

doi: 10.32620/oikit.2024.101.08

УДК 539.3

В. Ю. Мірошніков, О. Б. Савін,
М. Л. Косенко, О. О. Ільїн

Аналіз напруженого стану шару з двома циліндричними врізаними опорами та циліндричними втулками

*Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»*

Розв'язана просторова задача теорії пружності для шару на циліндричних врізаних опорах з розташованими між кожною опорою та шаром циліндричними втулками (товстостінним и трубами). На межах спряження шару з трубами задані умови гладкого контакту. На поверхнях шару задані напруження, на внутрішніх поверхнях труб задані переміщення (жорстко спряжені з опорою). Аналітико-чисельне розв'язання задачі засновано на рівняннях Ламе, записаних для шару та кожної труби в декартових та локальних циліндричних координатах. При виконанні граничних умов, а також умов спряження шару з трубами, створена система інтегро-алгебраїчних рівнянь, яка зводиться до системи лінійних алгебраїчних. За для цього до базисних розв'язків рівняння Ламе застосовані формули переходу узагальненого методу Фур'є між різними системами координат. Після розв'язання системи рівнянь і знаходження невідомих був отриманий напружено-деформований стан в тілі шару та труб. Для чисельного отримання результатів був застосований метод редукації. Виконання граничних умов показало високу збіжність результатів, точність яких залежить від порядку системи рівнянь. Аналіз напружено-деформованого стану шару та труб проведено при різних матеріалах втулок в місцях концентрації напружень. Результати свідчать про збільшення напружень σ_r та σ_z на циліндричних поверхнях у випадку застосування втулок з поліаміду. Запропонований метод дозволяє проводити аналіз напружено-деформованого стану широкого спектра трубних конструкцій. Він також надає можливість оцінити, як зміна матеріалу та геометричних параметрів впливає на розподіл напружень у таких системах, що дозволяє оптимізувати конструкції та забезпечити їх надійність. В подальшому розвитку означеної теми досліджень необхідно розглянути моделі, де втулки комбінуються з іншими типами неоднорідностей (порожнини, армування) а також з іншими граничними умовами.

Ключові слова: волокнистий композит; шар з циліндричними втулками; узагальнений метод Фур'є; рівняння Ламе

Вступ

Втулки широко застосовуються в машинобудуванні, аерокосмічній галузі, металообробці, будівництві та інших напрямках. Вони є основою для багатьох типів підшипників, які забезпечують плавне обертання валів, використовуються для з'єднання різних деталей машин і механізмів та захищають вали від пилу та бруду. Втулки виготовляються з різних матеріалів: сталеві, бронзові, латунні, з поліаміду, поліетилену, гумові та керамічні.

Найчастішими експлуатаційними пошкодженнями втулок є знос, деформації або руйнування, які виникають від перевантаження або невірно підбраного матеріалу втулки. Пошкодження від перевантаження також виникають в елементах, що спряжені з втулкою.

Складність розрахунку таких вузлів полягає у поєднанні в одній моделі різних типів граничних поверхонь та їх спряження. Тому для визначення напруженого стану переважно застосовують чисельні методи, наприклад метод скінчених елементів [1]. Так, за допомогою комп'ютерної програми ANSYS [2] на

основі методу скінчених елементів, розв'язана задача для півпростору, армованого оболонкою та вертикальною циліндричною порожниною [3]. Але чисельні методи мають ряд відомих недоліків: неможливість врахування нескінчених елементів, апроксимація, складність моделювання, залежність від якості вхідних даних, труднощі з інтерпретацією результатів, необхідність верифікації з експериментальними даними або аналітичними розв'язками, якщо такі існують. Ці недоліки можуть суттєво впливати на точність розрахунків, що не дає впевненості у кінцевому результаті.

Класичні аналітичні методи [4, 5] дозволяють отримати точні розрахунки напружень і деформацій у конструкціях, дають змогу зрозуміти фізичні процеси, що відбуваються в матеріалах, служать базою для розробки більш складних чисельних методів. Але, при розв'язанні задач для складних моделей (з кількістю граничних поверхонь більше трьох), доводиться вдаватися до значних спрощень реальних конструкцій. Тому створення аналітичного методу визначення напружено-деформованого стану, який найбільше відповідає моделі, є важливою складовою механіки деформівного твердого тіла.

Є методи [6 – 10], які розв'язують задачі близькі до поданої в цій роботі. В цих роботах розглядаються циліндричні неоднорідності, що розташовані перпендикулярно межах шару.

Наприклад, у роботі [6] під час розв'язання задачі для шару з перпендикулярною циліндричною порожниною використано підхід, який ґрунтується на припущенні про ідеальні умови контакту на верхній та нижній межах шару. У роботі [7] застосовано схожий метод за умови, що нижня поверхня шару жорстко закріплена. Однак задача, в якій розглядається шар з циліндричним включенням або порожниною, що проходить паралельно межах шару, не може бути вирішена методами, використаними в цих дослідженнях. Це пояснюється тим, що застосування інтегральних перетворень Лапласа та інтегральних синус і косинус перетворень Фур'є до граничних умов і рівнянь руху створює одновимірну векторну неоднорідну крайову задачу, яка дозволяє отримати розв'язки лише для задач дифракції хвиль.

У дослідженні [8] було розглянуто проблему кручення пружного півпростору, що містить вертикальну циліндричну порожнину та коаксіальний штамп. Для розв'язання задачі було застосовано два інноваційних методи, що дозволили звести її до інтегральних рівнянь другого роду. Однак отримане рішення є наближеним і має певні відхилення від розв'язку задачі Рейснера-Сагоці.

У дослідженні [9] запропоновано аналітичний метод розв'язання задачі для композитних ламінованих перфорованих пластин на основі методу шарового збивання. Надійність і точність цього підходу підтверджено порівнянням з розрахунками за допомогою методу скінчених елементів. У роботі [10] розв'язано задачу крутильних коливань плоского круглого штампа, взаємодіючого з верхньою межею багатошарової пружної основи, яка містить вертикальну циліндричну порожнину з віссю, перпендикулярною до шарів. Для розв'язання використовуються інтегральне перетворення Вебера та парні інтегральні рівняння. Методи, застосовані в роботах [9, 10], не підходять для розв'язання задач із неоднорідностями, що розташовані паралельно до шару.

Метою цієї роботи є створення високоточного методу розв'язання задачі теорії пружності для шару з двома поздовжніми циліндричними товстостінними трубами. На поверхнях шару задані напруження, на внутрішніх поверхнях труб

задані переміщення. Шар та труби жорстко спряжені.

Найбільш точні результати напруженого стану для шару з циліндричними трубами, розташованими паралельно його граничним поверхням, можна отримати за допомогою аналітико-числового узагальненого методу Фур'є [11]. Головною перевагою цього методу є можливість отримання розв'язку для групи тіл, кожне з яких має власну систему координат. При цьому завдяки функціям переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе можна одночасно використовувати різні типи координатних систем.

Так, за допомогою узагальненого методу Фур'є, вдалося звести розв'язання задач про деформацію циліндрів з порожнинами і включеннями, а також півпростору зі сфероїдальною порожниною [12 – 15] до сумування точних розв'язків рівняння Ламе в локальних системах координат. Але вказані роботи застосовують функції переходу базисних розв'язків тільки між циліндричними системами координат, а також між циліндричною та сферичною. Це не дозволяє розв'язувати задачі з шаром.

Обґрунтування узагальненого методу Фур'є для переходу базисних розв'язків між декартовою і циліндричною системами координат наведено в роботі [16], де розв'язується задача для півпростору з циліндричною порожниною.

Для шару з циліндричною порожниною, з використанням формул узагальненого методу Фур'є, розв'язана задача в роботі [17], в роботі [18] задача для шару з суцільним циліндричним включенням, а в роботах [19, 20] з циліндричною товстостінною трубою.

Також, з використанням узагальненого методу Фур'є, розв'язані задачі для шару спряженого з декількома циліндричними неоднорідностями: шар на двох врізаних циліндричних опорах [21], шар з двома суцільними циліндричними включеннями [22].

Але роботи [17–22] враховують не більше однієї труби та не враховують умови контактного типу.

Тож задача для шару з двома циліндричними врізаними опорами та циліндричними втулками може бути змодельована як шар з двома циліндричними трубами із заданими на внутрішніх поверхнях труб переміщеннями та заданими умовами контактного типу між шаром та трубами.

Метою даної роботи є:

1. Створення методу розрахунку напружено-деформованого стану шару з двома врізаними циліндричними трубами, при заданих на внутрішніх поверхнях труб переміщеннями та заданими умовами контактного типу на спряженнях шару з трубами;
2. Проведення аналізу напруженого стану при різних матеріалах труб.

1. Постановка задачі

Модель складається з пружного шару, в якому паралельно його поверхням розміщені дві товстостінні циліндричні труби.

Шар розглядався в декартовій системі координат (x, y, z) , труби в локальних циліндричних (r_p, φ_p, z) , де $p = 1, 2$ – номер труби (див. рис. 1). Циліндрична система координат першої труби (r_1, φ_1, z) поєднана і однаково орієнтована з декартовою системою шару.

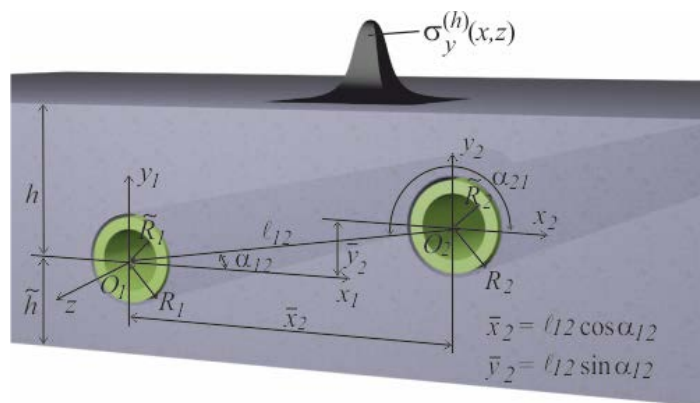


Рис. 1. Шар з двома циліндричними товстостінними трубами

Відстань до меж шару $y = h$ та $y = -\tilde{h}$. Радіуси труб: зовнішні R_p та внутрішні \tilde{R}_p . Відстань між центрами труб l_{12} , розташовані під кутом α_{12} .

Шар та труби пружні, однорідні та ізотропні, виготовлені з різних матеріалів, мають різні фізико-механічні властивості.

На плоских поверхнях шару задані напруження $F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z)$,

$F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, де

$$\vec{F}_h^0(x, z) = \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z, \quad \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_z. \quad (1)$$

На внутрішніх поверхнях труб задані переміщення

$\vec{U}_p(\phi_p, z)|_{\rho_p = \tilde{R}_p} = \vec{U}_p^0(\phi_p, z)$, де

$$\vec{U}_p^0(\phi_p, z) = U_\rho^{(p)} \vec{e}_\rho + U_\phi^{(p)} \vec{e}_\phi + U_z^{(p)} \vec{e}_z. \quad (2)$$

Між шаром та кожною трубою виконуються умови спряження

$$\left. \begin{aligned} U_{0,\rho}(\phi_p, z)|_{\rho_p = R_p} &= U_{p,\rho}(\phi_p, z)|_{\rho_p = R_p} \\ \sigma_{0,\rho}(\phi_p, z)|_{\rho_p = R_p} &= \sigma_{p,\rho}(\phi_p, z)|_{\rho_p = R_p} \\ \tau_{0,\rho\phi}(\phi_p, z)|_{\rho_p = R_p} &= 0 \\ \tau_{p,\rho\phi}(\phi_p, z)|_{\rho_p = R_p} &= 0 \\ \tau_{0,\rho z}(\phi_p, z)|_{\rho_p = R_p} &= 0 \\ \tau_{p,\rho z}(\phi_p, z)|_{\rho_p = R_p} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

де $U_0(\phi_p, z)$ – нормальні переміщення для шару;

τ_0 – дотичні напруження для шару;

$U_p(\phi_p, z)$ – нормальні переміщення для труб;

τ_p – дотичні напруження для труб.

Всі задані функції будемо вважати безперервними та швидко спадаючими від початку координат по осі z і осі x .

2. Метод розв'язання

Розв'язок задачі представлено у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 = & \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda) d\lambda, \quad (5)$$

$$\vec{U}_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_2, \phi_2, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_2, \phi_2, z; \lambda) d\lambda,$$

де $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $B_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(2)}(\lambda)$,

$\tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)$ – 24 невідомі функції ($k = 1..3$), які необхідно знайти з крайових

умов (1), (2) і умов спряження (3); $\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda)$,

$\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$, $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки рівняння Ламе, які

представлено у вигляді [15]:

$$\vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m \phi)};$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m \phi)} \right]; k = 1, 2, 3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\nu - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\nu - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

ν – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

При виконанні граничних умов (1) отримано 6 інтегро-алгебраїчних рівнянь. З граничних умов (2) отримано ще 6 інтегро-алгебраїчних рівнянь. З умов спряження (3) отримано 12 рівнянь.

В результаті отримано нескінчену систему з 24 інтегро-алгебраїчних рівнянь, яка має 24 невідомих.

Відомі функції (1), (2) попередньо представлені через подвійний інтеграл Фур'є для шару, а для внутрішніх поверхонь труб через ряд та інтеграл Фур'є. При виконанні граничних умов в напруженнях, до правої частини виразу (4) застосовувався оператор напруження. Після цього права та ліва частина рівнянь звільнені від інтегралів та рядів Фур'є. Так як означені рівняння представлено в різних системах координат, то для приведення їх до однієї системи координат було використано формули переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе [15]:

- від зовнішніх розв'язків для циліндра $\vec{S}_{k,m}$ до розв'язків для шару $\vec{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\vec{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned} \vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \vec{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k = 1, 3; \\ \vec{S}_{2,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \vec{u}_1^{(\mp)} - \lambda^2 \vec{u}_2^{(\mp)} + \right. \\ &\quad \left. \pm 4\mu(1-\nu) \vec{u}_3^{(\mp)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- від розв'язків шару $\vec{u}_k^{(+)}$ та $\vec{u}_k^{(-)}$ до внутрішніх розв'язків циліндру $\vec{R}_{k,m}$

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \vec{R}_{k,m}, \quad (k = 1, 3); \\ \vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \vec{R}_{1,m} \pm \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \pm \gamma \cdot \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1-\nu) \vec{R}_{3,m} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\vec{R}_{k,m} = \vec{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)};$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{1,n}(\rho, \lambda) &= \bar{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_\phi \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right); \\ \tilde{b}_{2,n}(\rho, \lambda) &= \bar{e}_\rho \cdot \left[(4\nu - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho) \right] + \\ &+ \bar{e}_\phi i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\nu - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda\rho I'_n(\lambda\rho); \\ \tilde{b}_{3,n}(\rho, \lambda) &= - \left[\bar{e}_\rho \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_\phi \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right];\end{aligned}$$

$\bar{e}_\rho, \bar{e}_\phi, \bar{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

- від розв'язків циліндру з номером p до розв'язків циліндру з номером q

$$\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\phi_q + \lambda z)}, k = 1, 2, 3; \quad (8)$$

$$\bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \tilde{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq}) \right] \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{qp} ; $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

Таким чином, застосувавши формули переходу (6) – (8) для кожного рівняння, ми перевели їх у локальні системи координат. Це дозволило отримати нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, яку ми розв'язали методом редукції та знайшли невідомі. Чисельні результати свідчать про високу точність задоволення граничних умов.

3. Чисельні дослідження напруженого стану

Пружний ізотропний шар має дві товстостінні циліндричні труби зовнішнім радіусом $R_1 = R_2 = 16$ мм, внутрішнім $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 = 11$ мм (рис. 1). Фізичні характеристики шару: алюмінієвий сплав Д16Т, коефіцієнт Пуассона $\nu_0 = 0,3$, модуль пружності $E_0 = 7,1 \cdot 10^4$ МПа. Фізичні характеристики труб застосовувалися в двох варіантах:

1. Сталь ШХ15, коефіцієнт Пуассона $\nu_0 = 0,28$, модуль пружності $E_0 = 2,16 \cdot 10^5$ МПа.
2. Поліамід, коефіцієнт Пуассона $\nu_0 = 0,4$, модуль пружності $E_0 = 1,65 \cdot 10^3$ МПа.

Геометричні параметри моделі: $h = \tilde{h} = 25$ мм, $\alpha_{12} = 0$. Відстань між

трубами $\ell_{12} = 50$ мм.

На верхній межі шару задані нормальні напруження у вигляді одиничної хвилі $\sigma_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot ((x + \ell_{12} \cdot 3)^2 + 10^2)^{-2}$, зсунутої ліворуч від центру першої труби на $\ell_{12} \cdot 3$, а також нульові дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$. На нижній межі шару задані нульові напруження $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$. На внутрішніх поверхнях труб задані нульові переміщення $U_\rho^{(p)} = U_\phi^{(p)} = U_z^{(p)} = 0$.

Нескінчена система була зрізана по параметру $m=5$ (кількість членів ряду Фур'є і порядок системи рівнянь).

Точність виконання граничних умов при зазначених m і заданих геометричних параметрах становить не менше ніж 10^{-5} , при значеннях від 0 до 1.

На рис.2 представлені задані нормальні напруження σ_y та нормальні напруження σ_x , які виникають на верхній та нижній межах шару на відстані від середини навантаження до середини другої труби.

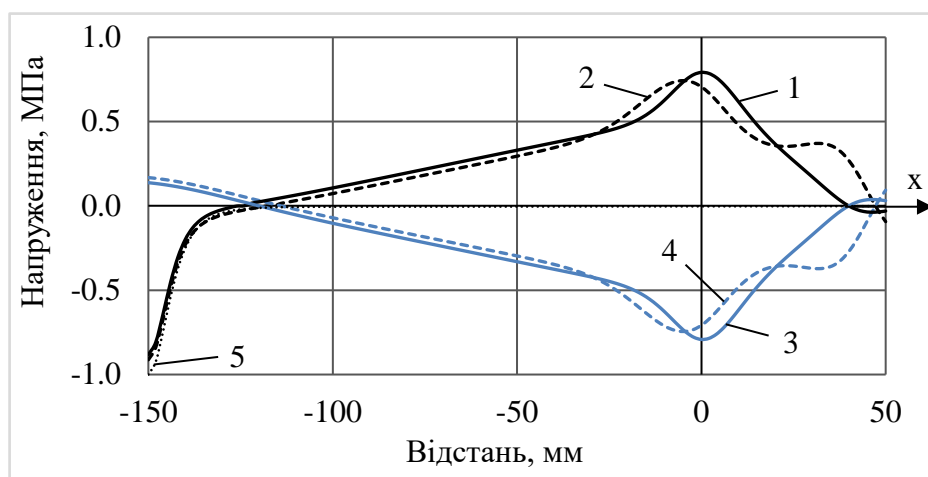


Рис. 2. Напруження на плоских поверхнях шару; 1 – $\sigma_x^{(h)}$ сталь; 2 – $\sigma_x^{(h)}$, поліамід; 3 – $\sigma_x^{(\tilde{h})}$ сталь; 4 – $\sigma_x^{(\tilde{h})}$, поліамід; 5 – задана $\sigma_y^{(h)}$

При заданій геометрії, напруження на плоских межах шару в області першої втулки, не перевищують задані (рис. 2).

Якщо втулки виконані зі сталі, напруження σ_x дещо зростають як в нижній, так і в верхній частині шару (рис. 2). Застосування поліаміду призводить до зменшення максимальних значень напружень σ_x та їхнього зсуву в бік дії навантаження (див. рис. 2, лінії 2, 4).

На рис.3 представлені напруження σ_ρ на внутрішній поверхні лівої труби в залежності від матеріалу труби.

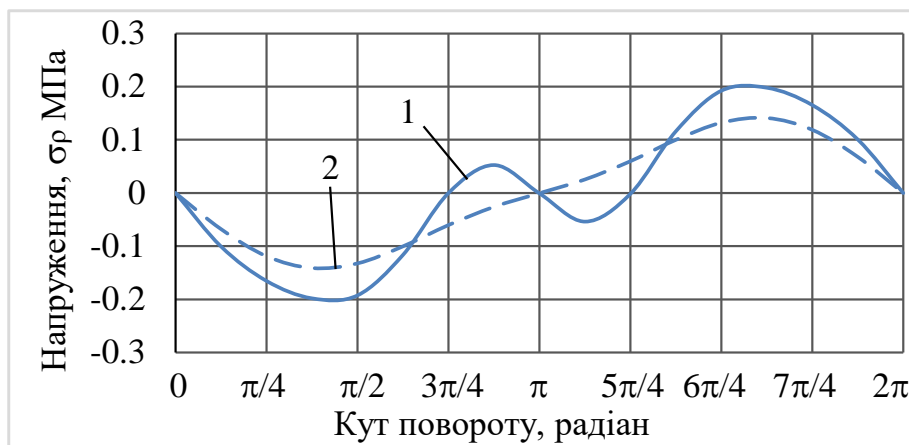


Рис. 3. Напруження σ_r на внутрішній поверхні труби; 1 – сталь, 2 – поліамід

Напруження σ_r збільшуються, якщо застосовується матеріал для труб – сталь (рис. 3).

Максимальні значення напружень σ_r розташовані у правій частині втулки у верхній та нижній зонах (не співпадають з вертикальною віссю).

На рис. 4 представлені напруження σ_ϕ на межах спряження шару з втулками в тілі шару в залежності від матеріалу втулок.

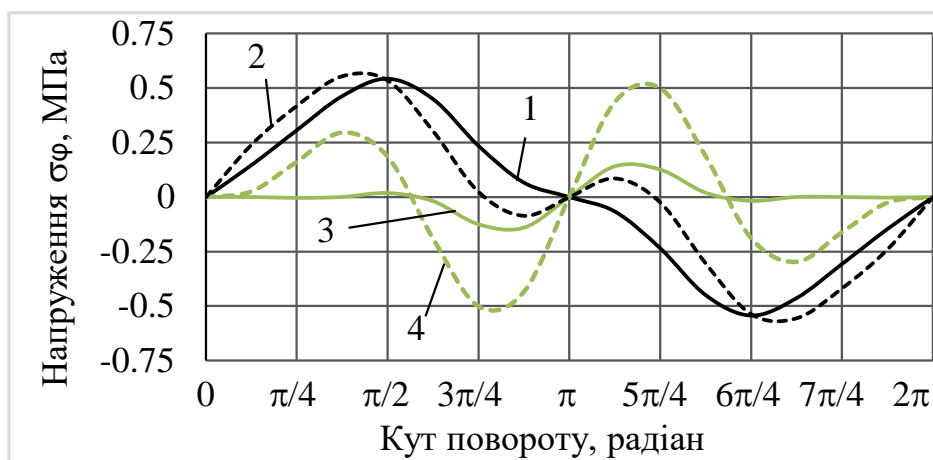


Рис. 4. Напруження σ_ϕ на циліндричних поверхнях шару; 1 – опора $r = 1$, сталь; 2 – опора $r = 1$, поліамід; 3 – опора $r = 2$, сталь; 4 – опора $r = 2$, поліамід

При застосуванні втулок з поліаміду, напруження σ_ϕ на опорних циліндричних поверхнях шару зростають (рис. 4, лінії 2, 4). Особливо це відчувається на правій опорі ($r = 2$), де напруження зростають суттєво (лінія 4 в порівнянні з лінією 3).

При порівнянні напружень на опорних циліндричних поверхнях між собою, можна відмітити, що ліва опора ($r = 1$) залишається більш навантаженою при будь-якому матеріалі.

Напруження σ_z на опорних циліндричних поверхнях шару і на внутрішній поверхні труби (втулки) $r = 1$ представлені на рис. 5.

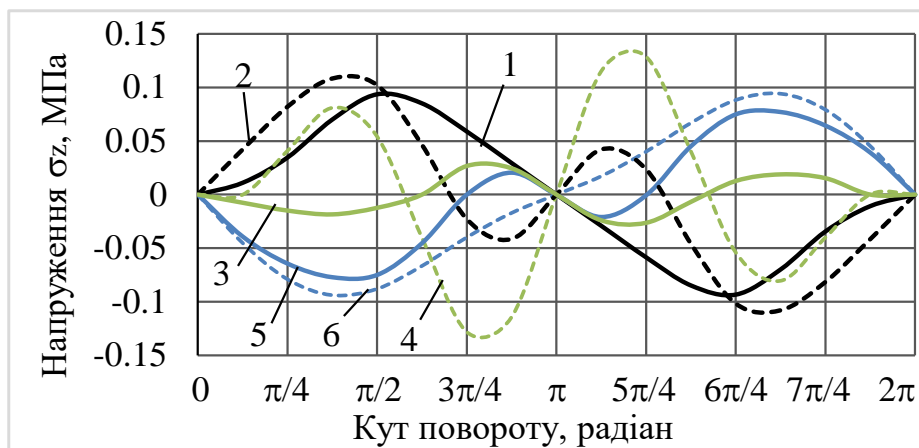


Рис. 5. Напруження σ_z ; 1 – $\sigma_{0,z}|_{\rho_1=R_1}$, сталь; 2 – $\sigma_{0,z}|_{\rho_1=R_1}$, поліамід;
 3 – $\sigma_{0,z}|_{\rho_2=R_2}$, сталь; 4 – $\sigma_{0,z}|_{\rho_2=R_2}$, поліамід; 5 – $\sigma_{1,z}|_{\rho_1=\tilde{R}_1}$, сталь;
 6 – $\sigma_{1,z}|_{\rho_1=\tilde{R}_1}$, поліамід;

Напруження σ_z в тілі шару на лівій опорній циліндричній поверхні (рис. 5., лінії 1, 2) збільшуються при застосуванні втулок з поліаміду. Максимальні напруження в цьому випадку знаходяться в верхній частині циліндричної поверхні.

На правій опорній циліндричній поверхні (рис. 5., лінії 3, 4) максимальні напруження σ_z , по аналогії з напруженнями σ_ϕ , також значно збільшуються при застосуванні втулок з поліаміду. Максимальні напруження розташовані в лівій частині циліндричної поверхні.

Порівнюючи напруження σ_z на внутрішній поверхні труби $\rho = 1$ (рис. 5., лінії 5, 6) з напруженнями σ_z на опорній циліндричній поверхні шару (рис. 5., лінії 1, 2) можна констатувати що тіла шару та втулки працюють в різному напрямку: верхня частина циліндричної поверхні шару розтягується, а втулки стискається, нижня частина циліндричної поверхні шару стискається, а втулки розтягується.

В цілому можна констатувати, що напруження σ_z збільшуються при застосуванні втулок з поліаміду.

4. Висновки

Запропоновано аналітико-числовий метод розв'язання задачі для шару, розташованого на двох циліндричних опорах з циліндричними втулками. На поверхнях шару задані напруження, на внутрішній поверхні труб задані переміщення. Між втулками та шаром задані умови гладкого контакту.

Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Застосувавши метод редукції та аналітико-чисельний узагальнений метод Фур'є, був отриманий точний розв'язок

Виконано числовий аналіз напруженого стану з різними матеріалами втулок. Отримано розподілення напружено-деформованого стану в місцях концентрації напружень в трубах та втулках. Результати свідчать про збільшення напружень σ_ϕ та σ_z на циліндричних поверхнях у випадку застосування втулок з

поліаміду.

Розроблений метод дає змогу інженерам отримувати точні результати при розрахунку міцності втулок різного матеріалу та геометрії. Це дозволяє оптимізувати конструкції та забезпечити їх надійність.

В подальшому розвитку означеної теми досліджень необхідно розглянути моделі, де втулки комбінуються з іншими типами неоднорідностей (порожнини, армування) а також з іншими граничними умовами.

Список літератури

1. Tekkaya, A. E., Soyarslan, C. Finite Element Method in CIRP Encyclopedia of Production Engineering. Springer Berlin Heidelberg. 2014. pp. 508–514. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699
2. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. Available online: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation> (accessed on 16.11.2024).
3. Zasovento, A., Fasoliak, A. Mathematical modeling of the dynamics of an elastic half-medium with a cylindrical cavity reinforced by a shell under axisymmetric loads. *New Materials and Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering*, 2023, 2, 67–73. <https://doi.org/10.15588/1607-6885-2023-2-10>
4. Гузь, А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн, Київ : Наук. Думка. 1978. 307 с.
5. Гринченко, В. Т., Мелешко, В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Київ: Наук. Думка. 1981. 284 с.
6. Fesenko, A., & Vaysfel'd, N. The Wave Field of a Layer with a Cylindrical Cavity in Structural Integrity Springer International Publishing. 2019. pp. 277–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51
7. Fesenko, A., Vaysfel'd, N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*, 2021, 33, 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>
8. Malits, P. Torsion of an elastic half-space with a cylindrical cavity by a punch. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2021, 89, 104308. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104308>.
9. Khechai, A., Belarbi, M. O., Bouaziz, A. et al. A general analytical solution of stresses around circular holes in functionally graded plates under various in-plane loading conditions. *Acta Mech*, 2023, vol. 234, pp. 671–691. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03413-1>.
10. Snitser, A. R. The reissner-sagoci problem for a multilayer base with a cylindrical cavity. *Journal of Mathematical Sciences*, 1996, 82(3), 3439–3443. <https://doi.org/10.1007/bf02362661>
11. Николаев, А. Г., Проценко, В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». 2011, 344 с.
12. Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*, 2015, 8(2), 148–158. <https://doi.org/10.1134/s1995423915020068>.
13. Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, 57(6), 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/s0021894416060237>.
14. Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. Model of the Stress State of a Unidirectional

Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. *Mechanics of Composite Materials*, 2016, 52(2), 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.

15. Николаев, А. Г., Орлов, Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. *Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій*. 2012, Вип.20. С. 253 – 259.

16. Ukrayinets, N., Murahovska, O., Prokhorova, O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021, 2(7 (110)), 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.

17. Miroshnikov, V., Denysova, T., Protsenko, V. The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 2019, 103, 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>.

18. Miroshnikov, V. Y., Medvedeva, A. V., Oleshkevich, S. V. Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. *Materials Science Forum*, 2019, 968, 413–420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.968.413>.

19. Miroshnikov, V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 22(2), 44–52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>.

20. Vitaly, M. Rotation of the Layer with the Cylindrical Pipe Around the Rigid Cylinder. *Advances in Mechanical and Power Engineering . CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham, 2023, pp. 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32

21. Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., Demenko, V. F. Analysis of the Stress State for a Layer with Two Incut Cylindrical Supports. *Journal of Mechanical Engineering*, 2023, 26(1), 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>.

22. Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., Pohrebniak, O. A. Analysis of the Stress State of a Layer with Two Cylindrical Elastic Inclusions and Mixed Boundary Conditions. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 25(1), 22–29. <https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022>.

References

1. Tekkaya, A. E., Soyarslan, C. (2014). Finite Element Method in CIRP Encyclopedia of Production Engineering (p. 508–514). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699

2. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. Available online: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation> (accessed on 16.04.2024).

3. Zasovenko, A., & Fasoliak, A. (2023). Mathematical modeling of the dynamics of an elastic half-medium with a cylindrical cavity reinforced by a shell under axisymmetric loads. *New Materials and Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering*, 2, 67–73. <https://doi.org/10.15588/1607-6885-2023-2-10>

4. Huz, A. N., Kubenko, V. D., Cherevko M. A (1978). *Difraktsia upruhykh voln*. Kyiv: Nauk. Dumka. 307 s.

5. Hrynchenko, V. T., Meleshko, V. V. (1981). *Harmonycheskie kolebania i*

volny v upruhykh telakh. Kyiv: Nauk. Dumka. 284 s.

6. Fesenko, A., & Vaysfel'd, N. (2019). The Wave Field of a Layer with a Cylindrical Cavity in Structural Integrity. Springer International Publishing. pp.277–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.

7. Fesenko, A., & Vaysfel'd, N. (2021). The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*, 33, 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.

8. Malits, P. (2021). Torsion of an elastic half-space with a cylindrical cavity by a punch. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 89, 104308. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104308>.

9. Khechai, A., Belarbi, M.O., Bouaziz, A. et al. (2023). A general analytical solution of stresses around circular holes in functionally graded plates under various in-plane loading conditions. *Acta Mech*, vol. 234, pp.671–691. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03413-1>.

10. Snitser, A. R. (1996). The reissner-sagoci problem for a multilayer base with a cylindrical cavity. *Journal of Mathematical Sciences*, 82(3), 3439–3443. <https://doi.org/10.1007/bf02362661>.

11. Nikolaev, A. G., Protsenko, V. S. (2011). *Obobshchenny metod Fur'e v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti*. Khar'kov: Nats. aerokosm inniversitet im. N.Ye. Zhukovskogo «KHA». 344 s.

12. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2015). The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*, 8(2), 148–158. <https://doi.org/10.1134/s1995423915020068>

13. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2016). Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 57(6), 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/s0021894416060237>

14. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2016). Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. *Mechanics of Composite Materials*, 52(2), 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.

15. Nikolaev, A. G., Orlov, Ye. M. (2012). Reshenie pervoy osesimmetrichnoy termouprugoy krayevoy zadachi dlya transversal'no-izotropnogo poluprostranstva so sferoidal'noy polost'yu. *Problemi obchisl. mekhaniki i mitsností konstruktsiy*. Vol.20. pp. 253 – 259.

16. Ukrayinets, N., Murahovska, O., & Prokhorova, O. (2021). Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(7 (110)), 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.

17. Miroshnikov, V., Denysova, T., & Protsenko, V. (2019). The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 103, 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>.

18. Miroshnikov, V. Y., Medvedeva, A. V., & Oleshkevich, S. V. (2019). Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. *Materials Science Forum*, 968, 413–420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.968.413>.

19. Miroshnikov, V. Y. (2019). Investigation of the Stress State of a Composite in the Form of a Layer and a Half Space with a Longitudinal Cylindrical Cavity at Stresses Given on Boundary Surfaces. *Journal of Mechanical Engineering*, 22(4),

24-31. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.024>.

20. Vitaly, M. (2023). Rotation of the Layer with the Cylindrical Pipe Around the Rigid Cylinder. *Advances in Mechanical and Power Engineering . CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham, pp 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32.

21. Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Demenko, V. F. (2023). Analysis of the Stress State for a Layer with Two Incut Cylindrical Supports. *Journal of Mechanical Engineering*, 26(1), 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>.

22. Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Pohrebniak, O. A. (2022). Analysis of the Stress State of a Layer with Two Cylindrical Elastic Inclusions and Mixed Boundary Conditions. *Journal of Mechanical Engineering*, 25(1), 22–29. <https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022>.

Надійшла до редакції 22.10.2024, розглянута на редколегії 22.10.2024

Analysis of the stress state of a layer with two cylindrical embedded supports and cylindrical bushings

The spatial problem of the theory of elasticity for a layer on cylindrical embedded supports with cylindrical sleeves (thick-walled pipes) located between each support and the layer is solved. Smooth contact conditions are set at the interface between the layer and the pipes. Stresses are specified on the surfaces of the layer, and displacements are specified on the inner surface of the pipe (rigidly conjugated to the support). The analytical and numerical solution of the problem is based on the Lamé equations written for the layer and each pipe. When the boundary conditions and the conditions of conjugation of the layer with the pipes are met, a system of integro-algebraic equations is created, which reduces to a system of linear algebraic equations. Each equation is written in its local coordinate system. For this purpose, the transition formulas of the generalized Fourier method are applied to the basic solutions of the Lamé equation. After solving the system of equations and finding the unknowns, the stress-strain state in the body of the layer and pipes was obtained. The reduction method was used to obtain numerical results. Fulfillment of the boundary conditions showed high convergence of the results, the accuracy of which depends on the order of the system of equations. The analysis of the stress-strain state of the layer and the pipe was carried out for different sleeve materials in places of stress concentration. The results indicate an increase in the stresses σ_φ and σ_z on cylindrical surfaces in the case of using polyamide bushings. The proposed method makes it possible to analyze the stress-strain state of a wide range of pipe structures. It also provides an opportunity to assess how changes in material and geometric parameters affect the stress distribution in such systems, which allows optimizing structures and ensuring their reliability. In the further development of this research topic, it is necessary to consider models where bushings are combined with other types of inhomogeneities (cavities, reinforcement) and other boundary conditions.

Keywords: fiber composite; layer with cylindrical sleeves; generalized Fourier method; Lamé equation

Відомості про авторів:

Мірошніков Віталій Юрійович, д-р техн. наук, професор, зав.каф. міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». v.miroshnikov@khai.edu, +380677893333, ORCID: 0000-0002-9491-0181.

Савін Олександр Борисович, канд.техн. наук, доц., професор каф. міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». a.savin@khai.edu, +380933918610, ORCID: 0000-0002-2664-0255.

Косенко Михайло Леонідович, аспірант каф. міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». Scs2012kh@gmail.com, +380506050010, ORCID: 0009-0002-2005-2222.

Ільїн Олексій Олександрович, аспірант каф. міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». parfumer.ua@gmail.com, ORCID: 0009-0005-7852-9873.

About the Authors:

Vitaly Miroshnikov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KhAI". v.miroshnikov@khai.edu, +380677893333, ORCID: 0000-0002-9491-0181.

Oleksandr Savin, PhD, Associate Professor, Professor of the Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KhAI". a.savin@khai.edu, +380933918610, ORCID: 0000-0002-2664-0255.

Mykhailo Kosenko, PhD student, Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KhAI". Scs2012kh@gmail.com, +380506050010, ORCID: 0009-0002-2005-2222.

Olexii Ilin, PhD student, Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KhAI". parfumer.ua@gmail.com, ORCID: 0009-0005-7852-9873.