення плану або метод розв'язувальних множників, тобто симплекс-метод. А наприкінці 40-х XX ст. в США Дж. Данциг відкрив лінійне програмування.

Приклади використання лінійного програмування: задача розподілення робіт між видами устаткування; використання комплексної сировини; задача розкроювання матеріалів; складання планів перевезень; оптимальне планування.

Такі вчені-економісти, як В. В. Новожилов (1892 – 1970), В. М. Товстий, В. С. Немчинов (1894 – 1964), брали участь у пропаганді економіко-математичних досліджень.

Починаючи з 30-х років XX сторіччя почали розвиватися такі напрями економіко-математичного моделювання:

- моделі міжгалузевого балансу;
- моделі ринкової рівноваги;
- моделі багатосекторної економіки;
- теорія ігор;
- економетрика;
- лінійне й опукле програмування в економіці.

1.3. Класифікація математичних моделей реальних систем та етапи їх побудови

Моделювання при прийнятті рішень у будь-якій області застосування математики полягає в послідовному здійсненні *трьох етапів дослідження:* від початкової практичної проблеми до теоретичної чисто математичної задачі; внутрішньоматематичне вивчення й розв'язання цієї задачі; перехід від математичних висновків назад до практичної проблеми. Іншими словами, в області моделювання задач прийняття рішень виділяють четвірку проблем:

ЗАДАЧА – МОДЕЛЬ – МЕТОД – УМОВИ ЗАСТОСУВАННЯ.

Задача зазвичай породжується потребами прикладної області. При цьому відбувається одна з можливих математичних формалізацій реальної ситуації. Наприклад, під час вивчення переваг споживачів економісти-маркетологи мають відповісти на запитання, чи різняться думки двох груп споживачів. При математичній формалізації (у моделі) думки споживачів у кожній групі зазвичай моделюються як незалежні випадкові вибірки.

Потім математики вибирають метод. В економетричних моделях йдеться, наприклад, про метод оцінювання, метод перевірки гіпотези.

Умови застосування також досліджуються математиками. З погляду математика, заміна умови диференційованості деякої функції на умову її неперервності може бути значним науковим досягненням, тоді як учений, що вивчає прикладні науки, оцінити це досягнення не зможе.

Математична модель реальної системи – це система математичних рівнянь, нерівностей та інших співвідношень, які описують основні зв'язки й закономірності процесу функціонування цієї системи.

Модель системи можна зобразити у вигляді *математичного графа*, де вершини – це елементи системи, а орієнтовані дуги – зв'язки між ними.

Математичним графом $G = \{A,U\}$ називають набір множин A і U, таких, що $A = \{a_1, a_2..., a_n\}$ – множина вершин графа; $U = \{(a_1; a_2),(a_3; a_4), ..., (a_{n-1}; a_n)\}$ – множина зв'язків між вершинами.

Зв'язки між вершинами можуть бути орієнтованими й неорієнтованими. Неорієнтований зв'язок позначають лінією, яка не має початку й кінця на вершинах, і її називають ребром. Орієнтований зв'язок – це зв'язок, де відомими є вершини початку й кінця (позначається стрілкою). Для кожної вершини й кожної стрілки можна задавати набір чисел, які є характеристиками вершин або зв'язків.

Відомий приклад – сітковий граф робіт при розробленні проекту.

Приклад 1.1. Для опису моделі продажу деякого товару визначимо такі математичні змінні:

- c – кількість спожитого товару;
- s – кількість запропонованого товару;
- p – ціна одиниці товару;
- y – собівартість одиниці товару;
- J – чистий прибуток.

Зв'язки між змінними задамо у вигляді графа (рис. 1.3).

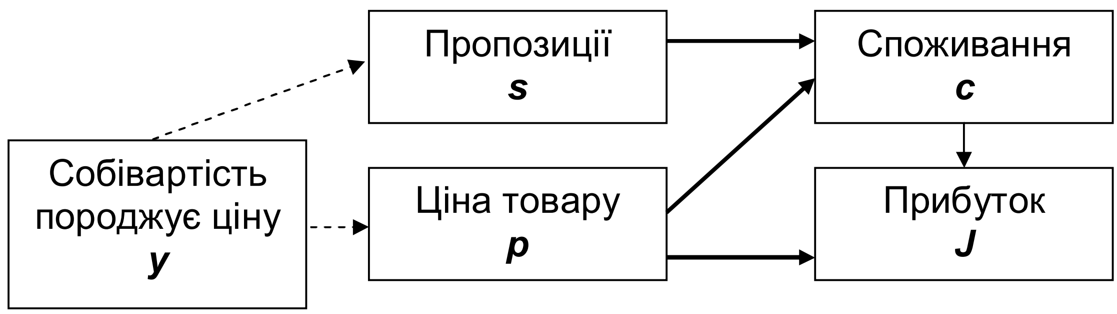


Рис. 1.3

Математична модель продажу товару має вигляд

$$J = pc - ys.$$

При допустимих значеннях змінних моделі

$$c \geq s;\ c \geq 0;\ s \geq 0;\ p \geq 0;\ y \geq 0;\ J \geq 0.$$

Класифікаційні ознаки й види математичних моделей в економіці й управлінні показано на рис. 1.4.

Моделювання – процес, який полягає в побудові математичної моделі та її дослідженні.

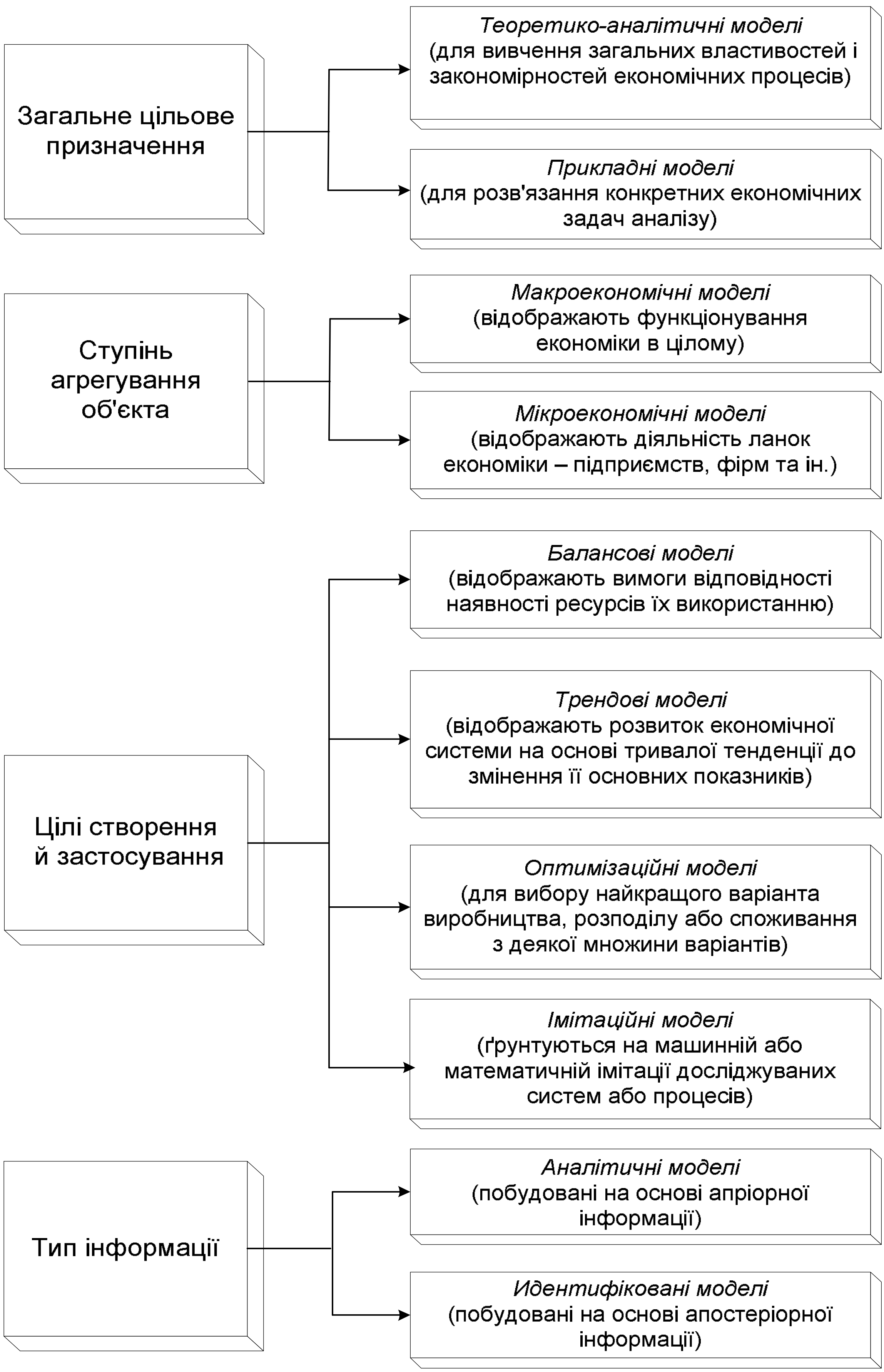

Загальне цільове призначення
Теоретико-аналітичні моделі (для вивчення загальних властивостей і закономірностей економічних процесів)
Прикладні моделі (для розв'язання конкретних економічних задач аналізу)
Ступінь агрегування об'єкта
Макроекономічні моделі (відображають функціонування економіки в цілому)
Мікроекономічні моделі (відображають діяльність ланок економіки – підприємств, фірм та ін.)
Цілі створення й застосування
Балансові моделі (відображають вимоги відповідності наявності ресурсів їх використанню)
Трендові моделі (відображають розвиток економічної системи на основі тривалої тенденції до змінення її основних показників)
Оптимізаційні моделі (для вибору найкращого варіанта виробництва, розподілу або споживання з деякої множини варіантів)
Імітаційні моделі (ґрунтуються на машинній або математичній імітації досліджуваних систем або процесів)
Тип інформації
Аналітичні моделі (побудовані на основі апріорної інформації)
Идентифіковані моделі (побудовані на основі апостеріорної інформації)

Рис. 1.4

Рис. 1.4. Закінчення

Узагалі математичне моделювання складається з шести етапів (рис. 1.5) [2].

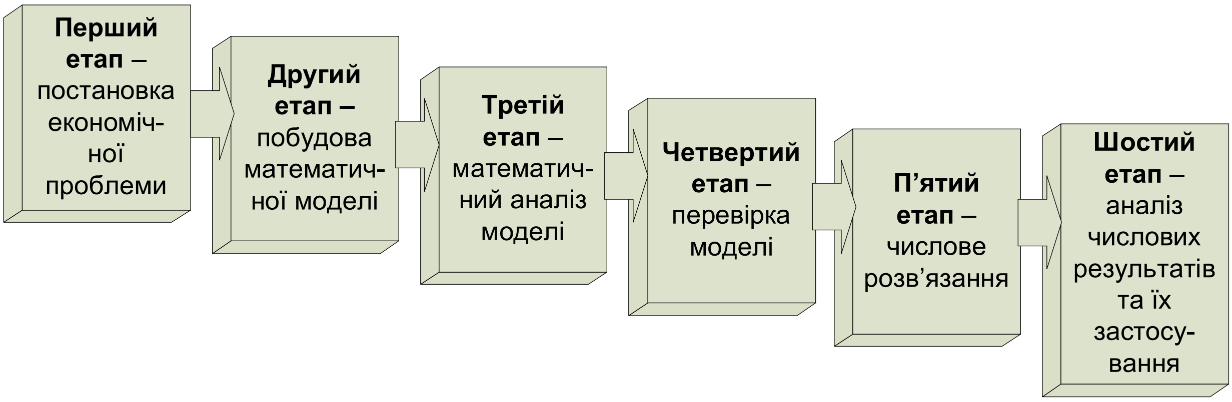


Рис. 1.5

Розглянемо кожний із етапів більш детально.

1. Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз:

- визначення основної задачі дослідження, коли потрібно чітко сформулювати суть проблеми, відповісти на запитання: «Що слід знайти?», «За яких умов?», «Якою є кінцева мета?»;
- структуризація управлінської ситуації, тобто виділення найважливіших рис і властивостей об'єкта, який моделюється;
- побудова логіко-економічної конструкції з урахуванням зв'язків між елементами системи.

На рис. 1.6 зображено *модель у вигляді «чорного ящика»,* оскільки не відомо, яка логіка буде реалізована в моделі. Основну увагу приділяють визначенню *входів* (те, що модель повинна обробляти) і *виходів* (те, що за моделлю одержують).

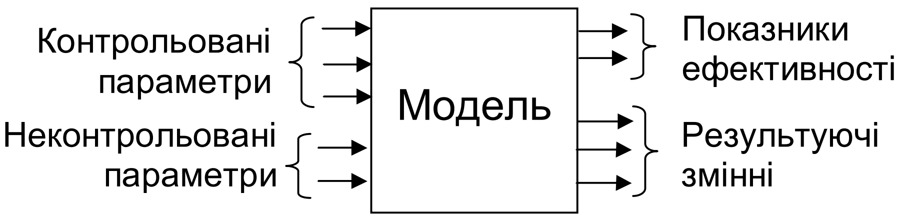


Рис. 1.6

2. Побудова математичної моделі:

- формалізований опис проблеми у вигляді конкретної математичної залежності (функції, рівняння, нерівності й ін.);
- визначення типу економіко-математичної моделі;
- вивчення можливості застосування моделі для розв’язання задачі;
- уточнення переліку змінних і параметрів, а також форми зв'язку між ними.

Щоб зрозуміти взаємовідношення між різними типами моделей у процесі моделювання, класифікацію символічних моделей зручно подати у вигляді ромба. Права й ліва грані ромба відображають побудову полярних моделей: *детермінованих* і *ймовірнісних*. При цьому жодна модель не може бути повністю детермінованою (коли жодній змінній не властива невизначеність) або повністю ймовірнісною (коли невизначеність властива всім змінним). Наприклад, погода може раптово призвести до відміни рейса, а хвороба члена екіпажу – зробити неможливою його участь у польоті, тим самим розклад екіпажів буде порушено. Аналогічно раптом виявиться, що умови на ринку цінних паперів можна передбачити з достатньою точністю або модель може містити рішення відкласти в останню хвилину продаж акцій, якщо умови стають несприятливими, тим самим дія невизначеності істотно знизиться.

Верхня й нижня частини ромба описують інші протилежності: *низхідне* й *висхідне моделювання.*

Низхідне моделювання полягає в такому:

- визначення змінних із загальних знань про значення даних;
- гіпотеза про види алгебри (математичних) зв'язків між змінними;
- припущення про значення десятків або сотень параметрів;
- отримана модель із самого початку недостатньо забезпечена даними.

При *висхідному моделюванні* виходять із такого:

- наявність точних, легко доступних даних, знання про їх подальше застосування;
- визначення змінних, що відображають зібрані дані;
- оцінювання параметрів моделі в процесі так званого *витягання інформації* з сотень або тисячі елементів даних;
- об'єднання цих змінних у модель після визначення зв'язку між ними шляхом аналізу даних.

Приклад *низхідного моделювання* – розрахунок загальної собівартості як 60 % від загального прибутку.

Приклад *висхідного моделювання* – розрахунок для інвестиційного проекту грошового потоку залежно від прогнозованої кількості продукції, що випускається.

Створення моделей – творчий процес. Саме тому побудова управлінських моделей є скоріше мистецтвом, ніж наукою.

Наприклад, модель має вектор змінних стану

$$X = (x_1, x_2, \dots ,x_n),$$

вектор чинників середовища й керувальних параметрів

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_r)$$

і вектор незмінних техніко-економічних коефіцієнтів

$$C = (c_1, c_2, \dots , c_m).$$

Тоді математичні співвідношення моделі можна подати у вигляді:

- рівнянь $F_i(X, \dot{X}, U, C) = 0,\ i = \overline{1,N}$;
- нерівностей $(X, \dot{X}, U, C) \le 0,\ j = \overline{1,M}$;
- критеріїв оптимальності $J_k(X, \dot{X}, U, C) \to \max,\ k = \overline{1,K}$,

де $\dot{X}$ – похідна вектора X за часом t для динамічних неперервних моделей, або різницева схема $X(t + h) – X(t)$ для динамічних різницевих моделей.

Усі ці співвідношення й створюють модель реального процесу. Модель повинна містити тільки основні чинники й умови, які характеризують об'єкт. Складність моделі має бути оптимальною, не слід дуже ускладнювати дослідження.

Модель, якщо можливо, також повинна бути стандартизованою для використання відомих методів її дослідження під час розв’язання реальних задач.

3. Математичний аналіз моделі:

- оцінювання єдиності розв’язку;
- визначення змінних задачі, які мають міститися в розв’язку;
- визначення співвідношень між змінними;
- оцінювання меж значень змінних та умов їх змінення тощо.

4. Перевірка моделі:

- підготовка інформаційних масивів, використання методів теорії ймовірності, теоретичної й математичної статистики для організації вибіркових досліджень;
- калібрування моделі, тобто уточнення значень маловідомих параметрів шляхом порівняння результатів моделювання з даними експериментів.

Приклади математичних методів перевірки моделей:

1. Для калібрування обчислюється сума квадратів різниць між даними досліджень E_i і виходом побудованої моделі при значеннях оцінюваних коефіцієнтів C:

$$R(C) = \sum_i (E_i - E_i^{\mathrm{mod}}(C))^2. \tag{1.1}$$

Таку суму часто називають *квадратичним функціоналом відхилу.* У процесі ідентифікації моделі визначають такі коефіцієнти C, при яких функціонал $R(C)$ набуває мінімуму.

Якщо модель є лінійною для оцінюваних коефіцієнтів, то задача знаходження мінімуму функціонала R зводиться до розв’язання системи алгебричних лінійних рівнянь методом найменших квадратів.

2. F-розподіл Фішера.

5. Числове розв’язання:

- розроблення алгоритмів і програм на ЕОМ;
- безпосереднє проведення розрахунків (розрахунки на основі економіко-математичної моделі зазвичай мають багатоваріантний характер).

6. Аналіз числових результатів та їх застосування:

- перевірка достовірності й повноти результатів моделювання, тобто верифікація й валідація моделі (*верифікація* – перевірка правильності структури (логіки) моделі; *валідація* – перевірка відповідності даних, отриманих на основі моделі, реальному процесу);

- аналіз чутливості моделі, тобто залежності розв'язку, що рекомендується моделлю, від значень конкретних параметрів, що є входами моделі;

- оцінювання ступеня практичного використання моделі.

Перелічені етапи моделювання практично ніколи не виконуються строго послідовно. Модель будується ітеративно. Якщо після усунення логічних помилок результати суперечать установленим вимогам, то повертаються до попереднього етапу.

Приклад 1.2. *Моделювання виробництва стільців з метою збільшення прибутку*.

Перший етап **–** аналіз проблеми. Вивчається ринок попиту шести моделей стільців: модель 1, модель 2, модель 3-1, модель 3-2 (модифікація моделі 3-1), модель 4-1, модель 4-2 (модифікація моделі 4-1).

Відомі економічні показники виробництва:

- потреба в 11 деталях (довгі штифти, короткі штифти, ніжки, міцні сидіння, полегшені сидіння, міцна поперечина, полегшена поперечина, спинки для моделі 1, спинки для моделі 2, спинки для моделі 3, спинки для моделі 4);

- питомий прибуток від кожної моделі;

- кількість виготовлених стільців;

- запас деталей на початку тижня.

Умови виробництва:

- стільці сконструйовано так, що можна використовувати взаємозамінні деталі – різні штифти, сидіння;

- взаємозамінні деталі допомагають підстрахуватися на випадок раптових змін попиту;

- виробництво триває один тиждень.

Виходячи з необхідності отримання прибутку, скласти план виробництва на наступний тиждень. При цьому показником ефективності є тижневий прибуток.

Функціональну модель виробництва стільців у вигляді «чорного ящика» зображено на рис. 1.7.

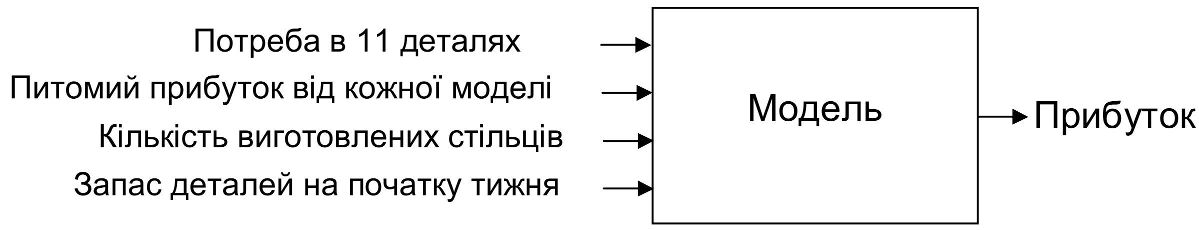


Рис. 1.7

Структурна модель виробництва стільців відображає зв'язки між показниками виробництва (рис. 1.8).

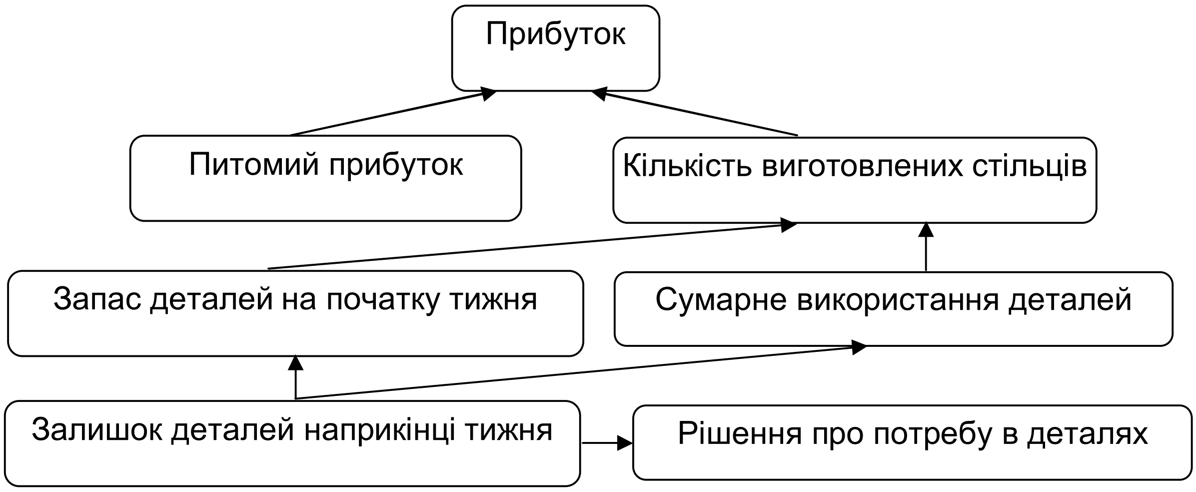


Рис. 1.8

Другий етап – подання моделі виробництва у вигляді електронної таблиці. Сформовану таблицю в програмному забезпеченні MS Excel з вихідними даними та результатами показано на рис. 1.9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Модель структури тижневого виробництва компанії "Меблі для дому"**									
2	Модель стільців	Модель 1	Модель 2	Модель 3-1	Модель 3-2	Модель 4-1	Модель 4-2			
3	Питомий прибуток	36	40	45	38	35	25	Прибуток		
4	Кількість вироблених стільців	40	40	40	40	40	40	8 760		
5		Потреба в деталях						Сумарне використання	Запас на початку тижня	Залишок наприкінці тижня
6	Довгі штифти	8	0	12	0	8	4	1 280	1 280	0
7	Короткі штифти	4	12	0	12	4	8	1 600	1 900	300
8	Ніжки	4	4	4	4	4	4	960	1 090	130
9	Міцні сидіння	1	0	0	0	1	1	120	190	70
10	Полегшені сидіння	0	1	1	1	0	0	120	170	50
11	Міцні поперечини	6	0	4	0	5	0	600	1 000	400
12	Полегшені поперечини	0	4	0	5	0	6	600	1 000	400
13	Спинки для моделі 1	1	0	0	0	0	0	40	110	70
14	Спинки для моделі 2	0	1	0	0	0	0	40	72	32
15	Спинки для моделі 3	0	0	1	1	0	0	80	93	13
16	Спинки для моделі 4	0	0	0	0	1	1	80	85	5

Рис. 1.9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Модель структури тижневого виробництва компанії "Меблі для дому"**										
2	Модель стільців	Модель 1	Модель 2	Модель 3-1	Модель 3-2	Модель 4-1	Модель 4-2				
3	Питомий прибуток	36	40	45	38	35	25	Прибуток			
4	Кількість вироблених стільців	40	40	40	40	40	40	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B3:G3)			
5		По						Сумарне використання	Запас на початку тижня	Залишок наприкінці тижня	Рішення
6	Довгі штифти	8	0	12	0	8	4	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B6:G6)	1280	=I6-H6	=ЕСЛИ(J6<0;A6&" закінчились";"")
7	Короткі штифти	4	12	0	12	4	8	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B7:G7)	1900	=I7-H7	=ЕСЛИ(J7<0;A7&" закінчились";"")
8	Ніжки	4	4	4	4	4	4	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B8:G8)	1090	=I8-H8	=ЕСЛИ(J8<0;A8&" закінчились";"")
9	Міцні сидіння	1	0	0	0	1	1	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B9:G9)	190	=I9-H9	=ЕСЛИ(J9<0;A9&" закінчились";"")
10	Полегшені сидіння	0	1	1	1	0	0	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B10:G10)	170	=I10-H10	=ЕСЛИ(J10<0;A10&" закінчились";"")
11	Міцні поперечини	6	0	4	0	5	0	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B11:G11)	1000	=I11-H11	=ЕСЛИ(J11<0;A11&" закінчились";"")
12	Полегшені поперечини	0	4	0	5	0	6	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B12:G12)	1000	=I12-H12	=ЕСЛИ(J12<0;A12&" закінчились";"")
13	Спинки для моделі 1	1	0	0	0	0	0	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B13:G13)	110	=I13-H13	=ЕСЛИ(J13<0;A13&" закінчились";"")
14	Спинки для моделі 2	0	1	0	0	0	0	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B14:G14)	72	=I14-H14	=ЕСЛИ(J14<0;A14&" закінчились";"")
15	Спинки для моделі 3	0	0	1	1	0	0	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B15:G15)	93	=I15-H15	=ЕСЛИ(J15<0;A15&" закінчились";"")
16	Спинки для моделі 4	0	0	0	0	1	1	=СУММПРОИЗВ($B$4:$G$4;B16:G16)	85	=I16-H16	=ЕСЛИ(J16<0;A16&" закінчились";"")

Рис. 1.9. Закінчення

Результат розрахунків (рис. 1.10) – тижневий прибуток збільшився на 360 грош. од.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Модель структури тижневого виробництва компанії "Меблі для дому"**										
2	Модель стільців	**Модель 1**	**Модель 2**	**Модель 3-1**	**Модель 3-2**	**Модель 4-1**	**Модель 4-2**				
3	Питомий прибуток	36	40	45	38	35	25	Прибуток			
4	Кількість вироблених стільців	100	40	0	40	40	40	9 120			
5		Потреба в деталях						Сумарне використання	Запас на початку тижня	Залишок наприкінці тижня	Рішення
6	Довгі штифти	8	0	12	0	8	4	1280	1280	0	
7	Короткі штифти	4	12	0	12	4	8	1840	1900	60	
8	Ніжки	4	4	4	4	4	4	1040	1090	50	
9	Міцні сидіння	1	0	0	0	1	1	180	190	10	
10	Полегшені сидіння	0	1	1	1	0	0	80	170	90	
11	Міцні поперечини	6	0	4	0	5	0	800	1000	200	
12	Полегшені поперечини	0	4	0	5	0	6	600	1000	400	
13	Спинки для моделі 1	1	0	0	0	0	0	100	110	10	
14	Спинки для моделі 2	0	1	0	0	0	0	40	72	32	
15	Спинки для моделі 3	0	0	1	1	0	0	40	93	53	
16	Спинки для моделі 4	0	0	0	0	1	1	80	85	5	

Рис. 1.10

Проаналізувавши дефіцит довгих штифтів далі, можна відмовитися від стільців моделі 4-1 (втрата питомого прибутку 35 грош. од.), але зробити 120 стільців моделі 4-2 (питомий прибуток 25 грош. од.). Інший результат цих розрахунків показано на рис. 1.11: тижневий прибуток збільшився на 600 грош. од., але через недостатній запас деталей на складі неможливо здійснити цей план.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Модель структури тижневого виробництва компанії "Меблі для дому"**													
2	Модель стільців	Модель 1	Модель 2	Модель 3-1	Модель 3-2	Модель 4-1	Модель 4-2							
3	Питомий прибуток	36	40	45	38	35	25	Прибуток						
4	Кількість вироблених стільців	100	40	0	40	0	120	9 720						
5		Потреба в деталях						Сумарне використання	Запас на початку тижня	Залишок наприкінці тижня	Рішення			
6	Довгі штифти	8	0	12	0	8	4	1280	1280	0				
7	Короткі штифти	4	12	0	12	4	8	2320	1900	-420	Короткі штифти закінчились			
8	Ніжки	4	4	4	4	4	4	1200	1090	-110	Ніжки закінчились			
9	Міцні сидіння	1	0	0	0	1	1	220	190	-30	Міцні сидіння закінчились			
10	Полегшені сидіння	0	1	1	1	0	0	80	170	90				
11	Міцні поперечини	6	0	4	0	5	0	600	1000	400				
12	Полегшені поперечини	0	4	0	5	0	6	1080	1000	-80	Полегшені поперечини закінчились			
13	Спинки для моделі 1	1	0	0	0	0	0	100	110	10				
14	Спинки для моделі 2	0	1	0	0	0	0	40	72	32				
15	Спинки для моделі 3	0	0	1	1	0	0	40	93	53				
16	Спинки для моделі 4	0	0	0	0	1	1	120	85	-35	Спинки для моделі 4 закінчились			

Рис. 1.11

Четвертий – шостий етапи – отримання оптимального плану виробництва. Унаслідок підбору кількості виготовлених стільців знайдено близький до оптимального план виробництва стільців (рис. 1.12).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Модель структури тижневого виробництва компанії "Меблі для дому"**										
2	Модель стільців	Модель 1	Модель 2	Модель 3-1	Модель 3-2	Модель 4-1	Модель 4-2				
3	Питомий прибуток	36	40	45	38	35	25	Прибуток			
4	Кількість вироблених стільців	100	72	40	53	0	0	10 294			
5		Потреба в деталях						Сумарне використання	Запас на початку тижня	Залишок наприкінці тижня	Рішення
6	Довгі штифти	8	0	12	0	8	4	1280	1280	0	
7	Короткі штифти	4	12	0	12	4	8	1900	1900	0	
8	Ніжки	4	4	4	4	4	4	1060	1090	30	
9	Міцні сидіння	1	0	0	0	1	1	100	190	90	
10	Полегшені сидіння	0	1	1	1	0	0	165	170	5	
11	Міцні поперечини	6	0	4	0	5	0	760	1000	240	
12	Полегшені поперечини	0	4	0	5	0	6	553	1000	447	
13	Спинки для моделі 1	1	0	0	0	0	0	100	110	10	
14	Спинки для моделі 2	0	1	0	0	0	0	72	72	0	
15	Спинки для моделі 3	0	0	1	1	0	0	93	93	0	
16	Спинки для моделі 4	0	0	0	0	1	1	0	85	85	

Рис. 1.12

У наведеному прикладі в розрахунках використано балансовий метод.

Контрольні запитання

1. Що є економіко-математичною моделлю?
2. Класифікація економіко-математичних моделей.
3. Етапи побудови економіко-математичних моделей.
4. Історія розвитку економіко-математичного моделювання.
5. Вплив вітчизняної школи на розвиток економіко-математичних моделей.
6. Характеристика економіки як об'єкта математичного моделювання.
7. Відмінність і складність економічних процесів у математичному моделюванні.

2. МОДЕЛЮВАННЯ СПОЖИВАННЯ

2.1. Простір товарів і послуг

Економіка як наука оцінює ефективність виробництва товарів і послуг, їх споживання населенням. Одним з основних понять економіки є поняття товару. *Товар* – це споживацьке благо (послуга), яке надійшло в продаж у певний час у певному місці. Товари купують споживачі. *Споживач* – індивід або група індивідів, що розподіляють свій прибуток на купівлю товарів.

Моделі споживання допомагають відповісти на запитання споживача «Яку кількість товарів придбати?».

Нехай маємо *n* товарів на ринку товарів. Вибір споживача – це деякий вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де кожна компонента – кількість відповідного товару, придбаного споживачем. Набір усіх таких векторів утворює *простір товарів X* та описує такі дії споживача:

- якщо $x_i > 0$, то споживач придбає товар у кількості x_i;

- якщо $x_i = 0$, то споживач байдуже ставиться до товару *i*.

Уведемо *відношення переваги* (≥) у просторі товарів X. Якщо $x \geq y$, то це означає, що споживач віддає перевагу набору товарів *x*. Якщо $x = y$, *то для споживача немає різниці, який набір товарів придбати: x або y (має місце відношення байдужості).*

Для відношення переваги діють такі *аксіоми*:

1. Відношення переваги – неперервне: якщо $x \geq y$, то існує такий маленький приріст, що $x + \Delta x \geq y$.

2. Відношення переваги – рефлективне: $x \geq x$.

3. Відношення переваги – транзитивне: із $x \geq y$, $y \geq z$ випливає, що $x \geq z$.

4. Для будь-яких товарів *x, y* або $x \geq y$ або $y \geq x$.

Відношенню байдужості також властиві рефлективність, транзитивність й симетричність.

Множина товарів, які для споживача мають однакову цінність з товаром *x*, *є множиною байдужості*

$$I_x = \{ y \in X: \ y = x, x \in X\}.$$

Множину товарів, які мають переважне значення для споживача порівняно з товаром *x,* називають *множиною переваг*

$$P_x = \{ y \in X: \ y \geq x, x \in X\}.$$

Множиною непереваг є множина

$$NP_x = \{ y \in X: \ y \leq x, x \in X\}.$$

Виходячи з означень цих множин, маємо таку властивість:

$$I_x = P_x \cap NP_x.$$

Приклад 2.1. Переваги в придбанні чистильних засобів на ринку розподілилися таким чином:

Назва чистильного засобу	«Любава»	«Бета»	«Сантрі»	«Альфа»	«Доллі»	«КРТ»	«Балтика»
Розподіл попиту на чистильні засоби, %	19	15	14	13	10	10	8

Знайти множину переваг для продукту «Альфа» і множину байдужості для продукту «Доллі».

Розв'язання. Множина переваг для засобу «Альфа»

P(«Альфа») = {«Альфа», «Любава», «Бета», «Сантрі»},

а множина байдужості для засобу «Доллі»

I(«Доллі») = {«Доллі», «КРТ»).

Множина байдужості при n = 2 визначає на площині *криву байдужості*. Позначимо через D змінний параметр, яким може бути дохід. Тоді, наприклад, для двох агрегованих груп товарів – продуктів харчування x_1 і непродовольчих товарів x_2 – криві байдужості, що відповідають різним значенням D ($D_1 < D_2 < D_3$), показано на рис. 2.1.

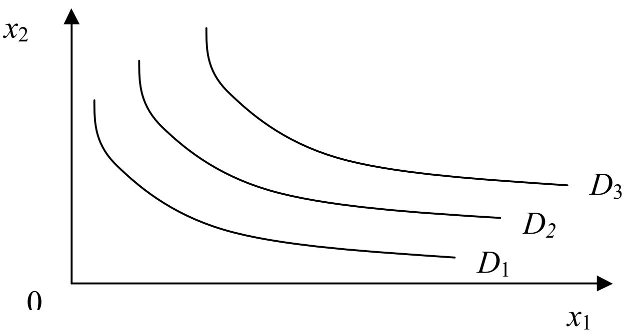


Рис. 2.1

Кожний споживач, купуючи товари, обмежений на ринку своїми можливостями (своїм бюджетом). Уведемо *бюджетні чинники* для того, щоб оцінити обмеження споживача:

1. Ціни на товар. Для кожного товару з $X = \{x_i,\ i = \overline{1,n}\}$ *уведемо вектор цін* $P = \{p_i,\ i = \overline{1,n}\}$.

2. Рівень доходу споживача D. Тоді бюджетне обмеження має такий вигляд:

$$PX = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \le D. \quad (2.1)$$

Споживацька множина

$$S = \{x \in X : PX \le D\}$$

визначає набори товарів, доступних для споживача, і є закритою, обмеженою й опуклою. На споживацькій множині й проводитимемо всі подальші дослідження.

2.2. Функція корисності й задача споживання

Виникає зрозуміле запитання, чи можна оцінити попит на товари ринку, якщо відомо ціни й рівень доходу споживача. Рівню цін *p*, які можуть змінюватися на множині цін *P*, і рівню доходу *D* можна поставити у відповідність *функцію попиту*, яка має безліч значень у просторі товарів:

$$\varphi : P \times D \to 2^{x}, \tag{2.2}$$

де 2^x – безліч усіх підмножин множини товарів *X*.

Як знайти таку функцію?

Для споживача актуальним є оцінювання привабливості тих або інших товарів, тобто кількісна оцінка відношення переваги у вигляді функції корисності. Числову функцію $U(x)(x \in X)$ назвемо *функцією корисності*, якщо вона є індикатором переваги товарів: $U(x) \geq U(y)$, *якщо* $x \geq y$ (для $x, y \in X$).

Граничною корисністю товару називають похідну від функції корисності

$$\frac{\partial U(X)}{\partial x_i},$$

яка показує, яким чином змінюватиметься корисність зі збільшенням споживання товару x_i. *Гранична корисність* – це вектор частинних похідних за кожним товаром x_i.

Властивості функції корисності:

1) $\frac{\partial U(X)}{\partial x_i} > 0$ – корисність збільшується зі збільшенням споживання товару x_i;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \frac{\partial U(X)}{\partial x_i} = \infty$ – з невеликим збільшенням споживання товару при його первинній відсутності різко збільшується корисність;

3) $\frac{\partial^2 U(X)}{\partial {x_i}^2} < 0$ – зі збільшенням споживання товару швидкість збільшення корисності сповільнюється (*перший закон Гюссена)*;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \frac{\partial U(X)}{\partial x_i} = 0$ – при дуже великій кількості товару її подальше збільшення не приводить до збільшення корисності.

Приклади функції корисності:

1) лінійна функція корисності

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = ax^T;$$

2) квадратична функція корисності

$$U(x) = ax^T + \frac{1}{2} xBx^T, \text{ де } B < 0,\ a + xB > 0;$$

3) логарифмічна функція корисності (функція Бернуллі)

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log_b(x_i - \overline{x_i}), \quad \text{де } b > 1, a_i, x_i > \overline{x_i} \geq 0.$$

Задачею споживання є збільшення корисності придбання допустимого набору товарів з урахуванням бюджетного обмеження споживача. Тоді модель раціональної поведінки споживача на ринку полягає у виборі такого споживацького набору X^*, який максимізує його функцію корисності при заданому бюджетному обмеженні:

$$\begin{aligned} &U(X) \to max; \\ &PX \leq D; \\ &X \geq 0. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Геометричну інтерпретацію моделі (2.3) для двох агрегованих груп товарів подано на рис. 2.2.

Лінію AB (в інших варіантах A_1B_1, A_2B_2), що відповідає бюджетному обмеженню ($PX = D$), називають *бюджетною лінією.* Вибір споживачів обмежений трикутником AOB (A_1OB_1, A_2OB_2). Набір товарів M, що відповідає точці дотику прямої AB до найвіддаленішої кривої байдужості, є оптимальним розв'язком (в інших варіантах це точки K і L). Лінії AB і A_1B_1 відповідають одному й тому ж розміру доходу й різним цінам на товари x_1 і x_2; лінія A_2B_2 відповідає більшому розміру доходу.

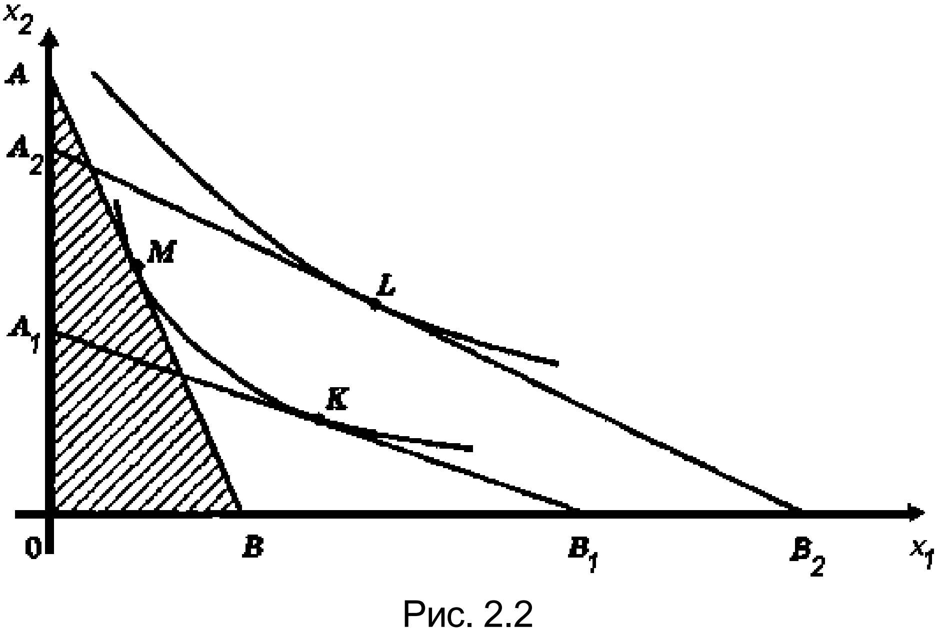


Рис. 2.2

Для розв'язання задачі (2.3) застосовують опукле програмування. Для цього будують *функцію Лагранжа*

$$L(X, \lambda) = U(X) + \lambda(D - PX) \qquad (2.4)$$

при таких умовах:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \le 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} \ge 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = 0, \ \lambda \ge 0. \tag{2.5}$$

Підставляючи функцію Лагранжа (2.4) в умови оптимальності (2.5), одержують залежність для *оптимального значення X** (тобто такого значення, яке задовольняє умовам задачі (2.3) і максимізує функцію корисності):

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U(X^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i \le 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Отже,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = D - PX \ge 0, \tag{2.6}$$

при цьому

$$\frac{\partial U(X^*)}{\partial x_i} = \lambda^* p_i, \text{ якщо } x_i^* > 0 \text{ (товар отримується),} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial U(X^*)}{\partial x_i} < \lambda^* p_i, \text{ якщо } x_i^* = 0 \text{ (товар не отримується),} \tag{2.8}$$

$$PX^* = D, \text{ якщо } \lambda^* > 0 \text{ (повне використання доходу, усі товари куплено).} \tag{2.9}$$

З умов оптимальності (2.7) випливає, що

$$\frac{\partial U(X^*)}{\partial x_i} : p_i = \lambda^*, \text{ якщо } x_i^* > 0,$$

тобто споживачі повинні вибирати товари так, щоб відношення граничної корисності до ціни товару було однаковим для всіх товарів, які було придбано. Іншими словами, в оптимальному наборі граничні корисності вибраних товарів мають бути пропорційними цінам.

Приклад 2.2. Нехай задачу споживання поставлено для двох товарів ($n = 2$). Цінність другого товару є доречною тільки за наявності першого, при цьому цінність першого товару є цінною сама по собі, але збільшується із споживанням другого товару. Тоді функцію корисності можна записати в такому вигляді:

$$U(X) = ax_1 + bx_1x_2,$$

де $a > 0$ – коефіцієнт цінності першого товару (цінність одиниці товару); $b > 0$ – коефіцієнт цінності загального використання двох товарів.

Бюджетне обмеження запишемо у вигляді (2.1):

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le D.$$

Визначити оптимальну кількість обох товарів і функцію корисності.

Розв'язання. Функцію Лагранжа запишемо таким чином:

$$L(X,\lambda) = ax_1 + bx_1x_2 + \lambda(D - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Із (2.7) і (2.9) маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = a + bx_2 = p_1\lambda; \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} = bx_1 = p_2\lambda; \\ p_1x_1 + p_2x_2 = D. \end{cases}$$

Із першого й другого рівнянь одержуємо

$$x_2 = \frac{p_1\lambda - a}{b}, \; x_1 = \frac{p_2\lambda}{b}.$$

Підставивши ці значення в третє рівняння, знаходимо

$$\lambda = \frac{bD + ap_2}{2p_1p_2}.$$

Наприклад, при значеннях параметрів моделі p_1 = 2, p_2 = 1, a = 1, b = 0,25, D = 100 маємо

$$\lambda = \frac{bD + ap_2}{2p_1p_2} = \frac{0{,}25 \cdot 100 + 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 1} = 6{,}5;$$

$$x_1 = \frac{p_2\lambda}{b} = \frac{1 \cdot 6{,}5}{0{,}25} = 26; \quad x_2 = \frac{p_1\lambda - a}{b} = \frac{2 \cdot 6{,}5 - 1}{0{,}25} = \frac{13 - 1}{0{,}25} = 48;$$

$$U(x) = ax_1 + bx_1x_2 = 1 \cdot 26 + 0{,}25 \cdot 26 \cdot 48 = 338.$$

Кривою байдужості можна назвати всі точки на площині двох товарів, де функція корисності має постійне значення (рис. 2.3).

Так, рівняння кривої байдужості, яка проходить через оптимальну точку, має вигляд

$$x_1 + 0{,}25x_1x_2 = 338 \text{ або } x_2 = 4\left(\frac{338}{x_1} - 1\right), \; 0 < x_1 \le 338.$$

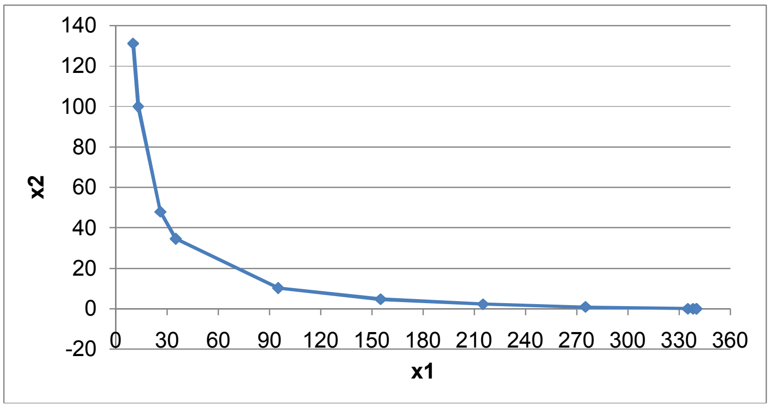


Рис. 2.3

Графіки функції корисності

Розглянемо приклади функцій корисності та проілюструємо їх властивості.

Нехай альтернатива споживача складається з однієї компоненти *x* – величини грошового доходу. Функція корисності індивідуума описує його ставлення до капіталу. Розглянемо деякі спеціальні випадки функцій індивідуальної корисності.

1. Лінійна корисність $U(x) = ax + b$ (графічну інтерпретацію подано на рис. 2.4).

Індивідуум, що має таку функцію корисності, завжди оцінює приріст капіталу з одним і тим же коефіцієнтом пропорційності незалежно від того, скільки грошей у нього є. Наприклад, до приросту капіталу в розмірі 1 грн людина ставиться так само, як і у випадку приросту 10 грн або 10 000 грн. Цей споживач нейтральний до ризику.

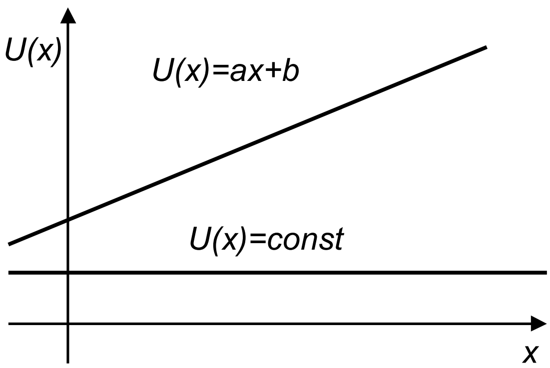


Рис. 2.4

Випадок $a = 0$ відповідає ситуації, коли величина приросту капіталу для індивідуума не має значення («гроші не мають сенсу»). Оскільки гранична корисність є незмінною вздовж усієї області визначення, її похідна (друга похідна функції корисності) дорівнює нулю.

2. Логарифмічна корисність $U(x) = a\ln(x)$, $a>0$, $x>0$ (графічну інтерпретацію подано на рис. 2.5). Змінення ставлення споживача з такою функцією корисності до приросту капіталу описує функція, яка зростає вздовж усієї області визначення.

Такий споживач високо цінує приріст капіталу, поки володіє невеликими коштами. Чим більше коштів у кишені такого споживача, тим менше він зацікавлений у їх збільшенні на 1 грн. Друга похідна $\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{a}{x^2}$ є від'ємною й збільшується вдовж усієї області визначення. Це свідчить про те, що гранична корисність спадає зі збільшенням швидкості вздовж усієї області визначення, а функція корисності споживача $U(x) = a\ln(x)$ є опуклою. Така функція корисності є характерною для споживача, що уникає ризику.

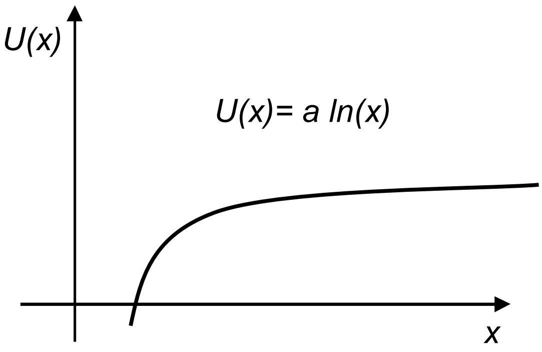


Рис. 2.5

3. Експоненціальна корисність $U(x) = a^x$ (графічну інтерпретацію подано на рис. 2.6). Гранична корисність капіталу описується зростаючою додатною функцією $\frac{dU}{dx} = a^x \ln a$. Особа з подібною функцією корисності налаштована на ризик.

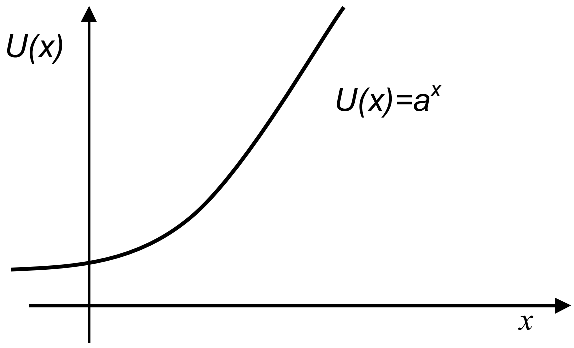


Рис. 2.6

4. У загальному випадку функція, що описує корисність капіталу для індивідуума, є вгнутою для порівняно невеликих величин x (гранична корисність збільшується до деякої екстремальної величини x_1), опуклою до деякого рівня x_2 і далі постійною (графічну інтерпретацію подано на рис. 2.7).

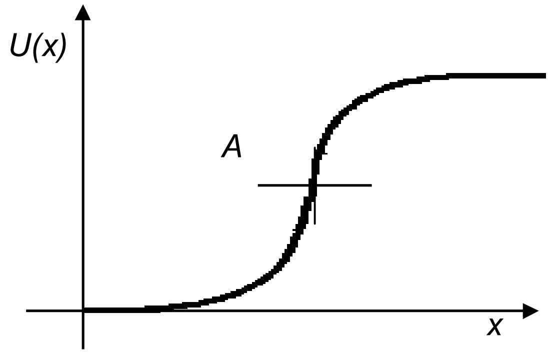


Рис. 2.7

Для складних і ризикових альтернатив існує багато різних підходів до визначення того, що вважати корисністю в кожному з випадків.

2.3. Функції купівельного попиту

Функціями купівельного попиту (далі називатимемо їх *функціями попиту)* називають функції, що відображають залежність попиту на окремі товари й послуги від факторів, що впливають на нього (інформація про доходи населення, ціни на товари, склад сімей та ін.).

Розглянемо побудову функцій попиту залежно від двох факторів: *доходу* й *цін* [6].

Нехай у моделі (2.3) ціни й дохід – змінні параметри. Змінну доходу позначимо *Z.* Тоді розв'язком оптимізаційної задачі (2.3) буде векторна функція

$$X^* = X^*(P, Z),$$

компонентами якої є *функції попиту* на певний товар залежно від цін і доходу:

$$x_i = f_i(P,Z).$$

Розглянемо окремий випадок, коли вектор цін залишається незмінним, а змінюється тільки дохід. Для двох товарів цей випадок зображено на рис. 2.8.

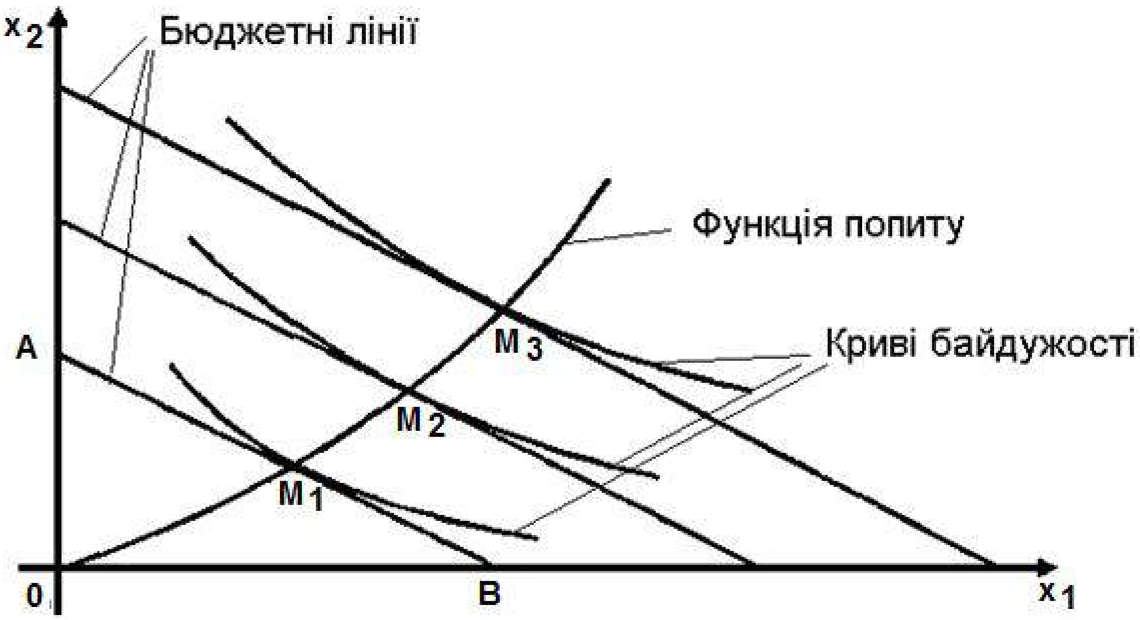


Рис. 2.8

Якщо по осі абсцис відкласти кількість одиниць товару x_1, який можна придбати на дохід *Z* (точка В), а по осі ординат – кількість товару x_2 тієї самої вартості (точка А), то одержана пряма лінія *АВ* буде *бюджетною лінією*.

Бюджетна лінія відображає будь-яку комбінацію кількостей цих двох товарів, які можна купити за суму грошей *Z.* При збільшенні доходу бюджетні лінії переміщаються паралельно самим собі, віддаляючись від початку координат. Разом з ними переміщаються відповідні криві байдужості.

Точками оптимуму споживацького попиту для відповідних розмірів доходу будуть у цьому випадку точки M_1, M_2, M_3. При нульовому доході попит на обидва товари буде нульовим. Крива, що з'єднує точки 0, M_1, M_2, M_3, є графічним відображенням *функції попиту* залежно від доходу при заданому векторі цін.

У прикладі 2.2 величини x_1, x_2 можна виразити через дохід (якщо відомо коефіцієнти a, b і ціни p_1, p_2), отримавши функції попиту на товари x_1, x_2 від доходу $Z = D$: $x_1 = \frac{p_2}{b}\frac{bZ + ap_2}{2p_1p_2}$ і $x_2 = \frac{p_1}{b}\frac{bZ + ap_2}{2p_1p_2} - \frac{a}{b}$.

Однофакторні функції попиту від доходу широко застосовуються для аналізу купівельного попиту. Криві $x_i = f_i(Z)$, що відповідають цим функціям, називають *кривими Енгеля* на ім'я німецького економіста. Вигляд цих кривих для різних товарів може бути різним:

1. Якщо попит на певний товар збільшується приблизно пропорційно доходу, то функція буде лінійною. Такий характер має, наприклад, функція попиту на одяг, фрукти та ін. Криву Енгеля для цього випадку зображено на рис. 2.9, а.

2. Якщо в міру збільшення доходів попит на певну групу товарів збільшується все більш високими темпами, то крива Енгеля є вгнутою (рис. 2.9, б). Так змінюється попит на предмети розкоші.

3. Якщо темпи збільшення попиту, починаючи з певного моменту, у міру його насичення стають нижчими від темпів збільшення доходу, то крива Енгеля є опуклою (рис. 2.9, в). Наприклад, такий характер має функція попиту на товари першої необхідності.

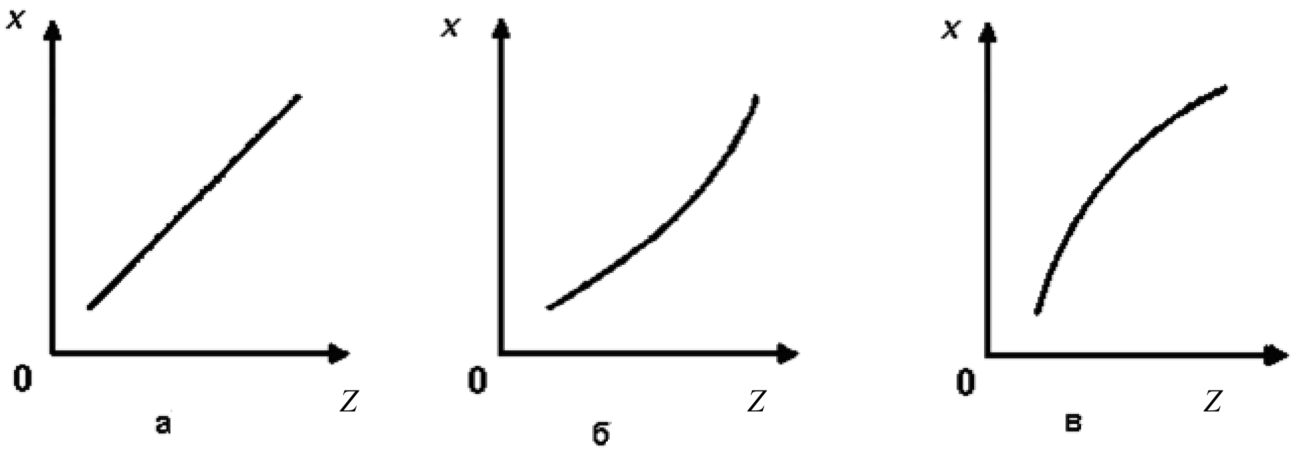


Рис. 2.9

Спеціальні види функцій попиту (функції Торнквіста)

Той самий принцип розмежування груп товарів за типами функцій попиту, що залежать від доходу, використовував шведський економіст Л. Торнквіст, який запропонував спеціальні види функцій попиту (функції Торнквіста) для трьох груп товарів.

1. *Функція попиту Торнквіста для товарів першої необхідності* має вигляд

$$x = \frac{a_1 Z}{Z + C_1} \qquad (2.10)$$

і відображає той факт, що збільшення попиту на ці товари зі збільшенням доходу поступово сповільнюється й має межу a_1. Графічну інтерпретацію подано на рис. 2.10: графіком функції є опукла крива попиту *I*, що асимптотично наближається до прямої лінії $x = a_1$.

2. *Функція попиту Торнквіста для товарів другої необхідності* визначається формулою

$$x = \frac{a_2(Z - b_2)}{Z + C_2}, \tag{2.11}$$

де $Z \geq b_2$.

Ця функція також має межу a_2, але більш високого рівня, при цьому попит на цю групу товарів з'являється лише після того, як дохід набуває величини b_2. Графічну інтерпретацію подано на рис. 2.10: графіком функції є опукла крива попиту *II*.

3. *Функція попиту Торнквіста для предметів розкоші* має вигляд

$$x = \frac{a_3(Z - b_3)}{Z + C_3}, \tag{2.12}$$

де $Z \geq b3$.

Ця функція не має межі. Попит на ці товари виникає тільки після того, як дохід перебільшить величину b_3, і далі швидко збільшується. Графічну інтерпретацію подано на рис. 2.10: графіком функції є вгнута крива попиту *III.*

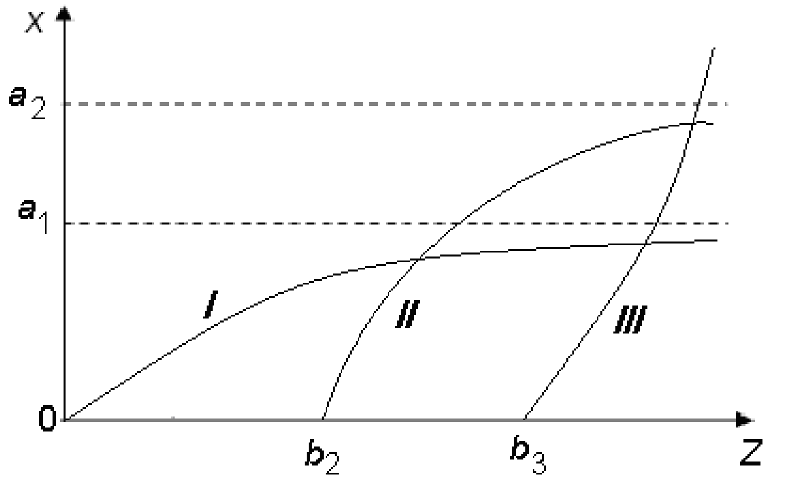


Рис. 2.10

Окрім наведених функцій в аналітичних моделях купівельного попиту використовуються також інші функції: статичні, s-подібні і т.д.

Коефіцієнти еластичності

В економіці для оцінювання змінення функції попиту зі зміненням цін на товари та рівня доходу споживача, а також щоб уникнути метричності, уводять коефіцієнт еластичності.

Коефіцієнт еластичності попиту залежно від доходу показує, на скільки відсотків зміниться попит на товар при зміненні доходу споживача Z на 1 %:

$$e_i^Z = \frac{dx_i}{dZ}\frac{Z}{x_i}, \tag{2.13}$$

де x_i – попит на цей товар, що є функцією доходу: $x_i = f_i(Z)$.

Наприклад, якщо попит на товар описується функцією Торнквіста для товарів першої необхідності $x = \frac{a_1 Z}{Z + C_1}$, то за формулою (2.13) можна знайти коефіцієнт еластичності попиту залежно від доходу:

$$e_i^Z = \frac{dx_i}{dZ}\frac{Z}{x_i} = \left| y' = \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2} \right| =$$

$$= \frac{a_1(Z + C_1) - a_1 Z}{(Z + C_1)^2} \frac{Z}{\frac{a_1 Z}{Z + C_1}} = \frac{a_1 C_1 Z(Z + C_1)}{(Z + C_1)^2 a_1 Z} = \frac{C_1}{(Z + C_1)}.$$

Коефіцієнти еластичності попиту залежно від доходу для різних товарів є різними й можуть бути від'ємними, якщо зі збільшенням доходів споживання зменшується. Прийнято виділяти чотири групи товарів залежно від коефіцієнта еластичності попиту на них залежно від доходу (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Коефіцієнт еластичності попиту залежно від доходу

№ п/п	Група товарів	Коефіцієнт еластичності	Приклади
1	Малоцінні товари	$e_i^Z < 0$	Хліб, низькосортні товари
2	Товари з малою еластичністю	$0 < e_i^Z < 1$;	Основні продукти харчування
3	Товари із середньою еластичністю	Наближається до 1	Одяг, тканини, взуття ($e_i^Z = 1{,}1 \ldots 1{,}3$)
4	Товари з високою еластичністю	$e_i^Z > 1$	Предмети розкоші

За даними таблиці можна зробити такі висновки: у міру збільшення доходу попит переміщається з товарів першої й другої груп на товари третьої й четвертої груп, при цьому споживання товарів першої групи за абсолютною величиною зменшується.

Коефіцієнт еластичності попиту залежно від ціни показує, на скільки відсотків зміниться попит на товар при зміненні ціни на 1 %.

Коефіцієнт еластичності попиту для *i*-го товару (групи товарів) залежно від його ціни p_i обчислюють за формулою

$$e_{ii}^{P} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}, \tag{2.14}$$

де x_i – попит на *i*-й товар, що є функцією ціни: $x_i = f_i(P)$.

Значення коефіцієнтів еластичності попиту залежно від ціни практично завжди є від'ємними. Абсолютні значення коефіцієнтів різних товарів сильно різняться, і залежно від них виділяють три групи товарів та окремо *товари Гіффіна* (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Коефіцієнт еластичності попиту залежно від ціни

№ п/п	Група товарів	Коефіцієнт еластичності	Приклади
1	Товари з нееластичним попитом	$e_{ii}^{P} > -1$	Продукти харчування
2	Товари із середньою еластичністю попиту	e_{ii}^{P} *прямує до -1*	Одяг, взуття
3	Товари з високою еластичністю попиту	$e_{ii}^{P} < -1$	Меблі
4	*Товари Гіффіна* для покупців з низьким доходом	$e_{ii}^{P} > 0$ (з підвищенням ціни попит зростає)	Картопля

Розрізняють такі види товарів:

1) товари еластичного попиту, коли підвищення ціни на 1 % приводить до зменшення попиту більш ніж на 1 % і, навпаки, зниження ціни на 1 % приводить до збільшення кількості покупок більш ніж на 1 %;

2) товар нееластичного попиту, коли підвищення ціни на 1 % спричиняє зниження попиту менш ніж на 1 %.

Перехресний коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків зміниться попит на певний товар при зміненні на 1 % ціни на інший товар за умови, що інші ціни й доходи покупців залишаються незмінними:

$$e_{ij}^{P} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}, \tag{2.15}$$

де x_i – попит на *i*-й товар залежно від ціни p_j на *j*-й товар ($i \neq j$).

За знаком перехресних коефіцієнтів еластичності товари можна поділити на взаємозамінні й взаємодоповнювальні (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Перехресний коефіцієнт еластичності

№ п/п	Група товарів	Коефіцієнт еластичності	Приклади
1	*Взаємозамінні товари* (*i*-й товар замінює в споживанні товар *j*, тобто на товар *i* переключається попит при збільшенні ціни на товар *j*)	$e_{ij}^{P} > 0$	Продукти харчування
2	*Взаємодоповнювальні товари* (*i*-й товар у процесі споживання доповнює товар *j*, тобто збільшення ціни на товар *j* приводить до зменшення попиту на товар *i*)	$e_{ij}^{P} < 0$	Автомобілі, бензин

Як ілюстрація в табл. 2.4 наведено значення прямих і перехресних коефіцієнтів еластичності споживання залежно від ціни для деякої категорії сімей.

Таблиця 2.4

Прямі й перехресні коефіцієнти еластичності

Групи товарів	Продукти харчування	Одяг, тканини, взуття	Меблі, господарчі товари	Культтовари
Продукти харчування	-0,7296	0,0012	0,0043	0,0045
Одяг, тканини, взуття	-0,1991	-1,000	0,0071	0,0074
Меблі, господарчі товари	-0,2458	0,0024	-1,2368	0,0092
Культтовари	-0,2494	0,0024	0,0089	-1,2542

За даними табл. 2.4 можна зробити такі висновки:

1. Значення прямих коефіцієнтів еластичності (по діагоналі таблиці) свідчать про таке: продукти харчування загалом є малоеластичними відносно цін; одяг, тканини і взуття мають середню еластичність; меблі, господарчі товари та культтовари є товарами з високою еластичністю попиту відносно цін.

2. На основі недіагональних елементів цієї таблиці всі промислові товари (друга, третя й четверта групи) є взаємозамінними. Додатність перехресних коефіцієнтів еластичності в рядку «Продукти харчування» означає, що підвищення цін на промислові товари приводить до збільшення попиту на продукти харчування (зменшення попиту на промислові товари звільняє кошти для купівлі продуктів харчування). Від'ємність перехресних коефіцієнтів еластичності у стовпці «Продукти харчування» означає, що при підвищенні цін на продукти харчування попит на промислові товари зменшується (підвищення цін на продукти харчування приводить до зменшення коштів на придбання інших товарів).

Рівняння Слуцького

Динаміку змінення функції попиту $x_i = f_i(P,Z)$ при зміненні цін на товари ринку описує *рівняння Слуцького*

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i}{\partial p_{комп}} - \frac{\partial x_j}{\partial Z} x_i, \tag{2.16}$$

де x_i і x_j – попит на товари *i* і *j*, p_i – ціна товару *i*, $p_{комп}$ – компенсована зміна ціни товару *i*.

Загальний ефект змінення ціни дорівнює сумі ефекту заміни й ефекту доходу. Перший доданок відображає вплив зміни ціни на спричинену ним заміну товарів під час купівлі. Наприклад, при зниженні ціни на товар відбувається збільшення реального доходу (ефект доходу), але він не цілком йде на купівлю цього товару – частина його витрачається на інші товари, що відображається поняттям «ефект заміни». Так, при зниженні цін на продукти харчування попит на них зростає (ефект доходу), але частина доходу, що одночасно вивільнялася, витрачається на придбання предметів домашнього побуту, одягу (ефект заміни) [5].

Граничною нормою заміни одного товару іншим називають відношення граничних корисностей цих товарів:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}. \tag{2.17}$$

Норма заміни вказує, скільки одиниць другого товару потребується, щоб замінити вибулу одиницю першого товару.

Приклад 2.3. Функція корисності споживача має вигляд

$$U(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}.$$

Визначити максимальну корисність, якщо споживач має дохід 100 грош. од., а ціни товарів відповідно дорівнюються 5 і 10 грош. од. Якою є норма заміни другого товару першим в оптимальній точці?

Розв'язання

1. Розглянемо аналітичне розв'язання цієї задачі.

Унаслідок того, що всі товари є необхідними й має виконуватися бюджетне обмеження в оптимальній точці, із (2.7) і (2.9) маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = p_1\lambda, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} = p_2\lambda, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = D; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = 3 \cdot \dfrac{2}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = 2x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = 5\lambda, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} = 3 \cdot \dfrac{1}{3} x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} = x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} = 10\lambda, \\ 5x_1 + 10x_2 = 100. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння на друге, одержуємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{2x_2}{x_1} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}; \\ 5x_1 + 10x_2 = 100. \end{cases}$$

З першої умови випливає, що $4x_2 = x_1$. Підставляємо це співвідношення в друге рівняння системи і знаходимо оптимальні значення x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{40}{3}; \quad x_2 = \frac{10}{3}.$$

Оптимальний набір товару $x^* = \left(\dfrac{40}{3}; \dfrac{10}{3}\right)$, а максимальна функція корисності $U_{max} = 25{,}2$.

2. Геометричне розв’язання цієї задачі полягає в такому. Допустима множина розв’язків (тобто безліч наборів благ, доступних для споживача) являє собою трикутник, обмежений осями координат і бюджетною прямою. На цій множині необхідно знайти точку, що належить кривій байдужості з максимальним рівнем корисності. Пошук цієї точки можна інтерпретувати графічно як послідовний перехід на лінії все більш високого рівня корисності доти, доки ці лінії ще мають спільні точки з допустимою множиною.

Графічну ілюстрацію розв’язання цієї задачі, коли бюджетна пряма має вигляд рівняння $5x_1 + 10x_2 = 100$, а рівень максимальної корисності $3x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = 25{,}2$, показано на рис. 2.11 у вигляді робочого аркуша в Excel.

	A	B	C	D
1	Оптимальне розв'язання			$U(x_1,x_2)=3x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}$
2	x1	x2	Umax	
3	13,33	3,333	25,198421	
4				
5	Геометричне розв'язання			
6	x1	x2	$x_2=\left(\frac{25{,}2}{3x_1^{\frac{2}{3}}}\right)^3$ Umax	$x_2=\frac{100-5x_1}{10}$ D-дохід=100
7	3	3	65,8436214	8,5
8	6	6	16,46090535	7
9	9	9	7,315957933	5,5
10	12	12	4,115226337	4
11	15	15	2,633744856	2,5
12	18	18	1,828989483	1
13	21	21	1,343747375	-0,5
14	24	24	1,028806584	-2

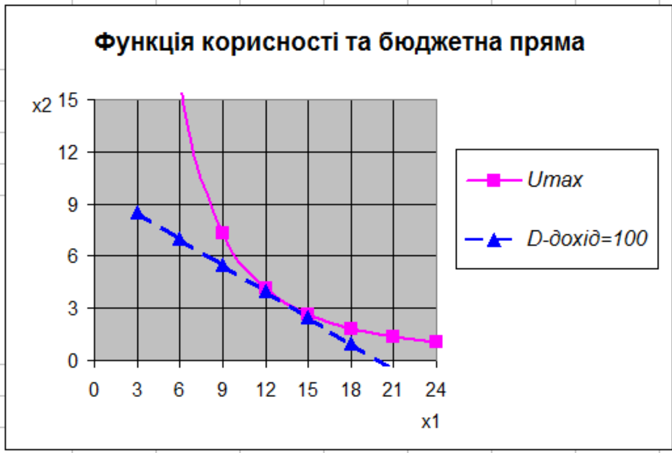


Рис. 2.11

3. Розрахуємо норму заміни одного товару іншим в оптимальній точці за формулою (2.17):

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}}=\frac{2x_2^*}{x_1^*}=\frac{2\cdot\dfrac{10}{3}}{\dfrac{40}{3}}=\frac{1}{2},$$

тобто потребується $\frac{1}{2}$ одиниці другого товару, щоб замінити одну вибулу одиницю першого товару.

Контрольні запитання

1. Поняття «товар» і «споживач».
2. Простір товарів. Відношення переваги.
3. Функція корисності. Види функцій корисності.
4. Задача оптимізації споживання.
5. Функція попиту. Еластичність попиту.
6. Рівняння Слуцького та класифікація товарів.

3. МОДЕЛІ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

3.1. Призначення міжгалузевих моделей

Одним із найважливіших економічних об'єктів є виробничий сектор економіки країни, що функціонує у складній мережі міжгалузевих взаємозв'язків.

Під час економічного планування на рівні регіонів або країни виникає необхідність визначення обсягу випуску товарів, який забезпечує заданий попит населення й виробничі потреби на ці товари в інших галузях.

Для оцінювання параметрів виробництва й розподілення продукції в масштабах країни в сучасній економічній теорії застосовуються статичні й динамічні балансові моделі, розроблені лауреатом Нобелівської премії В. В. Леонтьєвим.

Міжгалузеві балансові моделі призначені для отримання інформації про виробничий сектор економіки країни (регіону країни, її окремого підприємства або всієї світової економіки) з метою обґрунтованого планування міжгалузевих поставок (потоків) продукції за заданими значеннями кінцевого попиту на продукцію.

3.2. Балансовий метод. Схема міжгалузевого балансу

Основою створення балансових моделей є балансовий метод – метод взаємного зіставлення наявних матеріальних, трудових, фінансових ресурсів і потреб в них [7].

Балансова модель – це система рівнянь, які описують відповідність між наявними ресурсами та їх використанням.

Наведемо приклади балансової відповідності, коли під поняттям «ресурси» розуміють більш конкретні поняття.

1. Баланс між кількістю продукції, виробленої окремими економічними об'єктами, і сукупною потребою в цій продукції. При такому підході система, що розглядається, складається з економічних об'єктів, кожний із яких випускає деякий продукт, одна частина його споживається іншими об'єктами системи, а інша – виводиться за межі системи як її кінцевий продукт.

2. Балансова відповідність між робочою силою й кількістю робочих місць.

3. Баланс між платоспроможним попитом населення й пропозицією товарів і послуг.

Розглянемо види балансових моделей:

- матеріальні, трудові та фінансові баланси для народного господарства й окремих галузей;
- міжгалузеві баланси виробництва й розподілу продукції в народному господарстві окремих регіонів;

- матричні баланси (техпромфінплани) підприємств і фірм.

Значення балансових моделей полягає в тому, що вони є інструментом підтримки пропорцій в народному господарстві.

Застосування балансових моделей і балансового методу має такі обмеження:

1) немає механізму порівняння варіантів економічних рішень;

2) не передбачено взаємозамінності різних ресурсів.

Основою інформаційного забезпечення балансових моделей в економіці є матриця коефіцієнтів витрат ресурсів (*технологічна матриця*). Балансові моделі належать до матричного типу економіко-математичних моделей.

У літературі виділяють такі особливості балансової моделі:

1. При побудові моделі розглядається *чиста (технологічна) галузь* – умовна галузь, що об'єднує все виробництво одного продукту. Передбачається, що виробничий сектор економіки складається з n галузей, і кожна галузь виробляє один продукт. Наприклад 1972 р. в СРСР кількість галузей виробничого сектора становила $n = 112$ галузей. В Японії використовуються моделі, в яких $n = 2000$. На практиці зазвичай $n = 500…600$.

У балансовій моделі аналізуються:

- галузі матеріального виробництва: промисловість (енергетика, машинобудування, легка й харчова промисловість), будівництво, сільське господарство;

- галузі нематеріальних послуг (житлово-комунальне господарство, банківська сфера, охорона здоров'я, освіта, наука та ін.).

2. Балансова модель – це *міжгалузевий баланс виробництва і розподілу продукції в народному господарстві (МГБ)*. Має вигляд таблиці, у якій відображено процес формування й використання сукупного суспільного продукту в галузях народного господарства. Схему МГБ розглядатимемо у вартісному вираженні та у вигляді звіту [7].

3. Уводяться припущення про постійність технології виробництва, відсутність інвестицій та ін.

Розглянемо економічну систему з n чистих галузей. Кожна галузь фігурує в балансі як та, що виробляє й споживає.

Усі галузі передбачаються взаємозалежними: для виробництва свого продукту кожна з них використовує результати виробництва (продукти) інших галузей і лише їх.

Розглянемо МГБ у плановому періоді наступного року. Позначимо:

- $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ – кінцевий попит на всі n продуктів;

- $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – план випуску n продуктів.

Подамо схему МГБ у вартісному вираженні (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Схема МГБ у вартісному вираженні

Галузі-постачальники продуктів		Галузі-споживачі продуктів						Кінцевий продукт (кінцевий попит)	Валовий продукт (обсяг виробництва галузі – валовий випуск)
		1-ша галузь	2-га галузь	…	*j*-та галузь	…	*n*-та галузь		
		1-й продукт	2-й продукт	…	*j*-й продукт	…	*n*-й продукт		
1-ша галузь	1-й продукт	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2-га галузь	2-й продукт	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j} **1**	…	x_{2n}	Y_2 **2**	X_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i-та галузь	*i*-й продукт	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	Y_i	X_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n-та галузь	*n*-й продукт	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизація		c_1	c_2	…	c_j	…	c_n		
Оплата праці		v_1	v_2	…	v_j **3**	…	v_n	**4**	
Чистий дохід		m_1	m_2	…	m_j	…	m_n		
Валовий продукт		X_1	X_2	…	X_j	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Схему МГБ розбито на чотири частини – квадранти 1, 2, 3, 4.

Перший квадрант – квадрант проміжного споживання. Визначає проміжне споживання (витрати) або проміжний попит галузей при виробництві продукції, робіт, послуг. Загальний підсумок – *проміжний продукт.*

У таблиці x_{ij} – витрати продукції *i*-ї галузі на виробництво продукції в *j*-й галузі (поточне виробниче споживання), або вартість продукції *i*-ї галузі, спожитої *j*-ю галуззю протягом року; *i*-й рядок – проміжне споживання продукції *i*-ї галузі всіма галузями; *j*-й стовпець – споживання (витрати) в *j*-й галузі продукції всіх галузей; X_i – валовий продукт *i*-ї галузі (фактичний або плановий випуск продукції).

Так, величина x_{32} – це вартість засобів виробництва в галузі 3, які використано як матеріальні витрати в галузі 2. Таким чином, перший квадрант є квадратною матрицею порядку *n*, сума всіх елементів якої дорівнює річному фонду відшкодування витрат засобів виробництва в матеріальній сфері.

Другий квадрант – квадрант кінцевого продукту, або невиробничого споживання, або кінцевого попиту. Кінцевий продукт Y_i $(i=1, ..., n)$ з галузі *i* надходить до споживання й накопичення:

$$Y_i = C_i + I_i + (E_i – M_i),$$

де C_i – кількість продукту на кінець споживання (особисте споживання населення, суспільне споживання державою й некомерційними організаціями); I_i – інвестиції; E_i – експорт; M_i – імпорт; $(E_i - M_i)$ – сальдо в зовнішній торгівлі.

Третій квадрант – квадрант доданої вартості – відображає вартісну структуру валового продукту як суму чистої продукції та амортизації.

Знов створена вартість (або чиста продукція) – це вартість, створена працею людей у процесі виробництва, яка дорівнює сумі оплати праці й чистого доходу (прибутку) галузей.

Додана вартість, або умовно чиста продукція, вироблена у галузі j і приєднана до витрат інших галузей, визначається формулою

$$Z_j = c_j + (v_j + m_j).$$

Для величини валового продукту правильним є співвідношення

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j,\ j = 1,2,...,n,$$

де v_j – фонди оплати праці; m_j – чистий дохід (прибуток) галузей; $(v_j + m_j)$ – чиста продукція; c_j – амортизація устаткування, виробничих будівель, споруд.

Четвертий квадрант – квадрант кінцевого розподілу й використання національного доходу.

Національний дохід дорівнює різниці сумарного кінцевого продукту й амортизаційних відрахувань, що направляються на відшкодування вибуття основних фондів.

Детально четвертий квадрант не розглядається.

За схемою МГБ можна зробити такі висновки:

1. Рядки МГБ відображають розподіл продукції

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{3.1}$$

при цьому вироблена i-ю галуззю продукція X_i (валова продукція у вартісному вираженні) поділяється на проміжну x_{ij} і кінцеву Y_i. *Проміжна продукція* – це частина валової продукції i-ї галузі, яка витрачається іншими галузями.

2. Стовпці МГБ відображають структуру витрат галузі j:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j \quad (j = 1, 2, ..., n), \tag{3.2}$$

тобто вартість продукції галузі j складається з вартості продукції інших галузей та умовно чистої продукції.

3. При $i = j = k$ $X_к = \sum_{j=1}^{n} x_{кj} + Y_к = \sum_{i=1}^{n} x_{iк} + Z_к$ – загальні підсумки однойменних рядків і стовпців, що є однаковими.

4. З формули

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j \tag{3.3}$$

випливає, що сумарний кінцевий продукт дорівнює сумарній умовно чистій продукції.

Із порівняння підсумовування за формулою (3.1) і формулою (3.2) випливають такі формули:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i;$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$

3.3. Статична модель міжгалузевого балансу

Наведена схема МГБ (див. табл. 3.1) – форма подання статичної інформації про взаємозв'язок галузей [8].

Розглянемо спрощену математичну модель:

1. Виробничий сектор складається з n галузей.

2. Припустимо, що на плановому інтервалі часу (один рік) потребується кількість продукції Y_1 галузі 1, кількість продукції Y_2 галузі 2 і т.д.

Тоді $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$ – *кінцевий попит на продукцію* (використовується на невиробниче споживання й інвестиції).

3. Позначимо через X_j обсяг виробництва галузі j на всьому плановому інтервалі часу (у вартісному вираженні), тобто випущено X_1 1-го продукту, X_2 – 2-го продукту і т.д.

Тоді $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$ – *валовий випуск продукції галузей* (вектор випуску, або режим роботи галузі).

4. Величина $X^p = \begin{pmatrix} X_1^p \\ X_2^p \\ \dots \\ X_n^p \end{pmatrix}$ – *проміжна продукція, або проміжний попит*

(частина валового випуску X для забезпечення процесу виробництва). Наприклад, X_1^P – проміжна продукція (у вартісному вираженні) галузі 1, що використовується всіма галузями безпосередньо у виробничому циклі.

Сформуємо *технологічну матрицю*, яка містить коефіцієнти прямих матеріальних витрат на виробництво одиниці продукції.

Нехай валовий випуск продукції X_i галузі i обчислено за деяким уже відомим правилом. Тоді можна записати

$$X_i^p = X_i - Y_i, \quad i = 1,2,...,n. \tag{3.4}$$

Очевидно, що повинно виконуватися рівняння

$$X_i^P = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i = 1,2,...,n, \tag{3.5}$$

де x_{i1} – частина величини X^p_i, необхідна у виробничому процесі галузі 1 для забезпечення випуску кількості її продукції X_1; x_{ij} – частина величини X^p_i, необхідна для виробництва кількості продукції X_j галузі j = *1*, 2, ..., *n*.

Величина x_{ij} залежить від кількості продукції X_j (чим більше X_j, тим більше x_{ij}) і від галузей *i* та *j*, отже,

$$x_{ij} = \varphi_{ij}(X_j).$$

На практиці для вибору функції φ_{ij} прийнятною є найпростіша лінійна функція $x_{ij} = a_{ij}X_j + b_j$. Тут коефіцієнт b_j визначається з очевидного співвідношення: якщо $X_j = 0$, то з необхідністю $x_{ij} = 0$ значення $b_j = 0$, і вираз набуває остаточного вигляду:

$$x_{ij} = \varphi_{ij}(X_j) = a_{ij}X_j; \quad i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,n.$$

Звідси

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}; \quad i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,n. \tag{3.6}$$

Коефіцієнти a_{ij} називають *коефіцієнтами прямих матеріальних витрат,* або *технологічними коефіцієнтами*. Вони показують, яка кількість (у вартісному вираженні) проміжного продукту *i*-ї галузі потребується для виробництва одиниці (X_j = 1) продукту *j*-ї галузі.

Таким чином, технологія виробництва для випуску одиниці продукції в *j*-й галузі потребує певної кількості проміжної продукції *i*-ї галузі a_{ij}. Тобто для випуску одиниці *j*-го товару потребується кількість товару a_{1j} виду 1, кількість товару a_{2j} виду 2 і т.д., кількість товару a_{nj} виду *n* (*i = 1, ..., n*), тобто для виробництва *j*-ю галуззю одиниці *j*-го продукту потребується $a_{ij} \geq 0$ одиниць *i*-го продукту, виробленого *i*-ю галуззю.

Величина a_{ij} не залежить від обсягу виробництва в галузі і є досить стабільною величиною в часі. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

має назву *матриці матеріальних витрат*, або *технологічної матриці*.

Нехай коефіцієнти a_{ij} є відомими (визначаються методами економетрії). Тоді, підставивши (3.6) у (3.5), маємо співвідношення, у якому проміжний продукт галузей виражено через валовий:

$$X_i^p = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j, \quad i = 1,2,...,n. \tag{3.7}$$

З цих величин складається стовпець сукупних матеріальних витрат у сфері виробництва:

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} X_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} X_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} X_j \end{pmatrix}.$$

Таким чином, технологія, що склалася, є незмінною (стаціонарною), а виробництво – лінійне, тобто якщо для випуску одиниці j-го продукту необхідно a_{ij} одиниць i-го продукту, то для випуску X_j одиниць j-го продукту – $a_{ij}X_j$ одиниць i-го продукту.

З урахування (3.7) рівність (3.4) набуває такого вигляду (після перенесення Y_i у ліву частину):

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.8}$$

У виконанні цієї рівності полягає балансовий характер моделі «витрати – випуск», розробленої В. Леонтьєвим. У вітчизняній літературі цю модель прийнято називати *статичною моделлю міжгалузевого балансу (СММБ), моделлю Леонтьєва.* Ця модель є системою лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими $X = (X_1, ..., X_n)$.

Якщо врахувати, що $A = (a_{ij})$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпець валової продукції,

$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ ... \\ Y_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпець кінцевої продукції, то систему рівнянь (3.8) можна записати в матричній формі:

$$X = AX+Y. \tag{3.9}$$

Це канонічна (структурна) форма СММБ.

Ліву частину рівності (3.9) можна трактувати як підсумковий (виробничий плюс кінцевий) попит на продукцію галузі i (на i-й продукт), а праву – як пропозицію i-го продукту. Рівняння (3.9) відображає загальну рівновагу в економіці: валовий випуск продукції повністю розподіляється між споживачами.

Переходячи до аналізу СММБ, розглянемо *основні властивості технологічної матриці A*:

1) матриця A є невід'ємною: $A \geq 0$;

2) процес відтворення не можна було б здійснювати, якби для власного виробництва в галузі витрачалася більша кількість продукту, ніж створювалося взагалі. Це означає, що діагональні елементи матриці A є меншими за 1: $0 < a_{ii} < 1$ (у формулі $a_{ii} = x_{ii} / X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_{ii} < X_i$);

3) як видно з (3.6), коефіцієнт a_{ij} – безрозмірний.

Розрахункові формули моделі Леонтьєва

За допомогою моделі Леонтьєва можна виконати такі розрахунки:

1. Знаючи кінцевий продукт Y, можна визначити валовий продукт X:

$$X = (E - A)^{-1} Y, \tag{3.10}$$

де E – одинична матриця розміром $n \times n$, а $(E - A)^{-1}$ – матриця, обернена до матриці $(E - A)$.

2. Задавши в моделі вектор валового випуску продукції галузей X, можна визначити обсяг кінцевої продукції Y:

$$Y = (E - A)X. \tag{3.11}$$

3. Використовуючи системи рівнянь (3.10) і (3.11), за відомими елементами векторів X і Y знаходять решту елементів.

4. Матриця (3.10) дає інформацію про те, яким чином вектор кінцевого попиту Y перераховується в необхідний вектор валового випуску X. Позначимо $B = (E - A)^{-1}$. Коефіцієнти b_{ij} показують, скільки всього треба

виробити продукції *i*-ї галузі для випуску в сферу кінцевого використання одиниці продукції *j*-ї галузі. Тоді співвідношення (3.10) можна записати у вигляді рівняння

$$X = BY$$

або системи рівнянь

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.12}$$

На відміну від коефіцієнтів прямих витрат a_{ij}, коефіцієнти b_{ij} називають *коефіцієнтами повних матеріальних витрат*.

5. З огляду на лінійність моделі Леонтьєва (3.10) за X і $У$ можна казати про зв'язок між приростами ΔX і $\Delta У$:

$$\Delta X = (E - A)^{-1} \Delta Y. \tag{3.13}$$

Отже, матриця $(E - A)^{-1}$ дає можливість обчислити зміну валового випуску, спричинену зміною кінцевого споживання.

Умови продуктивності матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

Постановка задачі: знайти вектор валового випуску *X*, щоб в умовах наявної технології задовольнити кінцевий попит. Ця задача зводиться до розв'язання системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + y_n = x_n \end{cases} \tag{3.14}$$

відносно змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Умови існування та єдиності розв'язку такої системи відомі з алгебри.

Економічне значення розв'язку системи (3.14) полягає в необхідності сформулювати умови існування економічної системи, при яких вона здатна забезпечити додатний валовий і кінцевий випуск по всіх галузях. Це пов'язано з поняттям продуктивності матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат.

Матрицю матеріальних витрат *A* називають *продуктивною*, якщо існує такий невід'ємний вектор $X > 0$, для якого виконується умова

$$X > AX. \tag{3.15}$$

Ця умова означає, що якщо матриця A є продуктивною, то існує хоча б один режим роботи галузей (додатний вектор кінцевого продукту $Y > 0$), при якому кожного продукту випускається більше, ніж витрачається на його виробництво. Іншими словами, при цьому режимі сфера виробництва створює додатний вектор (стовпець) додаткового (кінцевого) продукту: $X - AX > 0$.

Модель Леонтьєва називають продуктивною, якщо система (3.14) має від'ємний розв'язок.

Умови продуктивності моделі Леонтьєва

Правильною є теорема про продуктивність моделі Леонтьєва.

Теорема. Для того щоб матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A була продуктивною, необхідно й достатньо, щоб виконувалася одна з таких умов:

1) для будь-якого стовпця $Y > 0$ існує, і причому рівно один, стовпець випуску $X > 0$, такий, що $X - AX = Y$;

2) стовпця випуску $X > 0$, сукупні витрати на створення якого задовольняють умові $AX \geq X$, не існує;

3) найбільше за модулем власне значення матриці A, тобто розв'язок характеристичного рівняння

$$|\lambda E - A| = 0,$$

задовольняє нерівності $\lambda_A = \lambda_{max} < 1$ (економічне пояснення: λ_A – корінь характеристичного рівняння $|\lambda E - A| = 0$ – оцінка рівня коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, отже, $(1 - \lambda_A)$ характеризує залишок після витрат, тобто продуктивність);

4) матриця $(E - A)$ – від'ємна обернена, тобто існує обернена матриця $(E - A)^{-1}$, таким чином, матриця $(E - A)^{-1}$ є невиродженою з визначником $det(E - A) \neq 0$;

5) матричний ряд $E + A + A^2 + A^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ збігається, причому його сума має вигляд $(E - A)^{-1} = B$;

6) усі головні мінори матриці $(E - A)$, тобто визначники матриць порядку $1, \ldots, n$, утворені елементами перших рядків і перших стовпців початкової матриці, є додатними $(M_k \geq 0, k = 1, \ldots, n)$ – умова Хокінса – Саймона.

Сформульовані в теоремі умови є рівносильними, тобто при виконанні хоча б однієї з умов виконуються й інші.

Коефіцієнти прямих і повних матеріальних витрат, зв'язок між ними, методи розрахунку

Сформуємо з величин x_{ij} матрицю $X = \left\| x_{ij} \right\|_{n \times n}$, або

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Таку матрицю називають матрицею міжгалузевих поставок (потоків).

Уведемо матрицю $B = (E - A)^{-1}$, що дає можливість обчислити зміну валового випуску, спричинену зміною кінцевого споживання, за формулою (3.13). Матрицю B називають *матрицею повних матеріальних витрат*.

Повні витрати – це сума прямих і непрямих витрат.

Прямі витрати – це засоби виробництва, витрачені безпосередньо при виготовленні продукту.

Непрямі витрати мають місце на попередніх стадіях виробництва й входять до виробництва не прямо, а через інші (проміжні) засоби виробництва.

Приклад 3.1. Розглянемо технологічний ланцюжок «руда – чавун – сталь – прокат». Витрати електроенергії при отриманні прокату зі сталі називатимемо прямими витратами, витрати електроенергії при отриманні сталі з чавуна – непрямими витратами 1-го порядку, при отриманні чавуна з руди – непрямими витратами 2-го порядку і т.д.

Визначити економічне значення матриці $B = (E – A)^{-1}$.

Розв'язання

Коефіцієнтом повних матеріальних витрат c_{ij} вважатимемо суму прямих витрат і непрямих витрат i-ї галузі для виробництва одиниці продукції j-ї галузі через всі проміжні продукти на всіх попередніх стадіях виробництва:

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \dots + a_{ij}^{(k)} + \dots, \tag{3.16}$$

де $a_{ij}^{(k)}$ – непрямі витрати продукції k-го порядку.

Якщо матрицю коефіцієнтів непрямих матеріальних витрат різних порядків позначити $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$, а матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат – $C = (c_{ij})$, то формула (3.16) набуде вигляду

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(k)} + \dots. \tag{3.17}$$

Виходячи зі змістовного значення коефіцієнтів непрямих матеріальних витрат можна записати ряд матричних співвідношень:

$$A^{(1)} = AA = A^2; A^{(2)} = AA^{(1)} = AA^2 = A^3; \ldots; \ A^{(k)} = AA^{(k-1)} = AA^k = A^{k+1}.$$

Тоді правильним є рівняння $C = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{(k+1)} + \ldots$.

Для визначення $B = (E - A)^{-1}$ використаємо твердження теореми про те, що матричний ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ збігається, причому його сума дорівнює $(E - A)^{-1}$, тобто має вигляд

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots.$$

Тоді вираз

$$B = E + C$$

можна записати в елементній формі

$$b_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & якщо\ i \neq j, \\ 1 + c_{ij}, & якщо\ i = j. \end{cases}$$

Цей зв'язок визначає економічне значення відмінності між коефіцієнтами матриць B і C: на відміну від коефіцієнтів матриці C, що враховують тільки витрати на виробництво продукції, коефіцієнти матриці B крім витрат містять також саму одиницю кінцевої продукції, що виходить за сферу виробництва.

Приклад 3.2. Розглянемо дві галузі промисловості: видобуток вугілля й виробництво сталі. Вугілля потрібне для виробництва сталі, і деяка кількість сталі у вигляді інструментів потрібна для видобутку вугілля. Припустимо, що умови такі: для виробництва 1 т сталі необхідно 3 т вугілля, а для видобутку 1 т вугілля – 0,1 т сталі.

Чистий випуск вугільної промисловості становить 200 000 т вугілля, а сталевої промисловості – 50 000 т сталі.

Визначити валовий випуск вугілля й сталі.

Розв'язання

1. Сформуємо таблицю прямих матеріальних витрат (матрицю A):

Галузь	Видобуток вугілля	Виробництво сталі
Видобуток вугілля	0	3
Виробництво сталі	0,1	0

2. Формалізуємо умову.

Задано:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 200000 \\ 50000 \end{pmatrix}.$$

Знайти X, B і заповнити таблицю МГБ (1-й і 2-й квадранти).

3. Валовий продукт визначаємо за формулою $X = BY$, де $B = (E - A)^{-1}$.

4. Знаходимо різницю між E та A:

$$(E-A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0{,}1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -0{,}1 & 1\end{pmatrix};$$

$$det\ (E-A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \neq 0.$$

Тоді $B = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix}1{,}43 & 4{,}29\\ 0{,}14 & 1{,}43\end{pmatrix}$, а $X = BY = \begin{pmatrix}500000\\ 100000\end{pmatrix}$.

5. Подамо 1-й і 2-й квадранти МГБ у вигляді таблиці:

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Кінцева продукція	Валова продукція X
	Видобуток вугілля	Виробництво сталі		
Видобуток вугілля	$a_{11}X_1 = 0 \cdot 500\ 000 = 0$	$a_{12}X_2 = 3 \cdot 100\ 000 =$ $= 300\ 000$	200 000	500 000
Виробництво сталі	$a_{21}X_1 = 0{,}1 \cdot 500\ 000 =$ $= 50\ 000$	$a_{22}X_2 = 0 \cdot 100\ 000 = 0$	50 000	100 000

Перевірка:

1) величина валового продукту видобутку вугілля:

$$0 + 300\ 000 + 200\ 000 = 500\ 000;$$

2) величина валового продукту виробництва сталі:

$$50\ 000 + 0 + 50\ 000 = 100\ 000.$$

3.4. Статична модель міжгалузевого балансу, розширена балансом праці

Розглянемо застосування міжгалузевого балансового методу для аналізу трудових ресурсів:

- визначення прямих і повних витрат праці на одиницю продукції;
- розроблення балансових продуктово-трудових моделей.

Початковою моделлю є звітний міжпродуктовий баланс в натуральному вираженні, який містить перший і другий квадранти схеми міжгалузевого балансу, де окремим стовпцем подано розподіл витрат живої праці (кількість працівників) у виробництві всіх видів продукції.

Розглянемо розрахункові формули моделі.

1. Валовий випуск визначають через кінцеву продукцію за формулою

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i = 1,2,...,n, \qquad (3.18)$$

де X і Y – вектори-стовпці.

Нехай L_i – середньорічна кількість працівників i-ї галузі, або витрати живої праці у виробництві i-го продукту. Тоді за аналогією з коефіцієнтами прямих матеріальних витрат прямі витрати праці на одиницю i-го виду продукції (коефіцієнт прямої трудомісткості) визначаються формулою

$$t_i = \frac{L_i}{X_i};\ i = \overline{1,n}, \qquad (3.19)$$

де $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – вектор-рядок коефіцієнтів прямої трудомісткості.

2. Знаючи коефіцієнти t, обчислюють сумарну потребу в трудових ресурсах, або величину сукупних витрат живої праці за всіма видами продукції:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} t_i X_i = tX. \tag{3.20}$$

Використовуючи (3.18), запишемо (3.20) у вигляді

$$L = \sum_{i=1}^{n} t_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i b_{ij} \right) Y_j .$$

Величина $t_i b_{ij}$ показує, яка кількість трудових ресурсів i-ї галузі потребується для того, щоб забезпечити i-ю продукцією випуск одиниці j-го кінцевого продукту.

Позначимо

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} t_i b_{ij}; \; j = \overline{1,n}, \tag{3.21}$$

або у векторній формі

$$T = tB = B^T t . \tag{3.22}$$

Тоді, підсумовуючи по всіх галузях, одержуємо

$$L = \sum_{j=1}^{n} T_j Y_j = TY , \tag{3.23}$$

де $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ – вектор-рядок.

Вектор $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ – це *коефіцієнти повних витрат праці* (*коефіцієнти повної трудомісткості)* на одиницю продукції j-го виду. Цей вектор показує, яка кількість трудових ресурсів усіх галузей потребується для виробництва одиниці j-го кінцевого продукту.

3. Формулу (3.22) можна отримати по-іншому. Нагадаємо, що A – прямі виробничі витрати, B – повні виробничі витрати.

Якщо обчислити повні витрати праці як суму прямих витрат живої праці $t_j \; (j = \overline{1,n})$ і витрат упредметненої праці $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i \; (j = \overline{1,n})$, перенесених на продукт через витрачені засоби виробництва, то

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j ; \; j = \overline{1,n}. \tag{3.24}$$

Доданки вигляду $a_{ij} T_i$ відображають витрати упредметненої праці, перенесеної на одиницю j-го продукту через i-й засіб виробництва; при цьому передбачається, що коефіцієнти прямих матеріальних витрат a_{ij} задано в натуральних одиницях.

Тоді з використанням матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A (в натуральному вираженні) систему рівнянь (3.24) можна записати в матричному вигляді:

$$T = TA + t. \qquad (3.25)$$

Виконаємо матричні перетворення з використанням одиничної матриці *E:*

$$T = T - TA = TE - TA = T(E - A). \qquad (3.26)$$

Тоді для вектора коефіцієнтів повної трудомісткості T отримаємо вираз

$$T = t(E - A)^{-1} = |\text{ відомо, що } B = (E - A)^{-1}| = tB. \qquad (3.27)$$

Тут вектор t перемножується на кожний стовпець матриці B.

4. Ураховуючи (3.20) і (3.23), одержуємо сукупні витрати живої праці

$$L = tX = TY, \qquad (3.28)$$

де t і T – вектори-рядки коефіцієнтів прямої та повної трудомісткості; X і Y – вектори-стовпці валової й кінцевої продукції.

Проаналізувавши наведені співвідношення, зробимо такі висновки:

1. Співвідношення $T = tB = B^T t$ (формули (3.22), (3.27)) є основною балансовою рівністю в теорії міжгалузевого балансу праці: вартість кінцевої продукції, оціненої за повними витратами праці, дорівнює сукупним витратам живої праці.

2. Значення поданої моделі полягає у виявленні співвідношення між витратами живої й упредметненої праці.

3. Схему міжгалузевого й міжпродуктового балансу витрат праці й використання трудових ресурсів можна подати у вигляді табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Міжгалузевий баланс витрат праці

<table>
<tr><td rowspan="3">Галузі-виробники</td><td colspan="5">Галузі-споживачі</td></tr>
<tr><td colspan="3">Міжгалузеві витрати упредметненої праці
$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} t_i ;\ j = \overline{1, n}$</td><td rowspan="2">Витрати праці на кінцеву продукцію
Yt</td><td rowspan="2">Витрати праці в галузях (трудові ресурси)
L</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1
2
3</td><td>$x_{11}t_1$
$x_{21}t_2$
$x_{31}t_3$</td><td>$x_{12}t_1$
$x_{22}t_2$
$x_{32}t_3$</td><td>$x_{13}t_1$
$x_{23}t_2$
$x_{33}t_3$</td><td>Y_1t_1
Y_2t_2
Y_3t_3</td><td>L_1
L_2
L_3</td></tr>
</table>

Схематично ці баланси будуються як МГБ, але всі показники в них (міжгалузеві зв’язки, кінцевий продукт, умовно чиста продукція тощо) виражаються в трудових одиницях. Для побудови цієї схеми помножимо рядки першого й другого квадрантів міжгалузевого матеріального балансу на відповідні коефіцієнти прямої трудомісткості.

3.5. Статична модель міжгалузевого балансу, розширена балансом основних виробничих фондів

Розглянемо застосування міжгалузевого балансового методу для аналізу основних виробничих фондів і ціни. Початковою моделлю є звітний міжпродуктовий баланс в натуральному вираженні.

Частину національного багатства становлять *основні виробничі фонди* – засоби праці, що функціонують у всіх галузях матеріального виробництва.

Основні виробничі фонди виконують різні функції: одні створюють умови для здійснення виробничого процесу, інші виконують транспортні функції, за допомогою третіх здійснюється виробничий процес.

Основні фонди зазвичай є основною питомою вагою в загальній сумі основного капіталу підприємства. Від їх кількості, вартості, технічного рівня, ефективності використання багато в чому залежать кінцеві результати діяльності підприємства: випуск продукції, її собівартість, прибуток, рентабельність, стійкість фінансового стану.

Узагальнена характеристика ефективності використання основних засобів має такі показники:

- *рентабельність* = прибуток / середньорічна вартість основних виробничих фондів;
- *фондовіддача* = (вартість виготовленої або реалізованої продукції – ПДВ – акцизи) / середньорічна вартість основних виробничих фондів;
- *фондомісткість* = 1 / показник фондовіддачі;
- *питомі капітальні вкладення* на грошову одиницю приросту продукції.

Розвитку основної моделі міжгалузевого балансу можна досягти шляхом включення в неї показників фондомісткості продукції: додається окремий рядок, у якому вказано у вартісному вираженні обсяги виробничих фондів Φ_j, що використовуються кожною j-ю галуззю.

Розглянемо розрахункові формули моделі.

1. Валове виробництво можна виразити через кінцеву продукцію:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i = 1,2,...,n, \tag{3.29}$$

де X і Y – вектори-стовпці валового й кінцевого продукту відповідно.

За аналогією з коефіцієнтами прямих і повних матеріальних витрат розглянемо коефіцієнти прямої та повної фондомісткості.

Нехай Φ_j – середньорічна кількість основних фондів, що використовуються кожною j-ю галуззю, або у вартісному вираженні обсяги виробничих фондів.

Коефіцієнти прямої фондомісткості продукції j-ї галузі (які показують величину виробничих фондів, безпосередньо зайнятих у виробництві цієї галузі, у розрахунку на одиницю її валової продукції):

$$f_j = \frac{\Phi_j}{X_j};\ j = \overline{1,n}, \quad (3.30)$$

де $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ – вектор-рядок.

2. Уведемо коефіцієнт повної фондомісткості F_j, який відображає обсяг фондів, необхідних у всіх галузях для випуску одиниці кінцевого продукту j-ї галузі. Якщо a_{ij} – коефіцієнт прямих матеріальних витрат, то для коефіцієнта *повної фондомісткості* виконується рівність, аналогічна рівності (3.24) для коефіцієнта повної трудомісткості:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i + f_j;\ j = \overline{1,n}. \quad (3.31)$$

3. Якщо ввести до розгляду вектор-рядок коефіцієнтів прямої фондомісткості $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ і повної фондомісткості $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$, то зв'язок між коефіцієнтами у векторній формі буде виражатися так:

$$F = FA + f; \quad (3.32)$$

$$f = F - FA = FE - FA = F(E - A); \quad (3.33)$$

$$F = f(E - A)^{-1}; \quad (3.34)$$

$$F = fB = B^T f; \quad (3.35)$$

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i;\ j = \overline{1,n}, \quad (3.36)$$

де $B = (E - A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат; A – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат.

4. Сумарна потреба в основних фондах при заданому обсягу валового виробництва:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i = fX; \quad (3.37)$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} F_j Y_j = FY. \quad (3.38)$$

Проаналізувавши наведені співвідношення, зробимо такі висновки:

1. Співвідношення (3.35) є *основною балансовою рівністю*.

2. Коефіцієнти фондомісткості за аналогією з коефіцієнтами повних матеріальних витрат можна розглядати як суму прямої й непрямої складових. Наприклад, для повної фондомісткості: якщо $B \approx (E + A + A^2 + ... + A^k + ...)$ і $F = fB$, то

$$F = f(E + A + A^2 + ... + A^k + ...) = f + f(A + A^2 + ... + A^k + ...).$$

Таким чином, f – пряма складова повної фондомісткості, а $f(A + A^2 + ... + A^k + ...)$ – її непряма складова.

Непряма складова повної фондомісткості (так само, як і повної трудомісткості) є порівняно невеликою в сировинних галузях і збільшується в «завершальних» галузях до 90–95 %.

3. Для більш глибокого аналізу необхідно диференціювати фонди на основні й оборотні, а в межах основних – на будівлі, споруди, виробниче устаткування, транспортні засоби тощо.

Приклад 3.3. Дані про економічну систему, що складається з трьох економічних об'єктів (P_1 – промисловість, P_2 – сільське господарство, P_3 – транспорт), наведено у вигляді таблиці:

Галузі	P_1	P_2	P_3	Сума	Кінцевий продукт Y	Валовий продукт X
P_1	20	50			200	300
P_2	10	0	40			500
P_3	0				240	
Сума				310		
Умовно чиста продукція Z		390				
Валовий продукт X	300	500				

Завершити складання балансу й розрахувати матрицю коефіцієнтів прямих і повних матеріальних витрат.

Розв'язання

1. У пусті комірки таблиці введемо змінні:

Галузі	P_1	P_2	P_3	Сума	Кінцевий продукт Y	Валовий продукт X
P_1	20	50	$x13$	$\sum_{j=1}^{3} x_{1j}$	200	300
P_2	10	0	40	$\sum_{j=1}^{3} x_{2j}$	Y_2	500
P_3	0	x_{32}	x_{33}	$\sum_{j=1}^{3} x_{3j}$	240	X_3
Сума	$\sum_{i=1}^{3} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i2}$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i3}$	310		
Умовно чиста продукція Z	Z_1	390	Z_3			
Валовий продукт X	300	500	X_3			

2. Використовуючи баланс між виробництвом і споживанням продукції P_1, знайдемо

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = X_1 - Y_1 = 300 - 200 = 100,\ x_{13} = \sum_{j=1}^{3} x_{1j} - (x_{11} + x_{12}) = 100 - (20 + 50) = 30.$$

3. Використовуючи баланс між виробництвом і споживанням продукції P_2, обчислимо

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 10 + 0 + 40 = 50,\ Y_2 = X_2 – X_{12} = 500 – 50 = 450.$$

4. Використовуючи співвідношення між елементами стовпця суми, знайдемо

$$\sum_{j=1}^{3} x_{3j} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} - \sum_{j=1}^{3} x_{1j} - \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 310 – (20 + 50 + 30) – (10 + 0 + 40) = 160.$$

5. Використовуючи баланс між виробництвом і споживанням продукції P_3, розрахуємо

$$X_3 = Y_3 + \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 240 + 160 = 400.$$

6. Обчислимо сумарні витрати всіх трьох галузей на виробництво продукції галузі P_1:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 20 + 10 + 0 = 30.$$

7. Використовуючи вартісну структуру продукції галузі P_1, знайдемо її умовно чисту продукцію

$$Z_1 = X_1 – \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 300 – 30 = 270.$$

8. Використовуючи співвідношення $\sum_{j=1}^{3} Z_j = \sum_{i=1}^{3} Y_i$, обчислимо

$$Z_3 = \sum_{i=1}^{3} Y_i - Z_1 – Z_2 = 200 + 450 + 240 – 270 –390 = 230.$$

9. Визначимо витрати на виробництво продукції галузей і P_3:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = X_2 – Z_2 = 500 – 390 = 110;\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = X_3 – Z_3 = 400 – 230 = 170.$$

10. Визначимо витрати галузі P_3 на виробництво продукції P_2 і власні виробничі потреби:

$$x_{32} = \sum_{i=1}^{3} x_{i2} – x_{12} – x_{22} = 110 – 50 – 0 = 60,$$

$$x_{33} = \sum_{i=1}^{3} x_{i3} – x_{13} – x_{23} = 170 – 30 – 40 = 100.$$

11. Результати обчислень занесемо в таблицю:

Галузі	P_1	P_2	P_3	Сума	Кінцевий продукт Y	Валовий продукт X
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	0	40	50	450	500
P_3	0	60	100	160	240	400
Сума	30	110	170	310		
Умовно чиста продукція Z	270	390	230			
Валовий продукт X	300	500	400			

12. Елементи матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат розрахуємо за формулою (3.6):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}066 & 0{,}1 & 0{,}075 \\ 0{,}033 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}12 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

13. Перевіримо умову існування оберненої матриці $(E - A)^{-1}$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}066 & 0{,}1 & 0{,}075 \\ 0{,}033 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}12 & 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}933 & -0{,}1 & -0{,}075 \\ -0{,}033 & 1 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}12 & 0{,}75 \end{pmatrix},$$

$$\det (E - A) = 0{,}685782 \neq 0.$$

14. Знаходимо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат $B = (E - A)^{-1}$:

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}0758 & 0{,}1224 & 0{,}1239 \\ 0{,}0364 & 1{,}0204 & 0{,}1397 \\ 0{,}0058 & 0{,}1632 & 1{,}3557 \end{pmatrix}.$$

Контрольні запитання

1. Призначення міжгалузевих моделей.
2. Поняття балансового методу й балансової моделі в економіці.
3. Характеристика міжгалузевого балансу.
4. Розрахункові формули статичної моделі міжгалузевого балансу.
5. Розрахункові формули статичної моделі міжгалузевого балансу, розширеної балансом праці.
6. Розрахункові формули статичної моделі міжгалузевого балансу, розширеної балансом основних виробничих фондів.

4. МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ СІТКОВОГО ПЛАНУВАННЯ Й УПРАВЛІННЯ

4.1. Призначення й області застосування сіткового планування й управління

Для ефективного планування складних економічних процесів застосовують *методи сіткового планування й управління (СПУ)*.

Об'єктами дослідження методами СПУ є великі народногосподарські комплекси, наукові дослідження, конструкторська й технологічна підготовка виробництва нових видів виробів, будівництво, реконструкція економічних об'єктів, капітальний ремонт основних фондів.

СПУ є сукупністю розрахункових методів, організаційних і контрольних заходів щодо планування й управління комплексом робіт [7, 15].

Система СПУ дає можливість:

- формувати календарний план реалізації комплексу робіт;
- виявляти резерви часу, трудові, матеріальні й вартісні ресурси;
- здійснювати управління комплексом робіт з прогнозуванням і попередженням можливих зривів під час робіт;
- підвищувати ефективність управління загалом унаслідок чіткого розподілення відповідальності між керівниками різних рівнів і виконавцями робіт.

Комплекс робіт (комплекс операцій, проект) – будь-яка задача, для виконання якої здійснюють різноманітні роботи, наприклад будівництво дому, складання літака.

Основні етапи СПУ:

1. Складання переліку робіт проекту, визначення їх логічних зв'язків і послідовності виконання, закріплення робіт за відповідальними виконавцями, оцінювання тривалості робіт.
2. Реалізація проекту у вигляді сіткового графіка.
3. Упорядкування сіткового графіка, розрахунок параметрів робіт, визначення резервів часу й критичного шляху.
4. Аналіз та оптимізація сіткового графіка.
5. Складання часового графіка реалізації проекту.

4.2. Сіткова модель, її основні елементи

Основою СПУ є сіткова модель.

Сітковою моделлю називають економіко-математичну модель, що для реалізації деякого проекту відображає комплекс робіт і подій, а також їх логічні й технологічні послідовності та зв'язки. Аналіз сіткової моделі, зображеної в графічній або табличній формі, дає можливість:

- чітко визначити взаємозв'язки етапів реалізації проекту;
- знайти оптимальний порядок виконання цих етапів (наприклад, для

скорочення термінів виконання всього комплексу робіт).

Методи сіткового моделювання належать до методів прийняття оптимальних рішень.

Математичний апарат сіткових моделей базується на теорії графів.

Граф – це сукупність двох скінченних множин: множини точок, які називають *вершинами*, і множини пар вершин, які називають *ребрами*. Якщо пари вершин є впорядкованими, тобто на кожному ребрі задано напрям, то *граф* називають *орієнтованим*, якщо ні – *неорієнтованим*. Послідовність ребер, що не повторюються й ведуть від однієї вершини до іншої, утворює *шлях. Граф* називають *зв'язним*, якщо для будь-яких двох його вершин існує шлях, що їх сполучає; якщо ж шляху не існує, то *граф* називають *незв'язним*. В економіці використовуються два види графів: дерево й сітка. *Деревом* є зв'язний граф без циклів, який має початкову вершину (корінь) і крайні вершини; шляхи від початкової вершини до крайніх вершин називають *гілками*.

Сітка – це орієнтований скінченний зв'язний граф, що має початкову вершину (джерело) і кінцеву вершину. Таким чином, сіткова модель – це граф вигляду «сітка».

Сіткову модель у графічному зображенні називають *сітковим графіком*. Характерною особливістю сіткової моделі є чітке визначення всіх часових взаємозв'язків майбутніх робіт. Головні елементи сіткової моделі – події і роботи.

Термін «робота» використовується в СПУ в широкому значенні:

- це дійсна робота – протяжний у часі процес проекту, який потребує витрат ресурсів (наприклад, складання виробу);
- це очікування – протяжний у часі процес, що не потребує витрат праці (наприклад, процес сушіння після фарбування);
- це фіктивна робота (залежність) – логічний зв'язок між двома або декількома роботами (подіями), що не потребують витрат праці, матеріальних ресурсів або часу; цей зв'язок указує на той факт, що можливість виконання однієї роботи безпосередньо залежить від результатів іншої; тривалість фіктивної роботи дорівнює нулю.

Подія – це момент завершення певного процесу, що відображає окремий етап виконання проекту. Подією може бути частковий результат окремої роботи або сумарний результат декількох робіт. Подія може здійснитися тільки тоді, коли закінчаться всі роботи, що їй передують. Наступні роботи можуть початися тільки тоді, коли подія здійснилася. Звідси двоїстий характер події: для всіх робіт, що їй безпосередньо передують, подія є кінцевою, а для всіх робіт, що виконуються безпосередньо за нею, – початковою. При цьому передбачається, що подія не має тривалості й відбувається миттєво [7].

У сітковій моделі виділяють такі події:

- початкова, що не має попередніх робіт і подій;
- завершальна, що не має подальших робіт і подій.

Події на сітковому графіку зображують кружками (вершинами графа), а роботи – стрілками (орієнтованими дугами), які вказують зв'язок між роботами. Під кодом (*i,j*) розуміють роботу, що зв'язує *i*-ту подію з *j*-ю подією (рис. 4.1).

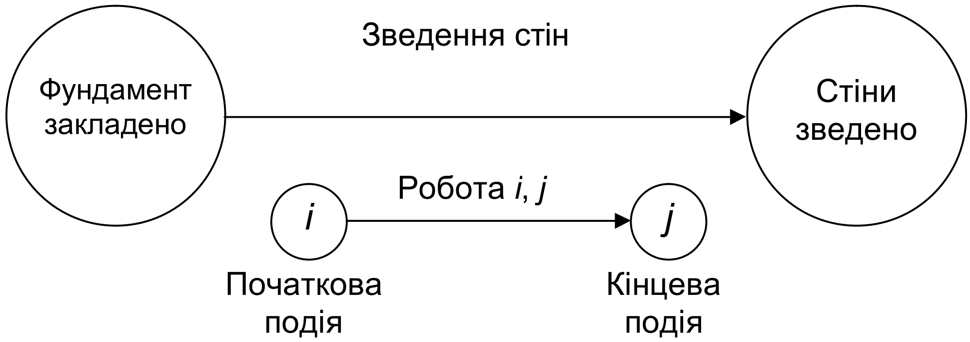


Рис. 4.1

4.3. Порядок і правила побудови сіткових графіків

Сіткові графіки будують на початковому етапі планування за такими правилами:

1) не повинно бути завислих подій (тобто подій, що не мають попередніх подій, окрім початкової);

2) не повинно бути тупикових подій (тобто подій, що не мають подальших подій, окрім завершальної);

3) не повинно бути циклів (рис. 4.2);

4) будь-які дві події мають бути безпосередньо зв'язані не більше ніж однією роботою-стрілкою; при зображенні робіт, що виконуються паралельно, уводять фіктивну подію й фіктивну роботу, при цьому одна з паралельних робіт замикається на цю фіктивну подію; фіктивну роботу зображують пунктирною лінією (рис. 4.3);

5) мають бути одна початкова й одна завершальна подія, інакше слід уводити фіктивні події й роботи;

6) події й роботи нумерують, причому номер початкової події має бути меншим за номер завершальної події.

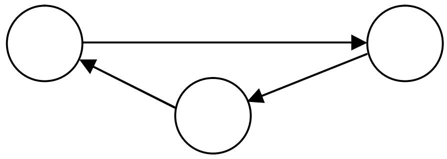


Рис. 4.2

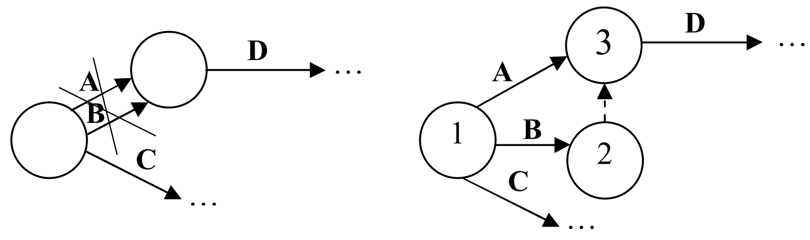


Рис. 4.3

Розглянемо етапи побудови сіткового графіка:

1) вибрати початкову подію (якій не передують ніякі роботи) і завершальну (після якої не виконуються ніякі роботи);

2) помістити початкову подію в ліву частину графіка, а завершальну – у праву, розташувавши між ними проміжні події в деякому порядку, що відповідає їх номерам; події зв'язати роботами-стрілками відповідно до переліку робіт;

3) упорядкувати побудований сітковий графік.

Упорядкування сіткового графіку полягає в такому розміщенні подій і робіт, при якому для будь-якої роботи подія, що їй передує, розміщена ліворуч і має менший номер порівняно з подією, що завершує цю роботу. Отже, на впорядкованому сітковому графіку всі стрілки дуги роботи напрямлені зліва направо, тобто від подій з меншими номерами до подій з більшими номерами.

Послідовність упорядкування:

- сітковий графік умовно розбивають на декілька вертикальних шарів (їх обводять пунктирними лініями й позначають римськими цифрами);
- у шарі І розміщають початкову подію;
- викреслюють з графіка цю подію й усі роботи-стрілки, що виходять з неї, і тоді без вхідних стрілок залишаться події, що утворюють шар ІІ;
- викресливши ці події й усі роботи, що з них виходять, визначають події без вхідних стрілок – ці події утворюють шар ІІІ;
- продовжуючи процедуру викреслювання, одержують решту шарів;
- при необхідності змінюють нумерацію подій відповідно до їх розташування на графіку й одержують упорядкований сітковий графік, у якому над стрілками вказують тривалість відповідних робіт (наприклад, у днях) [10].

Приклад 4.1. Побудувати сіткову модель програми опиту громадської думки. Задано перелік робіт і терміни їх виконання: розроблення анкет (*A*; 1 день); роздрукування анкет (*B*; 0,5 дня); приймання персоналу на роботу (*C*; 2 дні); навчання персоналу (*D*; 2 дні); вибір опитуваних осіб (*E*; 2 дні); розсилання анкет (*F*; 1 день); аналіз отриманих даних (*G*; 5 днів).

Розв'язання

В умові задачі задано зміст робіт, але не вказано взаємозв'язків між ними. Необхідно проаналізувати значення кожної роботи і з'ясувати, які роботи їй безпосередньо передують.

Початковою роботою є приймання персоналу на роботу (*C*), оскільки решта робіт повинна виконуватися вже прийнятими на роботу співробітниками.

Перед проведенням опитування громадської думки необхідно навчити персонал (*D*). Перш ніж розіслати анкети (*F*), їх треба розробити (*A*), роздрукувати (*B*) і вибрати опитуваних осіб (*E*), причому роботу з анкетами (*A*) і вибір осіб (*E*) можна виконувати одночасно. Завершальною роботою проекту є аналіз отриманих даних (*G*), який не можна виконати без попереднього розсилання анкет (*F*).

Побудуємо сіткову модель і пронумеруємо події моделі (рис. 4.4).

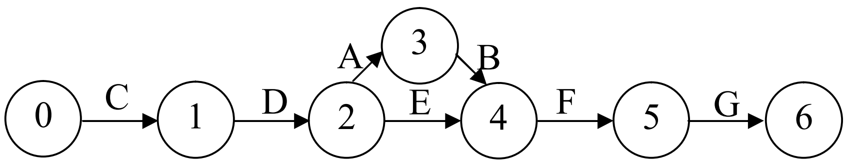


Рис. 4.4

У процесі впорядковування немає необхідності.

Приклад 4.2. Під час розроблення деякого проекту виділено 12 подій і 24 роботи, що їх зв'язують: (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (3, 10), (4, 8), (5, 8), (5, 7), (6, 10), (7, 6), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (9, 11), (10, 9) (10, 11). Необхідно побудувати й упорядкувати сітковий графік.

Розв'язання

1. Будуючи графік, початкову подію 0 розміщуємо у лівій частині сіткового графіка, а подію 11 – у правій. Решту подій розташовуємо між ними і зв'язуємо роботами-стрілками (рис. 4.5).

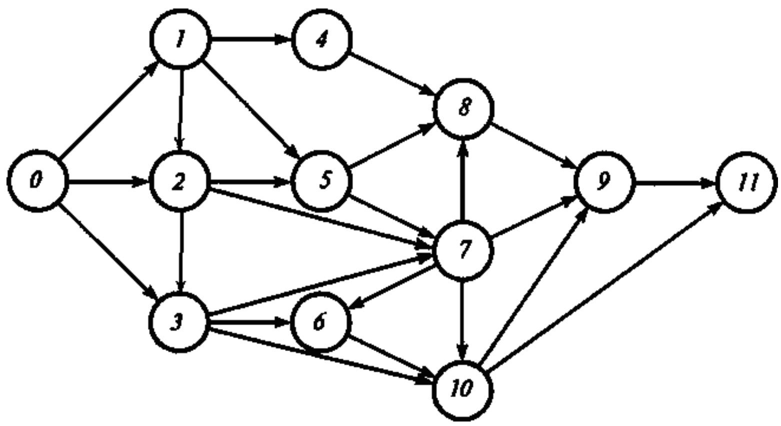


Рис. 4.5

2. Щоб упорядкувати сітковий графік, виконаємо такі дії:

- графік умовно розбиваємо на декілька вертикальних шарів (їх обводимо пунктирними лініями й позначаємо римськими цифрами);

- у шарі I розміщаємо початкову подію 0 (рис. 4.6);

- викреслюємо з графіка цю подію й усі роботи-стрілки, що виходять із неї, тоді без вхідних стрілок залишиться подія 1, що буде утворювати шар II;

- викресливши подію 1 і всі роботи, що виходять із неї, визначаємо події без вхідних стрілок, події 4 і 2 утворюють шар III;

- продовжуючи процедуру викреслювання, одержуємо решту шарів: шар IV з подіями 5 і 3, шар V з подією 7, шар VI з подіями 8 і 6, шар VII з подією 10, шар VIII з подією 9 і шар IX з подією 11;

- первинна нумерація подій не є правильною: подія 6 розташовується в шарі VI і має номер, менший, ніж номер події 7 із попереднього шару, подія 9 із шару VIII має номер, менший, ніж номер події 10 із шару VII; змінимо нумерацію подій відповідно до їх розташування на графіку (рис. 4.6) та отримаємо впорядкований сітковий графік (рис. 4.7), у якому над стрілками вкажемо тривалість робіт (у днях).

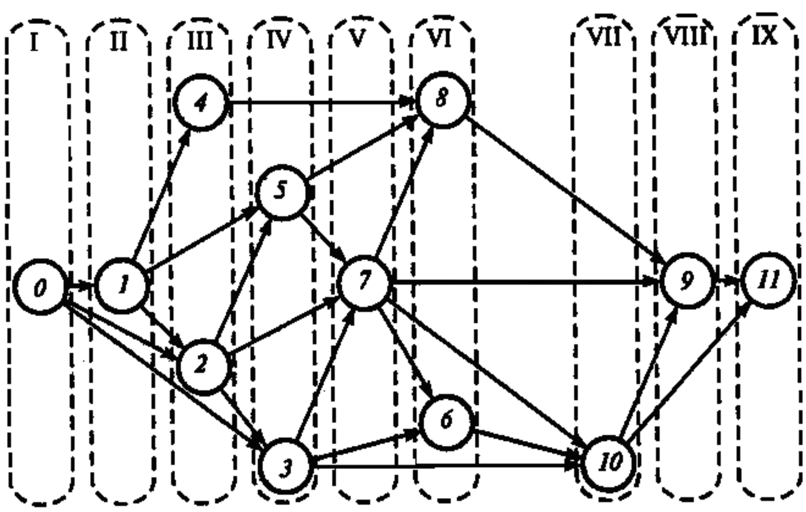


Рис. 4.6

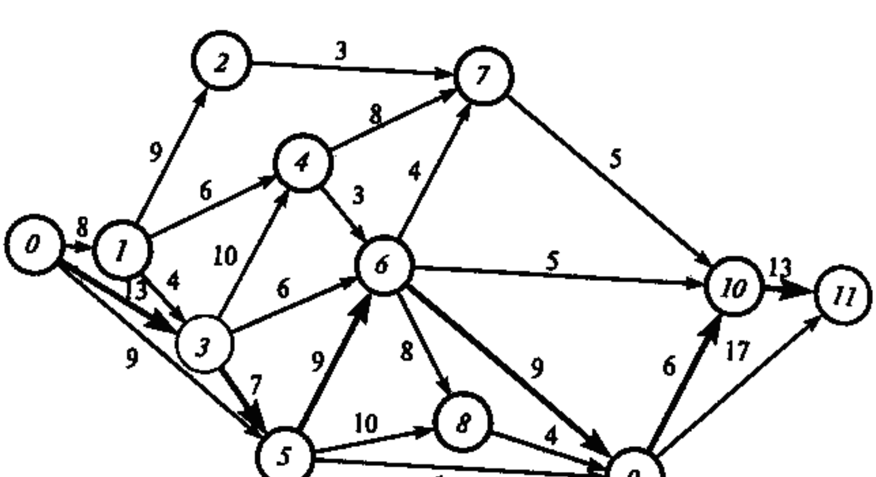


Рис. 4.7

4.4. Поняття шляху

Шлях – будь-яка послідовність робіт, у якій кінцева подія кожної роботи збігається з початковою подією роботи, що виконується після неї.

Повний шлях L – будь-який шлях, початок якого збігається з початковою подією, а кінець – із завершальною.

Критичний шлях – найдовший повний шлях на сітковому графіку. Роботи й події, розташовані на критичному шляху, називають *критичними*.

Критичні роботи визначають загальний цикл завершення всього комплексу робіт, що плануються за допомогою сіткового графіка. Для зменшення тривалості проекту необхідно, в першу чергу, зменшувати тривалість робіт, розташованих на критичному шляху.

Метод критичного шляху дає можливість отримати таку інформацію:

1) загальна тривалість виконання проекту;

2) розділення усіх процесів проекту на критичні й некритичні.

Наприклад, для сіткового графіка, зображеного на рис. 4.7, повними шляхами будуть:

- шлях 0>1>2>7>10>11 тривалістю 8+9+3+5+13 = 38 днів;
- шлях 0>1>3>4>6>10>11 тривалістю 8+4+10+3+5+13 = 43 дні;
- шлях 0>5>8>9>11 тривалістю 9+10+4+17 = 40 днів;
- шлях 0>3>5>9>10>11 тривалістю 13+7+9+13+6+13 = 61 день і т.д.

Останній шлях має найбільшу тривалість і є критичним.

Лінійна діаграма проекту

Класичний вигляд сіткового графіка – це сітка, накреслена без масштабу часу. Тому невеликі проекти після впорядковування сіткового графіка доповнюють лінійною діаграмою проекту (або графіком прив’язки, або часовою діаграмою).

По осі OX відкладають час (у днях), по осі OY – кількість робіт. Кожну роботу зображують відрізком, паралельним до осі часу, причому довжина його дорівнює тривалості цієї роботи. Фіктивну роботу з нульовою тривалістю зображують точкою. Події *i* і *j*, початок і кінець роботи (*i*, *j*) розташовують відповідно на початку й кінці відрізка. Відрізки розташовують один над одним, знизу вверх у порядку збільшення індексу *i*, а при одному й тому ж *i* – у порядку збільшення індексу *j*.

На рис. 4.8 показано лінійну діаграму для сіткового графіка, зображеного на рис. 4.7.

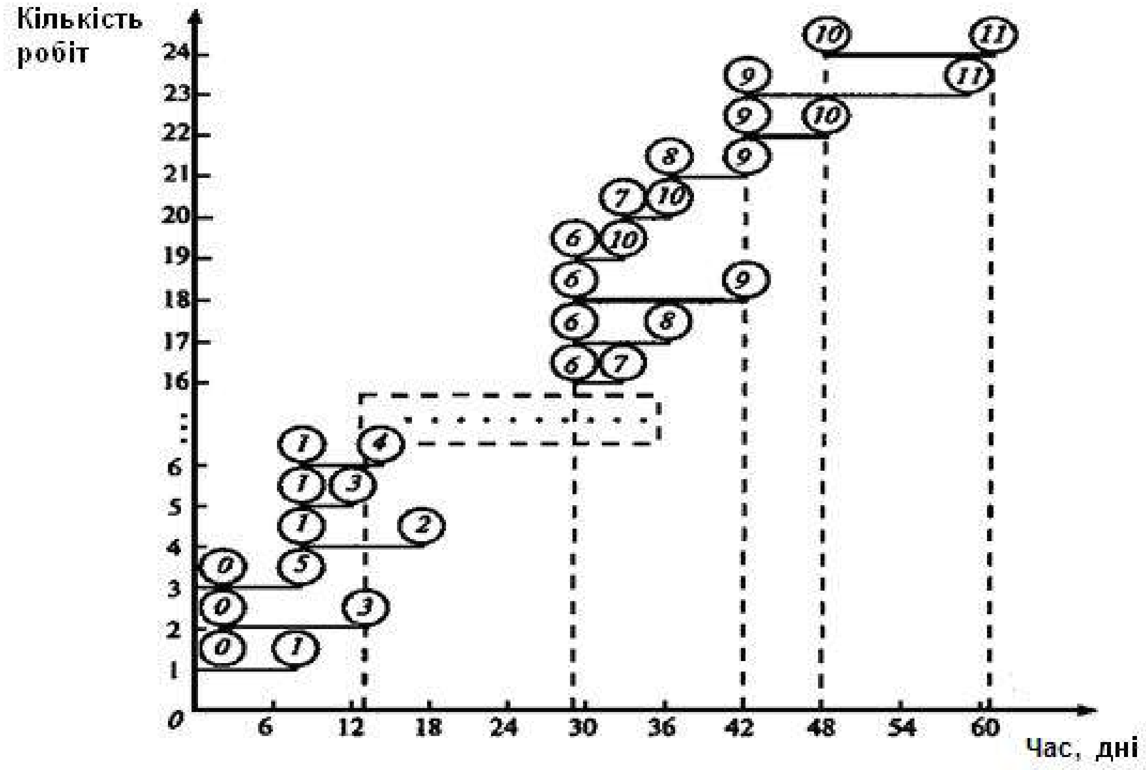


Рис. 4.8

За лінійною діаграмою можна визначити довжину критичного шляху (кінець усіх відрізків на осі ОХ) і резерви часу всіх робіт [8].

4.5. Розрахунок параметрів сіткових графіків, визначення резервів часу та критичного шляху

Календарне планування полягає у визначенні моментів початку й завершення кожної роботи та інших часових характеристик сіткового графіка. Це дає можливість проаналізувати сіткову модель, виявити критичні роботи, які безпосередньо визначають термін виконання проекту, провести оптимізацію використання ресурсів (часових, фінансових, ресурсу виконавців).

Часові параметри сіткової моделі (табл. 4.1) зображують у вигляді, показаному на рис. 4.9.

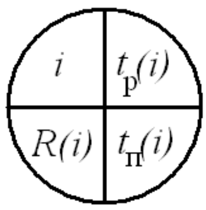


Рис. 4.9

Таблиця 4.1

Основні часові параметри сіткової моделі

Елемент сітки	Найменування параметра	Позначення й розрахунок параметра
Подія *i*	Ранній строк здійснення події	$t_p(j) = \max\limits_{(i,j)}[t_p(i) + t(i,j)]$
	Пізній строк здійснення події	$t_п(i) = \min\limits_{(i,j)}[t_п(j) - t(i,j)]$
	Резерв часу події	$R(i) = t_п(i) - t_p(i)$
Робота *(i, j)*	Тривалість роботи	$t(i,j)$
	Ранній строк початку роботи	$t_{р.п}(i, j) = t_р(i)$
	Ранній строк завершення роботи	$t_{р.з}(i, j) = t_р(i, j) + t(i, j)$
	Пізній строк початку роботи	$t_{п.п}(i, j) = t_п(j) - t(i, j)$
	Пізній строк завершення роботи	$t_{п.з}(i, j) = t_п(j)$,
	Повний резерв часу роботи	$R(L) = t_{кр} - t(L)$
Шлях *L*	Тривалість шляху	$t(L)$
	Тривалість критичного шляху	$t_{кр}$
	Резерв часу шляху	$R(L)$

Розглянемо зміст і розрахунок зазначених параметрів.

Параметри подій

Ранній строк $t_р(i)$ здійснення *i*-ї події – найраніший можливий час настання події *i*, що визначається максимальною величиною суми раннього строку настання попередньої *i*-ї події й тривалості роботи, що зв'язує ці події:

$$t_р(j) = \max_{(i,j)} [t_р(i) + t(i,j)] , i < j,$$

причому $t_р(0) = 0$ і $t_р(N) = t_{кр}(L)$.

Для визначення $t_р$ переміщуємося по сітці зліва направо.

Пізній строк $t_п(i)$ здійснення *i*-ї події – найпізніший допустимий час здійснення події *i*, що визначається мінімальною величиною різниці між пізнім строком здійснення наступної *j*-ї події й тривалістю роботи, що зв'язує ці події:

$$t_п(i) = \min_{(i,j)}[t_п(j) - t(i,j)].$$

Для визначення $t_п$ переміщуємося по сітці справа наліво.

Резерв часу події показує, на який допустимий період часу можна затримати настання цієї події, не спричинивши при цьому збільшення терміну виконання комплексу робіт. Резерв часу *R(i)* *i*-ї події визначається як різниця між пізнім і раннім строками її здійснення:

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i).$$

Критичні події резервів часу не мають, оскільки будь-яка затримка здійснення події, розташованої на критичному шляху, приводить до такої самої затримки здійснення завершальної події.

Довжина критичного шляху визначається раннім строком настання завершальної події сітки, його топологія – подіями з нульовими резервами часу. Якщо сітковий графік має один критичний шлях, то він проходить через усі критичні події, тобто події з нульовими резервами часу. Якщо критичних шляхів кілька, то виконують аналіз усіх критичних робіт [8].

Параметри робіт

Ранній строк $t_{р.п}\ (i,\ j)$ початку роботи *(i, j)* збігається з раннім строком настання початкової (що їй передує) події *i*:

$$t_{р.п}\ (i,\ j) = t_р\ (i).$$

Ранній строк $t_{р.з}\ (i,\ j)$ завершення роботи *(i, j)* визначають за формулою

$$t_{р.з}(i,\ j) = t_р(i,\ j) + t(i,\ j).$$

Жодна робота не може завершитися пізніше за допустимий пізній строк своєї завершальної події *і*, тому пізній строк $t_{п.з}(i,\ j)$ завершення роботи *(i, j)* визначається співвідношенням

$$t_{п.з}(i,\ j) = t_п(j),$$

а пізній строк $t_{п.п}(i,\ j)$ початку роботи –

$$t_{п.п}(i,\ j) = t_п(j) – t(i,\ j).$$

Резерв часу шляху *R(L)* визначається як різниця між довжиною критичного шляху й довжиною шляху, що розглядається. Такі резерви часу мають усі некритичні шляхи:

$$R(L) = t_{кр} – t(L).$$

Резерв часу показує, наскільки можна збільшити тривалість усіх робіт, розташованих на цьому шляху. Якщо час виконання робіт, розташованих на цьому шляху, збільшити на якусь величину, більшу за *R(L),* то критичний шлях переміститься на відстань *L*. Будь-яка з робіт, розташованих на відрізку шляху *L*, що не збігається з критичним (розташованим між двома подіями критичного шляху), має резерв часу.

Існує чотири різновиди резерву часу.

Повний резерв часу $R_п(i,j)$ *роботи (i,j)* показує, наскільки можна збільшити час виконання роботи за умови, що термін виконання комплексу робіт не змінюється:

$$R_п(i,j) = t_п(j) – t_р(i) – t(i,j).$$

Повний резерв часу роботи дорівнює резерву шляху з максимальною тривалістю, який проходить через цю роботу. Цим резервом можна розпоряджатися при виконанні певної роботи в припущенні, що її початкова подія відбудеться в найраніший строк, а завершальна – в її найпізніший строк. Повний резерв часу належить не тільки цій роботі, але й усім повним шляхам, що проходять через неї.

Власний резерв часу першого роду R_1 роботи (i,j) є частиною повного резерву часу, на яку можна збільшити тривалість роботи, не змінивши при цьому пізнього строку її початкової події. Цим резервом можна розпоряджатися при виконанні певної роботи в припущенні, що її початкова й завершальна події здійснюються в найпізніші строки:

$$R_1(i,j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i,j).$$

$$R_1(i,j) = R_п(i,j) - R(i).$$

Власний резерв часу другого роду, або вільний резерв часу $R_в$ роботи (i,j) (у деяких джерелах не має назви), є частиною повного резерву часу, на яку можна збільшити тривалість роботи, не змінивши при цьому раннього строку здійснення її завершальної події. Цим резервом можна розпоряджатися при виконанні певної роботи в припущенні, що її початкова й завершальна події здійснюються в найраніші строки:

$$R_в(i,j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i,j).$$

$$R_в(i,j) = R_п(i,j) - R(j).$$

Незалежний резерв часу $R_н$ роботи (i,j) (у деяких джерелах має назву вільного) є частиною повного резерву часу для випадку, коли всі попередні роботи завершуються в пізні строки, а всі подальші роботи починаються в ранні строки:

$$R_н(i,j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i,j).$$

$$R_н(i,j) = R_п(i,j) - R(i).$$

Використання незалежного резерву часу не впливає на величину резервів часу інших робіт. Незалежні резерви використовують тоді, коли завершення попередньої роботи відбулося в пізній допустимий строк, а подальші роботи планують виконати в ранні строки. Якщо величина незалежного резерву $R_н(i,j)$ дорівнює 0 або є додатною, то така можливість існує. Якщо ж величина $R_н(i,j)$ є від'ємною, то цієї можливості немає, оскільки попередня робота ще не завершилася, а наступна вже повинна початися.

Таким чином, можна зробити такі висновки:

1. Якщо власний резерв часу першого роду може бути використаний на збільшення тривалості певної роботи й подальших робіт без витрат резерву часу попередніх робіт, а вільний резерв часу – на збільшення тривалості цієї та попередніх робіт без порушення резерву часу наступних робіт, то незалежний резерв часу може бути використаний для збільшення тривалості тільки цієї роботи.

2. Роботи, розташовані на критичному шляху, так само, як і критичні події, резервів часу не мають.

3. Якщо на критичному шляху розташована початкова подія *i*, то

$$R_{п}(i,j) = R_{1}(i,j).$$

4. Якщо на критичному шляху розташована завершальна подія j, то

$$R_{п}(i,j) = R_{в}(i,j).$$

5. Якщо на критичному шляху розташовані початкова й завершальна події i і j, то

$$R_{п}(i,j) = R_{1}(i,j) = R_{в}(i,j) = R_{н}(i,j).$$

6. Співвідношення пп. 3–5 можна використовувати для перевірки розрахунків резервів часу окремих робіт.

У випадку простих сіткових графіків результати розрахунку їхніх часових параметрів можна фіксувати на графіку. Параметри подій записують у кругах, поділених на чотири частини, а параметри робіт – над відповідними стрілками, як показано на рис. 4.10.

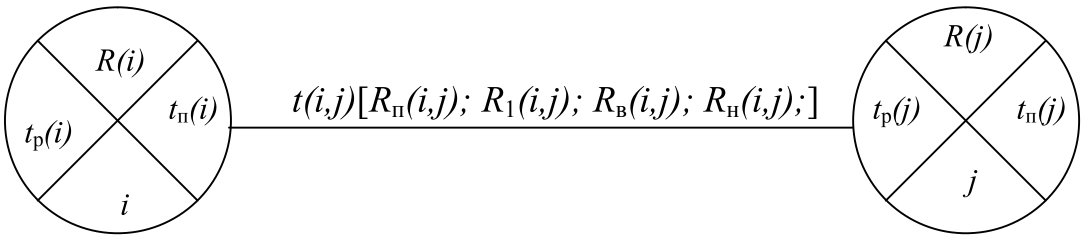


Рис. 4.10

Приклад 4.3. Побудувати сітковий графік проекту, що містить процеси, позначені латинськими буквами від А до Н, з урахуванням відношень передування (табл. 4.2). Визначити часові параметри подій і критичний шлях для сіткового графіка проекту.

Таблиця 4.2

Інформація про роботи

Робота	Попередня робота	Тривалість, дні
A	-	5
B	-	6
C	A	3
D	A	8
E	B, C	2
F	B, C	11
G	D, E	12
H	D	1

Розв'язання

На рис. 4.11 і 4.12 показано сітку, яка являє собою взаємозв'язок подій і робіт проекту. Номери вершин збільшуються в напрямку виконання проекту. Фіктивну роботу (3,4) уведено для того, щоб забезпечити паралельність робіт G і H.

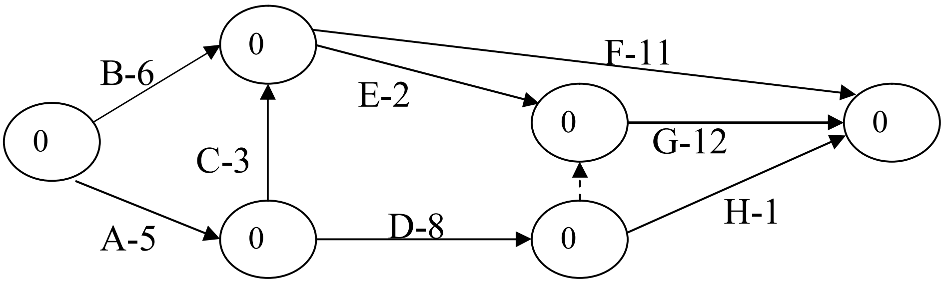


Рис. 4.11

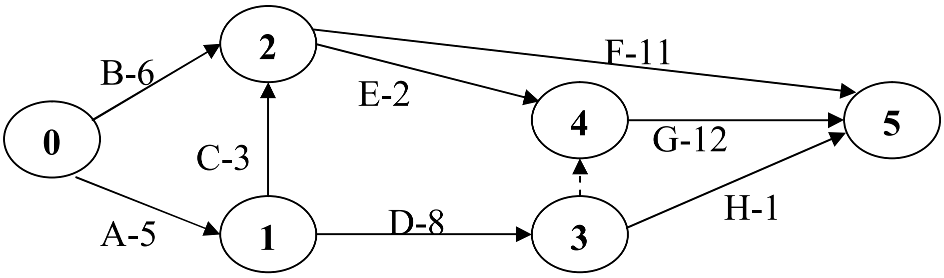


Рис. 4.12

Знайдені часові параметри подій зведемо в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Часові параметри задачі

Номер події	Строки здійснення події, дні		Резерв часу R(i), дні
	Ранній $t_р(i)$	Пізній $t_п(i)$	
0	$t_р(0) = 0$	$t_п(0) = \min[t_п(1) - t(0,1); t_п(2) - t(0,2)] = \min[5-5; 11-6] = \min[0; 5] = 0$	$t_п(0) - t_р(0) = 0 - 0 = 0$
1	$t_р(1) = t_р(0) + t(0,1) = 0 + 5 = 5$	$t_п(1) = \min[t_п(3) - t(1,3); t_п(2) - t(1,2)] = \min[13-8; 11-3] = \min[5; 8] = 5$	$t_п(1) - t_р(1) = 5 - 5 = 0$
2	$t_р(2) = \max[t_р(0) + t(0,2); t_р(1) + t(1,2)] = \max[0+6; 5+3] = \max[6; 8] = 8$	$t_п(2) = \min[t_п(5) - t(2,5); t_п(4) - t(2,4)] = \min[25-11; 13-2] = \min[14; 11] = 11$	$t_п(2) - t_р(2) = 11 - 8 = 3$
3	$t_р(3) = t_р(1) + t(1,3) = 5 + 8 = 13$	$t_п(3) = \min[t_п(5) - t(3,5); t_п(4) - t(3,4)] = \min[25-1; 13-0] = \min[24; 13] = 13$	$t_п(3) - t_р(3) = 13 - 13 = 0$
4	$t_р(4) = \max[t_р(2) + t(2,4); t_р(3) + t(3,4)] = \max[8+2; 13+0] = \max[10; 13] = 13$	$t_п(4) = t_п(5) - t(4,5) = 25 - 12 = 13$	$t_п(4) - t_р(4) = 13 - 13 = 0$
5	$t_р(5) = \max[t_р(3) + t(3,5); t_р(4) + t(4,5); t_р(2) + t(2,5)] = \max[13+1; 13+12; 8+11] = \max[14; 25; 19] = 25$	$t_п(5) = 25$	$t_п(5) - t_р(5) = 25 - 25 = 0$

Пояснення до заповнення табл. 4.3:

1. При визначенні ранніх строків здійснення подій $t_р(i)$ переміщуємося по сітці зліва направо. Для нульової події $i = 0$ очевидно, що $t_р(0) = 0$.

2. Для визначення пізніх строків здійснення подій $t_п(i)$ переміщуємося по сітці справа наліво. Для завершальної події $i = 5$ пізній строк здійснення події має дорівнювати його ранньому строку (інакше зміниться довжина критичного шляху): $t_п(5) = t_р(5) = 25$ (днів).

3. Ненульові резерви часу означають, що здійснення події може бути затримане на цю величину без збільшення загального терміну виконання проекту.

4. Події, що не мають резервів часу (0, 1, 3, 4, 5), утворюють критичний шлях [8].

4.6. Коефіцієнт напруженості роботи. Аналіз та оптимізація сіткового графіка

Після визначення критичного шляху й резервів часу робіт проводять всебічний аналіз сіткового графіка і вживають заходи щодо його оптимізації. Цей етап розкриває основну ідею СПУ і полягає в узгодженні сіткового графіка із заданими термінами й можливостями організації, що розроблює проект.

Аналіз та оптимізація календарних сіток, у яких задано оцінки тривалості робіт:

1) аналіз топології сітки, що складається з контролю побудови сіткового графіка, визначення доцільності вибору робіт, ступеня їх деталізації;

2) класифікація й групування робіт за величинами резервів.

Ступінь складності виконання в заданий термін роботи, розташованої на некритичному шляху, визначають за допомогою коефіцієнта напруженості роботи.

Коефіцієнт напруженості $К_н$ роботи (i,j) – це відношення тривалості відрізків шляху (розташованих між одними й тими ж подіями), які не збігаються, одним з яких є шлях максимальної тривалості, що проходить через цю роботу, а іншим – критичний шлях:

$$K_{\text{н}}(i,j) = \frac{t(L_{max}) - t'_{\text{кр}}}{t_{\text{кр}} - t'_{\text{кр}}} = 1 - \frac{R_{\text{п}}(i,j)}{t_{\text{кр}} - t'_{\text{кр}}},$$

де $t(L_{max})$ – тривалість максимального шляху, що проходить через роботу *(i, j)*; $t_{кр}$ – тривалість (довжина) критичного шляху; $t'_{кр}$ – тривалість відрізка шляху, який збігається з критичним шляхом; $R_п$ *(i,j)* – повний резерв часу роботи *(i, j)*.

Коефіцієнт може змінюватися в межах від 0 (для робіт, у яких відрізки максимального зі шляхів, що не збігаються з критичним шляхом, складаються з фіктивних робіт нульової тривалості) до 1 (для робіт, розташованих на критичному шляху).

Чим більше коефіцієнт наближається до 1, тим складніше виконати роботу в задані терміни, чим більше до 0, тим більший відносний резерв має максимальний шлях, що проходить через цю роботу.

Залежно від величини $K_н$ виділяють *три зони* робіт:

- $K_н(i,j) > 0,8$ – *критична*;
- $0,6 \le K_н(i,j) \le 0,8$ – *підкритична*;
- $K_н(i,j) < 0,6$ – *резервна*.

Оптимізація сіткового графіка

Оптимізація сіткового графіка – це процес поліпшення організації виконання комплексу робіт з урахуванням терміну його виконання, що проводиться з метою зменшення довжини критичного шляху, вирівнювання коефіцієнтів напруженості робіт, раціонального використання ресурсів.

Шляхи зменшення тривалості критичних робіт:

1) перерозподіл усіх видів ресурсів (часових, трудових, матеріальних, енергетичних) у зони з напруженими роботами;

2) зниження трудомісткості критичних робіт унаслідок передачі частини робіт на інші шляхи, що мають резерви часу;

3) паралельне виконання робіт на критичному шляху;

4) змінення топології сітки, тобто складу робіт і структури сітки.

4.7. Сіткове планування в умовах невизначеності

Тривалість виконання робіт часто важко задати точно: система СПУ зазвичай застосовується для складних нових проектів.

На практиці замість одного числа (детермінованої оцінки) задають дві оцінки: мінімальну й максимальну. Мінімальна (оптимістична) оцінка $t_{min}(i,j)$ характеризує тривалість виконання роботи у найсприятливіших умовах, а максимальна (песимістична) $t_{max}(i,j)$ – у найнесприятливіших. Тривалість роботи при цьому є випадковою величиною, яка після реалізації роботи може набути будь-якого значення в заданому інтервалі. Такі оцінки називають ймовірними (випадковими), і їх очікуване значення $t_{оч}(i,j)$ оцінюється за формулою (при бета-розподілі густини ймовірності):

$$t_{оч}(i,j) = \frac{(3t_{min}(i,j) + 2t_{max}(i,j))}{5}.$$

Для характеристики ступеня розкиду можливих значень навколо очікуваного рівня використовується показник дисперсії S^2:

$$S^2(i,j) = \frac{(t_{max}(i,j) - t_{min}(i,j))^2}{5^2} = 0,04(t_{max}(i,j) - t_{min}(i,j))^2.$$

При ймовірнісному заданні тривалості робіт розв’язують такі задачі:

1. Розрахунок середніх значень характеристик сіткової моделі. При достатньо великій кількості робіт можна стверджувати (а при малому – припускати), що загальна тривалість будь-якого шляху, у тому числі й критичного, має нормальний закон розподілу з середнім значенням, що дорівнює сумі середніх значень тривалості робіт, з яких він складається, і дисперсією, що дорівнює сумі дисперсій цих самих робіт.

2. Визначення ймовірності того, що тривалість критичного шляху $t_{кр}(i,j)$ не перевищить заданого директивного часу T. Цю задачу можна розв'язати на основі інтеграла ймовірності Лапласа $Ф(z)$ за формулою

$$P(t_{кр}<T) = 0,5 + 0,5\,Ф(z),$$

де z – нормоване відхилення випадкової величини:

$$z = (T - t_{кр}) / S_{кр}.$$

Тут $S_{кр}$ – середнє квадратичне відхилення, що визначається як корінь квадратний із дисперсії тривалості критичного шляху.

Існують таблиці зв'язку z та інтеграла.

3. Визначення максимального терміну виконання всього комплексу робіт T при заданому рівні ймовірності p за формулою

$$T = t_{оч}(L_{кр}) + zS_{кр}.$$

Контрольні запитання

1. Призначення й області застосування сіткового планування й управління.
2. Сіткова модель, її основні елементи.
3. Порядок і правила побудови сіткових графіків.
4. Поняття шляху. Повний шлях. Критичний шлях і критичні роботи.
5. Побудова часової діаграми проекту.
6. Розрахунок параметрів подій.
7. Розрахунок параметрів робіт.
8. Розрахунок резервів часу й критичного шляху.
9. Коефіцієнт напруженості роботи.
10. Аналіз та оптимізація сіткового графіка.
11. Сіткове планування в умовах невизначеності.

5. МОДЕЛІ КОРПОРАТИВНИХ РІШЕНЬ В УПРАВЛІННІ Й ЕКОНОМІЦІ

5.1. Задачі про прийняття рішень в економіці

Багато соціально-економічних ситуацій, у яких розглядається питання вибору рішення, мають таку властивість, що в цих ситуаціях стикаються різні інтереси двох або більше сторін. Учасники ситуації можуть об'єднуватися в групи, беручи на себе деякі зобов'язання перед іншими учасниками і координуючи свої дії. Управлінське рішення, прийняте одночасно декількома учасниками, називають *кооперативним*, або *коаліційним*.

Корпоративні рішення мають велике значення для розвитку економіки держави й усього світу.

Математичний апарат, призначений для розв’язання задач про вибір корпоративних рішень, які влаштовують усіх учасників, складається з лінійного програмування, виробничих функції, моделей споживання, теорії ігор, методів міжгалузевого балансу.

Під час прийняття рішення можливі кілька варіантів рішень, тому можна вважати, що прийняття рішення полягає у виборі якнайкращого з цих варіантів.

Особа, що приймає рішення (ОПР), – це якийсь реально існуючий індивідуум (або група), якого не влаштовує стан справ або перспектива їх майбутнього стану і який має повноваження діяти так, щоб цей стан змінився. Прикладом ОПР є відповідальна особа (директор, бухгалтер, комерсант, завідувач секції, менеджер компанії, продавець) або група осіб (комісія, рада директорів, бригада).

Умови прийняття рішень

Якість вибраного рішення залежить від якості даних, що використовуються під час описування ситуації, у якій приймається рішення. Процес прийняття рішення реалізується в таких умовах:

1. В *умовах визначеності* дані відомо точно (є достовірно визначеними), а теоретичні й практичні висновки мають однозначний характер. Приклади математичних методів: моделі лінійного програмування, модель Леонтьєва, сіткове планування.

2. В *умовах ризику* дані можна описати за допомогою розподілів ймовірності, ОПР може визначити не тільки всі можливі результати прийняття рішення, але й імовірність їх появи (проміжний випадок між пунктами 1 і 3). Задачі розв'язуються в умовах, які не залежать від дій сторін, і формуються під впливом багатьох чинників (загального стану економіки, фінансової системи (курсу валют, рівня інфляції), політичних криз і т.д.). Приклади математичних методів: моделі ймовірності, динамічне програмування.

3. *Умови невизначеності:*

- невизначеність поведінки конкурентів на ринку;
- невідомо ймовірності станів навколишнього середовища задачі, що розв'язується, даним не можна приписати відносну вагу (вагові коефіцієнти), яка б являла собою ступінь їх значущості в процесі прийняття рішень (дані є невизначеними, тобто їх важко або неможливо класифікувати за ступенем значущості для прийняття рішення);
- невизначеність мети задачі, коли показник ефективності рішення, що приймається, характеризується лише одним числом і не завжди відображає повну картину.

Задачі про прийняття рішення в умовах економічної невизначеності – це задачі теорії ігор в економіці [15].

5.2. Задачі теорії ігор в економіці

У *теорії ігор* розглядаються ситуації, у яких деякі супротивники ставлять цілі й приймають рішення для їх досягнення.

Задачею теорії ігор є вироблення рекомендацій щодо найдоцільнішої поведінки учасників.

Теорію ігор було розроблено 1944 р.: учені Дж. фон Нейман і О. Моргенштерн у роботі «Теорія ігор і економічна поведінка» математично сформулювали концепцію теорії як засіб для розв'язання задач конкурентної економіки.

Розглядають два типи супротивників:

1. У разі, коли між сторонами (учасниками) немає антагонізму (наприклад, у процесі роботи підприємств і торгових посередників), ситуації називають іграми з природою. Тут перша сторона приймає рішення, а друга сторона – як природа – не чинить першій стороні свідомої агресивної протидії, але її реальна поведінка є невідомою.

Стани природи – це стани, можливі реалізації яких є випадковими подіями з деякою ймовірністю. Як приклад станів природи можна розглядати погодні умови.

2. При прийнятті рішень в умовах невизначеності в грі можуть брати участь два або більше розумних супротивника, які мають конфліктуючі (протилежні) цілі, і кожний з них прагне оптимізувати свої рішення за рахунок інших [13].

5.3. Основні поняття гри з природою

Розглядають три класи моделей прийняття рішень.

1. В *умовах визначеності* – один стан природи.

Наприклад**,** знання, що піде дощ, потребує прийняття рішення «Узяти парасольку». Аналіз прийняття цього рішення подамо у вигляді таблиці:

Рішення	Стан природи: дощ (витрати ОПР)
Узяти парасольку	0
Не брати парасольки	-7 (витрати на чищення або сушіння одягу, тобто програш)

Отже, оптимальне рішення – «Узяти парасольку».

2. В *умовах ризику* – декілька станів природи, імовірність настання яких є відомою.

3. В *умовах невизначеності* – декілька станів природи, імовірність настання яких є невідомою. В умовах невизначеності розв’язуються більшість економічних задач.

В іграх супротивників необхідно визначити *альтернативні дії (стратегії)*, яким відповідають платежі, що залежать від випадкових подій (станів природи).

Матрицю платежів у задачі прийняття рішення з m можливими діями і n станами природи можна зобразити таким чином:

$$A = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \hline A_1 & v(A_1,S_1) & v(A_1,S_2) & \dots & v(A_1,S_n) \\ A_2 & v(A_2,S_1) & v(A_2,S_2) & \dots & v(A_2,S_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & v(A_m,S_1) & v(A_m,S_2) & \dots & v(A_m,S_n) \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

Тут A_i – i-те можливе рішення (альтернативна дія, стратегія); S_j – j-й стан природи; $v(A_i,S_j) = a_{ij}$ – платня або дохід, зв'язаний з рішенням A_i і станом S_j.

Нехай торгове підприємство має m стратегій ($A_1, A_2,..,A_m$) і існує n можливих станів природи ($S_1, S_2,..., S_n$). Оскільки природа не є зацікавленою стороною, результат будь-якого поєднання поведінки сторін можна оцінити як виграш $v(A_i,S_j) = a_{ij}$ першої сторони для кожної пари стратегій A_i і S_j. Усі показники гри задано матрицею платежів A.

За цією матрицею можна прийняти кілька рішень. Наприклад, можна оцінити можливі результати:

- мінімальний виграш

$$\alpha_i^{min} = \min_{j=1,...,n} a_{ij},$$

тобто найменша з величин у кожному i-му рядку як песимістична оцінка;

- максимальний виграш вибору i-го варіанта

$$\alpha_i^{max} = \max_{j=1,...,n} a_{ij}.$$

В іграх з природою вводиться показник, що має назву «*ризик*», за яким оцінюють, наскільки той чи інший стан природи впливає на результат ситуації. Ризик r_{ij} при використанні стратегії A_i і стані природи S_j оцінюється як різниця максимально можливого виграшу при цьому стані природи α_j^{max} і виграшу a_{ij}:

$$r_{ij} = \alpha_j^{max} - a_{ij}.$$

Виходячи з цього можна оцінити максимальний ризик кожного рішення:

$$r_i^{max} = \max_j r_{ij}.$$

Рішення можуть прийматися за результатами аналізу ряду критеріїв.

5.4. Прийняття рішень в умовах ризику

Розглянемо вибір оптимальної стратегії в грі з природою при відомому розподілі її станів. У цьому випадку альтернативні рішення описуються розподілом імовірності, тому рішення, що приймається, ґрунтується на використанні *критерію очікуваного значення* при відомій імовірності стану природи. Відповідно до критерію альтернативні рішення порівнюють між собою з огляду на максимізацію очікуваного (середнього) прибутку або мінімізацію очікуваних витрат. Передбачається, що прибуток й витрати, пов'язані з кожним альтернативним рішенням, є випадковими величинами.

Сформулюємо *критерій очікуваного значення* для задачі прийняття рішення в умовах ризику при n станах природи і m альтернативах: якщо q_j – відома ймовірність j-го стану природи (наприклад, попиту за даними аналізу за минулі роки), a_{ij} – платіж, пов'язаний із прийняттям рішення i при стані природи j (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n), то *показник ефективності (раціональності, обґрунтованості) стратегії A_i*, або *очікуваний платіж для вибору стратегії A_i*, обчислюється як середній виграш (математичне сподівання) цієї стратегії:

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n, \; i = 1, 2, ..., m, \qquad (5.1)$$

де $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Для оптимальної стратегії показник ефективності має максимальне або мінімальне значення

$$V^* = \max_{i=1,2,...,m}(V_i) \text{ або } V^* = \min_{i=1,2,...,m}(V_i) \quad (5.2)$$

залежно від того, платіж у задачі є доходом (прибутком) чи збитком (витратами).

Розглядають два способи розв’язання задачі залежно від складності розрахунку:

- табличний;
- дерево рішень.

Дерево рішень створюється для використання в моделях, у яких приймається послідовність рішень, кожне з яких веде до деякого результату (виходу моделі). Програма TreePlan під керуванням MS Excel будує такі рішення.

Вузол рішень, що позначається квадратом, у програмі TreePlan має назву decision node й відповідає точці, у якій приймається рішення. Кожна лінія, що виходить з квадрата відповідає якомусь рішенню.

Вузол подій, що *позначається* кружком, у програмі TreePlan має назву event node й відповідає ситуації, у якій вихід моделі є невизначеним.

Лінії, що виходять з кружків, являють собою відповідні виходи моделі. *Гілки* (у програмі TreePlan – branches) позначають лініями, що з’єднують вузли будь-яких типів.

Приклад 5.1. Клієнт хоче вкласти на фондовій біржі 10 000 грош. од. в акції однієї з двох компаній – А і В.

Акції компанії А є ризикованими, але можуть принести 50 % прибутку від суми інвестицій протягом наступного року. Якщо умови біржі будуть несприятливими, то сума інвестицій може зменшитися на 20 %.

Акції компанії В є безпечними і можуть принести 15 % прибутку в умовах підвищення котирувань на біржі і лише 5 % – в умовах зниження котирувань.

Усі аналітичні публікації з імовірністю 60 % прогнозують підвищення котирувань і з імовірністю 40 % – зниження.

У яку компанію слід вкласти гроші?

Розв’язання

1. Подамо інформацію у вигляді матриці платежів:

Рішення	Стани природи	
	Підвищення котирувань	Зниження котирувань
Акції компанії А	5 000,0	-2 000,0
Акції компанії В	1 500,0	500,0

2. Задачу та значення матриці доходів зобразимо у вигляді дерева рішень (рис. 5.1)

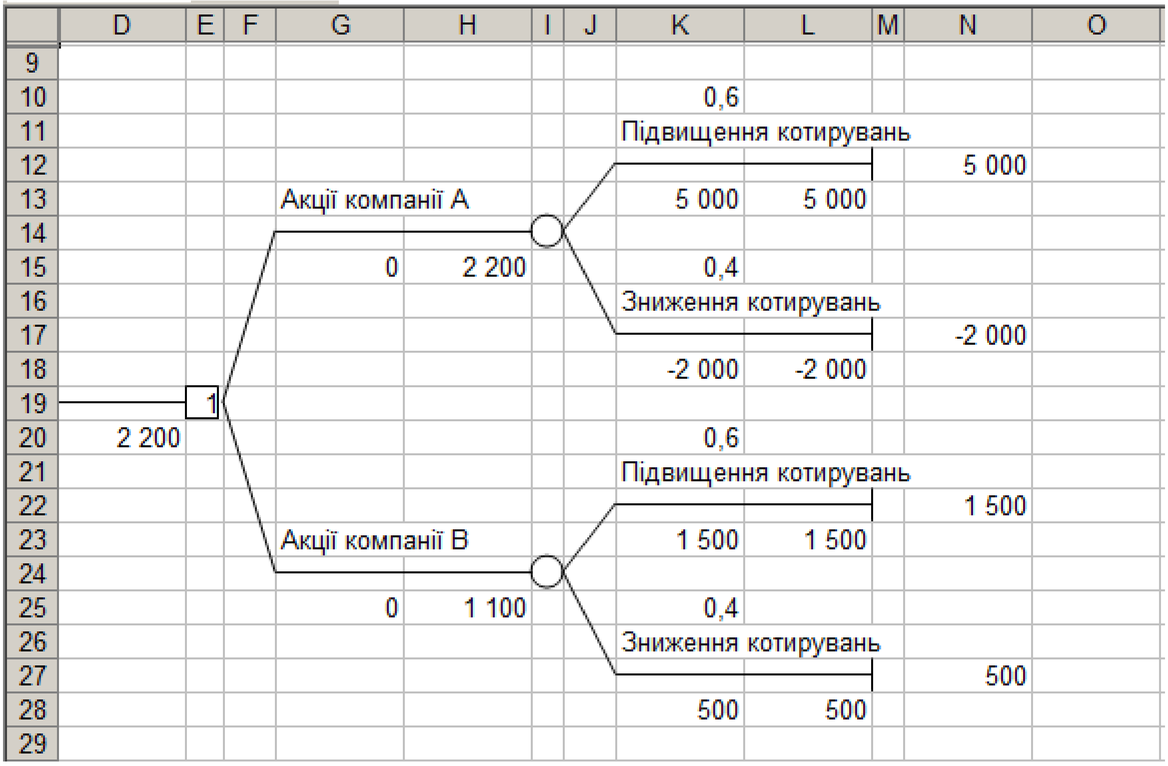


Рис. 5.1

3. Визначимо очікуваний прибуток за рік для кожної з двох альтернатив:
- для акцій компанії А: 5000 · 0,6 + (-2000) · 0,4 = 2200 грош. од.;
- для акцій компанії В: 1500 · 0,6 + 500 · 0,4 = 1100 грош. од.

Отже, купуємо акції компанії А.

5.5. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Відмінність між прийняттям рішення в умовах ризику і невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності розподіл імовірності станів природи S_j *(j = 1, 2, …, n)* або є невідомим, або його неможливо визначити.

Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності мають такі *особливості* [15]:

1) стани природи є невідомими, але можна зробити припущення про ймовірність q_j *(j = 1, 2, ..., n)* їх виявлення;

2) природа не враховує помилок вибору альтернатив A_i *(i = 1, 2,..., m)*.

Під час прийняття будь-якого рішення в умовах невизначеності завжди існує елемент суб'єктивності, що в діловій сфері в принципі є неприпустимим. Недостатність інформації зумовила розвиток критеріїв для аналізу ситуації, пов'язаної з прийняттям рішення.

Розглянемо варіанти вибору рішень при різній інформації про стани природи.

Критерій Лапласа

Якщо застосовується критерій Лапласа, то умова невизначеності інтерпретується як припущення про однакову ймовірність появи всіх можливих станів природи. Існує оптимістичне припущення – оскільки ймовірності станів $q(S_j)$ є невідомими, то немає причин уважати їх різними:

$$q(S_1) = q(S_2) = \dots = q(S_n) = \frac{1}{n} = const.$$

Якщо при цьому a_{ij} являє собою прибуток, то найкращим розв'язком задачі є

$$V^* = \max_{i=1,2,\dots,m}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right).$$

Якщо величина a_{ij} являє собою витрати ОПР, то найкращим розв'язком задачі є

$$V^* = \min_{i=1,2,\dots,m}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right).$$

Якщо немає впевненості в тому, що ймовірність станів однакова, то можливим є ранжирування ймовірності: $q_1 > q_2 > \dots > q_n$.

Якщо ймовірність здійснення однієї або декількох подій значно більше інших, то критерій не може бути використаний [12].

Максимінний (мінімаксний) критерій Вальда

Максимінний (мінімаксний) критерій Вальда вибору стратегії є консервативним і реалізує песимістичний підхід до прийняття рішень. Критерій Вальда ґрунтується на обережній поведінці ОПР. При використанні цього критерію для кожного розв'язку визначаються найбільші втрати.

Якщо a_{ij} являє собою прибуток, то найкращим розв'язком задачі є

$$V^* = \max_{i=1,2,\dots,m}\left\{\min_{j=1,2,\dots,n}(a_{ij})\right\}. \quad (5.3)$$

Якщо величина a_{ij} являє собою витрати ОПР, то найкращим розв'язком задачі є

$$V^* = \min_{i=1,2,\dots,m}\left\{\max_{j=1,2,\dots,n}(a_{ij})\right\}. \quad (5.4)$$

Максимінний критерій часто використовується в ситуаціях, коли ОПР (наприклад, менеджер) не може допустити одержання найгіршого результату: планування оборонних заходів, ситуації в медицині, банківські операції.

Приклад 5.2. Розглянемо приклад неприйнятного розв'язку задачі, отриманого на основі мінімаксного критерію. Нехай матриця платежів має вигляд такої таблиці:

Рішення	*Стан природи*								
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	100	100	2	100	100	100	100	100	100
2	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Платежі рішень 1 і 2 сильно відрізняються один від одного.

Розв'язання

1. Згідно з максимінним критерієм

$$V^* = \max_{i=1,2}\left\{\min_{j=1,2,\dots,9}(a_{ij})\right\} = \max_{i=1,2}\{2,\ 5\} = 5\,.$$

2. Оптимальним є друге рішення, але очевидним переважним є перше рішення.

Таким чином, прийняття рішення в умовах невизначеності залежить від цілей і переваг ОПР.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа

Критерій мінімаксного ризику Севіджа дає можливість уникнути дуже великого ризику в будь-яких умовах, пом'якшити консерватизм критерію Вальда шляхом заміни матриці платежів (виграшів або програшів) a_{ij} матрицею витрат, яка складається з ризиків $r(A_i, S_j) = r_{ij}$, що визначаються такими формулами:

- якщо a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, …, n)$ – прибуток, то від максимального значення кожного стовпця віднімаємо кожне значення цього стовпця:

$$r_{ij} = \max_{i=1,2,\dots,m}(a_{ij}) - a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n); \tag{5.5}$$

- якщо a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, …, n)$ – витрати, то від кожного значення стовпця віднімаємо мінімальне значення цього стовпця:

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_{i=1,2,\dots,m}(a_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n). \tag{5.6}$$

Для будь-кого a_{ij} (прибуток або витрати) найкращим розв'язком задачі є

$$V^* = \min_{i=1,2,\dots,m}\left\{\max_{j=1,2,\dots,n}(r_{ij})\right\}. \tag{5.7}$$

У цьому випадку ризик має мінімальне значення в найсприятливішій ситуації.

Критерій оптимізму-песимізму Гурвіца

Критерію Гурвіца дотримуються для забезпечення компромісу, що враховує можливість як найгіршої, так і найкращої поведінки природи. Цей критерій ще називають критерієм оптимізму-песимізму.

Якщо a_{ij} являє собою прибуток, то для деякого показника $0 \le \alpha \le 1$ найкращим розв'язком задачі є

$$V^* = \max_{i=1,2,\dots,m} \left\{ \alpha \max_{j=1,2,\dots,n} (a_{ij}) + (1-\alpha) \min_{j=1,2,\dots,n} (a_{ij}) \right\}. \tag{5.8}$$

Якщо a_{ij} являє собою витрати ОПР, то для деякого показника найкращим розв'язком задачі є

$$V^* = \min_{i=1,2,\dots,m} \left\{ \alpha \min_{j=1,2,\dots,n} (a_{ij}) + (1-\alpha) \max_{j=1,2,\dots,n} (a_{ij}) \right\}. \tag{5.9}$$

Параметр α – показник оптимізму. Якщо $\alpha = 0$, то критерій Гурвіца стає консервативним і одержуємо критерій Вальда. Якщо $\alpha = 1$, то критерій Гурвіца стає дуже оптимістичним, оскільки при цьому розраховують на найкращі з найкращих умов. Зазвичай вибирають $\alpha = 0,5$ або $\alpha = 0,25$.

Комплексний аналіз задачі про вибір рішення за допомогою всіх наведених критеріїв дає можливість оцінити наслідки рішень, що приймаються [12].

Приклад 5.3. У планованій військовій операції передбачається нанесення авіаційного удару по деякому об'єкту. Можливими є чотири стратегії:

- A_1 – нанесення удару з півночі;
- A_2 – нанесення удару зі сходу;
- A_3 – нанесення удару з півдня;
- A_4 – нанесення удару із заходу.

Ефективність дій авіації A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ залежить від станів природи S_j $(j = 1, 2, 3)$ і їх імовірностей q_j $(j = 1, 2, 3)$:

- S_1 – ясно з імовірністю q_1;
- S_2 – похмуро з імовірністю q_2;
- S_3 – туман, дощ з імовірністю q_3.

Кожна стратегія дає результат, ефективність якого наведено в таблиці

Дії (гравець *A*)	Стратегії природи (гравець *S*)		
	S_1	S_2	S_3
A_1	0,32	0,4	0,25
A_2	0,6	0,7	0,4
A_3	0,8	0,6	0,2
A_4	0,65	0,25	0,3

Забезпечити найбільший можливий виграш у найгірших умовах з урахуванням імовірності виявлення станів природи.

Розв'язання

1. Критерій очікуваного значення (задача в умовах ризику).

Припустимо, що ймовірність відомо: $q_1 = 0,6$; $q_2 = 0,3$; $q_3 = 0,1$. Тоді кожна стратегія оцінюється як сума добутків:

$$V_1 = 0,6 \cdot 0,32 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,25 = 0,37;$$
$$V_2 = 0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,61;$$
$$V_3 = 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,65 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,8;$$
$$V_4 = 0,6 \cdot 0,65 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,495.$$

Відповідь: з отриманих значень $V_1 – V_4$ вибираємо максимальне $V^* = V(A_3) = 0,8$, яке вказує на необхідність вибору стратегії A_3.

2. Критерій Лапласа. Імовірність є невідомою, але є дані про їхні відносні значення.

2.1. Припустимо, що всі стратегії є рівноймовірними, тобто $q_j = 1/3 = const\ (j = 1, 2, 3)$. Тоді маємо:

$$V_1 = (0,32 + 0,4 + 0,25) / 3 = 0,323;$$
$$V_2 = (0,6 + 0,7 + 0,4) / 3 = 0,567;$$
$$V_3 = (0,8 + 0,6 + 0,2) / 3 = 0,53;$$
$$V_4 = (0,65 + 0,25 + 0,3) / 3 = 0,4.$$

Відповідь: оптимальною є стратегія A_2.

2.2. Імовірність ранжується в ряд за величинами: $q_1 > q_2 > q_3$. Нехай імовірність виявлення станів природи збільшується в два рази. Тоді для $q_1 > q_2 > q_3$ можна записати

$$\begin{cases} q_1 = 4x, \\ q_2 = 2x, \\ q_3 = x. \end{cases}$$

Ураховуючи, що утворюється повна група ймовірностей ($q_1 + q_2 + q_3 = 1$), знайдемо їхні значення:

$$4x + 2x + x = 1,\ 7x = 1,\ x = \frac{1}{7},$$

тоді

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{4}{7}, \\ q_2 = \dfrac{2}{7}, \\ q_3 = \dfrac{1}{7}. \end{cases}$$

Визначимо оцінки стратегій:

$V_1 = (4/7) \cdot 0,32 + (2/7) \cdot 0,4 + (1/7) \cdot 0,25 = 0,332;$
$V_2 = (4/7) \cdot 0,6 + (2/7) \cdot 0,7 + (1/7) \cdot 0,4 = 0,600;$
$V_3 = (4/7) \cdot 0,8 + (2/7) \cdot 0,65 + (1/7) \cdot 0,2 = 0,672;$
$V_4 = (4/7) \cdot 0,65 + (2/7) \cdot 0,25 + (1/7) \cdot 0,3 = 0,485$.

Відповідь: вибираємо стратегію A_3.

3. Максимінний критерій Вальда. Використовуємо початкову матрицю вартостей

	S_1	S_2	S_3	*Мінімум у рядку*
A_1	0,32	0,4	0,25	0,25
A_2	0,6	0,7	0,4	$0,4 < -$*максимін*
A_3	0,8	0,65	0,2	0,2
A_4	0,65	0,25	0,3	0,25

Відповідь: вибираємо стратегію A_2.

4. Критерій Севіджа. Віднімаємо від максимального значення кожного стовпця елементи стовпців від 1-го по 3-й відповідно:

- максимум у 1-му стовпці – 0,8;
- максимум у 2-му стовпці – 0,7;
- максимум у 3-му стовпці – 0,4.

Отже, маємо матрицю витрат

	S_1	S_2	S_3	*Максимум у рядку*
A_1	$0,8-0,32=0,48$	0,3	0,15	0,48
A_2	$0,8-0,6=0,2$	0	0	$0,2 < -$*найменше*
A_3	$0,8-0,8=0$	0,05	0,2	$0,2 < -$*найменше*
A_4	$0,8-0,65=0,15$	0,45	0,1	0,45

Відповідь: вибираємо стратегію A_2 або A_3.

5. Критерій Гурвіца. Перерахуємо початкову таблицю, використовуючи формулу $V^* = \max\limits_{i=1,2,3,4} \left\{ \alpha \max\limits_{j=1,2,3}(a_{ij}) + (1-\alpha)\min\limits_{j=1,2,3}(a_{ij}) \right\}$:

Альтернатива	*Мінімум у рядку*	*Максимум у рядку*	α(*максимум рядка*) $+$ $+(1-\alpha)$(*мінімум рядка*)
A_1	0,25	0,4	$0,4\alpha + (1-\alpha) \cdot 0,25 = 0,15\alpha + 0,25$
A_2	0,4	0,7	$0,3\alpha + 0,4$
A_3	0,2	0,8	$0,6\alpha + 0,2$
A_4	0,25	0,65	$0,4\alpha + 0,25$

При $\alpha = 0,5$ маємо

$$V_1 = 0{,}325;\ V_2 = 0{,}55;\ V_3 = 0{,}5;\ V_4 = 0{,}45.$$

При $\alpha = 0,25$ маємо

$$V_1 = 0{,}2875;\ V_2 = 0{,}475;\ V_3 = 0{,}35;\ V_4 = 0{,}35.$$

Відповідь: при $\alpha = 0,5$ вибираємо стратегію A_2; при $\alpha = 0,25$ вибираємо стратегію A_2.

Контрольні запитання

1. Математичний апарат задач прийняття рішень в економіці.
2. Характеристика ОПР – особи, що приймає рішення.
3. Умови прийняття рішень.
4. Задачі теорії ігор в економіці.
5. Поняття матриці платежів. Оцінювання результатів прийняття рішень.
6. Прийняття рішень в умовах ризику. Поняття критерію очікуваного рішення.
7. Дерево рішень.
8. Прийняття рішень в умовах невизначеності.
9. Критерії Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца.

6. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІГРОВОМУ КОНФЛІКТІ

6.1. Концепція ігрового конфлікту

Розглянемо інший тип учасників гри – супротивників у конфліктній ситуації, або розумних супротивників. Дамо характеристику такої гри.

Конфліктна ситуація виникає внаслідок дій різних сторін з незбіжними (протилежними) інтересами. У цьому випадку результат заходів, що проводяться кожною із сторін, залежить від дій конкурента.

Приклади конфліктних ситуацій в економіці:

- рекламування конкуруючих товарів;
- планування виробничих стратегій конкуруючих підприємств;
- взаємовідносини між постачальником і споживачем, покупцем і продавцем, банком і клієнтом.

У цих прикладах конфліктна ситуація породжується відмінністю інтересів партнерів і прагненням кожного з них приймати оптимальні рішення, які реалізують поставлені цілі найбільшою мірою. При цьому кожному доводиться зважати не тільки на свої цілі, але й на цілі розумного супротивника, і враховувати невідомі наперед рішення, які він прийматиме.

Математична модель конфліктної ситуації називають *грою*.

Гравці – сторони, що беруть участь у конфлікті.

Виграш – результат конфлікту.

Для кожної гри вводяться *правила* – система умов, яка визначає:

1) варіанти дій гравців;
2) обсяг інформації кожного гравця про поведінку партнерів;
3) виграш, до якого приводить кожна сукупність дій (виграш зазвичай задається кількісно).

Результат гри – перемога або поразка, що не завжди є кількісне вираження (наприклад, у шахах).

Гру називають *парною*, якщо в грі беруть участь два гравці, і *множинною*, якщо гравців більше двох.

Розвиток гри в часі можна подати як ряд послідовних ходів. *Хід* гравця – це вибір і здійснення однієї з передбачених правилами дій. Кожний гравець має можливість вибрати хід.

Існують такі види ходів:

- *випадковий* хід – вибір дії, що відбувається не за рішенням гравця, а за яким-небудь механізмом випадкового вибору (купівельний попит, затримка з поставкою матеріалів);
- *свідомий* (*особистий*) хід – усвідомлений вибір гравцем одного з можливих варіантів дій.

Множину ходів, які приводять гру до кінцевого стану, називають *партією*.

Стратегією гравця називають сукупність правил, що визначають вибір дій при кожному особистому ході залежно від ситуації, що склалася. *Метою* гри є визначення оптимальної стратегії для кожного гравця.

Гру називають *скінченною*, якщо кожний гравець має скінченну кількість стратегій, і *нескінченною*, – якщо навпаки.

Гру називають *грою з нульовою сумою*, або *антагоністичною,* якщо виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого, тобто для повного завдання гри достатньо вказати величину одного з них. Таким чином, сума виграшів сторін дорівнює нулю. Якщо позначити через a виграш одного з гравців, а через b виграш іншого, то для гри з нульовою сумою

$$b = - a,$$

тому достатньо розглядати, наприклад, лише величину a.

Якщо гра повторюється багато разів, то гравців може цікавити не виграш або програш у кожній конкретній партії, а середній виграш або програш у всіх партіях [12].

6.2. Платіжна матриця. Нижня й верхня ціни гри

Розглянемо найпростіший вид стратегічної гри – скінченну парну гру (гру двох супротивників). Кожна фіксована стратегія, яку може вибрати гравець, є його *чистою стратегією*. У парній грі з нульовою сумою кожний гравець має скінченну кількість чистих стратегій.

Після вибору гравцями будь-якої пари стратегій A_i і B_j $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$ однозначно визначається результат гри, тобто виграш a_{ij} гравця A (додатний або від'ємний) і програш $-a_{ij}$ гравця B. Гравці вибирають стратегії при повному незнанні вибору іншого гравця.

Припустимо, що відомо значення a_{ij} для будь-якої пари стратегій (A_i, B_j).

Матрицю $П = (a_{ij}),\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n$, елементами якої є виграші, що відповідають стратегіям A_i і B_j, називають *платіжною матрицею*, або *матрицею гри*.

Приклад 6.1. Скласти платіжну матрицю для гри «пошук». Гравець А може сховатися в одному з двох приміщень (І і ІІ). Гравець В шукає гравця А і, якщо знайде, отримає від нього 1 грош. од. (гравець А платить штраф), у протилежному випадку платить гравцю А 1 грош. од.

Розв'язання

Проаналізуємо поведінку кожного гравця:

- стратегія A_1 – гравець А ховається в приміщенні І, стратегія A_2 – гравець А ховається в приміщенні ІІ;

- стратегія B_1 – гравець В шукає гравця А в приміщенні І, стратегія B_2 – гравець В шукає гравця А в приміщенні ІІ.

Якщо гравець A знаходиться в приміщенні І і там його знаходить гравець В, тобто здійснюється пара стратегій (A_1, B_1), то гравець А платить штраф, тобто $a_{11} = -1$. Аналогічно $a_{22} = -1$ (стратегія (A_2, B_2)). Очевидно, що стратегії (A_1, B_2) і (A_2, B_1) дають виграш 1 гравцю А, тому $a_{12} = a_{21} = 1$. Тоді платіжна матриця матиме вигляд

$$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо гру $m \times n$ з матрицею $П = (a_{ij})$; $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

У теорії ігор передбачається, що обидва гравці діють розумно, тобто прагнуть отримати максимальний виграш, уважаючи, що супротивник діє найкращим чином [12].

Визначимо найкращі стратегії гравців.

1. Нехай гравець А вибирає деяку стратегію A_i, тоді в найгіршому випадку (наприклад, якщо вибір гравця А стане відомим гравцю В) він отримає виграш

$$\alpha_i = \min_{j=1,\dots,n} a_{ij}, \tag{6.1}$$

де через α_i позначено мінімально можливий виграш гравця А при виборі ним стратегії A_i (найменше число в i-му рядку платіжної матриці).

Таким чином, вибираючи стратегію A_i, гравець А повинен розраховувати на те, що внаслідок розумних дій супротивника *В* він виграє не менше ніж α_i.

Діючи найбільш обережно й розраховуючи на розумну поведінку супротивника, гравець А повинен вибрати ту стратегію A_i, для якої число α_i є максимальним, тобто таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, а саме: серед усіх чисел α_i $(i = 1, 2, ..., m)$ вибрати найбільше:

$$\alpha = \max_{i=1,2,\dots,m} \alpha_i. \tag{6.2}$$

Тепер при будь-якій поведінці гравця В гравцю А гарантовано виграш, не менший за α.

Назвемо α *нижньою ціною гри*, або *максиміном*. Це гарантований виграш гравця А при будь-якій стратегії гравця В:

$$\alpha = \max_{i=1,2,\dots,m} \alpha_i = \max_{i=1,2,\dots,m} \left(\min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \right). \tag{6.3}$$

Стратегію A_i, що відповідає максиміну, називають максимінною.

2. Гравець В зацікавлений у тому, щоб зменшити свій програш. Стратегію B_j гравець В вибирає виходячи з принципу, що його програш не перебільшить максимального зі значень елементів j-го стовпця матриці $P = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$:

$$\beta_j = \max_{i=1,\dots,m} a_{ij}. \tag{6.4}$$

Іншими словами, вибираючи стратегію B_j, гравець В повинен розраховувати на те, що внаслідок розумних дій супротивника А програє не більше, ніж β_j. Серед усіх чисел β_j, $j = 1, 2, ..., n$ гравець *В* вибирає таке значення β_j, при якому мінімізується його максимальний програш:

$$\beta = \min_{j=1,\dots,n} \beta_j. \tag{6.5}$$

Назвемо β *верхньою ціною гри*, або *мінімальним виграшем (мінімаксом)*. Це гарантований програш гравця *B:*

$$\beta = \min_{j=1,\dots,n} \beta_j = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij}\,. \quad (6.6)$$

Стратегію B_j, що відповідає мінімаксу, називають мінімаксною.

Принцип, згідно з яким гравці вибирають найбільш «обережні» мінімаксну і максимінну стратегії, має назву «принцип мінімаксу». Цей принцип виходить із розумного припущення, що кожний гравець прагне досягти мети, яка є протилежною меті супротивника.

3. Якщо верхня й нижня ціни гри збігаються, то загальне значення верхньої й нижньої цін гри

$$v = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \quad (6.7)$$

називають *чистою ціною гри (ціною гри*). Оскільки виграш гравця А – цілком певне число, гра є *цілком визначеною (рівноважною)*. Таку ситуацію гравцям невигідно порушувати.

6.3. Оптимальне розв'язання гри двох осіб з нульовою сумою (розв'язання рівноважної гри)

В теорії ігор розв'язання є оптимальним, якщо виконуються умови оптимальності та стійкості.

1. Для кожного гравця треба вибрати стратегію, яка задовольняє умові оптимальності:

1) один із гравців має одержати максимальний виграш, коли інший дотримується своєї стратегії;

2) в той же час другий гравець має одержати мінімальний програш, якщо перший дотримується своєї стратегії.

Мінімаксні стратегії, що відповідають ціні гри, є *оптимальними стратегіями*, а їх сукупність – *оптимальним розв'язком гри*.

У цьому випадку гравець А одержує максимальний гарантований (що не залежить від поведінки гравця В) виграш v, а гравець В – мінімальний гарантований (який не залежить від поведінки гравця А) програш v.

2. Оптимальні стратегії повинні також задовольняти умові стійкості, тобто будь-якому з гравців має бути невигідно відмовитися від своєї стратегії в цій грі. Нижня й верхня ціни завжди зв'язані нерівністю $\alpha \le \beta$.

Цілком визначені, або рівноважні, ігри називають іграми з *сідловою точкою*, якщо елемент a_{ij}, для якого правильною є рівність

$$\alpha = \beta = v\,, \quad (6.8)$$

є одночасно мінімальним у рядку *i* й максимальним у стовпці *j*. Елемент a_{ij} називають *сідловою точкою* (за аналогією з поверхнею сідла, яка викривляється вверх в одному напрямі, а вниз – в іншому).

Сідловій точці відповідають оптимальні (чисті) стратегії гравців, їх сукупність є розв'язком гри, яка має властивість стійкості [12].

Приклад 6.2. Дві компанії А і В продають ліки від грипу. Компанія А рекламує продукцію на радіо (стратегія A_1), телебаченні (стратегія A_2) і в газетах (стратегія A_3). Компанія *В* окрім цих джерел (стратегії B_1, B_2, B_3) розсилає також брошури поштою (стратегія B_4). Залежно від уміння й інтенсивності рекламної діяльності кожна компанія привертає на свій бік частину клієнтів конкуруючої компанії. Наведена нижче матриця характеризує відсоток клієнтів, привернутих або втрачених компанією А:

$$\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Проаналізувати стратегії компаній А і В. Перевірити, чи є ця гра цілком визначеною (грою з сідловою точкою).

Розв'язання

Розрахунки платежів з урахуванням кожної стратегії зведемо в таку таблицю:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	$\boxed{5}$
A_3	-2	4	-9	-5	-9
β_j	8	$\boxed{5}$	9	8	$\alpha = \beta = 5$

Визначимо нижню ціну гри за формулою (6.3):

$$\alpha = \max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3,4} a_{ij} = \max_{i=1,2,3}(-3,5,-9) = 5.$$

Якщо компанія А вибере стратегію A_1, то незалежно від того, що зробить компанія В, найгіршим результатом буде втрата компанією А 3 % ринку на користь компанії В. При виборі стратегії A_2 найгіршим результатом для компанії А буде збільшення ринку на 5 % за рахунок клієнтів компанії В. Найгірший результат при виборі A_3 – втрата компанією 9 % ринку на користь компанії В. Тому компанія *А* вибере стратегію A_2.

Визначимо верхню ціну гри за формулою (6.6):

$$\beta = \min_{j=1,2,3,4} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min_{j=1,2,3,4}(8,5,9,8) = 5.$$

Висновок: компанія *В* вибере стратегію B_2.

Отже, оптимальний розв'язок гри – вибір стратегій A_2 і B_2:

- обом компаніям слід проводити рекламу на телебаченні;
- виграш буде на користь компанії *А*, оскільки її ринок збільшиться на 5 %.

Таким чином, $\alpha = \beta = v = 5$ – ціна гри. Це гра з сідловою точкою, а це означає, що обом компаніям немає сенсу вибирати іншу стратегію. Дійсно, якщо компанія В переходить до іншої стратегії (B_1, B_3 або B_4), то компанія А може зберегти свій вибір стратегії A_2, що приведе до більшої втрати ринку компанією В (6 % або 8 % з другого рядка матриці $\|a_{ij}\|$). Із тих же причин компанія A не використовуватиме іншу стратегію. Якщо вона застосує, наприклад, стратегію A_3, то компанія B може використати стратегію B_3 і збільшити свій ринок на 9 % (третій стовпець матриці $\|a_{ij}\|$).

Контрольні запитання

1. Концепція ігрового конфлікту. Моделі конфліктної ситуації.
2. Приклади конфліктних ситуацій в економіці.
3. Поняття стратегії в теорії ігор.
4. Платіжна матриця і ціна гри.
5. Поняття рівноважної гри.
6. Характеристика сідлової точки й чистої стратегії.

7. РОЗВ'ЯЗАННЯ ІГОР ЗІ ЗМІШАНИМИ СТРАТЕГІЯМИ

7.1. Гра зі змішаними стратегіями

Якщо гра не має сідлової точки, то застосування чистих стратегій не дає оптимального розв'язку гри. У цих іграх $\alpha < \beta$, тобто застосування мінімаксних стратегій для кожного із гравців забезпечує виграш, не більший за α, і програш, не менший за β.

Один гравець прагне збільшити виграш, а інший – зменшити програш. Щоб досягти цього, гравці застосовують не одну, а декілька стратегій, вибір яких здійснюється випадковим чином.

Випадковий вибір гравцем своїх чистих стратегій називають *змішаною стратегією*. Таким чином, гравці застосовують гнучку тактику: рішення знаходять із застосуванням змішаних стратегій, чергуючи випадковим чином декілька чистих стратегій.

Змішаною стратегією S_A гравця A називають застосування чистих стратегій A_1, A_2, A_i,..., A_m з імовірностями $p_1, p_2,...,p_i,...,p_m$, сума яких дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

де $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$.

У грі, матриця якої має розмірність $m \times n$, стратегії гравця А задають у вигляді матриці

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_i & ... & A_m \\ p_1 & p_2 & ... & p_i & ... & p_m \end{pmatrix}$$

або ряду ймовірностей $S_A = (p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_m)$, із якими гравець застосовує свої початкові чисті стратегії. Цей набор можна розглядати як *m-вимірний* вектор.

Аналогічно для гравця B визначають *n-вимірний* вектор $S_B = (q_1, q_2, ..., q_j, …, q_n)$, що відповідає його змішаним стратегіям, або матрицю

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & ... & B_j & ... & B_n \\ q_1 & q_2 & ... & q_j & ... & q_n \end{pmatrix}.$$

При цьому сума ймовірностей дорівнює 1:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

де $q_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$.

Чисті стратегії можна вважати окремим випадком змішаних стратегій. Якщо змішані стратегії задають рядом, то в ньому одиниці відповідає чиста стратегія.

За принципом мінімаксу визначають оптимальний розв'язок гри – це пара оптимальних стратегій (S_A^*, S_B^*) – у загальному випадку змішаних стратегій, що мають таку властивість: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то для іншого не може бути вигідним відхилятися від своєї.

Виграш, що відповідає оптимальному розв'язку, називають *ціною гри* v, яка задовольняє нерівності

$$\alpha \le v \le \beta,$$

де α і β – нижня й верхня ціни гри.

Основна теорема теорії ігор – теорема Неймана: кожна скінченна гра має принаймні один оптимальний розв'язок, можливо, серед змішаних стратегій.

Нехай у грі з матрицею розмірністю $m \times n$ знайдено розв'язок, що складається з двох оптимальних стратегій $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ і $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$. У загальному випадку деякі з чисел p_i^* і q_j^* ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) можуть дорівнювати нулю, тобто не всі стратегії, доступні для гравця, є його оптимальними змішаними стратегіями.

Чисті стратегії гравців А і В, що є оптимальними змішаними стратегіями, для яких імовірності p_i і q_j є відмінними від нуля, називають *активними*.

Теорема про активні стратегії: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то виграш залишається незмінним і таким, що дорівнює ціні гри v, якщо другий гравець не виходить за межі своїх активних стратегій.

Ця теорема має практичне значення. Вона надає конкретні моделі знаходження оптимальних стратегій, якщо немає сідлової точки: для того щоб число v було ціною гри, а S_A^* і S_B^* – оптимальними стратегіями, необхідно й достатньо, щоб виконувалися нерівності:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* a_{ij} \ge v, \; j = 1, 2, ..., n. \tag{7.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v, \; i = 1, 2, ..., m. \tag{7.2}$$

Застосування гравцем А оптимальної стратегії S_A^* має забезпечувати йому при будь-яких діях гравця В виграш, не менший від ціни гри v, тому виконується нерівність (7.1).

Аналогічно для гравця В оптимальна стратегія S_B^* має забезпечувати при будь-яких стратегіях гравця А програш, не більший за v, тобто виконується нерівність (7.2).

Далі співвідношення (7.1) і (7.2) використовуються для розв'язання гри.

Якщо гра $m \times n$ *не* має сідлової точки, то її розв'язання, особливо при великих m і n, є досить трудомісткою задачею. Іноді цю задачу вдається спростити, якщо зменшити кількість стратегій шляхом викреслювання деяких зайвих стратегій (зокрема, за допомогою зменшення розмірності матриці). Зайві стратегії – це *дублювальні* й *наперед відомі невигідні домінуючі*.

Дублювальними називають *стратегії*, яким відповідають однакові значення елементів у платіжній матриці, тобто вона містить однакові рядки (стовпці).

Якщо всі елементи *i*-го рядка матриці менше відповідних елементів *k*-го рядка, то *i*-ту *стратегію* називають *домінуючою* (аналогічно для стовпців) [7].

Приклад 7.1. Розглянемо гру з такою матрицею:

$$\begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ A_2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ A_3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ A_4 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}.$$

Очевидно, що стратегія A_3 точно повторює (дублює) стратегію A_1, тому одну з них можна викреслити. Далі, порівнюючи поелементно рядки A_1 і A_2, бачимо, що всі елементи рядка A_2 менші (або дорівнюють) за відповідні елементи рядка A_1. Отже, стратегія A_2 для гравця А, який хоче виграти, є явно невигідною. Викреслюючи A_3 і A_2, зведемо матрицю до більш простого вигляду:

$$\begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ A_4 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}.$$

Таким чином, гра розміром 4×4 є зведеною до гри розміром 2×4.

Отже, зробимо висновки:

1. Якщо *гра має сідлову точку*, то оптимальний розв'язок – це послідовність чистих стратегій, що відповідають цій точці.

2. Якщо *гра не має сідлової точки*, то відповідно до основної теореми теорії ігор оптимальний розв'язок існує й визначається парою змішаних стратегій $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ і $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$.

3. Для того щоб знайти ці стратегії, скористаємося висновками з теореми про активні стратегії:

- якщо гравець А дотримується своєї оптимальної стратегії S_A^*, то його середній виграш $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ залишиться незмінним і буде дорівнювати ціні гри *v*, якою б активною стратегією не користувався гравець В;
- виграш гравця А (програш гравця В) – випадкова величина,

математичне сподівання $\left(\text{середнє значення} \sum_{i=1}^{m} p_i^* a_{ij} \right)$ якої є ціною гри. Тому середній виграш гравця А (оптимальна стратегія) буде дорівнювати v для будь-якої стратегії супротивника.

4. Для розв'язання гри зі змішаними стратегіями використовують такі методики:

- аналітичні розрахунки;
- графічні методи;
- зведення задачі теорії ігор до задачі лінійного програмування.

7.2. Аналітичне розв'язання парної гри зі змішаними стратегіями

Розглянемо матричну скінченну гру розміром 2×2. Пояснимо, як на основі аналітичних розрахунків розв'язати цю найпростішу гру, у якій кожний із двох гравців має по дві стратегії [7].

Платіжна матриця такої гри має вигляд

$$\Pi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Згідно з основною теоремою теорії ігор середній виграш гравця А, якщо він використовує оптимальну змішану стратегію $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$, а гравець В – чисту стратегію B_1 (це відповідає першому стовпцю платіжної матриці Р), дорівнює ціні гри v:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v.$$

Такий самий середній виграш одержує гравець А, якщо гравець В застосовує чисту стратегію B_2:

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v.$$

Ураховуючи, що $p_1^* + p_2^* = 1$, одержуємо систему рівнянь для визначення оптимальної стратегії $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ і ціни гри v:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v; \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v; \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases} \tag{7.3}$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо оптимальну стратегію $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{7.4}$$

Підставивши значення p_1^* і p_2^* в одне з рівнянь (7.3), маємо

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{7.5}$$

Застосовуючи теорему про активні стратегії при визначенні S_B^* – оптимальної стратегії гравця В, одержуємо, що при будь-якій чистій стратегії гравця А (A_1 або A_2) середній програш гравця В дорівнює ціні гри v:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v; \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v; \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases} \tag{7.6}$$

Тоді маємо оптимальну стратегію $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{7.7}$$

Приклад 7.2. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею $\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Перевіряємо наявність сідлової точки:

B_j / A_i	B_1	B_2	α_i
A_1	-1	1	-1
A_2	1	-1	-1
β_j	1	1	α = -1, β = 1

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = \max_{i=1,2}(-1,-1) = -1; \ \beta = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} a_{ij} = \min_{j=1,2}(1,1) = 1.$$

Гра не має сідлової точки, тому що $\alpha \neq \beta$.

Шукаємо розв'язок гри в змішаних стратегіях. Системи рівнянь (7.3) і (7.6) у цьому випадку мають такий вигляд:

$$\begin{cases} -1 \cdot p_1^* + 1 \cdot p_2^* = v, \\ 1 \cdot p_1^* - 1 \cdot p_2^* = v, \\ p_1^* + p_2^* = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \cdot q_1^* + 1 \cdot q_2^* = v, \\ 1 \cdot q_1^* - 1 \cdot q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи рівнянь, одержуємо оптимальні стратегії й ціну гри:

$$p_1^* = p_2^* = q_1^* = q_2^* = \frac{1}{2}, \quad v = 0.$$

Це означає, що оптимальна стратегія кожного гравця полягає в тому, щоб чергувати свої чисті стратегії випадковим чином, вибираючи кожне із приміщень (див. прикл. 6.1) з імовірністю $\frac{1}{2}$, при цьому середній виграш дорівнює *0*.

7.3. Геометрична інтерпретація ігор

Розглянемо розв'язання гри розміром 2×2.

Нехай гру задано платіжною матрицею $П = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2$) або у вигляді таблиці

A_i \ B_j	$q_1 : B_1$	$q_2 : B_2$
$p_1 : A_1$	a_{11}	a_{12}
$p_2 : A_2$	a_{21}	a_{22}

Аналітична інтерпретація запропонованої методики розв'язання

Графічна інтерпретація парної гри у вигляді прямої на графіку випливає з концепції теорії парних ігор. Припустимо, що гравець А вибирає змішану стратегію

$$S_A = (p_1, p_2),$$

де $p_2 = p$ і $p_1 = 1 - p_2 = 1 - p$, а гравець В – чисту стратегію B_1. Тоді в цій ситуації гравець А отримає виграш

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = a_{11}(1-p) + a_{21}p = (a_{21} - a_{11})p + a_{11}.$$

Ця формула – лінійна функція ймовірності p, що є визначеною на відрізку [0, 1]. Графіком цієї функції буде відрізок прямої, розташований між двома перпендикулярами до відрізка [0, 1] у його кінцях. При $p = 0$ $S_A = (A_1, 0)$ і, отже, виграш буде дорівнювати a_{11}, а при $p=1$ $S_A = (0, A_2)$ і, отже, виграш дорівнюватиме a_{21}. Аналогічні міркування приводять і до решти викладень про геометричну інтерпретацію парної гри.

Методика графічного розв'язання парної гри

По осі абсцис відкладемо одиничний відрізок A_1A_2. Лівий кінець відрізка – точка A_1 ($x = 0$) – відповідає стратегії A_1 ($S_A = (p_1 = 1, p_2 = 0)$), правий – стратегії A_2 ($S_A = (p_1 = 0, p_2 = 1)$).

Усі проміжні точки x цього відрізка відповідають деяким змішаним стратегіям S_A гравця А, коли $p_1 = 1 - x$, $p_2 = x$. Через кінці вибраного відрізка (рис. 7.1) проведемо прямі, перпендикулярні до осі абсцис, на них відкладатимемо виграші при відповідних чистих стратегіях A_1 і A_2. Якщо гравець В застосовує стратегію B_1, то виграш при використанні чистих стратегій A_1 і A_2 становить відповідно a_{11} і a_{21}. Відкладемо ці точки на прямих і з'єднаємо їх прямою B_1B_1. Середній виграш ν_1, що відповідає змішаній стратегії S_A, визначається формулою математичного сподівання $v_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$ і дорівнює ординаті точки M_1, яка належить прямій B_1B_1. Таким чином, якщо гравець А застосовує змішану стратегію, то його виграшу відповідає деяка точка M_1, що належить цій прямій.

Аналогічно можна побудувати відрізок B_2B_2, який відповідає стратегії B_2 гравця В (рис. 7.2). При цьому середній виграш $v_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2$ – ордината точки M_2.

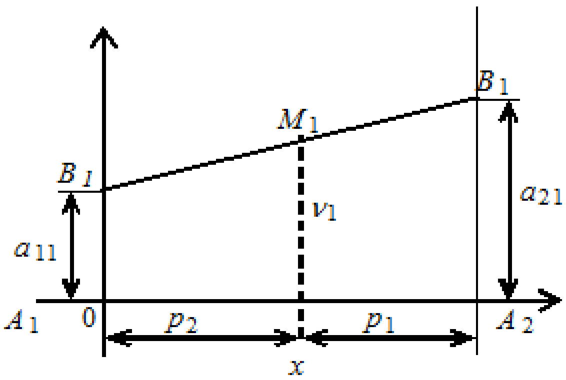


Рис. 7.1

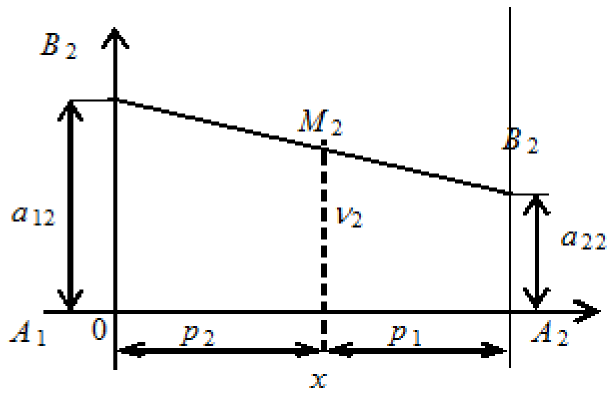


Рис. 7.2

Сумістимо рисунки (рис. 7.3). Відповідно до принципу мінімаксу оптимальна стратегія S_A^* є такою, що мінімальний виграш гравця А (при найгіршій поведінці гравця В) перетворюється на максимум. Ординати точок, що належать ламаній B_1KB_2 – нижній обвідній, показують мінімальний виграш гравця А при використанні ним будь-якої змішаної стратегії (на відрізку B_1K – проти стратегії B_1, на відрізку KB_2 – проти стратегії B_2). Таким чином, ламана B_1KB_2 є нижньою межею виграшу, який одержує гравець А. Оптимальну стратегію $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ визначає точка K з координатами $(x,\ y)$, у якій мінімальний виграш набуває максимуму, її ордината дорівнює ціні гри: $y = v$, абсциса $x = p_2^*$.

Щоб знайти координати точки K, що є точкою перетину B_1B_1 і B_2B_2, запишемо рівняння цих прямих. Пряма B_1B_1 проходить через точки (0, a_{11}) і (1, a_{21}). Підставивши координати цих точок по черзі в загальне рівняння прямої $y = kx + b$, отримаємо рівняння прямої B_1B_1:

$$y = k_1x + b_1.$$

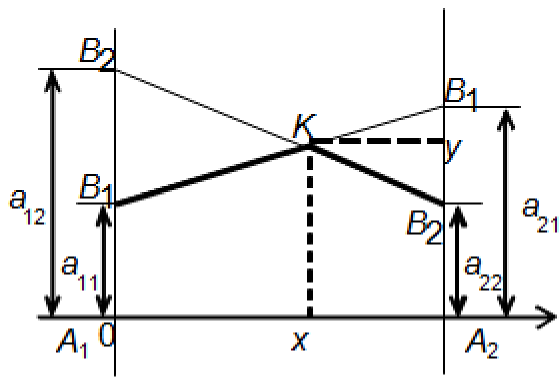


Рис. 7.3

Аналогічно одержимо рівняння прямої B_2B_2, яка проходить через точки (0, a_{12}) і (1, a_{22}):

$$y = k_2x + b_2.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} y = k_1 x + b_1; \\ y = k_2 x + b_2, \end{cases}$ отримаємо координати точки *K*: *x* і *y*. Тоді p_1^* = 1 – x, p_2^* = *x* і *v* = *y* [12].

Приклад 7.3. Графічно розв'язати гру, яку задано матрицею $\Pi = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Визначаємо верхню й нижню ціни гри й перевіряємо, чи має гра сідлову точку.

Нижня ціна гри $\alpha = \max\limits_{i=1,2}(\min\limits_{j=1,2} a_{ij}) = \max\limits_{i=1,2}(1{,}5;\ 1) = 1{,}5$.

Верхня ціна гри $\beta = \min\limits_{j=1,2}(\max\limits_{i=1,2} a_{ij}) = \min\limits_{j=1,2}(2;\ 3) = 2$.

Сідлової точки немає.

Розв'язок гри $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$, $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$ і ν слід шукати в змішаних стратегіях:

1) на осі абсцис (рис. 7.4) відкладаємо одиничний відрізок [0, 1];

2) у кінцях відрізка [0, 1] проводимо два перпендикуляри: лівий перпендикуляр відповідає чистій стратегії A_1, а правий – чистій стратегії A_2;

3) на лівому перпендикулярі відкладаємо відрізки $a_{11} = 1{,}5$, $a_{12} = 3$, що відповідають стратегіям B_1, B_2;

4) на правому перпендикулярі від точки *1* відкладаємо відрізки $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, що відповідають тим же стратегіям B_1, B_2;

5) з'єднуємо точки a_{11} і a_{21}, a_{12} і a_{22};

6) ламана B_1KB_2 відповідає нижній межі виграшу.

Нижня ціна гри $\alpha = a_{11} = 1{,}5$. Верхня ціна гри $\beta = a_{21} = 2$.

Щоб знайти координати точки *K*, що є точкою перетину прямих B_1B_1 і B_2B_2, запишемо рівняння цих прямих. Пряма B_1B_1 проходить через точки *(0;1,5)* і *(1;2)*:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1{,}5}{2-1{,}5}.$$

Отже, маємо рівняння прямої B_1B_1

$$y = 0{,}5x + 1{,}5.$$

Пряма B_2B_2 проходить через точки *(0;3)* і *(1;1)*:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-3}{1-3}.$$

Звідси одержуємо рівняння прямої B_2B_2

$$y = -2x + 3.$$

Розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 0{,}5x + 1{,}5, \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

є координати точки перетину прямих: $x = 0{,}6$; $y = 1{,}8$. Отже, маємо $K\ (0{,}6;\ 1{,}8)$.

Таким чином, $p_2^* = 0{,}6$, $p_1^* = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $S_A^* = (0{,}4;\ 0{,}6)$, $\nu = 1{,}8$.

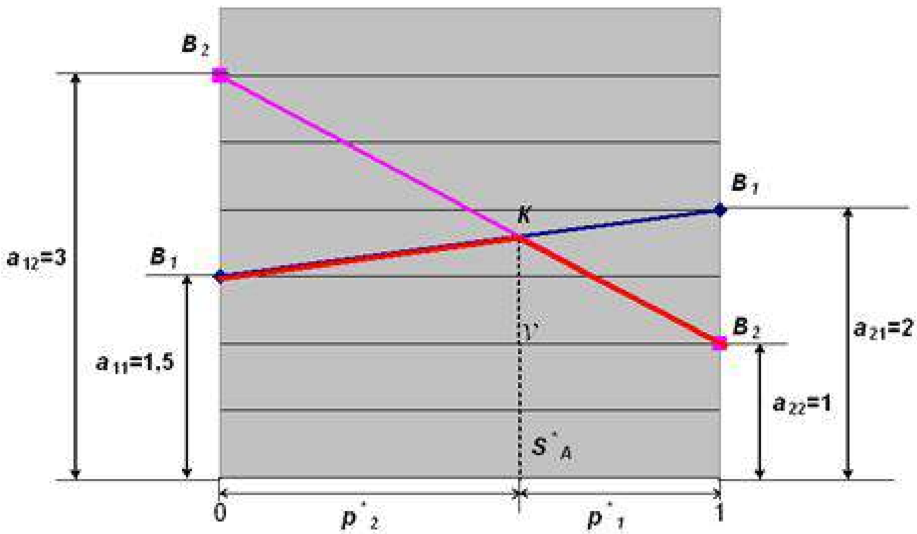


Рис. 7.4

Геометрично можна також визначити оптимальну стратегію гравця В. Необхідно поміняти місцями гравців і замість нижньої межі для гравця А відповідно до принципу мінімаксу розглядати мінімум верхньої межі для гравця В (рис. 7.5).

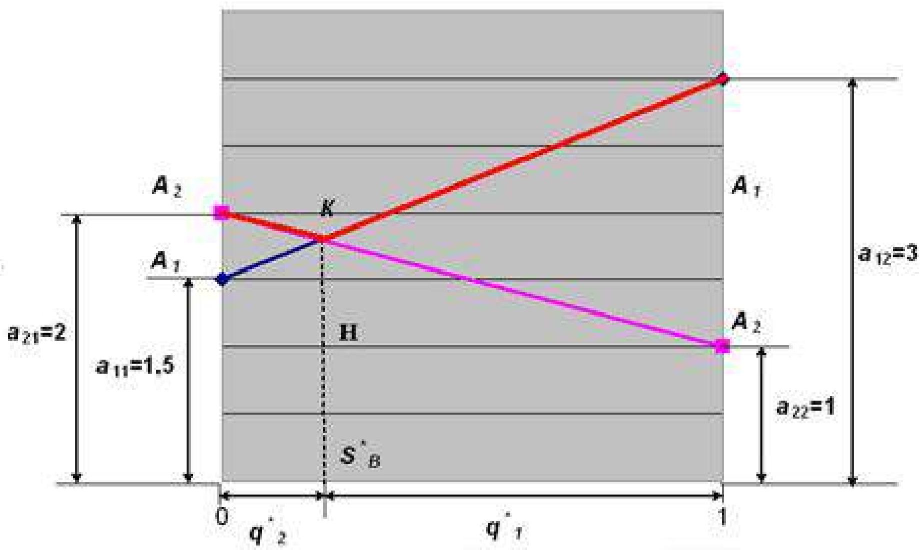


Рис. 7.5

Щоб знайти координати точки *К*, яка є точкою перетину прямих A_1A_1 і A_2A_2, запишемо рівняння цих прямих. Пряма A_1A_1 проходить через точки *(0;1,5)* і *(1;3)*:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1{,}5}{3-1{,}5}.$$

Звідси одержуємо рівняння прямої A_1A_1

$$y = 1{,}5x + 1{,}5.$$

Пряма A_2A_2 проходить через точки *(0;2)* і *(1;1)*:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-2}{1-2}.$$

Отже, рівняння прямої A_2A_2 має вигляд

$$y = -x + 2.$$

Тоді координати точки перетину цих прямих є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 1{,}5x + 1{,}5, \\ y = -x + 2. \end{cases}$$

Це $x = 0{,}2$; $y = 1{,}8$. Отже, маємо $K(0{,}2;\ 1{,}8)$.

Таким чином, $q_2^* = 0{,}2$, $q_1^* = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $S_A^* = (0{,}8;\ 0{,}2)$; $\nu = 1{,}8$.

Оптимальний розв'язок знайдено.

Ігри розміром $2\times n$ також можна розв'язувати графічно.

Нехай гру задано платіжною матрицею $\Pi = (a_{ij})$ $(i = 1, 2; j = 1, 2, ..., n)$ або у вигляді таблиці

A_i \ B_j	$q_1 : B_1$	$q_2 : B_2$	…	$q_n : B_n$
$p_1 : A_1$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
$p_2 : A_2$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

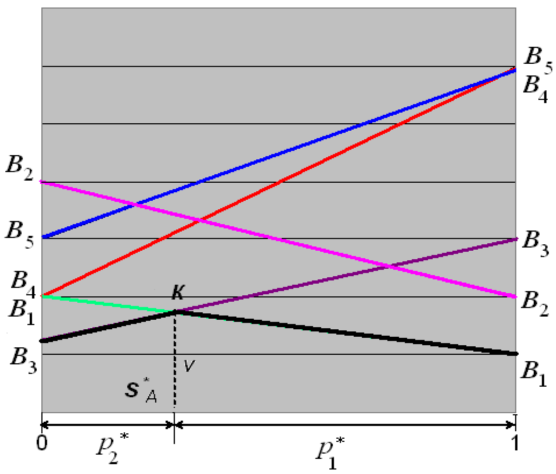


Рис. 7.6

Кожній із *n* стратегій гравця В відповідає пряма. Побудувавши ці прямі, знаходять нижню межу виграшу. Точка *К*, що належить нижній межі, для якої величина виграшу є найбільшою, визначає ціну гри ν і її розв'язок (рис. 7.6): $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ і $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$.

При цьому визначаються активні стратегії гравця В (прямі, що їм відповідають, перетинаються в точці

K); з геометричних міркувань можна знайти значення q_j, що відповідають активним стратегіям гравця В (на графіку розглядають найнижчу ламану).

Аналогічно можна знайти геометричний розв'язок *ігор розміром* $m{\times}2$, тільки в цьому випадку будують верхню межу виграшу і на ній визначають мінімум.

Нехай гру задано платіжною матрицею $П = (a_{ij})$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2$) або у вигляді таблиці

A_i \ B_j	$q_1 : B_1$	$q_2 : B_2$
$p_1 : A_1$	a_{11}	a_{12}
$p_2 : A_2$	a_{21}	a_{22}
…	…	…
$p_m : A_m$	a_{m1}	a_{m2}

Кожній із m стратегій гравця А відповідає пряма. Побудувавши ці прямі, знаходять верхню межу виграшу. Точка K, що лежить на верхній межі, для якої величина виграшу є найбільшою, визначає ціну гри v і її розв'язок $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ і $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$ (рис. 7.7). Слід зазначити, що геометричні побудови має сенс використовувати для визначення активних стратегій гравців. Потім розв'язок гри можна отримати за допомогою формул (7.4), (7.5) і (7.7), або відповідні значення S_A, S_B і v знаходять з геометричних міркувань. Ці формули можна використовувати, оскільки з матриці виключаються всі стратегії, окрім активних, і вона містить два рядки і два стовпці [12].

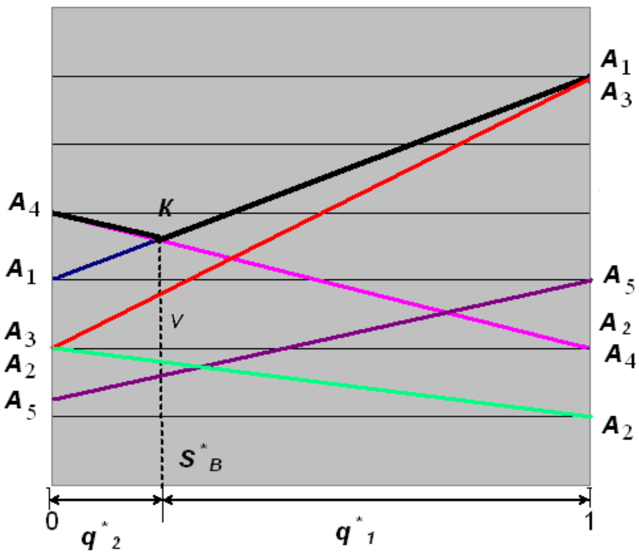


Рис. 7.7

Приклад 7.4. Підприємство може випускати два види продукції A_1 і A_2 й одержувати при цьому прибуток, що залежить від попиту. Попит може бути в одному з чотирьох станів – B_1, B_2, B_3, B_4. Задано матрицю

$$П = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1{,}5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці a_{ij} характеризують прибуток, який отримає підприємство, випускаючи i-ту продукцію при j-му стані попиту.

Визначити оптимальні пропорції в продукції, що випускається, які гарантують середню величину прибутку при будь-якому стані попиту, уважаючи його невизначеним.

Розв'язання

Задача зводиться до ігрової моделі, у якій гру підприємства А проти попиту В задано платіжною матрицею *П*.

Визначаємо нижню й верхню ціни гри та перевіряємо, чи має гра сідлову точку:

$$\alpha = \max_{i=1,2}(\min_{j=1,2,3,4} a_{ij}) = \max_{i=1,2}(1{,}5;1) = 1{,}5;$$

$$\beta = \min_{j=1,2,3,4}(\max_{i=1,2} a_{ij}) = \min_{j=1,2,3,4}(4;4;2;3) = 2.$$

Сідлової точки немає.

Розв'язок гри $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$, $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*)$ і ν слід шукати в змішаних стратегіях.

На осі абсцис (рис. 7.8) відкладаємо одиничний відрізок A_1A_2. На лівій вертикальній осі відкладаємо відрізки $a_{11} = 2$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 1{,}5$, $a_{14} = 3$, які відповідають стратегіям B_1, B_2, B_3, B_4. На правій вертикальній осі відкладаємо відрізки $a_{21} = 4$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = 2$, $a_{24} = 1$, які відповідають тим самим стратегіям. Ламана B_3KB_4 відповідає нижній межі виграшу. Активні стратегії гравця В – третя й четверта, тоді $q_1^* = 0$, $q_2^* = 0$. Отже, платіжну матрицю можна спростити до такого вигляду:

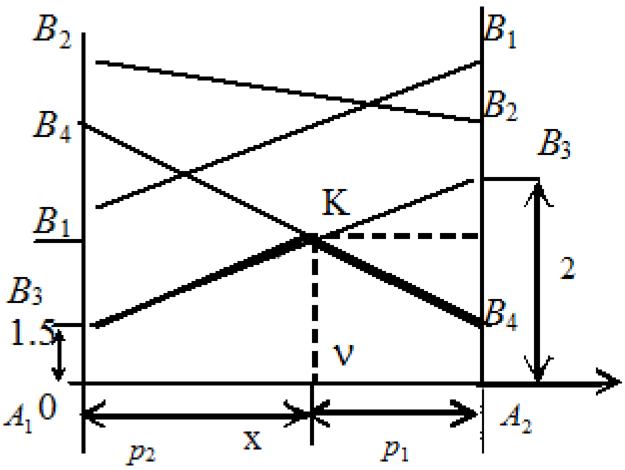


Рис. 7.8

$$П = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ламана B_3KB_4 є нижньою межею виграшу, одержаного гравцем А. Оптимальні стратегії $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ і $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*)$ визначаються точкою *К* з координатами *(x, y)*. Її ордината дорівнює ціні гри: $y = \nu$, абсциса – ймовірності використання гравцем А своєї другої стратегії: $x = p_2^*$.

Щоб знайти координати точки *К*, запишемо рівняння прямих B_3B_3 і B_4B_4, точкою перетину яких вона є. Пряма B_3B_3 проходить через точки *(0; 1,5)* і *(1; 2)*. Підставивши координати цих точок по черзі в загальне рівняння прямої $y = kx + b$, маємо рівняння прямої B_3B_3: $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

Аналогічно, знаючи, що пряма B_4B_4 проходить через точки *(0; 3)* і *(1; 1)*, отримаємо рівняння прямої B_4B_4: $y = -2x + 3$.

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 0,5x + 1,5; \\ y = -2x + 3, \end{cases}$$

одержуємо координати точки *K*: $x = 0,6$ і $y = 1,8$. Тоді $p_2^* = x = 0,6$, $p_1^* = 1 - x = 0,4$ і $v = y = 1,8$.

Отже, $S_A^* = (0,4;\ 0,6)$, тобто гравець А застосовує стратегію A_1 з імовірністю *0,4*, а стратегію A_2 – з імовірністю *0,6*. При цьому його виграш у середньому становить $v = 1,8$ од.

Оптимальні стратегії гравця В знайдемо за допомогою системи (7.6). Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1,5q_3 + 3q_4 = v; \\ 2q_3 + q_4 = v; \\ q_3 + q_4 = 1. \end{cases}$$

Оскільки ціну гри вже знайдено ($v = 1,8$), систему можна спростити:

$$\begin{cases} 1,5q_3 + 3q_4 = 1,8; \\ 2q_3 + q_4 = 1,8. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо оптимальну стратегію попиту В: $S_B^* = (0,\ 0,\ 0,8,\ 0,2)$.

З огляду на економіку можна зробити висновок, що підприємство має випустити 40 % продукції A_1 і 60 % продукції A_2, причому 80 % попиту перебуває в стані B_3, 20 % – у стані B_4.

Приклад 7.5. Розв'язати гру, задану матрицею

$$П = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Знайдемо нижню й верхню ціни гри:

$$\alpha = \max_{i=1,2,3,4} (\min_{j=1,2} a_{ij}) = \max_{i=1,2,3,4} (3;2;0;-1) = 3;$$

$$\beta = \min_{j=1,2} (\max_{i=1,2,3,4} a_{ij}) = \min_{j=1,2} (4;6) = 4.$$

Сідлової точки немає.

2. Матриця має розмірність 2×4. Проведемо прямі, що відповідають стратегіям гравця А (рис. 7.9). Жирною лінією зображено верхню межу виграшу гравця А.

Точка *K* визначає ціну гри. Активними стратегіями для гравця А є

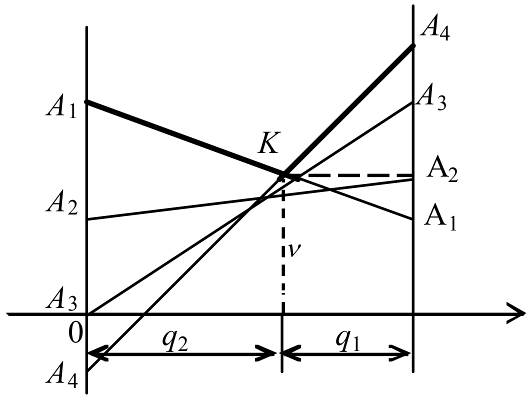


Рис. 7.9

перша й четверта. Отже, платіжну матрицю можна спростити: П $=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Оптимальними стратегіями є $S_A^* = (p_1^*, 0, 0, p_4^*)$ і $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$.

3. Стратегію (q_1^*, q_2^*) і ціну гри v знаходимо геометричним способом. Для цього з рис. 7.9 визначаємо параметри рівнянь прямих A_1A_1 і A_4A_4, а потім – і координати точки K. Отримаємо S_B^* = (3/8; 5/8), v = 27/8. Оптимальну стратегію $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) =$ $= (p_1^*, 0, 0, p_4^*)$ знайдемо за формулою (7.4) для платіжної матриці П $=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$: S_A^* = (7/8; 0; 0; 1/8).

7.4. Розв'язання матричних ігор методами лінійного програмування

Гра розміром $m \times n$ у загальному випадку не має геометричної інтерпретації. При великих m і n задача теорії ігор може бути зведена до задачі лінійного програмування (ЗЛП).

Нехай гру розміром $m \times n$ задано платіжною матрицею $П = (a_{ij})$; $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Гравець А має стратегії A_i ($i = 1, 2, ..., m$), а гравець В – стратегії B_j ($j = 1, 2, ..., n$). Необхідно визначити оптимальні стратегії $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ і $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$, де p_i^* і q_j^* ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, ..., n$) – імовірність застосування чистих стратегій відповідно A_i і B_j. При цьому

$$p_1^* + p_2^* + ... + p_m^* = 1\ ,\ q_1^* + q_2^* + ... + q_n^* = 1 .$$

Оптимальна стратегія S_A^* забезпечує гравцю А середній виграш, не менший за ціну гри v $\left(\sum_{i=1}^{m} p_i^* a_{ij} \ge v,\ \ j = 1, 2, ..., n \right)$, при будь-яких діях гравця В і виграш, що дорівнює ціні гри v, при оптимальній стратегії В. Ціна гри є невідомою, але вважаємо, що $v > 0$, цього можна добитися, зробивши всі елементи додатними ($a_{ij} \ge 0$), додаючи до всіх a_{ij} деяке додатне число, що є абсолютною величиною елемента, найменшого серед усіх від'ємних елементів матриці.

Таким чином, якщо гравець А застосовує змішану стратегію $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ проти будь-якої чистої стратегії гравця В, то він одержує середній виграш, або математичне сподівання виграшу

$a_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{mj}p_m, j = 1, 2, ..., n$ (тобто елементи j-го стовпця платіжної матриці необхідно почленно помножити на відповідну ймовірність стратегій $A_1, A_2, ..., A_m$ і результати скласти).

Для оптимальної стратегії S_A^* усі середні виграші є не меншими від ціни гри, тому одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq v; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq v; \\ \quad ... \qquad ... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases} \tag{7.8}$$

Кожну з нерівностей поділимо на число $v > 0$ і введемо нові змінні

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, x_2 = \frac{p_2}{v}, ..., x_m = \frac{p_m}{v}. \tag{7.9}$$

Тоді система набере вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1; \\ \quad ... \qquad ... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq 1. \end{cases} \tag{7.10}$$

Мета гравця А – максимізувати свій гарантований виграш, тобто ціну гри.

Поділивши на $v > 0$ рівність $p_1 + p_2 + … + p_m = 1$, одержуємо, що змінні x_i $(i = 1, 2, ..., m)$ задовольняють умові

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v}.$$

Максимізація ціни гри v еквівалентна мінімізації величини $\frac{1}{v}$, тому задачу можна сформулювати таким чином: визначити такі змінні $x_i \geq 0$, що задовольняють лінійним обмеженням (7.10), і при цьому лінійна функція $Z = \sum_{i=1}^{m} x_i$ набуває мінімального значення.

Маємо ЗЛП. Розв'язуючи задачу, знаходимо x_i і $\frac{1}{v}$, потім одержуємо оптимальний розв'язок $p_i^* = vx_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$ та оптимальну стратегію S_A^*.

Для визначення оптимальної стратегії $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ слід урахувати, що гравець В прагне мінімізувати гарантований програш, тобто знайти $max\frac{1}{v}$. Стратегія S_B^* має забезпечити при будь-яких стратегіях гравця A програш, не більший за v, тобто необхідно, щоб виконувалася нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Змінні q_1, q_2, ..., q_n задовольняють нерівностям

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \le v; \\ \quad ... \qquad ... \\ a_{m1}q_m + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_n \le v. \end{cases}$$

Позначивши $y_j = \dfrac{q_j}{v}$, $j = 1, 2, ..., n$, маємо

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1; \\ \quad ... \qquad ... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases} \tag{7.11}$$

Елементи змішаних стратегій повинні задовольняти умовам

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1.$$

Ці умови в нових змінних ($q_j = y_j\, v$, $j = 1, 2, ..., n$) набувають такого вигляду:

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{v}.$$

Отже, гру зведено до ЗЛП: визначити такі змінні $y_j \ge 0$, які задовольняють лінійним обмеженням (7.11) і максимізують функцію $L = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j$.

Розв'яючи задачу, знаходимо y_j і $\dfrac{1}{v}$, потім одержуємо оптимальний розв'язок $q_j^* = v y_j$ ($j = 1, 2, ..., n$) та оптимальну стратегію S_B^*.

Склавши розширені матриці для задач, переконуємося, що одна матриця вийшла з іншої транспонуванням:

$$\begin{array}{c} \ge \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & ... & 1 & \min Z \end{array}\right) \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \le \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & ... & 1 & \max L \end{array}\right) \end{array}$$

Таким чином, ЗЛП, отримані для гравців A і B, утворюють симетричну пару двоїстих задач. Симетричність дає можливість розв'язувати ту задачу, яка потребує менших обчислювальних витрат, а розв'язок другої задачі одержують за теоремою двоїстості. Очевидно, що шукану оптимальну ціну гри для обох гравців можна одержати таким чином:

$$v = \frac{1}{L_{max}} = \frac{1}{Z_{min}}.$$

При розв'язанні довільної скінченної гри розміром $m \times n$ рекомендується дотримуватися такої схеми:

1. Виключити з платіжної матриці явно невигідні стратегії, порівнюючи їх з іншими. Такими стратегіями для гравця А (гравця В) є ті, яким відповідають рядки (стовпці) з елементами, явно меншими (більшими) порівняно з елементами інших рядків (стовпців).

2. Визначити верхню й нижню ціни гри й перевірити, чи має гра сідлову точку. Якщо вона є, то стратегії гравців, що їй відповідають, будуть оптимальними, а ціна збігається з верхньою (нижньою) ціною.

3. Якщо сідлової точки немає, то розв'язок слід шукати в змішаних стратегіях. Для ігор розмірами 2×2, $2 \times n$, $m \times 2$ можливим є геометричне розв'язання [7].

Приклад 7.6. До магазину завозять товари трьох типів (A_1, A_2, A_3) у різних пропорціях. Їх реалізація й прибуток магазину залежать від виду товару й стану попиту.

Попит має три стани (B_1, B_2, B_3) і не прогнозується. Задано матрицю, елементи якої a_{ij} характеризують прибуток, який одержує магазин після продажу i-го продукту при j-му стані попиту:

$$П = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальні пропорції товарів з умови максимізації середнього гарантованого прибутку.

Розв'язання

1. У матриці платежів немає невигідних стратегій.

2. Визначимо нижню й верхню ціни гри:

$$\alpha = max\{3; 2; 4\} = 4; \ \beta = min\{9; 6; 8\} = 6.$$

3. Оскільки $\alpha \neq \beta$, сідлової точки немає. Оптимальний розв'язок слід шукати в змішаних стратегіях гравців:

$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*) \text{ і } S_B^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*).$$

Позначивши $x_i = \frac{p_i}{v}$, $i = 1, 2, 3$ і $y_j = \frac{q_j}{v}$, $j = 1, 2, 3$, складемо двоїсті ЗЛП:

1) для визначення оптимальної стратегії гравця А маємо таку задачу лінійного програмування: знайти $minZ = x_1 + x_2 + x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \ge 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0; \end{cases}$$

2) двоїста задача для визначення оптимальної стратегії гравця B формулюється так: знайти max $L = y_1 + y_2 + y_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \le 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \le 1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо симплексним методом одну із задач, наприклад другу, оскільки для неї перший базисний розв'язок буде допустимим. Отже, одержуємо такий розв'язок: $y = \left(\frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; \frac{2}{27}; 0; \frac{1}{9}\right)$, $maxL = \frac{5}{27}$.

Визначимо відповідність між змінними взаємодвоїстих ЗЛП і визначимо оптимальний базисний розв'язок першої задачі за допомогою теорем двоїстості:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{2}{27} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{4}{27} & 0 \end{array}.$$

Оптимальний базисний розв'язок першої задачі: $x = \left(\frac{2}{27};\ 0;\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \frac{4}{27};\ 0\right)$, причому $minZ = maxL = \frac{5}{27}$. Знаходимо ціну гри: $v = \frac{1}{L_{max}} = \frac{1}{Z_{min}} = \frac{27}{5} = 5{,}4$. Оптимальну стратегію $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ знаходимо, використовуючи $p_i^* = vx_i (i = 1, 2, 3)$, тобто $S_A^* = (0{,}4; 0; 0{,}6)$.

Отже, магазину вигідно продати 40 % продукції A_1 і 60 % продукції A_3, а продукцію A_2 не продавати.

Оптимальну стратегію $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*)$ знаходимо аналогічно: $q_j^* = vy_j$ $(j = 1, 2, 3)$, тобто $S_B^* = (0{,}2; 0{,}8; 0)$. Таким чином, оптимальний попит 20 % перебуває у стані B_1 і 80 % – у стані B_2.

7.5. Біматричні ігри

Раніше було розглянуто антагоністичні, або матричні, ігри, коли інтереси гравців є прямо протилежними. Існують й інші ситуації. *Біматрична гра* – це гра, у якій інтереси гравців різні, але не обов'язково протилежні. Цей факт ураховується при виборі двома учасниками гри своїх ліній поведінки (стратегій).

Постановка задачі формулюється таким чином.

Гравець A може вибрати будь-яку зі стратегій A_1, A_2, ..., A_m; гравець B – будь-яку зі стратегій B_1, B_2, ..., B_n.

Якщо гравець А вибрав i-ту стратегію A_i, а гравець В – j-ту стратегію B_j, то виграш гравця А буде дорівнювати a_{ij}, а виграш гравця В – b_{ij}. Таким чином, виграшами можна заповнити дві таблиці – платіжну матрицю гравця А і платіжну матрицю гравця В:

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \end{array}, \quad \mathrm{B} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{vmatrix} \end{array}$$

Необхідно знайти компромісне рішення, яке задовольняє обох гравців, тобто розглядається біматрична гра *з ненульовою сумою*, коли необов'язково один з учасників виграє, а інший – програє.

Типи біматричних ігор:

а) некооперативна гра – гра з ненульовою сумою, гравці приймають рішення незалежно один від одного, оскільки угоди є неможливими або їх заборонено правилами;

б) кооперативна гра – гра з ненульовою сумою, гравцям дозволяється обговорювати перед грою свої стратегії й домовлятися про сумісні дії, тобто гравці можуть утворювати коаліції; основна задача кооперативної гри – розподілення спільного виграшу між членами коаліції.

Приклад некооперативної гри «Боротьба за ринки»

Невелика фірма (гравець А) має намір збути партію товару на одному з двох ринків, які контролюються іншою, більшою фірмою (гравцем В).

З цією метою фірма А розгортає рекламну кампанію. У відповідь на ці дії пануюча на ринках фірма В може вжити законних попереджувальних заходів. Не стикаючись з протидією на ринку, фірма А захоплює його, за наявності перешкод – фірма зазнає поразки.

Фірма А вважає, що її проникнення на перший ринок більш вигідне, ніж на другий, відповідно й боротьба за перший ринок потребує вкладення значних коштів. Перемога фірми А на першому ринку дасть удвічі більший виграш, ніж перемога на другому. Якщо фірма А зазнає поразки при освоєнні першого ринку, то вона повністю розориться, а фірма В позбудеться конкурента. При поразці фірми А на другому ринку втрати будуть не руйнівними, але й перемога дасть небагато.

Таким чином, фірма А має дві стратегії: A_1 – вибір першого ринку, A_2 – вибір другого ринку.

Такі самі стратегії має фірма В: B_1 – вибір першого ринку, B_2 – вибір другого ринку.

Платіжні матриці в умовних одиницях мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі необхідно розрахувати вигоду і збиток сторін у цьому конфлікті.

Приклад кооперативної гри «Студент – викладач»

Студент (гравець А) готується до заліку у викладача (гравець В). Студент має дві стратегії – підготуватися до здачі заліку і не підготуватися. Викладач також має дві стратегії – поставити залік і не поставити залік. Якісне оцінювання виграшів подано так:

$$\textit{Гравець } A = \begin{pmatrix} \textit{оцінка заслужена} & \textit{дуже образливо} \\ \textit{вдалось обманути} & \textit{оцінка заслужена} \end{pmatrix};$$

$$\textit{Гравець } B = \begin{pmatrix} \textit{все нормально} & \textit{був неправий} \\ \textit{дозволив себе обманути} & \textit{знову прийде} \end{pmatrix}.$$

Існує багато чинників перетворення якісних показників на кількісні: складність спілкування студента й викладача, рівень знань різних студентів і т.д. Тоді кількісне оцінювання виграшів можна подати у вигляді матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок біматричної гри – це таке компромісне рішення, яке задовольняє обох гравців.

Один із підходів до розв'язання таких ігор полягає у визначенні точок рівноваги, тобто в пошуку якоїсь ситуації, явне відхилення від якої зменшує виграш гравця.

Розв'язок біматричної гри визначається змішаними стратегіями. Для розв'язання цієї гри застосовується *теорема Неша*.

Розглянемо біматричну гру розміром 2×2:

- матриці гравців мають вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix};$$

-стратегії реалізуються з такою ймовірністю:

Стратегія	*Імовірність*
A_1	$p_1 = p$
A_2	$p_2 = 1 - p$
B_1	$q_1 = q$
B_2	$q_2 = 1 - q$

-середні виграші гравців визначають за елементами платіжних матриць і ймовірністю.

Для матриці А середні виграші гравців

$$H(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \ .$$

Для матриці В середні виграші гравців

$$H(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j \ .$$

Наведемо ці співвідношення в більш зручній формі:

$$\begin{aligned} H_A(p, q) &= a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q) = \\ &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22}; \\ H_B(p, q) &= b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q) = \\ &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22}, \end{aligned} \qquad (7.12)$$

де $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$.

Точкою рівноваги, за Нешем, є пара чисел (p^*, q^*), $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$, для стратегій гравців А і В, якщо для будь-яких p і q, що відповідають умовам $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$, одночасно виконуються нерівності

$$\begin{cases} H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*); \\ H_B(p^*,q) \le H_B(p^*,q^*). \end{cases} \qquad (7.13)$$

Іншими словами, обом гравцям невигідно відхилятися від своєї стратегії поодинці, оскільки відхилення від точки рівноваги одного з гравців за умови, що інший не змінює своєї стратегії, приводить до зменшення виграшу першого.

Теорема Неша: будь-яка біматрична гра має хоча б одну рівноважну ситуацію (точку рівноваги) у змішаних стратегіях.

Таким чином, розв’язання біматричної гри полягає у визначенні p^*, q^*,

$H_A(p^*, q^*)$ і $H_B(p^*, q^*)$.

Під час визначення рівноважної ситуації слід ураховувати такий факт: виконання нерівностей (7.13) є рівносильним виконанню таких нерівностей:

$$H_A(0, q^*) \le H_A(p^*, q^*) \text{ і } H_B(p^*, 0) \le H_B(p^*, q^*);$$
$$H_A(1, q^*) \le H_A(p^*, q^*) \text{ і } H_B(p^*, 1) \le H_B(p^*, q^*).$$

Тоді, щоб переконатися, що пара чисел (p^*, q^*) визначає рівноважну ситуацію, достатньо перевірити правильність нерівності

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*)$$

тільки для двох чистих стратегій гравця A ($p = 0$ і $p = 1$) і нерівності

$$H_B(p^*, q) \le H_B(p^*, q^*)$$

тільки для двох чистих стратегій гравця B ($q = 0$ і $q = 1$).

У перший із виразів (7.12) підставимо спочатку $p = 1$, потім – $p = 0$:

$$H_A(1, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q;$$
$$H_A(0, q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22}.$$

Розглянемо різниці:

$$H_A(p, q) - H_A(1, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q +$$
$$+ a_{22} - [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q] =$$
$$= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p - (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{22} - a_{12};$$

$$H_A(p, q) - H_A(0, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q +$$
$$+ a_{22} - [(a_{21} - a_{22})q + a_{22}] = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p.$$

Уважаючи, що

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22};$$
$$\alpha = a_{22} - a_{12},$$

отримаємо такі вирази:

$$H_A(p, q) - H_A(1,q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = Cq(p-1) - \alpha(p-1) =$$
$$= (p-1)(Cq - \alpha);$$
$$H_A(p, q) - H_A(0, q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha).$$

У випадку, коли пара (p, q) визначає точку рівноваги, то, як випливає з теореми, ці різниці є невід'ємними:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) \ge 0, \;\; H_A(p,q) - H_A(0,q) \ge 0.$$

Тому остаточно одержуємо

$$\begin{cases} (p-1)(Cq-\alpha) \ge 0; \\ p(Cq-\alpha) \ge 0; \\ 0 \le p \le 1. \end{cases}$$

Аналогічно для функції $H_B(p, q)$ при $q = 1$ і $q = 0$ маємо

$$H_B(p, 1) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p + b_{21} + (b_{12} - b_{22})p;$$
$$H_B(p, 0) = (b_{12} - b_{22})p + b_{22}.$$

Уважаючи, що

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22},$$
$$\beta = b_{22} - b_{21},$$

отримаємо такі вирази:

$$H_B(p,q) - H_B(p,1) = (q-1)(Dp - \beta),$$
$$H_B(p,q) - H_A(p,0) = q(Dp - \beta).$$

У випадку, коли пара (p, q) визначає точку рівноваги, одержані різниці є невід'ємними:

$$H_B(p,q) - H_B(p,1) \geq 0, \quad H_B(p,q) - H_A(p,0) \geq 0.$$

Тому

$$\begin{cases} (q-1)(Dp - \beta) \geq 0; \\ q(Dp - \beta) \geq 0; \\ 0 \leq q \leq 1. \end{cases}$$

Зробимо висновки:

1. Щоб у біматричній грі розміром 2×2 пара чисел (p, q) визначала точку рівноваги, необхідно й достатньо, щоб одночасно виконувалися нерівності:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq - \alpha) \geq 0; \\ p(Cq - \alpha) \geq 0; \\ 0 \leq p \leq 1; \end{cases} \tag{7.14}$$

$$\begin{cases} (q-1)(Dp - \beta) \geq 0; \\ q(Dp - \beta) \geq 0; \\ 0 \leq q \leq 1, \end{cases} \tag{7.15}$$

де

$$\begin{aligned} C &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}; \\ \alpha &= a_{22} - a_{12}; \\ D &= b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}; \\ \beta &= b_{22} - b_{21}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

2. Числа C і D можуть бути додатними, від'ємними і такими, що дорівнюють нулю. Якщо C і D одночасно не дорівнюють нулю ($C \neq 0$, $D \neq 0$), то точку рівноваги визначають із систем рівнянь (7.3) і (7.4):

$$p = \frac{\beta}{D} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}, \quad q = \frac{\alpha}{C} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \tag{7.17}$$

Отже, у рівноважній ситуації вибір одного гравця повністю визначається елементами платіжної матриці іншого гравця.

Опишемо методику розв'язання біматричної гри:

1. Використовуючи матриці A і B, за формулою (7.16) визначити величини C, α, D, β.

2. Розв'язати нерівності (7.14) і (7.15) відносно p і q;

- визначити q за (7.14) для трьох випадків:

$$p = 1, \; p = 0, \; 0 < p < 1;$$

- визначити p за (7.15) для трьох випадків:

$$q = 1, \; q = 0, \; 0 < q < 1.$$

3. Виконати графічне зображення спільних стратегій на одиничному квадраті й визначити точку рівноваги, тобто координати p^* і q^* (рис. 7.10).

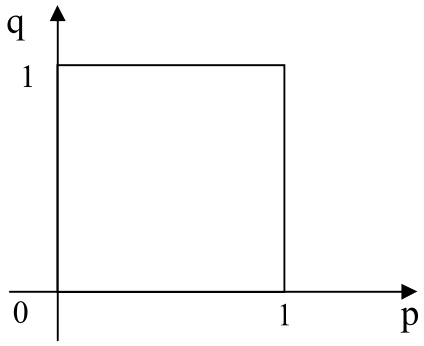


Рис. 7.10

Можна перевірити координати точки рівноваги у випадку, коли $C \neq 0$ і $D \neq 0$:

$$p^* = \frac{\beta}{D} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}};$$

$$q^* = \frac{\alpha}{C} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

4. Записати змішані стратегії:

$$S_A = (p^*;\ 1 - p^*) \text{ і } S_B = (q^*;\ 1 - q^*).$$

5. Обчислити середні виграші гравців:

$$H_A(p^*, q^*) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})p^*q^* + (a_{12} - a_{22})p^* + (a_{21} - a_{22})q^* + a_{22}; \quad (7.18)$$

$$H_B(p^*, q^*) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p^*q^* + (b_{12} - b_{22})p^* + (b_{21} - b_{22})q^* + b_{22}. \quad (7.19)$$

Розв’яжемо сформульовані раніше задачі («Боротьба за ринки» і «Студент – викладач»), тобто знайдемо p^*, q^*, $H_A(p^*, q^*)$ і $H_B(p^*, q^*)$.

Приклад 7.7. Розв’яжемо гру *«Боротьба за ринки»*, яку задано матрицями

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

1. Виконаємо розрахунки за формулою (7.16):

$C = -10 - 2 - 1 - 1 = -14$; $\alpha = -1 - 2 = -3$; $D = 5 + 2 + 1 + 1 = 9$;

$$\beta = 1 + 1 = 2.$$

2. Складемо нерівності й розв’яжемо їх:

а) розв’яжемо систему нерівностей

$$\begin{cases} (p-1)(Cq - \alpha) = (p-1)(-14q - (-3)) \geq 0, \\ p(Cq - \alpha) = p(-14q - (-3)) \geq 0 \end{cases}$$

для трьох можливих випадків:

- якщо $p = 1$, то $\begin{cases} 0 \geq 0, \\ -14q + 3 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \geq 0, \\ q \leq \dfrac{3}{14}; \end{cases}$

- якщо $p = 0$, то $\begin{cases} -(-14q + 3) \geq 0, \\ 0 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} q \geq \dfrac{3}{14}, \\ 0 \geq 0; \end{cases}$

- якщо $0 < p < 1$, то $\begin{cases} -(-14q+3) \ge 0, \\ -14q+3 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -14q+3 \le 0, \\ -14q+3 \ge 0; \end{cases}$ $-14q + 3 = 0$;

$q = \dfrac{3}{14}$;

б) розв'яжемо систему нерівностей

$$\begin{cases} (q-1)(Dp-\beta) = (q-1)(9p-2) \ge 0, \\ q(Dp-\beta) = q(9p-2) \ge 0 \end{cases}$$

для трьох можливих випадків:

- якщо $q = 1$, то $\begin{cases} 0 \ge 0, \\ 9p-2 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \ge 0, \\ p \ge \dfrac{2}{9}; \end{cases}$

- якщо $q = 0$, то $\begin{cases} -(9p-2) \ge 0, \\ 0 \ge 0; \end{cases}$

- якщо $0 < q < 1$, то $\begin{cases} -(9p-2) \ge 0, \\ 9p-2 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 9p-2 \le 0, \\ 9p-2 \ge 0; \end{cases}$ $9p - 2 = 0$; $p = \dfrac{2}{9}$.

3. За отриманими результатами побудуємо графік (рис. 7.11). Уведемо на площині систему координат і виділимо на ній одиничний квадрат, що відповідає нерівностям $0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1.$ Графік має вигляд двох зигзагів. Точка перетину зигзагів з координатами $\left(\dfrac{2}{9};\ \dfrac{3}{14}\right)$ є точкою рівноваги.

4. Змішані стратегії гравців:

$S_A = (p^*;\ 1 - p^*) = \left(\dfrac{2}{9};\ 1 - \dfrac{2}{9}\right) = \left(\dfrac{2}{9};\ \dfrac{7}{9}\right)$;

$S_B = (q^*;\ 1 - q^*) = \left(\dfrac{3}{14};\ 1 - \dfrac{3}{14}\right) = \left(\dfrac{3}{14};\ \dfrac{11}{14}\right)$.

5. Обчислимо середні виграші гравців за (7.18) і (7.19):

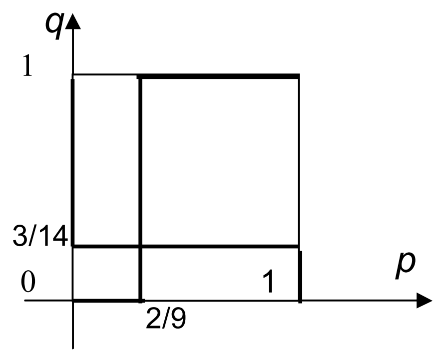


Рис. 7.11

$$H_A\left(\frac{2}{9},\ \frac{3}{14}\right) = (-10 - 2 - 1 - 1) \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} + (2 + 1) \cdot \frac{2}{9} + (1 + 1) \cdot \frac{3}{14} - 1 = -\frac{4}{7};$$

$$H_B\left(\frac{2}{9},\ \frac{3}{14}\right) = (5 + 2 + 1 + 1) \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} + (-2 - 1) \cdot \frac{2}{9} + (-1 - 1) \cdot \frac{3}{14} + 1 = \frac{1}{3}.$$

Примітка. Цю гру можна розбити на дві матричні гри з нульовою сумою:

1. Гра з матрицею *A*. Розв'язавши її графічно, маємо $S_A = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}\right)$, $v_A = -\frac{4}{7}$, $S_B = \left(\frac{3}{14}; \frac{11}{14}\right)$.

2. Гра з матрицею *B*. Розв'язавши її графічно, маємо $S_B = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $v_B = \frac{1}{3}$, $S_A = \left(\frac{2}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

Порівнюючи отримані результати з розв'язком біматричної гри, бачимо: якщо кожний із гравців застосовує свої стратегії в цій грі виходячи тільки з матриці своїх виграшів, то його оптимальний середній виграш збігається з його виграшем у рівноважній ситуації. До речі, з допомогою своєї матриці гравець може визначити оптимальну змішану стратегію іншого гравця, але не свою.

Приклад 7.8. Розв'яжемо гру *«Студент – викладач»*, яку задано матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Виконаємо розрахунки за (7.16): $C = 2$; $\alpha = 1$; $D = 5$; $\beta = 1$.

2. Складемо нерівності й розв'яжемо їх:

а) розв'яжемо систему нерівностей

$$\begin{cases} (p-1)(Cq-\alpha) = (p-1)(2q-1) \geq 0, \\ p(Cq-\alpha) = p(2q-1) \geq 0 \end{cases}$$

для трьох можливих випадків:

- якщо $p = 1$, то $q \geq 1/2$;
- якщо $p = 0$, то $q \leq 1/2$;
- якщо $0 < p < 1$, то $q = 1/2$;

б) розв'яжемо систему нерівностей

$$\begin{cases} (q-1)(Dp-\beta) = (q-1)(5p-1) \geq 0, \\ q(Dp-\beta) = q(5p-1) \geq 0 \end{cases}$$

для трьох можливих випадків:

- якщо $q = 1$, то $p \geq 1/5$;
- якщо $q = 0$, то $p \leq 1/5$;
- якщо $0<q<1$, то $p = 1/5$.

3. За отриманими результатами побудуємо графік (рис. 7.12). Уведемо на площині систему координат і виділимо на ній одиничний квадрат, що відповідає нерівностям $0 \le p \le 1, \quad 0 \le q \le 1.$

Графік має вигляд двох зигзагів. Кількість точок перетину зигзагів – точок рівноваги – три.

4. Змішані стратегії гравців: дві з них відповідають чистим стратегіям гравців $p = 0$, $q = 0$: $H_A(0, 0) = 0$, $H_B(0, 0) = -1$; $p = 1$, $q = 1$: $H_A(1, 1) = 2$, $H_B(1, 1) = 1$; одна – змішана стратегія: $p = \frac{1}{5}$, $q = \frac{1}{2}$.

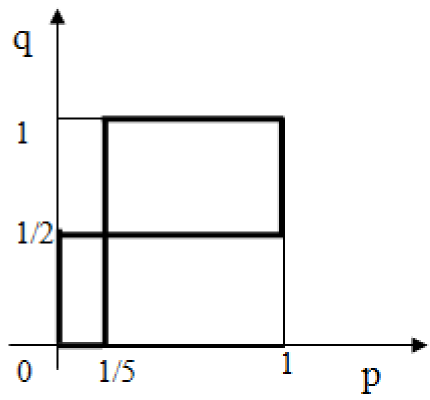


Рис. 7.12

5. Обчислимо середні виграші гравців:

$$S_A = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ S_B = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{5}.$$

Найкращим є вибір кожним з гравців першої чистої стратегії – добре підготуватися до заліку й поставити залік.

Контрольні запитання

1. Визначення змішаної стратегії в грі.
2. Основна теорема теорії ігор – теорема Неймана.
3. Активні стратегії й теорема про активні стратегії.
4. Дублювальні й домінуючі стратегії.
5. Методика аналітичного розв’язання парної гри у змішаних стратегіях.
6. Геометрична інтерпретація ігор.
7. Графічне розв’язання парних ігор розміром 2×2, $m\times2$, $2\times n$.
8. Зведення матричних ігор до задач лінійного програмування.
9. Поняття біматричної гри, її типи.
10. Точка рівноваги за Нешем для біматричної гри.
11. Теорема Неша про розв’язання біматричної гри.

8. МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

8.1. Основні поняття

Правильне й своєчасне визначення оптимальної стратегії управління запасами (УЗ), а також нормативного рівня запасів дає можливість вивільнити значні оборотні кошти, заморожені у вигляді запасів. Такі дії сприяють підвищенню ефективності використання ресурсів.

У бізнесі й виробництві зазвичай підтримується певний запас матеріальних ресурсів або комплектуючих для забезпечення безперервності виробничого процесу. Якщо запасів більше ніж потрібно, то це спричиняє невиправдані витрати на зберігання, амортизацію товару тощо. Замала кількість запасів потребує їх частого поповнення, що призводить до додаткових витрат. За допомогою моделі управління запасами визначається рівень запасу, який зрівноважує ці крайні випадки.

Для формулювання й розв'язання задачі УЗ важливим чинником є те, що попит на запас, що зберігається (в одиницю часу), може бути *детермінованим* (достовірно відомим, у найпростішому випадку – постійним у часі) або *ймовірнісним* (описаним розподілом імовірності), а також *стаціонарним* або *нестаціонарним*.

Елементами задачі (системи) управління запасами є таке:

1. *Системи постачання*: децентралізовані й централізовані. *Попит* на продукт, що запасається, може бути *детермінованим* (у найпростішому випадку – постійним у часі) або *випадковим*.

2. *Способи поповнення запасів*: миттєва поставка, поставка із затримкою на фіксований проміжок часу, поставка із затримкою на випадковий проміжок часу.

3. *Обсяг замовлення.* Замовлення зазвичай подається на одну й ту саму величину при досягненні запасом заданого рівня – так званої *точки відновлення замовлення*.

4. *Номенклатура запасу:* запас однотипних виробів або однорідного продукту, багатономенклатурний запас.

5. *Стратегія управління запасами* визначає кількість запасу і час замовлення.

Кількість запасу визначає економічний обсяг замовлення шляхом мінімізації такої функції витрат:

$$\begin{pmatrix} \textit{Сумарні} \\ \textit{витрати} \\ \textit{системи} \\ \textit{управління} \\ \textit{запасами} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{Витрати} \\ \textit{на} \\ \textit{придбання} \\ \textit{продукції} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{Витрати на} \\ \textit{оформлення} \\ \textit{замовлення} \\ \textit{(організаційні} \\ \textit{витрати)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{Витрати} \\ \textit{на} \\ \textit{зберігання} \\ \textit{замовлення} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{Втрати} \\ \textit{від} \\ \textit{дефіциту} \\ \textit{замовлення} \end{pmatrix}.$$

Усі ці витрати мають бути подані як функції шуканого обсягу замовлення й проміжку часу між замовленнями.

Таким чином, критерієм ефективності прийнятої стратегії управління запасами є функція витрат.

6. *Функція витрат* ураховує такі витрати:

а) витрати на придбання продукції (вартість поставки);

б) витрати на оформлення замовлення (постійні витрати, пов'язані з оформленням товару, його доставкою, розвантаженням і т.д.);

в) витрати на зберігання замовлення (утримання запасу на складі), які можуть бути пропорційними середньому рівню додатного запасу за період часу його існування та залишку запасу на кінець періоду, є нелінійними функціями середнього рівня запасів та часу існування додатного запасу;

г) втрати від дефіциту запасу (штрафи за дефіцит) – витрати, обумовлені відсутністю запасу необхідної продукції в потрібний момент часу, що призводить до збитків, пов'язаних з простоєм устаткування, неритмічністю виробництва тощо; штрафи можуть бути пропорційними середній додатній недостачі (дефіциту) за весь період й додатній недостачі на кінець періоду і являють собою постійні нелінійні функції від середнього рівня дефіциту й часу його існування.

7. *Обмеження в задачах управління запасами* вводяться на максимальний обсяг запасів, максимальну вагу, максимальну вартість запасів, кількість поставок у заданий період часу, вартість поставки, обсяг поставки, імовірність дефіциту.

Управління запасами полягає у відшуканні такої стратегії поповнення й витрачання запасів, при якій функція витрат набуває мінімального значення, тобто стратегія управління запасами повинна мінімізувати вибрану функцію витрат [12].

8.2. Найпростіша модель управління запасами

Математичні моделі УЗ дають можливість визначити оптимальний рівень запасів деякого товару, щоб мінімізувати сумарні витрати на купівлю, оформлення й доставку замовлення, зберігання товару, а також збитки від його дефіциту.

На проміжку часу [0, t] уведемо такі функції:

- *A(t)* – поповнення запасів;
- *D(t)* – витрата запасів;
- *R(t)* – попит на продукт, що запасається.

В управлінні запасами зазвичай використовують похідні цих функцій у часі: *a(t), d(t), r(t)* – це відповідно інтенсивності *поповнення запасів, витрати запасів і попиту на продукт, що запасається,* за проміжок часу [0, t].

Якщо функції *a(t)*, *d(t)*, *r(t)* – невипадкові величини, то модель УЗ називають *детермінованою*, якщо ж хоча б одна функція має випадковий характер – *стохастичною*.

Класифікація моделей УЗ залежно від часу:

- *статичні*, коли параметри не змінюються в часі (застосовуються для прийняття разового рішення про рівень запасів на певний період);

- *динамічні*, коли параметри залежать від часу (застосовуються для прийняття послідовних рішень про рівень запасів і коректування раніше прийнятих рішень із урахуванням змін, що відбуваються).

Функція змінення запасу, або рівень запасу в момент часу t, відображає зв'язок між кількістю одиниць товару на складі й часом t:

$$J(t) = J_0 + A(t) - D(t), \tag{8.1}$$

де J_0 – початковий запас у момент часу $t = 0$.

Цю функцію частіше використовують в інтегральній формі:

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)dt - \int_0^t d(t)dt\,. \tag{8.2}$$

Якщо на товар є попит, то функція $J(t) = J$ є спадною, якщо товар завозять на склад, – зростаючою.

Приклад 8.1. Інтенсивність надходження деталей на склад готової продукції цеху становить на початку зміни 5 од./хв. Протягом першої години інтенсивність лінійно зростає й набуває значення 10 од./хв. Далі інтенсивність надходження деталей на склад не змінюється.

Уважаючи, що надходження деталей на склад відбувається безперервно протягом усіх семи годин зміни, а вивіз деталей зі складу проводиться тільки наприкінці роботи, записати вираз для рівня запасу в довільний момент часу. Використовуючи цей вираз, знайти кількість деталей на складі:

а) через 30 хв після початку роботи;

б) наприкінці зміни.

Розв’язання

1. За умовою задачі протягом зміни деталі зі складу не видаються, отже, $d(t) = 0$, $J_0 = 0$.

2. Інтенсивність поповнення запасу протягом першої години лінійно зростає, тобто

$$a(t) = k\,t + b.$$

Ураховуючи, що $a(0) = 5$, одержуємо $b = 5$.

Оскільки наприкінці години, тобто при $t = 60$, $a(60) = 10$, то

$$10 = k \cdot 60 + 5,$$

звідки $k = \frac{1}{12}$.

Таким чином, для першої години зміни

$$a(t) = t + 5,$$

а наприкінці зміни $a(t) = 10$.

3. Ураховуючи тривалість зміни (7 год = 420 хв), за (8.2) одержуємо:

- якщо $0 \le t \le 60$, то

$$J(t) = \int_0^t \left(\frac{t}{12} + 5 \right) dt = \frac{t^2}{24} + 5t;$$

- якщо $0 \le t \le 420$ (від початку до закінчення зміни), то

$$J(t) = \int_0^{60} \left(\frac{t}{12} + 5 \right) dt + \int_{60}^{t} 10\, dt = \left(\frac{t^2}{24} + 5t \right) \Bigg|_0^{60} + 10t \Big|_{60}^{t} =$$

$$= (60^2 : 24 + 5 \cdot 60) - 0 + 10t - 600 = 150 + 300 + 10t - 600 =$$

$$= 450 + 10t - 600 = 10t - 150.$$

4. Визначаємо кількість деталей на складі через 30 хв після початку роботи:

$$J(30) = 30^2 : 24 + 5 \cdot 30 = 900 : 24 + 150 = 187{,}5,$$

а також наприкінці зміни:

$$J(420) = 10 \cdot 420 - 150 = 4\,050.$$

8.3. Статична детермінована модель без дефіциту (модель Уїлсона)

Модель Уїлсона, що є найпростішою моделлю УЗ, описує ситуацію закупівлі товару у зовнішнього постачальника. Для цієї моделі характерними є такі припущення:

- інтенсивність споживання є апріорно відомою сталою величиною: $d(t) = d$;
- замовлення доставляється зі складу, на якому зберігається раніше виготовлений товар;
- час поставки замовлення є відомою сталою величиною;
- кожне замовлення поставляється у вигляді однієї партії;
- витрати на виконання замовлення не залежать від розміру замовлення;
- витрати на зберігання запасу пропорційні його розміру;
- відсутність запасу (дефіцит) є неприпустимим: $r(t) = d(t)$.

Вхідні параметри моделі Уїлсона:

- c – ціна одиниці товару, грош. од.;
- d – інтенсивність споживання запасу, од. тов. / од. часу;
- h – витрати на зберігання одиниці товару, грош. од./(од.тов.·од. часу);
- s – організаційні витрати за одну партію товару, грош. од., які не залежать від кількості одиниць товару в ній;
- t_0 – час доставки замовлення, од. часу.

Вихідні параметри моделі Уїлсона:

- n – кількість одиниць товару в одній партії, од. тов.;

- C – загальні витрати на управління запасами в одиницю часу, грош. од. / од. часу;

- T – час використання всієї партії товару або період поставки, тобто проміжок часу між подачами замовлень або між поставками, од. часу;

- n_0 – точка замовлення, тобто запас на складі, при якому необхідно подавати замовлення на доставку чергової партії, од. тов.

Графік змінення рівня запасу в моделі Уїлсона зображено на рис. 8.1. Максимальна кількість продукції, яка є в запасі, збігається з розміром замовлення n. Якщо відлік часу почати з моменту надходження першої партії, то рівень запасу в початковий момент дорівнює кількості одиниць товару в цій партії, тобто $J(0) = n$. Процес змінення функції запасу складається з циклів поповнення запасу між двома сусідніми дефіцитами, які повторюються. На часовому інтервалі $[0, T]$ рівень запасу зменшується за прямою $J(t) = n - dt$ від значення n до нуля з постійною інтенсивністю d. Оскільки дефіцит є неприпустимим, то в момент часу T рівень запасу миттєво поповнюється до колишнього значення n завдяки надходженню партії замовлення, чому відповідають вертикальні відрізки. І так процес змінення $J(t)$ повторюється на кожному часовому проміжку T.

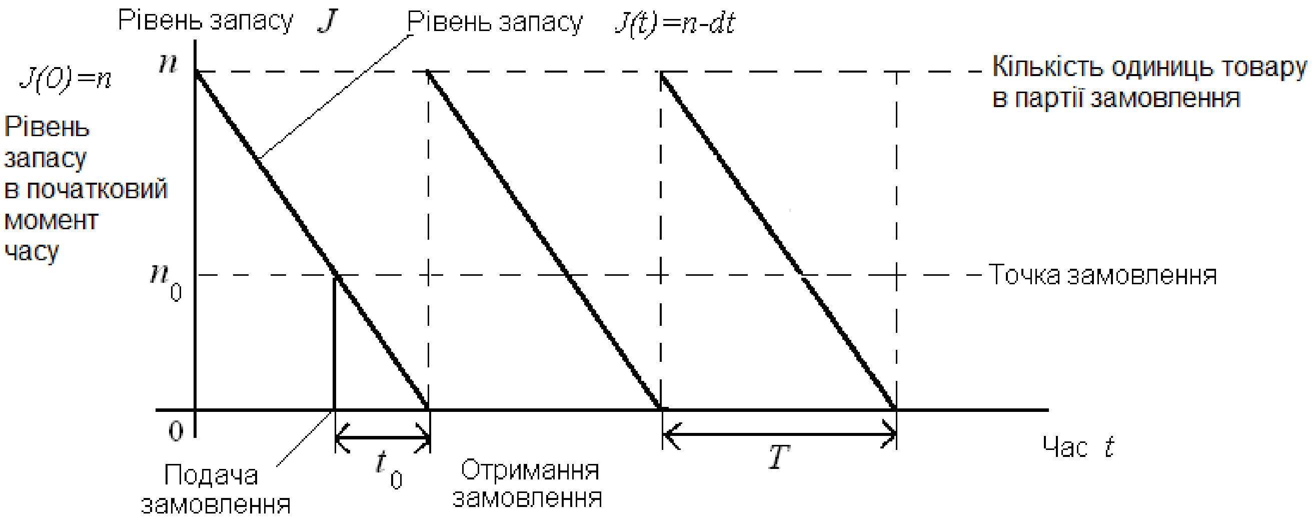


Рис. 8.1

Формули моделі Уїлсона

Задача УЗ полягає у визначенні такої кількості одиниць товару в партії n, при якій сумарні витрати на створення й зберігання запасу будуть мінімальними.

Тривалість циклу замовлення визначається формулою

$$T = \frac{n}{d}. \tag{8.3}$$

Сумарні витрати в одиницю часу – це функція від n, яка складається з кількох елементів.

Оскільки в одній партії n одиниць товару, а інтенсивність попиту за одиницю часу дорівнює d, кількість поставок дорівнює $\frac{d}{n}$, отже, протягом одиниці часу організаційні витрати дорівнюють $\frac{d}{n}s$, грош. од. / од. часу.

Середній рівень запасу дорівнює відношенню площі під графіком за цикл до тривалості циклу $\left(\frac{nT}{2}:T\right)$, тобто $\frac{n}{2}$; оскільки витрати на зберігання одиниці товару дорівнюють h, то загальні витрати на зберігання становлять $\frac{n}{2}h$, грош. од. / од. часу.

Тоді частину загальних витрат C_0 обчислюють за формулою

$$C_0 = s\frac{d}{n} + h\frac{n}{2}. \tag{8.4}$$

Графік цих витрат на УЗ в моделі Уїлсона зображено на рис. 8.2.

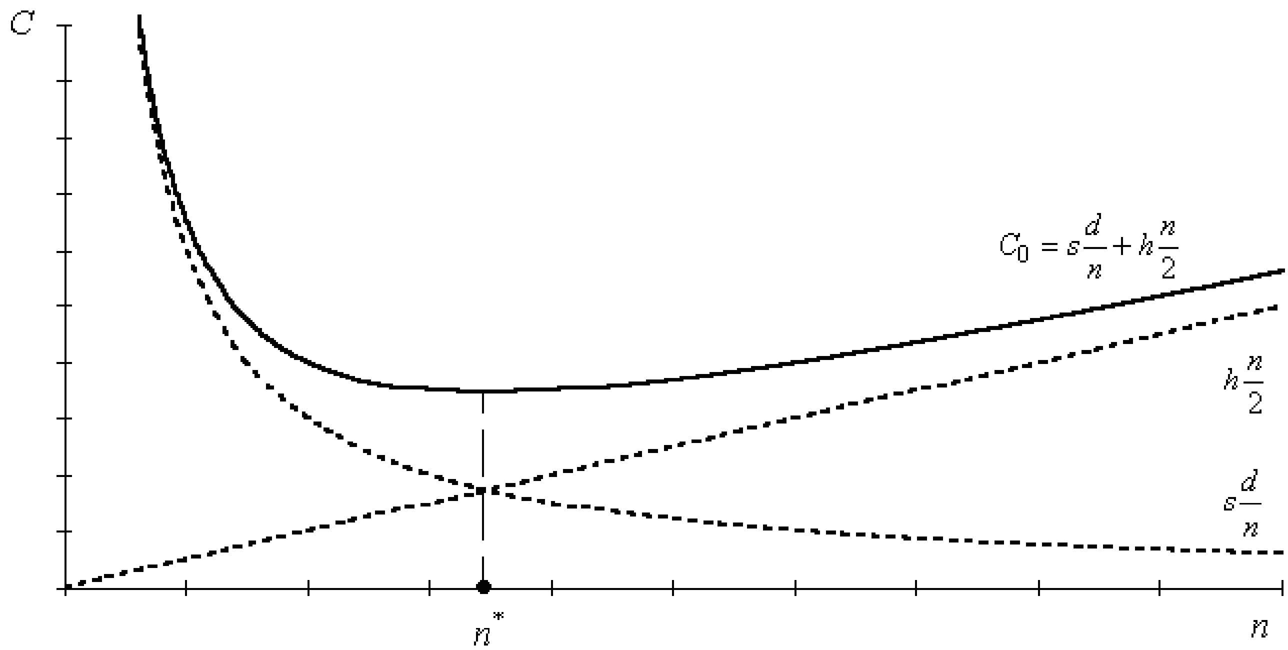


Рис. 8.2

Оскільки інтенсивність попиту за одиницю часу дорівнює d, а ціна одиниці товару – c, загальна вартість товару за одиницю часу становить cd.

Тоді загальні витрати C обчислюють за формулою

$$C = cd + s\frac{d}{n} + h\frac{n}{2}, \tag{8.5}$$

де c – ціна товару, грош. од. / од. часу; cd – витрати на покупку товару в одиницю часу, грош. од. / од. часу.

Необхідно знайти таке n^*, при якому функція $C = C(n)$ набуває найменшого значення на множині $n > 0$, тобто $C'(n) = 0$.

Для визначення мінімуму функції C знайдемо її похідну (c, d, s, h – фіксовані числа):

$$C'(n) = (cd)' + \left(\frac{sd}{n}\right)' + \left(\frac{nh}{2}\right)' = -\frac{sd}{n^2} + \frac{h}{2}.$$

Прирівнявши похідну до нуля, одержуємо $C'(n) = -\frac{sd}{n^2} + \frac{h}{2} = 0$, звідки знаходимо формулу *оптимального запасу найекономічнішого обсягу партії*

$$n^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}. \tag{8.6}$$

Поповнення запасу не може відбутися миттєво в момент розміщення замовлення. У цьому випадку точка відновлення замовлення має місце, коли рівень запасу знижується до

$$n_0 = t_0 d. \tag{8.7}$$

Формулу (8.7) отримано таким чином:

- із графічного зображення моделі Уїлсона (див. рис. 8.1) $\frac{n}{T} = \frac{n_0}{t_0}$;

- із формули (8.3) випливає, що $d = \frac{n}{T}$;

- отже, $d = \frac{n_0}{t_0}$, звідки $n_0 = t_0 d$.

Оптимальна стратегія управління запасами для розглянутої моделі формулюється таким чином: замовляти $n^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}$ одиниць продукції через кожні $T^* = \frac{n^*}{d}$ одиниць часу. Знайшовши оптимальний розмір замовлення, можна визначити оптимальну кількість поставок за одиницю часу $k^* = \frac{d}{n^*}$ і, відповідно, тривалість циклу змінення запасу $t^* = \frac{\text{од. часу}(365\ \text{днів},\ 30\ \text{днів})}{k^*}$.

Приклад 8.2. Обсяг продажу деякого магазину за рік становить 500 упаковок супу в пакетах. Величина попиту рівномірно розподіляється протягом року. Ціна одного пакета дорівнює 2 грн. За доставку замовлення власник магазину має заплатити 10 грн. Час доставки замовлення від постачальника становить 12 робочих днів (при 6-денному робочому тижні). За оцінками фахівців, витрати на зберігання за рік становлять 40 коп. за один пакет.

Визначити: кількість пакетів, яку має замовляти власник магазину для однієї поставки; частоту замовлень; точку замовлення. Відомо, що магазин працює 300 днів на рік.

Розв'язання

1. Визначимо вихідні дані: одиниця часу – *1* рік; $c = 2$ грн; $d = 500$ шт. пакетів за рік, $s = 10$ грн; $h = 0,4$ грн / (шт. · рік); $t_0 = 12$ робочих днів.

Потрібно визначити величини n^*, T, n_0.

2. Оскільки товар замовляється зі складу постачальника, а не виробляється самостійно, використовуємо модель Уїлсона (8.6) для визначення кількості пакетів:

$$n^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{0,4}} = 158,11 \approx 158 \quad \text{шт.}$$

3. Річні витрати на УЗ визначаємо за формулою (8.4):

$$C_0 = s\frac{d}{n} + h\frac{n}{2} = 10 \cdot \frac{500}{158} + 0,4 \cdot \frac{158}{2} = 63,25 \text{ грн.}$$

За формулою (8.3) подача кожного нового замовлення (частота замовлення) повинна проводитися через

$$T = \frac{n}{d} = \frac{158}{500} = 0,316 \text{ року.}$$

Оскільки відомо, що в цьому випадку рік дорівнює 300 робочим дням,

$$T = 0,316 \cdot 300 = 94,8 \approx 95 \text{ робочих днів.}$$

За формулою (8.7) визначимо рівень запасу, після якого треба робити замовлення (точка замовлення):

$$n_0 = t_0 d = 12 \cdot \frac{500}{300} = 20,$$

тобто протягом 12 днів, поки доставляється замовлення, буде продано 20 пакетів.

8.4. Модель поставок зі знижкою (задача економічного розміру замовлення з розривом цін)

Рівняння загальних витрат для ситуації, коли враховуються витрати на купівлю товару, має вигляд формули (8.5). Якщо ціна купівлі товару зі складу є постійною й не залежить від *n*, то її врахування в рівнянні загальних витрат приводить до переміщення графіка цього рівняння паралельно осі *n* без змінення форми (рис. 8.3). Тобто у разі постійної ціни товару її врахування не змінює оптимального розв'язку n^*.

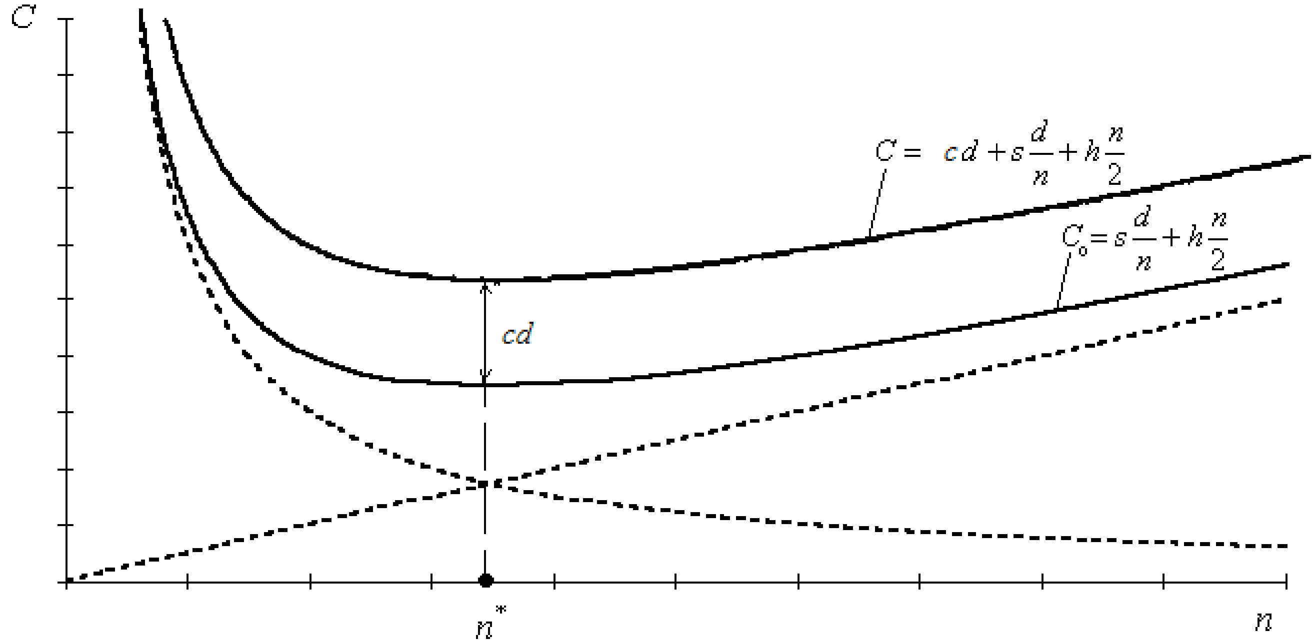


Рис. 8.3

Розглянемо бізнес-ситуацію з поставкою крупної партії товару. У цьому випадку відбудеться збільшення витрат на зберігання, але це збільшення може бути компенсоване зниженням закупівельної ціни *c*. Тоді товар можна поставляти за пільговою ціною c_w , тобто зі знижкою, якщо кількість одиниць товару в партії є більшою за деякий фіксований рівень n_w. Таким чином, вартість одиниці продукції визначається так:

$$c = \begin{cases} c, \text{якщо } n < n_w; \\ c_w, \text{якщо } n \geq n_w, \end{cases}$$

де $c > c_w$.

Функція загальних витрат *C(n)* у такому разі має вигляд

$$C = \begin{cases} C_1 = cd + \frac{sd}{n} + \frac{nh}{2}, \text{якщо } n < n_w; \\ C_2 = c_w d + \frac{sd}{n} + \frac{nh}{2}, \text{якщо } n \geq n_w. \end{cases} \quad (8.8)$$

Функція *C(n)* у точці $n = \bar{n}$ є розривною. Обидві функції (C_1 і C_2) мають мінімум у точці, де $C_1'(n) = C_2'(n) = 0$, тобто в точці $\bar{n} = \sqrt{\frac{2sd}{h}}$.

Щоб визначити оптимальну кількість одиниць товару в партії, слід порівняти значення функції *C(n)* в точках $\bar{n}$ і n_w:

- крок 1: якщо $\bar{n} \geq n_w$, то вважаємо $n^* = \bar{n}$, інакше переходимо до кроку 2;

- крок 2: порівнюємо значення функції *C(n)* у точках $\bar{n}$ і n_w, для чого обчислюємо $C(\overline{n}) = C_1(\overline{n})$ і $C(n_w) = C_2(n_w)$, і в тій точці, де функція C набуває меншого значення, буде оптимальною кількість одиниць товару в партії n^* у моделі поставок зі знижкою.

Може бути так, що $C(\overline{n}) = C(n_w)$, тоді за n^* можна узяти будь-яке з чисел $\overline{n}$ і n_w.

На рис. 8.4 показано графічну інтерпретацію ситуацій з розривом цін (тут ураховано співвідношення між n_w і $\overline{n}$ – мінімумом функції $C(n)$), де c – ціна продукції для $n < n_w$, c_w – для $n \geq n_w$, $\overline{n}$ – точка на графіках, у якій функція $C(n)$ при різних цінах набуває мінімуму.

Порівнюючи функції витрат при $\overline{n}$ і n_w, знаходять оптимальну кількість одиниць товару в партії n^* ($n^* = \overline{n}$ або $n^* = n_w$) [8].

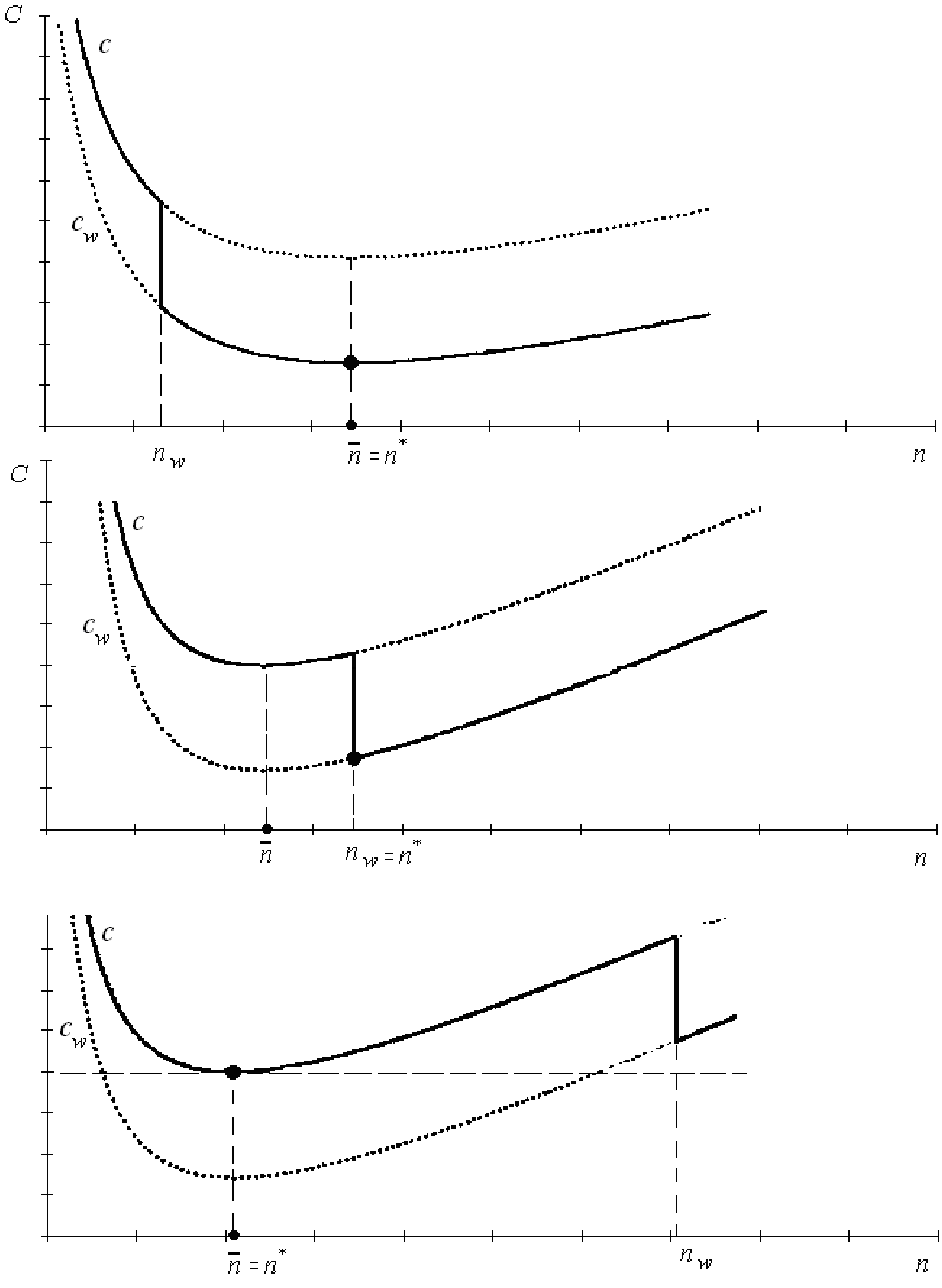


Рис. 8.4

Приклад 8.3. Інтенсивність рівномірного попиту становить 1000 од. товару на рік, організаційні витрати – 10 грош. од., витрати на зберігання – 4 грош. од., ціна одиниці товару – 5 грош. од., проте, якщо у партії не менше 500 одиниць товару, то ціна знижується до 4 грош. од. Знайти оптимальну кількість одиниць товару в партії.

Розв'язання

Маємо такі дані: $d = 1000$, $s = 10$, $h = 4$, $c = 5$, $n_w = 500$, $c_w = 4$.

Крок 1:

1) за формулою (8.8) визначаємо $C(n)$:

- якщо $n < 500$, то

$$C(n) = C_1 = cd + \frac{sd}{n} + \frac{nh}{2} = 5 \cdot 1000 + \frac{10 \cdot 1000}{n} + \frac{n \cdot 4}{2} = 5000 + \frac{10000}{n} + 2n,$$

- якщо $n \geq 500$, то

$$C(n) = C_2 = c_w d + \frac{sd}{n} + \frac{nh}{2} = 4 \cdot 1000 + \frac{10 \cdot 1000}{n} + \frac{n \cdot 4}{2} = 4000 + \frac{10000}{n} + 2n;$$

2) знайдемо точку локального мінімуму двома способами:

$$C_1'(n) = C_2'(n) = -\frac{10000}{n^2} + 2 = 0, \text{ тоді } \bar{n} = \sqrt{\frac{10000}{2}} = \sqrt{5000} \approx 71;$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{2sd}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1000}{4}} = \sqrt{5000} \approx 71;$$

3) оскільки $n_w = 500$ і $\bar{n} = 71$, $\bar{n} < n_w$ ($71 < 500$), отже, переходимо до кроку 2.

Крок 2:

1) обчислюємо $C(\bar{n})$:

$$C(\bar{n}) = C_1(\bar{n}) = C_1(71) = 5000 + \frac{10000}{71} + 2 \cdot 71 \approx 5283;$$

2) у точці $n = n_w$ одержуємо

$$C(n_w) = C_2(n_w) = C_2(500) \approx 4000 + \frac{10000}{500} + 2 \cdot 500 = 5020;$$

3) порівнявши $C(n_w = 500) = 5020$ і $C(\bar{n} = 71) = 5283$, маємо

$$C(n_w = 500) < C(\bar{n} = 71).$$

Функція C набуває меншого значення при $n_w = 500$. Отже, у моделі поставок зі знижкою оптимальною кількістю одиниць товару в партії є $n^* = 500$.

8.5. Стохастичні моделі управління запасами

У стохастичній моделі УЗ попит є випадковою величиною, що значно ускладнює аналіз управління запасами.

Припустимо, що попит r на проміжку часу T є випадковою величиною й задано його закон (ряд) розподілу $p(r)$ або густину ймовірності $\varphi(r)$ (зазвичай $p(r)$ і $\varphi(r)$ оцінюють на основі дослідних або статистичних даних). Якщо попит r менший за рівень запасу s, то придбання (зберігання, продаж) надлишку продукту потребує додаткових витрат c_2 на одиницю продукту. Навпаки, якщо попит r більший за рівень запасу s, то це призводить до штрафу за дефіцит c_3 на одиницю продукції.

У стохастичних моделях сумарні витрати є випадковою величиною, до розгляду беруть її середнє значення або математичне сподівання.

До функції сумарних витрат C разом з витратами C_1 (на поповнення запасу) і C_2 (на зберігання запасу) необхідно ввести витрати C_3 – на штраф за дефіцит:

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

У стохастичній моделі при дискретному випадковому попиті r, що має закон розподілу $p(r)$, математичне сподівання сумарних витрат з урахуванням тільки витрат на невикористані одиниці продукту визначається формулою

$$C(s) = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s-r)p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r). \tag{8.9}$$

Тут перший доданок ураховує витрати на придбання (зберігання) надлишку (s - r) одиниць продукту (при $r \le s$), а другий – штраф за дефіцит на (r - s) одиниць продукту (при $r > s$).

У разі неперервного випадкового попиту, який задано густиною ймовірності $\varphi(r)$, вираз для математичного сподівання сумарних витрат набирає вигляду

$$C(s) = c_2 \int_0^s (s-r)\varphi(r)dr + c_3 \int_0^s (r-s)\varphi(r)dr. \tag{8.10}$$

Задача управління витратами полягає у визначенні такого запасу s, при якому математичне сподівання сумарних витрат (8.9) або (8.10) набуває мінімального значення.

Доведено, що при *дискретному випадковому попиті r* математичне сподівання (8.9) є мінімальним при запасі s_0, що відповідає нерівності

$$F(s_0) < \rho < F(s_0+1),$$

а при *неперервному випадковому попиті r* математичне сподівання (8.10) є мінімальним при значенні s_0, яке визначають із рівняння

$$F(s_0) = \rho.$$

Тут $F(s) = p\ (r<s)$ – функція розподілу попиту r, а $F(s_0)$ і $F(s_0+1)$ – її значення; ρ – густина збитків через попит, який не було задоволено: $\rho = \dfrac{c_3}{c_2 + c_3}$. Величина ρ, що має велике значення в управлінні запасами,

змінюється в межах $0 \le \rho \le 1$. Якщо c_3 є значно меншим від c_2, то значення ρ прямує до нуля; якщо c_3 є значно більшим від c_2, то значення ρ прямує до 1.

Неприпустимість дефіциту відповідає припущенню, що $c_3 = \infty$ або $\rho = 1$.

Приклад 8.4. Підприємство купує агрегат із запасним блоком до нього. Вартість одного блока становить 5 грош. од. У разі виходу агрегата з ладу через поломку блока, якого немає в запасі, простій агрегата й термінове замовлення нового блока до нього коштуватиме 100 грош. од.

Визначити оптимальну кількість запасних блоків, які слід придбати разом з агрегатом.

Розв'язання

За умовою задачі $c_2 = 5$, $c_3 = 100$.

Обчислимо густину збитків через брак запасних блоків за формулою

$$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3} = \frac{100}{5 + 100} = 0,952.$$

Ураховуючи, що $F(s) = p\ (r < s)$, знайдемо значення функції розподілу попиту за таблицею

s	0	1	2	3	4	5	6	≥ 6
r	0	1	2	3	4	5	6	≥ 6
$F(s)$	0,00	0,00	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00

Очевидно, що оптимальний запас становить $s_0 = 3$, оскільки він відповідає нерівності $F(s_0) < \rho < F(s_0+1)$: $F(3) < 0,952 < F(4)$.

Контрольні запитання

1. У чому полягає задача управління запасами?
2. Назвіть елементи системи управління запасами.
3. Які основні питання вирішує стратегія управління запасами?
4. Опишіть найпростішу модель управління запасами.
5. Сформулюйте вхідні і вихідні параметри моделі Уїлсона (статичної детермінованої моделі без дефіциту).
6. Охарактеризуйте модель УЗ із урахуванням знижки.
7. Охарактеризуйте стохастичну модель управління запасами.

9. ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ

9.1. Економічна динаміка та її моделювання

Залежно від урахування часового фактора економічні задачі поділяють на такі види:

- *статичні задачі*, що вивчають стани економічних об'єктів без урахування змінення їхніх показників у часі;
- *динамічні задачі*, які відображають залежність змінних від часу та їх взаємозв'язок у часі (наприклад, динаміка інвестицій визначає динаміку величин основного капіталу, що є найважливішим чинником змінення обсягу виробництва).

Час в економічній динаміці характеризується як величина, що може бути неперервною й дискретною:

- неперервний час зручний для моделювання, оскільки дає можливість використовувати апарат диференціального числення й диференціальних рівнянь;
- дискретний час зручний для аналізу, оскільки статистичні дані завжди є дискретними величинами, які віднесено до конкретних одиниць часу, і в цьому випадку використовується апарат різницевих рівнянь.

9.2. Методи розв’язання динамічних моделей

За допомогою динамічних моделей вивчають змінення стану економічної системи в часі. Процес дослідження динамічних моделей складається з таких *етапів*:

1. Постановка задачі дослідження системи.
2. Побудова математичної моделі.
3. Подання моделі у вигляді диференціального або різницевого рівняння.
4. Отримання розв’язків за допомогою числових та аналітичних методів.
5. Аналіз розв’язків і поведінки системи.
6. Рекомендації щодо управління системою.
7. Уточнення моделі й повернення до етапу 1.

Динамічну систему можна описати різними способами:

1) в аналітичній формі

$$y(t) = f(t); \tag{9.1}$$

2) у вигляді системи диференціальних рівнянь (швидкість змінення показників економічної системи: ціни, доходу і т.д.):

$$\frac{dy}{dt} = g(y,t), \; y(t_0) = y_0; \tag{9.2}$$

3) у вигляді системи різницевих рівнянь, що є дискретною формою системи (9.2):

$$y(t+h) = g_1(y(t),t), \ y(t_0) = y_0, \tag{9.3}$$

де t – параметр часу; $y(t)$ – вектор функцій стану економічної системи; $f(t)$, $g(y,t)$ – вектори неперервних функцій; h – проміжок часу.

Аналітичними методами знаходять розв’язок системи (9.2) як функцію вигляду (9.3), яку визначено аналітично. Такі методи базуються на розв’язанні диференціальних рівнянь, і їх застосування обмежується тільки простими лінійними системами диференціальних рівнянь. Для інших, більш складних рівнянь, які можуть описувати системи (9.2), застосовують *числові методи розв’язання*.

Одним із найпростіших числових методів розв’язання задачі (9.2) є *метод Ейлера*, який полягає в заміні похідної функції різницевим рівнянням, при цьому інтервал часу поділяється на однакові проміжки h ($t_{k+1} = t_k + h$, $k = \overline{0,n}$):

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t+h)}{h}.$$

Наприклад, динаміку економічних показників можна описати таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{dy}{dt} = ay^p(t), a > 0, p = 1,2,... .$$

Аналітичний вигляд функції:

при $p = 1$ $y(t) = aCe^{at}$;

при $p > 1$ $y(t) = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{a}{(t+C)(p-1)}}$,

де C – довільна константа [14].

9.3. Показники економічної динаміки

Показники, що характеризують динаміку економічного об'єкта: абсолютні прирости, темпи зростання й приросту.

Нехай розглядається величина $A(t)$, що залежить від часу і має такі динамічні показники на проміжку часу від 0 до 1:

- абсолютний приріст $\Delta A(1) = A(1) - A(0)$;
- дискретний темп зростання $\eta = \frac{A(1)}{A(0)}$;
- дискретний темп приросту $\alpha = \eta - 1 = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}$.

Якщо темп приросту α є незмінним у часі, то динаміка показника $A(t)$ *може бути* описана як $A(t) = A(0)\cdot(1 + \alpha)^{t}$.

Якщо величина *A(t)* є неперервною функцією часу, то її збільшення з постійним темпом можна записати як $A(t) = A(0)e^{\lambda t}$ $(e \approx 2{,}72)$, де λ – неперервний темп приросту, який в загальному випадку розраховують так:

$$\lambda(t) = \frac{d(A(t))}{dt}\frac{1}{A(t)}.$$

Розглянемо темпи приросту для суми й добутку показників.

1. Показник S(t) = A(t) + B(t).

Якщо показники *A(t)* і *B(t)* збільшуються з постійними неперервними темпами α і β відповідно, то

$$S(t) = A(t) + B(t) = A(0)e^{\alpha t} + B(0)e^{\beta t} = A(0)e^{\alpha t}\left[1 + e^{(\beta-\alpha)t}\frac{B(0)}{A(0)}\right].$$

Оскільки $(\beta - \alpha) < 0$, величина в квадратних дужках прямує до одиниці і темп приросту суми наближається до темпу α, що швидко зростає.

Якщо показники *A(t)* і *B(t)* збільшуються *з* дискретними темпами α і β відповідно, то

$$S(t) = A(t) + B(t) = A(0)(1 + \alpha)^t + B(0)(1 + \beta)^t.$$

Приклад 9.1. Дохід *Y(t)* дорівнює сумі споживання *C(t)* та інвестицій *I(t).* Дискретний темп приросту споживання становить 10 %, інвестицій – 25 %. У перший рік ($t = 0$) $C(0) = 500$, $I(0) = 150$. Чому дорівнює темп зростання доходу *Y(t)* у другому році?

Розв'язання

Це задача для моделі $S(t) = A(t) + B(t)$, де *A(t)* і *B(t)* – функції, що зростають у часі з дискретними темпами α і β. Опишемо динаміку зростання цих функцій:

$$A(t) = A(0)(1+\alpha)^t;\ B(t) = B(0)(1+\beta)^t.$$

Тоді можна записати:

1) $Y(0) = C(0) + I(0) = 500 + 150 = 650$;

2) $Y(2) = C(2) + I(2) = C(0)(1 + 10\%)^2 + I(0)(1 + 25\%)^2 = 500\cdot1{,}12 + 150\cdot1{,}252 = 605 + 234{,}375 = 839{,}375$.

Отже, визначаємо темп зростання доходу *Y(t)* в другому році: $\frac{Y(2)}{Y(0)} = \frac{839{,}375}{650} = 1{,}29$, або 129 %.

2. Показник P(t) = A(t)B(t).

Якщо *A(t)* і *B(t)* – неперервно зростаючі функції з темпами α і β відповідно, то

$$P(t) = A(t)B(t) = A(0)e^{\alpha t}B(0)e^{\beta t} = A(0)B(0)e^{(\alpha+\beta)t} = P(0)e^{(\alpha+\beta)t},$$

тобто темп приросту добутку дорівнює сумі темпів приросту співмножників.

Якщо *A(t)* і *B(t)* – функції, що зростають із темпами α і β відповідно, то

$$P(t) = A(t)B(t) = A(0)(1+\alpha)^tB(0)(1+\beta)^t = A(0)B(0)(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)^t = P(0)(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)^t.$$

При малих α і β добуток $\alpha\beta$ є нехтовно малим і темп приросту добутку приблизно дорівнює сумі темпів приросту співмножників. Якщо ж величина $\alpha\beta$ є значною, то темп приросту добутку не можна вважати таким, що приблизно дорівнює сумі темпів приросту співмножників, оскільки є значно більшим за неї.

Зв'язок між показниками обсягів і темпів легко продемонструвати на прикладі виробничої функції (ВФ) (для окремого випадку ВФ Кобба – Дугласа). Нехай $Y(t)$, $K(t)$, $L(t)$ – показники обсягів випуску продукції, капіталу й праці (неперервні функції часу), а $y(t)$, $\kappa(t)$, $l(t)$ – неперервні темпи їх приросту. ВФ обсягу з нейтральним технічним прогресом у постійному темпі γ має вигляд

$$Y(t) = f\,[K(t), L(t)]e^{rt}.$$

Злогарифмувавши цю залежність і здиференціюювавши її за часом, маємо

$$y(t) = \alpha(t)k(t) + \beta(t)l(t) + \gamma,$$

де $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ – еластичності випуску продукції за капіталом і працею відповідно.

Це лінійне рівняння характеризує внесок темпів приросту чинників виробництва в загальні темпи приросту доходу, а показник γ характеризує внесок технічного прогресу.

9.4. Динамічна рівновага в економіці. Найпростіша модель рівноваги

В економічній теорії *рівновага* – це такий стан об'єкта, який зберігається за умов, якщо немає зовнішніх впливів. Розглянемо просту економічну систему в стані рівноваги й опишемо її змінення (рух) в неперервному й дискретному випадках.

1. *Неперервний випадок*. Динаміка системи описується диференціальним рівнянням.

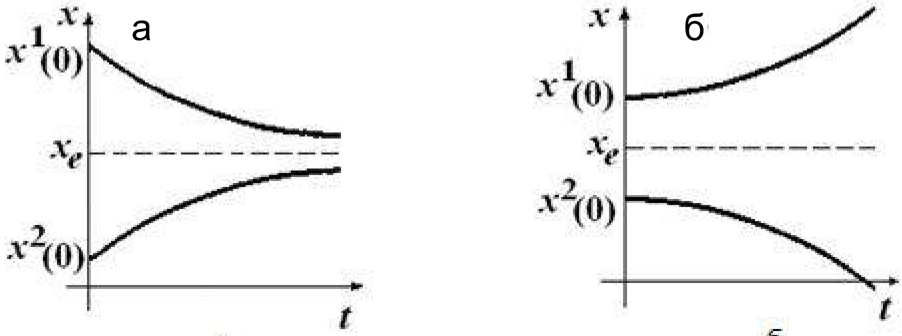
Нехай систему описано одним показником $x(t)$. Диференціальне рівняння зв'язує змінення цього показника зі швидкістю його руху x'_t:

$$x'_t = k(x - x_e),$$

де x_e – відхилення показника від стану рівноваги, k – коефіцієнт.

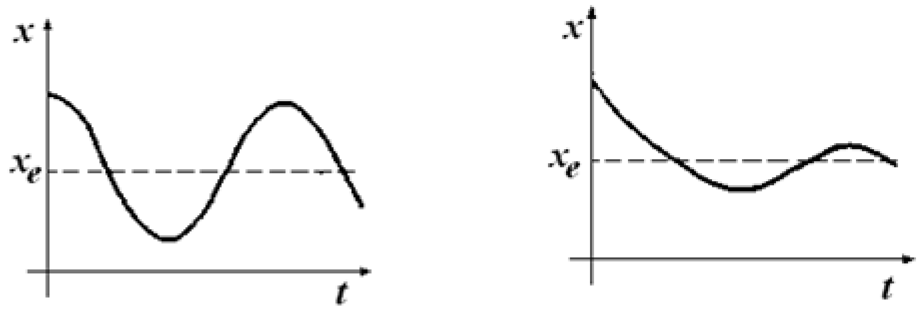
Розв'язок диференціального рівняння: $x(t) = x_e + (x(0) - x_e)e^{\kappa t}$. Якщо $k < 0$, то $e^{\kappa t} \to 0$ і $x(t) \to x_e$, тобто при відхиленні величини $x(t)$ від значення x_e вона знов прямує до цього значення. Якщо $k > 0$, то $e^{kt} \to \infty$ і $x(t) \to \infty$.

Поведінку динамічних систем показано на рис. 9.1 (*а* – стан стійкої рівноваги, *б* – стан нестійкої рівноваги) і 9.2.



а *б*

Рис. 9.1



а *б*

Рис. 9.2

2. *Дискретний випадок*. Динаміка системи описується різницевим рівнянням.

Різницеве рівняння зв'язує величини x у сусідні моменти часу, тобто величини x_t і x_{t-1}, наприклад:

$$x_t = x_{t-1} + k(x_{t-1} – x_e),$$

розв’язком якого є $x_t = x_e + (x(0) – x)(l + k)^t$.

При $k < 0$ у разі відхилення від x_e система рухатиметься в напрямку x_e, при $k > 0$ – йти ще далі від нього. Система перебуває в стані стійкої рівноваги при $-2 < k < 0$ і в стані нестійкої рівноваги при $k > 0$ або $k < -2$ (при $k < -1$ показник x кожного разу «перестрибує» через значення рівноваги, причому при $k < -2$ – дуже далеко, щоб наблизитися до x_e) [14].

9.5. Приклади динамічних моделей

Павутиноподібна модель економічної динаміки

Ця модель дає можливість досліджувати стійкість цін та обсягів товарів на ринку й традиційно описується кривими попиту й пропозиції (рис. 9.3) за умов загаювання в часі (*лагу*).

Нехай виробник (наприклад, зернова ферма) визначає *пропозицію товару* в поточному періоді на рівні цін попереднього періоду, тобто Q_t^S =

$= S_t(p_{t-1})$. Для функції пропозиції розглядається часовий лаг тривалістю 1 од. часу. Дійсно, рішення щодо обсягу виробництва приймають з урахуванням поточних цін, але виробничий цикл має певну тривалість, і пропозиція, що відповідає цьому рішенню, надійде на ринок після завершення цього циклу.

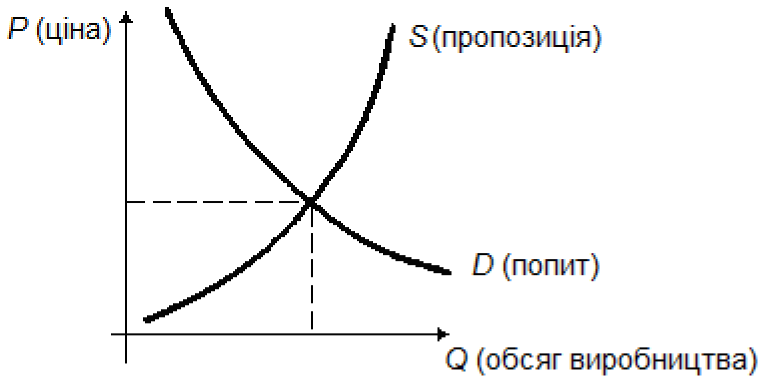


Рис. 9.3

Крива попиту характеризує залежність попиту на товар від ціни товару в певний період часу, тобто $Q_t^D = D_t(p_t)$.

Тоді динаміку ціни можна описати системою рівнянь

$$\{ Q_t^S = S_t(p_{t-1}),\ Q_t^D(t) = D_t(p_t),\ Q_t^D = Q_t^S\}$$

або одним рівнянням

$$D_t(p_t) = S_t(p_{t-1}).$$

З останнього рівняння можна знайти ціну p_t у певний момент часу за відомим значенням p_{t-1} у попередній момент часу. Схема розв'язання:

$$Q_0 \to p_0 = D^{-1}(Q_0) \to Q_1 = S(p_0) \to p_1 = D^{-1}(Q_1) \to Q_2 = S(p_1) \to \ldots$$

(де D^{-1} – функція, обернена до функції попиту).

Як окремий випадок розглянемо павутиноподібну модель, у якій функції пропозиції та попиту є лінійними:

$$S(p) = B + Ap_{t-1},\ D(p) = E - Cp_t,\ S(p) = D(p).$$

Тут $A > 0$, оскільки функція пропозиції є зростаючою; $C > 0$, оскільки функція попиту є спадною; $E > B > 0$, тобто $D(0) > S(0) > 0$ (уважаємо, що при нульовій ціні попит перебільшує пропозицію).

Рівняння, що описує динаміку такої системи, має вигляд

$$D(p_t) = S(p_{t-1}) \text{ або } E - Cp_t = B + Ap_{t-1}.$$

Знайдемо спочатку рівноважну ціну й рівноважний обсяг виробництва Q^*, які мають задовольняти рівнянню

$$Q^* = E - Cp^* = B + Ap^*,$$

звідки

$$p^* = \frac{E-B}{A+C}, \quad Q^* = E - C\frac{E-B}{A+C} = \frac{EA+CE-CE+CB}{A+C} = \frac{AE+BC}{A+C}.$$

Дослідження поведінки цін та обсягів виробництва у випадку, якщо початкова точка не збігається з точкою рівноваги, проведемо графічно (рис. 9.4). Задаємо деяку початкову кількість товару й ціну, що не збігаються зі значеннями в точці рівноваги. Далі наносимо точки відповідно до процедури розрахунку за моделлю та з’єднуємо їх між собою горизонтальними або вертикальними прямими лініями. Одержуємо рисунок типу «павутина».

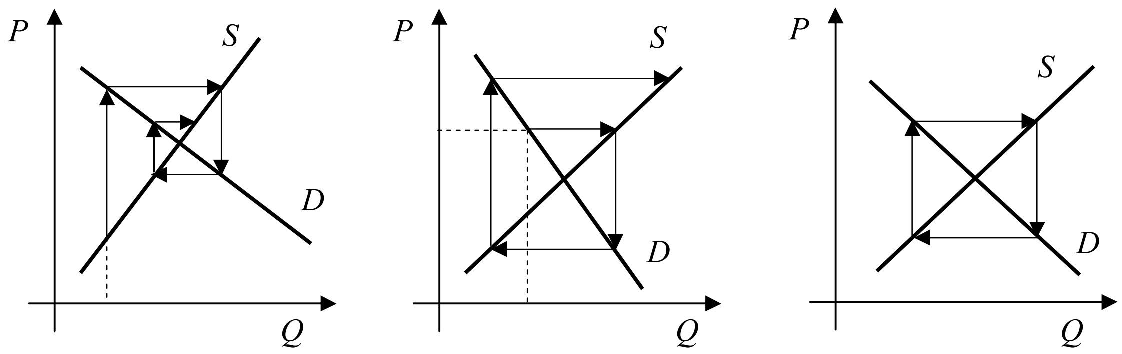
Отже, можна зробити такі висновки:

1) якщо крива пропозиції нахилена крутіше, ніж крива попиту, то рівновага на такому ринку буде стійкою (див. рис. 9.4, а);

2) якщо крива попиту нахилена крутіше, ніж крива пропозиції, то рівновага на ринку буде нестійкою (див. рис. 9.4, б);

3) якщо нахили кривих попиту й пропозиції однакові, то ціни на ринку регулярно коливатимуться з постійною амплітудою (див. рис. 9.4, в).

б



в

а

Рис. 9.4

Тепер перейдемо до формального аналізу моделі. Визначаючи p_t через p_{t-1} із виразу $E - Cp_t = B + Ap_{t-1}$, маємо таке рекурентне співвідношення:

$$p_t = \frac{E-B}{C} - \frac{A}{C} p_{t-1}.$$

Визначаючи p_1 через p_0, потім p_2 через p_1 й виконавши алгебричні перетворення з використанням формули суми геометричної прогресії, одержуємо вираз для ціни p_t у довільний момент часу t [1]:

$$p_t = \frac{E-B}{C} \frac{1-(-1)^t\left(\frac{A}{C}\right)^t}{1+\frac{A}{C}} + (-1)^t\left(\frac{A}{C}\right)^t p_0.$$

Очевидно, що при $\frac{A}{C} < 1$ $\left(\frac{A}{C}\right)^t \to 0$ і $p_t = \frac{E-B}{A+C} = p^*$, тобто при більш крутому нахилі кривої пропозиції, ніж кривої попиту, рівновага системи є стійкою.

Якщо $\frac{A}{C} > 1$, тобто більш крутою є крива попиту, то $\left(\frac{A}{C}\right)^t \to \infty$ і процес є розбіжним (рівновага системи є нестійкою).

Якщо $\frac{A}{C} = 1$, тобто якщо $A = C$, то значення p_t розташовані навколо значення рівноваги.

Отже, для стійкості системи визначальною є менш сильна, згладжувальна реакція на змінення ціни, тобто та функція, яка має часовий лаг (тут – функція пропозиції).

В реальності при $\frac{A}{C} > 1$ нескінченно зростаючих коливань не буде, оскільки при великих відхиленнях від положення рівноваги лінійне наближення стає неможливим. У більш реалістичній нелінійній моделі відбуваються нелінійні коливання з великою, але скінченною амплітудою, які є прообразом економічних циклів піднесення й спаду виробництва.

Модель зростання Харрода – Домара

Прикладом моделі з неперервним часом є модель макроекономічної динаміки (найпростіший її варіант – модель Харрода – Домара).

Модель Харрода – Домара описує динаміку доходу $Y(t) = C(t) + I(t)$, де $C(t)$ – функція споживання, $I(t)$ – функція інвестицій. Економіка вважається закритою, тому чистий експорт дорівнює нулю, а державні витрати в моделі не виділяються. Основна передумова моделі зростання – формула взаємозв'язку між інвестиціями і швидкістю зростання доходу.

Модель фактично базується на таких передумовах:

- інвестиційний лаг дорівнює нулю: інвестиції миттєво переходять у приріст капіталу, що формально означає $\Delta K(t) = I(t)$, де $\Delta K(t)$ – неперервна функція приросту капіталу в часі;
- вибуття капіталу відсутнє;
- виробнича функція є лінійною;
- витрати праці не змінюються в часі;
- не ураховується вплив технічного прогресу.

Модель Солоу

Для *моделі Солоу* характерними є такі припущення: агрегування (виробляється єдиний продукт) і замкненість (відсутність експорту й імпорту) економіки. Модель містить такі змінні стану:

- $У(t)$ – кількість випущеної продукції (дохід) у момент часу t;
- $C(t)$ – кількість споживання продукції;
- $I(t)$ – кількість інвестицій (капіталовкладень);
- $K(t)$ – кількість капіталу;
- $L(t)$ – кількість трудових ресурсів (робота).

Модель Солоу має вигляд

$$Y(t) = f(C(t), I(t), K(t), L(t)).$$

Порівняно з моделлю Харрода – Домара модель Солоу дає можливість більш точно описати деякі особливості макроекономічних процесів:

1) випуск продукту йде на споживання й капіталовкладення:

$$Y(t) = C(t) + I(t);$$

2) виробнича функція $Y = F(K, L)$ є нелінійною й характеризується зменшенням граничної продуктивності;

3) ураховується вибуття основного капіталу, капіталовкладення йдуть на збільшення капіталу, а також на його амортизацію:

$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt} + \mu K(t);$$

4) ураховуються динаміка трудових ресурсів і технічного прогресу та їх вплив на економічне зростання;

5) ставиться й розв'язується задача максимізації рівня споживання на деякій множині стійких траєкторій;

6) прийнято такі спрощення: уважаються постійними норми заощаджень і вибуття капіталу, інвестиційних лагів немає, а виробнича функція має постійну віддачу від масштабу.

Контрольні запитання

1. У чому полягає основна відмінність статичних і динамічних задач в економіці?
2. У чому полягає відмінність задач, математичного апарату й результатів для економічних моделей з дискретним і неперервним часом?
3. Як можна записати динаміку показника, що зростає:
   а) з постійним дискретним темпом;
   б) з постійним неперервним темпом?
4. Методи розв’язання динамічних моделей.
5. Наведіть означення поняття динамічної рівноваги в економіці. Що є найпростішою моделлю рівноваги?
6. Павутиноподібна модель економічної динаміки.
7. Модель Харрода – Домара.
8. Модель Солоу.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Клир, Дж. Системология. Автоматизация системных задач [Текст] / Дж. Клир. – М. : Радио и связь, 1990. – 534 с.
2. Лотов, А. В. Введение в экономико-математическое моделирование [Текст] / А. В. Лотов. – М. : Наука, 1984. – 392 с.
3. Петров, А. А. Опыт математического моделирования экономики [Текст] / А. А. Петров, И. Г. Поспелов, А. А. Шинанин. – М. : Энергоиздат, 1996. – 544 с.
4. Ульянченко, О. В. Дослідження операцій в економіці [Текст] / О. В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2001. – 580 с.
5. Ланкастер, К. Математическая экономика [Текст] / К. Ланкастер. – М. : Сов. радио, 1972. – 464 с.
6. Пономаренко, О. І. Основи математичної економіки [Текст] / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Інформтехніка, 1995. – 340 с.
7. Исследование операций в экономике [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, Б. А. Тришин, М. Н. Фридман. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
8. Алесинская, Т. В. Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономико-математические методы и модели» [Текст] / Т.В. Алесинская. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2002. – 153 с.
9. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие / И. Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1986. – 319 с.
10. Абланская, Л. И. Экономико-математическое моделирование [Текст] : учебник / Л. И. Абланская. – М. : Экзамен, 2006. – 798 с.
11. Экономико-математические методы и прикладные модели [Текст] : учеб. пособие / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 391 с.
12. Таха, Х. А. Введение в исследование операций [Текст] / Х. А. Таха. – М. : Издательский дом „Вильямс”, 2001. – 912 с.
13. Куликов, Ю. Г. Экономико-математические методы и модели [Текст] / Ю. Г. Куликов, Н. Ф. Шеховцова, Л. П. Зикеева. – М. : Моск. психолого-социальный ин-т ; Воронеж : Изд-во НПО "МОДЭК", 2000. – 230 с.
14. Замков, О. О. Математические методы в экономике [Текст] / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – М. : ДиС, 2003. – 352 с.
15. Кожухов, В.Д. Экономико-математические модели и методы [Текст] : учеб. пособие / В.Д. Кожухов, В.Л. Петрик. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2007. – 85 с.
16. Экономико-математическое моделирование [Текст] : учебник / под ред. проф. И. Н. Дрогобыцкого. – М. : Экзамен, 2006. – 560 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Філіпковська Лариса Олексіївна
Петрик Валерія Леонідівна
Клименко Тетяна Анатоліївна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В УПРАВЛІННІ ТА ЕКОНОМІЦІ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2013
Підписано до видання 30.07.2013
Ум. друк. арк. 7,8. Обл.-вид. арк. 8,81. Електронний ресурс

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001