МАТЕМАТИКА

Частина 1

2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

МАТЕМАТИКА

Частина 1

Навчальний посібник
для слухачів підготовчого відділення,
фізико-математичної школи ХАІ

Харків «ХАІ» 2024

УДК [511.1+512](075.3)
М-34

Колектив авторів:
Н. В. Драшпуль, Н. Л. Кальчук, О. А. Мураховська,
О. М. Прохорова, Н. А. Українець

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. М. Борщов,
д-р техн. наук, проф. Е. Г. Гладкий

М-34 **Математика** [Електронний ресурс] : навч. посіб. для слухачів підготовчого відділення, фіз.-мат. школи ХАІ. Ч.1 / Н. В. Драшпуль, Н. Л. Кальчук, О. А. Мураховська, О. М. Прохорова, Н. А. Українець. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2024. – 176 с.

Навчальний посібник містить частину розділів курсу шкільної програми з арифметики й алгебри. Подано теоретичний матеріал, розглянуто приклади виконання практичних завдань, наведено багато завдань для самостійної роботи.

Для слухачів підготовчого відділення, фізико-математичної школи ХАІ. Може бути корисним для учнів випускних класів ліцеїв і гімназій України під час підготовки до НМТ.

Іл. 43. Табл. 8. Бібліогр.: 10 назв

УДК [511.1+512](075.3)

1. ЧИСЛА

1.1. Натуральні числа

Натуральні числа використовують для лічби предметів або для вказування порядкового номера того чи іншого предмета серед однорідних предметів.

Усі натуральні числа, записані в порядку збільшення, утворюють **натуральний ряд чисел**:

1, 2, 3, …, 8, 9, 10, 11, … .

Для запису натуральних чисел використовують десяткову систему числення, у якій будь-яке натуральне число записується за допомогою десяти цифр: 0 (нуль), 1 (один), 2 (два), 3 (три), 4 (чотири), 5 (п'ять), 6 (шість), 7 (сім), 8 (вісім), 9 (дев'ять).

Найменше натуральне число – 1, найбільшого натурального числа не існує.

Яке б велике число ми не взяли, але додавши до нього 1, отримаємо ще більше число.

Число 0 не є натуральним.

Зазначимо, що чисел існує безліч, а цифр – усього десять.

Інколи цифри називають так: 0 – нуль, 1 – одиниця, 2 – двійка, 3 – трійка, 4 – четвірка, 5 – п'ятірка, 6 – шістка, 7 – сімка, 8 – вісімка, 9 – дев'ятка.

1.2. Системи числення

Система числення (або нумерація) – це сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати й прочитати довільне невід’ємне число.

Основа системи числення – це кількість знаків, які використовуються для запису цифр.

Зазвичай числа записують за допомогою спеціальних знаків – цифр, хоча й не завжди.

Одне й те ж число можна подати в різних системах числення. Водночас подання числа є різним, а його значення залишається незмінним.

Найбільш відомими є дві системи числення: арабська й римська.

Приклад 1.1. Розглянемо число 11, записане в арабській системі числення. Тут перша одиниця (1) позначає кількість десятків (10), а друга – кількість одиниць (1).

Розглянемо число II у римській системі числення. Тут обидві одиниці позначають одиницю (1).

Отже, розрізняють позиційні й непозиційні системи числення.

1.2.1. Непозиційні системи числення

У **непозиційній системі числення** значення кожної цифри не залежить від позиції цієї цифри в записі числа.

Римська система числення

Уважається, що ***римські цифри*** *були винайдені не самими римлянами, а їхніми історичними попередниками – етрусками. Римляни лише запозичили ці цифри за п’ять століть до н. е., удосконалили цифри і правила їх використання й дали їм своє ім’я.*

Від римлян римські цифри перейшли до інших народів Європи і вживалися до XIII–XV ст., коли на заміну їм прийшли арабські цифри.

Серед непозиційних систем числення римська є найбільш відомою. У ній для запису цифр використовуються сім великих літер латинського алфавіту:

I, V, X, L, C, D, M.

Римська цифра I відповідає числу 1, римська цифра V – числу 5, X – 10, L – 50, C – 100, D – 500, M –1000. Числа 0 немає.

Приклад 1.2. Розглянемо римські числа: XXV (двадцять п’ять), XVI (шістнадцять), VII (сім). У цих числах, де б не стояла цифра V, вона всюди позначає п'ять одиниць. Іншими словами, величина, що позначається знаком V, не залежить від позиції числа.

У **римській нумерації** числа записують за допомогою повторень, а також складання й віднімання цифр I, V, X, L, C, D, M.

Правила запису чисел у римській нумерації:

1. Якщо цифри в запису числа повторюються, то цифри додають (принцип додавання).

Приклад 1.3. У римській системі число 2 можна записати, використовуючи два рази літеру I, тобто 2 → II; для запису числа 3 використовують три літери I: 3 → III; і далі: 20 → XX; 30 → XXX; 300 → CCC; 3000 → MMMM.

2. Якщо менша за значенням цифра стоїть перед більшою, то від більшої цифри віднімають меншу (принцип віднімання).

Приклад 1.4. Число 4 у римській системі записується як IV, тобто IV → 5 – 1; число 9 – як IX, тобто IX → 10 – 1; число 40 – як XL, тобто XL → 50 – 10; число 90 – як XC, тобто XC → 100 – 10.

Принцип віднімання дає змогу уникнути чотириразового повторення однієї цифри. Менша цифра зліва записується лише один раз.

Приклад 1.5. Число 4 записується як IV (5 – 1) замість IIII; число 19 – як XIX (10 + 10 – 1) замість XVIIII; число 40 – як XL (50 – 10) замість XXXX.

Приклад 1.6. Цифри I, X, C записують відповідно перед X, C, M для позначення таких чисел:

9 – IX (10 – 1), 90 – XC (100 – 10), 900 – CM (1000 – 100),

і перед V, L, D для позначення таких чисел:

4 – IV (5 – 1), 40 – XL (50 – 10), 400 – CD (500 – 100).

3. Якщо менша за значенням цифра стоїть за більшою, то ці цифри додають (принцип додавання). Одна й та сама цифра справа може повторюватися лише тричі.

Приклад 1.7. У римській системі число 6 записується як VI, тобто VI → 5 + 1; цифра 8 – як VIII, тобто VIII → 5 + 1 + 1 + 1; цифра 15 – як XV, тобто XV → 10 + 5; цифра 60 – як LX, тобто LX → 50 + 10.

Числа першого десятка записують так:

Десяткова система	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Римська система	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

Числа другого десятка утворюють шляхом додавання X, причому цей знак записують попереду одиниць:

Десяткова система	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Римська система	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

4. Цифри I, X, C можуть передувати найближчій або наступній старшій цифрі, але не третій по порядку: IV, IX (але не IL), XL, XC (але не XD і не XM). При цьому менша цифра віднімається від більшої (принцип віднімання).

Приклад 1.8. Правило 4 застосовується для запису таких чисел:

IV → 5 – 1 = 4; IX → 10 – 1 = 9;

XLV → (50 – 10) + 5 = 45; XCV → (100 – 10) + 5 = 95.

Приклад 1.9. Розглянемо запис чисел у римській системі числення:

XIV → 10 + (5 – 1) = 14; XIX → 10 + (10 – 1) = 19; XXI → 20 + 1 = 21;

XLVII → (50 – 10) + 5 + 1 + 1 = 47; LXXIX → 50 + 10 + 10 + (10 – 1) = 79;

LXXXVIII → 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1 = 88;

XCIII → (100 – 10) + 1 + 1 + 1 = 93;

CLXVII → 100 + (50 + 10) + (5 + 1 + 1) = 167;

CXCV → 100 + (100 – 10) + 5 = 195;

MCMLXXVI → 1000 + (1000 – 100) + 50 + 10 + 10 + 5 + 1 = 1976.

5. Якщо підряд ідуть однакові або різні старші цифри, то молодшу цифру розміщують тільки перед останньою.

Приклад 1.10. Правило 5 застосовується для таких чисел:

XIX → 10 + (10 – 1) = 19; XXIV → 10 + 10 + (5 – 1) = 24;

CXXXIX → 100 + 10 + 10 + 10 + (10 – 1) = 139;
MLXXIV → 1000 + (50 + 10 +10) + (5 – 1) = 1074.

6. Цифри V, L і D не можна розміщувати перед найближчою старшою цифрою, оскільки отримане значення в цьому випадку дорівнюватиме значенню, яке позначають самі ці цифри.

Приклад 1.11. Такі позначення є некоректними:
VX (10 – 5 = 5); LC (100 – 50 = 50); DM (1000 – 500 = 500).

7. За допомогою римської системи числення можна записувати лише натуральні числа в діапазоні від 1 до 3999.

Приклад 1.12. Наведемо приклади запису великих чисел:
MMM D XL II → (1000 + 1000+ 1000) + 500 + (50 – 10) +2 = 3542;
MM CM XC IX → (1000 + 1000) + (1000 – 100) + (100 – 10) + (10 – 1) = 2999;
MMM D CCC LXXX VIII → (1000 + 1000 + 1000) + 500 + (100 + 100 + 100) +
+ (50 + 10 +10 + 10) + (5 + 1 +1 +1) = 3888.

8. Цифри I, X, C і M можуть повторюватись, але не більше трьох разів; цифри V, L і D повторюватись не можуть, оскільки дворазове повторення кожної з них дає значення, яке позначається наступною старшою цифрою.

У римській системі виконання арифметичних дій над великими числами є дуже незручним, а для запису великих чисел необхідно вводити додаткові цифри. Також неможливо записувати дробові й від’ємні числа. Тому ця система числення сьогодні не застосовується для розрахунків.

Але римські цифри зараз використовуються: в іменах монархів і пап (королева Єлизавета II), у назвах Олімпійських ігор (XXI зимові Олімпійські ігри), а також для позначення розділів і частин законів, номерів томів, розділів і глав у книгах, номерів актів у спектаклях, років будівництва пам’ятника або будівлі, валентності хімічних елементів, природних супутників планет (їх додають до імені планети), століть, тисячоліть і місяців у датах (XXI ст., II тис. до н. е., 1.V.2005), цифр на циферблатах деяких годинників, порядкових числівників, похідних, порядок яких більший за три ($\boldsymbol{y^{(IV)}}$, $\boldsymbol{y^{(VII)}}$) у математиці. Ступені ладу в музиці нумеруються від першого до сьомого вверх і позначаються римськими цифрами. У деяких європейських країнах римські цифри використовують для нумерації поверхів, а також позначок на дорожніх знаках.

Унарна система числення

Унарна система числення також є непозиційною. Цифри такої системи можна використовувати для підрахунку будь-яких однакових предметів або символів (один день, один об'єкт). Цифра будь-якої позиції числа, записаного в унарній системі числення, завжди позначає одиницю. За допомогою унарної системи числення можна записувати лише натуральні числа, і то не дуже великі.

Приклад 1.13. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... в унарній системі числення мають вигляд

1, 11, 111, 1111, 11111, ...

1.2.2. Позиційні системи числення

У світі найбільш поширеними є **позиційні системи числення**. Математичні дії в позиційних системах числення виконуються легше, ніж у непозиційних, тому що здійснюються за певними нескладними правилами (порівняння двох чисел, додавання, віднімання, множення або ділення чисел у стовпчик).

Найдавнішою системою числення вважають **шістдесяткову**. Припускають, що давні вавилоняни, які жили в III–II тисячоріччі до нашої ери і славилися своїми астрономічними спостереженнями й розрахунками, успадкували її від шумерської й аккадської цивілізацій. Вавилоняни записували цифри клинописом на глиняних табличках – поки глина була м'яка, видавлювали знаки дерев'яною паличкою для письма або загостреним очеретом. Для запису чисел вони використовували всього два знаки: вертикальний клин для позначення одиниць і горизонтальний клин для позначення десятків (рис. 1.1). Усі числа від 1 до 59 записували за допомогою цих знаків.

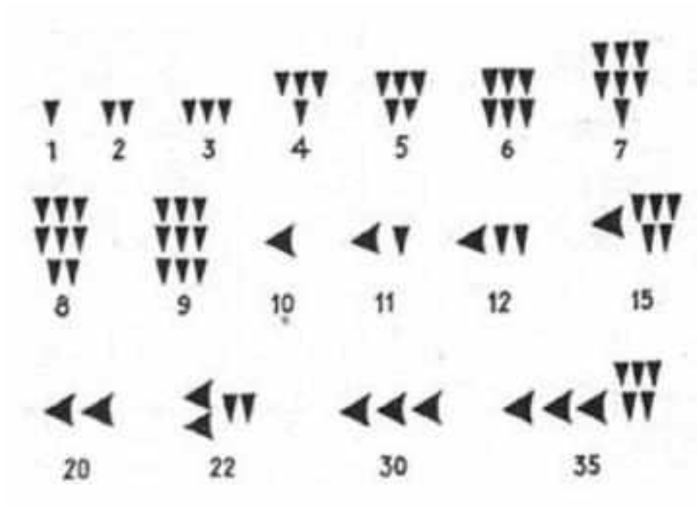


Рис. 1.1

Приклад 1.14. Запис <<<YYYYY позначав 30 + 5 = 35.

Шістдесяткова нумерація є позиційною системою числення з основою 60.

Приклад 1.15. Запис YYYYYY YYY позначав $6 \cdot 60 + 3 = 363$. Це схоже на запис, до якого ми звикли: 63 позначає $6 \cdot 10 + 3$.

Число YYY могло позначати як 3, так і $180 = 3 \cdot 60$ або $10\,800 = 3 \cdot 60 \cdot 60$ і т. д. Розрізняти такі числа можна було тільки за змістом.

З цієї системи до наших днів збереглося правило ділити одну годину на 60 хвилин, одну хвилину на 60 секунд, повний кут – на 360 градусів.

Прикладами позиційних систем числення є десяткова, двійкова, вісімкова та шістнадцяткова системи числення, які широко використовуються в комп'ютерній техніці. Також має місце дванадцяткова англійська система вимірювання: 1 фут = 12 дюймів, 1 шилінг = 12 пенсів.

Для запису чисел в **позиційній системі з основою** n необхідно мати алфавіт із n цифр. Зазвичай для цього при $n<10$ використовують n перших арабських цифр, а при $n \geq 10$ – до десяти арабських цифр додають букви.

Якщо необхідно вказати основу системи числення, у якій записано число, то її подають у вигляді нижнього індексу, наприклад:

$$10111_2,\ 212_3,\ 27_8,\ 17_{16}.$$

Наведемо приклади алфавітів деяких позиційних систем:

Основа	Назва	Алфавіт
$n=2$	Двійкова	01
$n=3$	Трійкова	012
$n=8$	Вісімкова	01234567
$n=16$	Шістнадцяткова	$0123456789ABCDEF$

Арабська система числення є десятковою системою числення.

Десяткова система числення – це позиційна система числення з основою 10, кожне число в якій записується за допомогою 10 символів – цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Індо-арабська система числення

Символи (цифри), якими ми звикли користуватися і які називаємо арабськими, були створені індійськими математиками в I–IV ст. Найдавніший відомий запис позиційної десяткової системи виявлено в Індії 595 року.

Індійська система числення прийшла спочатку в арабські країни, а потім в Західну Європу. Про неї розповів середньоазійський математик Аль-Хорезмі. Прості й зручні правила додавання і віднімання чисел, записаних у позиційній системі, зробили його працю особливо популярною. Але оскільки праця Аль-Хорезмі написана арабською, то індійську нумерацію в Європі й почали називати арабською.

В Європі арабські цифри набули широкого застосування з другої половини XV ст.

*Слово «**цифра»** пішло від арабської назви числа 0 (**сифр** означає порожнє місце). Це дуже цікава цифра. Вона називається незначною й позначає відсутність чогось.*

Цей зміст слово «цифра» зберігало ще в XVIII ст., хоча вже з XV ст. став відомим латинський термін «нуль» (ніщо). З середини XVIII ст. слово «цифра» набуло нового значення – знак числа.

*Абу Абдулла Абу Джафар Мухаммад ібн Муса **аль-Хорезмі** (кін. 8 ст., Хіва – др. пол. 9 ст.) – перський математик, географ, історик та астроном, один із видатних учених Середньовіччя. В одному з його творів, який зберігся у латинському перекладі 12 ст., міститься систематичний виклад арифметики, що базується на десятковій позиційній системі числення. У назві іншого твору є слово «ал-джабр», з якого пізніше виникло слово «алгебра». Також ім'я аль-Хорезмі, яке в латинській транскрипції звучало як Algorizmi або Algorizmus, дало назву терміну «алгоритм».*

Приклад 1.16. У наведених числах в арабській системі числення цифра 5 позначає:

– 265 – кількість одиниць (5 одиниць);
– 451 – кількість десятків (5 десятків, тобто 50);
– 592 – кількість сотень (5 сотень, тобто 500).

Приклад 1.17. Розглянемо число 4 835 – чотири тисячі вісімсот тридцять п'ять, записане в арабській системі числення.

У записі цього числа: 5 – це кількість одиниць, 3 – кількість десятків, 8 – кількість сотень, 4 – кількість тисяч.

Для закріплення вивченого матеріалу рекомендуємо самостійно розв'язати задачі 1.1–1.6.

1.3. Одноцифрові й багатоцифрові числа

Одноцифрові числа позначають (= записують) однією цифрою. Це числа від 1 (одиниці) до 9 (дев'яти).

Числа, що складаються більш ніж з однієї цифри, називають **багатоцифровими**.

Двоцифрові числа записують двома цифрами. Це числа від 10 (десяти) до 99 (дев'яноста дев'яти):

- 10 – десять;
- 11 – одинадцять;

…

- 19 – дев'ятнадцять;
- 20 – двадцять;
- 21 – двадцять один;

…

- 29 – двадцять дев'ять;

- 30 – тридцять;

  …
- 90 – дев’яносто;
- 91 – дев’яносто один;
- 92 – дев’яносто два;

  …
- 98 – дев’яносто вісім;
- 99 – дев’яносто дев’ять.

Трицифрові числа позначають трьома цифрами. Це числа від 100 (ста) до 999 (дев’ятисот дев’яноста дев’яти):

- 100 – сто;
- 101 – сто один;

  …
- 199 – сто дев’яносто дев’ять;
- 200 – двісті;
- 300 – триста;

  …
- 900 – дев’ятсот;

  …
- 999 – дев’ятсот дев’яносто дев’ять.

Чотирицифрові числа – це числа від 1 000 до 9 999:

- 1 000 – (одна) тисяча;
- 2 000 – дві тисячі;

  …
- 9 000 – дев’ять тисяч;

  …
- 9 999 – дев’ять тисяч дев’ятсот дев’яносто дев’ять.

П’ятицифрові числа – це числа від 10 000 до 99 999:

- 10 000 – десять тисяч;
- 10 001 – десять тисяч один;

  …

  …

99 999999 – дев’яносто дев’ять тисяч дев’ятсот дев’яносто дев’ять.

Шестицифрові числа – це числа від 100 000 до 999 999:

- 100 000 – сто тисяч;
- 100 001 – сто тисяч один;

  …
- 999 999 – дев’ятсот дев’яносто дев’ять тисяч дев’ятсот дев’яносто дев’ять.

1.3.1. Числа-велетні

Для скорочення запису великих чисел використовується система величин, у якій кожна з наступних величин у тисячу разів є більшою від попередньої:

- 1 000 одиниць – 1 (одна) тисяча;
- 1 000 тисяч – 1 (один) мільйон (1 000 000);
- 1 000 мільйонів – 1 мільярд (або більйон) (1 000 000 000);
- 1 000 більйонів – 1 трильйон (100 000 000 000);
- 1 000 трильйонів – 1 квадрильйон (1 000 000 000 000 000);
- 1 000 квадрильйонів – 1 квінтильйон;
- 1 000 квінтильйонів – 1 секстильйон;
- 1 000 секстильйонів – 1 септильйон;
- 1 000 септильйонів – 1 октильйон;
- 1 000 октильйонів – 1 нонільйон;
- 1 000 нонільйонів – 1 децильйон;
- 1 000 децильйонів – ундецильйон.

Американський математик А. Кестнер винайшов найбільше число і назвав його «гугол» (**googol**). Це одиниця зі ста нулями!

Авраам Готтгельф Кестнер *(нім. Abraham Gotthelf Kästner; 27.09.1719–20.06.1800) – німецький математик та автор епіграм. З численних праць Кестнера найважливішими є роботи, назви яких у перекладі можна записати так: «Початкові основи математики» і «Початкові основи прикладної математики». Ці роботи являють собою систематичний курс математики і фізики, що починається арифметикою й закінчується оптикою.*

Його незакінчена робота «Geschichte der Mathematik» (1796–1800 рр.) вплинула на розвиток історії математики як науки.

Приклад 1.18. Прочитаємо числа:

- 1 000 000 – (один) мільйон;
- 10 000 000 – десять мільйонів;
- 100 000 000 – сто мільйонів;
- 1 000 000 000 – (один) мільярд;
- 10 000 000 000 – 10 (десять) мільярдів;
- 100 000 000 000 – 100 (сто) мільярдів;
- 100 000 000 000 – (один) трильйон;

  …
- 1 000 000 000 000 000 – квадрильйон.

Приклад 1.19. Прочитаємо числа:

- 27 – двадцять сім;

- 31 – тридцять один;
- 48 – сорок вісім;
- 54 – п’ятдесят чотири;
- 63 – шістдесят три;
- 75 – сімдесят п’ять;
- 89 – вісімдесят дев’ять;
- 96 – дев’яносто шість;
- 117 – сто сімнадцять;
- 239 – двісті тридцять дев’ять;
- 370 – триста сімдесят;

  …
- 945 – дев’ятсот сорок п’ять;
- 1 400 – одна тисяча чотириста;
- 2 308 – дві тисячі триста вісім;
- 4 010 – чотири тисячі десять;
- 5 007 – п’ять тисяч сім;

  …
- 7 010 – сім тисяч десять;
- 9 999 – дев’ять тисяч дев’ятсот дев’яносто дев’ять;

  …
- 15 279 – п’ятнадцять тисяч двісті сімдесят дев’ять;
- 746 853 – сімсот сорок шість тисяч вісімсот п’ятдесят три.

1.3.2. Цікаві факти про великі числа

Розглянемо **великі числа**, які виникають або в реальності, або в розрахунках.

Мільйон (1 000 000 = 10^6)

Деякі цікаві факти:

– мільйон секунд – це 11,5 дня;

– стопка з мільйона книг, поставлених одна на одну, не вийде навіть за межі атмосфери Землі ($<1000\,\text{км}$) (рис. 1.2, *а*);

– мільйон горошин поміщається у великому мішку, який можна підняти (рис. 1.2, *б*);

– мільйон піщинок поміщається в жмені (рис. 1.2, *в*);

– з мільйона букв можна скласти одну досить велику книгу (наприклад, повна Біблія складається з більш ніж 2,5 мільйона букв) (рис. 1.2, *г*);

– якщо зібрати разом мільйон бактерій, то їх ледве буде видно людському оку (рис. 1.2, *д*);

– одна людська волосинка, збільшена в мільйон разів, має діаметр близько 100 метрів (рис. 1.2, *е*);

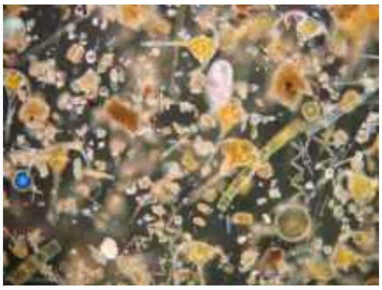
– залежно від країни світу за мільйон доларів можна купити розкішне житло певної площі: Монако – 15 кв. м; Гонконг – 21 кв. м; Лондон – 25 кв. м; Сінгапур – 33 кв. м; Женева – 35 кв. м; Нью-Йорк – 40 кв. м; Сідней – 41 кв. м; Париж – 42 кв. м; Шанхай – 46 кв. м (рис. 1.2, *ж*).

а

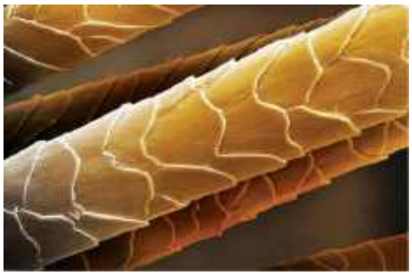
б

в

г



д



е

ж

Рис. 1.2

До речі, ***Князівство Мона́ко*** *– карликова держава, розташована на півдні Європи на березі Лігурійського моря, є однією з найменших за територією і найбільш густонаселеною країною світу. Її площа становить 2,02 км*^{2}*. Незважаючи на відсутність податків з прибутку, на розкіш і на капітал, це найбагатша країна у світі за рівнем ВВП на душу населення. Маленьке місто-держава має найвищу щільність населення у світі та найбільший відсоток мільйонерів, а тому попит на нерухомість є дуже великим.*

Мільярд (1 000 000 000 = 10^9)

Деякі цікаві факти:

– мільярд молекул води, поставлених одна за одною, займуть відстань близько 30 см (рис. 1.3, *в*);

– вартість Великого адронного колайдера – близько 10 мільярдів доларів (Large Hadron Collider – прискорювач заряджених частинок на зустрічних пучках, призначений для розганяння протонів і важких іонів (іонів свинцю) і вивчення продуктів їх зіткнень; його побудовано в ЦЕРНі (Європейська рада ядерних досліджень), що знаходиться біля Женеви, на кордоні Швейцарії та Франції) (рис. 1.3, *а*);

– головний мозок людини складається зі 100 мільярдів нейронів (рис. 1.3, *б*);

– за всю історію людства на Землі народилося понад 107 мільярдів людей (за приблизною оцінкою нідерландського Центру математики та інформатики).

а

б

в

Рис. 1.3

1.4. Позначення і запис натуральних чисел

Значення кожної цифри натурального числа залежить від її місця розташування в записі цього числа.

Усі цифри розбивають на **класи** – по три цифри в кожному класі.

Кожен клас має три **розряди**: розряд одиниць, розряд десятків і розряд сотень. Класи розміщують справа наліво в такому порядку: клас одиниць, клас тисяч, клас мільйонів, клас мільярдів і т. д.

Щоб прочитати багатоцифрове число, зліва направо називають послідовно числа кожного класу, як три-, дво- або одноцифрове число, і при цьому додають назву класу.

Приклад 1.20. У числі 265 цифра 5 означає 5 одиниць, цифра 6 – 6 десятків, цифра 2 – 2 сотні.

Одиниці, десятки і сотні утворюють клас одиниць.

Приклад 1.21. Число 387 265 крім класу одиниць має клас тисяч, а саме: 7 одиниць тисяч, 8 десятків тисяч, 3 сотні тисяч.

Приклад 1.22. Для деяких чисел складемо таблицю, у якій наведемо класи й розряди:

Числа	Класи					
	Клас тисяч			Клас одиниць		
	Сотні тисяч	Десятки тисяч	Одиниці тисяч	Сотні	Десятки	Одиниці
3 875			3	8	7	5
14 307		1	4	3	0	7
653 249	6	5	3	2	4	9

Приклад 1.23. Для деяких чисел складемо таблицю, у якій наведемо класи й розряди:

Числа	Класи								
	Клас мільйонів			Клас тисяч			Клас одиниць		
	Сотні мільйонів	Десятки мільйонів	Одиниці мільйонів	Сотні тисяч	Десятки тисяч	Одиниці тисяч	Сотні	Десятки	Одиниці
7 264 941			7	2	6	4	9	4	1
83 295 624		8	3	2	9	5	6	2	4
563 914 597	5	6	3	9	1	4	5	9	7

Приклад 1.24. Число 24 387 265 має клас одиниць, клас тисяч і клас мільйонів. При цьому клас мільйонів цього числа має 4 одиниці мільйонів, 2 десятки мільйонів, але не містить сотень мільйонів.

Приклад 1.25. Число 701 024 387 265 має класи одиниць, тисяч, мільйонів і мільярдів. При цьому це число не має сотень у класі мільйонів і десятків у класі мільярдів. Їх відсутність позначається цифрою 0.

Число 701 024 387 265 читають так: сімсот один мільярд двадцять чотири мільйони триста вісімдесят сім тисяч двісті шістдесят п'ять.

1.4.1. Розрядність числа

Розряд – це позиція (місце) цифри в записі числа. Розряди нумеруються справа наліво.

Розрядність числа – це кількість цифр, з яких складається число.

Приклад 1.26. Число 264 є трирозрядним, а число 00010101 – восьмирозрядним.

Приклад 1.27. У числі 598 цифра 8 займає перший розряд, цифра 9 – другий, цифра 5 – третій.

Числа 1, 10, 100, 1000, … називають **розрядними одиницями**, за допомогою яких будь-яке натуральне число можна записати у вигляді суми розрядних доданків.

Приклад 1.28. Запишемо число 1234567 у вигляді суми розрядних доданків:

$$1234567 = 1000000 + 200000 + 30000 + 4000 + 500 + 60 + 7 =$$
$$= 1 \cdot 1000000 + 2 \cdot 100000 + 3 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 1.$$

Після вивчення теоретичного матеріалу необхідно самостійно розв’язати задачі 1.7–1.32.

1.5. Порівняння натуральних чисел

Символи порівняння (знаки нерівності):

- $>$ – більше;
- $<$ – менше;
- $\geq$ – більше або дорівнює (не менше);
- $\leq$ – менше або дорівнює (не більше);
- $=$ – дорівнює (указує на рівність двох чисел).

Запис $25 < 40$ читають так: двадцять п’ять менше за сорок або двадцять п’ять менше від сорока.

Порівняти два числа – це означає з’ясувати, яке з них є більшим, яке – меншим, або показати, що вони дорівнюють одне одному.

Правила порівняння чисел:

1. Числа можна порівнювати за допомогою натурального ряду. З двох натуральних чисел більшим є те число, що в ряду натуральних чисел стоїть правіше.

Приклад 1.29. Порівняти числа 9 і 5. Маємо $9 > 5$ (число 9 більше за число 5), оскільки в ряду натуральних чисел число 9 стоїть правіше, ніж число 5.

2. Натуральні числа можна порівнювати за їх десятковим записом:

– з двох натуральних чисел більшим є те, що має більше розрядів;

– якщо два натуральних числа мають однакову кількість розрядів, то числа порівнюють за розрядами, починаючи з найстаршого розряду;

– два натуральні числа є однаковими, якщо вони мають однакову кількість розрядів і цифри однакових розрядів збігаються.

Приклад 1.30. Порівняти числа 1309 і 999.

Маємо $1309 > 999$, оскільки число 1309 містить більше розрядів, ніж число 999.

Приклад 1.31. Порівняти числа $2\,475$ і $2\,431$. Маємо $2\,475 > 2\,431$, оскільки числа мають однакову кількість розрядів, цифри четвертого й третього розрядів є однаковими, але цифри другого розряду – різні: число 7 більше за число 3.

Приклад 1.32. Порівняти числа $75\,382\,185$ і $75\,382\,185$. Ці числа є однаковими, оскільки мають однакову кількість розрядів і цифри однакових розрядів збігаються.

Приклад 1.33. Записати всі натуральні числа, більші за 24 і не більші від 31. Запишемо ці числа: 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31.

Після вивчення теоретичного матеріалу необхідно самостійно розв’язати задачі 1.33–1.44.

1.6. Арифметичні дії над натуральними числами та їх властивості

Символи арифметичних операцій: **+** (плюс, знак додавання); **–** (мінус, знак віднімання); **×**, $\cdot$ (хрест, точка, знак множення); ***/***, : (знак ділення).

Символи рівності й нерівності:

- $=$ – дорівнює (указує на рівність двох чисел), вираз $m = k$ можна прочитати, як «m дорівнює k»;
- $\neq$ – не дорівнює (указує на нерівність двох чисел), вираз $m \neq k$ можна прочитати, як «m не дорівнює k».

Додавання натуральних чисел має вигляд

$$m + k = s,$$

де m, k (числа, які додають) – доданки; s (результат додавання) – сума.

Властивості додавання:

1) переставна властивість – від перестановки доданків їх сума не змінюється:

$$a + b = b + a;$$

2) сполучна властивість – від групування доданків сума не змінюється:

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

3) якщо один із двох доданків дорівнює нулю, то їх сума дорівнює другому доданку:

$$a+0=0+a=a;$$

4) якщо один із доданків збільшити або зменшити на будь-яке число, то сума також збільшиться або зменшиться на це число:

$$a+b=a+b \quad \to \quad (a+t)+b=(a+b)+t.$$

Приклад 1.34. Наведемо приклади застосування переставної та сполучної властивостей додавання:

а) $27+12=12+27=39$;

б) $(31+512)+48=31+(512+48)=31+560=591$.

У прикладі *б* доданки групуються так, щоб було легше знайти їх суму.

При додаванні чисел у стовпчик доданки розміщують один під одним так, щоб одиниці знаходилися під одиницями, десятки – під десятками, сотні – під сотнями і т. д.

Приклад 1.35. Складемо числа $24\,067$ і 1172 у стовпчик:

$$\begin{array}{r} 24\,067 \\ + \\ 1\,172 \\ \hline 25\,239 \end{array}$$

Віднімання натуральних чисел має вигляд

$$m-k=d,$$

де m (число, від якого віднімають) – зменшуване; k (число, яке віднімають) – від’ємник; d (результат віднімання) – різниця.

Правильність віднімання перевіряють додаванням:

$$d+k=m.$$

При відніманні чисел у стовпчик від’ємник розміщують під зменшуваним так, щоб одиниці знаходилися під одиницями, десятки – під десятками, сотні – під сотнями і т. д.

Приклад 1.36. Від числа $14\,067$ віднімемо число 1172 у стовпчик:

$$\begin{array}{r} 14\,067 \\ - \\ 1\,172 \\ \hline 12\,895 \end{array}$$

Приклад 1.37. Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок:

$$25+x=95,\quad x=95-25,\quad x=70.$$

Щоб від числа відняти суму двох доданків, можна від цього числа відняти один із доданків, а потім від результату відняти другий доданок:

$$195-(130+25)=(195-25)-130=170-130=40.$$

Щоб від суми двох доданків відняти число, можна відняти це число від одного з доданків, а потім до результату додати другий доданок:

$$(195+130)-25=(195-25)+130=170+130=300.$$

Приклад 1.38. На скільки 1 мільйон більший за 402 тисячі? Виконуємо віднімання:

$$1\,000\,000-402\,000=598\,000.$$

Отже, 1 мільйон більший за 402 тисячі на 598 тисяч.

Яке число на 537 менше за 1 мільйон? Виконуємо віднімання:

$$1\,000\,000-537=999\,463.$$

Отже, число $999\,463$ на 537 менше за 1 мільйон.

Множення натуральних чисел має вигляд

$$m\cdot k=p,$$

де m, k (числа, які перемножують) – множники; p (результат множення) – добуток.

Додавання декількох однакових чисел можна замінити множенням.

Помножити число m на натуральне число k – це означає записати число m доданком k разів.

Приклад 1.39. Додавання п’яти чисел, кожне з яких дорівнює 7, можна замінити множенням:

$$7+7+7+7+7=7\cdot 5=35.$$

Властивості множення:

1) переставна властивість – від перестановки множників добуток не змінюється:

$$a\cdot b=b\cdot a;$$

2) сполучна властивість – щоб добуток двох чисел помножити на третє число, можна перше число помножити на добуток другого і третього:

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$

3) розподільна властивість множення відносно додавання (віднімання):

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,$$

$$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c;$$

4) якщо один із двох множників дорівнює 1, то добуток дорівнює іншому множнику:

$$a \cdot 1 = a;$$

5) якщо один із двох множників дорівнює 0, то добуток дорівнює нулю:

$$a \cdot 0 = 0;$$

6) якщо один із множників збільшити в кілька разів, то й добуток збільшиться у стільки ж разів.

Властивості множення часто допомагають спрощувати обчислення.

Приклад 1.40. Наведемо приклади застосування властивостей множення:

а) $5 \cdot 15 = 15 \cdot 5 = 75$ (переставна);

б) $12 \cdot 25 = (3 \cdot 4) \cdot 25 = 3 \cdot (4 \cdot 25) = 3 \cdot 100 = 300$ (сполучна);

в) $76 \cdot 13 + 24 \cdot 13 = (76 + 24) \cdot 13 = 100 \cdot 13 = 1300$ (розподільна);

г) $95 \cdot 12 = (100 - 5) \cdot 12 = 1200 - 60 = 1140$ (розподільна).

Приклад 1.41. Розглянемо добуток $3 \cdot 4 = 12$. Збільшимо один з його множників утричі:

$$(3 \cdot 3) \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36; \quad 3 \cdot (3 \cdot 4) = 3 \cdot 12 = 36.$$

В обох випадках добуток збільшився втричі.

Щоб будь-яке число помножити на число, записане одиницею з декількома нулями, треба до першого числа дописати справа стільки нулів, скільки їх є в другому числі.

Приклад 1.42. Наведемо приклади множення на числа з нулями:

$$73 \cdot 10 = 730; \;\; 154 \cdot 100 = 15\,400; \;\; 705 \cdot 1\,000 = 705\,000.$$

Приклад 1.43. Корисно пам’ятати:

$$2 \cdot 50 = 100; \;\; 4 \cdot 25 = 100; \;\; 8 \cdot 125 = 1\,000.$$

Приклад 1.44. У турнірі брали участь 13 команд, які грали кожна з кожною по одному разу. Скільки всього ігор відбулося?

Кожна з команд грала з 12 іншими. Щоб не рахувати двічі повторення однакових ігор, загальну кількість ігор визначаємо так: $(13 \cdot 12) : 2 = 78$.

Приклад 1.45. У саду висаджено 12 рядів яблунь і 13 рядів груш по 20 дерев у кожному ряду. Знайти двома способами кількість дерев у саду.

Знаходимо кількість дерев у саду двома способами:

1) порахуємо окремо кількість висаджених дерев яблунь і груш, а потім складемо їх загальні кількості:

$$12 \cdot 20 + 13 \cdot 20 = 240 + 260 = 500;$$

2) обчислимо загальну кількість рядів з висадженими деревами, а потім помножимо її на кількість дерев у кожному ряду:

$$(12+13)\cdot 20=25\cdot 20=500.$$

Приклад 1.46. З пунктів A і B одночасно назустріч один одному виїхали два потяги зі швидкостями 80 і 95 км/год. Потяги зустрілися через 3 год. Чому дорівнює відстань між пунктами A і B?

За 1 год потяги зблизилися на 175 км ($80+95=175$), а за 3 год подолали відстань 525 км ($175\cdot 3=525$). Це й буде відстань між пунктами A і B.

Приклад 1.47. З міст A і B одночасно назустріч один одному виїхали два потяги зі швидкостями 70 і 85 км/год. Якою буде відстань між потягами через 2 год від початку руху, якщо відстань між містами A і B дорівнює 450 км?

За 1 год потяги зблизилися на 155 км ($70+85=155$), а за 2 год обидва потяги подолали відстань 310 км ($155\cdot 2=310$). Оскільки відстань між містами A і B дорівнює 450 км, то відстань між потягами через 2 год від початку руху дорівнюватиме 215 км ($525-310=215$).

Квадрат числа *a* – це добуток двох однакових чисел $a\cdot a=a^2$ («a в квадраті»).

Куб числа *a* – це добуток трьох однакових чисел $a\cdot a\cdot a=a^3$ («a в кубі»).

Обчислення квадрата (куба) числа називають **піднесенням до квадрата (куба)**.

Приклад 1.48. На скільки куб суми чисел 2 і 3 більший за суму їх кубів? Розв’язуємо задачу:

1) $(2+3)^3=5^3=125$ – куб суми чисел 2 і 3;

2) $2^3+3^3=8+27=35$ – сума кубів чисел 2 і 3;

3) $125-35=90$.

Отже, куб суми чисел 2 і 3 є більшим від суми їх кубів на 90.

Ділення натуральних чисел має вигляд

$$m:k=q,$$

де m (число, яке треба поділити) – ділене; k (число, на яке ділять) – дільник; q (результат ділення) – частка.

Число m – це **кратне** числа k. Тоді існує натуральне число q, таке, що $m=q\cdot k$.

Число m ділять на k тоді, коли треба зменшити число m у k разів або з’ясувати, у скільки разів число m є більшим за k.

Властивості ділення:

1) $(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b$;

2) $(a:b)\cdot c=a:(b\cdot c)$;

3) $(a+b):c=a:c+b:c$;

4) $(a-b):c=a:c-b:c$;

5) для будь-якого натурального числа a справджується таке:

$$a:1=a,\ \ a:a=1;$$

6) на 0 ділити не можна.

Приклад 1.49. Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник:

$$9\cdot x=36,\ \ x=36:9,\ \ x=4.$$

Щоб знайти невідомий дільник, треба ділене поділити на частку:

$$36:x=9,\ \ x=36:9,\ \ x=4.$$

Щоб знайти невідоме ділене, треба дільник помножити на частку:

$$x:9=4,\ \ x=9\cdot 4,\ \ x=36.$$

Приклад 1.50. Три майстри виготовили 75 виробів за 5 днів. Скільки виробів виготовить один майстер за тиждень?

Розв'язуємо задачу:

1) $75:5=15$ (15 виробів виготовлять три майстри за 1 день);

2) $15:3=5$ (5 виробів виготовить один майстер за 1 день);

3) $5\cdot 7=35$ (35 виробів виготовить один майстер за 7 днів).

Приклад 1.51. За 4 ручки заплатили 32 грн. Скільки коштують 9 ручок?

Розв'язуємо задачу:

1) $32:4=8$ (8 грн коштує 1 ручка);

2) $8\cdot 9=72$ (72 грн коштують 9 ручок).

Приклад 1.52. Дві учениці купили 15 зошитів за однаковою ціною. Перша з них витратила на зошити 35 грн, а друга – 40 грн. Скільки зошитів купила кожна з учениць?

Розв'язуємо задачу:

1) $35+40=75$ (75 грн витратили обидві учениці);

2) $75:15=5$ (5 грн коштує 1 зошит);

3) $35:5=7$ (7 зошитів купила перша учениця);

4) $40:5=8$ (8 зошитів купила друга учениця).

Приклад 1.53. Щоб викачати воду з басейну, одночасно ввімкнули два насоси. Перший насос за хвилину викачував 90 відер води, а другий – 75 відер. Перший викачав на 645 відер води більше, ніж другий. Скільки часу працювали насоси? Скільки відер води викачав кожний насос?

Розв'язуємо задачу:

1) $90-75=15$ (перший насос за хвилину викачував на 15 відер більше, ніж другий);

2) $645:15=43$ (43 хвилини працювали обидва насоси);

3) $90\cdot 43=3870$ (3870 відер викачав перший насос);

4) $75\cdot 43=3225$ (3225 відер викачав другий насос).

Приклад 1.54. Мотоцикліст за 4 год проїхав 92 км, а пішохід за 3 год пройшов 12 км. У скільки разів швидкість мотоцикліста більша за швидкість пішохода?

Розв'язуємо задачу:

1) $96:4=24$ (швидкість мотоцикліста дорівнює 24 км/год);

2) $12:3=4$ (швидкість пішохода дорівнює 4 км/год);

3) $24:4=6$ (у 6 разів швидкість мотоцикліста є більшою за швидкість пішохода).

Приклад 1.55. Два мотоциклісти одночасно виїхали назустріч один одному із двох міст, відстань між якими становить 90 км. Через 2 год вони зустрілися. Перший їхав зі швидкістю 26 км/год. Знайти швидкість другого мотоцикліста.

Розв'язуємо задачу:

1) $26\cdot 2=52$ (перший мотоцикліст проїхав 52 км за 2 год);

2) $90-52=38$ (другий мотоцикліст проїхав 38 км за 2 год);

3) $38:2=19$ (швидкість другого мотоцикліста дорівнює 19 км/год).

Приклад 1.56. Відстань між портами становить 48 км. Власна швидкість катера дорівнює 20 км/год, швидкість течії річки – 4 км/год. Скільки часу потрібно катеру на подолання шляху від першого порту до другого і назад?

Розв'язуємо задачу:

1) $48:(20+4)=2$ (за 2 год катер пройшов шлях за течією);

2) $48:(20-4)=3$ (за 3 год катер пройшов шлях проти течії);

3) $2+3=5$ (за 5 год катер подолав увесь шлях).

Ділення з остачею. Не завжди одне натуральне число можна поділити на інше натуральне число націло. Отже, маємо ділення з остачею:

$$m:k=q\ (ост.\ r),$$

де m – ділене; k – дільник ($k<m$); q – неповна частка; r – остача ($r<k$), причому

$$m=k\cdot q+r\ .$$

Якщо m ділиться на k без остачі, то $r=0$.

Приклад 1.57. При діленні двох чисел з остачею

$$570:13=43\ (ост.\ 11)$$

кажуть так: «570, поділене на 13, дорівнює 43 з остачею 11». Тут неповна частка – це число 43, а остача – число 11.

Перевірка шляхом множення:

$$13\cdot 43+11=570,$$

тобто число 13, помножене на 43, плюс число 11 дорівнює 570.

Приклад 1.58. Знайти число, яке при діленні на 23 дає неповну частку 4 та остачу 7.

Позначимо шукане число через x. Тоді

$$x = 23 \cdot 4 + 7 = 92 + 7 = 99.$$

Приклад 1.59. Декоратору виділили 3700 грн для оформлення зали. Скільки метрів тканини він зможе купити, якщо 1 м коштує 120 грн? Скільки грошей у нього залишиться?

Розв'язуємо задачу:

$$3700 : 120 = 30 \ (ост.\ 10).$$

Отже, декоратор зможе купити 30 м тканини. У нього залишиться 10 грн.

Приклад 1.60. Поїздом треба перевезти 970 т вугілля. Кожен вагон має вантажність 34 т. Скільки вагонів потрібно для перевезення вугілля?

Розв'язуємо задачу так:

$$970 : 34 = 28 \ (ост.\ 18).$$

Отже, для перевезення вугілля потрібно 29 вагонів ($28 + 1 = 29$).

У деяких задачах остачею нехтують. Тоді неповну частку називають **наближеною часткою**. Цей випадок відповідає наближенню з недостачею.

Іноді за наближене значення частки беруть число, яке на одиницю більше від неповної частки. Це випадок наближення з надлишком.

Знак наближеної рівності $\approx$ читають «наближено дорівнює».

Приклад 1.61. Розглянемо два випадки наближення:

1) $500 : 43 \approx 11$ – з недостачею;

2) $500 : 43 \approx 12$ – з надлишком.

Після вивчення теоретичного матеріалу необхідно самостійно розв'язати задачі 1.45–1.116.

1.7. Числові й буквені вирази

Вирази бувають числовими й буквеними.

Числові вирази складаються з чисел, знаків арифметичних дій і дужок.

Після виконання дій, указаних у числовому виразі, буде отримано число – **значення числового виразу**.

Порядок виконання арифметичних дій у числовому виразі:

1) дії в дужках;

2) у дужках зліва направо виконують:

– піднесення до степеня й добування коренів;

– множення й ділення;

– додавання й віднімання.

Приклад 1.62. Наведемо приклади числових виразів, виконаємо дії й отримаємо значення цих виразів:

$$12\cdot 5+234=60+234=294;\quad 1050-75:5=1050-15=1035;$$

$$(70+630):10-13=700:10-13=70-13=57;$$

$$12\cdot 9+\left(9^2-2^3+1\right):37=108+(81-8+1):37=108+74:37=108+2=110.$$

Буквені вирази містять букви, числа, знаки арифметичних дій і дужки. У буквених виразах знак множення (точку) іноді не пишуть.

Приклад 1.63. Наведемо приклади буквених виразів:

$$a+b;\quad (c-d)^2;\quad \left(m^3-n^3\right):(m-n)-m\cdot n;\quad x\cdot y^2+x^2\cdot y \text{ (або } xy^2+x^2y\text{)}.$$

Якщо в буквеному виразі замість букв написати числа, то одержимо числовий вираз. Його значення вважається числовим значенням буквеного виразу при заданих значеннях букв.

Приклад 1.64. Обчислити значення буквеного виразу a^2-b^2, якщо $a=12$, $b=9$.

Якщо $a=12$, $b=9$, то $a^2-b^2=12^2-9^2=144-81=63$.

Приклад 1.65. Спростити вираз $348-m\cdot n+142$ і знайти його значення, якщо $m=70$, $n=7$.

Спростимо вираз та обчислимо його значення при заданих m і n:

$$348-m\cdot n+142=(348+142)-m\cdot n=490-m\cdot n=$$

$$=(m=70, n=7)=490-70\cdot 7=0.$$

Формула – це запис певного правила, яке встановлює взаємозв’язок між величинами за допомогою чисел, букв, знаків арифметичних дій і дужок.

Наведемо приклади формул:

1. Периметр P прямокутника зі сторонами a і b:

$$P=2(a+b)=2a+2b.$$

2. Об’єм V паралелепіпеда зі сторонами a, b і c:

$$V=abc.$$

3. Формули шляху:

$$S=v\cdot t,\quad v=S:t,\quad t=S:v,$$

де S – відстань; v – швидкість руху; t – час руху.

4. У задачах на рух використовують такі формули для обчислення швидкості:

а) рух назустріч: швидкість зближення

$$v_{збл}=v_1+v_2;$$

б) рух у протилежних напрямках: швидкість віддалення

$$v_{від} = v_1 + v_2;$$

в) рух в одному напрямку (навздогін): швидкість зближення

$$v_{збл} = v_1 - v_2, \quad v_1 > v_2;$$

г) рух по воді за течією:

$$v_{за\ теч} = v_{вл} + v_{теч};$$

де $v_{вл}$ – власна швидкість (швидкість катера в стоячій воді); $v_{теч}$ – швидкість течії річки;

д) рух по воді проти течії:

$$v_{проти\ теч} = v_{вл} - v_{теч}.$$

5. Робота A:

$$A = N \cdot t, \quad N = A : t, \quad t = A : N,$$

де A – робота; N – продуктивність; t – час роботи.

6. Вартість товару C:

$$C = a \cdot n, \quad a = C : n, \quad n = C : a,$$

де C – вартість товару; a – ціна товару; n – кількість товару.

Приклад 1.66. Учень має 90 грн на покупку однакових зошитів. Скільки зошитів він зможе купити, якщо один зошит коштує 15 грн?

Використовуючи формулу для знаходження кількості товару, отримаємо

$$n = C : a = 90 : 15 = 6,$$

тобто 6 зошитів учень зможе купити.

Приклад 1.67. Перша бригада за 6 год виготовляє 120 однакових деталей, а друга – за 7 год 210 деталей. Продуктивність праці якої бригади є вищою?

Знайдемо продуктивність праці бригад, використовуючи формулу $N = A : t$:

– продуктивність першої бригади: $N_1 = 120 : 6 = 20$;

– продуктивність другої бригади: $N_2 = 210 : 7 = 30$.

Отже, продуктивність праці другої бригади є вищою, ніж першої.

Після вивчення теоретичного матеріалу необхідно самостійно розв’язати задачі 1.117–1.127.

1.8. Прості і складені числа

Натуральні числа можуть бути:

– **простими**, що мають лише два різних дільники – одиницю й саме число, наприклад:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ \ldots;$$

– **складеними**, що мають більше, ніж два дільники, наприклад:

$$4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ \ldots.$$

Число 1 не є ні простим, ні складеним.

Якщо натуральне число a ділиться націло на натуральне число b, то число a називають **кратним числа** b, а число b – **дільником числа** a.

Для будь-якого натурального числа a кожне із чисел $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$ є кратним числа a.

Число 1 має лише один дільник – 1.

Для числа a найменшим дільником є 1, а найбільшим – саме це число.

Якщо a ділиться націло на k і b ділиться націло на k, то й сума $a + b$ також ділиться націло на k.

Якщо a ділиться націло на k, то й добуток $a \cdot b$ також ділиться націло на k, де b – довільне натуральне число.

Приклад 1.68. Число 14 ділиться на 7, число 21 ділиться на 7, тому їх сума $14 + 21$ ділиться на 7:

$$(14 + 21) : 7 = 35 : 7 = 5.$$

Число 34 ділиться на 17, тому добуток $34 \cdot 2$ ділиться на 17:

$$(34 \cdot 2) : 17 = 68 : 17 = 4.$$

Приклад 1.69. Знайти найменше чотирицифрове число, кратне 27.

Число $1\,000$ – найменше чотирицифрове число. Поділимо його на 27:

$$1\,000 : 27 = 37(ост.1).$$

Отже, $27 \cdot (37 + 1) = 27 \cdot 38 = 1026$ – найменше чотирицифрове число, кратне 27.

Після вивчення теоретичного матеріалу необхідно самостійно розв’язати задачі 1.128, 1.129.

1.9. Розкладання числа на прості множники

Складене число можна розкласти на прості множники, тобто подати його у вигляді добутку простих чисел – дільників цього числа.

Якщо в розкладі числа на прості множники один і той же множник a повторюється n разів, то записують коротко:

$$a^n,$$

тобто $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$,

де вираз a^n – степінь числа a з натуральним показником n; a – основа степеня; n – показник степеня.

Щоб розкласти число на прості множники, потрібно:

– записати число зліва від вертикальної риски;

– справа від риски записати перший дільник числа – найменше число з таблиці простих чисел, на яке це число ділиться без остачі;

– у наступному рядку зліва під числом записати ділене першого етапу, яке є часткою від ділення цього числа на записаний справа на одному рядку з ним дільник;

– справа знайти (як і перший дільник) найменше просте число, на яке ділене першого етапу ділиться без остачі, це число буде другим дільником числа;

– для діленого другого етапу також знайти дільник – найменше серед простих чисел, записати його на тому ж рядку справа і т. д., доки діленим останнього етапу не буде 1;

– дільники, які знаходяться справа від риски, є множниками цього числа.

Для перевірки можна помножити між собою числа, що знаходяться справа від риски, і отримаємо вихідне число.

Приклад 1.70. Розкладемо числа на прості множники:

а)
$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 8 = 2^3;$$

б)
$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 24 = 2^3 \cdot 3.$$

Найбільший спільний дільник (НСД) кількох натуральних чисел – це найбільше число, на яке ці числа діляться без остачі.

НСД заданих чисел дорівнює добутку загальних простих множників цих чисел, кожен з яких узято в найменшому степені.

Якщо числа не мають спільних дільників (крім одиниці), то НСД цих чисел дорівнює 1, при цьому ці числа називають **взаємно простими**:

$$НСД(a; b) = 1.$$

Приклад 1.71. Знайдемо НСД пар чисел:

а) НСД (26; 32) = НСД ($2 \cdot 13$; 2^5) = $2 \cdot 13 = 26$;

б) НСД (8; 36) = НСД (2^3; $2^2 \cdot 3^2$) = $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$;

в) НСД (12; 24) = НСД ($2^2 \cdot 3$; $2^3 \cdot 3$) = $2^2 \cdot 3 = 12$;

г) НСД (15; 75) = НСД ($3 \cdot 5$; $3 \cdot 5^2$) = $3 \cdot 5 = 15$;

д) НСД (12; 25) = НСД ($2^2 \cdot 3$; 5^2) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 12 \cdot 25 = 300$.

Алгоритм Евкліда – алгоритм для знаходження найбільшого спільного дільника пари чисел.

Найменше спільне кратне (НСК) кількох натуральних чисел – це найменше число, яке ділиться без остачі на кожне із заданих чисел.

НСК заданих чисел дорівнює добутку всіх простих множників цих чисел, узятих у найбільшому степені.

Якщо $НСД(a;b)=1$, то $НСК(a;b)=a\cdot b$, тобто НСК взаємно простих чисел a і b дорівнює їх добутку.

Приклад 1.72. Знайдемо НСК пар чисел:

а) НСК (12; 25) = НСК ($2^2 \cdot 3$; 5^2) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ = 300;

б) НСК (26; 32) = НСК ($2 \cdot 13$; 2^5) = $2^5 \cdot 13$ = 416;

в) НСК (8; 36) = НСК (2^3; $2^2 \cdot 3^2$) = $2^3 \cdot 3^2$ = 72;

г) НСК (12; 24) = НСК ($2^2 \cdot 3$; $2^3 \cdot 3$) = $2^3 \cdot 3$ = 24;

д) НСК (15; 75) = НСК ($3 \cdot 5$; $3 \cdot 5^2$) = $3 \cdot 5^2$ = 75.

Приклад 1.73. Знайдемо НСД і НСК трійок чисел:

а) НСД (4; 6; 8) = НСД (2^2 ; $2\cdot3$; 2^3) = 2;

б) НСК (4; 6; 8) = НСК (2^2; $2\cdot3$; 2^3) = $2^3\cdot3$ = 24;

в) НСД (56; 70; 126) = НСД ($2^3\cdot7$; $2\cdot5\cdot7$; $2\cdot3^2\cdot7$) = $2\cdot7$ = 14;

г) НСК (56; 70; 126) = НСК ($2^3\cdot7$; $2\cdot5\cdot7$; $2\cdot3^2\cdot7$) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ = 2520;

д) НСД (26; 51; 78) = НСД ($2\cdot13$; $3\cdot17$; $2\cdot3\cdot13$) = 1;

е) НСК (26; 51; 78) = НСК ($2\cdot13$; $3\cdot17$; $2\cdot3\cdot13$) = $2\cdot3\cdot13\cdot17$ = 1326.

Приклад 1.74. Знайдемо НСД і НСК декількох чисел:

а) НСД (2; 8; 9; 70) = НСД (2; 2^3; 3^2; $2\cdot5\cdot7$) =1;

б) НСК (2; 8; 9; 70) = НСК (2; 2^3; 3^2; $2\cdot5\cdot7$) = $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ = 2520;

в) НСД (40; 60; 100; 150) = НСД ($2^3\cdot5$; $2^2\cdot3\cdot5$; $2^2\cdot5^2$; $2\cdot3\cdot5^2$) = $2\cdot5$ = 10;

г) НСК (40; 60; 100; 150) = НСК ($2^3\cdot5$; $2^2\cdot3\cdot5$; $2^2\cdot5^2$; $2\cdot3\cdot5^2$) = $2^3\cdot3\cdot5^2$ = 600;

д) НСД (54; 81; 135; 189) = НСД ($2\cdot3^3$; 3^4; $3^3\cdot5$; $3^3\cdot7$) = 3^3= 27;

е) НСК (54; 81; 135; 189) = НСК ($2\cdot3^3$; 3^4; $3^3\cdot5$; $3^3\cdot7$) = $2\cdot3^4\cdot5\cdot7$ = 5670.

Після вивчення теоретичного матеріалу необхідно самостійно розв'язати задачі 1.130–1.142.

1.10. Парні й непарні числа

Парним називають таке число, яке можна поділити на 2 без остачі:

2, 4, … 18, … 348, … .

Непарне число ділиться на 2 з остачею:

1, 3, 5, …, 17, …, 589, … .

Парне число можна подати у вигляді формули

$$n = 2k,$$

а непарне – у вигляді формули

$$n = 2k + 1,$$

де k – довільне ціле число.

1.11. Ознаки подільності натуральних чисел

Наведемо ознаки подільності натуральних чисел:

– на 2: натуральне число ділиться на 2, якщо його остання цифра є парною;
– на 3 (на 9): якщо сума цифр числа ділиться на 3 (на 9);
– на 4: число, складене з двох останніх цифр числа, ділиться на 4;
– на 5: якщо остання цифра числа – 0 або 5;
– на 8: число, складене з трьох останніх цифр числа, ділиться на 8;
– на 10: якщо остання цифра числа – 0;
– на 25: число, складене з двох останніх цифр числа, ділиться на 25.

Приклад 1.75. Розглянемо приклади:

а) число 18 ділиться на 2, оскільки його остання цифра 8 є парною:

$$18:2=9;$$

б) число 570 ділиться на 3, оскільки сума цифр числа $5+7+0=12$ ділиться на 3:

$$570:3=190;$$

в) число 576 ділиться на 9, оскільки сума цифр числа $5+7+6=18$ ділиться на 9:

$$576:9=64;$$

г) число 652 ділиться на 4, оскільки число 52 (дві останні цифри числа 652) ділиться на 4:

$$52:4=13 \quad \rightarrow \quad 652:4=163;$$

д) числа 135 і $1\,670$ діляться на 5, оскільки їх записи закінчуються на 5 і 0:

$$135:5=27; \quad 1\,670:5=334;$$

е) число $2\,168$ ділиться на 8, оскільки число 168 ділиться на 8:

$$168:8=21 \quad \rightarrow \quad 2168:8=271;$$

ж) число 1020 ділиться на 10, оскільки остання цифра числа – це 0:

$$1020:10=102;$$

и) число 275 ділиться на 25, оскільки число 75 ділиться на 25:

$$75:25=3 \quad \rightarrow \quad 275:25=11.$$

Після вивчення теоретичного матеріалу необхідно самостійно розв’язати задачі 1.143, 1.144.

1.12. Задачі для самостійного розв’язання

Задача 1.1. Яке найбільше число можна записати в класичній римській системі числення?

Задача 1.2. Які десяткові числа записані за допомогою римських цифр: MMMD, MCCVII, MCMXCVIII?

Задача 1.3. Перетворити в римську систему десяткові числа: 15, 234, 1 999, 2 666, 3 888.

Задача 1.4. Перетворити в десяткову систему римські числа: MMMCXI, MCMXCIX, MCXCVII, MMDCCCLXXXIX.

Задача 1.5. Яке значення має цифра 8 у десяткових числах: 3 538, 8 126, 81, 891?

Задача 1.6. Що можна сказати про числа 111 і III? Що означає цифра один у кожному з них?

Задача 1.7. Прочитати числа:

14, 19, 23, 38, 42, 56, 69, 75, 81, 97;

113, 125, 134, 248, 352, 460, 579, 687, 799, 801;

1 002, 2 065, 3 178, 4 555, 5 010, 6 190, 7 711, 8 019, 9 410;

10 639, 35 936, 50 628, 70 009, 95 041;

205 842, 459 672, 645 271, 850 802, 904 050;

1 067 357, 4 732 549, 7 452 075, 9 006 402.

Задача 1.8. Записати числа за допомогою цифр (цифрами):

а) вісім, сорок два, тринадцять, тридцять п’ять, сімдесят дев’ять, вісімдесят один, п’ятдесят три, дев’яносто шість, шістдесят сім;

б) сто одинадцять, двісті один, триста сорок вісім, чотириста шість, п’ятсот дев’яносто п’ять, шістсот тридцять три, сімсот двадцять, дев’ятсот вісімдесят шість;

в) одна тисяча п’ятнадцять, три тисячі двісті шістдесят один, шість тисяч сім, вісім тисяч сімсот одинадцять, дев’ять тисяч триста сорок вісім;

г) дванадцять тисяч три, сорок сім тисяч вісімнадцять, сто тридцять одна тисяча вісімдесят сім, чотириста двадцять три тисячі дев’яносто, триста дві тисячі шість, сто двадцять дев’ять тисяч сімсот дев’яносто два;

д) триста п’ятдесят три мільйони сімсот тридцять вісім тисяч двісті шістнадцять;

е) триста дев’яносто чотири мільярди триста шість мільйонів двадцять вісім тисяч тридцять п’ять;

ж) десять мільярдів тридцять тисяч двадцять;

и) п’ять мільярдів два мільйони дванадцять тисяч сімнадцять;

к) вісім мільярдів три тисячі п’ять.

З чисел *а–в* випишіть у чотири колонки одноцифрові, двоцифрові, трицифрові й чотирицифрові числа.

Задача 1.9. Порахувати від 1345 до 1354.

Задача 1.10. Порахувати у зворотному порядку від 956 до 945.

Задача 1.11. Назвати сусідів чисел справа і зліва:

7, 11, 56, 74, 99, 105, 118, 141, 167, 189, 328, 451, 674, 838, 975, 1001, 3456, 6391, 7628, 10005, 34061, 67389, 98547, 111111, 349784, 765789.

Задача 1.12. Знайти закономірності:

а) 201, 202, 203, ..., ... ;

б) 4993, 4994, 4995, ..., ... ;

в) 7308, 7306, 7304, ..., ... ;

г) 11003, 11005, 11007, ..., ... ;

д) 1212, 1414, 1616, ..., ... ;

е) 1111, 2222, 3333, ..., ... ;

ж) 4761, 4765, 4769, ..., ... ;

и) 100005, 100010, 100015, … .

Задача 1.13. Записати число, яке в натуральному ряду стоїть за числом: а) 69; б) 124; в) 74 693.

Задача 1.14. Записати число, яке в натуральному ряду передує числу: а) 452; б) 1051; в) 286 790.

Задача 1.15. Скільки чисел стоїть у натуральному ряду між числами 28 і 41?

Задача 1.16. Записати цифрами число:

а) 34 мільйони 219 тисяч 285;

б) 27 мільйонів 643 тисячі 64;

в) 11 мільйонів 76 тисяч 1;

г) 5 мільйонів 30 тисяч 12;

д) 3 мільярди 407 мільйонів 3 тисячі 634;

е) 249 мільярдів 35 мільйонів 120;

ж) 28 мільярдів 673 тисячі;

и) 73 мільярди 82;

к) 402 мільярди 7.

Задача 1.17. Записати цифрами число:

а) сім мільйонів сімсот сімдесят сім тисяч сімсот сімдесят сім;

б) сім мільйонів сімсот тисяч;

в) сім мільйонів сімдесят тисяч;

г) сім мільйонів сімдесят;

д) сім мільйонів сімсот тисяч сімдесят;

е) сім мільйонів сім тисяч сім;

ж) сім мільйонів сімдесят сім тисяч сімсот;

и) сім мільйонів сімсот сім тисяч сімсот сім;

к) сім мільйонів сім.

Задача 1.18. Записати число, яке складається:

а) з 2 тисяч, 5 десятків і 3 одиниць;

б) з 31 тисячі, 9 сотень і 5 одиниць;

в) з 524 тисяч, 4 сотень і 3 десятків;

г) з 7 мільйонів 405 тисяч, 3 сотень, 6 десятків та одиниці;

д) з 23 мільйонів 48 тисяч і 4 десятків;

е) з 107 мільйонів, 1 тисячі і 7 одиниць;

ж) з 16 мільярдів, 7 мільйонів, 28 тисяч і 5 сотень.

Задача 1.19. Скільки різних цифр використали для запису натурального числа:

а) 5 051 070; б) 74 700 144; в) 285 588 852?

Задача 1.20. Записати число, яке:

а) на 7 менше від найменшого двоцифрового числа;

б) на 5 більше за найбільше трицифрове число;

в) на 1 менше від найменшого семицифрового числа;

г) на 3 більше за найбільше п’ятицифрове число;

д) на 8 менше від найбільшого чотирицифрового числа;

е) на 5 більше за найменше шестицифрове число.

Задача 1.21. Записати найбільше чотирицифрове число, у запису якого використовують цифри 5, 7, 1 і 0, що не повторюються.

Задача 1.22. Викреслити дві цифри в числах 78 123 і 51 643 так, щоб трицифрові числа, що залишаться, були:

а) найбільшими; б) найменшими.

Задача 1.23. Записати трицифрове число, у якого кількість десятків у 4 рази більша за кількість одиниць і на 4 одиниці менша за кількість сотень.

Задача 1.24. Записати двоцифрове число, у якого кількість десятків у 5 разів більша за кількість одиниць.

Задача 1.25. Скільки існує трицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра вдвічі більша за попередню? Записати їх.

Задача 1.26. Скільки існує трицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра більша за попередню на 2? Записати їх.

Задача 1.27. Скільки різних трицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна записати цифрами: а) 1, 3 і 5; б) 7, 8 і 9; в) 0, 2 і 4; г) 7, 7 і 0?

Задача 1.28. Поштове відділення знаходиться на шостій зупинці тролейбуса, якщо лічити з одного кінця маршруту, і на двадцятій – від іншого кінця. Скільки всього зупинок на цьому маршруті?

Задача 1.29. Хтось святкує день народження у п’ятнадцятий день місяця, якщо лічити як спочатку, так і з кінця місяця. Записати цей день і місяць.

Задача 1.30. У записі заданих чисел назвати цифри розрядів одиниць, десятків, сотень, тисяч, десятків тисяч, сотень тисяч тощо:

а) 123; б) 124 067; в) 10 274 587.

Задача 1.31. Записати числа у вигляді суми розрядних доданків:

а) 6 401;   б) 34 196;   в) 104 090.

Задача 1.32. Розгадати і записати слова:

1иця, г1на, р1а, смор1а, ві2га, 3зуб, ак3са, ві3ло, ві3на, ви3мка, по3вожити, с3ж, у3мання, ш3х, при5, 7'я, ві7надцять, ві7десят, 40а, 100вп, 100к, 100л, 100лиця, 100ляр, 100рож, 100рона, 100янка, і100рія, мі100.

Задача 1.33. Порівняти числа:

а) 7 і 27; б) 51 і 25; в) 281 і 289; г) 367 і 367; д) 8 019 і 8 109;

е) 4 395 і 43 950; ж) 31 673 і 47 563; и) 30 005 і 13 005.

Задача 1.34. Записати всі натуральні числа:

а) більші за 17 і менші за 24;

б) менші за 24 і не менші за 14;

в) менші за 15;

г) не більші за 7;

д) більші за 14 і не більші за 19.

Задача 1.35. Записати всі натуральні числа:

а) не менші за 245 і не більші за 251;

б) не більші за 1 000 000 і водночас не менші за мільйон.

Задача 1.36. Скільки існує натуральних чисел:

а) менших за 100;

б) не більших за 100;

в) більших за 304 і менших за 340?

Задача 1.37. На скільки число 40 більше від 5? У скільки разів число 40 більше за 5?

Задача 1.38. Записати числа:

а) у порядку їх збільшення: 154, 231, 54, 8 234, 86, 1 024, 8 034, 1 204;

б) у порядку їх зменшення: 3 990, 3, 390, 990, 99, 3 099, 93, 309, 9, 39.

Задача 1.39. У записі чисел замість кількох цифр поставили зірочки. Порівняти ці числа:

а) 51*** і 52***; б) 52* і 4**; в) 1* і *73; г) 68*** і 67***; д) 6** і 32*; е) 8* і *98; ж) 99* і *23; и) 13* і 14*; к) 7*0 і 69*; л) 28* і 3*9; м) 9*6 і *05; н) 50* і 51*.

Задача 1.40. Поставити замість зірочки цифру так, щоб отримати правильну нерівність:

а) $2*>28$; б) $1*32<1100$; в) $5774<5*74$; г) $38<3*$; д) $4*71<4100$; е) $7413<7*13$.

Задача 1.41. Що більше: тисяча мільйонів чи мільйон тисяч?

Задача 1.42. Порівняти висоти найвищих гір України й записати назви гір у порядку збільшення їх висот: Туркул (1933 м), Петрос (2020 м), Чорна гора (2028 м), Гутин Томнатик (2016 м), Бребенескул (2032 м), Ребра (2001 м), Брескул (1911 м), Говерла (2061 м), Менчул (1998 м).

Задача 1.43. Порівняти довжини найдовших річок світу й записати назви річок у порядку зменшення їх довжин: Ніл (6592 км), Янцзи (6380 км), Міссісіпі (6270 км), Амазонка (6690 км).

Задача 1.44. Порівняти відстані до Сонця планет Сонячної системи й розташувати назви планет за збільшенням цих відстаней: Меркурій (50 млн км), Юпітер (800 млн км), Нептун (4500 млн км), Марс (200 млн км), Сатурн (1400 млн км), Земля (150 млн км), Венера (100 млн км), Уран (2850 млн км).

Задача 1.45. Обчислити зручним способом:

а) $7+18+43$; б) $56+9+14$; в) $37+25+13$; г) $16+37+84$;
д) $106+92+38+54$; е) $427+124+273+76$; ж) $3126+297+274+503$.

Задача 1.46. Знайти суму чисел:

а) $1354+438$; б) $2407+3856$; в) $51094+3857$; г) $59326+84132$;
д) $215306+36854$; е) $375127+921463$; ж) $10415127+7395623$.

Задача 1.47. Користуючись властивостями додавання, знайти суму чисел зручним способом:

а) $26+48+39+34+41+52$; б) $87693+39624+3867+472306$;
в) $152060+49826+512974$; г) $1370674+625095+2405326$;
д) $(1538+24304)+462$; е) $27692+(21745+5308)$.

Задача 1.48. Як зміниться сума, якщо:
а) один з доданків збільшити на 10;
б) один доданок збільшити на 17, а інший – на 7;
в) кожен доданок зменшити на 5;
г) один доданок зменшити на 15, а інший збільшити на 8?

Задача 1.49. Маса болта дорівнює 465 г, а гайки – 125 г. Знайти загальну масу болта з двома гайками.

Задача 1.50. На першій полиці стояло 46 книжок, на другій – на 7 книжок більше, а на третій – на 5 книжок більше, ніж на другій. Скільки книжок стояло на трьох полицях разом?

Задача 1.51. На складі було 5 ящиків з кавунами. У першому ящику було 5 кавунів, а в кожному наступному – на один кавун більше. Скільки всього кавунів було в ящиках?

Задача 1.52. Знайти суму трьох доданків, якщо перший на 6 більший від другого, а другий – на 27 більший від третього, який дорівнює 405.

Задача 1.53. Знайти суму двох чисел: найбільшого семицифрового й найбільшого восьмицифрового.

Задача 1.54. Знайти суму всіх натуральних чисел:
а) більших за 137 і менших за 141;
б) не менших за 119 і не більших за 123.

Задача 1.55. Знайти суму перших сорока чисел натурального ряду зручним способом. До речі, маленький Карл Гаусс, коли навчався в школі, дав відповідь на це запитання за пів хвилини.

Задача 1.56. Знайти суму п'яти чисел:

а) одне з яких дорівнює 31, а кожне інше є більшим від нього на 12;

б) одне з яких дорівнює 14, а кожне інше є вдвічі більшим від нього.

Задача 1.57. Розв'язати наведені задачі:

1. Знайти суму трьох різних трицифрових чисел, записаних цифрами 7, 7 і 5.

2. Знайти суму всіх трицифрових чисел, які можна записати цифрами 3, 4 і 5.

3. Знайти суму всіх чотирицифрових чисел, які можна записати цифрами 1, 1, 2 і 2.

Задача 1.58. На скільки найбільше чотирицифрове число є більшим від найменшого чотирицифрового, усі цифри якого однакові?

Задача 1.59. Обчислити зручним способом:

а) $58-20-18$; б) $63+12-13$; в) $(1903+849)-703$; г) $(2804+723)-504$;

д) $1329-(350+229)$; е) $1574-(324+148)$; ж) $(15979-12543)+34021$;

и) $(27058-25909)+32942$; к) $2649-240+351$.

Задача 1.60. Обчислити:

а) $2873+4413-1798$; б) $7327-1089-1327$; в) $8709-6327+1796$;

г) $3008+(12574-10389)$; д) $(18957-13509)-1485$;

е) $13098-(138+4080)-1309$; ж) $(8097-4215)-(4588-2509)$.

Задача 1.61. Знайдіть x, якщо:

а) $x+1403=4897$; б) $6\,297-x=3\,416$; в) $738+x=2\,517$; г) $x-258=1357$.

Задача 1.62. В одному кошику лежить 75 грибів, а в іншому – 48. На скільки грибів у другому кошику менше, ніж у першому?

Задача 1.63. Один альбом містить 135 марок, а інший – удвічі менше. На скільки марок у першому альбомі більше, ніж у другому?

Задача 1.64. На першій полиці було 56 журналів, на другій – на 8 журналів більше, ніж на першій, а на третій – на 35 журналів менше, ніж на перших двох разом. Скільки журналів було на трьох полицях разом?

Задача 1.65. Розв'язати наведені задачі:

1. Знайти число, яке на 187 менше від мільйона.

2. Від двох мільярдів відняти п'ять тисяч сто дев'ять.

3. Від трьох мільярдів відняти два мільйони п'ятсот сорок вісім.

4. Від тридцяти мільярдів відняти шістдесят одну тисячу двісті дев'ять.

Задача 1.66. Розв'язати наведені задачі:

1. До трицифрового числа зліва приписали цифру 2. На скільки збільшилося число?

2. На скільки збільшилося п'ятицифрове число, якщо до нього зліва приписали цифру 7?

3. Невідоме число збільшили на 410, одержане при цьому число зменшили на 274 і дістали 1367. Знайти невідоме число.

4. Від числа 685 відняли суму невідомого числа і 253, отримали число 178. Знайти невідоме число.

Задача 1.67. Розв'язати наведені задачі:

1. На скільки сума найбільшого чотирицифрового числа, найменшого натурального числа та найменшого трицифрового числа є більшою за 100?

2. Від найбільшого трицифрового числа відняли найбільше одноцифрове число, потім додали найменше чотирицифрове число. На скільки отриманий результат є меншим від $2\,000$?

Задача 1.68. Знайти різницю найбільшого та найменшого трицифрових чисел, які можна записати, використавши по одному разу цифри 5, 7 і 0.

Задача 1.69. Одне чотирицифрове число записали за допомогою цифр 4, 8, 2 і 0, а інше – за допомогою цифр 5, 9, 2 і 1. Упорядкувати в кожному числі цифри таким чином, щоб різниця першого й другого чисел була найбільшою.

Задача 1.70. На скільки сума всіх двоцифрових чисел, що закінчуються цифрою 5, є більшою за суму всіх двоцифрових чисел, що закінчуються цифрою 1?

Задача 1.71. Від'ємник дорівнює $27\,321$, а зменшуване – на $5\,218$ більше від нього. Знайти різницю.

Задача 1.72. Дати відповіді на запитання:

1. На скільки різниця чисел $2\,947$ і 1482 є меншою або більшою від різниці чисел 673 і 496?

2. На скільки сума чисел $32\,604$ і $7\,835$ є більшою за їх різницю?

Задача 1.73. Як зміниться різниця $7\,480 - 4\,862$, якщо:

а) і від'ємник, і зменшуване збільшити на 108;

б) і від'ємник, і зменшуване зменшити на 150;

в) зменшуване збільшити на 50, а від'ємник зменшити на 50;

г) зменшуване зменшити на 50, а від'ємник збільшити на 50?

Задача 1.74. Розв'язати наведені задачі:

1. Сума трьох доданків становить $78\,490$. Перший доданок дорівнює

31175, другий – на $12\,415$ менший від нього. На скільки третій доданок є меншим або більшим від другого?

2. Сума трьох доданків дорівнює $57\,608$. На скільки перший доданок є більшим або меншим від другого, якщо третій доданок дорівнює $10\,273$, а другий – більший за третій на $10\,036$?

Задача 1.75. Відстань між двома станціями становить 95 км. З них одночасно назустріч один одному виїхали два потяги. Потяги зустрілися тоді, коли перший потяг проїхав 43 км. Який з потягів проїхав до зустрічі більший шлях і на скільки?

Задача 1.76. Відстань між двома човнами становить 750 м. Якою буде відстань між ними, якщо кожен човен пропливе по 140 м проти течії річки? А якщо один пропливе 140 м проти течії, а інший – 140 м за течією? Розглянути всі можливі випадки.

Задача 1.77. Поставити замість зірочок знак «+» або «–», щоб отримати правильну рівність:

а) (15*27)*(33*58)*(52*19) = 100;

б) (15*27)*(33*58)*(52*19) = 100.

Задача 1.78. Як зміниться добуток двох множників, якщо:

а) один множник збільшити в 2 рази;

б) один множник збільшити вдвічі, а інший – у 5 разів?

Як зміниться добуток трьох множників, якщо:

а) перший множник збільшити втричі, другий – у 7 разів, а третій не змінювати;

б) перший множник збільшити вдвічі, другий – утричі, а третій – у 9 разів;

в) кожний з них збільшити: удвічі, утричі, у 10 разів?

Навести приклади.

Задача 1.79. Знайти число x, якщо:

а) $27 \cdot x = 0$; б) $x \cdot 451 = 0$; в) $328 \cdot x = 328$; г) $x \cdot 1 = 1$; д) $0 \cdot x = 0$.

Задача 1.80. Користуючись властивостями множення, обчислити зручним способом:

1) $38 \cdot 56 + 62 \cdot 56$; 2) $53 \cdot 26 + 47 \cdot 26$; 3) $38 \cdot 47 - 28 \cdot 47$; 4) $147 \cdot 89 - 47 \cdot 89$; 5) $35 \cdot 47 + 365 \cdot 47$; 6) $99 \cdot 67 + 101 \cdot 67$; 7) $38 \cdot 148 - 38 \cdot 48$; 8) $369 \cdot 9 - 219 \cdot 9$; 9) $2 \cdot 417 \cdot 5$; 10) $25 \cdot 329 \cdot 4$; 11) $8 \cdot 3024 \cdot 25$; 12) $125 \cdot 1034 \cdot 8$; 13) $2 \cdot 54 \cdot 50$; 14) $250 \cdot 9678 \cdot 4$; 15) $8 \cdot 784 \cdot 125$; 16) $25 \cdot 74 \cdot 8$; 17) $24 \cdot 25$; 18) $125 \cdot 32$; 19) $125 \cdot 86$; 20) $14 \cdot 25 \cdot 32$; 21) $125 \cdot 160 \cdot 5$; 22) $5 \cdot 250 \cdot 80$; 23) $25 \cdot (7 \cdot 15) \cdot 4$; 24) $(13 \cdot 8) \cdot 15 + 4 \cdot (29 \cdot 25)$; 25) $(23 \cdot 4) \cdot 25 + (25 \cdot 21) \cdot 4$; 26) $125 \cdot (9 \cdot 12) \cdot 8$.

Задача 1.81. Розв'язати наведені задачі:

1. Знайти суму дев'яти доданків, кожен з яких дорівнює 24.

2. На скільки добуток чисел 405 і 45 є більшим за їх суму і за їх різницю?

3. На скільки добуток $237 \cdot 420$ є більшим за добуток $236 \cdot 420$?

4. На скільки сума добутків $27 \cdot 35$ і $27 \cdot 36$ є більшою за їх різницю?

5. На скільки добуток чисел 12, 15 і 17 є більшим за їх суму?

6. До числа 347 справа дописали два нулі. У скільки разів збільшилося це число? На скільки воно збільшилося?

7. Скільки нулів на кінці має число, яке дорівнює добутку всіх натуральних чисел, менших за 23?

8. Один із двох множників збільшили втричі. Як треба змінити інший множник, щоб добуток збільшився в 6 разів?

Задача 1.82. Дати відповіді на запитання:

1. За якої умови добуток чисел дорівнює нулю? Навести приклади.

2. Чи може добуток дорівнювати одному з множників? Навести приклади.

Задача 1.83. Дати відповіді на запитання:

1. Добуток яких двох чисел дорівнює 8, 14, 37?

2. Добуток яких двох однакових чисел дорівнює 64, 121, 625?

3. Добуток яких трьох однакових чисел дорівнює 27, 125, 27 000?

Задача 1.84. Одна доба складається з 24 годин, а одна година – з 60 хвилин. Скільки хвилин триває доба? Скільки годин триває тиждень? Скільки хвилин триває тиждень?

Задача 1.85. Скільки книжок знаходиться в 14 посилках, якщо в кожній з них – по 25 книжок?

Задача 1.86. Швидкість поширення звуку дорівнює 330 м/с. Як далеко вдарив грім, якщо людина почула його через 5 с після того, як побачила блискавку?

Задача 1.87. Розв’язати наведені задачі:

1. Швидкість мотоцикла становить 56 км/год. Скільки кілометрів він проїде за 12 год?

2. Швидкість космічного корабля дорівнює 8 км/с. Скільки кілометрів він пролітає: а) за 1 год; б) за 1 добу?

Задача 1.88. Два маляри мають пофарбувати 96 кімнат. Один із них за день роботи фарбує 5 кімнат, а інший – 7. Скільки кімнат їм залишиться пофарбувати: а) через 5 днів роботи; б) через 8 днів роботи?

Задача 1.89. Розв’язати наведені задачі:

1. З 1 га збирають 35 ц жита. Скільки жита зберуть з двох полів, площі яких дорівнюють 425 і 273 га?

2. Площа одного поля становить 42 га, а іншого – втричі більша. Скільки центнерів пшениці зібрали з двох полів, якщо з 1 га збирали по 40 ц?

Задача 1.90. Дванадцять волейбольних команд зіграли кожна з кожною по 2 рази. Скільки всього відбулося ігор?

Задача 1.91. Розв’язати наведені задачі:

1. Теплохід протягом 5 год ішов річкою зі швидкістю 32 км/год, а потім – 7 год морем зі швидкістю 30 км/год. Яку відстань теплохід подолав за 12 год?

2. З двох портів назустріч один одному одночасно вийшли два теплоходи зі швидкостями 32 і 28 км/год. Теплоходи зустрілися через 5 год. Знайти відстань між портами.

3. Із двох міст A і B назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Перший рухався зі швидкістю 15 км/год, а другий – зі швидкістю 20 км/год. Якою буде відстань між велосипедистами через 2 год від початку руху, якщо відстань між містами A і B дорівнює 90 км?

4. Із порту в одному напрямку одночасно вийшли два теплоходи. Швидкість першого дорівнює 28 км/год, а другого – 25 км/год. Якою буде відстань між теплоходами через 4 год?

5. З однієї станції одночасно в протилежних напрямках вирушили два потяги. Один із потягів рухався зі швидкістю 60 км/год, а інший – 75 км/год. Якою буде відстань між потягами через 3 год після початку руху?

6. З одного міста одночасно в протилежних напрямках вирушили два автобуси. Через 3 год відстань між ними становила 390 км. Один з них рухався зі швидкістю 60 км/год. З якою швидкістю рухався інший автобус?

Задача 1.92. Розв’язати наведені задачі:

1. На скільки сума кубів чисел 3 і 5 є більшою за квадрат їх суми?

2. Що більше: два в кубі чи три в квадраті?

3. На скільки куб числа 4 є більшим від квадрата числа 7?

4. Порівняти квадрат суми чисел 4 і 5 з сумою квадратів цих же чисел.

5. На скільки сума кубів чисел 2 і 4 є більшою за суму їх квадратів?

6. На скільки різниця кубів чисел 7 і 3 є більшою або меншою за різницю їх квадратів?

7. На скільки куб різниці чисел 17 і 14 є більшим або меншим за квадрат їх різниці?

8. На скільки куб суми чисел 11 і 8 є більшим за суму їх кубів?

9. На скільки різниця кубів чисел 10 і 4 є більшою за куб їх різниці?

10. На скільки різниця квадратів чисел 12 і 7 є більшою за квадрат їх різниці?

Задача 1.93. Як зміниться частка, якщо:

а) ділене збільшити в 6 разів, а дільник не змінювати;

б) ділене й дільник збільшити в 7 разів;

в) ділене збільшити в 6 разів, а дільник – утричі;

г) ділене збільшити в 5 разів, а дільник зменшити в 5 разів;

д) ділене й дільник зменшити в 9 разів;

е) ділене зменшити в 10 разів, а дільник – у 5 разів?

Навести приклади.

Задача 1.94. Знайти число x, якщо:

а) $7 \cdot x = 91$; б) $x \cdot 120 = 1080$; в) $x : 16 = 7$; г) $x : 21 = 0$; д) $72 : x = 72$;

е) $37 : x = 0$; ж) $x : 95 = 1$; и) $195 : x = 15$; к) $42 : x = 1$; л) $x : 18 = 18$.

Задача 1.95. Обчислити зручним способом:

а) $236 : 4 + 164 : 4$; б) $867 : 9 - 417 : 9$; в) $94 : 8 + 106 : 8 - 120 : 8$;

г) $1134 : 9 - 108 : 9 - 126 : 9$; д) $77 \cdot 15 : 11$; е) $169 \cdot 17 : 13$; ж) $4 \cdot 225 : 15$.

Задача 1.96. Розв'язати наведені задачі:

1. Ділене збільшили в 4 рази. Як треба змінити дільник, щоб частка не змінилася?

2. У скільки разів добуток чотирьох перших натуральних чисел є меншим за добуток чотирьох наступних?

3. До двоцифрового числа приписали таке саме число. У скільки разів утворене чотирицифрове число є більшим за двоцифрове?

4. Записати числа, на які треба помножити число 777, щоб отримати шестицифрові числа, що записуються лише одними: четвірками; п'ятірками; шістками; сімками; вісімками.

5. У добутку $260 \cdot 130$ перший множник зменшили в 2 рази, а другий – збільшили в 4 рази. Обчислити новий добуток.

Задача 1.97. Із 105 троянд склали 15 однакових букетів. Скільки троянд потрібно, щоб скласти 20 таких букетів?

Задача 1.98. 6 м тканини коштує 480 грн. Скільки метрів тканини можна купити за 880 грн?

Задача 1.99. Перша бригада за 8 год обточує 96 деталей, а друга – за 3 год 270 деталей. У скільки разів більше деталей виготовляє за годину друга бригада, ніж перша?

Задача 1.100. За 6 маркерів заплатили 72 грн. Скільки маркерів можна купити: за 24 грн; за 48 грн; за 60 грн?

Задача 1.101. Кравчиня купила два куски тканини однакової вартості загальною довжиною 32 м. Перший кусок коштує 1700 грн, а другий – 1350 грн. Скільки метрів тканини в кожному куску?

Задача 1.102. На груші виросло 210 груш. Микита може зібрати всі груші за 3 год, а Олена – за 5 год. За скільки годин діти зможуть зібрати всі груші, якщо вони працюватимуть разом?

Задача 1.103. Турист за 5 год пройшов 28 км. Перші 10 км він ішов зі швидкістю 5 км/год. З якою швидкістю він пройшов решту шляху?

Задача 1.104. Два спортсмени одночасно і в одному напрямку виїхали на велосипедах з двох населених пунктів, відстань між якими становить 12 км. Перший їхав зі швидкістю 14 км/год, а другий – зі швидкістю 17 км/год. Через скільки годин другий спортсмен наздожене першого?

Задача 1.105. З двох міст одночасно назустріч один одному виїхали два автобуси. Швидкість першого з них дорівнює 60 км/год, а другого – на 15 км/год більша. Через 3 год відстань між автобусами була 18 км. Знайти відстань між містами.

Задача 1.106. Виконати ділення з остачею:

а) $150:8$; б) $230:11$; в) $648:21$; г) $984:32$; д) $485:39$; е) $2184:8$; ж) $3054:19$; и) $2541:23$; к) $8961:43$; л) $8372:57$; м) $28479:84$.

Задача 1.107. Розв'язати наведені задачі:

1. Чи можна при діленні деякого натурального числа на 7 отримати остачу, більшу за 6?
2. Якими можуть бути остачі від ділення натуральних чисел на 8?
3. Навести приклади ділення, коли остача або неповна частка дорівнює нулю.
4. Чи правильно, що остача від ділення на 10 будь-якого натурального числа дорівнює останній цифрі цього числа? Навести приклад.
5. Чи правильно, що остача від ділення на 100 будь-якого багатоцифрового натурального числа, кількість цифр якого більше або дорівнює чотирьом, дорівнює числу, записаному двома останніми цифрами цього числа? Навести приклад.
6. Як зміняться неповна частка й остача, якщо ділене й дільник подвоїти? Навести приклад.
7. Чи ділиться націло на число 10 різниця $165\,894-423$?
8. Чи ділиться націло на число 10 добуток $63\,465\cdot 316$?
9. Чи правильно, що число, запис якого закінчується цифрою 0, ділиться на 5?
10. Чи правильно, що запис числа, яке ділиться на 5, закінчується цифрою 0?

Задача 1.108. Розв'язати наведені задачі:

1. Знайти ділене, якщо дільник дорівнює 24, неповна частка – 7, остача – 3.
2. Яке число при діленні на 94 дає неповну частку 63 та остачу 5?
3. На яке число треба поділити 754, щоб дістати неповну частку 11 та остачу 8?

Задача 1.109. Знайти наближену частку:

а) $30:4$; б) $30:8$; в) $30:12$; г) $100:3$; д) $100:6$; е) $100:9$; ж) $300:13$; и) $500:23$; к) $800:37$; л) $3846:19$; м) $47316:23$; н) $954206:317$.

Задача 1.110. Одна вантажівка може перевезти 3 т меблів. За скільки разів вантажівка може перевезти 17 т меблів?

Задача 1.111. Пасічник має розлити 37 л меду по однакових банках. Скільки повних трилітрових банок він використає? Скільки літрів меду залишиться?

Задача 1.112. Обчислити наближено швидкість автобуса, якщо за 6 год він проїхав 430 км.

Задача 1.113. Щоб покрити лаком 8 книжкових полиць, витратили 900 мл лаку. Скільки приблизно потрібно лаку для покриття однієї полиці?

Задача 1.114. З вокзалу в протилежних напрямках одночасно виїхали два потяги. Через 2 год відстань між ними становила 365 км. Швидкість першого потяга – 75 км/год. Знайти швидкість другого потяга.

Задача 1.115. Перший катер за 2 год подолав 113 км, а другий – за 3 год на 21 км більше, ніж перший. Який із катерів рухався швидше?

Задача 1.116. З поля площею 46 га зібрали 2 400 ц ячменю, а з поля площею 67 га – 3 840 ц. На якому полі ячмінь уродив краще?

Задача 1.117. Обчислити периметр прямокутника зі сторонами 4 і 6 см.

Задача 1.118. Обчислити об’єм паралелепіпеда зі сторонами 8, 10 і 12 см.

Задача 1.119. Висота кожного поверху будинку становить 3 м, а висота даху – 4 м. Знайти висоту n-поверхового будинку. Обчислити при $n = 9$.

Задача 1.120. Купили a зошитів по 12 грн і 2 щоденники по 24 грн. Скільки гривень коштує вся покупка? Скласти буквений вираз і знайти його значення при $a = 9$.

Задача 1.121. Потяг складається з n вагонів, у кожному з яких – по 36 місць. Скільки лишилося вільних місць, якщо в потязі їде 412 пасажирів?

Задача 1.122. Теплохід ішов протягом двох діб. За першу добу подолав a км, за другу – на 18 км більше, ніж за першу. Скільки кілометрів подолав теплохід за дві доби? Записати буквений вираз.

Задача 1.123. Мотоцикліст їхав протягом a годин зі швидкістю 55 км/год і b годин – зі швидкістю 65 км/год. Скільки кілометрів він проїхав? Записати буквений вираз і знайти його значення, якщо $a = 3$, $b = 2$.

Задача 1.124. Два автобуси їдуть назустріч один одному зі швидкостями 65 км/год і a (км/год). Відстань між ними становить 240 км. Через скільки годин вони зустрінуться?

Задача 1.125. З двох міст, відстань між якими становить 90 км, одночасно в одному напрямку виїхали два велосипедисти. Швидкість одного дорівнює a (км/год), а іншого – b (км/год). Що означають рівності: а) $b - a = 20$; б) $90 - 2(a + b) = 30$?

Задача 1.126. Від рулону тканини завдовжки a метрів одного разу відрізали b метрів, а іншого разу – c метрів. Що означають такі вирази:

а) $a-b$; б) $b+c$; в) $a-(b+c)$?

Задача 1.127. Один робот-автомат за 4 дні виготовляє 160 деталей, а інший – за 3 дні 180 деталей. Який робот виготовить за 7 днів більше деталей і на скільки?

Задача 1.128. Розв’язати наведені задачі:

1. Записати всі дільники таких чисел: 12; 23; 24; 54; 68; 72; 84; 96; 125.
2. Записати три числа, кратні числу 45.
3. Записати всі двоцифрові числа, кратні числам 8, 10, 18, 25, 55.
4. Записати числа, кратні числу 35 і менші від 160.
5. Записати два числа, кратні числу 28 і більші за 100.
6. Знайти найменше число, дільниками якого є числа 3, 12 і 14.
7. Записати найбільше трицифрове число, кратне 29.
8. Знайти найменше чотирицифрове число, кратне 64.
9. Скільки є трицифрових чисел, кратних 46? Знайти ті з них, запис яких закінчується цифрою 6.
10. Визначити всі трицифрові числа, кратні 43, запис яких закінчується цифрою 5.

Задача 1.129. Розв’язати наведені задачі:

1. Автомобіль вантажністю 3 т навантажили ящиками масою по 45 кг. Скільки ящиків навантажили, якщо їх загальна маса більша за 2,9 т?
2. Яку найбільшу кількість мішків із цукром масою по 60 кг можна завантажити на автомобіль вантажністю 3 т?

Задача 1.130. Розкласти на прості множники такі числа:

28; 35; 39; 56; 64; 72; 79; 91; 98; 120; 165; 250; 408; 459; 576; 2 000; 11 100.

Задача 1.131. Знайти всі дільники таких чисел:

30; 42; 48; 54; 68; 106; 110; 121; 169; 216; 154; 186; 246; 385; 429; 595; 625.

Задача 1.132. Розв’язати наведені задачі:

1. Знайти всі двоцифрові числа, розклад яких на прості множники складається із двох однакових множників.
2. Знайти всі двоцифрові числа, розклад яких на прості множники складається із двох множників, одним з яких є 17.

Задача 1.133. Замінити зірочку цифрою та знайти такі прості числа a, b, c, щоб були правильними рівності:

а) $33* = a\cdot 3\cdot 5\cdot 11$;

б) $*02 = 3\cdot 3\cdot a\cdot b\cdot c$.

Задача 1.134. Знайти НСД чисел:

12 і 8; 36 і 48; 50 і 175; 100 і 81; 2, 6 і 18; 24, 36 і 42;
9 і 12; 48 і 72; 6 і 78; 12 і 35; 6, 14 і 36; 32, 64 і 96.

Задача 1.135. Чи є взаємно простими такі числа:

3 і 1 000; 49 і 240; 154 і 165; 7 і 4 000; 36 і 245; 187 і 230; 14 332 і 8 156?

Задача 1.136. Розв'язати наведені задачі:

1. Записати всі числа, що є взаємно простими з числом 12 і меншими за 12.

2. Знайти хоча б три значення a, при яких найбільшим спільним дільником чисел 18 і a є число 6.

Задача 1.137. Яку найбільшу кількість однакових подарунків можна скласти з 54 цукерок і 36 мандаринів, якщо використати всі цукерки і всі мандарини?

Задача 1.138. Між усіма учнями класу розділили порівну 58 зошитів у лінійку і 87 зошитів у клітинку. Скільки учнів у класі? Скільки зошитів у лінійку і скільки у клітинку отримав кожен учень?

Задача 1.139. Знайти НСК чисел:

9 і 24; 12 і 16; 15 і 35; 25 і 35; 48 і 60; 80 і 60; 24 і 108; 110 і 121;

12, 18 і 42; 16, 24 і 36; 360, 540 і 640; 340, 510 і 680; 160, 240 і 400.

Задача 1.140. Яка найменша кількість метрів тканини має бути в рулоні, щоб її можна було продати відрізами лише по 3 м і лише по 4 м?

Задача 1.141. Відрізок АВ можна поділити на рівні частини завдовжки 42, 63 і 84 мм. Яку найменшу довжину може мати відрізок АВ?

Задача 1.142. Маленька коробка вміщає 12 олівців, а велика – 30. Знайти найменшу кількість олівців, які можна запакувати як лише в малі, так і лише у великі коробки.

Задача 1.143. Розв'язати наведені задачі:

1. Приписати справа до чисел 12, 28, 34 таку цифру, щоб утворені при цьому числа ділилися: на 2; на 3; на 4; на 5; на 8; на 10.

2. Приписати зліва до чисел 34, 333, 8 741 таку цифру, щоб утворені при цьому числа ділилися: на 3; на 9.

3. Замість зірочки поставити таку цифру, щоб число 127*: було парним; було непарним; ділилося на 3, на 4, на 5, на 10.

4. Замість зірочок поставити такі цифри, щоб число 2*3* ділилося на 3 і на 10; число 764** ділилося на 9 і на 10; число *999* ділилося на 3 і на 5; число 9*90* ділилося на 9 і на 5.

5. Записати найбільше й найменше трицифрові числа, які діляться на 3, на 4, на 9.

6. Записати одне трицифрове число, кратне 9, використовуючи лише цифри 2, 4, 6, 8 або цифри 0, 1, 2, 4, 8.

7. Використовуючи кожну з десяти цифр один раз, записати найменше натуральне число, яке ділиться на 2, на 5, на 10.

8. Використовуючи кожну з десяти цифр один раз, записати найбільше натуральне число, яке: ділиться на 2, але не ділиться на 10; ділиться на 5, але не ділиться на 2.

9. Які з чисел 148, 275, 400, 12 296, 43 150, 85 225, 90 000 діляться на 3, на 4, на 9, на 25?

Задача 1.144. Розв'язати наведені задачі:

1. Чи ділиться сума $2126+3578+731$ на 2, на 5, на 10?

2. Чи ділиться добуток $396\,475\cdot 835\,672$ на 3, на 4, на 25?

3. Пояснити, чому десятицифрове число, записане за допомогою всіх десяти цифр, ділиться і на 3, і на 9.

4. Запис числа складається із 60 одиниць: $11\ldots11$. Чи ділиться число на 3, на 4, на 9?

5. Чи ділиться число, запис якого складається зі 100 двійок, на 2, на 4?

6. Використовуючи цифри 0, 2, 5, 7, 8 не більше одного разу, записати чотирицифрове число, що ділиться на 4, на 25.

7. Використовуючи цифри 0, 3, 5, 6, 9 не більше одного разу, записати п'ятицифрове число, що ділиться на 4, на 25.

8. Задано ряд чисел 1, 2, 3, …, 99, 100. Скільки серед них є парних і скільки непарних? Скільки серед цих чисел ділиться на 3, на 5, на 10?

9. Задано ряд чисел 9, 10, …, 98, 99. Скільки серед них є парних і скільки непарних? Скільки серед цих чисел ділиться на 3, на 5, на 10?

10. Використовуючи цифри 0, 1, 4, 5, 7, записати шість чотирицифрових чисел, кожне з яких не містить однакових цифр і два з яких діляться на 2, два – на 5, два – на 10.

11. Використовуючи цифри 0, 2, 6, 9, записати три чотирицифрових числа, кожне з яких не містить однакових цифр і перше з них ділиться на 2, друге – на 5, третє – на 10.

2. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

2.1. Звичайний дріб

Звичайний дріб – це частина цілого числа.

Приклад 2.1. Число $\frac{5}{7}$ означає п'ять частин із семи.

Звичайний дріб – це число вигляду

$$\frac{m}{n},$$

де m і n – натуральні числа; m – чисельник дробу; n – знаменник дробу. Риска дробу означає дію ділення: $\frac{m}{n} = m : n$.

Дріб $\frac{m}{n}$ може бути **правильним** ($m < n$) і **неправильним** ($m \geq n$).

Приклад 2.2. Наведемо приклади правильних дробів:

$$\frac{2}{7}\ \ (2 \text{ менше від } 7);\quad \frac{1}{12},\ \ \frac{16}{41},\ \ \frac{32}{157}.$$

Приклад 2.3. Наведемо приклади неправильних дробів:

$$\frac{7}{4}\ \ (7 \text{ більше від } 4);\quad \frac{9}{9}\ \ (9 \text{ дорівнює } 9);\quad \frac{71}{25},\ \ \frac{127}{64}.$$

Будь-який неправильний дріб можна записати у вигляді суми натурального числа й правильного дробу:

$$\frac{m}{n} = l + \frac{k}{n} = l\frac{k}{n} \quad (k < n),$$

де $l\frac{k}{n}$ – **мішане число,** що складається з цілої (l) і дробової $\left(\frac{m}{n}\right)$ частин.

Приклад 2.4. Неправильний дріб $\frac{19}{7}$ запишемо у вигляді мішаного числа:

$$\frac{19}{7} = \frac{14+5}{7} = 2 + \frac{5}{7} = 2\frac{5}{7}.$$

Дріб $2\frac{5}{7}$ є мішаним числом.

І навпаки, мішане число можна записати у вигляді неправильного дробу.

Приклад 2.5. Мішане число $3\frac{2}{5}$ запишемо у вигляді неправильного дробу:

$$3\frac{2}{5}=\frac{3\cdot5+2}{5}=\frac{17}{5}.$$

Два дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{k}{l}$ є **рівними** (такими, що дорівнюють один одному), якщо мають однакове значення. Цифри можуть бути різними, але загальне значення є однаковим.

Щоб визначити, чи є дроби рівними, треба помножити їх поперек (тобто чисельник першого дробу помножити на знаменник другого, а також знаменник першого дробу – на чисельник другого):

$$m\cdot l=n\cdot k.$$

Якщо отримаємо два однакових числа, то дроби є рівними.

Звідси випливає, що $\frac{m}{n}=\frac{C\cdot m}{C\cdot n}$, оскільки $m\cdot(C\cdot n)=n\cdot(C\cdot m)$.

Еквівалентними називають дроби, які можуть мати різний вигляд, але виражати одне й те саме число.

Приклад 2.6. Дроби $\frac{1}{3}$ і $\frac{3}{9}$ є еквівалентними, оскільки

$$1\cdot9=3\cdot3, \text{ тобто } 9=9.$$

Приклад 2.7. Для дробу $\frac{1}{2}$ запишемо еквівалентні дроби:

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \ldots.$$

Для того щоб отримати еквівалентні дроби, помножимо (або поділимо) чисельник і знаменник на одне й те саме число.

Приклад 2.8. Визначаємо еквівалентні дроби:

$$\frac{3\cdot5}{4\cdot5}=\frac{15}{20}; \quad \frac{6\cdot3}{7\cdot3}=\frac{18}{21}; \quad \frac{12:4}{16:4}=\frac{3}{4}; \quad \frac{26:13}{39:13}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 2.9. Які натуральні числа записано у вигляді дробів: $\frac{14}{2}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{9}{1}$?

Розв'язання:

$$\frac{14}{2}=14:2=7; \quad \frac{5}{5}=5:5=1; \quad \frac{9}{1}=9:1=9.$$

Приклад 2.10. Знайдемо дріб $\frac{2}{5}$ від заданого цілого числа A:

1) знайдемо, скільки припадає на одну частину $\left(на\ \frac{1}{5}\right)$: $\frac{A}{5}$;

2) візьмемо потрібну кількість частин (тобто дві частини): $2\cdot\frac{A}{5}=\frac{2\cdot A}{5}$.

Приклад 2.11. Задано дріб $\frac{5}{6}$ від цілого числа B. Знайдемо число B:

1) визначимо, скільки припадає на одну частину $\left(на\ \frac{1}{6}\right)$: $\frac{B}{6}$;

2) помножимо на кількість частин у числі, тобто на 6: $6\cdot\frac{B}{6}=B$.

Приклад 2.12. Запишемо частки $12:13$; $21:47$ у вигляді дробу:

$$12:13=\frac{12}{13};\qquad 21:47=\frac{21}{47}.$$

Приклад 2.13. Подамо натуральні числа 3, 5, 8 у вигляді дробів: а) зі знаменником 4; б) зі знаменником 10; в) з чисельником 24.

Розв'язання:

а) $3=\frac{3}{1}=\frac{3\cdot4}{1\cdot4}=\frac{12}{4}$; б) $5=\frac{5}{1}=\frac{5\cdot10}{1\cdot10}=\frac{50}{10}$; в) $8=\frac{8}{1}=\frac{8\cdot3}{1\cdot3}=\frac{24}{3}$.

2.1.1. Зведення дробів до найменшого спільного знаменника

Для зведення дробів до найменшого спільного знаменника, треба:

1) знайти найменший спільний кратний знаменник дробів;

2) обчислити додаткові множники, ділячи найменше спільне кратне на кожний знаменник;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

Приклад 2.14. Звести до найменшого спільного знаменника дроби $\frac{7}{24}$ і $\frac{11}{30}$.

Розв'язання:

1. Знаходимо $\text{НСК}(24;30)$:

$$24=2\cdot3\cdot4;\quad 30=2\cdot3\cdot5,$$

отже,

$$\text{НСК}(24;30)=2\cdot3\cdot4\cdot5=120.$$

2. Визначаємо додаткові множники:

$$120:24=5;\quad 120:30=4.$$

3. Множимо дроби на відповідні додаткові множники:

$$\frac{7}{24}=\frac{7\cdot5}{24\cdot5}=\frac{35}{120};\quad \frac{11}{30}=\frac{11\cdot4}{30\cdot4}=\frac{44}{120}.$$

2.1.2. Арифметичні дії над звичайними дробами

Визначимо арифметичні дії, які можна виконувати над звичайними дробами:

1. Додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками
$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}.$$
2. Додавання (віднімання) дробів з різними знаменниками
$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}.$$
3. Множення дробів
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$
4. Ділення дробів
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$
5. Множення дробу на число
$$\frac{a}{b}\cdot k=\frac{a\cdot k}{b}.$$
6. Ділення дробу на число
$$\frac{a}{b}:k=\frac{a}{b\cdot k}.$$
7. Додавання (віднімання) дробу й числа
$$\frac{a}{b}\pm d=\frac{a\pm b\cdot d}{b}.$$

2.1.3. Відношення і пропорції

Пропорцією називають рівність двох відношень.

Пропорцію можна записати так:
$$a:b=c:d \text{ або } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \qquad (2.1)$$

Уважатимемо, що всі члени пропорції є відмінними від нуля.

У пропорції $a:b=c:d$ числа a і d називають **крайніми членами**, а числа b і c – **середніми членами пропорції**; відношення $a:b$ називають **першим відношенням пропорції**, відношення $c:d$ – **другим відношенням**, числа a і c називають **попередніми членами**

цих відношень, а b і d – **наступними членами**.

Основна властивість пропорції: якщо добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх членів, то пропорція є правильною.

Запишемо похідні пропорції:

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}; \tag{2.2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}. \tag{2.3}$$

Розглянемо пропорцію $a:x=c:d$, де x – невідома величина; a, c, d – задані числа. Згідно з основною властивістю пропорції $a\cdot d=c\cdot x$ невідомий середній член пропорції дорівнює добутку крайніх членів, поділеному на відомий середній член:

$$x=(a\cdot d):c.$$

Аналогічно невідомий крайній член пропорції дорівнює добутку її середніх членів, поділеному на відомий крайній член.

Приклад 2.15. Знайти невідоме x з пропорції $\dfrac{a+x}{x-a}=\dfrac{b}{c}$.

Розв'язання. Складемо похідну пропорцію вигляду (2.3) і знайдемо x:

$$\frac{(x+a)+(x-a)}{(x+a)-(x-a)}=\frac{b+c}{b-c};$$

$$\frac{x}{a}=\frac{b+c}{b-c};$$

$$x=\frac{(b+c)\cdot a}{b-c}.$$

Можна використовувати і властивість (2.1):

$$(a+x)\cdot c=(x-a)\cdot b,$$

звідки

$$a\cdot c+c\cdot x=b\cdot x-a\cdot b,$$
$$x\cdot(c-b)=-(a\cdot c+a\cdot b),$$
$$x=\frac{a(b+c)}{b-c}.$$

Розглянемо ряд однакових відношень:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}.$$

Позначимо спільне значення всіх цих відношень через k. Тоді

$$\frac{a_1}{b_2}=k\ ,\ \frac{a_2}{b_2}=k\ ,\ \frac{a_3}{b_3}=k\ ,\ldots,\ \frac{a_n}{b_n}=k\ ,$$

звідки $a_1=b_1{\cdot}k$, $a_2=b_2{\cdot}k$, $a_3=b_3{\cdot}k$, …, $a_n=b_n{\cdot}k$.

Додаючи почленно ці рівності, отримаємо

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n=k\cdot\left(b_1+b_2+b_3+...+b_n\right)$$

або

$$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}=k\ ,$$

тобто

$$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}\ .$$

Отже, якщо кілька відношень дорівнюють один одному, то відношення суми їх попередніх членів до суми наступних дорівнює кожному з цих відношень.

2.2. Десяткові дроби

Десятковим дробом називають дріб, знаменник якого – число, виражене одиницею з одним або кількома нулями, тобто дріб вигляду

$$\frac{n}{10^k}\ ,$$

де n – ціле; k – натуральне число.

Десяткові дроби зображують без знаменників: спочатку записують цілу частину, а далі – чисельник дробової частини.

Цілу частину відокремлюють комою від чисельника дробової частини. При цьому чисельник дробової частини записують так, щоб у ньому було стільки цифр, скільки нулів у знаменнику.

Якщо в чисельнику менше цифр, ніж нулів у знаменнику, то перед чисельником дописують відповідну кількість нулів.

Приклад 2.16. Наведемо приклади десяткових дробів:

$$5\frac{13}{100}=5{,}13\,;\quad \frac{3}{10}=0{,}3\,;\quad \frac{7}{100}=0{,}07\,;\quad 7\frac{19}{1000}=7{,}019\,.$$

Якщо до десяткового дробу приписати справа нуль, то дістанемо дріб, що дорівнює початковому.

Приклад 2.17. Наведемо приклади:

$$0{,}75=0{,}750=0{,}7500\,;\quad 12=12{,}0=12{,}00\,.$$

Якщо десятковий дріб закінчується нулем, то цей нуль можна відкинути, діставши дріб, що дорівнює початковому.

Приклад 2.18. Наведемо приклади:

$$0,500 = 0,50 = 0,5; \quad 40,00 = 40,0 = 40.$$

З двох десяткових дробів із різними цілими частинами меншим є той дріб, ціла частина якого менша.

Щоб порівняти два дроби з однаковими цілими частинами, необхідно, приписавши справа нулі, зрівняти кількість десяткових знаків після коми в обох дробах і порівняти їх дробові частини.

Приклад 2.19. Наведемо приклади порівняння дробів:

$$4,23 < 7,25,$$

$$7,6 > 7,593, \quad 7,600 > 7,543.$$

Як і в цілій частині, значення цифр після коми в десятковому дробу залежать від їх місця (позиції).

Приклад 2.20. Дріб $0,777$ можна подати так:

$$0,777 = \frac{777}{1000} = \frac{700}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{7}{1000} = 0,700 + 0,070 + 0,007.$$

Таким чином, перша цифра 7 означає кількість десятих, друга – кількість сотих, а третя – кількість тисячних.

Згідно з цим перший розряд після коми називають **розрядом десятих**, другий – **розрядом сотих**, третій – **розрядом тисячних** і т. д.

Отже, десятковий дріб можна записати у вигляді суми розрядних доданків.

Приклад 2.21. Запишемо розклад десяткового дробу $435,072$ у вигляді суми розрядних доданків:

$$435,072 = 400 + 30 + 5 + 0,070 + 0,002.$$

2.2.1. Дії з десятковими дробами

Додавання й віднімання десяткових дробів

Додавання й віднімання десяткових дробів, як і натуральних чисел, зручно записувати у стовпчик:

$$\begin{array}{r} 4,35 \\ +\ \underline{3,21} \\ 7,56 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12,730 \\ +\ \underline{123,687} \\ 136,417 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142,653 \\ -\ \underline{17,432} \\ 125,221 \end{array}$$

Щоб додати два десяткових дроби, необхідно:

1) у доданках зрівняти кількість знаків після коми;

2) доданки записати один під одним так, щоб кома опинилася під комою;

3) додати одержані дроби за правилом додавання натуральних чисел;

4) у знайденій сумі поставити кому під комами в доданках.

Аналогічно формулюється правило для віднімання десяткових дробів.

Множення десяткових дробів

При множенні двох десяткових дробів необхідно виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відокремити справа наліво комою стільки цифр, скільки їх після коми в обох множниках разом. Якщо в добутку одержимо менше цифр, ніж їх потрібно відокремити комою, то попереду треба дописати відповідну кількість нулів.

За цим правилом множать натуральне число на десятковий дріб і десятковий дріб на натуральне число.

Приклад 2.22. Наведемо приклади множення:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}835 \\ \underline{0{,}95} \end{array} \\ +\begin{array}{r} 4175 \\ \underline{7515} \end{array} \\ 0{,}79325 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}142 \\ \underline{0{,}013} \end{array} \\ +\begin{array}{r} 426 \\ \underline{142} \end{array} \\ 0{,}001846 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 48 \\ \underline{0{,}28} \end{array} \\ +\begin{array}{r} 384 \\ \underline{96} \end{array} \\ 13{,}44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}83 \\ \underline{306} \end{array} \\ +\begin{array}{r} 498 \\ \underline{249} \end{array} \\ 253{,}98 \end{array}$$

Розглянемо ще деякі випадки множення десяткових дробів:

1) при множенні десяткового дробу на 10, 100, 1 000, … у цьому дробу слід перенести кому вправо відповідно на 1, 2, 3, … цифри;

2) при множенні десяткового дробу на 0,1, на 0,01, на 0,001 і т. д. у цьому дробу необхідно перенести кому вліво відповідно на 1, 2, 3 і т. д. цифри.

Приклад 2.23. Наведемо приклади:

$$6{,}23\cdot 10 = 62{,}3,\quad 3{,}547\cdot 100 = 354{,}7,\quad 2{,}481\cdot 1000 = 2\,481;$$

$$70{,}3\cdot 0{,}1 = 7{,}03,\quad 3{,}02\cdot 0{,}01 = 0{,}0302.$$

Ділення десяткових дробів

При діленні десяткового дробу на натуральне число кому в частці ставлять тоді, коли закінчується ділення цілої частини.

Якщо ціла частина є меншою за дільник, то у відповіді матимемо нуль цілих.

Щоб поділити число на десятковий дріб, необхідно в діленому й дільнику перенести кому вправо на стільки цифр, скільки їх після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

Якщо в діленому після коми менше цифр, ніж у дільнику, то справа до нього потрібно дописати кілька нулів, щоб зрівняти кількість цифр після коми в діленому й дільнику.

Приклад 2.24. Поділимо $1{,}1$ на $0{,}02$.

Оскільки в діленому тільки одна цифра після коми, а в дільнику – дві цифри, то допишемо до дільника справа один нуль й перенесемо в діленому й дільнику кому на дві цифри вправо:

$$1{,}1 : 0{,}02 = 110 : 2 = 55.$$

Приклад 2.25. Наведемо приклади ділення чисел:

$$\begin{array}{r|l} -\,10{,}12 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{8} & 2{,}53 \\ -\,21 & \\ \underline{20} & \\ -\,12 & \\ \underline{12} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,3{,}41 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{30} & 0{,}682 \\ -\,41 & \\ \underline{40} & \\ -\,10 & \\ \underline{10} & \\ 0 & \end{array}$$

2.2.2. Округлення десяткових дробів

Десяткові дроби можна округляти до якогось розряду. Порівнюючи число та його наближення, використовують знак «$\approx$» (наближено дорівнює).

При округленні десяткових дробів до якогось розряду всі наступні за цим розрядом цифри замінюють нулями, а якщо вони стоять після коми, то їх відкидають.

Якщо перша з цифр (зліва), що відкидаються, менша за 5, то останню залишену цифру не змінюють (**округлення з недостачею**), а якщо перша цифра, що відкидається, більша за 5 або дорівнює 5, то останню залишену цифру збільшують на одиницю (**округлення з надлишком**). Якщо цифра, що відкидається, стояла до коми, то на її місці записують нуль.

Приклад 2.26. Округлити до одиниць число $76{,}2358$.

Відкинемо всі цифри, що стоять після коми. Оскільки першою з відкинутих цифр була цифра 2, то цифру одиниць не змінюємо:

$$76{,}2358 \approx 76.$$

Приклад 2.27. Округлити до сотих число $123,4579$.

Відкинемо всі цифри, що йдуть за сотими. Оскільки наступна за цифрою сотих (5) стоїть цифра 7, то цифру сотих збільшуємо на одиницю:

$$123,4579 \approx 123,46.$$

Приклад 2.28. Округлити до сотень число $3542,7$.

Замінюємо всі цифри, що йдуть за сотнями, нулями, а цифру 7 після коми відкидаємо. Першою із замінених нулями цифр була цифра 4, тому цифру в розряді сотень не змінюємо:

$$3542,7 \approx 3500.$$

2.3. Відсотки

Соті частини різних величин використовуються в різних областях діяльності людини.

Приклад 2.29. Наведемо приклади сотої частини різних величин:

1) сота частина 1 метра – це 1 сантиметр;
2) сота частина 1 гектара – це 1 ар;
3) сота частина століття – це 1 рік;
4) сота частина 1 гривні – це 1 копійка.

Відсоток – це одна сота частина:

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Замість слова «відсоток» пишуть знак «$\%$» і читають «один відсоток».

Відсоток числа – це сота частина цього числа.

Приклад 2.30. Обчислимо відсотки від чисел:

$$5\,\% = \frac{5}{100} = 0,05; \quad 10\,\% = 10 = 0,1; \quad 17\,\% = \frac{17}{100} = 0,17;$$

$$25\,\% = \frac{25}{100} = 0,25; \quad 50\,\% = \frac{50}{100} = 0,5; \quad 100\,\% = \frac{100}{100} = 1;$$

$$130\,\% = \frac{130}{100} = 1,3.$$

Будь-яку кількість відсотків можна виразити у вигляді десяткового дробу або натурального числа.

Щоб виразити відсотки у вигляді десяткового дробу або натурального числа, необхідно число, що стоїть перед знаком $\%$, поділити на 100, наприклад:

$$24\,\% = 24 : 100 = 0,24;$$

$$300\,\% = 300 : 100 = 3.$$

Щоб виразити число у відсотках, це число слід помножити на $100\,\%$, наприклад:

$$0{,}17 = 0{,}17 \cdot 100\,\% = 17\,\%;$$

$$4{,}7 = 4{,}7 \cdot 100\,\% = 470\,\%.$$

Установимо зв'язок між найпростішими значеннями відсотків і відповідними дробами:

ціле – $100\,\%$; половина – $50\,\%$; чверть – $25\,\%$;
п’ята частина – $20\,\%$; три чверті – $75\,\%$; дві п’ятих – $40\,\%$.

Збільшити деяку величину вдвічі – це означає збільшити її на $100\,\%$; зменшити деяку величину вдвічі – це означає зменшити її на $50\,\%$.

Приклад 2.31. Знайти 1% величин A, B, C, D, якщо: а) $A = 750$ м; б) $B = 80$ кг; в) $C = 1\,380$ грн; г) $D = 2$ год.

Розв’язання:

а) 750 м : 100 = 7,5 м;
б) 80 кг : 100 = 0,8 кг;
в) $1\,380$: 100 = 13,8 грн;
г) 2 год : 100 = 0,02 год.

Приклад 2.32. Знайдемо число A, якщо 1% його дорівнює $7{,}4$:

$$A = 7{,}4 \cdot 100 = 740.$$

Розглянемо три основних види задач на відсотки:

1. **Знаходження відсотків від числа.** Щоб знайти p відсотків від числа a, необхідно a помножити на $0{,}01p$.

Приклад 2.33. Знаходимо $30\,\%$ від числа $1\,700$ таким чином:

– один відсоток від числа $1\,700$ – це одна сота частина цього числа:

$$1\,700 : 100 = 17;$$

– $30\,\%$ від числа $1\,700$ – у 30 разів більше:

$$17 \cdot 30 = 510.$$

Отже, $30\,\%$ від числа $1\,700$ дорівнюють 510.

Приклад 2.34. Вихід сиру з молока становить $11\,\%$. Скільки можна отримати сиру з 1000 мл молока?

Розв’язання:

- 1-й спосіб: $1\,\%$ від числа $1\,000$ – $1\,000 : 100 = 10$,

$11\,\%$ від числа 1000 у 11 разів більше: $10 \cdot 11 = 110$ кг;

- 2-й спосіб: $11\,\% = 0{,}11$, $1\,000 \cdot 0{,}11 = 110$ кг.

Отже, з $1\,000$ мл молока можна отримати 110 кг сиру.

2. **Знаходження числа за його відсотками.** Щоб знайти число, p відсотків якого дорівнюють b, необхідно число b поділити на $0{,}01p$.

Приклад 2.35. Знайдемо число, $30\,\%$ якого дорівнюють 510.

Розв'язання:

- 1-й спосіб: якщо $30\,\%$ шуканого числа дорівнюють 510, то 1% – у 30 разів менше: $510:30=17$. Це сота частина шуканого числа, а все число – у 100 разів більше: $17\cdot 100=1\,700$;

- 2-й спосіб: $30\,\%=0{,}3$; $510:0{,}3=1700$.

Приклад 2.36. Руда містить $56\,\%$ заліза. Скільки потрібно переробити руди, щоб отримати 28 т заліза?

Розв'язання: Припустимо, що потрібно х тонн руди. Знайшовши $56\,\%=0{,}56$, запишемо рівняння $x\cdot 0{,}56=28$ і розв'яжемо його: $x=28:0{,}56$, $x=50$.

Отже, потрібно переробити 50 т руди.

Приклад 2.37. Яблука після висушування втрачають $84\,\%$ маси. Скільки буде потрібно свіжих яблук, щоб отримати 50 кг сушених?

Розв'язання:

1) $100\,\%-84\,\%=16\,\%$, тобто після висушування залишиться $16\,\%$ маси всіх яблук, а за умовою задачі це становить 50 кг;

2) знайдемо число, $16\,\%$ якого дорівнюють 50 кг: $50:0{,}16=312{,}5$ кг.

Таким чином, необхідно висушити 312,5 кг свіжих яблук.

3. **Знаходження відсоткового відношення.** Потрібно знайти, скільки відсотків становить одне число від іншого.

Приклад 2.38. На полі площею 250 га квасолею засіяно 15 га. Скільки відсотків усього поля відведено під квасолю?

Розв'язання має такий вигляд: 15 : 300 =0,05; а 0,05 = 5%.

Приклад 2.39. Костюм коштує 1 250 грн. Скільки костюм коштуватиме, якщо його ціна зменшиться на $10\,\%$?

Знайдемо $10\,\%$ від 1 250 грн: $10\,\%=0{,}1$, тоді 1 250 $\cdot\ 0{,}1=125$;
1 250 – 125 = 1 125.

Отже, костюм коштуватиме 1 125 грн.

Приклад 2.40. З чайного листя отримують $4{,}2\,\%$ чаю. Скільки чаю можна отримати з 50 кг чайного листя? Розв'язати задачу двома способами.

Розв'язання:

- 1-й спосіб: $1\,\%$ від числа 50 становить 50 : 100 = 0,5, а $4{,}2\,\%$ від числа 50 – у 4,2 раза більше: $0{,}5\cdot 4{,}2=2{,}1$;

- 2-й спосіб: $4{,}2\,\%=0{,}042$; $50\cdot 0{,}042=2{,}1$.

Отже, з 50 кг чайного листя можна отримати 2,1 кг чаю.

Приклад 2.41. У школі 800 учнів. Серед них 408 хлопчиків. Скільки відсотків учнів цієї школи становлять хлопчики?

Спочатку визначимо, скільки учнів припадає на 1 %. Оскільки всіх учнів 800, то на 1 % припадає 8 учнів: 800 : 100 = 8.

Отже, хлопчики становлять 51 % (408 : 8 = 51).

Приклад 2.42. Учень прочитав 138 сторінок, що становить 23 % кількості всіх сторінок у книжці. Скільки сторінок у книзі?

Якщо 138 поділити на 23, то знайдемо, що 6 сторінок припадає на 1 %. Оскільки всі сторінки в книзі становлять 100 %, то це означає, що в книзі всього 600 сторінок (6 · 100 = 600).

Приклад 2.43. У магазині за два дні продано 1 280 кг яблук. За перший день продали 55 % усіх яблук. Скільки кілограмів яблук продали за другий день?

Протягом дня продали 55 % усіх яблук, отже, за другий день продали 45 % яблук, що становить 576 кг (1 280 · 0,45 = 576).

Приклад 2.44. За планом робітник мав виготовити 60 деталей. Проте він виготовив на 18 деталей більше, ніж передбачалося планом. На скільки відсотків робітник виконав план?

Один відсоток плану становить 60:100 = 0,6. Робітник виготовив 60 + 18 = 78 (деталей). Отже, він виконав план на 130 % (78 · 0,6 = 130).

2.4. Задачі для самостійного розв’язання

Задача 2.1. Порівняти дроби:

$$а)\ \frac{3}{7}\ і\ \frac{6}{7};\ б)\ \frac{8}{13}\ і\ \frac{11}{13};\ в)\ \frac{15}{47}\ і\ \frac{39}{47};\ г)\ \frac{329}{647}\ і\ \frac{145}{647};\ д)\ \frac{15}{15}\ і\ \frac{6}{7};\ е)\ \frac{18}{7}\ і\ \frac{113}{113};$$

$$ж)\ \frac{3}{7}\ і\ \frac{7}{9};\ и)\ \frac{35}{47}\ і\ \frac{47}{35};\ к)\ \frac{3}{17}\ і\ \frac{3}{15};\ л)\ \frac{11}{21}\ і\ \frac{11}{31};\ м)\ \frac{29}{43}\ і\ \frac{29}{34};\ н)\ \frac{11}{22}\ і\ \frac{11}{11};$$

$$п)\ \frac{7}{11}\ і\ \frac{7}{4};\ р)\ \frac{11}{7}\ і\ \frac{11}{5};\ с)\ \frac{39}{93}\ і\ \frac{39}{39};\ т)\ \frac{39}{19}\ і\ \frac{39}{13};\ у)\ \frac{3}{17}\ і\ \frac{3}{15};\ ф)\ \frac{11}{21}\ і\ \frac{11}{31}.$$

Задача 2.2. Виконати додавання й віднімання дробів:

$$а)\ \frac{3}{7}+\frac{6}{7};\ б)\ \frac{9}{27}+\frac{12}{27};\ в)\ \frac{17}{48}+\frac{7}{48};\ г)\ \frac{39}{67}+\frac{28}{67};\ д)\ \frac{11}{43}+\frac{32}{43};\ е)\ \frac{5}{16}+\frac{3}{16};$$

$$ж)\ \frac{18}{57}+\frac{9}{57}+\frac{2}{57};\ и)\ \frac{17}{93}+\frac{29}{93}+\frac{34}{93};\ к)\ \frac{17}{48}-\frac{7}{48};\ л)\ \frac{15}{16}-\frac{13}{16};\ м)\ \frac{39}{67}-\frac{28}{67};$$

$$н)\ \frac{55}{81}-\frac{29}{81};\ п)\ \frac{18}{57}-\frac{9}{57}+\frac{12}{57};\ р)\ \frac{17}{93}+\frac{29}{93}-\frac{34}{93}.$$

Задача 2.3. Записати у вигляді неправильного дробу:

$$а)\ 4\frac{3}{7};\ б)\ 9\frac{4}{13};\ в)\ 7\frac{5}{14};\ г)\ 6\frac{39}{40};\ д)\ 18\frac{7}{25};\ е)\ 20\frac{4}{13};$$

$$ж)\ 9\frac{9}{17};\ и)\ 28\frac{3}{4};\ к)\ 35\frac{3}{4};\ л)\ 78\frac{4}{5};\ м)\ 240\frac{7}{8}.$$

Задача 2.4. Записати у вигляді мішаного числа:

$$а)\ \frac{37}{7};\ б)\ \frac{39}{27};\ в)\ \frac{105}{48};\ г)\ \frac{139}{67};\ д)\ \frac{86}{43};\ е)\ \frac{95}{16};\ ж)\ \frac{65}{34};$$

$$и)\ \frac{79}{12};\ к)\ \frac{74}{23};\ л)\ \frac{106}{74};\ м)\ \frac{195}{57};\ н)\ \frac{358}{17}.$$

Задача 2.5. Який з неправильних дробів дорівнює натуральному числу:

$$а)\ \frac{37}{17};\ б)\ \frac{27}{27};\ в)\ \frac{1000}{50};\ г)\ \frac{70}{36};\ д)\ \frac{86}{43};\ е)\ \frac{70}{35}?$$

Задача 2.6. Виконати дії, результат записати у вигляді мішаного числа:

$$а)\ 3\frac{7}{9}+\frac{4}{9};\ б)\ 2\frac{3}{8}+1\frac{4}{8};\ в)\ 7\frac{1}{10}+1\frac{3}{10};\ г)\ 3\frac{2}{7}+\frac{3}{7};\ д)\ 5\frac{4}{9}+3\frac{2}{9};\ е)\ \frac{7}{13}+2\frac{4}{13};$$

$$ж)\ 1\frac{5}{12}+2\frac{11}{12};\ и)\ 3\frac{7}{13}+2\frac{7}{13};\ к)\ \frac{38}{71}+\frac{83}{71};\ л)\ \frac{65}{53}+\frac{95}{53};\ м)\ \frac{93}{31}-\frac{25}{31};$$

$$н)\ 2\frac{7}{13}-\frac{4}{13};\ п)\ 5\frac{3}{4}-2\frac{1}{4};\ р)\ 3\frac{5}{9}-\frac{4}{9};\ с)\ 7\frac{9}{11}-5\frac{3}{11};\ т)\ 6\frac{4}{13}-2\frac{1}{13}.$$

Задача 2.7. Обчислити значення виразу:

$$а)\ 2\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-1;\ б)\ 5\frac{1}{6}+2\frac{4}{6}-\frac{3}{6};\ в)\ 12\frac{3}{7}+10\frac{2}{7}-\frac{4}{7};\ г)\ 2\frac{3}{23}+\frac{4}{23}-1;$$

$$д)\ \frac{3}{5}+\left(2\frac{1}{5}-1\frac{2}{5}\right);\ е)\ 3\frac{2}{7}-\left(2\frac{1}{7}-1\frac{4}{7}\right);\ ж)\ 2\frac{1}{4}+\left(3\frac{3}{4}+3\frac{3}{4}\right);\ и)\ 7\frac{7}{8}-\left(2\frac{3}{8}+1\frac{7}{8}\right);$$

$$к)\ 9\frac{2}{11}-\left(4\frac{5}{11}+2\frac{6}{11}\right);\ л)\ \left(\frac{5}{6}+4\frac{2}{6}\right)-\left(3\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right);$$

$$м)\ \frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\frac{5}{7}-\frac{1}{8};\ н)\ \frac{5}{13}+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{8}{13}.$$

Задача 2.8. Порівняти значення виразів A і B, якщо:

а) $A=8\frac{2}{7}-\left(4\frac{5}{11}+2\frac{6}{11}\right)$, $B=6\frac{2}{7}-\left(3\frac{7}{12}+1\frac{5}{12}\right)$;

б) $A=5\frac{4}{9}+3\frac{5}{9}-2\frac{1}{5}$, $B=4\frac{7}{9}+5\frac{2}{9}-2\frac{4}{5}$;

в) $A=7\frac{11}{12}+\left(4\frac{7}{12}-3\frac{1}{12}\right)$, $B=7\frac{13}{15}+5\frac{8}{15}-6\frac{7}{15}$;

г) $A=5\frac{3}{7}+2\frac{1}{5}-\frac{23}{7}-\frac{3}{5}$, $B=7\frac{2}{9}-\frac{16}{7}-\frac{20}{9}+7\frac{2}{7}$.

Задача 2.9. При яких значеннях n дроби $\frac{n}{7}$, $\frac{7}{n}$, $\frac{n}{n}$ є:

а) правильними;

б) неправильними?

Задача 2.10. Знайти $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ від чисел: а) 50; б) 100; в) 180; г) 240; д) 360; е) 480.

Задача 2.11. Які натуральні числа задовольняють нерівностям:

а) $3\frac{1}{3}<x<7\frac{1}{4}$; б) $14\frac{2}{7}<x<\frac{134}{5}$; в) $\frac{23}{23}<x<\frac{132}{41}$.

Задача 2.12. При яких натуральних значеннях x дріб $\frac{12x+3}{74}$ буде: а) правильним; б) неправильним?

Задача 2.13. Знайти число, якщо:

а) $\frac{5}{7}$ від нього дорівнюють: 10, 35, 90;

б) $\frac{4}{11}$ від нього дорівнюють: 8, 36, 200;

в) $\frac{3}{16}$ від нього дорівнюють: 9, 27, 180.

Задача 2.14. Маса одного пакунка становить $2\frac{2}{5}$ кг. Якою є маса: двох таких пакунків; трьох; п'яти?

Задача 2.15. Сторони прямокутника дорівнюють $2\frac{1}{5}$ і $3\frac{2}{5}$ м. Знайти його периметр.

Задача 2.16. Швидкість катера за течією становить $25\frac{3}{8}$ км/год, а швидкість течії – $2\frac{1}{8}$ км/год. Скільки кілометрів пропливе цей катер проти течії за 1 годину?

Задача 2.17. За послуги переказу грошей клієнт сплатив 32 грн, що становить $\frac{1}{200}$ від суми вказаного платежу. Скільки гривень перерахував клієнт?

Задача 2.18. За послуги переказу грошей клієнт сплатив 32 грн, що становить $\frac{1}{200}$ від суми вказаного платежу. Скільки гривень перерахував клієнт?

Задача 2.19. Знайти значення виразів:

$$\text{а)}\ \frac{\frac{3}{4}\cdot 1{,}8\cdot 1\frac{1}{5} : 0{,}07}{\frac{1}{5} : 0{,}49\cdot 2\frac{5}{8}};\quad \text{б)}\ \frac{0{,}2\left(6{,}2 : 0{,}31-\frac{5}{6}\cdot 0{,}9\right)}{2+1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22 : 0{,}1};\quad \text{в)}\ \frac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} : \frac{7}{18}};$$

$$\text{г)}\ \frac{28{,}8 : 13\frac{5}{7}+6{,}6 : \frac{2}{3}}{1\frac{11}{16} : 2{,}25};\quad \text{д)}\ 1\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3} : 1\frac{4}{9}-3\frac{3}{8}+1\frac{5}{8}\right)-1\frac{5}{6};$$

$$\text{е)}\ \frac{5}{10} : 0{,}125+1{,}456\cdot\frac{7}{25}-4{,}5\cdot\frac{4}{5}.$$

Задача 2.20. Розв’язати рівняння:

$$\text{а)}\ 3(2{,}5x-0{,}2)-15\frac{1}{15}=8-\left(\frac{2}{3}-0{,}5x\right);\quad \text{б)}\ \frac{10{,}5}{y-3{,}6}=\frac{51}{y+1{,}8};$$

$$\text{в)}\ \frac{2x-3{,}2}{1{,}2}=\frac{5x-6}{0{,}5}.$$

Задача 2.21. Записати відсотки у вигляді десяткового дробу або натурального числа:

а) 61 %; б) 329 %; в) 14,8 %; г) 1,8 %; д) 756 %; е) 99 %.

Задача 2.22. Записати число у відсотках:

а) 0,04; б) 0,91; в) 1,7; г) 4; д) 38; е) 0,007.

Задача 2.23. Знайти 1 % числа:

а) 28; б) 300; в) 450; г) 70.

Задача 2.24. Знайти 1 % величин A, B, C, D, якщо:

а) A = 43 м; б) B = 817 кг; в) C = 490 грн; г) D = 1 год.

Задача 2.25. Знайти число, якщо 1 % його становить:

а) 12; б) 1,9; в) 83; г) 3,74; д) 0,65; е) 0,712.

Задача 2.26. На скільки відсотків змінилася величина, якщо вона:

а) збільшилася втричі; б) зменшилася в 4 рази?

Задача 2.27. У скільки разів збільшилася величина, якщо вона збільшилася: а) на 400 %; б) на 80 %?

Задача 2.28. Заповнити таблицю:

Відсотки	10 %			75 %				2 %
Десятковий дріб			0,25		0,01		0,4	
Звичайний дріб		$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{5}$		

3. АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ Й СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ

3.1. Рівняння й системи рівнянь першого степеня

Рівнянням називають рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою.

Невідоме число в рівнянні називають змінною. Змінні найчастіше позначають буквами x, y, z.

Приклади рівнянь: $2y-7=4y$; $2x^2-3x-5=0$; $\sqrt{z-3}=2$; $\sin x=1$ тощо.

Рівнянням називають рівність зі змінною, відносно якої треба встановити, для яких значень (можливо, таких значень і не існує) ця рівність перетворюється на правильну числову.

Значення змінної, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність, називають ***коренем (розв'язком) рівняння з однією змінною***. Якщо x_0 – корінь рівняння $f(x)=g(x)$, то $f(x_0)=g(x_0)$ – правильна рівність.

Коренем, або розв'язком, рівняння називають число, яке задовольняє рівнянню.

Приклади:

1. Число 3 є коренем рівняння 2x – 5 = 1, оскільки 2 · 3 – 5 = 1.
2. Число -2 не є коренем рівняння 3x + 7 = 0, оскільки 3 · (-2) +7 = 1 ≠ 0.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені (розв'язки) або довести, що їх немає.

Цілим рівнянням називають раціональне рівняння, якщо ліва й права частини цього рівняння – цілі вирази.

Рівносильні рівняння – це рівняння з однією змінною, які мають одні й ті самі корені. Іншими словами, ***рівносильними*** називають рівняння, які мають однакові множини розв'язків, тобто два будь-яких рівняння будуть рівносильними, якщо всі корені першого рівняння є коренями другого, а всі корені другого рівняння – коренями першого або обидва не мають розв'язків. Рівносильність рівнянь позначають так:

$$f_1(x)=g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x)=g_2(x).$$

Приклади:

1. Рівняння $4x = 8$ і $x + 3 = 5$ – рівносильні, оскільки кожне з них має єдиний корінь, що дорівнює 2.
2. Рівняння $7 – x = 6$ і $10x = 20$ не є рівносильними, оскільки перше має корінь – число 1, а друге – число 2.

Під час розв'язування рівнянь використовують такі властивості:

- якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне заданому;

- якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне заданому;

- якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне заданому.

3.2. Лінійні рівняння

Лінійним називають рівняння вигляду $ax = b$, де x – невідоме, a і b – вирази, що не залежать від x:

1. Якщо $a \neq 0$, то лінійне рівняння має єдиний розв'язок $x = \frac{b}{a}$.

2. Якщо $a = b = 0$, то лінійне рівняння набуває вигляду $0 \cdot x = 0$. Це рівняння має безліч розв'язків, тобто x – будь-яке дійсне число.

3. Якщо $a = 0, b \neq 0$, то рівняння набуває вигляду $0 \cdot x = b$. Це рівняння не має розв'язків.

Лінійні рівняння вигляду $\boldsymbol{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0}$ та $\boldsymbol{\frac{p(x)}{q(x)} = 0}$

Для того щоб розв'язати рівняння $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$, треба перейти до сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots \\ f_n(x) = 0. \end{array}\right.$

Розв'язання рівняння $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ ґрунтується на такому твердженні: дріб $\frac{m}{n}$ дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник – відмінний від нуля. Таким чином, при переході від рівняння $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ до рівняння $p(x) = 0$ можуть виникати сторонні корені. Відсіяти їх можна за допомогою умови $q(x) \neq 0$.

Рівняння, що містять модуль

Для того щоб розв'язати рівняння, що містить змінну під знаком модуля, треба звільнитися від знака модуля, використавши його означення

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0; \\ -x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

При розв'язанні таких рівнянь треба дотримуватися плану:

1) знайти ті значення змінної, при яких вирази, що містяться під знаком модуля, перетворюються на нуль;
2) область допустимих значень змінної розбити на проміжки, на кожному з яких вирази, що містяться під знаком модуля, зберігають знак;
3) на кожному з проміжків розв'язати рівняння без знака модуля;
4) розв'язки на вказаних проміжках і будуть розв'язками рівняння.

Рівняння вигляду $|f(x)| - |g(x)| = a$, $|f(x)| + |g(x)| = |\varphi(x)|$ тощо містять два і більше виразів зі змінними, що стоять під знаком модуля. Такі рівняння доцільно розв'язувати за такою схемою:

1) визначаємо ОДЗ рівняння;

2) знаходимо значення змінної, при яких дорівнює нулю хоча б один із виразів, що стоїть під знаком модуля (їх називають нулями підмодульних виразів);

3) розглядаємо нулі підмодульних виразів в ОДЗ і розбиваємо ОДЗ на проміжки;

4) знаходимо розв'язок рівняння-наслідку на кожному з проміжків і перевіряємо, чи входить цей розв'язок у розглядуваний проміжок;

5) даємо відповідь.

3.3. Системи рівнянь першого степеня

Маємо систему двох лінійних рівнянь з двома змінними

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Розглянемо цю систему:

1) якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система має єдиний розв'язок;

2) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не має розв'язків;

3) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має безліч розв'язків.

Розв’язати систему означає знайти всі її розв’язки.

Розв’язок системи рівнянь з двома змінними – це пара значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи на правильну числову рівність.

Систему називають **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв’язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв’язку.

Систему рівнянь називають **визначеною**, якщо вона має скінченну кількість розв’язків, і **невизначеною,** якщо вона має нескінченну множину розв’язків.

Дві системи називають **рівносильними,** якщо вони мають ту саму множину розв’язків, або **рівносильними** називають системи рівнянь, якщо корені однієї системи є коренями іншої і навпаки.

Симетричною системою рівнянь називають систему, усі рівняння якої є симетричними.

Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними можна розв’язувати графічним способом, способом підстановки або способом додавання:

1. Метод підстановки полягає в тому, щоб із якого-небудь рівняння системи виразити одне невідоме через інші та підставити одержаний вираз у решту рівнянь.

2. Метод додавання (віднімання) полягає в додаванні (відніманні) рівнянь певної системи з метою одержання іншої системи рівнянь, рівносильної заданій, але більш простої.

3. Графічне розв’язання системи рівнянь з двома змінними зводиться до пошуку координат спільних точок графіків рівнянь.

Щоб розв’язати систему рівнянь графічним способом, треба:

- виконати рівносильні перетворення системи так, щоб було зручно побудувати графіки рівнянь системи;
- побудувати графіки;
- знайти координати точок (точки) перетину побудованих ліній, які і є розв’язками (розв’язком) системи рівнянь.

Якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв’язок; якщо прямі не перетинаються, то система не має розв’язків; якщо прямі збігаються, то система має безліч розв’язків.

Графічний спосіб розв’язування систем рівнянь не є універсальним, оскільки не завжди розв’язком системи є пара цілих чисел. Іноді важко точно встановити координати точки перетину побудованих графіків функцій, можна лише вказати наближені значення, тому зазвичай використовують алгебраїчні способи розв’язування систем рівнянь – способи підстановки та додавання.

3.4. Приклади розв’язання типових задач

Приклад 3.1. Розв’яжемо рівняння.

Розв’язання:

1. $2x-3=2-5x$;

$2x+5x=2+3$;

$7x=5$;

$x=\frac{5}{7}$.

Відповідь: $\frac{5}{7}$.

2. $2(5x-4)-3(4-x)=3x+20$;

$10x-8-12+3x=3x+20$;

$10x+\cancel{3x}-\cancel{3x}=20+8+12$;

$10x=40$;

$x=\frac{40}{10}$;

$x=4$.

Відповідь: 4.

3. $\frac{x-2}{3}-\frac{3-x}{12}=\frac{x}{4}-2$. Помножимо обидві частини рівняння на 12 (найменше спільне кратне знаменників 3, 4 і 12):

$12\left(\frac{x-2}{3}-\frac{3-x}{12}\right)=12\left(\frac{x}{4}-2\right)$;

$4(x-2)-(3-x)=3x-24$;

$4x-8-3+x=3x-24$;

$4x+x-3x=-24+8+3$;

$2x=-13$;

$x=-\frac{13}{2}=-6{,}5$.

Відповідь: $-6{,}5$.

4. $\frac{x(x+3)}{x-5}=0$;

$$\begin{cases} x(x+3)=0, \\ x-5\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-3, \end{array}\right. \\ x\neq 5. \end{cases} \text{отже, } x=0, \text{ або } x=-3.$$

Відповідь: -3; 0.

5. $\dfrac{(10-x)(x-2)}{4-x^2}=0;$

$$\begin{cases} (10-x)(x-2)=0, \\ 4-x^2\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 10-x=0, \\ x-2=0, \end{array}\right. \\ x\neq -2, \\ x\neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=10, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\neq -2, \\ x\neq 2. \end{cases} \text{отже, } x=10.$$

Відповідь: 10.

Приклад 3.2. Розв'яжемо рівняння, що містять модуль.

Розв'язання:

1. $|x+5|=6;$

$$\left[\begin{array}{l} x+5=-6, \\ x+5=6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-6-5, \\ x=6-5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-11, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Відповідь: -11; 1.

2. $|7x-2|=-3$. Рівняння розв'язків не має, оскільки модуль не може бути від'ємним.

3. $|x+2|=x+2$. Знаходимо значення x, при якому модуль дорівнює 0: $x+2=0$, $x=-2$.

Розглянемо два випадки (рис. 3.1):

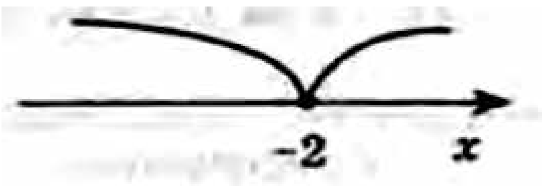


Рис. 3.1

а) $x \in (-\infty; -2]$;

$-(x+2) = x+2; -x-2 = x+2; -x-x = 2+2; -2x = 4;$

$x = -2$ – корінь рівняння;

б) $x \in (-2; +\infty)$;

$x+2 = x+2;\ x-x = 2-2;\ 0 \cdot x = 0;\ x$ – будь-яке число з інтервалу $(-2; +\infty)$.

Відповідь: $[-2; +\infty)$.

4. $|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9$. Значення x, при яких модулі дорівнюють 0, розбивають числову пряму на чотири проміжки (рис. 3.2).

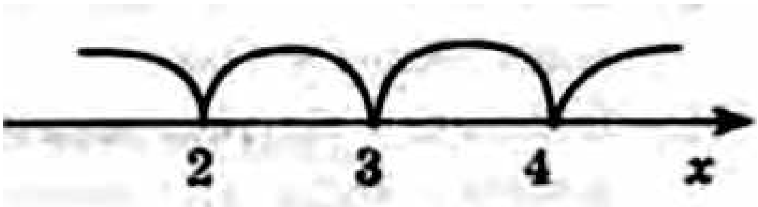


Рис. 3.2

Розглянемо чотири випадки:

а) $x \in (-\infty; 2]$;

$-(x-2) - (x-3) - (2x-8) = 9; -x+2-x+3-2x+8 = 9;$

$-4x = -4;\ x = 1$ – корінь рівняння;

б) $x \in (2; 3]$;

$x-2-(x-3)-(2x-8) = 9;\ x-2-x+3-2x+8 = 9; -2x = 0;$

$x = 0$ не є коренем рівняння;

в) $x \in (3; 4]$;

$x-2+x-3-(2x-8) = 9;\ x-2+x-3-2x+8 = 9;$

$0 \cdot x = 6$ (рівняння коренів не має);

г) $x \in (4; +\infty)$;

$x-2+x-3+2x-8 = 9;\ 4x = 9+13;$

$4x = 22;\ x = \dfrac{22}{4} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$ – корінь рівняння.

Отже, коренями рівняння є числа 1 і 5,5.

Відповідь: 1; 5,5.

Приклад 3.3. Розв'яжемо системи лінійних рівнянь способом підстановки.

Розв'язання:

1. $\begin{cases} 3x+4y=-5, \\ 5x-3y=11. \end{cases}$ Оскільки $\frac{3}{5} \neq -\frac{4}{3}$, то система має один розв'язок.

Виразимо з першого рівняння x через y: $x=\frac{-5-4y}{3}$, тоді замість x у друге рівняння підставимо $\frac{-5-4y}{3}$:

$5\left(\frac{-5-4y}{3}\right)-3y=11;$

$5(-5-4y)-9y=33;$

$-25-20y-9y=33;$

$-20y-9y=33+25;$

$-29y=58;\ y=-2.$

Якщо $y=-2$, то $x=\frac{-5-4(-2)}{3}=\frac{-5+8}{3}=\frac{3}{3}=1.$

Відповідь: $(1;-2)$.

2. $\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$ Оскільки $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$, то система має один розв'язок.

Виразимо з першого рівняння x через y: $x=\frac{8-3y}{2}$, тоді замість x у друге рівняння підставимо $\frac{8-3y}{2}$:

$3\left(\frac{8-3y}{2}\right)+2y=7;$

$3(8-3y)+4y=14;$

$24-9y+4y=14;$

$-9y+4y=14-24;$

$-5y=-10;\ y=2.$

Якщо $y=2$, то $x=\frac{8-3\cdot 2}{2}=\frac{8-6}{2}=\frac{2}{2}=1.$

Відповідь: $(1;2)$.

3. $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+2y=7. \end{cases}$ Оскільки $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, то система не має розв'язків, оскільки два рівняння системи не можуть задовольняти одночасно (з першого рівняння $x + y = 3$, а з другого $x + y = 3{,}5$).

Відповідь: розв'язків немає.

Приклад 3.4. Розв'яжемо системи лінійних рівнянь способом додавання.

Розв'язання:

1. $\begin{cases} 5x-6y=1, \\ 3x+4y=12. \end{cases}$ Помножимо перше рівняння на 2, а друге – на 3, одержимо систему $\begin{cases} 10x-12y=2, \\ 9x+12y=36. \end{cases}$

Склавши почленно рівняння системи, одержимо x:

$19x=38;\ x=\frac{38}{19};\ x=2.$

Підставимо в перше рівняння $x=2$ та одержимо y:

$5\cdot 2-6y=1;\quad 10-6y=1;\quad 6y=9;\quad y=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1{,}5.$

Отже, $(2;1{,}5)$ – розв'язок системи.

Відповідь: $(2;1{,}5)$.

2. $\begin{cases} 3x-y=9, \\ 2x+y=11. \end{cases}$ Коефіцієнти при змінній y є протилежними числами, тому складемо почленно ліві й праві частини рівнянь:

$$+\begin{cases} 3x-y=9, \\ 2x+y=11. \end{cases}$$

$(3x-y)+(2x+y)=9+11;$

$\underline{3x}-\cancel{y}+\underline{2x}+\cancel{y}=20;$

$5x=20;$

$x=20:5;$

$x=4.$

Підставимо знайдене значення x у друге рівняння системи й знайдемо y:

$2x + y = 11;$

$2 \cdot 4 + y = 11;$

$8 + y = 11;$

$y = 11 - 8;$

$y = 3.$

Відповідь: (4; 3).

Приклад 3.5. Розв'яжемо графічно системи лінійних рівнянь.

1. $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x + y = 3. \end{cases}$ Виконаємо рівносильні перетворення системи рівнянь:

$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x + y = 3; \end{cases} \begin{cases} y = 7 - 3x, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Побудуємо графіки кожного рівняння системи:

$y = 7 - 3x$

x	2	3
y	1	-2

$y = 3 - x$

x	2	3
y	1	0

Отже, графіком кожного із рівнянь системи лінійних рівнянь із двома змінними є пряма. M (1;2) – точка перетину графіків рівнянь (рис. 3.3).

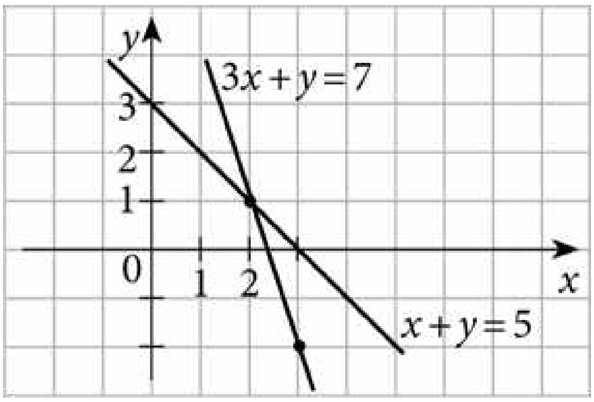


Рис. 3.3

2. $\begin{cases} xy = 12, \\ y = x - 1. \end{cases}$ Графіком рівняння $xy = 12$ $\left(y = \dfrac{12}{x}\right)$ є гіпербола:

x	-2	-3	-4	-6	2	3	4	6
y	-6	-4	-3	-2	6	4	3	2

а графіком рівняння $y = x - 1$ – пряма:

x	0	1
y	-1	0

Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 3.4). Ці графіки мають дві спільні точки (4; 3), (-3; -4).

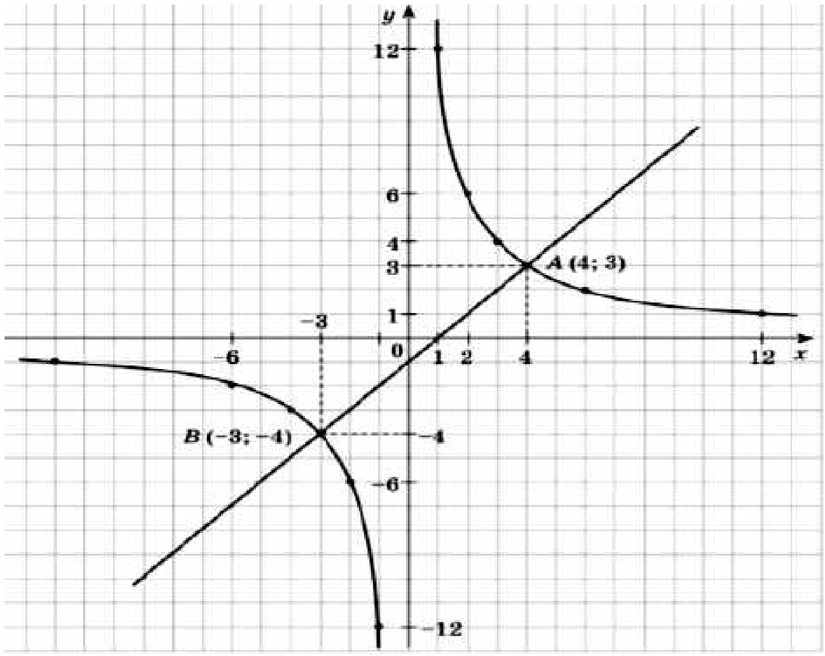


Рис. 3.4

Відповідь: (4; 3), (-3; -4).

Приклад 3.6. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1} - \dfrac{5}{2x-y+3} = -2{,}5; \\ \dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{1}{2x-y+3} = -1{,}4 \end{cases}$ за допомогою заміни змінних.

Розв'язання. Нехай $x + y - 1 = \dfrac{1}{t}; 2x - y + 3 = \dfrac{1}{z}$, тоді $\begin{cases} 4t - 5z = -2{,}5, \\ 3t + z = -1{,}4. \end{cases}$

Помноживши друге рівняння системи на 5, отримаємо

$$\begin{cases} 4t - 5z = -2{,}5, \\ 15t + 5z = -7. \end{cases}$$

Складемо почленно рівняння системи:

$19t = -9{,}5;$

$t = -\dfrac{9{,}5}{19} = -0{,}5,$ тоді $z = -1{,}4 + 1{,}5 = 0{,}1.$

Отже, $\begin{cases} x+y-1=-2, \\ 2x-y+3=10. \end{cases}$

Складемо почленно рівняння отриманої системи:

$3x+2=8;\ 3x=6;\ x=2$. Тоді $y=-2+1-2=-3$.

Відповідь: $(2;-3)$.

Приклад 3.7. Не розв'язуючи системи, визначимо кількість розв'язків кожної системи.

Розв'язання:

1. $\begin{cases} 5x-2y=11, \\ x-3y=-3. \end{cases}$ Оскільки $\frac{5}{1}\neq\frac{-2}{-3}$ (графіки рівнянь перетинаються), система має один розв'язок.

2. $\begin{cases} x+y=3, \\ 4x+4y=6. \end{cases}$ Оскільки $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\neq\frac{3}{6}$ (графіки рівнянь не перетинаються), система розв'язків не має.

3. $\begin{cases} x+y=3, \\ 3x+3y=9. \end{cases}$ Оскільки $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$ (графіки рівнянь збігаються), система має безліч розв'язків.

3.5. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. Розв'язати рівняння:

а) $3(x+2)-(2x-5)=4x+11$; б) $4(x+1)-6(x-1)=2(5-x)$;

в) $-8(x-4)+2(x+4)=2(x-1)-(x+5)$; г) $4x-1=(2x+5)-(3x-2)$;

д) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x+4}{5}=\frac{1}{2}-\frac{x+1}{4}$; е) $\frac{x-3}{6}+\frac{x-1}{4}=\frac{x+6}{3}-\frac{x+7}{8}$;

ж) $\frac{6x-1}{2}-\frac{x-1}{6}=\frac{1}{3}x-\frac{x-8}{2}$; и) $\frac{x(x+2)}{x+6}=0$; к) $\frac{(8-x)(3+x)}{9-x^2}=0$;

л) $(2x-3)(x+5)(7-x)=0$; м) $\frac{(x-4)(5x+10)}{x+2}=0$.

Задача 3.2. Розв'язати рівняння, що містять модуль:

а) $|2x-5|=1$; б) $|3x-8|-2=10$; в) $|6x-4|+10=7$; г) $|x-2|=x+3$;

д) $|2x-1|+|x+4|=|x-2|$; е) $|3x+6|-|5-x|=1$; ж) $2-|x+5|=|x-4|-|2+x|$;

и) $|x-2|+|x+2|=7$.

Задача 3.3. Розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+5y=21, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ \dfrac{y}{x}=0,75; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-3y=-4, \\ 4y-10x=3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 11x-5y=37, \\ 4y-x=25; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{11y-27}, \\ \dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y+8}{11}; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy+x^2=3; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 4(m+2)=1-5n, \\ 3(n+2)=5-2m; \end{cases}$ л) $\begin{cases} 2(5a-4)-3(3-4b)=5, \\ 6(7b-1)-(2+3a)=31. \end{cases}$

Задача 3.4. Розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+5y=21, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ \dfrac{y}{x}=0,75; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-3y=-4, \\ 4y-10x=3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 11x-5y=37, \\ 4y-x=25; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{11y-27}, \\ \dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y+8}{11}; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy+x^2=3; \end{cases}$

к) $\begin{cases} \dfrac{p+3}{4}-\dfrac{q-2}{6}=1, \\ \dfrac{p-1}{8}+\dfrac{q+1}{6}=2; \end{cases}$ л) $\begin{cases} \dfrac{7x-1}{4}-\dfrac{2x+3}{3}=\dfrac{3x-5y}{2}, \\ \dfrac{5x-3y}{3}+\dfrac{x+5y}{2}=3x-y. \end{cases}$

Задача 3.5. Розв’язати графічно системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x+y=11, \\ 3x-y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0,5x+y=3, \\ y=x-3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=-2, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y-x=0, \\ 3x-y=4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2y=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y=5, \\ x+2y=-1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} y=x+6, \\ \dfrac{1}{3}x+y=2; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x=-1, \\ 2x+y=3; \end{cases}$

к) $\begin{cases} y+x=0, \\ 4x+y=6; \end{cases}$ л) $\begin{cases} y-x=2, \\ 2y-2x=5. \end{cases}$

Задача 3.6. Розв'язати системи лінійних рівнянь за допомогою заміни змінних:

а) $\begin{cases} 3(x-2y)+2(x-y)=2, \\ 5(x-2y)+3(x-y)=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{3}+3=\dfrac{3x-y}{5}, \\ \dfrac{2(3x-y)}{3}=\dfrac{x-2y}{2}+10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{5}y=\dfrac{34}{15}, \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{5}y=\dfrac{16}{15}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+y+4}{5}+\dfrac{x-y-4}{7}=9, \\ \dfrac{x+y+4}{5}-\dfrac{x-y-4}{7}=1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+y}+\dfrac{1}{2x-y}=\dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{7}{2x+y}+\dfrac{2}{2x-y}=\dfrac{3}{5}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4xy-\dfrac{x}{y}=30, \\ 3xy+\dfrac{2x}{y}=28. \end{cases}$

Задача 3.7. Визначити, чи має розв'язки система рівнянь:

а) $\begin{cases} x-2y=7, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+5y=9, \\ 12x+15y=18; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+y=5, \\ 12x+4y=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y+2x=9, \\ 3x-5y=4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 6x+4y=15; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x-3y=-4, \\ 6x-9y=-12; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x-3y=5, \\ 4x-12y=25; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 2x+7y=1, \\ x-3y=2. \end{cases}$

Задача 3.8. Яка з пар чисел (-5; 1); (1; 4); (2; 3) є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x-y=-17, \\ 5x+y=13? \end{cases}$

4. РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

4.1. Ірраціональні вирази

Квадратний корінь з числа a – це числа, квадрати яких дорівнюють a.

Арифметичний квадратний корінь з невід'ємного числа a – це невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a, тобто $\sqrt{a^2} = |a|$.

Корінь n**-го степеня з числа** a – це число, n-й степінь якого дорівнює a (n – натуральне число).

Арифметичний корінь n**-го степеня з невід'ємного числа** a – це невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Радикал – це математичний знак $\sqrt{\ }$, який означає дію коренювання, тобто знаходження кореня n-го степеня з якогось числа a. Це записується так: $\sqrt[n]{a}$. Згідно з означенням запис $\sqrt[n]{a} = x$, де $a \geq 0$, означає, по-перше, що $x \geq 0$, по-друге, що $x^n = a$, тобто $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Наприклад, $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt[3]{125} = 5$.

Якщо $a \geq 0$ *і* $b \geq 0$, то правильними є такі властивості:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

5) $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Перша властивість поширюється на добуток будь-якої кількості множників, наприклад: $\sqrt[3]{8 \cdot 125 \cdot 27} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{125}\sqrt[3]{27} = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$.

Корінь має найпростішу форму, якщо:

- не містить ірраціональностей у знаменнику;
- не можна скоротити його показник з показником підкореневого виразу;
- усі можливі раціональні множники винесені з-під знака кореня.

Корені називають подібними, якщо вони мають одну й ту саму найпростішу форму, тобто вони можуть відрізнятися лише раціональними множниками перед знаками коренів.

Наприклад, якщо $a > 0, b > 0$, то

$$\sqrt[8]{a^2b^6} = \sqrt[4]{ab^3};\ \sqrt[4]{\frac{81a^5}{b}} = 3a\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{3a}{b}\sqrt[4]{ab^3}.$$

Подібні корені можна додавати й віднімати.

4.1.1. Корінь непарного степеня з від'ємного числа

Нехай $a<0$ та n – натуральне число, більше за одиницю. Якщо n – непарне число, то рівність $x^{\mathrm{n}}=a$ не виконується ні для якого дійсного значення *x*. Це означає, що в області дійсних чисел не можна визначити корінь парного степеня з від'ємного числа. Якщо ж n – непарне число, то існує одне і лише одне дійсне число *x*, таке, що $x^{\mathrm{n}}=a$. Таке число позначають $\sqrt[n]{a}$ і називають коренем непарного степеня n з від'ємного числа a.

Наприклад, $\sqrt[3]{-8}=-2$, оскільки $(-2)^3=-8$; $\sqrt[5]{-243}=-3$, оскільки $(-3)^5=-243$.

У випадку непарних показників коренів властивості радикалів є правильними для невід'ємних значень підкореневих виразів.

Наприклад, $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$ для будь-яких *a* і *b*.

4.1.2. Степінь з дробовим показником

Якщо $a\geq 0, m, n$ – натуральні числа і $n\geq 2$, то $\mathrm{a}^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Якщо $a>0$, то $\mathrm{a}^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Нецілий степінь від'ємного числа не має сенсу.

Наприклад,

$$8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2;\quad 81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=\sqrt[4]{\left(3^4\right)^3}=3^3=27;\quad 4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Для будь-якого числа *a* визначена операція піднесення до натурального степеня. Для будь-якого числа $a\neq 0$ визначена операція піднесення до нульового та цілого від'ємного степеня; для будь-якого $a\geq 0$ визначена операція піднесення до додатного дробного степеня і для будь-якого $a>0$ визначена операція піднесення до від'ємного дробного степеня.

Щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику, чисельник і знаменник потрібно помножити на спряжене зі знаменником число.

Рекомендуємо ознайомитися з прикладами розв'язання задач з вивченої теми (підрозд. 4.5, приклади 4.1–4.6) і спробувати самостійно розв'язати запропоновані задачі (підрозд. 4.6, задачі 4.1–4.5).

4.2. Квадратні рівняння

Квадратне рівняння – це рівність вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, зі змінною x, відносно якої треба визначити, для яких її значень (можливо, таких значень і не існує) рівність перетворюється на правильну числову.

Приклад квадратного рівняння: $5x^2 + 3x - 17 = 0$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює числу 1, називають ***зведеним квадратним рівнянням***.

Квадратне рівняння, хоча б один із коефіцієнтів якого – b або c – дорівнює нулю, називають ***неповним квадратним рівнянням*.**

Якщо другий або третій коефіцієнт дорівнює нулю, то маємо **неповне квадратне рівняння**, тобто квадратне рівняння вигляду $ax^2 + c = 0$ *або* $ax^2 + bx = 0$.

Приклади неповного квадратного рівняння: $8x^2 + 67 = 0$; $4x^2 + 23x = 0$.

4.2.1. Неповні квадратні рівняння

1. Неповне квадратне рівняння вигляду $ax^2 + bx = 0$.

Рівняння такого вигляду завжди має два корені: 0 і $-\frac{b}{a}$, і його зазвичай розв’язують шляхом розкладання його лівої частини на множники.

2. Неповне квадратне рівняння вигляду $ax^2 + c = 0$.

Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то рівняння вигляду $ax^2 + c = 0$ має два корені: $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то таке рівняння не має коренів.

Якщо $-\frac{c}{a} = 0$, то таке рівняння має один корінь: $x = 0$.

Схему розв’язування квадратного рівняння зображено на рис. 4.1.

Розкладемо ліву частину рівняння на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=$$

$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Отже, рівняння зводиться до вигляду $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, де $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ і $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ – корені рівняння.

Вираз b^2-4ac називають **дискримінантом** і позначають літерою D.

Властивості коренів квадратного рівняння:

- якщо $D>0$, то рівняння має два дійсних корені;

- якщо $D<0$, то рівняння дійсних коренів не має;

- якщо $D=0$, то рівняння має два дійсних корені, які дорівнюють один одному.

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння є парним числом, то корені рівняння знаходимо так:

$$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac;\quad x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}.$$

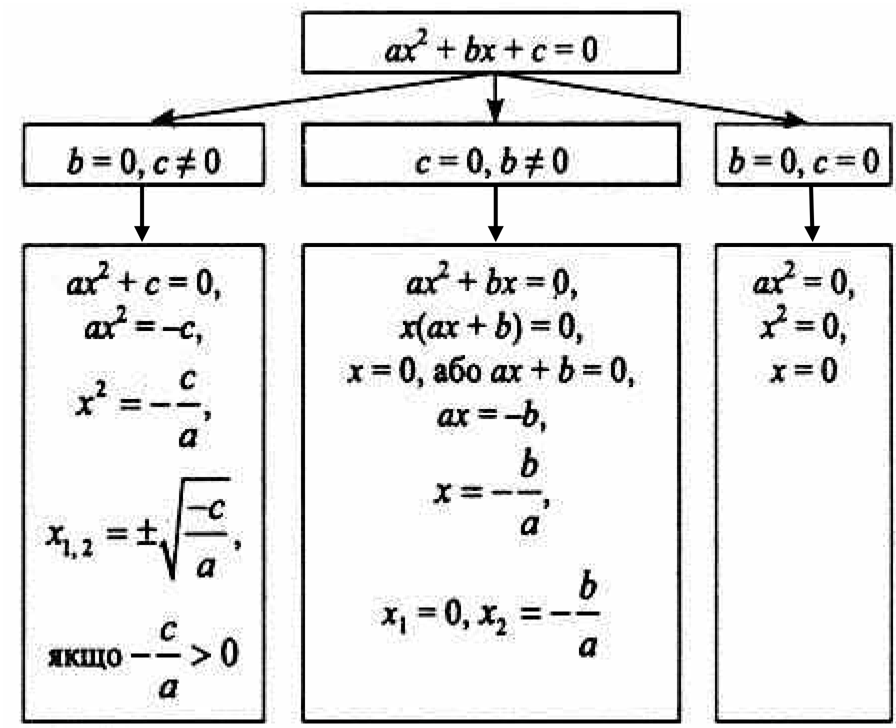


Рис. 4.1

Теорема Вієта. Якщо x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то $\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{c}{a}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}. \end{cases}$

Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, то x_1 і x_2 є коренями рівняння $ax^2+bx+c=0$.

4.2.2. Біквадратні рівняння

Біквадратним називають рівняння вигляду $ax^4+bx^2+c=0$, де $a\neq 0$.

Якщо ввести нову змінну $t=x^2$, то біквадратне рівняння зводиться до квадратного рівняння $at^2+bt+c=0$.

Метод уведення нової змінної широко використовується під час розв’язування біквадратних рівнянь.

4.3. Ірраціональні рівняння

Рівняння, у яких змінна знаходиться під знаком кореня, називають ***ірраціональними.***

Такі рівняння найчастіше зводять до раціональних рівнянь за допомогою таких перетворень:

- заміна змінних;
- піднесення обох частин рівняння до одного степеня. При цьому треба пам’ятати, що при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому. При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можна отримати сторонні корені, які відсіюються перевіркою.

У деяких випадках під час розв’язання рівнянь, що містять корені парних степенів, доцільніше відсіювати сторонні корені не внаслідок перевірки, а шляхом знаходження області допустимих значень змінної.

4.4. Розв’язання систем рівнянь другого степеня

Якщо одне з рівнянь системи – другого степеня з двома змінними, а інше – рівняння з тими самими змінними другого або першого степеня, то таку систему називають ***системою двох рівнянь другого степеня з двома змінними***.

Існують різні способи розв'язання систем рівнянь, основними серед яких є:

- підстановка;
- алгебраїчне додавання;
- графічний спосіб.

У простих випадках під час розв'язування систем рівнянь другого степеня вдається виразити одну змінну через іншу і підставити цей вираз у друге рівняння. Також для розв'язання систем рівнянь другого степеня часто застосовують спосіб заміни змінних.

4.5. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 4.1. Знайдемо значення виразів.

Розв'язання:

а) $$\frac{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^3}\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{2^2\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^3\cdot 4}}}{\sqrt[6]{2^5\cdot\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[12]{8^3\cdot 4}}{\sqrt[6]{\sqrt{2^{10}}\cdot\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[12]{\left(2^3\right)^3\cdot 2^2}}{\sqrt[6]{\sqrt{2^{10}\cdot 2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[12]{2^9\cdot 2^2}}{\sqrt[12]{2^{11}}}=\frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{\sqrt[12]{2^{11}}}=\sqrt[12]{\frac{2^{11}}{2^{11}}}=\sqrt[12]{1}=1;$$

б) $$\sqrt[14]{64}\cdot\sqrt[7]{-16}=\sqrt[7\cdot 2]{8^2}\cdot\sqrt[7]{-16}=\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16}=-\sqrt[7]{8\cdot 16}=-\sqrt[7]{2^3\cdot 2^4}=-\sqrt[7]{2^7}=$$

$$=-2.$$

Приклад 4.2. Зводимо до найпростішої форми корені, якщо $a>0, b>0$.

Розв'язання:

а) $$\sqrt[6]{a^9b^{15}}=\sqrt{a^3b^5}=ab^2\sqrt{ab};$$

б) $$\sqrt[10]{\frac{a^{16}}{b^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^8}{b}}=a\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}=\frac{a}{b}\sqrt[5]{a^3b^4};$$

в) $$\sqrt{\sqrt[3]{256a^2b^{14}}}=\sqrt[6]{256a^2b^{14}}=\left[256=2^8\right]=\sqrt[3]{2^4ab^7}=2b^2\sqrt[3]{2ab}.$$

Приклад 4.3. Спрощуємо вирази.

Розв'язання:

а) $$\sqrt[4]{81a^5b}-\sqrt[8]{256a^2b^{10}}-\sqrt{\left(a^2-2ab+b^2\right)\sqrt{ab}}=\left(a>b>0\right)=3a\sqrt[4]{ab}-$$

$$-2b\sqrt[4]{ab}-\sqrt{\left(a-b\right)^2\sqrt{ab}}=3a\sqrt[4]{ab}-2b\sqrt[4]{ab}-\left(a-b\right)\sqrt[4]{ab}=$$

$$=\sqrt[4]{ab}\left(3a-2b-a+b\right)=\sqrt[4]{ab}\left(2a-b\right)=\left(2a-b\right)\sqrt[4]{ab};$$

б) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50}=\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}=$

$=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(1+2+3-5\right)=\sqrt{2};$

в) $\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}+\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)^2=\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2+2\sqrt{7-\sqrt{13}}\sqrt{7+\sqrt{13}}+$

$+\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)^2=7-\sqrt{13}+2\sqrt{\left(7-\sqrt{13}\right)\left(7+\sqrt{13}\right)}+7+\sqrt{13}=$

$=14+2\sqrt{36}=14+12=26;$

г) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{1-2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$

$=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left|1+\sqrt{3}\right|-\left|1-\sqrt{3}\right|=1+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)=$

$=1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1=2.$

Приклад 4.4. Обчислюємо значення виразів.

Розв'язання:

а) $\left(6{,}25\right)^{0,5}\cdot\left(\dfrac{1}{16}\right)^{0,25}-\left(-4\right)^{-1}\cdot\left(0{,}343\right)^0$, $\left(6{,}25\right)^{0,5}=\left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$,

$\left(\dfrac{1}{16}\right)^{0,25}=\dfrac{1}{2}$, $\left(-4\right)^{-1}=-\dfrac{1}{4}$, $\left(0{,}343\right)^0=1$,

тоді $\left(6{,}25\right)^{0,5}\cdot\left(\dfrac{1}{16}\right)^{0,25}-\left(-4\right)^{-1}\cdot\left(0{,}343\right)^0=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\cdot 1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}=1{,}5;$

б) $15\sqrt{\dfrac{2}{5}}-\sqrt{160}=15\sqrt{\dfrac{10}{25}}-4\sqrt{10}=\dfrac{15}{5}\sqrt{10}-4\sqrt{10}=-\sqrt{10};$

в) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}+\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}=$

$=\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)=6-\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{5}\sqrt{6}+5=11;$

г) $\sqrt[3]{2^2\cdot\sqrt{2}}:\sqrt[4]{2^3\cdot\sqrt[3]{2}}=\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\right):\left(2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\right)=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{4}-\frac{1}{12}}=2^{\frac{8+2-9-1}{12}}=2^0=1;$

д) $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\sqrt[3]{\sqrt{52}+5}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{52}-5\right)\left(\sqrt{52}+5\right)}=\sqrt[3]{52-25}=\sqrt[3]{27}=3;$

е) $\sqrt[3]{-25}\sqrt[6]{25}=-\sqrt[3]{25}\sqrt[6]{25}=-\sqrt[6]{25^2\cdot 25}=-\sqrt[6]{25^3}=-\sqrt[6]{5^6}=-5.$

Приклад 4.5. Позбуваємося ірраціональності в знаменнику дробу.

Розв'язання:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3};$

б) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\dfrac{5\sqrt[3]{25}}{5}=\sqrt[3]{25};$

в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3+2\sqrt{2};$

г) $\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}=\dfrac{3\left(\sqrt{7}-2\right)}{\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{7}-2\right)}{7-4}=\sqrt{7}-2;$

д) $\dfrac{14}{\sqrt[3]{7}}=\dfrac{2\cdot 7}{\sqrt[3]{7}}=\dfrac{2\sqrt[3]{7^3}}{\sqrt[3]{7}}=2\sqrt[3]{7^2}=2\sqrt[3]{49};$

е) $\dfrac{25}{2-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{25}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{25}{\left(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}=$

$=\dfrac{25\left(\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{8-3}=\dfrac{25\left(\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{9}\right)}{5}=5\left(\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{9}\right).$

Приклад 4.6. Виносимо множник за знак радикала (кореня).

Розв'язання:

а) $\sqrt[3]{m^8n^2}=\sqrt[3]{m^6m^2n^2}=\sqrt[3]{\left(m^2\right)^3m^2n^2}=\sqrt[3]{\left(m^2\right)^3}\sqrt[3]{m^2n^2}=m^2\sqrt[3]{m^2n^2};$

б) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}=\sqrt[4]{2^4a^3b^8b^3}=\sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{\left(b^2\right)^4}\sqrt[4]{a^3b^3}=|2|\left|b^2\right|\sqrt[4]{a^3b^3}=2b^2\sqrt[4]{a^3b^3}.$

Приклад 4.7. Розв'яжемо рівняння.

Розв'язання:

1. $15x^2-15x=0,\quad 5x\left(x-3\right)=0,\ x_1=0,\ x_2=3.$

Відповідь: 0; 3.

2. $4x^2-9=0;\ 4x^2=9;\ x^2=\dfrac{9}{4};\ x_1=\sqrt{\dfrac{9}{4}};\ x_2=-\sqrt{\dfrac{9}{4}}.$

Відповідь: $x_1=1\dfrac{1}{2}$ і $x_2=-1\dfrac{1}{2}$.

3. $4x^2+9=0;\ 4x^2=-9.$

Відповідь: коренів немає.

4. $3x^2-7x+4=0$; $a=3$; $b=-7$; $c=4$; $D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot3\cdot4=$
$=49-48=1>0$; $x_1=\dfrac{7-1}{2\cdot3}$; $x_2=\dfrac{7+1}{2\cdot3}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Відповідь: $1; \dfrac{4}{3}$.

5. $x^2+5x+6=0$; $\begin{cases}x_1x_2=6,\\ x_1+x_2=-5.\end{cases}$ Звідси $x_1=-2, x_2=-3$ (за теоремою, оберненою до теореми Вієта).

Відповідь: -3; -2.

6. $x^4+4x^2-21=0$. Нехай $x^2=t$, отже, $t^2+4t-21=0$, тоді $\left[\begin{array}{l}t_1=-7,\\ t_2=3.\end{array}\right.$.

Звідси $\left[\begin{array}{l}x^2=-7,\\ x^2=3.\end{array}\right.$

Перше рівняння дійсних коренів не має. Із другого рівняння знаходимо $x_1=-\sqrt{3}$; $x_2=\sqrt{3}$.

Відповідь: $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

7. $\left(x^2+2x\right)-2\left(x^2+2x\right)-3=0$. Нехай $x^2+2x=t$, тоді $t^2-2t-3=0$; $\left[\begin{array}{l}t_1=3,\\ t_2=-1.\end{array}\right.$ Отже, $\left[\begin{array}{l}x^2+2x=3,\\ x^2+2x=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=0,\\ x^2+2x+1=0.\end{array}\right.$

Розв’язавши ці квадратні рівняння, маємо $x_1=-3$, $x_2=1$; $x_3=-1$.

Відповідь: $-3; -1; 1$.

8. $\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^2-2\dfrac{3x-1}{x+2}-3=0$. Нехай $\dfrac{3x-1}{x+2}=t$, тоді $t^2-2t-3=0$; $\left[\begin{array}{l}t_1=3,\\ t_2=-1.\end{array}\right.$

Отже,

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{3x-1}{x+2}=3,\\ \dfrac{3x-1}{x+2}=-1;\end{array}\right.\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x-1=3(x+2),\\ 3x-1=-(x+2),\end{array}\right.\\ x\neq-2;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x-3x=6+1,\\ 3x+x=-2+1,\end{array}\right.\\ x\neq-2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0x=7\left(\text{рівняння розв'язків не має}\right),\\ 4x=-1,\end{array}\right.\\ x\neq-2;\end{cases}$$

Остаточно маємо $x=-\dfrac{1}{4}$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{4}$.

Приклад 4.8. Розв'яжемо ірраціональні рівняння.

Розв'язання:

1. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-2x}=\sqrt{2x-12}$. Знайдемо область допустимих значень змінної:

$$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 9-2x\ge 0, \\ 2x-12\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge -1, \\ -2x\ge -9, \\ 2x\ge 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge -1, \\ x\le 4{,}5, \\ x\ge 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 6, \\ x\le 4{,}5. \end{cases}$$

Оскільки ця система нерівностей не має розв'язків, то область допустимих значень змінної – порожня множина.

Відповідь: рівняння розв'язків не має.

2. $\sqrt{3x-2}+x=4$.

Розв'язання:

$$\sqrt{3x-2}=4-x;$$
$$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2=(4-x)^2;$$
$$3x-2=16-8x+x^2;$$
$$x^2-8x-3x+16+2=0;$$
$$x^2-11x+18=0;$$
$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=9. \end{array}\right.$$

Перевірка:

а) $x_1=2\Rightarrow\sqrt{3\cdot 2-2}+2=4;\ \sqrt{4}+2=4;\ 2+2=4;\ 4=4;$

б) $x_2=9\Rightarrow\sqrt{3\cdot 9-2}+9\ne 4;\ \sqrt{25}+9\ne 4;\ 5+9\ne 4;\ 14\ne 4.$

Отже, $x=9$ не є коренем рівняння.

Відповідь: 2.

3. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4}.$

Розв'язання:

$$\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}\right)^2=\left(\sqrt{5x+4}\right)^2;$$
$$3x+1+2\sqrt{(3x+1)(4x-3)}+4x-3=5x+4;$$
$$2\sqrt{(3x+1)(4x-3)}=5x+4-3x-1-4x+3;$$
$$2\sqrt{(3x+1)(4x-3)}=6-2x;$$
$$\sqrt{(3x+1)(4x-3)}=3-x;$$

$$\left(\sqrt{(3x+1)(4x-3)}\right)^2=(3-x)^2;$$

$$(3x+1)(4x-3)=9-6x+x^2;$$

$$12x^2-5x-3=9-6x+x^2;$$

$$12x^2-x^2-5x+6x-3-9=0;$$

$$11x^2+x-12=0;$$

$$D=1+528=529;$$

$$x_1=\frac{-1+23}{22}=\frac{22}{22}=1;\ x_2=\frac{-1-23}{22}=\frac{-24}{22}=-\frac{12}{11}.$$

Перевірка:

а) $x_1=1\Rightarrow\sqrt{3\cdot1-2}+\sqrt{4\cdot1-3}=\sqrt{5\cdot1+4};\ \sqrt{4}+\sqrt{1}=\sqrt{9};\ 2+1=3;\ 3=3;$

б) $x_2=-\dfrac{12}{11}\Rightarrow\sqrt{3\left(-\dfrac{12}{11}\right)+1}+\sqrt{4\left(-\dfrac{12}{11}\right)-3}=\sqrt{5\left(-\dfrac{12}{11}\right)+4}.$

Оскільки вираз $\sqrt{4\left(-\dfrac{12}{11}\right)-3}$ не має сенсу (підкореневий вираз є від'ємним), $x=-\dfrac{12}{11}$ не є коренем рівняння.

Відповідь: 1.

4. $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2.$

Розв'язання:

$$\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)^3=2^3;$$

$$8x+4-3\sqrt[3]{(8x+4)^2}\sqrt[3]{8x-4}+3\sqrt[3]{8x+4}\sqrt[3]{(8x-4)^2}-(8x-4)=8;$$

$$\cancel{8x}+4-\cancel{8x}+4-3\sqrt[3]{8x+4}\sqrt[3]{8x-4}\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)=8;$$

$$8-3\sqrt[3]{(8x+4)(8x-4)}\cdot2=8;$$

$$-6\sqrt[3]{64x^2-16}=0;$$

$$\sqrt[3]{64x^2-16}=0;\quad 64x^2-16=0;\quad 64x^2=16;$$

$$x^2=\frac{16}{64}=\frac{1}{4};\quad x_1=\frac{1}{2};\quad x_2=-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}.$

5. $\frac{8}{\sqrt{6-x}}-\sqrt{6-x}=2$. Нехай $\sqrt{6-x}=t>0$, тоді $\frac{8}{t}-t=2$; $\frac{8-t^2}{t}=2$;
$8-t^2=2t$; $t^2+2t-8=0$; $t_1=2$; $t_2=-4<0$. Отже, $\sqrt{6-x}=2$;
$6-x=4$; $x=2$.

Відповідь: 2.

6. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$. Нехай $\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=u,\\ \sqrt{x+1}=v,\end{cases}$ тоді $\begin{cases}x-2=u^3,\\ x+1=v^2.\end{cases}$ Одержуємо систему $\begin{cases}u+v=3,\\ u^3-v^2=-3.\end{cases}$

Із першого рівняння маємо $v=3-u$, тоді

$$u^3-(3-u)^2=-3;$$
$$u^3-\left(9-6u+u^2\right)=-3;$$
$$u^3-u^2+6u-6=0;$$
$$u^2(u-1)+6(u-1)=0;$$
$$(u-1)\left(u^2+6\right)=0;$$
$$\left[\begin{array}{l}u-1=0,\\ u^2+6=0\ (\text{рівняння розв'язку не має}).\end{array}\right.$$

Тоді $u=1$, $v=3-1=2$. Отже, $\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=1,\\ \sqrt{x+1}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x-2=1,\\ x+1=4;\end{cases}$ $x=3$.

Відповідь: 3.

7. $\sqrt{1-x\sqrt{x^2-1}}=x-1$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$1-x\sqrt{x^2-1}=x^2-2x+1,$$
$$-x\sqrt{x^2-1}=x(x-2).$$

Було б помилкою «скоротити» обидві частини рівняння на *x*, при цьому можна загубити розв’язок. Тому розв’язуємо так:

$$-x\sqrt{x^2-1}-x(x-2)=0,$$
$$-x\left(\sqrt{x^2-1}+(x-2)\right)=0,$$
$$-x=0 \text{ або } \sqrt{x^2-1}+(x-2)=0,$$

$$x=0 \text{ або } \sqrt{x^2-1}=-(x-2).$$

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрата:

$$x^2-1=x^2-4x+4,$$
$$x^2-x^2+4x=4+1,$$
$$4x=5,$$
$$x=\frac{5}{4}.$$

Перевірка:

а) $x=\frac{5}{4}$, тоді $\sqrt{1-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{25}{16}-1}}=\frac{5}{4}-1, \sqrt{1-\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}, \sqrt{1-\frac{15}{16}}=\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4},$
$\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$

б) $x=0$, тоді $\sqrt{1-0\sqrt{0-1}}=0-1, \sqrt{1-0\sqrt{-1}}=-1.$

Відповідь: $x=\frac{5}{4}$.

Приклад 4.9. Розв'яжемо системи рівнянь другого степеня.

Розв'язання:

1. $\begin{cases}2x+y=7,\\ xy=6.\end{cases}$ З першого рівняння отримуємо $y=7-2x$. Підставляючи значення y в друге рівняння, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}y=7-2x,\\ 7x-2x^2=6.\end{cases}$$

Квадратне рівняння $-2x^2+7x-6=0$ має корені $x_1=2;\ x_2=\frac{3}{2}$. З першого рівняння отримуємо $y_1=3;\ y_2=4$.

Відповідь: $(2;3)$ і $\left(\frac{3}{2};4\right)$.

2. $\begin{cases}x+y+2xy=7,\\ xy+2(x+y)=8.\end{cases}$ Позначимо $a=x+y; b=xy$. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}a+b=7,\\ b+2a=8;\end{cases} \quad \begin{cases}a=7-2b,\\ b+14-4b=8.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}a=3,\\ b=2.\end{cases}$

Повертаємося до змінних x та y:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$$

Розв’язуємо цю систему:

$$\begin{cases} x=3-y, \\ (3-y)y=2; \end{cases} \qquad \begin{aligned} &y^2-3y+2=0, \\ &y_1=1;\ x_1=2;\ y_2=2;\ x_2=1. \end{aligned}$$

Відповідь: $(2;1), (1;2)$.

3. $\begin{cases} y^2-xy=12, \\ x^2-xy=-3. \end{cases}$ Розкладемо ліві частини рівнянь на множники:

$$\begin{cases} y(y-x)=12, \\ x(x-y)=-3. \end{cases}$$

Виразимо з другого рівняння $x-y=-\dfrac{3}{x}$ $(x\neq 0)$, тобто $y-x=\dfrac{3}{x}$, і підставимо його в перше рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}=4, \\ x(x-y)=-3, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} y=4x, \\ x(x-y)=-3. \end{cases}$$

Підставивши значення y в друге рівняння останньої системи, отримали $-3x^2=-3$, $x_1=1$; $x_2=-1$, тоді $y_1=4$; $y_2=-4$.

Відповідь: $(1;4), (-1;-4)$.

Приклад 4.10. Розв’яжемо системи рівнянь другого степеня графічним способом.

Розв’язання:

1. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=5-x^2. \end{cases}$

Будуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 4.2). Графіком рівняння $x^2+y^2=25$ є коло, а рівняння $y=5-x^2$ – парабола. Ці графіки мають три спільні точки: $A(0;5), B(-3;-4)$ і $C(3;-4)$. Легко перевірити, що координати кожної з цих точок є розв’язком як першого, так і другого рівнянь системи. Отже, система рівнянь має розв’язки $(0;5), (-3;-4)$ і $(3;-4)$.

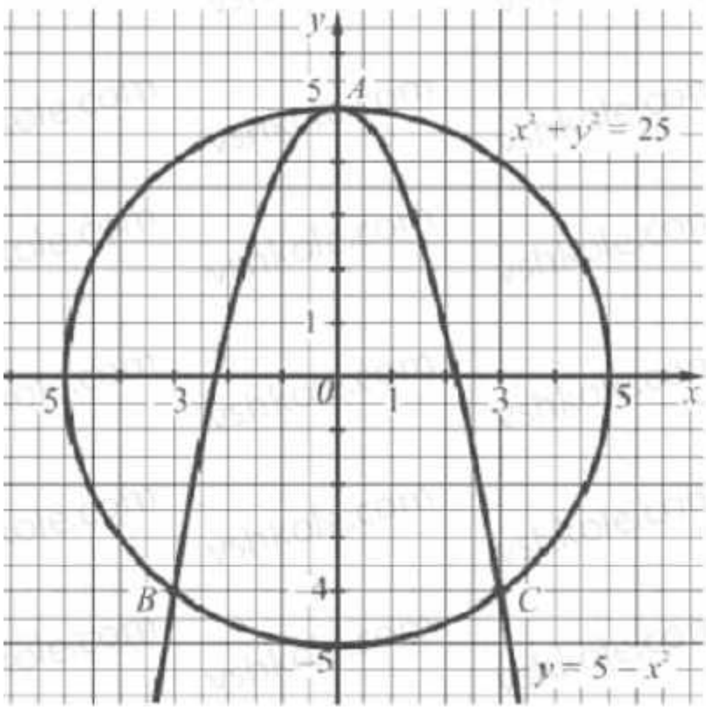


Рис. 4.2

Щоб переконатися, що з використанням рисунка було правильно вказано спільну точку графіків рівнянь системи, потрібно перевірити, чи справді координати цієї точки є розв'язками кожного з рівнянь.

2. $\begin{cases} 3x-4=y+\frac{1}{2}x^2, \\ y+x=2. \end{cases}$ Зведемо кожне рівняння системи до вигляду $y=f(x)$:

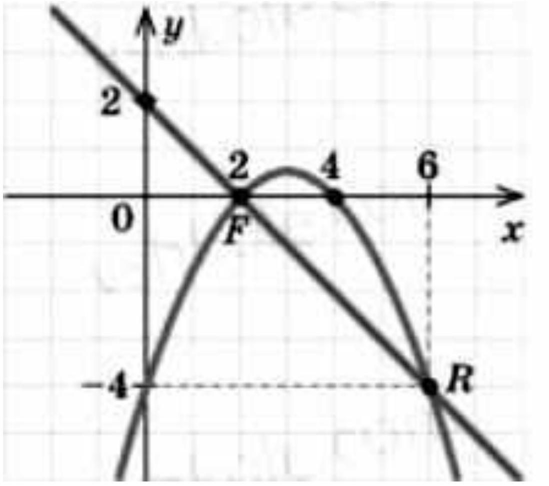
- $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$ – квадратична функція;
- $y=2-x$ – лінійна функція.

Проаналізуємо отримані функції, визначимо «зручні» точки для побудови графіків цих функцій:

1) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$, графік – парабола з вершиною в точці (3; 0,5), вітки напрямлені вниз, y(0) = -4; нулі функції: x = 2, x = 4;

2) $y=2-x$, графік – пряма.

Побудуємо в одній системі координат графіки обох функцій (рис. 4.3) і визначимо точки перетину. Зробимо висновок.



$F(2;0)$,
$R(6;-4)$

Рис. 4.3

Пара чисел (2; 0) і (6; -4) – наближені розв'язки заданої системи.

Перевіримо, чи є отримані розв'язки точними. Для цього здійснимо їх безпосередню підстановку в кожне рівняння системи:

$$\begin{cases} 3\cdot 2-4=0+2, \\ 0+2=2 \end{cases} \text{ (правильно);}$$

$$\begin{cases} 3\cdot 6-4=-4+\dfrac{1}{2}\cdot 36, \\ -4+6=2 \end{cases} \text{ (правильно).}$$

Відповідь: (2; 0), (6; -4).

4.6. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1. Знайти значення виразів.

а) $\dfrac{\sqrt[4]{27\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[6]{9\cdot 3^2\sqrt{3}}}$; б) $\left(\dfrac{2^{-\frac{2}{3}}\cdot 7^3}{2^{-10}\cdot 6^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{7^{-\frac{9}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{9}{2}}}\right)^2$; в) $\left(\dfrac{2^{1,3}\cdot 2^{1,4}}{2^{0,7}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{7^{-\frac{4}{3}}\cdot 7^{-\frac{3}{4}}}{7^{-\frac{1}{12}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

г) $\sqrt[3]{-25}\sqrt[6]{25}$; д) $18\left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2-\dfrac{1}{6}\left(4\sqrt{3}\right)^2$; е) $\sqrt{961}-\left(\dfrac{1}{5}\sqrt{125}\right)^2$;

ж) $\dfrac{1}{4}\sqrt{26^2-24^2}+\left(3\sqrt{4\dfrac{2}{3}}\right)^2-0,6\sqrt{1600}$; и) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; з) $\dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$;

к) $\dfrac{2}{9}\sqrt{51,84}-\dfrac{3}{11}\sqrt{77,44}+\left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{189}\right)^2$; л) $-2,6\sqrt{(-5)^2}$; м) $\sqrt{(-1,37)^2}$;

н) $\sqrt{3\dfrac{13}{36}\cdot 12\dfrac{24}{25}}$; п) $\sqrt{\dfrac{36}{49}\cdot\dfrac{196}{225}}$.

Задача 4.2. Позбутися ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{8}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\frac{x-3}{\sqrt{x-3}}$; д) $\frac{5}{x\sqrt{x}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{26}-1}$; ж) $\frac{35}{\sqrt{37}+\sqrt{2}}$;

и) $\frac{x^2-16}{3-\sqrt{x+5}}$; к) $\frac{16}{\sqrt{47}-\sqrt{15}}$; л) $\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$; м) $\frac{x}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+2x}}$;

н) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}+2}$; п) $\frac{12}{\sqrt{11}+\sqrt{10}-\sqrt{13}}$.

Задача 4.3. Спростити вирази:

а) $\left(3\sqrt{6}+5\sqrt{8}-4\sqrt{32}\right)\sqrt{2}-\sqrt{108}$; б) $\left(7-4\sqrt{3}\right)^2+\left(4+3\sqrt{3}\right)^2$;

в) $\left(9\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2}-9\sqrt{5}\right)-\left(6\sqrt{10}-2\sqrt{5}\right)^2$;

г) $\sqrt{16a}+\sqrt{100a}-\sqrt{81a}$; д) $\sqrt{20}-\sqrt{125}+\sqrt{405}$;

е) $4\sqrt{27b}-5\sqrt{48b}+\frac{1}{3}\sqrt{192b}$; ж) $7x\sqrt{49x^3y^5}+3x^2y\sqrt{64y^3}-5\sqrt{36x^5y^5}$.

Задача 4.4. Винести множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{2a^2}$, якщо $a \ge 0$; б) $\sqrt{3b^2}$, якщо $b \le 0$; в) $\sqrt{8a^4}$; г) $\sqrt{x^9}$; д) $\sqrt{-a^7}$;

е) $\sqrt{x^4y^5}$; ж) $\sqrt{9a^2b}$, якщо $a \le 0$; и) $\sqrt{a^3b^3}$, якщо $a \le 0$, $b \le 0$;

к) $\sqrt{18a^3b^{10}}$; л) $\sqrt{36a^2b^3}$, якщо $a \ge 0$; м) $\sqrt{500a^7b^{14}}$, якщо $b \le 0$;

н) $\sqrt{a^2b^2c}$.

Задача 4.5. Обчислити значення виразів:

а) $\frac{12}{12-5\sqrt{6}}-\frac{12}{12+5\sqrt{6}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}+1}-\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$;

в) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2$.

Задача 4.6. Розв’язати рівняння:

а) $5x^2-20=0$; б) $x^2+7x=0$; в) $3x^2-18=0$; г) $3x^2-24x=0$;

д) $49x^2-9=0$; е) $x^2+25=0$; ж) $x^2+5x-14=0$; и) $x^2-14x+40=0$;

к) $3y^2-13y+4=0$; л) $12m^2+m-6=0$.

Задача 4.7. Не розв’язуючи рівняння, знайти суму й добуток його коренів:

а) $x^2+17x-38=0$; б) $x^2-16x+4=0$; в) $3x^2+8x-15=0$;

г) $7x^2+23x+5=0$.

Задача 4.8. Розв'язати рівняння, які зводяться до квадратних:

а) $x^4-50x^2+49=0$; б) $x^4-9x^2+20=0$; в) $x^4-5x^2-36=0$;

г) $4x^4-13x^2+3=0$; д) $3x^4-8x^2-3=0$; е) $x^4+37x^2+36=0$;

ж) $x^6+7x^3-8=0$; и) $2x^8+5x^4-7=0$.

Задача 4.9. Розв'язати рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

а) $\left(x^2-9\right)^2-4\left(x^2-9\right)+3=0$; б) $(x+5)^4-6(x+5)^2-7=0$;

в) $\left(x^2+3x\right)^2-2\left(x^2+3x\right)-8=0$; г) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)=12$;

д) $3\left(x^2+5x+1\right)^2+2x^2+10x=3$; е) $\left(x^4-5x^2\right)^2-2\left(x^4-5x^2\right)=24$;

ж) $\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-3}=4\dfrac{1}{4}$; и) $\dfrac{x^2}{(2x+3)^2}-\dfrac{3x}{2x+3}+2=0$;

к) $\dfrac{x^2-x-1}{x}-\dfrac{6x}{x^2-x-1}=5$; л) $x^2-4x+6+\dfrac{21}{x^2-4x+10}=0$;

м) $\dfrac{x-3}{x^2+4x+9}+\dfrac{x^2+4x+9}{x-3}=-2$; н) $\dfrac{x^2-3x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^2-3x}=2{,}5$.

Задача 4.10. Розв'язати ірраціональні рівняння:

а) $\sqrt{2x-3}=3$; б) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{5-x}$; в) $\sqrt{7-x}=x-1$; г) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$;

д) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-9}=6$; е) $\sqrt{9-2x}+\sqrt{1-x}=2\sqrt{4-x}$;

ж) $\sqrt[3]{x^2-2x+1}+3\sqrt[3]{x-1}-4=0$; и) $\sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}}+\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}}=2$;

к) $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$; л) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}=5$; м) $\sqrt[3]{45+x}-\sqrt[3]{x-16}=1$;

н) $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$.

Задача 4.11. Розв'язати системи рівнянь другого степеня:

а) $\begin{cases}x+y=7,\\ xy=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=17,\\ y-3x-1=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x+y=2,\\ x^2-xy+6y=-4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\ x-y=2;\end{cases}$

д) $\begin{cases}x+y=7,\\ y=\dfrac{6}{x};\end{cases}$ е) $\begin{cases}x^2+y^2=20,\\ xy=8;\end{cases}$ ж) $\begin{cases}x^2-y=14,\\ 3x+y=4;\end{cases}$ и) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6},\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36};\end{cases}$

к) $\begin{cases}x+y+xy=11,\\ x+y-xy=1;\end{cases}$ л) $\begin{cases}xy+x+y=11,\\ x^2y+y^2x=30;\end{cases}$ м) $\begin{cases}2(x+y)-xy=4,\\ 3xy+x+y=23.\end{cases}$

Задача 4.12. Розв'язати системи рівнянь другого степеня графічно:

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ y=x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x-y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=x^2+1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ y=x^2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x+y=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y=x^2-2x+3, \\ y=3x-1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} xy=8, \\ x+y=6; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2-y=6, \\ x+y=6; \end{cases}$

к) $\begin{cases} (x+2)^2+y^2=10, \\ x+y+4=0; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=-6; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=2x-5. \end{cases}$

Задача 4.13. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2-5, \\ y=6-x^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy=5, \\ y=0{,}5x^2+1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} |y|=|x|, \\ y=x^2-6x+5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=3-x^2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=4, \\ y=4-3x^2; \end{cases}$ и) $\begin{cases} |y|=x, \\ y=-x^2+2x+3; \end{cases}$

к) $\begin{cases} xy=6, \\ y=\dfrac{1}{3}x^2-4; \end{cases}$ л) $\begin{cases} y=x^2+2, \\ y=5-2x^2; \end{cases}$ м) $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=3-x. \end{cases}$

5. ФУНКЦІЯ. ГРАФІК ФУНКЦІЇ

5.1. Функції та їх властивості

Функціональною відповідністю, або ***функцією***, називають таку відповідність між двома змінними, коли кожному значенню однієї змінної відповідає одне значення іншої змінної. Першу змінну називають ***незалежною***, або ***аргументом***, а другу – ***залежною***, або ***функцією*** від першої змінної. Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють область визначення функції.

Функцію записують так: $y = f(x)$, де x – ***аргумент***, y – ***функція***. Область визначення функції позначають $D(y)$ або $D(f)$.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Функцію можна задавати у вигляді опису, таблиці, графіка, формули тощо. Значення аргументу, при яких функція дорівнює 0, називають ***нулями функції***. Графік функції при таких значеннях аргументу перетинає вісь OX .

Функцію $y = f(x)$ називають ***парною***, якщо для всіх $x \in D(f)$ має місце рівність $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції є симетричним відносно осі $\boldsymbol{OY}$. Приклади парних функцій: $f(x) = x^2$; $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$.

Функцію $y = f(x)$ називають ***непарною***, якщо для всіх $x \in D(f)$ має місце рівність $f(-x) = -f(x)$. Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат. Приклади непарних функцій: $f(x) = 3x$; $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

Функція може бути ні парною, ні непарною, наприклад: $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 9}}{x - 15}$.

Функцію $y = f(x)$ називають ***періодичною*** з періодом $T \neq 0$, якщо для всіх $x \in D(f)$ має місце рівність $f(x + T) = f(x)$.

Функцію $y = f(x)$ називають ***зростальною*** на деякому проміжку, якщо для будь-яких $x_1 < x_2$ з цього проміжку $f(x_1) < f(x_2)$.

Функцію $y = f(x)$ називають ***спадною*** на деякому проміжку, якщо для будь-яких $x_1 < x_2$ з цього проміжку $f(x_1) > f(x_2)$.

Точку $x_0 \in D(f)$ називають ***точкою максимуму функції*** $y = f(x)$, а саме число $y_0 = f(x_0)$ – ***мінімумом функції***, якщо існує інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, на якому функція $y = f(x)$ є визначеною і $f(x) > f(x_0)$ для всіх $x \neq x_0$ із цього інтервалу.

Точку $x_0 \in D(f)$ називають ***точкою мінімуму функції*** $y = f(x)$, а саме число $y_0 = f(x_0)$ – ***максимумом функції***, якщо існує інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, на якому функція $y = f(x)$ є визначеною і $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \neq x_0$ із цього інтервалу.

Точки максимуму та мінімуму функції називають ***точками екстремуму функції***.

5.1.1. Лінійна функція

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x – аргумент, а k і b – задані числа.

Графіком лінійної функції є пряма. Величину k називають кутовим коефіцієнтом прямої; $k = tg\alpha$, де α – кут між прямою й додатним напрямком осі абсцис; b – ордината точки перетину з віссю OY. Через дві точки можна провести одну і тільки одну пряму, тому для побудови графіка лінійної функції достатньо знайти координати двох його точок. Графіки лінійної функції для окремих значень k і b показано на рис. 5.1.

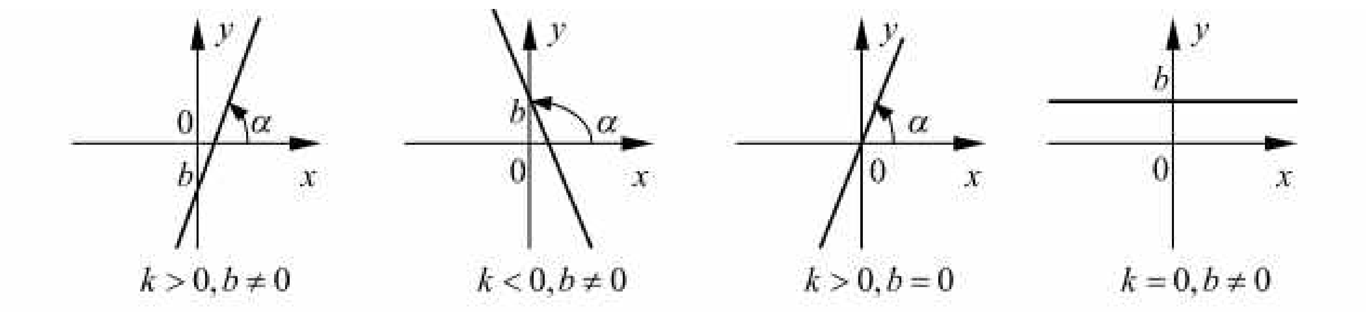


Рис. 5.1

Властивості лінійної функції:

1. Область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множина значень: $E(y) = (-\infty; +\infty)$ для $k \neq 0$ і $E(y) = \{b\}$ для $k = 0$, $b \neq 0$.

3. Функція – ні парна, ні непарна при $k \neq 0$, $b \neq 0$; непарна при $k \neq 0$, $b = 0$; парна при $k = 0$, $b \neq 0$; і парна, і непарна при $k = 0$, $b = 0$.

4. Функція – неперіодична при $k \neq 0$. При $k = 0$ функція – періодична, причому періодом є будь-яке дійсне число $T \neq 0$. Найменшого додатного періоду не існує!

5. Функція – зростальна в $D(y)$ при $k > 0$, спадна в $D(y)$ при $k < 0$, стала при $k = 0$.

6. Функція не має точок екстремумів.

5.1.2. Найпоширеніші види степеневої функції

Степенева функція – це функція вигляду $y = x^{\alpha}$, де α – деяке дійсне число.

Нехай $\alpha = n, n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, тобто $y = x^{n}$. Графіки цих парабол зображено на рис. 5.2.

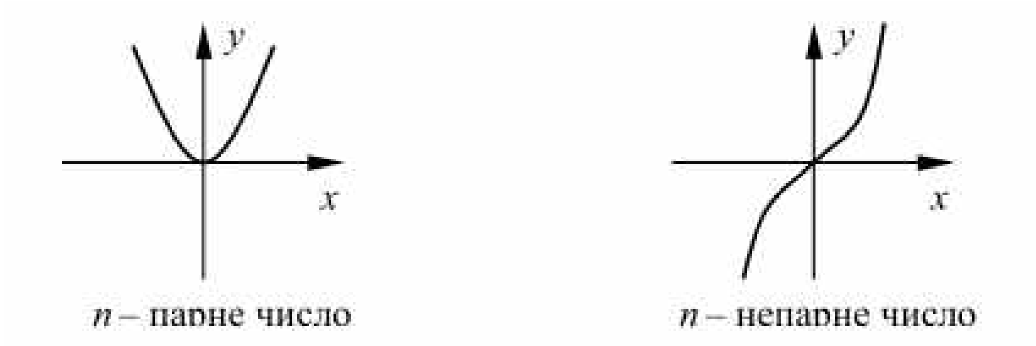


Рис. 5.2

Властивості степеневої функції ($\alpha = n, n \in \mathrm{N}$):

1. Область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множина значень: $E(y) = [0; +\infty)$ при парному n і $E(y) = (-\infty; +\infty)$ при непарному n.

3. Функція – парна при парному n і непарна при непарному n.

4. Функція – неперіодична.

5. При парному n функція є спадною на проміжку $(-\infty; 0)$ і зростальною на проміжку $(0; +\infty)$; при непарному n функція є зростальною на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

6. При парному n точка $x_0 = 0$ – точка мінімуму, при непарному n екстремумів немає.

Якщо $\alpha = -n, n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, тобто $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^{n}}$, графіками є гіперболи, показані на рис. 5.3.

Рис. 5.3

Властивості степеневої функції ($\alpha = -n$, $n \in \mathrm{N}$):

1. Область визначення: $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2. Множина значень: $E(y) = (0;+\infty)$ при парному n і $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ при непарному n.

3. Функція – парна при парному n і непарна при непарному n.

4. Функція є неперіодичною.

5. При парному n функція – спадна на проміжку $(0;+\infty)$ і зростальна на проміжку $(-\infty;0)$; при непарному n функція – спадна на проміжку $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

6. Точок екстремумів немає.

Якщо $\alpha = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, тобто $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, то графіком є парабола або частина параболи (рис. 5.4).

Властивості степеневої функції ($\alpha = \dfrac{1}{n}, n \in \mathrm{N}$):

1. Область визначення: $D(y) = [0;+\infty)$ при парному n і $D(y) = (-\infty;+\infty)$ при непарному n.

2. Множина значень: $E(y) = [0;+\infty)$ при парному n і $E(y) = (-\infty;+\infty)$ при непарному n.

3. Функція є ні парною, ні непарною при парному n і непарною при непарному n.

4. Функція є неперіодичною.

5. При парному n функція зростає на проміжку $(0;+\infty)$; при непарному n функція зростає на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

6. Точок екстремумів немає.

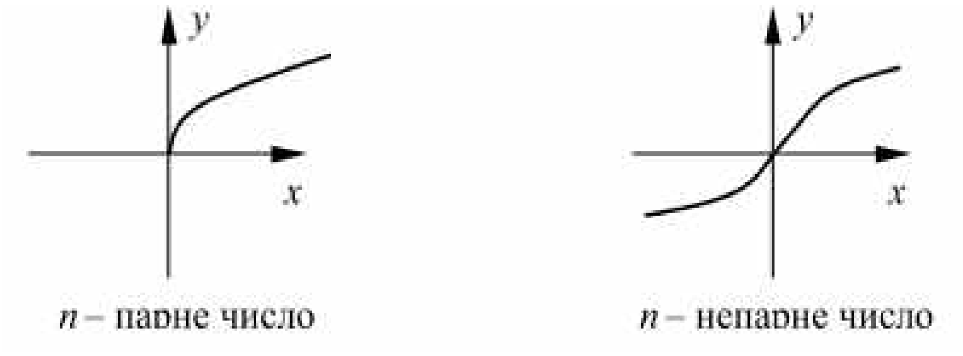


Рис. 5.4

5.1.3. Обернена функція

Нехай задано функцію $y = f(x)$, для якої областю визначення є інтервал $[a,b]$ осі Ox, а областю значень – інтервал $[c,d]$ осі Oy. Розглянемо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, визначену на інтервалі $[c,d]$ осі Ox. Ці функції назвемо взаємно оберненими. Якщо графік функції $y = f(x)$ є відомим, то графік оберненої функції можна отримати відображенням цього графіка відносно бісектриси першого-третього квадрантів. Графіки взаємно обернених функцій зображено на рис. 5.5.

Поняття оберненої функції було розглянуто на прикладі монотонної у всій області визначення функції (тобто для неї кожній точці з інтервалу $[a,b]$ відповідала єдина точка y_0 з інтервалу $[c,d]$). Але для немонотонної функції ця умова може не виконуватися (рис. 5.6), тобто функції, обернені до немонотонних, можуть бути багатозначними. Можна довести, що функції, обернені до монотонних, будуть однозначними.

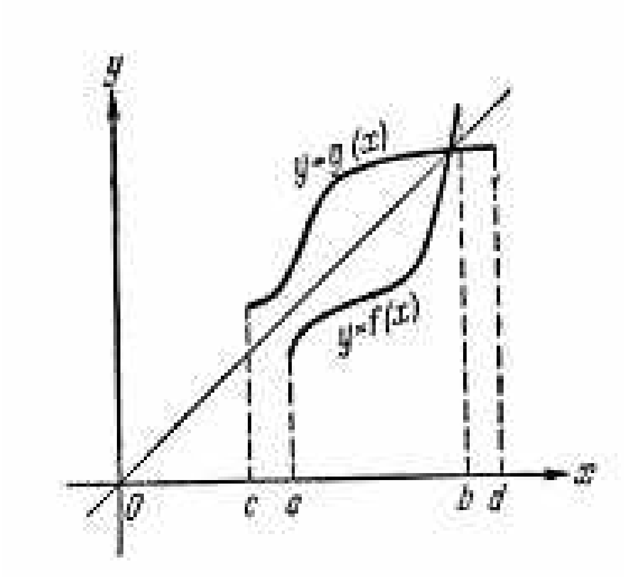


Рис. 5.5

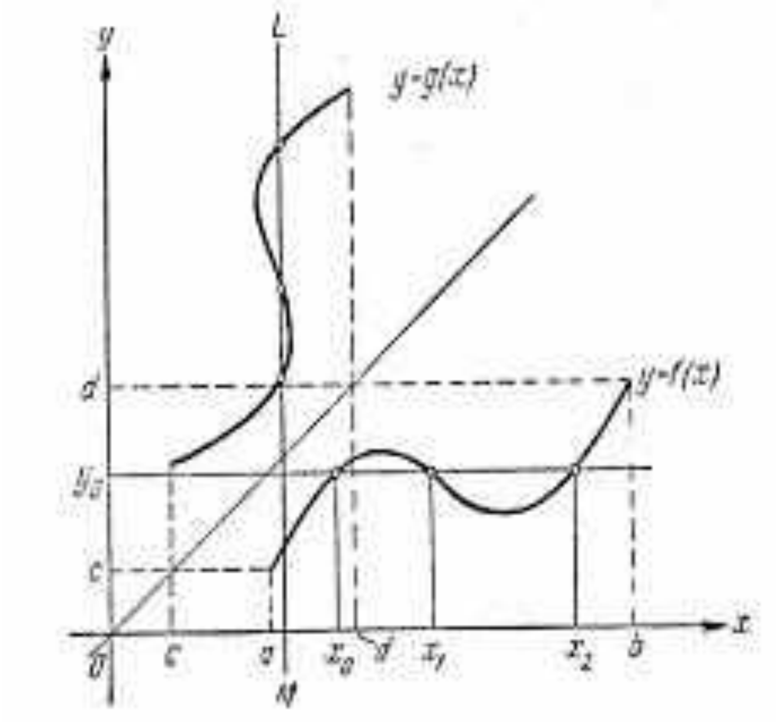


Рис. 5.6

Приклад 5.1. Знайдемо область визначення функцій:

а) $f(x)=\dfrac{3x}{x-7}$, $D(f)=(-\infty;\ 7)\cup(7;+\infty)$;

б) $f(x)=\sqrt{x-2}$, $D(f)=[2;+\infty)$;

в) $f(x)=\sqrt{8-x}$, $D(f)=(-\infty;8]$;

г) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-6}}{x-9}$, $\begin{cases} x-6\ge 0, \\ x-9\ne 0; \end{cases}$ $D(f)=[6;9)\cup(9;+\infty)$;

д) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-5}$, $|x|\ne 5$; $x\ne\pm 5$; $D(f)=(-\infty;-5)\cup(-5;5)\cup(5;+\infty)$;

е) $f(x)=\sqrt{x-3}+\dfrac{x+2}{x^2-6x}$, $\begin{cases} x\ge 3, \\ x^2-6x\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 3, \\ x\ne 0, \\ x\ne 6; \end{cases}$ $D(f)=[3;6)\cup(6;+\infty)$.

Приклад 5.2. Визначимо, парними чи непарними є функції: а) $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-16}$; б) $f(x)=\dfrac{5}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+3})}$.

Розв'язання:

а) функція $\mathrm{f}(-\mathrm{x})=\dfrac{(-\mathrm{x})^4-2(-\mathrm{x})^2}{(-\mathrm{x})^2-16}=\dfrac{\mathrm{x}^4-2\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2-16}$ є парною;

б) функція $f(-x)=\dfrac{5}{(-x)(\sqrt{3+x}+\sqrt{-x+3})}=\dfrac{5}{-x(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+3})}$

є непарною.

Для закріплення пройденого матеріалу рекомендуємо самостійно розв'язати задачі 5.1–5.18 (підрозд. 5.3).

5.2. Побудова графіків функцій

Для побудови графіків функцій використовують такі геометричні перетворення:

1) паралельне перенесення вздовж осі абсцис (Ox) на d одиниць (вправо-вліво): точка $M(x;y)$ переходить у точку $M'(x+d;y)$;

2) паралельне перенесення вздовж осі ординат (Oy) на d одиниць (уверх-униз): точка $M(x;y)$ переходить у точку $M'(x;y+d)$;

3) симетрія відносно осі абсцис (Ox): точка $M(x;y)$ переходить у точку $M'(x;-y)$;

4) симетрія відносно осі ординат (Oy): точка $M(x;y)$ переходить у точку $M'(-x;y)$;

5) стиск (розтяг) уздовж осі абсцис (Ox) у p разів: точка $M(x;y)$ переходить у точку $M'(px;y)$;

6) стиск (розтяг) уздовж осі ординат (Oy) у p разів: точка $M(x;y)$ переходить у точку $M'(x;py)$.

Зауваження. Якщо при виконанні перетворень 5 і 6 $p>1$, то перетворення називатимемо розтягом у p разів, а якщо $0<p<1$, то перетворення називатимемо стиском у $\dfrac{1}{p}$ разів, наприклад, при $p=3$ матимемо розтяг у три рази, а при $p=\dfrac{1}{2}$ – стиск у два рази.

Нехай побудовано графік функції $y=f(x)$. Використовуючи цей графік, за допомогою геометричних перетворень можна побудувати графіки функцій, наведених у табл. 5.1.

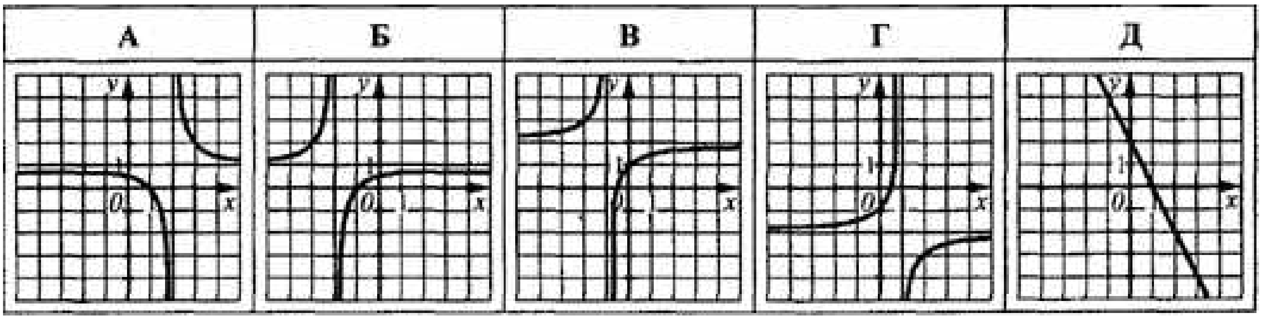
Послідовність виконання перетворень: спочатку слід виконати всі симетрії, потім – стиски, а лише після них – паралельні перенесення. Паралельні перенесення вздовж обох осей можна виконувати одночасно.

Для функцій, що містять знак модуля, питання про послідовність виконання перетворень вирішується для кожної функції окремо.

Таблиця 5.1

Функція	Перетворення
$y = f(x) + A$	Паралельне перенесення на A одиниць уздовж осі Oy
$y = f(x+a)$	Паралельне перенесення на $-a$ одиниць уздовж осі Ox
$y = -f(x)$	Симетрія відносно осі Ox
$y = f(-x)$	Симетрія відносно осі Oy
$y = k \cdot f(x)$	Стиск (розтяг) уздовж осі Oy у k разів
$y = f(kx)$	Стиск (розтяг) уздовж осі Ox у $1/k$ разів
$y = \lvert f(x) \rvert$	Симетрія відносно осі Ox частини графіка під віссю Ox; частину графіка над віссю Ox не змінюють
$y = f(\lvert x \rvert)$	Симетрія відносно осі Oy частини графіка справа від осі Oy; частину графіка, що була зліва від осі Oy, видаляють
$\lvert y \rvert = f(x)$	Симетрія відносно осі Ox частини графіка над віссю; частину графіка, що була під віссю Ox, видаляють

Приклад 5.3. На якому з рисунків зображено графік функції $y = \dfrac{x-1}{x-2}$?



Розв'язання:

Зробимо деякі алгебраїчні перетворення виразу:

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-1+1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1.$$

Отримали $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$. Графік функції $y = \dfrac{1}{x}$ (гіперболу) зміщуємо вправо на дві одиниці, маємо $y = \dfrac{1}{x-2}$. Графік функції $y = \dfrac{1}{x-2}$ зміщуємо на одну одиницю вверх, маємо $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$.

Відповідь: А.

Приклад 5.4. За графіком функції $y = x^2$ побудуємо графіки функцій: 1) $y = x^2 + 4$; 2) $y = (x-2)^2$; 3) $y = (x+4)^2 - 3$.

Розв'язання:

1. Переносимо вісь абсцис на чотири одиниці вниз. У новій системі координат будуємо параболу $y = x^2$.

2. Переносимо вісь ординат на дві одиниці вліво. У новій системі координат будуємо параболу $y = x^2$.

3. Переносимо вісь абсцис на три одиниці вверх, а вісь ординат — на чотири одиниці право. У новій системі координат будуємо параболу $y = x^2$. Усі перетворення показано на рис. 5.7.

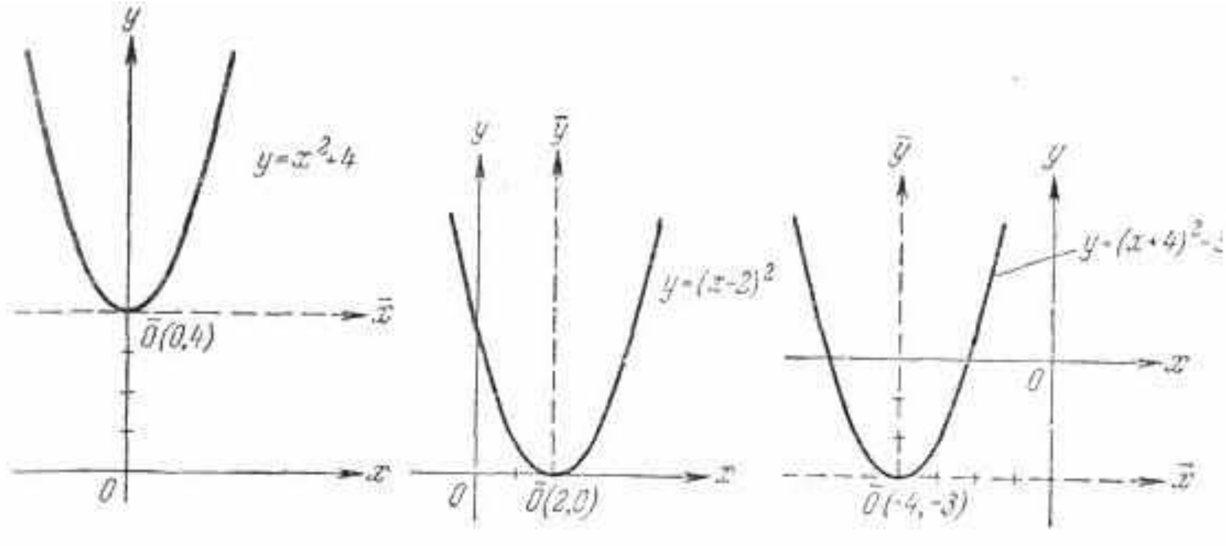


Рис. 5.7

Приклад 5.5. За заданим графіком функції $y = f(x)$ побудуємо графік функції $y = \alpha f(x)$, де α – відоме дійсне число.

Це перетворення називають розтягом (стиском) графіка вздовж осі ординат. При $\alpha > 1$ відбувається розтяг графіка заданої функції в α разів, при $0 < \alpha < 1$ – стиск графіка в $1/\alpha$ разів. При $\alpha < 0$ потрібно графік $y = f(x)$ не тільки розтягнути в $|\alpha|$ разів, але й отриману після цього криву дзеркально відобразити відносно осі Ox (рис. 5.8).

Приклад 5.6. За заданим графіком функції $y = f(x)$ побудуємо графік функції, де відомим є число, відмінне від нуля й одиниці. Це перетворення називають стиском графіка функції вздовж осі абсцис.

Розв'язання. Області визначення функцій $y = f(x)$ та $y = f(\alpha x)$ можуть не збігатися. Нехай область визначення функції $y = f(x)$ – відрізок $[a,b]$. Тоді область визначення функції $y = f(\alpha x)$:

$$a \le \alpha x \le b \Rightarrow \frac{a}{\alpha} \le x \le \frac{b}{\alpha} \Rightarrow \left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right].$$

Отриманий інтервал є більшим або меншим від інтервалу $[a,b]$ залежно від того, яким є число α – меншим чи більшим від одиниці.

Якщо $\alpha > 1$, то для побудови графіка функції $y = f(\alpha x)$ потрібно графік функції $y = f(x)$ стиснути в α разів уздовж осі абсцис (рис. 5.9). Якщо $0 < \alpha < 1$, то графік функції буде стиснено вздовж осі абсцис в α разів (розтягнено в $1/\alpha$ разів) (рис. 5.10, 5.11). Якщо $\alpha < 0$, то для побудови графіка функції $y = f(\alpha x)$ графік функції $y = f(x)$ потрібно не тільки стиснути в $|\alpha|$ разів, а й дзеркально відобразити отриману криву відносно осі ординат.

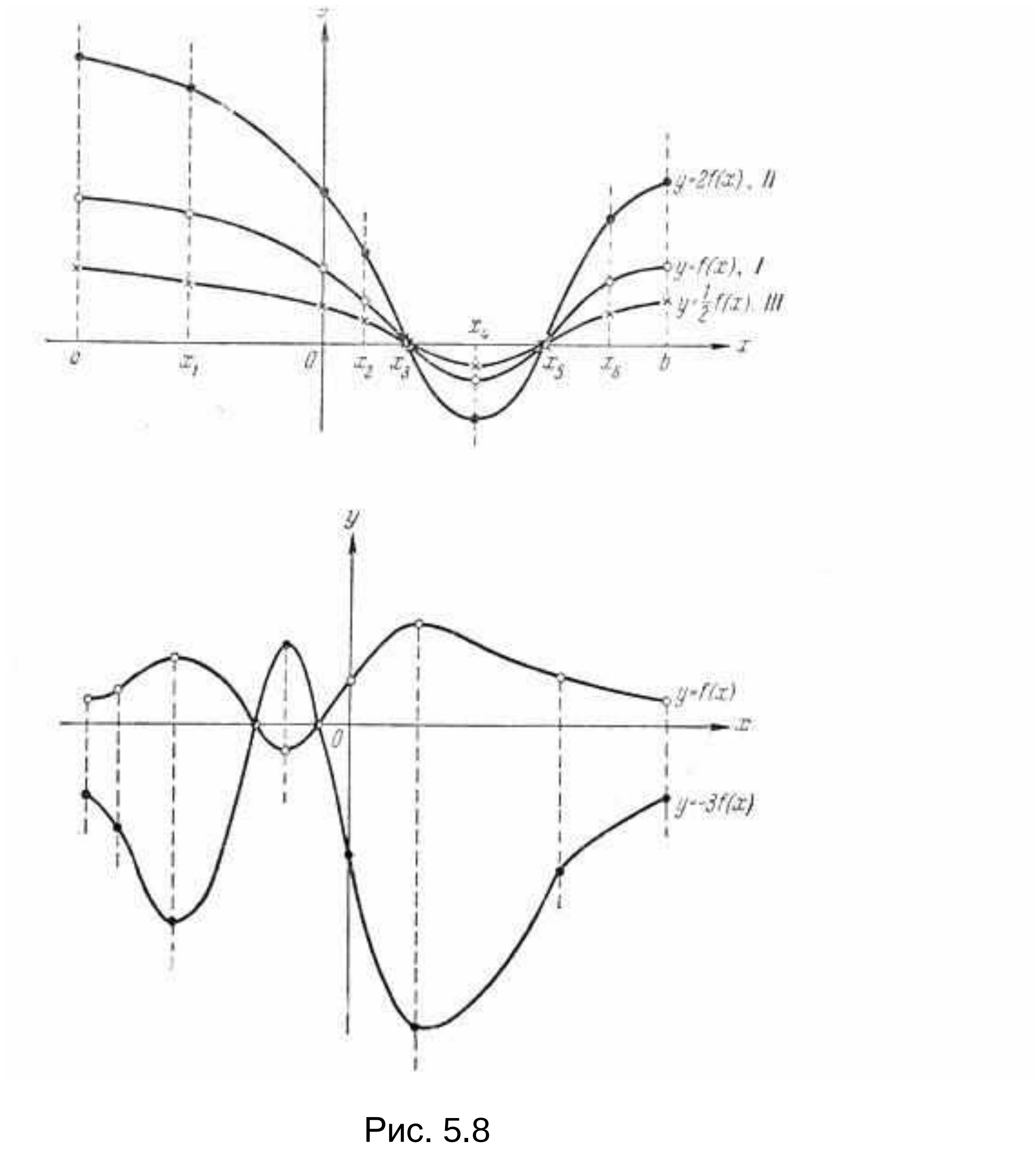


Рис. 5.8

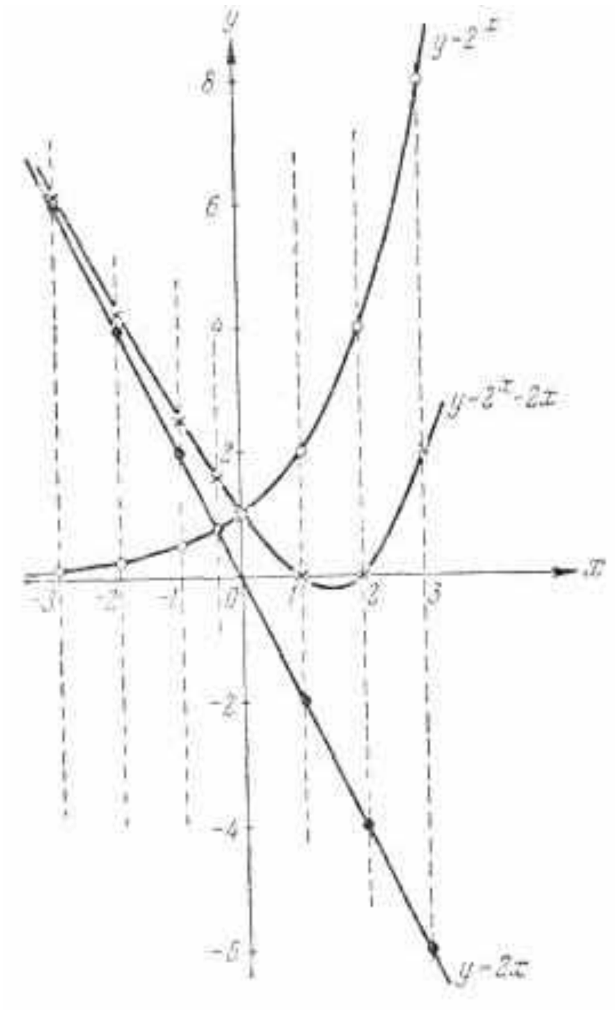


Рис. 5.9

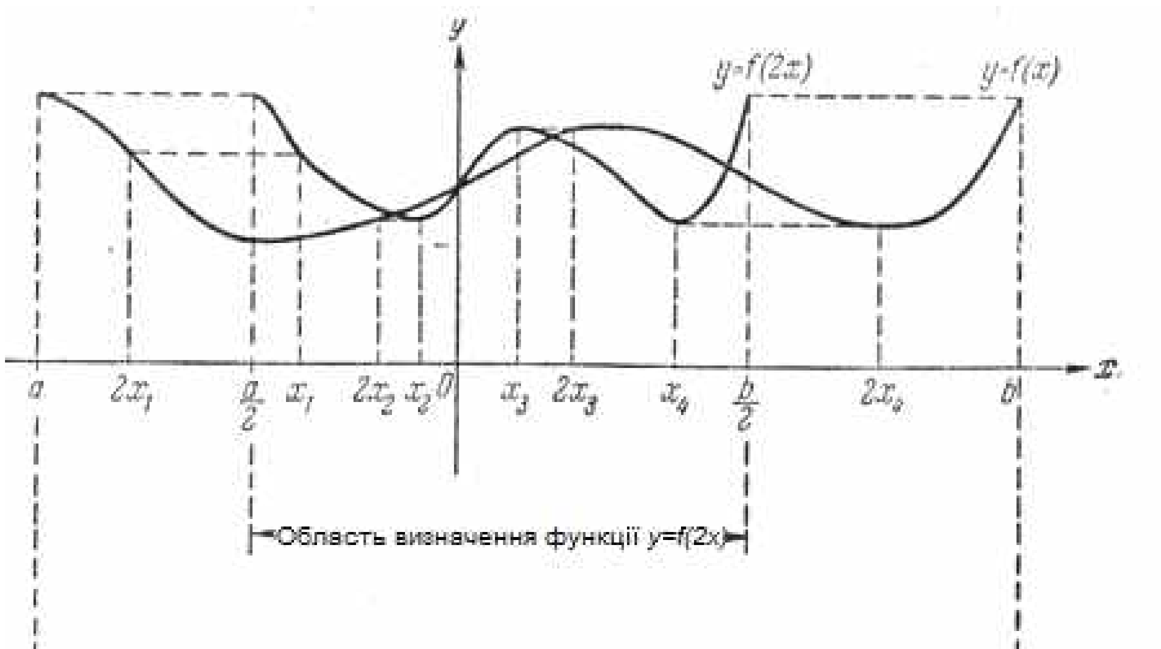


Рис. 5.10

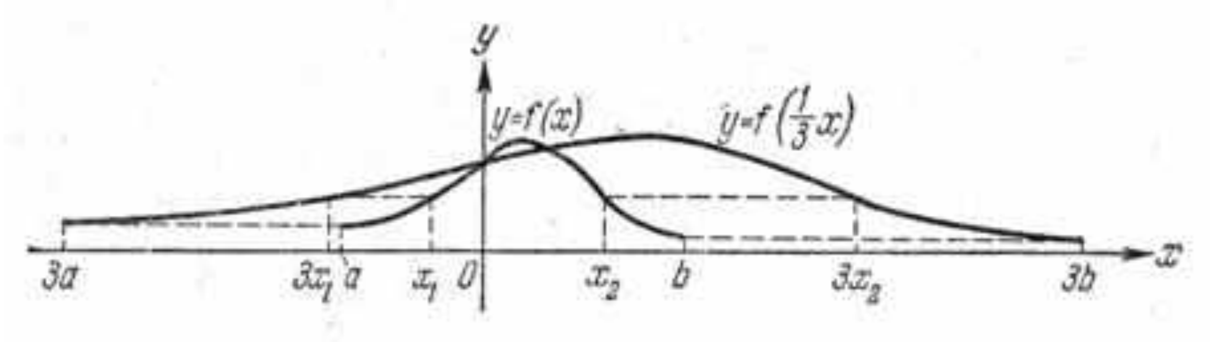


Рис. 5.11

Приклад 5.7. Побудуємо графіки таких функцій:

$$y = x - 1;\ y = |x - 1|;\ y = |x| - 1;\ y = ||x| - 1|.$$

Розв'язання. Графік лінійної функції $y = x - 1$ побудовано на рис. 5.12, *а*.

Побудуємо пунктиром пряму $y = |x - 1|$. Візьмемо її частину, що лежить у верхній півплощині, а частину, що лежить у нижній півплощині, відобразимо відносно осі абсцис. Шуканий графік накреслено суцільною лінією на рис. 5.12, *б*.

Побудуємо пунктиром пряму $y = |x| - 1$. Візьмемо її частину, що лежить у лівій півплощині, а частину, що лежить у правій півплощині, відобразимо відносно осі ординат. Шуканий графік накреслено суцільною лінією на рис. 5.12, *в*.

Скористаємось графіком, зображеним на рис. 5.12, *в*. Відобразимо відносно осі абсцис частину графіка, що лежить у нижній півплощині, зберігаючи частину, розташовану у верхній півплощині. Отже, маємо графік функції $y = ||x| - 1|$ (рис. 5.12, *г*).

Приклад 5.8. Побудуємо графіки таких функцій:

$$y = x^2 - 4x + 3;\ y = |x^2 - 4x + 3|;\ y = x^2 - 4|x| + 3;\ y = |x^2 - 4|x| + 3|.$$

Розв'язання. Будуємо параболу $y = x^2 - 4x + 3$ (рис. 5.13, *а*). Візьмемо її частину, що лежить у верхній півплощині, а частину, що лежить у нижній півплощині, відобразимо відносно осі абсцис. Отже, маємо графік функції $y = |x^2 - 4x + 3|$ (рис. 5.13, *б*).

Візьмемо частину параболи, що лежить у лівій півплощині, а частину, що лежить у правій півплощині, відобразимо відносно осі ординат. Графік функції $y = x^2 - 4|x| + 3$ накреслено суцільною лінією на рис. 5.13, *в*.

Скористаємося цим графіком. Відобразимо відносно осі абсцис частину графіка, що лежить у нижній півплощині, зберігаючи при цьому частину, розташовану у верхній півплощині. Отже, побудовано графік функції $y = \left| x^2 - 4|x| + 3 \right|$ (рис. 5.13, *г*).

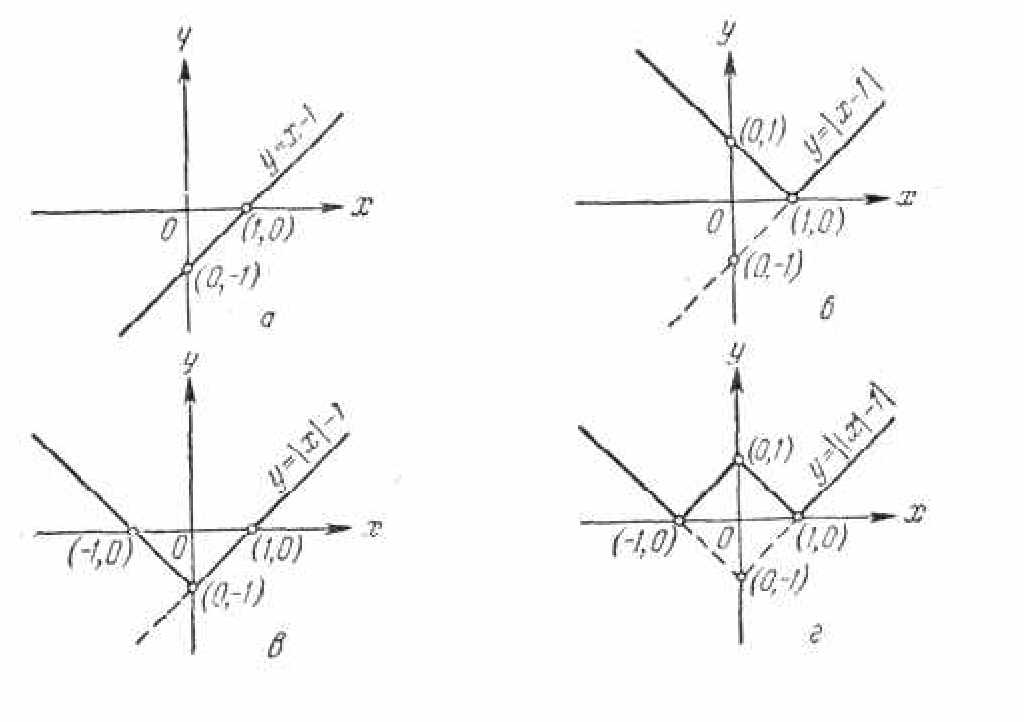


Рис. 5.12

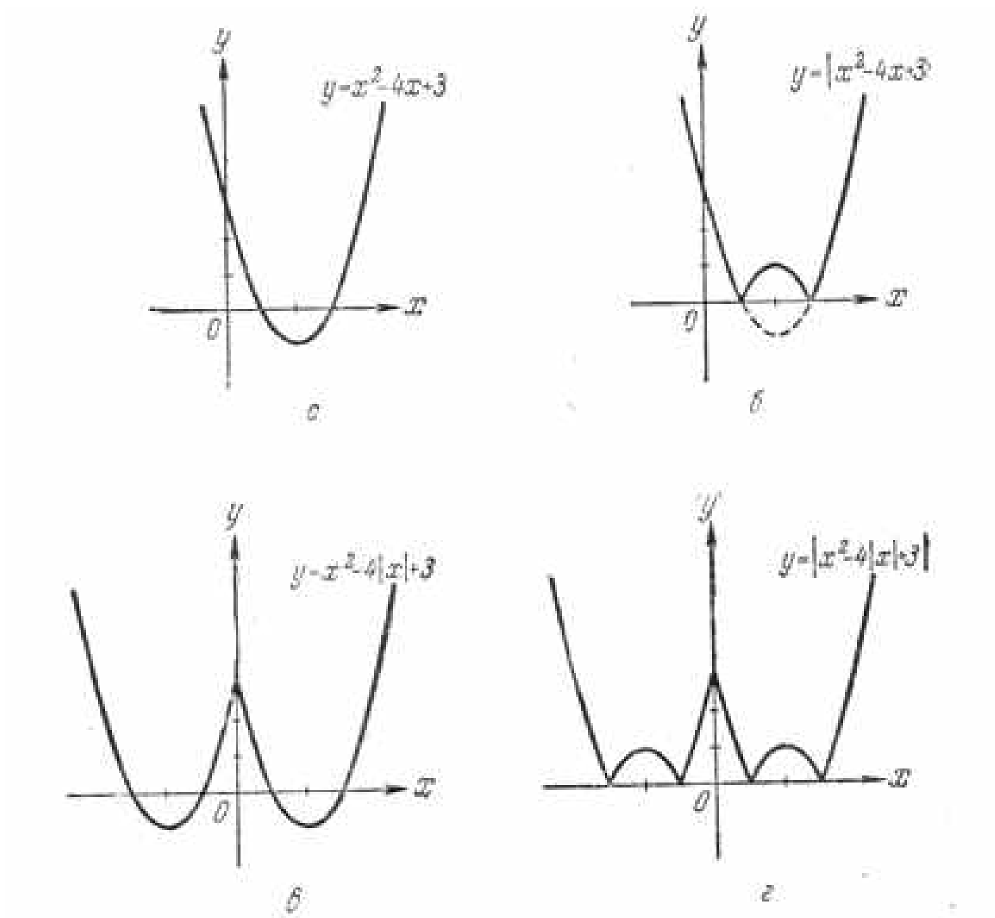


Рис. 5.13

5.3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{x+9}$:

А	Б	В	Г	Д
$[3;+\infty)$	$[9;+\infty)$	$[-3;+\infty)$	$[-9;+\infty)$	$[-9;9]$

Задача 5.2. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{-1-x}$:

А	Б	В	Г	Д
$[-1;+\infty)$	$(-\infty;-1]$	$(-\infty;1]$	$[1;+\infty)$	Інша відповідь

Задача 5.3. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{5-x}{x+2}}$:

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-2)\cup(5;+\infty)$	$(-\infty;-2)\cup[5;+\infty)$	$(-2;5)$	$[-2;5]$	$(-2;5]$

Задача 5.4. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{-x^2+5x-4}$:

А	Б	В	Г	Д
$(1;4)$	$[1;4]$	$(-\infty;1]$	$(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$	$[4;+\infty)$

Задача 5.5. Визначте, парними чи непарними є функції: а) $f(x)=x^5-2x^3+1$; б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-9}}{x-15}$.

Задача 5.6. Задано функції: 1) $y=x-2$; 2) $y=\sqrt{(x-2)^2}$; 3) $y=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$. Укажіть правильне твердження:

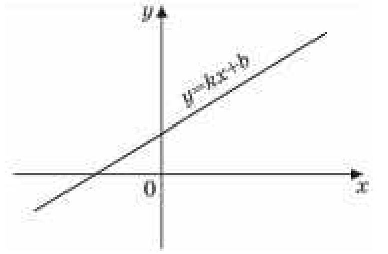
А	Б	В	Г	Д
Графіки всіх функцій збігаються	Збігаються тільки графіки першої і другої функцій	Збігаються тільки графіки першої і третьої функцій	Збігаються тільки графіки другої і третьої функцій	Графіки всіх функцій є різними

Задача 5.7. Укажіть серед наведених функцію $f(x)$, для кожного значення x якої з області визначення виконується рівність $f(-x)=-f(x)$:

А	Б	В	Г	Д
$f(x)=x^2$	$f(x)=3^x$	$f(x)=2x+5$	$f(x)=\log_3 x$	$f(x)=\dfrac{2}{x}$

Задача 5.8. За виглядом графіка функції $y = kx + b$ визначте знаки коефіцієнтів k і b. Виберіть правильне твердження:

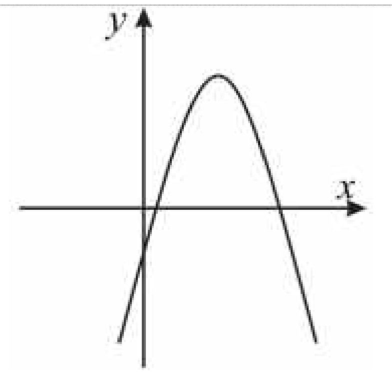
А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} k > 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k > 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k = 0, \\ b > 0 \end{cases}$



Задача 5.9. Укажіть найменше значення функції $y = 5 + \sqrt{(x-4)^2}$:

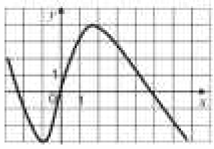
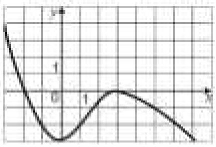
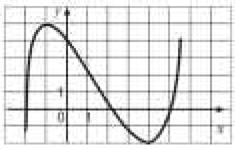
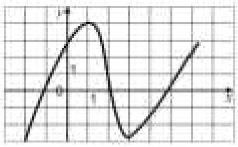
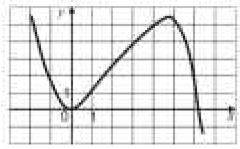
А	Б	В	Г	Д
4	6	5	-1	1

Задача 5.10. За виглядом графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ визначте знаки коефіцієнтів a,b,c. Виберіть правильне твердження:

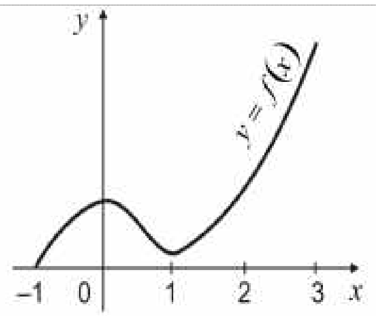


А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > o \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c > o \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > o \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < o \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < o \end{cases}$

Задача 5.11. Укажіть рисунок, на якому функція, задана графіком, зростає на проміжку $[0;4]$:

А	Б	В	Г	Д
				

Задача 5.12. Укажіть, на якому проміжку функція $y = f(x)$, задана графіком на відрізку $[-1;3]$, спадає:



А	Б	В	Г	Д
(0;1)	(–1;0)	(1;2)	(1;3)	(2;3)

Задача 5.13. Функцію задано формулою $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$. Знайдіть:

1) $f(1)$; 2) $f(0)$; 3) $f(-3)$; 4) $f(t)$.

Задача 5.14. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = 3x - 17$; 2) $f(x) = \dfrac{5}{x+9}$; 3) $f(x) = \sqrt{x-3}$; 4) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+5x-6}$;

5) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$; 6) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-2}$; 7) $f(x) = \dfrac{x}{|x|-5}$.

Задача 5.15. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$; 2) $f(x) = x^2 + 4$; 3) $f(x) = x^2 + 4x - 7$; 4) $f(x) = 5 + |x|$.

Задача 5.16. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = \sqrt{x+2}$; 2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x - 2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$; 4) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$.

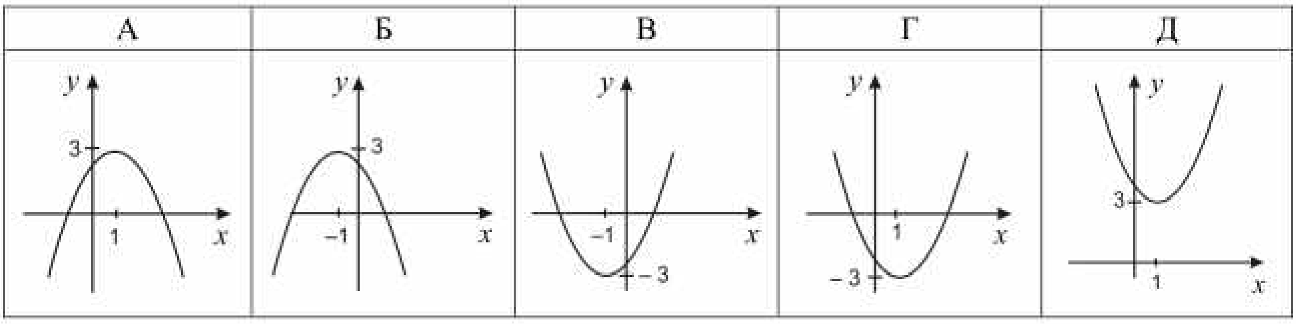
Задача 5.17. Побудуйте графік функції, укажіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = 2x - 3$; 2) $f(x) = 4 - \dfrac{1}{3}x$; 3) $f(x) = -3x$; 4) $f(x) = x^2 - 2x$.

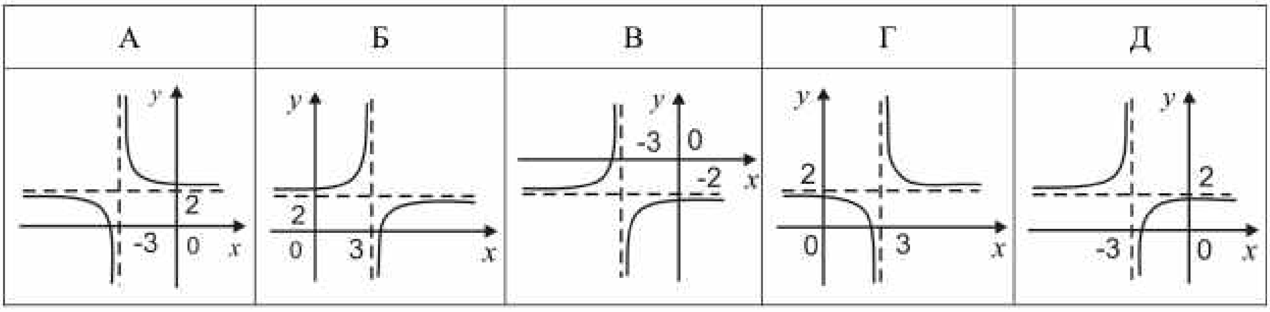
Задача 5.18. Визначте, якою є функція – парною чи непарною:

$$1)\ f(x)=9x^4;\ 2)\ f(x)=7x^3-5x^5;\ 3)\ f(x)=\sqrt{6-x^2};\ 4)\ f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-1}.$$

Задача 5.19. Серед наведених графіків укажіть графік функції $y=3-(x+1)^2$:



Задача 5.20. Серед наведених графіків укажіть графік функції $y=2-\dfrac{1}{x+3}$:



Задача 5.21. Побудуйте графіки функцій:

$$1)\ f(x)=\frac{4}{x};\ 2)\ f(x)=\frac{4}{x+1};\ 3)\ f(x)=\frac{4}{x+1}+2;\ 4)\ f(x)=\frac{2x-4}{x-3};$$

$$5)\ f(x)=\sqrt{x};\ 6)\ f(x)=\sqrt{x}-4;\ 7)\ f(x)=\sqrt{x-4};\ 8)\ f(x)=\sqrt{x-4}+2;$$

$$9)\ f(x)=\sqrt{2x};\ 10)\ f(x)=\sqrt{\frac{x}{3}};\ 11)\ f(x)=2\sqrt{x};\ 12)\ f(x)=\sqrt{2x-4}+3.$$

Задача 5.22. Побудуйте графіки функцій:

$$1)\ f(x)=|x|-4;\ 2)\ f(x)=\left|\frac{6}{x}+2\right|;\ 3)\ f(x)=x^2-2|x|-3;\ 4)\ f(x)=\left|x^2-2x-3\right|;$$

$$5)\ f(x)=\sqrt{|x|}-3;\ 6)\ f(x)=\left|\sqrt{x}-3\right|;\ 7)\ f(x)=\left|\sqrt{|x|}-3\right|.$$

Задача 5.23. Знайдіть функцію, обернену до заданої:

$$1)\ f(x)=2x+4;\ 2)\ f(x)=\frac{3}{x-2};\ 3)\ f(x)=1+\sqrt{x+3}.$$

6. НЕРІВНОСТІ

6.1. Основні означення. Рівносильні нерівності

Два алгебраїчні вирази, з'єднані знаками $<, >, \leq, \geq$, називають **нерівністю**. Значення змінної, яке перетворює нерівність на правильну числову нерівність, називають **розв'язком нерівності**. **Розв'язати нерівність** – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає. Нерівності називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків збігаються. Як і рівняння, нерівності теж можна розв'язувати за допомогою рівносильних перетворень, тобто замінюючи нерівність рівносильною їй простішою нерівністю (іноді кількома простішими нерівностями) або системою нерівностей, яка матиме ту саму множину розв'язків, що й початкова нерівність. У такому разі кажуть, що нерівність **рівносильна нерівності** (сукупності нерівностей) або системі нерівностей. Рівносильні перетворення нерівностей:

1) розкриття дужок і зведення подібних доданків у будь-якій частині нерівності;

2) перенесення доданка з однієї частини нерівності в іншу зі зміненням його знака на протилежний;

3) множення або ділення обох частин нерівності на одне й те саме додатне число;

4) множення або ділення обох частин нерівності на одне й те саме від'ємне число зі зміненням при цьому знака нерівності на протилежний.

6.2. Основні властивості числових нерівностей

Розглянемо основні властивості числових нерівностей, які будемо використовувати при розв'язанні задач:

1. Якщо $a > b$, то $b < a$.
2. Якщо $a > b$ та $b > c$, то $a > c$.
3. Якщо $a > b$, то $a + c > b + c$. Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то вийде правильна нерівність.
4. Якщо $a + b > c$, то $a - c > -b$. Якщо з однієї частини правильної нерівності перенести в іншу якийсь доданок, змінивши його знак на протилежний, то вийде правильна нерівність.
5. Якщо $a > b$, то $5a > 5b$. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то вийде правильна нерівність.
6. Якщо $a > b$, то $a(-1) < b(-1)$, тобто $-a < -b$. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і

змінити знак нерівності на протилежний, то вийде правильна нерівність.

7. Якщо $a > b$, то $\frac{1}{3}a > \frac{1}{3}b$; $-\frac{1}{5}a < -\frac{1}{5}b$. Якщо обидві частини правильної нерівності поділити на одне й те саме додатне число, то вийде правильна нерівність. Якщо обидві частини правильної нерівності поділити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то вийде правильна нерівність.

6.3. Дії з нерівностями

Розглянемо найпоширеніші дії з числовими нерівностями, які будемо використовувати при розв'язанні задач:

1. Якщо $a > b$ та $c > d$, то $a + c > b + d$, або якщо $a < m$, $b < n$, то $a + b < m + n$.
2. Якщо $a > b$ та $c < d$, то $a - c > b - d$.
3. Якщо $a > b > 0$ та $c > d > 0$, то $ac > bd$.
4. Якщо $a > b > 0$, то $a^k > b^k$, де $k \in N$.

Розв'язком нерівності зі змінною називають множину значень змінної, при яких нерівність є правильною. Розв'язати нерівність зі змінною – означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Розв'язок нерівності записують за допомогою числового проміжку. При цьому кінці проміжків для строгої нерівності й нескінченності записують за допомогою круглої дужки, а для нестрогої – за допомогою квадратної дужки (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Нерівність	Проміжок
$x > a$	$x \in (a; +\infty)$
$-\infty < x < a$	$x \in (-\infty; a)$
$x \ge a$	$x \in [a; +\infty)$
$x \le a$	$x \in (-\infty; a]$
$a < x < b$	$x \in (a; b)$
$a \le x \le b$	$x \in [a; b]$
$a \le x < b$	$x \in [a; b)$
$a < x \le b$	$x \in (a; b]$

Нерівності вигляду $ax + b > 0$ (або $ax + b < 0$) називають лінійними нерівностями, наприклад: $5x + 7 > 0$; $17 - (x + 7) > 12x - 11$; $\frac{x-1}{2} > \frac{4+2x}{3}$.

Для розв'язання лінійної нерівності застосовуються основні властивості нерівностей.

Алгоритм розв'язання лінійної нерівності:

1. Розкрити дужки.
2. Перенести доданки зі змінною в ліву частину, доданки без змінної – у праву.
3. Звести подібні доданки.
4. Поділити число з правої частини на числовий коефіцієнт при змінній.

Нерівності вигляду

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\ge 0$, $ax^2+bx+c\le 0$,

де x – змінна, a,b,c – деякі числа, називають **квадратичними нерівностями**.

Для розв'язання квадратичної нерівності знаходять корені відповідного рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Якщо дискримінант є меншим від нуля $(D<0)$, то розв'язання нерівності залежить від знака коефіцієнта a (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Коефіцієнт при змінній	Розв’язки нерівностей	
	$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$	$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\le 0$
$a>0$	R (множина дійсних чисел)	$\varnothing$ (порожня множина)
$a<0$	$\varnothing$ (порожня множина)	R (множина дійсних чисел)

Якщо дискримінант дорівнює нулю $(D=0)$ (корінь відповідного квадратного рівняння дорівнює m), то розв'язок буде таким, як наведено в табл. 6.3.

Таблиця 6.3

Коефіці-єнт при змінній	Розв’язки нерівностей			
	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\ge 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\le 0$
$a>0$	$(-\infty;m)\cup(m;+\infty)$	R	$\varnothing$	$x=a$
$a<0$	$\varnothing$	$x=m$	$(-\infty;m)\cup(m;+\infty)$	R

Якщо $D>0$ (корені відповідного квадратного рівняння – x_1 та x_2, то розв'язок буде таким, як наведено в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Коефіці-єнт при змінній	Розв'язки нерівностей			
	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$a>0$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	$(x_1;x_2)$	$[x_1;x_2]$
$a<0$	$(x_1;x_2)$	$[x_1;x_2]$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$

6.4. Раціональні нерівності. Метод інтервалів

Раціональною нерівністю називають таку нерівність, яку за допомогою рівносильних перетворень можна звести до однієї з таких нерівностей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0,\quad \frac{P(x)}{Q(x)}>0,\quad \frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0,\quad \frac{P(x)}{Q(x)}<0,$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ – многочлени.

Для розв'язання раціональних нерівностей найчастіше використовують зручний спосіб під назвою «**метод інтервалів**».

Метод ґрунтується на тому, що знак неперервної на проміжку функції може змінюватися тільки в тих точках, де її значення дорівнює нулю (але може й не змінюватися).

Щоб розв'язати нерівність методом інтервалів, потрібно:

1. Знайти область визначення функції $y=f(x)$.

2. Знайти значення x, при яких функція дорівнює нулю (знайти всі нулі функції): $f(x)=0$ (рис. 6.1).

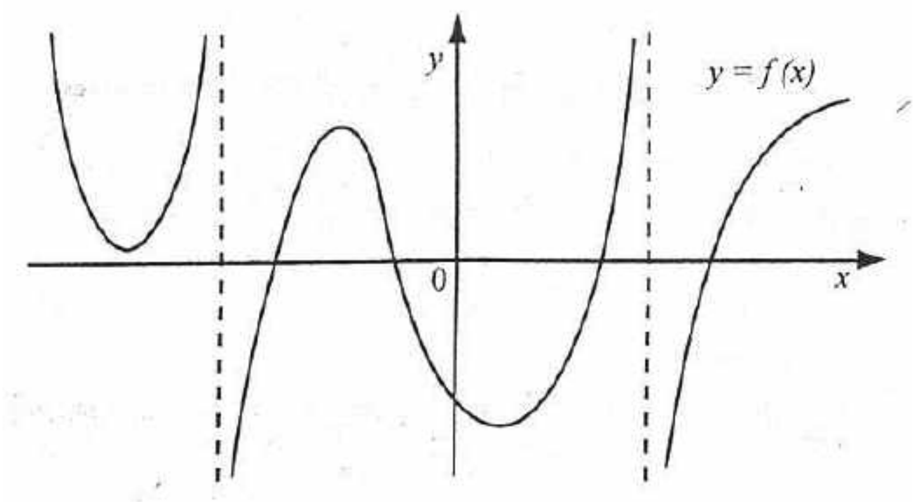


Рис. 6.1

3. Розбити область визначення на проміжки, у яких кожен із кінців є коренем рівняння $f(x)=0$ або кінцевою точкою проміжку визначення функції $y=f(x)$.

4. Визначити знак $y=f(x)$ на кожному з утворених проміжків.

5. Об'єднати проміжки, на яких функція $y=f(x)$ задовольняє нерівності, у множину розв'язків.

6.5. Ірраціональні нерівності

Розглянемо теореми, за допомогою яких розв'язують основні типи ірраціональних нерівностей.

Теорема 6.1. Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$ є рівносильною системі

$$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$$

Теорема 6.2. Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)}<g(x)$ є рівносильною сукупності двох систем

$$\begin{cases} f(x)<(g(x))^2, \\ g(x)>0, \\ f(x)\geq 0; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)>(g(x))^2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 6.3. Нерівність вигляду $\sqrt{f(x)}>g(x)$ є рівносильною системі

$$\begin{cases} f(x)<(g(x))^2, \\ g(x)>0, \\ f(x)\geq 0. \end{cases}$$

Теорема 6.4. Якщо для будь-якого $x\in M$ виконуються нерівності $f(x)\geq 0$ і $g(x)\geq 0$, то нерівності $f(x)>g(x)$ і $(f(x))^{2k}>(g(x))^{2k}$, $k\in \mathrm{N}$ є рівносильними на множині M.

6.6. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 6.1. Розв'яжемо нерівність $6x-5(2x+8)>14+2x$.

Розв'язання. Послідовність дій є такою:

$$6x-5(2x+8)>14+2x,$$

$$6x-10x-40>14+2x,$$
$$-4x-2x>14+40,$$
$$-6x>54,$$
$$x<-9.$$

Відповідь: $(-\infty;-9)$.

Приклад 6.2. Розв’язати нерівність $2x^2+4x-6>0$.

Розв’язання. Квадратне рівняння $2x^2+4x-6=0$ має два дійсних корені $x_1=-3,\ x_2=1$. Коефіцієнт $a=2>0$, отже, розв’язання нерівності полягає в об'єднанні числових проміжків $(-\infty;-3)$ і $(1;+\infty)$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-3)\cup(1;\ +\infty)$.

Приклад 6.3. Розв’яжемо нерівність $-x^2+x-1>0$.

Розв’язання. Дискримінант квадратного рівняння $-x^2+x-1=0$ дорівнює -3. Тому розв’язком нерівності є порожня множина.

Відповідь: Ø.

Приклад 6.4. Розв’язати нерівність $\dfrac{(x+5)(x-2)(x+3)}{(2x-3)(4x+5)}<0$.

Розв’язання. Корені многочленів, що стоять у чисельнику і знаменнику: –5; 2; –3; 1,5; –1,25, отже, маємо:

Проміжки	(–∞; –5)	(–5; –3)	(–3; –1,25)	(–1,25; 1,5)	(1,5; 2)	(2; +∞)
Знаки нерівностей	–	+	–	+	–	+

Знак нерівності – «менше», тому вибираємо проміжки зі знаком «мінус».

Відповідь: $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;-1{,}25)\cup(1{,}5;2)$.

Приклад 6.5. Розв’язати нерівність $\dfrac{(x-1)^4(x+2)^2}{x}\le 0$.

Розв’язання. Маємо вираз $(x-1)^4(x+2)^2=0$, якщо $x_1=-2,\ x_2=1$, а при інших значеннях x він є невід’ємним. Значення $x_1=-2,\ x_2=1$ задовольняють заданій нестрогій нерівності, тобто є її розв’язками. Нехай тепер $x_1\ne-2,\ x_2\ne1$, тоді $(x-1)^4(x+2)^2>0$, а тому, поділивши обидві частини заданої нерівності на $(x-1)^4(x+2)^2$ і зберігаючи знак заданої нерівності, отримаємо нерівність $\dfrac{x-1}{x}\le 0$, рівносильну початковій.

Відповідь: $x\in(0;1]\cup\{-2\}$.

Приклад 6.6. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x-3)(x-2)}{x^2-1}<1.$

Розв'язання. Перенесемо одиницю вліво і зведемо різницю до спільного знаменника:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-1}-1<0;\ \ \frac{x^2-x-6-(x^2-1)}{x^2-1}<0;$$

$$\frac{x^2-x-6-x^2+1}{x^2-1}<0;\ \ \frac{-x-5}{x^2-1}<0.$$

Помножимо ліву й праву частини нерівності на (–1) та отримаємо $\dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)}>0.$

Коренями многочленів, що стоять у чисельнику та знаменнику, є числа –5; -1; 1, отже, маємо:

Проміжки	(–∞; –5)	(–5; –1)	(–1; 1)	(1; +∞)
Знаки нерівностей	–	+	–	+

Знак нерівності – «більше», тому вибираємо проміжки зі знаком «плюс».

Відповідь: $x\in(-5;1)\cup(1;+\infty).$

Приклад 6.7. Розв'яжемо нерівність

$$\frac{(x-4)^2(x+1)^3x^5(x-3/2)}{(x+\sqrt{2})(x-3)^{100}(x-7)^9}\le 0.$$

Розв'язання. Позначимо

$$f(x)=\frac{(x-4)^2(x+1)^3x^5(x-3/2)}{(x+\sqrt{2})(x-3)^{100}(x-7)^9}$$

і перепишемо нерівність у вигляді $f(x)\le 0.$

Застосуємо метод інтервалів. Для цього позначимо на числовій осі в порядку зростання корені многочленів, що стоять у чисельнику та знаменнику. Оскільки нерівність нестрога, корені многочленів, що стоять у чисельнику зобразимо зафарбованими кружками, а в знаменнику – незафарбованими (рис. 6.2).

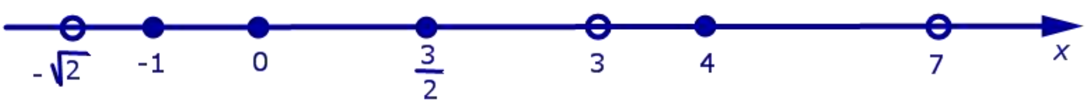


Рис. 6.2

На рис. 6.3 підкреслено числа 3 і 4, тобто ті з чисел, яким відповідають парні показники степеня в нерівності.

Рис. 6.3

Проведемо хвильову лінію, починаючи від правого верхнього кута рисунка і рухаючись уліво (рис. 6.4).

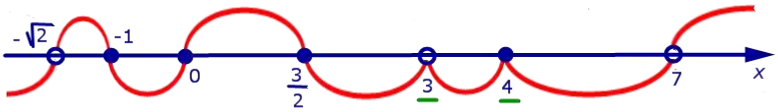


Рис. 6.4

Важливо, що значення функції $f(x)$ усередині кожного з проміжків мають один і той самий знак. При переході від проміжку до сусіднього проміжку через точки, яким відповідають непарні показники степеня в нерівності, знаки значень функції змінюються на протилежні. При переході від проміжку до сусіднього проміжку через точки 3 і 4, яким відповідають парні показники степеня, знаки значень функції не змінюються.

Проставимо знаки «+» і «–», як показано на рис. 6.5.

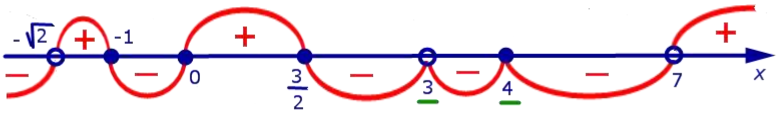


Рис. 6.5

На проміжках, позначених знаком «+», функція $f(x)$ набуває додатних значень, на проміжках, зазначених знаком «-», – від'ємних. Звідси випливає, що розв'язком нерівності є об'єднання проміжків, позначених знаком «-», оскільки саме на цих проміжках функція $f(x)$ набуває від'ємних значень. Залишається лише додати, що кінці проміжків

$$-1,\ 0,\ \frac{3}{2},\ 4,$$

позначені на рисунках зафарбованими кружками, входять у відповідь, а кінці проміжків

$$-\sqrt{2},\ 3,\ 7,$$

позначені на рисунках незафарбованими кружками, не входять у відповідь завдання.

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup [-1; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; 3\right) \cup (3; 7).$

Приклад 6.8. Розв’яжемо нерівність

$$\frac{2}{6-x}+\frac{1}{5x-1}>0.$$

Розв’язання. Перетворимо нерівність до такого вигляду, щоб можна було застосувати метод інтервалів:

$$\frac{2}{6-x}+\frac{1}{5x-1}>0 \Leftrightarrow \frac{2(5x-1)+(6-x)}{(6-x)(5x-1)}>0 \Leftrightarrow \frac{9x+4}{(6-x)(5x-1)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9(x+4/9)}{(x-6)\cdot 5(x-1/5)}>0 \Leftrightarrow \frac{(x+4/9)}{(x-6)(x-1/5)}<0.$$

Нерівність

$$\frac{(x+4/9)}{(x-6)(x-1/5)}<0$$

зведено до стандартного вигляду. Розв’яжемо його методом інтервалів. Для цього позначимо незафарбованими кружками (рис. 6.6) числа $-4/9$, $1/5$, 6.

Рис. 6.6

Проведемо хвильову лінію, починаючи рух від правого верхнього кута, і позначимо знаками «+» і «-» проміжки числової осі (рис. 6.7).

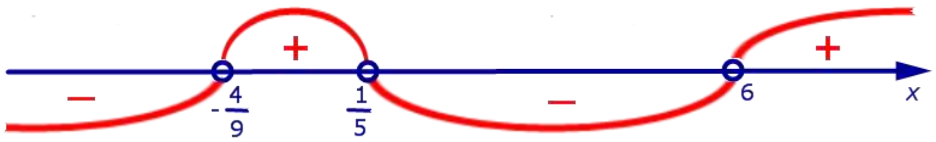


Рис. 6.7

Розв'язком нерівності є проміжки, позначені знаком «–».
Кінці проміжків у відповідь не входять.

Відповідь: $x\in\left(-\infty;-\frac{4}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{5};\ 6\right)$.

Приклад 6.9. Розв’яжемо нерівність $\sqrt{x^2-3x+1}\ge\sqrt{3x-4}$.

Розв’язання. Задана нерівність є рівносильною системі

$$\begin{cases} x^2-3x+1\ge 3x-4, \\ \quad 3x-4\ge 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \ge 0, \\ x \ge \dfrac{4}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 5, \\ x \le 1, \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{4}{3}; \end{cases}$ $x \ge 5.$

Відповідь: $[5; +\infty)$.

Приклад 6.10. Розв'яжемо нерівність $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

Розв'язання. Задана нерівність є рівносильною системі

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2, \\ x - 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \ge 0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \le -1 \text{ або } x \ge 2{,}5. \end{cases}$$

Розв'язок зображено на рис. 6.8.

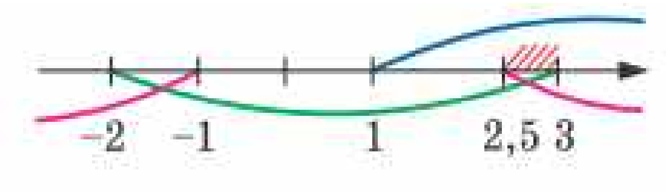


Рис. 6.8

Відповідь: $[2{,}5; 3)$.

Приклад 6.11. Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x$.

Розв'язання. Задана нерівність є рівносильною сукупності двох систем:

$$1) \begin{cases} x^2 + 7x + 12 \ge 0, \\ 6 - x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -4, \\ x \ge -3; \end{array}\right. \end{cases} x > 6.$$

$$2) \begin{cases} x^2 + 7x + 12 > (6-x)^2, \\ 6 - x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 6, \\ x > 24/19; \end{cases} \quad 24/19 < x \le 6.$$

Відповідь: $(24/19; +\infty)$.

Приклад 6.12. Розв'язати нерівність

$$(x-3)\left(\sqrt{x^2+4} - x - 3\right) \le x^2 - 9.$$

Розв'язання. Рівняння $(x-3)\left(\sqrt{x^2+4} - x - 3\right) = 0$ має два корені: $x = 3,\ x = -\dfrac{5}{6}$. Застосувавши метод інтервалів, отримаємо розв'язок, зображений на рис. 6.9.

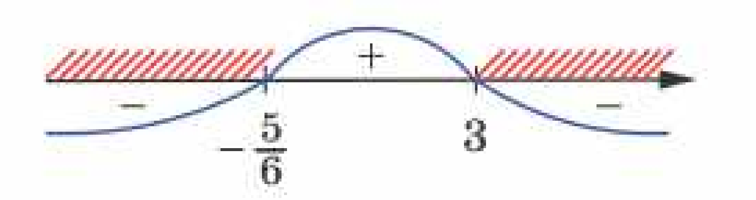


Рис. 6.9

Відповідь: $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right]\cup[3;+\infty)$.

Приклад 6.13. Розв’яжемо нерівність

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\le 2\sqrt{x}.$$

Розв’язання. Обидві частини заданої нерівності набувають невід’ємних значень на множині $M=[3;+\infty)$, яка є областю визначення цієї нерівності. Тому нерівність, задана на множині M, є рівносильною нерівності

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right)^2\le\left(2\sqrt{x}\right)^2.$$

Звідси $2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}\le x+2$.

На множині $M=[3;+\infty)$ обидві частини останньої нерівності набувають невід’ємних значень. Тоді отримуємо

$$\begin{cases}4(2x+1)(x-3)\le(x+2)^2,\\ x\ge 3;\end{cases}\quad\begin{cases}7x^2-24x-16\le 0,\\ x\ge 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\frac{4}{7}\le x\le 4,\\ x\ge 3;\end{cases}\quad x=3,\ 3\le x\le 4.$$

Відповідь: $[3;4]$.

6.7. Задачі для самостійного розв’язання

Задача 6.1. Розв’язати нерівність $3(3x-1)>2(5x-7)$.

Задача 6.2. Розв’язати нерівність $5(x+4)>2(4x-5)$.

Задача 6.3. Розв’язати нерівність $2(3x-7)-5x>3x-11$.

Задача 6.4. Розв’язати нерівність $2x+4(2x-3)\ge 12x-11$.

Задача 6.5. Розв’язати нерівність $3(x-2)-5(x+3)>27$.

Задача 6.6. Розв’язати нерівність $4(x+8)-7(x-1)<12$.

Задача 6.7. Розв’язати нерівність $\frac{16-3a}{3}-\frac{3a+7}{4}>0.$

Задача 6.8. Розв’язати нерівність $\frac{11-2a}{5}+\frac{3-2a}{2}<0.$

Задача 6.9. Розв’язати нерівність $\frac{2-3x}{4}\le\frac{6-5x}{8}+\frac{1}{5}.$

Задача 6.10. Розв’язати нерівність $\frac{1-2x}{3}\le\frac{4-3x}{6}+\frac{3}{4}.$

Задача 6.11. Розв’язати нерівність $x+\frac{2x-1}{5}-\frac{x-2}{3}>\frac{13x-1}{15}.$

Задача 6.12. Розв’язати нерівність $x^2-1>0.$

Задача 6.13. Розв’язати нерівність $x^2-9\le 0.$

Задача 6.14. Розв’язати нерівність $x^2+x-6\ge 0.$

Задача 6.15. Розв’язати нерівність $x^2-2x-2\le 0.$

Задача 6.16. Розв’язати нерівність $x^2+2x-1\le 0.$

Задача 6.17. Розв’язати нерівність $x^2+\frac{2}{3}x-2\frac{2}{3}<0.$

Задача 6.18. Розв’язати нерівність $(x-1)(3-2x)>-6.$

Задача 6.19. Розв’язати нерівність $(3x+7)(1-x)<3.$

Задача 6.20. Розв’язати нерівність $(x+2)(2-x)<3x^2-8.$

Задача 6.21. Розв’язати нерівність $x^2-6<(3-x)(x+3).$

Задача 6.22. Розв’язати нерівність $\frac{-20}{(x+4)(3-10x)}>0.$

Задача 6.23. Розв’язати нерівність $\frac{14}{(10x+5)(1-x)}<0.$

7. ПОКАЗНИКОВІ Й ЛОГАРИФМІЧНІ ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ

7.1. Показникові функції та їх властивості

Показникова функція задається формулою

$$y = a^x,$$

де $a > 0$, $a \neq 1$.

Область визначення функції: $D(y) = \mathbb{R}$.

Множина значень функції: $E(y) = (0; +\infty)$.

Властивості показникової функції:

1. Функція – ні парна, ні непарна.
2. Функція є неперіодичною.
3. Функція зростає в $D(y)$ при $a > 1$ і спадає в $D(y)$ при $0 < a < 1$.
4. Функція не має точок екстремумів.
5. При $x = 0$ значення функції дорівнює одиниці.

Графіки показникової функції для значень $a = 2 > 1$ і $0 < a = 1/2 < 1$ зображено на рис. 7.1.

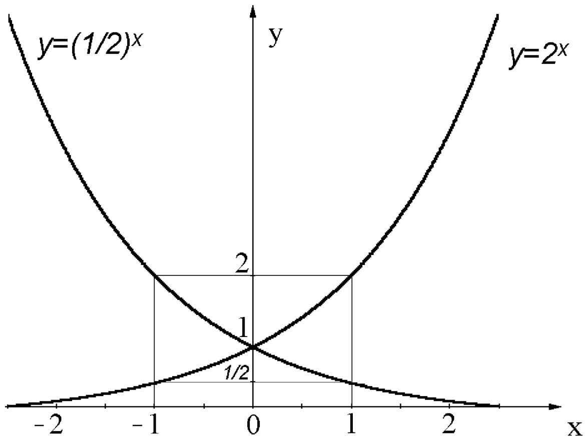


Рис. 7.1

7.2. Логарифм

Логарифмом додатного числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називають показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб отримати число b:

$$a^{\log_a b} = a.$$

Цей вираз називають ***основною логарифмічною тотожністю.***

Іншими словами, якщо $a^x = b$ і $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a b = x$, і навпаки, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$, наприклад: $\log_2 32 = 5$, оскільки $2^5 = 32$.

З означення випливають такі рівності:

$$\log_a 1 = 0;$$
$$\log_a a = 1.$$

Наприклад,

$$\log_{12} 1 = 0, \text{ оскільки } 12^0 = 1;$$
$$\log_7 7 = 1, \text{ оскільки } 7^1 = 7.$$

Логарифм за основою 10 називають ***десятковим*** і записують так: $\log_{10} x = \lg x$.

Логарифм за основою $e \approx 2{,}718281828459045...$ називають ***натуральним*** і записують так: $\log_e x = \ln x$.

Логарифмічні тотожності ($a > 0, a \neq 1$):

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a b, \quad x > 0, y > 0$.

Наприклад,

$$\log_2 14 = \log_2(2 \cdot 7) = \log_2 2 + \log_2 7 = 1 + \log_2 7;$$
$$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1.$$

2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x > 0, y > 0$.

Наприклад,

$$\log_3 \frac{9}{7} = \log_3 9 - \log_3 7 = 2 - \log_3 7.$$
$$\log_8 16 - \log_8 2 = \log_8 \frac{16}{2} = \log_8 8 = 1.$$

3. $\log_a x^k = k \log_a x, \quad x > 0$.

Наприклад,

$$\log_{1/2} 16 = \log_{1/2} 2^4 = \log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = -4 \log_{1/2} \left(1/2\right) = -4.$$

4. $\log_a x^{2m} = 2m \log_a |x|, \quad x \neq 0, m \in \mathbb{N}$.

5. $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \log_a b, \quad a > 0, k \neq 0$.

Наприклад,

$$\log_{49} 7 = \log_{7^2} 7 = \frac{1}{2} \log_7 7 = \frac{1}{2}.$$

6. Формула переходу до іншої основи:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c > 0, c \neq 1, b > 0.$$

Зокрема, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $\quad b \neq 1, b > 0$.

Наприклад,

$$\log_{125} 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 125} = \frac{\log_5 3}{\log_5 5^3} = \frac{\log_5 3}{3\log_5 5} = \frac{\log_5 3}{3}.$$

Обчислення логарифмів заданих чисел називають ***логарифмуванням.***

Знаходження числа (виразу) за заданим його логарифмом називають ***потенціюванням.***

7.3. Логарифмічні функції та їх властивості

Функцію, задану формулою $y = \log_a x$ $(a > 0, \quad a \neq 1)$, називають ***логарифмічною.***

Область визначення функції: $D(y) = (0; +\infty)$.

Множина значень функції: $E(y) = \mathbb{R}$.

Властивості логарифмічної функції:

1. Функція – ні парна, ні непарна.
2. Функція є неперіодичною.
3. При $x = 1$ значення функції дорівнює нулю.
4. Функція зростає в $D(y)$ при $a > 0$, спадає в $D(y)$ при $0 < a < 1$.
5. Функція не має точок екстремуму.
6. Логарифмічна функція є оберненою до показникової функції $y = a^x$, тому графік логарифмічної функції буде симетричним графіку показникової функції $y = a^x$ відносно прямої $y = x$.

Графіки логарифмічної функції для значень $a = 2 > 1$ і $0 < a = 1/2 < 1$ зображено на рис. 7.2.

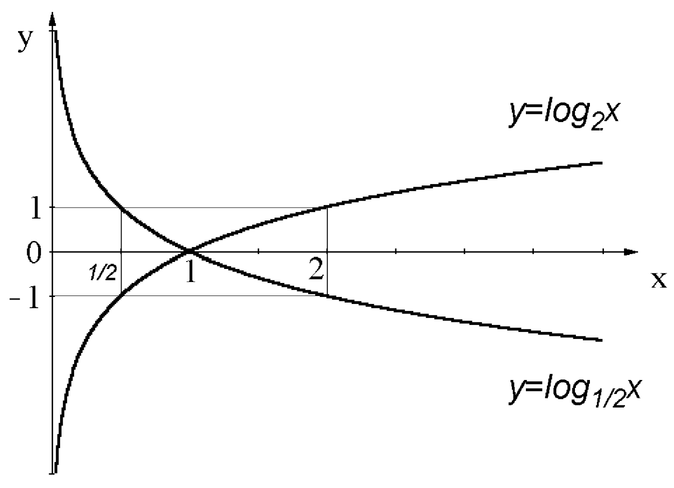


Рис. 7.2

7.4. Показникові рівняння

Рівняння, яке місить змінну в показнику степеня, називають ***показниковим рівнянням.***

Рівняння вигляду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають ***найпростішим показниковим рівнянням.***

Наприклад, $3^x = 81$, $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{3}{2}$ тощо. Якщо $b > 0$, то розв’язком рівняння $a^x = b$ є $x = \log_a b$; якщо $b \leq 0$, то рівняння $a^x = b$ коренів не має.

Розглянемо деякі основні методи розв’язання показникових рівнянь.

Рівняння вигляду $a^{f(x)} = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, розв’язують, логарифмуючи обидві його частини за основою a. Отримують рівносильне рівняння $f(x) = \log_a b$.

Рівняння вигляду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, є рівносильним рівнянню $f(x) = g(x)$.

Рівняння вигляду $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, є рівносильним рівнянню $f(x) = g(x) log_a b$.

Рівняння, які зводяться до квадратних:

1. Рівняння вигляду $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$.

Уведемо нову змінну $a^x = t$, $t > 0$ й одержимо квадратне рівняння $At^2 + Bt + C = 0$.

2. Рівняння вигляду $A \cdot a^x + B \cdot a^{-x} = C$ за допомогою заміни $a^x = t$, $t > 0$ можна звести до квадратного.

7.5. Логарифмічні рівняння

Рівняння, що містить змінну під знаком логарифма або в основі логарифма, називають ***логарифмічним рівнянням.***

Розглянемо деякі з них.

Найпростіші логарифмічні рівняння:

1. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b, a > 0, a \neq 1.$

Наприклад, $\log_2 x = 5$, $x = 2^5$, $x = 32$.

2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, a > 0, a \neq 1.$

Наприклад, $\log_3(x+5) = 2, x + 5 = 3^2, x = 9 - 5, x = 4$.

3. $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1.$

Наприклад,

$$\log_{0,2}(x+3) = -1, x + 3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}, x + 3 = 5, x = 5 - 2, \ x = 3.$$

4. Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ є рівносильним системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \end{cases}$

$$\text{або } \begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0, \end{cases} \quad \text{де } a > 0, \quad a \neq 1.$$

Наприклад, $\log_3(x^2 - 4x + 3) = \log_3(3x + 21)$;

$$\begin{cases} 4x + 21 > 0; \\ x^2 - 4x + 3 = 3x + 21; \end{cases} \begin{cases} x > -7; \\ x^2 - 4x - 18 = 0. \end{cases} \quad x_1 = -2,\ x_2 = 9.$$

Відповідь: $-2,\ 9$.

5. Рівняння $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ є рівносильним системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1; \end{cases} \text{ або системі } \begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$$

Наприклад, $\log_{2x}(x^2 - 3x) = \log_{2x}(6x - 8)$;

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 6x - 8; \\ 6x - 8 > 0; \\ 2x > 0; \\ 2x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 9x + 8 = 0; \\ x > 4/3; \\ x > 0; \\ x \neq 1/2; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 1;\ x_2 = 8; \\ x > \dfrac{4}{3}; \end{cases} \quad x = 8.$$

Застосування основної логарифмічної тотожності. Це перетворення полягає в такому:

$$\varphi(x)^{\log_{\varphi(x)} f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Наприклад, необхідно розв'язати рівняння $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 4$. Перетворимо ліву частину рівняння, застосувавши основну логарифмічну тотожність

$$9^{\log_3(1-2x)} = (3^2)^{\log_3(1-2x)} = 3^{2\log_3(1-2x)} = 3^{\log_3(1-2x)^2} = (1 - 2x)^2$$

при умові, що $1 - 2x > 0$. Звідси одержимо

$$(1 - 2x) = 5x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -5; \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$$

Бачимо, що ОДЗ належить тільки x_1. Отже, відповідь: -5.

Опишемо ***розв'язання рівнянь методом заміни змінної.***

Наприклад, необхідно розв'язати рівняння $3\log_5^2 x - 4\log_5 x - 4 = 9$. Нехай $t = \log_5 x$, тоді маємо рівняння $3t^2 - 4t - 4 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{2}{3}$.

Повертаємось до заміни: а) $\log_5 x = 2$; $x = 25$; б) $\log_5 = -\frac{2}{3}$; $x = 5^{-\frac{2}{3}}$; $x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$. Отже, відповідь: 25; $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$.

7.6. Показникові нерівності

Нерівність, що містить змінну в показнику степеня, називають ***показниковою.***

Розв'язання показникових нерівностей зазвичай обумовлюється такими властивостями показникової функції:

1) функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$;

2) функція $y = a^x$ спадає, якщо $a < 1$;

3) функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень.

Показникові нерівності можна класифікувати за способом їх розв'язання. Розглянемо найпростіші з них.

1. Якщо $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ a > 1. \end{cases}$ то $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ a > 1. \end{cases}$

2. Якщо $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$ то $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Наприклад, необхідно розв'язати нерівність $(0{,}5)^x \geq \frac{1}{32}$.

Маємо $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^5$. Оскільки основа $0 < \frac{1}{2} < 1$, одержуємо $x \leq 5$, $x \in (-\infty;5]$.

Відповідь: $x \in (-\infty;5]$.

Іще один приклад: необхідно розв'язати нерівність $16^x > 0{,}125$. Маємо $2^{4x} > 2^{-3}$. Оскільки основа $2 > 1$, одержуємо $4x > -3$; $x > -\frac{3}{4}$; $x \in (-\frac{3}{4};+\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\frac{3}{4};+\infty)$.

3. Для нерівності вигляду $a^{f(x)} > b$ необхідно розглянути такі випадки:

а) $b \le 0$, тоді нерівність виконується для будь-якого значення $x \in D(f)$;

б) $b > 0$, тоді $f(x) > \log_a b$, якщо $a > 1$, і $f(x) < \log_a b$, якщо $0 < a < 1$.

Наприклад, необхідно розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -2$. Оскільки $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$ для будь-якого дійсного значення x, одержуємо $x \in \mathbb{R}$.

Відповідь: $x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо ще один приклад: необхідно розв'язати нерівність $2^x > 7$. Перепишемо її у вигляді $2^x > 2^{\log_2 7}$. Оскільки основа $2 > 1$, одержуємо $x > \log_2 7$; $x \in (\log_2 7; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (\log_2 7; +\infty)$.

4. Якщо $a^{f(x)} < b^{f(x)}$, то можна поділити обидві частини нерівності на $a^{f(x)}$ або $b^{f(x)}$. Наприклад, поділивши на $b^{f(x)}$, отримаємо нерівність $\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} < 1$, звідки $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < 1$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < \left(\frac{a}{b}\right)^0$. Розв'язання таких нерівностей описано в розд. 1, 2.

7.7. Логарифмічні нерівності

Нерівність, що містить змінну під знаком логарифма або в його основі, називають ***логарифмічною.***

Розв'язання логарифмічних нерівностей базується на властивості монотонності логарифмічної функції: функція $y = \log_a x$ монотонно зростає, якщо $a > 1$, і монотонно спадає, якщо $0 < a < 1$. При цьому слід урахувати, що підлогарифмічний вираз може набувати лише додатних значень.

Розглянемо найпростіші логарифмічні нерівності.

1. Нерівність

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1; \\ 0 < g(x) < f(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1; \\ 0 < f(x) < g)(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Нерівність вигляду $\log_a f(x) > b$, яка згідно з п. 1 розв'язується так:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \log_a f(x) > b\log_a a \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > a^b; \\ a > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < a^b; \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Наприклад, необхідно розв'язати нерівність $\log_2(8-x) < 1$. Одержуємо $\log_2(8-x) < \log_2 2$; $0 < 8 - x < 2$. Тоді

$$\begin{cases} 8 - x > 0; \\ 8 - x < 2; \end{cases} \begin{cases} x < 8; \\ x > 6; \end{cases} x \in (6; 8).$$

Відповідь: $x \in (6; 8)$.

Для засвоєння вивченого матеріалу рекомендуємо ознайомитися з прикладами розв'язання типових задач 7.1–7.19 і самостійно розв'язати задачі 7.1–7.25.

7.8. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 7.1. Знайдемо область визначення функції $f(x) = \log_{1/2}(2x - x^2)$.

Розв'язання. Областю визначення логарифмічної функції є всі значення x, які задовольняють умову $2x - x^2 > 0$. Розв'яжемо утворену нерівність: $2x - x^2 > 0$, $x^2 - 2x < 0$, $x(x-2) < 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ $\Rightarrow x \in (0; 2)$.

Приклад 7.2. Визначимо, яке з наведених чисел належить множині значень функції $y = 2^x + 4$?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
5	Жодне	3	4	0

Розв'язання. Знайдемо множину значень функції $y = 2^x + 4$. Оскільки множиною значень показникової функції $y = 2^x$ є інтервал $(0; +\infty)$, множиною значень заданої функції є інтервал $(4; +\infty)$. З наведених чисел у цей проміжок потрапляє лише число 5.

Відповідь: 5.

Приклад 7.3. Обчислимо $2^{\log_4 9 + \log_2 8}$.

Розв'язання:

$$2^{\log_4 9+\log_2 8}=2^{\log_{2^2} 3^2+\log_2 8}=2^{\frac{2}{2}\log_2 3}\cdot 2^{\log_2 8}=3\cdot 8=24.$$

Відповідь: 24.

Приклад 7 4. Обчислимо значення виразу

$$\log_{20} 5+\log_{20} 4+2.$$

Розв'язання:

$$\log_{20} 5+\log_{20} 4+2=\log_{20}(5\cdot 4)+2=\log_{20} 20+2=1+2=3.$$

Відповідь: 3.

Приклад .7.5. Обчислимо $\dfrac{1}{\log_{12} 18}+\dfrac{1}{\log_{27} 18}$.

Розв'язання:

$$\frac{1}{\log_{12} 18}+\frac{1}{\log_{27} 18}=\log_{18} 12+\log_{18} 27=\log_{18}(12\cdot 27)=\log_{18} 324=2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 7.6. Виконаємо спрощення виразу

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5...\log_7 8.$$

Розв'язання. Перейдемо у всіх множниках до основи 2:

$$\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot...\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 7}=\log_2 8=3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 7.7. Розв'яжемо рівняння $\sqrt{3^x}=27^{-2/3}$.

Розв'язання. Зведемо ліву й праву частини рівняння до однієї основи:

$$3^{\frac{x}{2}}=\left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}};\ 3^{\frac{x}{2}}=3^{-2};\ \frac{x}{2}=-2;\ x=-4.$$

Відповідь: –4.

Приклад 7.8. Розв'яжемо рівняння $10^{x^2+x-2}=1$.

Розв'язання:

$$10^{x^2+x-2}=1;\quad 10^{x^2+x-2}=10^0;\quad x^2+x-2=0;\quad x_1=-2;\quad x_2=1.$$

Відповідь: $x_1=-2;\quad x_2=1.$

Приклад 7.9. Розв'яжемо рівняння $4^{x+1}=7^{x+1}$ (основи – різні, показники – однакові).

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $7^{x+1}\neq 0$:

$$\frac{4^{x+1}}{7^{x+1}}=1;\quad \left(\frac{4}{7}\right)^{x+1}=\left(\frac{4}{7}\right)^{0};\quad x+1=0;\quad x=-1.$$

Відповідь: -1.

Приклад 7.10. Розв'яжемо рівняння $5^{2x-1}=7^{3-x}$.

Розв'язання. Злогарифмуємо рівняння, наприклад, за основою 5. Отримаємо рівняння $2x-1=(3-x)\log_5 7$. Зведемо подібні при x: $x(2+\log_5 7)=1+3\log_5 7$. Таким чином, $x=\dfrac{1+3\log_5 7}{2+\log_5 7}$.

Відповідь: $x=\dfrac{1+3\log_5 7}{2+\log_5 7}$.

Приклад 7.11. Розв'яжемо рівняння $3^x+5\cdot 3^{x+1}=16$.

Розв'язання. Винесемо за дужки 3^x (найменший спільний множник). Маємо: $3^x(1+5\cdot 3)=16;\quad 3^x\cdot 16=16;\quad 3^x=1;\quad x=0$.

Відповідь: 0.

Приклад 7.12. Розв'яжемо рівняння $5^{2x}-2\cdot 5^x-15=0$.

Розв'язання. Уведемо нову змінну $5^x=t$, тоді $t^2-2t-15=0$. Його розв'язками є $t_1=5,\ t_2=-3$. Повернемося до заміни, отримаємо сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l}5^x=5;\\ 5^x=-3.\end{array}\right.$ Друге рівняння сукупності коренів не має (область значень показникової функції $E(y)=(0;+\infty)$). Перше рівняння має корінь $x=1$.

Відповідь: 1.

Приклад 7.13. Розв'яжемо рівняння $3^{x+1}-3^{1-x}=8$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння, скориставшись властивостями степеня: $3^x\cdot 3-3\cdot\dfrac{1}{3^x}=8$. Уведемо нову змінну $3^x=t$, тоді $3t-\dfrac{3}{t}=8$; $3t^2-8t-3=0$; $\left[\begin{array}{l}t_1=3,\\ t_2=-\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l}3^x=3;\\ 3^x=-\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$ Друге рівняння сукупності коренів не має. Перше рівняння має корінь $x=1$.

Відповідь: 1.

Приклад 7.14. Розв'язати рівняння

$$\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3.$$

Розв'язання. Подамо число 3 у вигляді логарифма: $3=\log_2 8$. Тоді $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=\log_2 8$. Суму логарифмів замінимо логарифмом добутку: $\log_2(3-x)(1-x)=\log_2 8$. Урахуємо ОДЗ $\begin{cases}3-x>0;\\1-x>0\end{cases}$ і замінимо рівняння рівносильною системою: $\begin{cases}(3-x)(1-x)=8;\\3-x>0;\\1-x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-4x+3=8;\\x<3;\\x<1;\end{cases}$

Квадратне рівняння має корені: $x_1=-1$, $x_2=5$. ОДЗ задовольняє тільки $x=-1$.

Відповідь: -1.

Приклад 7.15. Розв'яжемо нерівність

$$(0,2)^{4x^2-2x-2}\le\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3}.$$

Розв'язання. Запишемо нерівність у такому вигляді: $(0,2)^{4x^2-2x-2}\le(0,2)^{2x-3}$. Тоді, оскільки основа $0,2<1$, отримаємо $4x^2-2x-2\ge 2x-3$, звідки $4x^2-4x+1\ge 0$, тобто $(2x-1)^2\ge 0$. Ця нерівність виконується для будь-якого дійсного значення x.

Відповідь: $x\in\mathbb{R}$.

Приклад 7.16. Розв'яжемо нерівність $5^{8x+1}+5^{8x-1}<130$.

Розв'язання. Запишемо задану нерівність, скориставшись властивостями степеня, у такому вигляді: $5\cdot 5^{8x}+\dfrac{5^{8x}}{5}<130$. Помножимо обидві частини отриманої нерівності на 5: $25\cdot 5^{8x}+5^{8x}<650$; $26\cdot 5^{8x}<650$; $5^{8x}<25$; $5^{8x}<5^2$; $8x<2$ (оскільки $5>1$); $x<0,25$; $x\in(-\infty;0,25)$.

Відповідь: $x\in(-\infty;0,25)$.

Приклад 7.17. Розв'яжемо нерівність

$$3\cdot 4^x+2\cdot 4^{x+1}+3\cdot 4^{x+2}\le 236.$$

Розв'язання. Перетворимо нерівність і винесемо спільний множник 4^x за дужки: $3\cdot 4^x+8\cdot 4^x+48\cdot 4^x\le 236$; $4^x(3+8+48)\le 236$; $4^x\cdot 59\le 236$; $4^x\le 4$; $x\le 1$.

Відповідь: $x\in(-\infty;1]$.

Приклад 7 18. Розв'яжемо нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+18)<2\log_{\frac{1}{3}}(x-4).$$

Розв'язання. Перепишемо задану нерівність у вигляді

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+18)<\log_{\frac{1}{3}}(x-4)^2,$$

тому що $x-4>0$. Оскільки $0<\dfrac{1}{3}<1$, задана нерівність є рівносильною системі

$$\begin{cases} x^2-6x+18>(x-4)^2; \\ x-4>0; \end{cases} \begin{cases} x^2-6x+18>x^2-8x+16; \\ x>4; \end{cases} \begin{cases} 2x+2>0; \\ x>4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-1; \\ x>4; \end{cases} x>4.$$

Відповідь: $x\in(4;+\infty)$.

Приклад 7.19. Розв'яжемо нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\log_5(x^2-4)>0$.

Розв'язання. Запишемо задану нерівність у такому вигляді:

$$\log_{\frac{1}{2}}\log_5(x^2-4)>\log_{\frac{1}{2}}1; \qquad 0<\log_5(x^2-4)<1;$$

$$\log_5 1<\log_5(x^2-4)<\log_5 5; \begin{cases} x^2-4<5; \\ x^2-4>1; \end{cases} \begin{cases} x^2<9; \\ x^2>5; \end{cases} \begin{cases} x\in(-3;3); \\ x\in(-\infty;\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};+\infty). \end{cases}$$

Тоді спільний розв'язок: $x\in(-3;-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};3)$.

Відповідь: $x\in(-3;-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};3)$.

7.9. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.1. Установити відповідність між функціями й областями їх визначення:

1. $y=\log_{1/2}\dfrac{x+2}{x-1}$. 2. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$.

Вибрати правильну відповідь: **А.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **Б.** $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$. **В.** $(-2;1)$. **Г.** $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$. **Д.** $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$.

Задача 7.2. Обчислити вирази:

$$1.\ \log_{27}81. \quad 2.\ \log_3\frac{1}{3}. \quad 3.\ \log_{81}3. \quad 4.\ \log_{81}\frac{1}{3}.$$

Вибрати правильні відповіді серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
– 4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

Задача 7.3. Обчислити вирази:

$$1.\ \log_5\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[5]{5}}. \quad 2.\ \log_2\frac{4}{\sqrt[3]{2}}. \quad 3.\ \log_5\frac{5}{\sqrt[3]{25}}. \quad 4.\ \log_3 3\sqrt[3]{3}.$$

Вибрати правильні відповіді серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1, 3	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{4}$

Задача 7.4. Обчислити значення виразу $\log_3 32 + 5\log_3\frac{3}{2}$. Вибрати правильні відповіді серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
5	3	32	– 5	9

Задача 7.5. Обчислити вирази:

$$1.\ 4^{\log_2 5}. \quad 2.\ 5^{1+\log_5 2}. \quad 3.\ \left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 64}. \quad 4.\ 2^{2\log_4 12-1}.$$

Вибрати правильні відповіді серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
6	8	10	12	25

Задача 7.6. Обчислити $\dfrac{\log_8 4 + \log_8 16}{\log_6 16 + \log_6 81}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$

Задача 7.7. Обчислити $\frac{\log_3 64}{\log_3 2}+\frac{\log_5 9}{\log_5 3}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
7	8	9	6	11

Задача 7.8. Розв'язати рівняння $0,2^{3x-1}=\sqrt{125}$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
5	3	1	$-\frac{1}{6}$	0, 4

Задача 7.9. Розв'язати рівняння $4^{x-1}-1{,}5\cdot 2^{x+2}+20=0$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 20$	2	$2; \log_2 20$	10	4

Задача 7.10. Розв'язати рівняння $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
0	1	$\frac{2}{3}$	$1; \frac{2}{3}$	0; 1

Задача 7.11. Розв'язати рівняння $\lg(5x-3)=1$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
0,6	1,2	2,6	1	0

Задача 7.12. Розв'язати рівняння

$$\log_2(2x+1)=\log_2(9x+17)-\log_2(x+5)$$

і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
-3	2	2; -3	$-1\frac{5}{6}$	-2

Задача 7.13. Розв'язати рівняння

$$\log_2^2 x - \log_2 x^5 = 4\log_2 64$$

і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
-3; 8	8	-3	$\frac{1}{8}$; 256	256

Задача 7.14. Розв'язати рівняння

$$x - 1 + \log_4 3 = \log_4(5^x - 4^{x-1})$$

і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
1	4	0	$\varnothing$	3

Задача 7.15. Розв'язати рівняння $\lg^2 x - \lg x^5 + 6 = 0$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	1000; 100	1	-1	10; 0

Задача 7.16. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - x - 20} > 1$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$(-5;4)$	$\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$	$(-4;5)$	(4; 5)

Задача 7.17. Розв'язати нерівність $2^{x+1} + 2^x < 24$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$(-3;+\infty)$	$(-\infty;-3)$	$[3;+\infty)$	$(0;3)$	$(-\infty;3)$

Задача 7.18. Розв'язати нерівність $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-1)\cup(-1;1)$	$(-1;1)$	$[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$	$(-3;3)$	$\varnothing$

Задача 7.19. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)>0$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$	$\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$	$\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$	$\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)$	$\varnothing$

Задача 7.20. Розв'язати нерівність $\log_{0,5}(x^2-5x+6)>-1$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$(1;2)\cup(3;4)$	$(2;3)$	$(4;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;1)$

Задача 7.21. Розв'язати нерівність $\log_{0,1}(3x-5)>\log_{0,1}x$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$(2,5;+\infty)$	$(5;+\infty)$	$(-\infty;5)$	$(0;5)$	$(2,5;5)$

Задача 7.22. Розв'язати нерівність $\log_8(3x-10)<\frac{1}{3}$ і вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$\left(0;3\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\infty;3\frac{1}{3}\right)$	$(4;+\infty)$	$\left(3\frac{1}{3};4\right)$	$(-\infty;4)$

Задача 7.23. Розв'язати нерівності:

1. $\log_9 x<\frac{1}{2}$. 2. $\log_{\frac{1}{3}} x>-2$. 3. $\log_{\frac{1}{9}} x>-\frac{1}{2}$. 4. $\log_{\frac{1}{9}} x<\frac{1}{2}$.

Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А. $(0;9)$. **Б.** $(9;+\infty)$. **В.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **Г.** $(0;3)$. **Д.** $(3;+\infty)$.

Задача 7.24. Розв'язати нерівності:

1. $\log_5(x-2)<\log_5(-x)$. 2. $\log_{\frac{1}{5}}(2-x)<\log_{\frac{1}{5}}(-x)$.

2. $\log_5(x+2) > \log_5(-x)$. 4. $\log_{\frac{1}{5}}(x+2) > \log_{\frac{1}{5}}(-x)$.

Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А. $(-1;+\infty)$. **Б.** $(-1;0)$. **В.** $(-2;-1)$. **Г.** $(-\infty;0)$. **Д.** $\varnothing$.

Задача 7.25. Розв'язати нерівності:

1. $\log_2(\log_5 x) < 0$. 2. $\log_{0,5}(\log_5 x) < 0$.

2. $\log_5(\log_2 x) < 0$. 4. $\log_{0,2}(\log_{0,5} x) < 0$.

Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А. $(0;0,5)$. **Б.** $(1;2)$. **В.** $(1;5)$. **Г.** $(-\infty;5)$. **Д.** $(5;+\infty)$.

8. ТРИГОНОМЕТРІЯ

8.1. Тригонометричні вирази та їх перетворення

Наведемо означення тригонометричних функцій числового аргументу.

Синусом числа (кута) α ($\sin\alpha$) називають ординату точки C, яка утворюється внаслідок повороту радіуса-вектора $\overrightarrow{OA}=(0;1)$ на кут α (рис. 8.1). Якщо $\alpha>0$, то поворот здійснюється проти ходу годинникової стрілки і вважається додатним, якщо $\alpha<0$, то поворот здійснюється за ходом годинникової стрілки і вважається від'ємним.

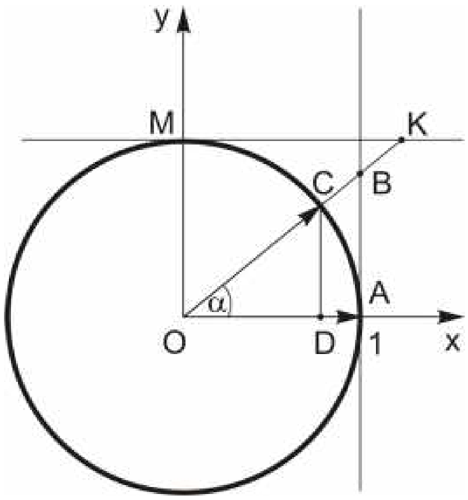


Рис. 8.1

Косинусом числа α ($\cos\alpha$) називають абсцису точки C.

Тангенсом числа α ($\mathrm{tg}\,\alpha$) називають ординату точки B, розташованої на перетині продовження радіуса-вектора $\overrightarrow{OC}$ з віссю тангенсів (прямою, проведеною через точку A(0; 1) перпендикулярно до осі Ox).

Котангенсом числа α ($\mathrm{ctg}\,\alpha$) називають абсцису точки K, розташованої на перетині продовження радіуса-вектора $\overrightarrow{OC}$ з віссю котангенсів (прямою, проведеною через точку M(0; 1) перпендикулярно до осі Oy).

Іноді використовуються ще дві тригонометричні функції, а саме секанс ($\sec\alpha$) і косеканс ($\mathrm{cosec}\,\alpha$) числа α. Ці функції вводяться таким чином:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};\ \mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу (кута α):

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ – основна тригонометрична тотожність;

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$ (за умови існування $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$);

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Слід мати на увазі, що $\sin\alpha$ набуває додатних значень у першій ($\alpha \in (0;\pi/2)$) і другій ($\alpha \in (\pi/2;\pi)$) чвертях, від'ємних – у третій ($\alpha \in (\pi;3\pi/2)$) і четвертій ($\alpha \in (3\pi/2;2\pi)$); $\cos\alpha$ набуває додатних значень у першій і четвертій чвертях, від'ємних – у другій і третій; $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$ набувають додатних значень у першій і третій чвертях, від'ємних – у другій і четвертій (рис. 8.2).

Згідно з означенням тригонометричних функцій мають місце формули

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha,\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

для будь-якого значення α і формули $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$ для будь-якого допустимого значення α.

Рис. 8.2

Радіан (скорочено «рад») – це центральний кут між двома радіусами кола, довжина дуги між якими дорівнює радіусу кола.

Якщо $\cup AB = R = OA = OC$, то $\angle AOC = \alpha = 1\,рад$ (див. рис. 8.1). При цьому $1\,рад = \frac{180}{\pi}$ і $1^0 = \frac{\pi}{180}\,рад$.

Значення тригонометричних функцій гострих кутів наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Функція	Кут α, рад (град.)				
	$0(0^0)$	$\frac{\pi}{6}(30^0)$	$\frac{\pi}{4}(45^0)$	$\frac{\pi}{3}(60^0)$	$\frac{\pi}{2}(90^0)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\text{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Основні тригонометричні формули:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta}{1 \mp \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}; \quad \text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha \cdot \text{ctg}\beta \mp 1}{\text{ctg}\alpha \pm \text{ctg}\beta};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Формули добутку тригонометричних функцій:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big).$$

Формули тригонометричних функцій подвійного кута:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1\text{-}\ \text{tg}^2\alpha}.$$

Формули пониження степеня:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\ \ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Формули зведення *(табл. 8.2)*:

Таблиця 8.2

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	tg β	ctg β
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	ctgα	tgα
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	–ctgα	–tgα
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	–tgα	–ctgα
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	tgα	ctgα
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	ctgα	tgα
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	–ctgα	–tgα
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	–tgα	–ctgα

Для зручності користування формулами зведення введено такі правила:

а) кут α завжди вважається гострим;

б) цілу кількість періодів завжди можна відкинути;

в) якщо кут α відкладається від горизонтального діаметра $(\pi\pm\alpha;\ 2\pi\pm\alpha)$, то назва функції зберігається; якщо кут α відкладається від вертикального діаметра $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha;\ \frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$, то назва функції змінюється (синус – на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс, котангенс – на тангенс).

8.2. Тригонометричні функції та їх властивості

Основними тригонометричними функціями є $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$. Їх графіки зображено на рис. 8.2–8.5.

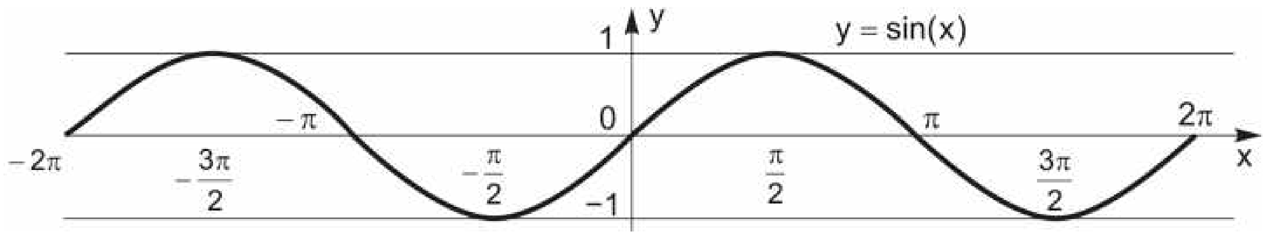


Рис. 8.2

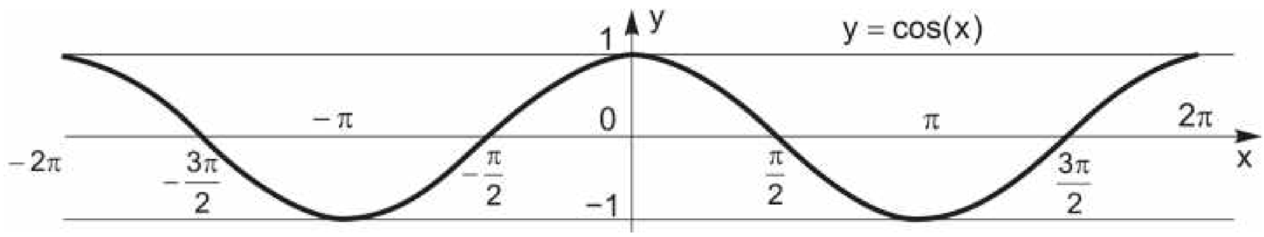
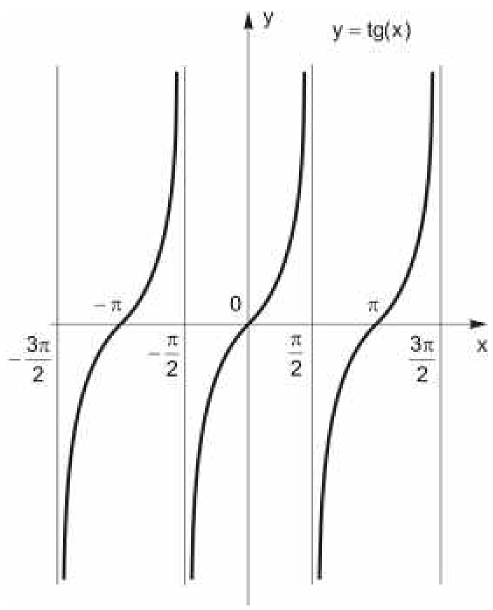


Рис. 8.3



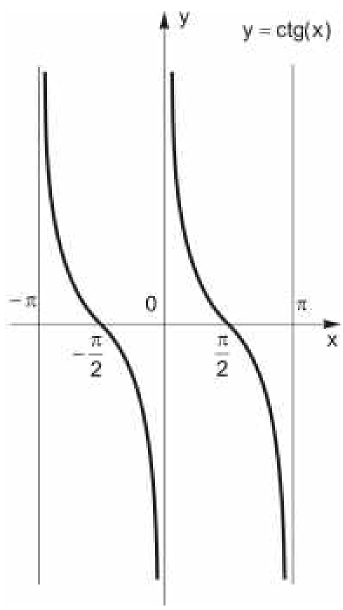


Рис. 8.4 Рис. 8.5

Властивості функції $y = \sin x$:

1. Область визначення: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Множина значень: $E(y) = [-1;\ 1]$.

3. Функція є непарною.
4. Функція є періодичною. Довжина періоду $T = 2\pi$.
5. Нулі функції: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
6. Точок розриву немає.
7. Точки екстремуму: $\left\{(k + 1/2); (-1)^k\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Властивості функції $y = \cos x$:
1. Область визначення: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Множина значень: $E(y) = [-1; 1]$.
3. Функція є парною.
4. Функція є періодичною. Довжина періоду $T = 2\pi$.
5. Нулі функції: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
6. Точок розриву немає.
7. Точки екстремуму: $\left\{k\pi; (-1)^k\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Властивості функції $y = tg\, x$:
1. Область визначення: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Множина значень: $E(y) = \mathbb{R}$.
3. Функція є непарною.
4. Функція є періодичною. Довжина періоду $T = \pi$.
5. Нулі функції: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
6. Функція зростає в області визначення $D(y)$.
7. Функція не має точок екстремумів.
8. Точки розриву: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Властивості функції $y = ctg\, x$:
1. Область визначення: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Множина значень: $E(y) = \mathbb{R}$.
3. Функція є непарною.
4. Функція є періодичною. Довжина періоду $T = \pi$.
5. Нулі функції: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
6. Функція спадаюча в області визначення $D(y)$.
7. Функція не має точок екстремумів.
8. Точки розриву $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

8.3. Обернені тригонометричні функції

Оберненими тригонометричними функціями називають функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

1. **Арксинусом числа** b $(|b| \le 1)$ називають таке число α із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b.

Наприклад, якщо $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Узагалі $\arcsin b = \alpha$, якщо $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\alpha = b$.

Наприклад, $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, але $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \ne \frac{3\pi}{4}$, оскільки $\frac{3\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Властивості функції $y = \arcsin x$:

1. Область визначення: $D(y) = [-1;\ 1]$.
2. Множина значень: $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функція є непарною.

Графік функції зображено на рис. 8.6.

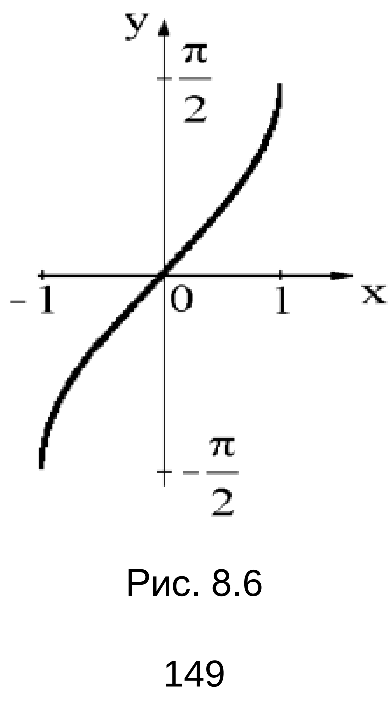


Рис. 8.6

2. **Арккосинусом числа** b, де $|b| \le 1$, називають таке число α із проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює b.

Наприклад, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$ і $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6}\in[0,\pi]$і $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Узагалі $\arccos b=\alpha$, якщо $\alpha\in[0,\pi]$і $\cos\alpha=b$.

Наприклад, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, але $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\ne-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\notin[0,\pi]$.

Властивості функції $y=\arccos x$:

1. Область визначення: $D(y)=[-1;\ 1]$.
2. Множина значень: $E(y)=[0;\ \pi]$.
3. Функція не є ні парною, ні непарною.

Графік функції зображено на рис. 8.7.

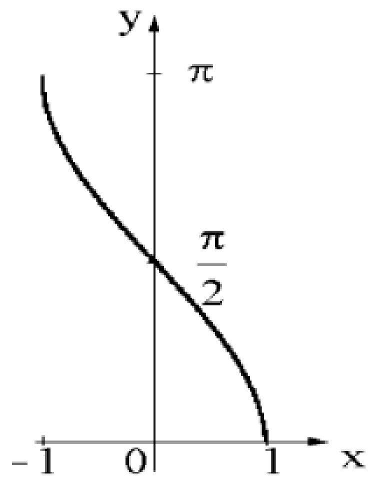


Рис. 8.7

3. **Арктангенсом числа** b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b.

Наприклад, $\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$; $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

Узагалі $\text{arctg} b = \alpha$, якщо $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\text{tg}\alpha = b$.

Наприклад, $\text{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, але $\text{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$, оскільки $\frac{2\pi}{3} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Властивості функції $y = \text{arctg}\, x$:

1. Область визначення: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Множина значень: $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функція є непарною.
4. $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$ – горизонтальні асимптоти.

Графік функції зображено на рис. 8.8.

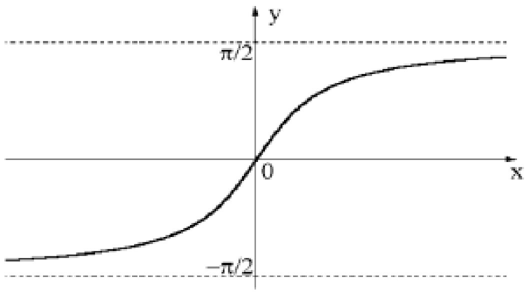


Рис. 8.8

Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0;\pi)$, котангенс якого дорівнює b.

Наприклад, $\text{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in (0;\pi)$ і $\text{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6} \in (0;\pi)$ і $\text{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

Узагалі $\text{arcctg}\, b = \alpha$, якщо $\alpha \in (0;\pi)$ і $\text{ctg}\alpha = b$.

Властивості функції $y = \text{arcctg} x$.

1. Область визначення: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Множина значень: $E(y) = (0;\pi)$.
3. Функція не є ні парною, ні непарною.
4. $y = 0$, $y = \pi$ – горизонтальні асимптоти.

Графік функції зображено на рис. 8.9.

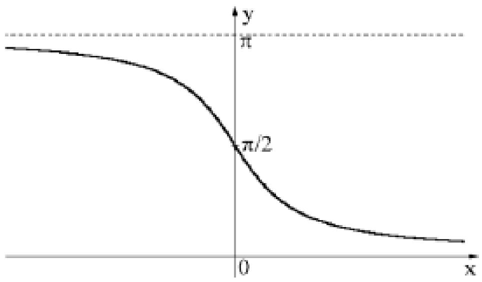


Рис. 8.9

Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями:

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \ \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1;\ 1];$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0;\ \pi]\ ; \ \cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1;\ 1];$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \ \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x) = x; \ \mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x;$$

$$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x) = x, \quad x \in (0;\ \pi); \ \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x) = x; \ \mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [1;1]; \ \mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x = \frac{\pi}{2}.$$

8.4. Тригонометричні рівняння

Рівняння вигляду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}x = a$, $\mathrm{ctg}x = a$, де x – невідома величина, a – довільне дійсне число, називають *найпростішими тригонометричними рівняннями.*

Розглянемо найпростіші тригонометричні рівняння.

1. Рівняння вигляду $\sin x = a$, де $|a| \le 1$, має розв’язок $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $a > 1$ або $a < -1$, то це рівняння не має коренів.

Наприклад, необхідно розв’язати рівняння $\sin x = -\dfrac{1}{2}$. Використаємо формулу для знаходження коренів: $x = (-1)^k \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, $x = (-1)^k \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Отже, $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. Рівняння вигляду $\cos x = a$, де $|a| \le 1$, має розв’язок $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $a > 1$ або $a < -1$, то це рівняння не має коренів.

Наприклад, необхідно розв’язати рівняння $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Використаємо формулу для знаходження коренів: $x = \pm \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.і

Отже, $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3. Рівняння $\mathrm{tg} x = a$ має корені $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k, k \in Z$.

4. Рівняння $\mathrm{ctg} x = a$ має корені $x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k, k \in Z$.

В окремих випадках зручно використовувати такі формули $(k \in \mathbb{Z})$:

$$\sin x = 0, \; x = \pi k;$$
$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$
$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$
$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$$
$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi k;$$
$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi k.$$

Єдиного способу розв’язання будь-якого тригонометричного рівняння не існує, але загальна мета розв’язання полягає в перетворенні тригонометричних виразів, що входять у рівняння, таким чином, щоб рівняння зводилося до найпростішого рівняння або до сукупності простіших рівнянь. Розглянемо деякі методи розв'язання тригонометричних рівнянь: метод розкладання на множники та метод уведення нової змінної.

Метод розкладання на множники розглянемо на прикладі.

Для розв'язання рівняння $\cos 7x + \cos 3x = 0$ скористаємось формулою для суми косинусів й отримаємо $2\cos 5x \cos 2x = 0$, з якого випливає, що

$$\left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0,\\ \cos 2x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z},\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z},\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Метод уведення нової змінної застосуємо до рівнянь, які зводяться до квадратних або однорідних тригонометричних рівнянь.

Рівняння вигляду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + ... + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

де a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n – дійсні числа $(n \in \mathbb{N})$, називають *однорідним тригонометричним рівнянням.*

Припустимо, що $a_0 \neq 0$.

У випадку, коли $\cos x = 0$, початкове рівняння набуває вигляду $a_0 \sin^n x = 0$, звідки $\sin x = 0$, що неможливо, оскільки $\cos x$ і $\sin x$ одночасно не можуть дорівнювати нулю. Тому припускаємо, що $\cos x \neq 0$, відповідно його корені не є коренями початкового рівняння. У цьому випадку ділення на $\cos^n x$ не спричиняє втрати коренів.

Поділимо обидві частини вихідного рівняння на $\cos^n x$. Отримаємо таке рівняння

$$a_0 tg^n x + a_1 tg^{n-1} x + ... + a_{n-1} tgx + a_n = 0.$$

Воно розв'язується за допомогою уведення заміни $tgx = t$.

Рівняння, що зводяться до квадратних, розглянемо на прикладі. Щоб розв'язати рівняння $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$, застосуємо основну тригонометричну тотожність:

$2\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x-1=0$; $-2\cos^2 x+\cos x+1=0$; $2\cos^2 x-\cos x-1=0$.

Уведемо нову змінну, для чого позначимо $\cos x=t$. Маємо квадратне рівняння: $2t^2-t-1=0$; $\left[\begin{array}{l} t_1=1, \\ t_2=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ Повернімося до заміни й розв'яжемо одержані рівняння: $\cos x=1$, $x=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ або $cosx=-\dfrac{1}{2}$, $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Отже, $x=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ або $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

8.5. Тригонометричні нерівності

Розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей подамо у вигляді табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Нерівність	Множина розв'язків нерівності ($n\in\mathbb{Z}$)
$\sin x>a \quad (\lvert a\rvert<1)$	$x\in(\arcsin a+2\pi n;\ \pi-\arcsin a+2\pi n)$
$\sin x<a \quad (\lvert a\rvert<1)$	$x\in(-\pi-\arcsin a+2\pi n;\ \arcsin a+2\pi n)$
$\cos x>a \quad (\lvert a\rvert<1)$	$x\in(-\arccos a+2\pi n;\ \arccos a+2\pi n)$
$\cos x<a \quad (\lvert a\rvert<1)$	$x\in(\arccos a+2\pi n;\ 2\pi-\arccos a+2\pi n)$
$\mathrm{tg}x>a$	$x\in(\mathrm{arctg}\ a+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n)$
$\mathrm{tg}x<a$	$x\in(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \mathrm{arctg}\ a+\pi n)$
$\mathrm{ctg}x>a$	$x\in(\pi n;\ \mathrm{arcctg}a+\pi n)$
$\mathrm{ctg}x<a$	$x\in(\mathrm{arcctg}\,a+\pi n;\ \pi+\pi n)$

8.6. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 8.1. Визначимо знаки таких виразів:
а) $\sin(4\pi/5)$; б) $\cos(34^0)$; в) $\mathrm{tg}(3\pi/2-\alpha)$, де $\alpha\in(0;\pi/2)$.

Розв'язання: а) кут $4\pi/5$ належить другій чверті, тому $\sin(4\pi/5)>0$;

б) кут 34^0 належить першій чверті, тому $\cos(34^0)>0$; в) значення кута α не перевищує $\pi/2$, тому вираз $3\pi/2-\alpha$ належить другій чверті. Синус і косинус кутів другої чверті мають різні знаки, тому $\mathrm{tg}(3\pi/2-\alpha)<0$.

Відповідь: а) $\sin(4\pi/5)>0$; б) $\cos(34^0)>0$; в) $\mathrm{tg}(3\pi/2-\alpha)<0$.

Приклад 8.2. Обчислимо вираз

$$\cos^2(\pi/3)(3\sin^2(\pi/4)+1)\mathrm{ctg}(\pi/6).$$

Розв'язання. Аргументи тригонометричних функції – табличні. Значення тригонометричних функцій від цих аргументів – відомі, а саме:

$$\cos(\pi/3)=1/2,\ \sin(\pi/4)=\sqrt{2}/2,\ \mathrm{ctg}(\pi/6)=\sqrt{3}.$$

Тому

$$\cos^2(\pi/3)(3\sin^2(\pi/4)+1)\mathrm{ctg}(\pi/6)=\frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{1}{2}+1\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{8}.$$

Відповідь: $\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$.

Приклад 8.3. Спростимо вираз

$$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha.$$

Розв'язання. Скористаємось формулами зниження степеня:

$$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha=\left|\begin{array}{l}\text{оскільки}\\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\end{array}\right|=$$

$$=\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

Відповідь: $\sin^2\alpha$.

Приклад 8.4. Спростимо вираз

$$\frac{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)\mathrm{tg}(\pi/2-\alpha)}{\sin(\pi/2+\alpha)\mathrm{ctg}(\pi/2-\alpha)\mathrm{tg}(\pi/2+\alpha)}.$$

Розв'язання. Застосуємо формули зведення:

$$\frac{\text{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)\text{tg}(\pi/2-\alpha)}{\sin(\pi/2+\alpha)\text{ctg}(\pi/2-\alpha)\text{tg}(\pi/2+\alpha)}=$$

$$=\frac{-\text{tg}\alpha(-\cos\alpha)\text{ctg}\alpha}{\cos\alpha\cdot\text{tg}\alpha(-\text{ctg}\alpha)}=-1.$$

Відповідь: -1.

Приклад 8.5. Доведемо тотожність

$$\sin\alpha\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{4}.$$

Розв'язання. Спочатку винесемо спільний множник $\sin\alpha\cos\alpha$ за дужки, а далі треба скористатися формулами подвійного кута. Отримаємо

$$\sin\alpha\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\sin 4\alpha}{4}$.

Приклад 8.6. Визначимо $\text{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ і $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

Розв'язання. Оскільки $\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, треба обчислити $\sin\alpha$. Кут α належить четвертій чверті, тому $\sin\alpha<0$. Обчислимо $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{5}}=-\sqrt{\frac{4}{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Знайдемо $\text{tg}\alpha$:

$$\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{2}{\sqrt{5}}:\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{1}=-2.$$

Відповідь: -2.

Приклад 8.7. Розв'яжемо рівняння $3\cos x+2\sin^2 x=0$.

Розв'язання:

$$3\cos x+2(1-\cos^2 x)=0;\quad 2\cos^2 x-3\cos x-1=0.$$

Позначивши $\cos x = t$, отримаємо квадратне рівняння $2t^2 - 3t - 1 = 0$, коренями якого є $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Повернемось до заміни й розв'яжемо одержані рівняння:

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 2, \quad x \in \varnothing.$$

Відповідь: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 8.8. Розв'яжемо рівняння

$$\sin 2x + \sin x - \sqrt{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою подвійного кута для синуса:

$$2\sin x\cos x + \sin x - \sqrt{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Винесемо спільний множник за дужки в першому й другому та третьому й четвертому доданках відповідно:

$$\sin x(2\cos x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(2\cos x + 1) = 0.$$

Знову винесемо отриманий спільний множник за дужки:

$$(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2})(2\cos x + 1) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \\ x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 8.9. Розв'яжемо рівняння

$$\sin^2 x + 5\sin x\cos x = 6\cos^2 x.$$

Розв'язання. Оскільки $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$, можна поділити обидві частини рівняння на $\cos^2 x$. Отримаємо таке рівняння: $\mathrm{tg}^2 x + 5\mathrm{tg} x - 6 = 0$. Позначимо $\mathrm{tg} x = t$, тоді маємо квадратне рівняння $t^2 + 5t - 6 = 0$, коренями якого є $t_1 = -6$, $t_2 = 1$. Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg} x = -6, \\ \mathrm{tg} x = 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\mathrm{arctg} 6 + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad n, k \in Z \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\mathrm{arctg} 6 + \pi n,$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 8.10. Розв'яжемо нерівність $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для розв'язання найпростішого тригонометричного рівняння, звідки випливає, що множина рішень цієї нерівності має такий вигляд:

$$x \in (-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n; \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n);$$

$$x \in (-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n) \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Відповідь: $x \in (-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n) \ \ (n \in \mathbb{Z})$.

Приклад 8.11. Розв'яжемо нерівність $\mathrm{tg} x < -1$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для розв'язання найпростішого тригонометричного рівняння:

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \mathrm{arctg}(-1) + \pi n), n \in Z.$$

Таким чином, $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 8.12. Розв'яжемо нерівність $\sin(x-1) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. З формули для розв'язання найпростішого тригонометричного рівняння випливає така подвійна нерівність:

$$-\pi-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n\le x-1\le\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$-\pi+\frac{\pi}{3}+2\pi n\le x-1\le-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le x-1\le-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Остаточно маємо

$$1-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le x\le 1-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x\in[1-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; 1-\frac{\pi}{3}+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$.

8.7. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. Знайти значення виразу

$$2\sin^2 2\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2\cos^2 2\alpha,$$

якщо $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
5	$2+\sqrt{3}$	3	$2-\sqrt{3}$	1

Задача 8.2. Обчислити вираз $\sin(\pi-2\alpha)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$.

Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\sin 2\alpha$	1	$3\cos 2\alpha$	3	0

Задача 8.3. Розв'язати рівняння

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin x+\sin 5x.$$

Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$	$x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$x=\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$ $k,n\in\mathbb{Z}$

Задача 8.4. Розв'язати рівняння $\sin 2x+\sin x=2\cos\frac{x}{2}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$	0	$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$	$x=\pm\pi+4\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$, $k,n\in\mathbb{Z}$

Задача 8.5. Розв'язати рівняння $2\cos^2 6x-5\sin 6x+1=0$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$	$x=(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$x=\pm\pi+4\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$, $k,n\in\mathbb{Z}$	0

Задача 8.6. Розв'язати рівняння $2\cos x-\cos 2x=1$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi+\pi k$, $x=2\pi n$, $k,n\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi n}{4}$, $x=\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=2\pi n$, $k,n\in\mathbb{Z}$	$x=\pm\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

Задача 8.7. Розв'язати рівняння

$$\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}.$$

Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А	Б	В	Г	Д
$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$	0	$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$

Задача 8.8. Розв'язати нерівність $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А. $\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$; $n\in\mathbb{Z}$.

Б. $\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

В. $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Г. $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 8.9. Розв'язати нерівність $\cos x\le\frac{1}{2}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А. $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Б. $\left[2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

В. $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Г. $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 8.10. Розв’язати нерівність $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А. $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
Б. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
В. $\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\frac{7\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
Г. $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 8.11. Розв’язати нерівність $\mathrm{tg}x<\sqrt{3}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А. $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
Б. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
В. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
Г. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача 8.12. Розв’язати нерівність $\mathrm{ctg}x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Вибрати правильну відповідь серед наведених:

А. $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
Б. $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi n;\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
В. $\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
Г. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Адаптаційний курс елементарної математики : навч. посіб. / О. Г. Ніколаєв, К. П. Барахов, І. В. Брисіна та ін. – Харків : ХАІ, 2011. – 64 с.

Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2019. – 352 с.

Бевз, Г. П. Алгебра : підруч. для 7–9 кл. / Г. П. Бевз. – Київ : Освіта, 1997. – 303 с.

Елементарна математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / К. П. Барахов, І. В. Брисіна, О. В. Головченко та ін. – Харків : ХАІ, 2016. – 196 с.

Збірник задач з математики для вступників до втузів / В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін.; за ред. М. І. Сканаві. – Київ : Вища шк., 1992. – 445 с.

Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА / А. М. Капіносов, Г. В. Гап’юк, Л. І. Кондратьєва та ін. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2019. – 464 с.

Мерзляк, А. Г. Математика. Збірник самостійних робіт і тестів : підруч. для 6 кл. / А. Г. Мерзляк, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2021. – 144 с.

Роганін, О. М. Математика : практ. довід. / О. М. Роганін, О. І. Каплун. – Харків : ФОП Співак Т. К., 2009. – 416 с.

Старова, О. О. Математика. Усі означення і формули : підруч. для 5–11 кл. / О. О. Старова. – Харків : Основа, 2024. – 79 с.

Харік, О. Ю. Зовнішнє оцінювання з математики. Комплексний універсальний довідник / О. Ю. Харік, О. Г. Шаповал, Н. Д. Сімонов. – Харків : Белкар-книга, 2008. – 384 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Драшпуль Наталя Володимирівна,
Кальчук Наталія Леонідівна,
Мураховська Олена Анатоліївна та ін.

МАТЕМАТИКА
Частина 1

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2024
Підписано до видання 29.11.2024
Ум. друк. арк. 9,8. Обл.-вид. арк. 11. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu

Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001