

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

**Р. Е. Пащенко**

**МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ГЕОІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ**

**Частина 1**

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2024

УДК 550.83 :530.182  
П12

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, с.н.с. В. К. Іванов,  
канд. фіз.-мат. наук, с.н.с. О. М. Стадник

**Пащенко, Р. Е.**

П12        Методи нелінійної динаміки в геоінформаційних системах. В 2 ч.  
Ч. 1. Теоретичні основи нелінійної динаміки [Текст] : навч. посіб. /  
Р. Е. Пащенко. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського  
«Харків. авіац. ін-т», 2024. – 204 с.

ISBN 978-966-662-932-9

Подано теоретичні основи нелінійної динаміки. Наведено основні поняття і визначення нелінійної динаміки. Розглянуто основні методи нелінійної динаміки. Особливу увагу приділено фрактальному методу, методу фазової площини і методу перерізів (відображень) Пуанкаре, а також основним поняттям теорій біфуркацій і стійкості. Описано особливості будови біфуркаційної діаграми, можливість визначення константи Фейгенбаума, а також використання показників Ляпунова для визначення стійкості динамічної системи. Наведено основні класичні фрактальні недиференційовні функції та методику будови нових циклоїдальних фрактальних недиференційовних функцій. Викладено основи формування й оброблення фрактальних сигналів із використанням опорних синусоїдальних, ЛЧМ- і КФМ-коливачів.

Для студентів та аспірантів, які навчаються за спеціальностями 193 «Геодезія та землеустрій» спеціалізації «Геоінформаційні системи і технології» та 103 «Науки про Землю» спеціалізації «Космічний моніторинг Землі».

Іл. 158. Табл. 1. Бібліогр. : 74 назви

**УДК 550.83 :530.182**

ISBN 978-966-662-932-9

© Пащенко Р. Е., 2024  
© Національний аерокосмічний  
університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут», 2024

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ.....	6
1.1 Поняття та основні визначення нелінійної динаміки.....	6
1.2 Основні методи нелінійної динаміки.....	23
1.2.1 Метод фрактального аналізу.....	25
1.2.1.1 Поняття фрактала, перетворення подібності й ітерації.....	25
1.2.1.2 Класифікація та правила побудови фракталів.....	29
1.2.1.3 Поняття розмірності.....	39
1.2.1.4 Визначення фрактальної розмірності.....	44
1.2.1.5 Вплив відношення сигнал / шум на величину фрактальної розмірності.....	54
1.2.2 Метод фазової площини.....	57
1.2.2.1 Побудова фазових портретів.....	57
1.2.2.2 Поняття псевдофазової площини.....	67
1.2.2.3 Вплив відношення сигнал / шум на форму фазового портрета.....	71
1.2.3 Метод перерізу Пуанкаре.....	74
1.2.3.1 Поняття дискретного відображення.....	74
1.2.3.2 Метод перерізу (відображень) Пуанкаре.....	88
1.2.3.3 Вплив характеристик сигналів на структуру перерізу Пуанкаре.....	92
1.3 Основні поняття теорій біфуркацій і стійкості.....	94
1.3.1 Основні поняття теорії біфуркацій.....	94
1.3.2 Біфуркаційна діаграма та точка біфуркації.....	103
1.3.3 Універсальність Фейгенбаума.....	110
1.3.4 Стійкість за Лагранжем, Пуассоном та Ляпуновим.....	112
1.3.5 Поняття характеристичних показників Ляпунова.....	116
Запитання для самоперевірки.....	125
2 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ ФРАКТАЛЬНИХ НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ І СИГНАЛІВ.....	129
2.1 Побудова фрактальних недиференційовних функцій.....	129
2.1.1 Структура класичних фрактальних недиференційовних функцій.....	129
2.1.2 Особливості побудови циклоїдальних фрактальних недиференційовних функцій.....	142
2.1.2.1 Властивості звичайної циклоїди.....	143
2.1.2.2 Особливості епіциклоїд і гіпоциклоїд.....	145
2.1.2.3 Подібність і недиференційовність циклоїдальних функцій.....	152

2.1.2.4 Будова циклоїдальних фрактальних недиференційовних функцій.....	156
2.2 Основи формування та оброблення фрактальних сигналів....	158
2.2.1 Методика побудови фрактальних сигналів.....	158
2.2.2 Формування фрактальних сигналів із використанням опорних синусоїдальних, ЛЧМ- та КФМ-коливачів.....	160
2.2.2.1 Побудова фрактальних сигналів із використанням опорного синусоїдального коливача....	160
2.2.2.2 Формування фрактального сигналу з використанням опорного ЛЧМ-коливача.....	164
2.2.2.3 Застосування КФМ-коливача під час формування фрактального сигналу.....	171
2.2.2.4 Формування КФМ фрактального сигналу на основі послідовності Морсе – Туе.....	175
2.2.2.5 Фрактальні сигнали в теорії коливачів і теорії хаосу.....	181
2.2.3 Основи оброблення фрактальних сигналів.....	183
2.2.3.1 Фільтрація фрактального сигналу, що формується на основі опорного синусоїдального коливача.....	183
2.2.3.2 Багатоканальна фільтрація фрактального сигналу, що формується з використанням опорного ЛЧМ-коливача.....	185
2.2.3.3 Фільтрове оброблення сумарної послідовності Морсе – Туе.....	189
2.2.4 Оцінювання ефективності фрактальних сигналів під час впливу перешкод від земної поверхні.....	190
2.2.4.1 Оцінювання відношення сигнал / перешкода під час використання фрактальних сигналів, сформованих на основі простого синусоїдального коливача.....	190
2.2.4.2 Оцінювання ефективності фрактального сигналу, що формується на основі опорного ЛЧМ-коливача, під час селекції об'єктів.....	194
Запитання для самоперевірки.....	196
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....	199

## ПЕРЕДМОВА

Дослідження Землі та її геосфер зазвичай базуються на експериментальних геофізичних даних (геофізичних сигналах), тому для їх аналізу необхідні сучасні методи оброблення. Поряд із традиційними методами геофізичних досліджень (гравітаційним, магнітним, сейсмічним, електричним та ін.) для аналізу геофізичних сигналів більшого поширення почали набувати методи нелінійної динаміки (фрактальний, фазової площини та ін.). Такі методи також використовують для аналізу власного або відбитого електромагнітного випромінювання природних об'єктів, утворень або природних явищ за допомогою певних технічних засобів, які встановлюються на аерокосмічних носіях (засобах дистанційного зондування Землі).

Сигнали, відбиті від земної поверхні, не є монохроматичним, а містять цілий спектр частот, які відповідають спектру радіальних швидкостей різних елементарних розсіювачів. Різниця між частотами спектра виявляється у вигляді флуктуацій результативного сигналу. Це обумовлено переміщенням технічних засобів і рухом відбивачів один до одного (наприклад, радіолокаційна станція рухається з певною швидкістю або розсіювачі переміщуються й обертаються під впливом вітру), тобто амплітуда і фаза кожного елементарного сигналу змінюються в часі. Унаслідок цього відбуваються модуляції випромінюваних коливань, що залежать від зміни відстані до відбивача, зміни коефіцієнта підсилення антени в напрямку на окремий відбивач і величини ефективної площі відбивача під час зміни напрямку опромінювання і приймання. Зміна фази під час відносного переміщення технічного засобу і відбивача приводить до появи доплерівського зрушення частоти відбитого сигналу. Відбитий сигнал можна розглядати як випадкову фрактальну криву. Для моделювання таких сигналів все частіше використовують фрактальні недиференційовні функції та фрактальні сигнали, а для якісного та кількісного оцінювання їх складності застосовують методи нелінійної динаміки.

Комплексне використання методів геофізичних досліджень і методів нелінійної динаміки спрямовано на встановлення механізму взаємодії та взаємовпливу всіх геосфер Землі для ефективного керування природними процесами, раціонального їх використання з метою забезпечення розвитку різних галузей господарства й охорони навколишнього середовища.

Навчальний посібник складається з двох частин (частини 1 «Теоретичні основи нелінійної динаміки» і частини 2 «Застосування методів нелінійної динаміки під час досліджень Землі та її геосфер»), які охоплюють основний теоретичний матеріал таких навчальних дисциплін, як «Методологія і методи досліджень Землі та її геосфер» і «Методи нелінійної динаміки в геоінформаційних системах», що викладаються студентам та аспірантам.

# 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ

## 1.1 Поняття та основні визначення нелінійної динаміки

**Нелінійна динаміка** – розділ сучасної математики (міждисциплінарна наука), що займається дослідженням нелінійних динамічних систем. У нелінійній динаміці для опису систем використовують нелінійні моделі, що зазвичай описуються диференціальними рівняннями і дискретними відображеннями. Найбільш докладно основні положення нелінійної динаміки опубліковано в роботах [1–8].

**Динамічною системою** вважають систему будь-якої природи (фізичну, хімічну, біологічну, соціальну, економічну тощо), стан якої змінюється (дискретно або безперервно) у часі.

Геометричне подання нелінійної функції – це крива на площині, викривлена поверхня або гіперповерхня в просторі, одержана внаслідок трьох або більшої кількості вимірювань. На однакові прирости незалежної змінної та сама нелінійна функція реагує по-різному залежно від того, до якого значення незалежної змінної додається приріст.

Нелінійна функція майже не залежить від зміни одних і має підвищену чутливість до зміни інших значень незалежної змінної функції. Такою особливістю нелінійна функція значно відрізняється від лінійних функцій. Будь-яка лінійна функція реагує на приріст незалежної змінної тим самим зростанням свого значення. Цей приріст здійснюється в будь-якій частині області визначення значення незалежної змінної.

Для демонстрації відмінностей лінійних і нелінійних функцій використовують простий приклад (випробування). Кульку, підвішену на нитці, відхиляють від вертикалі та відпускають, унаслідок чого виникають коливання. Якщо кульку відхилили на невелику відстань, то її рух описується лінійними рівняннями. Якщо відхилення досить велике – рівняння будуть уже нелійними. При цьому в лінійній функції частота коливань (і, відповідно, період) не залежить від рівня початкового відхилення, а в нелінійній така залежність є. Повним аналогом механічного маятника як коливальної системи є електричний коливальний контур, або електричний маятник.

Простий коливальний контур (електричний маятник) складається з котушки індуктивності  $L$ , конденсатора (ємності)  $C$  і резистора (опору)  $R$ . Якщо всі три вказані елементи лінійні, то коливання в контурі еквівалентні коливанням лінійного маятника (рисунок 1.1, а).

Однак якщо, наприклад, ємність нелінійна (роль нелінійної ємності може виконувати р-п-перехід діода  $D$ ), то період коливань буде залежати від їх амплітуди (рисунок 1.1, б).

Динаміка коливального контуру визначається двома змінними, наприклад струмом у контурі та напругою на ємності. Якщо відкласти ці

величини вздовж осей  $X$  і  $Y$ , то кожному стану системи відповідатиме певна точка на отриманій координатній площині. Таку площину називають **фазовою площиною**. Таким чином, якщо динамічна система визначається  $n$  змінними, то замість двовимірної фазової площини їй можна поставити у відповідність  $n$ -вимірний фазовий простір.

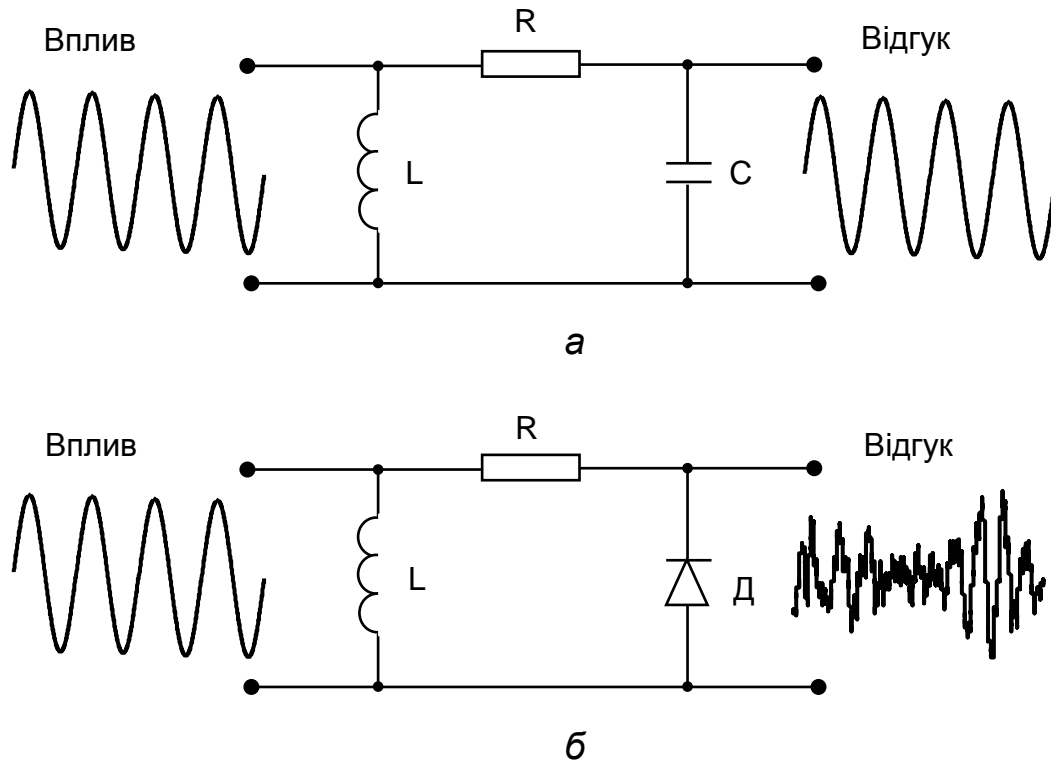


Рисунок 1.1 – Реакція коливального контуру на зовнішній періодичний сигнал: *а* – періодичний відгук лінійного контуру; *б* – хаотичний відгук нелінійного контуру

Рух динамічної системи можна зобразити як траєкторію на фазовій площині, де осі  $X$  і  $Y$  – узагальнена координата й імпульс частинки відповідно.

На рисунку 1.2, *а* показано згасальні коливання маятника на фазовій площині. Траєкторії збігаються в одній точці, що відповідає положенню рівноваги – повній зупинці маятника.

На рисунку 1.2, *б* показано рух динамічної системи під час періодичних автоколивань. Усі траєкторії наближаються до граничного циклу – замкнутої кривої, що відповідає сталому процесу.

Почнемо впливати на маятники зовнішнім періодичним сигналом. Реакції лінійної та нелінійної систем будуть різними. У першому випадку поступово встановляться регулярні періодичні коливання з тією самою частотою, що і частота сигналу, яка впливає. На фазовій площині такому руху відповідає замкнута крива, названа **атрактором** (to attract – притягати), а також безліч траєкторій, що характеризують сталий процес.

Через нелінійний маятник можуть виникнути складні неперіодичні коливання, коли траєкторія на фазовій площині не замкнеться за будь-який проміжок часу. При цьому поведінка детермінованої системи зовні нагадуватиме абсолютно випадковий процес – це і є явище динамічного, або детермінованого, хаосу.

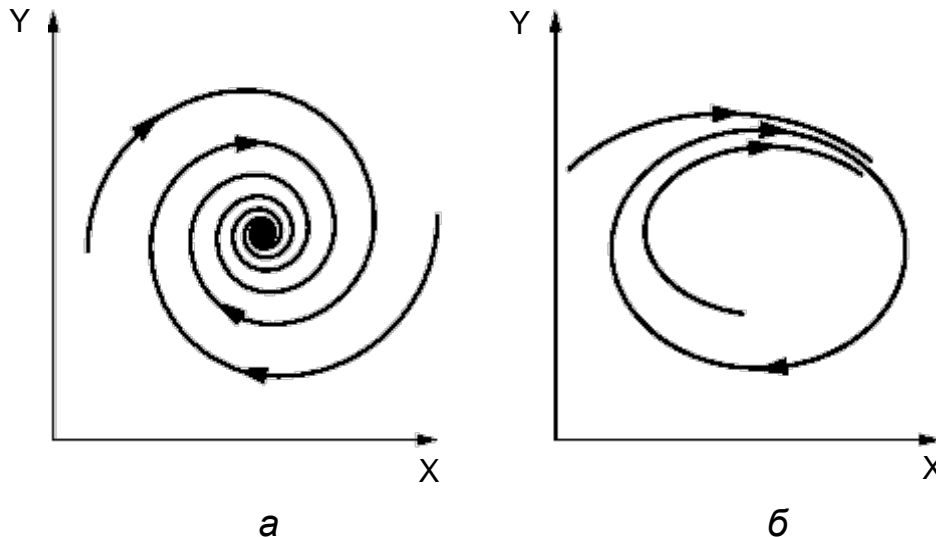


Рисунок 1.2 – Рух динамічної системи на фазовій площині:  
 а – згасальні коливання маятника; б – періодичні автоколивання

Для дослідження нелінійної динамічної системи часто використовується автогенератор, що описується нелінійним диференціальним **рівнянням ван дер Поля** (генератор ван дер Поля) [9]. До складу такого генератора входять: дисипативна коливальна система, нелінійний елемент (лампа, транзистор) і коло зворотного зв'язку. Зі збільшенням амплітуди коливань (через наявність нелінійності в генераторі) енергія, що надходить у коливальну систему, зменшується, і за певної амплітуди коливань порівнюється з втратами, це спричиняє динамічну рівновагу енергій у генераторі і, як наслідок, вихід генератора на граничний цикл. Слід зазначити, що якщо в системі немає станів рівноваги, то в ній не може бути і граничних циклів, або якщо єдиний стан рівноваги є сідлом, то граничних циклів теж немає.

Рівняння ван дер Поля має такий вигляд:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \gamma[1 - \beta x^2(t)] \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0. \quad (1.1)$$

Таке рівняння є основною моделлю автоколивань з одним ступенем свободи. У цьому рівнянні величина параметра  $\gamma$  показує ступінь (наскільки сильне) збудження генератора (якщо  $\gamma < 0$ , то умови самозбудження не виконано), а величина  $\beta$  характеризує амплітуду автоколивань; чим менша  $\beta$ , тим більшою є амплітуда. Частота  $\omega$  є



власною частотою генератора. На рисунку 1.3 наведено коливання генератора ван дер Поля (а) та його фазовий портрет (б), якщо  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 1$  і  $\omega = 1$ .

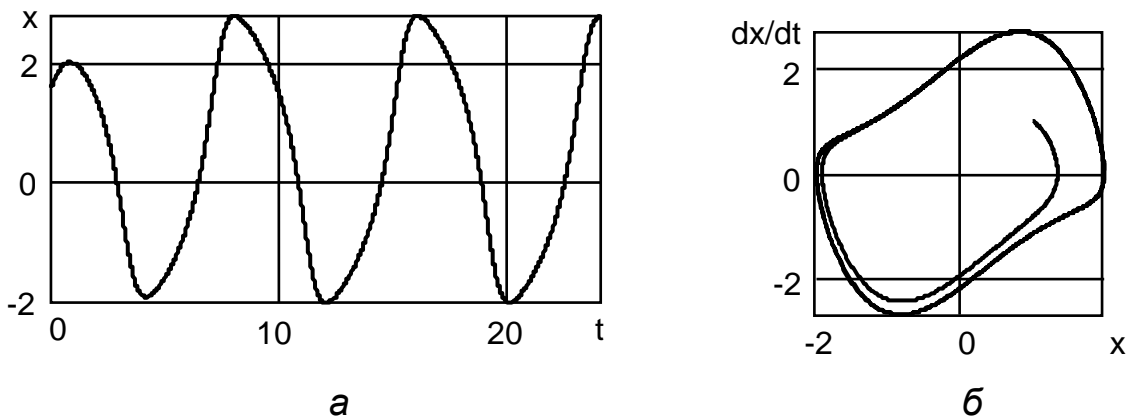


Рисунок 1.3 – Коливання генератора ван дер Поля (а) та його фазовий портрет (б)

Як видно на рисунку 1.3, коливання генератора ван дер Поля відрізняються від синусоїдальних коливань, але за деякий час автоколивання стають сталими.

У безрозмірних змінних вираз (1.1) подається так:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \mu[1 - x^2(t)]\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0. \quad (1.2)$$

Величина  $\mu$  характеризує величину нелінійності в системі таким чином: чим більша нелінійність у системі, тим більша форма коливань у ній відрізняється від синусоїдальної. За умови негативних значень  $\mu < 0$  у системі спостерігається утворення особливої точки типу стійкий вузол. Стійкий граничний цикл утворюється за подальшого збільшення значення  $\mu < 0$ . Коли  $\mu = 0$ , система стає лінійною консервативною. Збільшення  $\mu$  до додатних значень ( $\mu > 0$ ) спричиняє втрату стійкості, унаслідок чого утворюється особлива точка типу нестійкий фокус. Подальше збільшення  $\mu > 0$  веде до утворення нестійкого граничного циклу. За умови великих значень  $\mu$  форма коливань може істотно відрізнитися від синусоїдальної.

Рівняння ван дер Поля з правою частиною дає змогу спостерігати автоколивальний режим роботи системи. У разі такого рівняння вираз (1.2) перетвориться на такий [8]:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \mu[1 - x^2(t)]\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = A\cos(\omega_0 t), \quad (1.3)$$

де  $A$  – амплітуда;  $\omega_0$  – частота правої частини рівняння.

На рисунку 1.4 наведено коливання генератора ван дер Поля з правою частиною (а) та його фазовий портрет (б), якщо  $A = 1$  і  $\omega_0 = 0,5$ .

Як видно на рисунку 1.4, коливання генератора ван дер Поля з правою частиною відрізняються тим, що наявна модуляція вихідних коливань, яка призводить до ускладнення сигналу, а це ускладнення – до ускладнення форми фазового портрета.

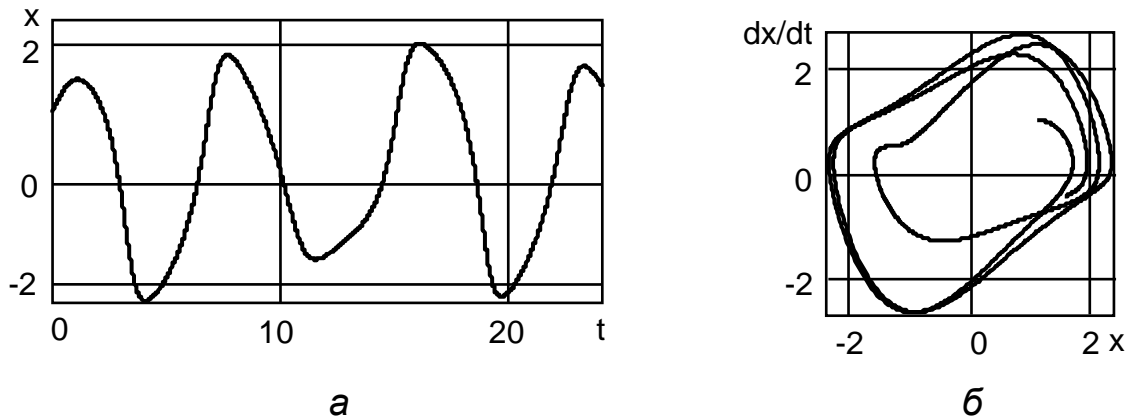


Рисунок 1.4 – Коливання генератора ван дер Поля із правою частиною (а) та його фазовий портрет (б)

Через нелінійний маятник можуть виникнути складні неперіодичні коливання, коли траєкторія на фазовій площині не замкнеться протягом тривалого часу. При цьому поведінка детермінованої системи зовні нагадуватиме абсолютно випадковий процес – це і є явище **динамічного, або детермінованого, хаосу**.

Образ хаосу у фазовому просторі – хаотичний атрактор – має дуже складну структуру, яку називають фракталом. Через незвичність властивостей його називають також **дивним атрактором**.

Першу з динамічних систем із дивним атрактором було запропоновано як модель турбулентності в 1963 році американським метеорологом Едвардом Лоренцом [8]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1.4)$$

якщо параметри системи рівнянь  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  мають такі значення:  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ .

У **моделі Лоренца** наявні три невідомі функції  $x(t)$ ,  $y(t)$  і  $z(t)$ , а також декілька параметрів. Головним є параметр  $r$ . Якщо поступово змінювати цей параметр, динамічна система буде змінювати тип свого атрактора. За одних значень параметра  $r$  система буде мати стійку граничну точку, а за інших значень (більше деякого біфуркаційного значення  $r^*$ ) – непередбачуваний розв'язок.

Лоренц вивів свої рівняння для моделювання руху рідини в запаяній трубці (рисунок 1.5). Невідомі функції  $x(t)$ ,  $y(t)$  і  $z(t)$  є гідродинамічними параметрами, які характеризують рух рідини. Біфуркаційний параметр  $r$  має сенс числа Релея. Якщо трубка підігрівається знизу, то температура рідини збільшуватиметься, що відповідає збільшенню параметра  $r$ .

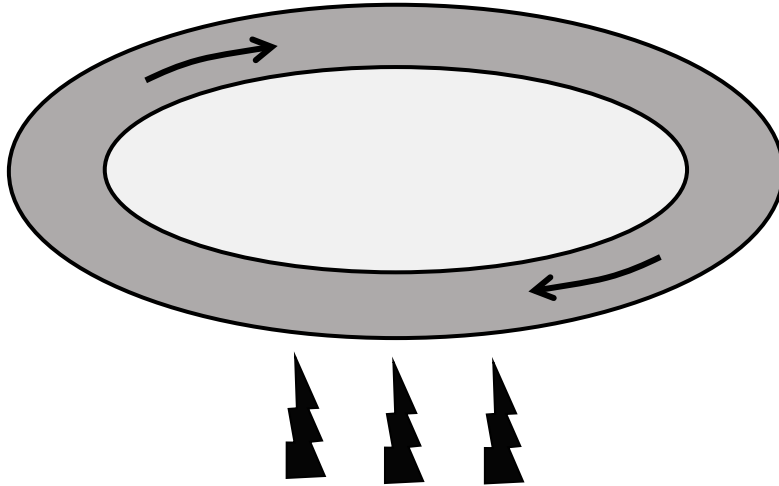


Рисунок 1.5 – Спрощена фізична модель системи Лоренца

За деякого градієнта температур у трубці встановиться конвективний рух рідини. Рідина почне рухатися в яку-небудь сторону по трубці. Тепла рідина спливатиме, а холодна – сходитиме вниз. Якщо градієнт температур невеликий, то конвекція буде ламінарною, тобто протікати із постійною швидкістю. Такому ламінарному режиму конвекції відповідає стійкий вузол розв'язку системи Лоренца.

На рисунку 1.6, а наведено розв'язок системи рівнянь Лоренца  $(x, y, z)$ , якщо  $\sigma = 10$ ,  $r = 10$ ,  $b = 8/3$ , а на рисунку 1.6, б – його фазові портрети  $(x, y; z, y; z, x)$ .

На рисунку 1.7 наведено атрактор системи Лоренца у тривимірному просторі. Незалежно від початкових умов після короткого періоду релаксації система переходить у стаціонарний стан, що описує ламінарний режим конвекції, тобто постійну швидкість циркуляції рідини по трубці. Як видно на рисунках 1.6, б і 1.7, у фазовому просторі спостерігається фокус, якщо  $r = 10$ .

Розв'язок системи рівнянь Лоренца для значення параметра  $r$ , що перевищує біфуркаційне, на вигляд майже ідентичний класичному випадковому процесу. На рисунку 1.8, а наведено розв'язок системи рівнянь Лоренца  $(x, y, z)$ , якщо  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ , а на рисунку 1.8, б – його фазові портрети  $(x, y; z, y; z, x)$ . На рисунку 1.9 наведено дивний атрактор системи Лоренца в тривимірному просторі.

У фазовому просторі дивний атрактор Лоренца має топологію деякого клубка траєкторій, у межах якого можна виділити дві області. У кожен момент часу розв'язок буде в одній із цих областей, причому зміна станів системи в одну або іншу область є абсолютно непередбачуваною.

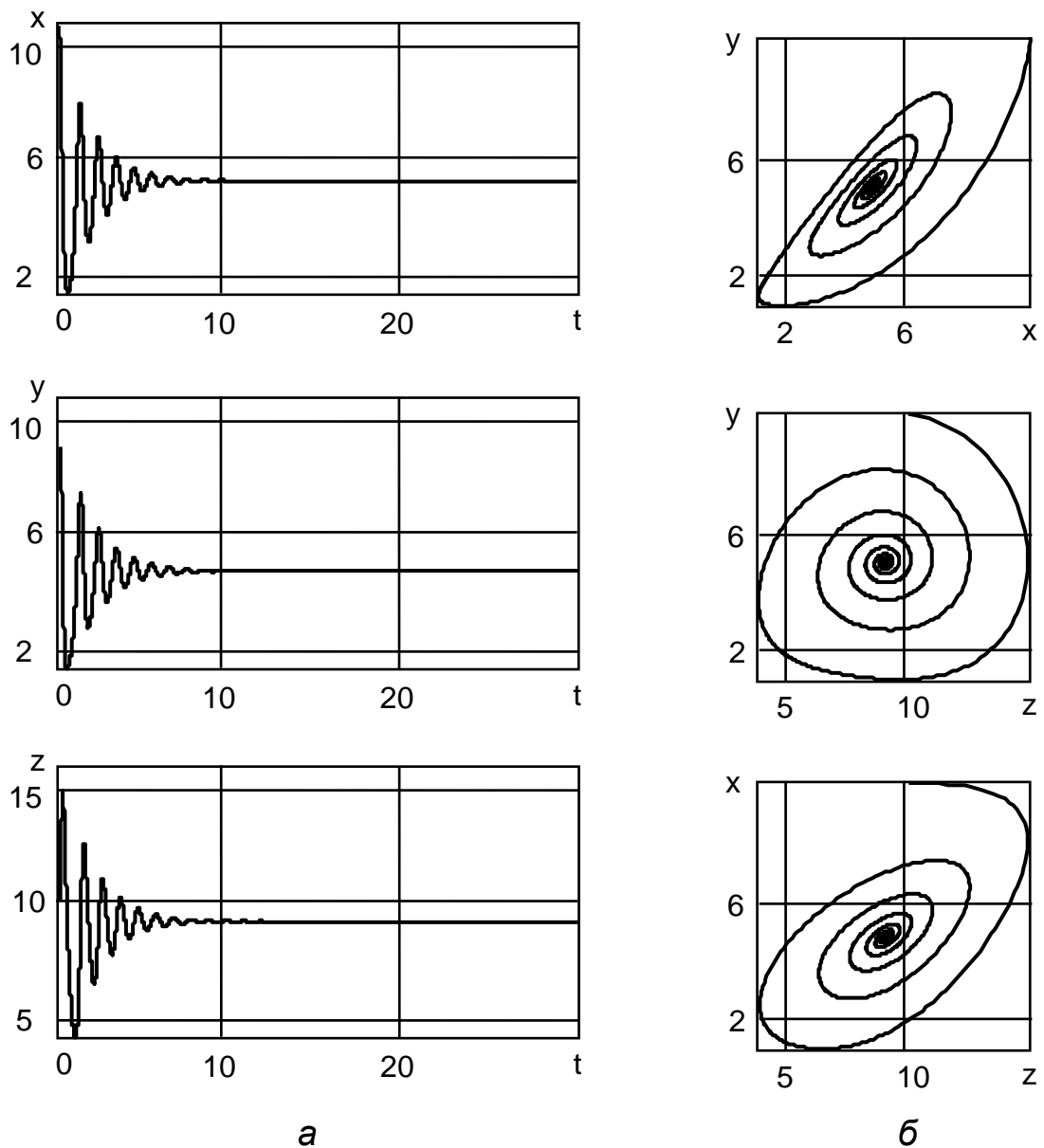


Рисунок 1.6 – Розв'язок системи рівнянь Лоренца (а), якщо  $\sigma = 10$ ,  $r = 10$ ,  $b = 8/3$  та його фазові портрети (б)

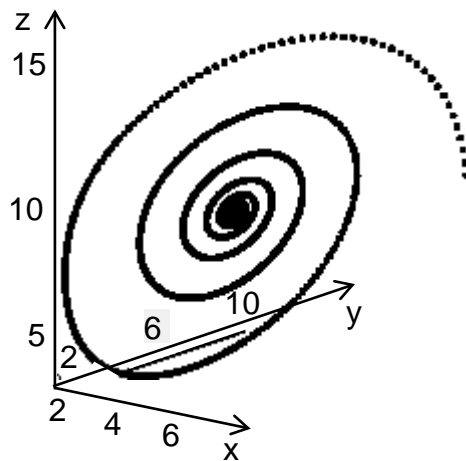


Рисунок 1.7 – Атрактор системи Лоренца

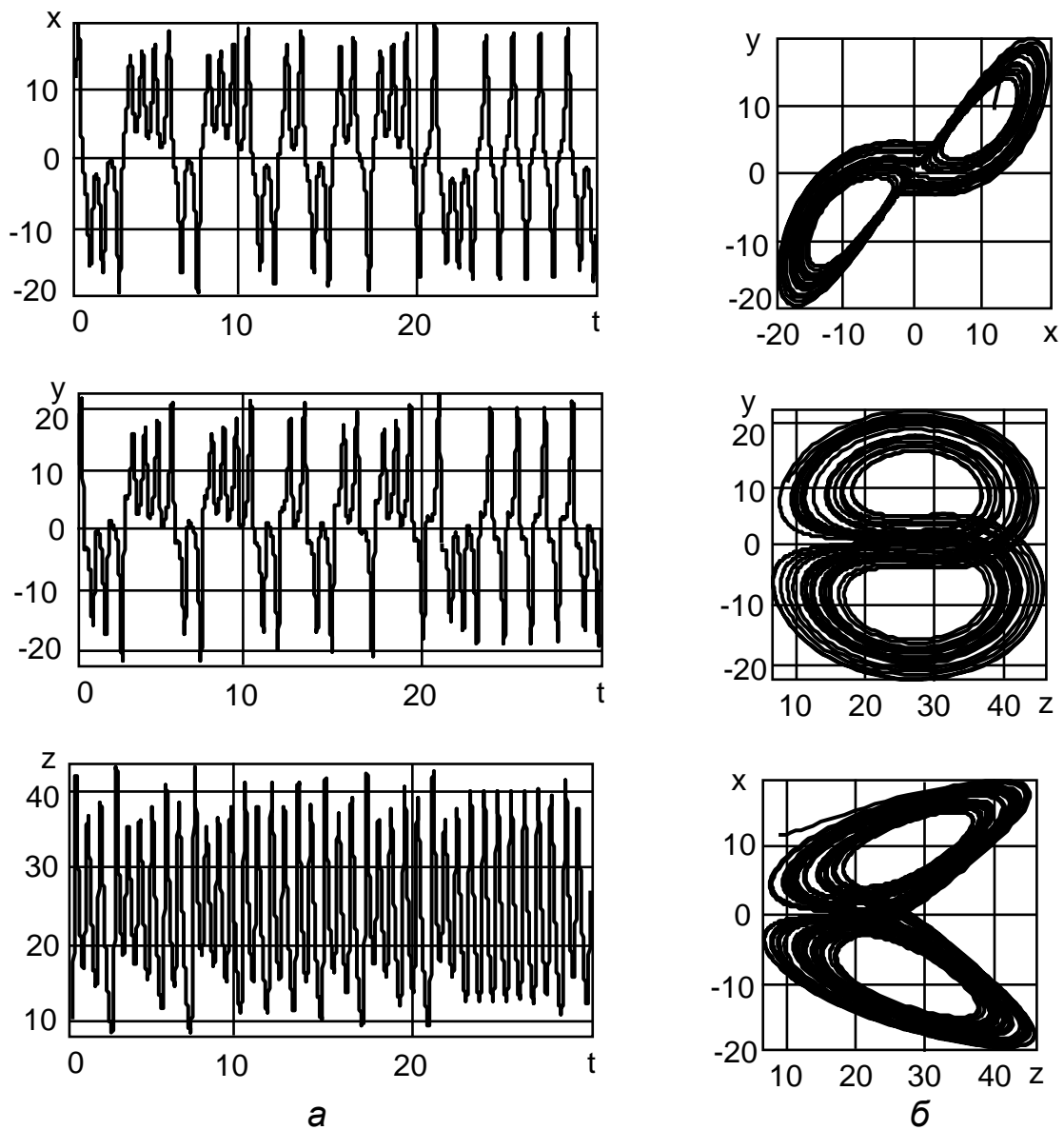


Рисунок 1.8 – Розв'язок системи рівнянь Лоренца (а), якщо  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$  та його фазові портрети (б)

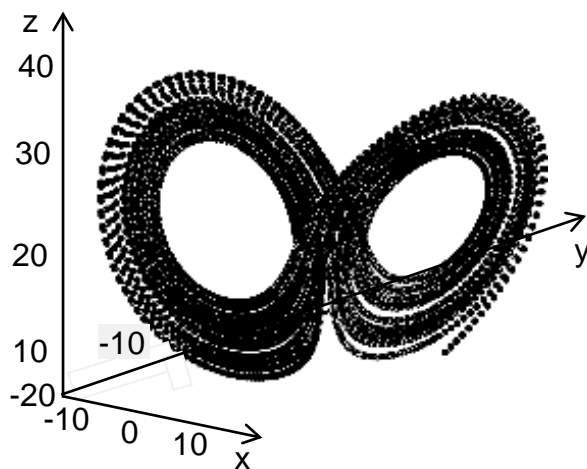


Рисунок 1.9 – Дивний атрактор системи Лоренца

**Динамо Рикітаке.** Багато моделей відомого в геофізиці явища – генерації магнітного поля Землі – пов'язано з ідеєю магнітного динамо. Будова такої моделі базується на гіпотезі залізного ядра, розігріванні його речовини до розплавленого малов'язкого стану завдяки теплу, що виділяється під час розпаду радіоактивних елементів, конвекції речовини в зовнішньому ядрі, захоплення конвективним потоком неземного магнітного поля і його посилення. Одна з моделей магнітогідродинамічної теорії земного динамо – модель Рикітаке, що описує систему з двох сполучених дисків динамо (рисунок 1.10). На їх вали діє постійний момент сили. У динамо з двома взаємозв'язаними дисками струм з однієї котушки диска переходить в іншу, проводить збудження другого диска і навпаки. У певний момент у системі відбувається збій, унаслідок чого поведінка системи стає непередбачуваною [27].

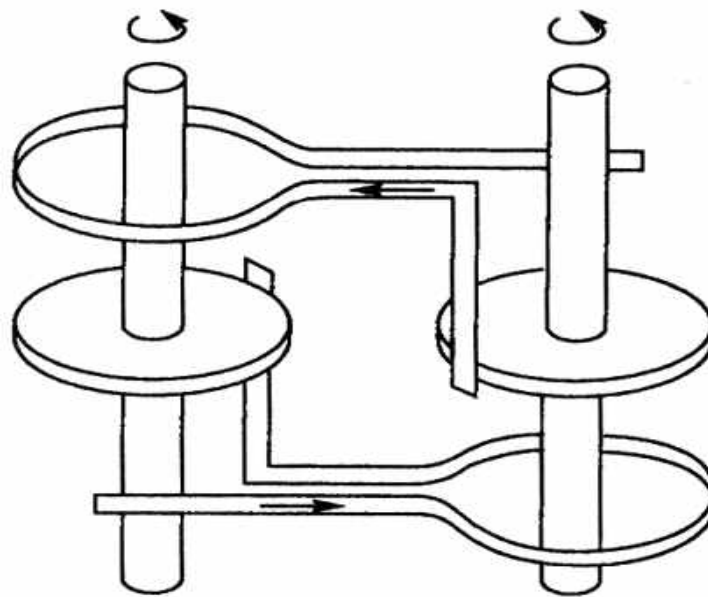


Рисунок 1.10 – Динамо Рикітаке

Динамічна система для моделювання непередбачуваного перевороту магнітного поля Землі, запропонована Рикітаке, описується системою диференціальних рівнянь [27]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -gx + yz, \\
 \dot{y} &= -gx + xw, \\
 \dot{z} &= 1 - xy - \sigma_1 z, \\
 \dot{w} &= 1 - xy + \sigma_2 w,
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

де  $x$  і  $y$  – безрозмірні струми;  $z$  і  $w$  – безрозмірні кутові швидкості дисків;  $g$  – коефіцієнт омичної дисипації;  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  – коефіцієнти тертя.

На рисунку 1.11 наведено розв'язок системи рівнянь Рикітаке ( $x, y, z, w$ ), якщо  $g = 1,1$ ;  $\sigma_1 = 0,0022$ ;  $\sigma_2 = 0,002$ .

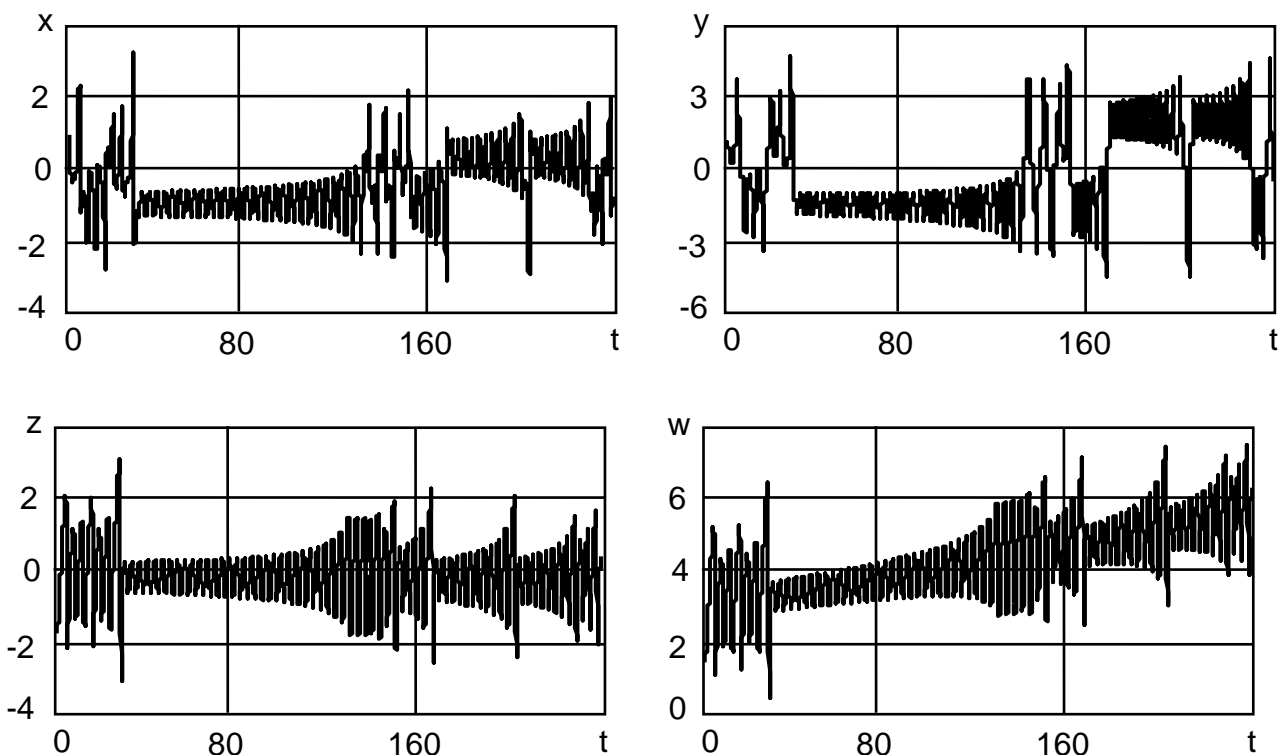


Рисунок 1.11 – Розв'язок системи рівнянь Рикітаке, якщо  $r = 1,1$ ;  $\sigma_1 = 0,0022$ ;  $\sigma_2 = 0,002$ .

На рисунку 1.12 наведено фазові портрети  $(x, y; z, y; z, x; w, x; w, y; w, z)$  системи рівнянь Рикітаке, а на рисунку 1.13 – дивні атрактори динамо Рикітаке у тривимірному просторі.

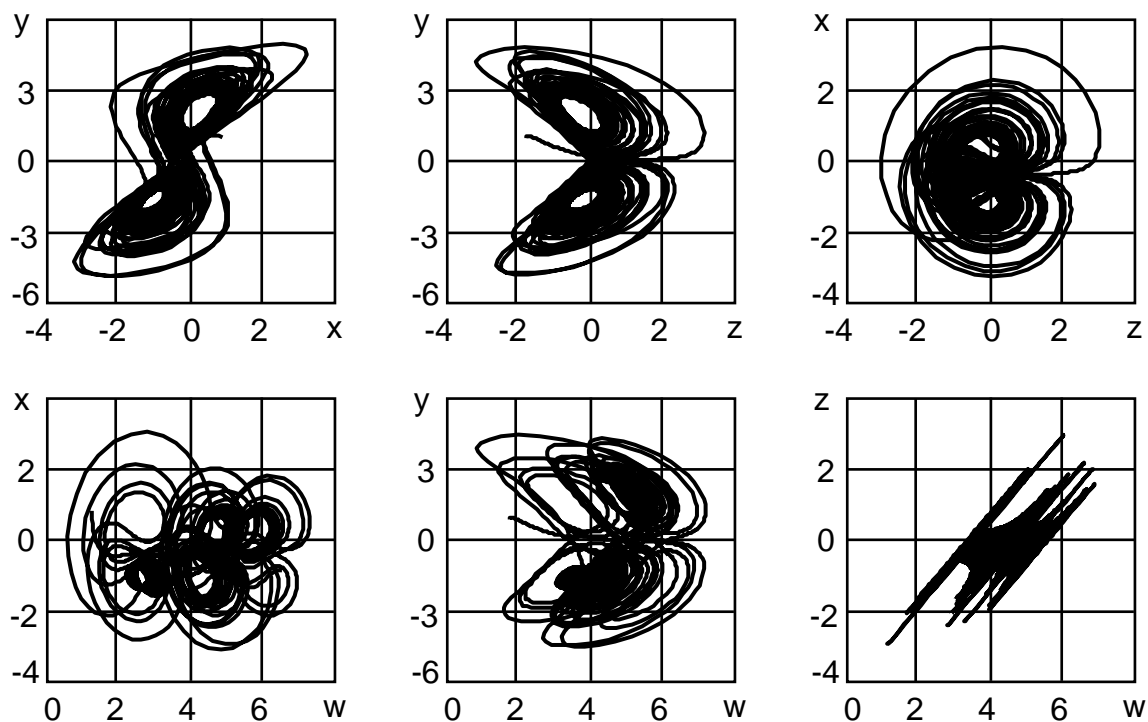


Рисунок 1.12 – Фазові портрети системи рівнянь Рикітаке

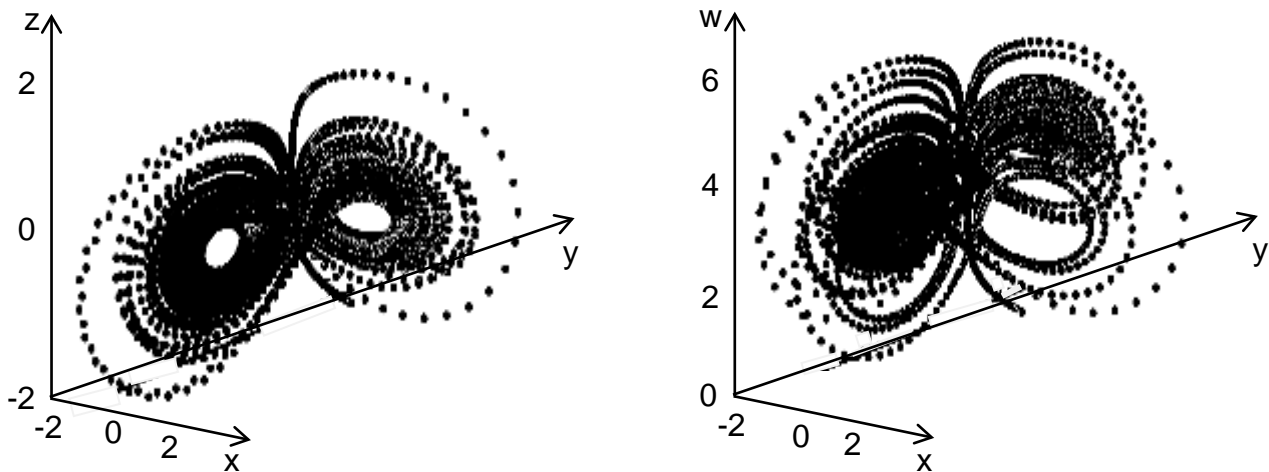


Рисунок 1.13 – Дивні атрактори динамо Рикітаке

Як видно на рисунках 1.11–1.13, динамо Рикітаке в чомусь є схожим на систему Лоренца (див. рисунки 1.8 і 1.9), але це абсолютно різні системи, що описують різні фізичні процеси.

**Система диференціальних рівнянь Реслера.** У 1976 році Отто Реслер представив тривимірну модель динаміки хімічних реакцій, що відбуваються в деякій суміші з перемішуванням. Хаотичний атрактор будується як розв'язок системи диференціальних рівнянь Реслера [8]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{aligned} \quad (1.6)$$

де  $a, b, c$  – додатні постійні.

Якщо значення параметрів дорівнюють  $a = b = 0,2$  і  $2,6 < c < 4,2$ , то розв'язок системи рівняння Реслера має стійкий граничний цикл. За таких значень параметрів у системі відбувається каскад подвоєння періоду.

Якщо  $c > 4,2$ , то виникає хаотичний атрактор. Чітко визначені лінії граничних циклів «розпливаються» і заповнюють фазовий простір нескінченною безліччю траєкторій, що мають властивості фрактала.

На рисунку 1.14, а наведено розв'язок системи рівнянь Реслера  $(x, y, z)$ , якщо  $a = 0,2$ ;  $b = 0,2$ ;  $c = 5,7$  (для таких постійних систему вивчав сам Реслер), а на рисунку 1.14, б – його фазові портрети  $(x, y; z, y; z, x)$ . На рисунку 1.15 наведено атрактор системи Реслера в тривимірному просторі.

Поведінка атрактора Реслера сильно залежить від значень постійних параметрів. Зміна кожного параметра дає певний ефект, унаслідок чого в системі може виникнути стійка нерухома точка, граничний цикл або розв'язки системи стануть наближатися до нескінченності.



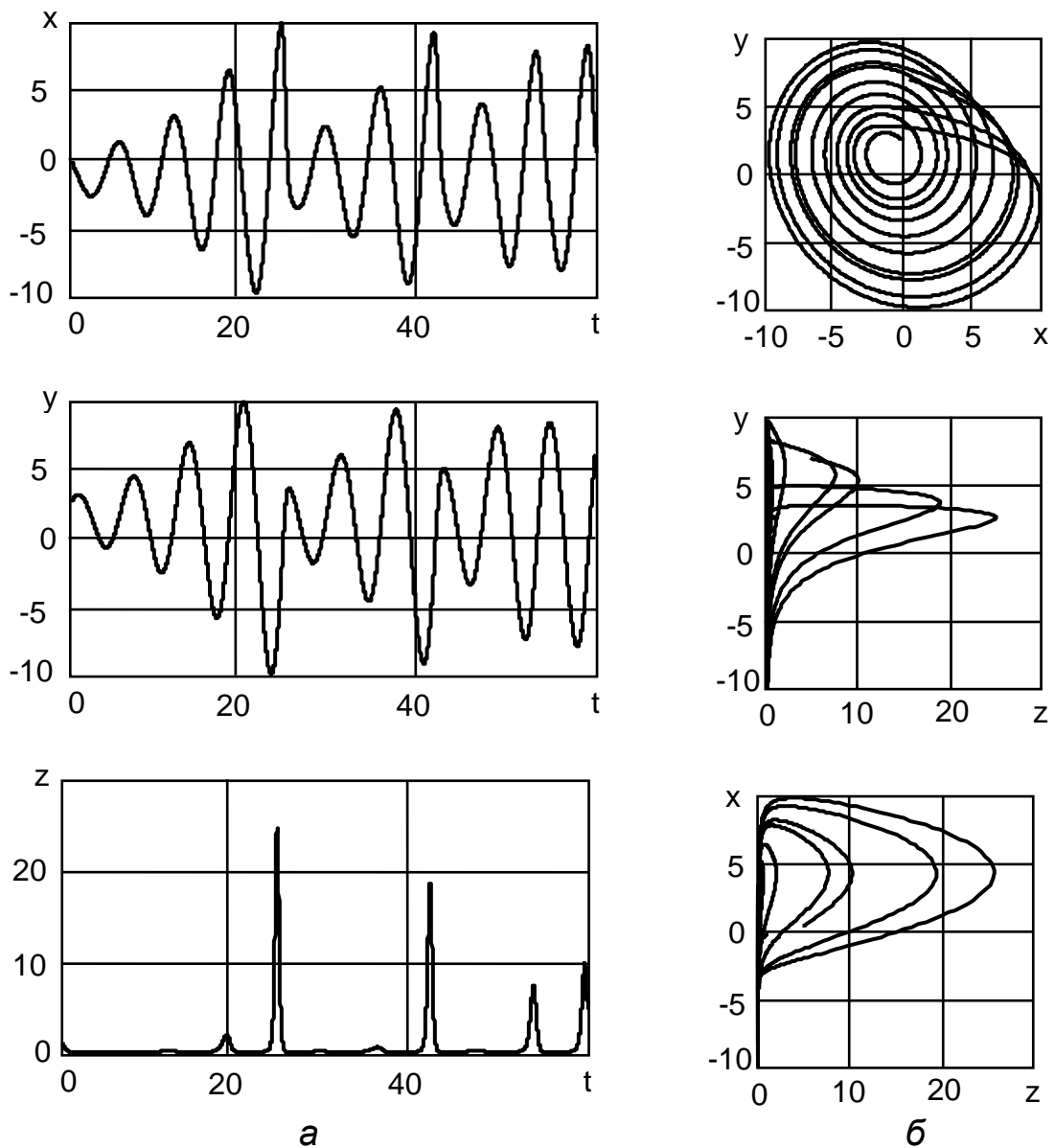


Рисунок 1.14 – Розв'язок системи рівнянь Реслера (а), якщо  $a = 0,2$ ;  $b = 0,2$ ;  $c = 5,7$ , та його фазові портрети (б)

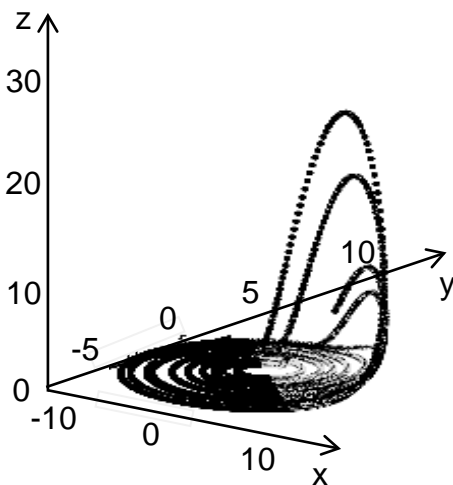


Рисунок 1.15 – Дивний аттрактор системи Реслера

На рисунку 1.15 видно, що фазові траєкторії на атракторі Реслера не перетинають самі себе. Поверхні, що створюють дивний атрактор, поділяються на окремі шари, створюючи нескінченну безліч поверхонь, кожна з яких лежить надзвичайно близько до сусідньої. Для атрактора Реслера характерна фрактальна структура у фазовій площині.

**Осцилятор Дуффінга** – проста одновимірна нелінійна система. Рівняння Дуффінга описує поведінку вимушеного періодичного нелінійного осцилятора зі загасанням (демпфіруванням) [4]:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + f(t) = g(t), \quad (1.7)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт демпфірування;  $f(t)$  – нелінійна поновлювана сила;  $g(t)$  – періодична зовнішня сила періоду  $T$ .

Особливістю осцилятора Дуффінга є можливість отримання хаотичної динаміки (бістабільної поведінки) під дією зовнішньої періодичної сили.

Розглянемо розв'язок рівняння Дуффінга, якщо  $f(t) = \beta x^3$  і  $g(t) = \gamma \cos(\omega t)$ , що показує хаотичну поведінку

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t), \quad (1.8)$$

де  $\beta$  – параметр нелінійності;  $\gamma$ ,  $\omega$  – амплітуда і частота зовнішньої сили.

Права частина рівняння описує мале обурення, що діє на необурену систему. Визначаються зовнішні параметри, за якими поведінка системи стає хаотичною.

На рисунку 1.16, а наведено розв'язок рівняння Дуффінга, якщо  $\alpha = -1$ ;  $\beta = 0,1$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $\omega = 1,1$ , а на рисунку 1.16, б – його фазовий портрет, що має хаотичну поведінку.

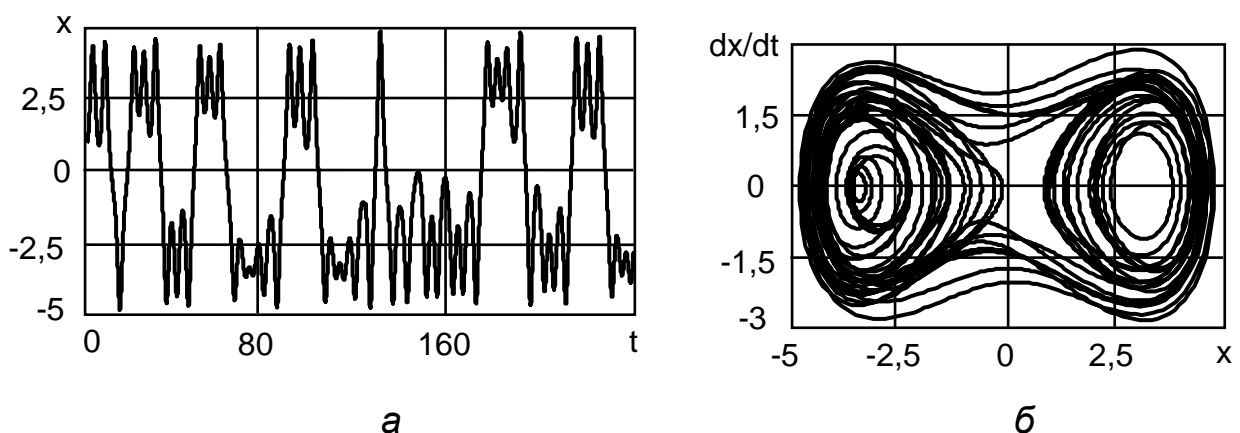


Рисунок 1.16 – Розв'язок рівняння Дуффінга (а), якщо  $\alpha = -1$ ;  $\beta = 0,1$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $\omega = 1,1$ , та його фазові портрети (б)

Різні форми рівняння Дуффінга використовуються для опису багатьох нелінійних систем: від маятника до нелінійної поведінки ізоляторів, балок, кабелів та електричних ланцюгів. Рівнянням Дуффінга вдається апроксимувати такі системи, як оптичні волокна, мікромеханічні структури, наномеханічні ізолятори, ротори, призми в потоках рідини, літальний апарат комах і т. ін.

Межу між лінійними і нелінійними теоріями прийнято проводити залежно від того, який (лінійний або нелінійний) математичний апарат і які (лінійні або нелінійні) математичні моделі в ній використано.

У минулому фізики вважали, що саме лінійна теорія дає змогу привести головний член нескінченного ряду послідовних наближень до істини. Водночас нелінійна теорія є додатковою, яка не істотно впливає на висновки лінійної теорії. Упевненість науковців у цьому укріплювала значні успіхи лінійної теорії та найперше її вище досягнення – електродинаміку Максвелла [4].

Неповторна відмітна особливість лінійної теорії, що безповоротно втрачається при переході до нелінійного рівня пізнання, – принцип суперпозиції, який дає змогу фізикам конструювати будь-яке рішення з певного набору часткових рішень. Фізики, що починали працювати з процесами в галузі нелінійної динаміки, стикалися зі значними проблемами, які ґрунтувались на сталих лінійних уявленнях і лінійній інтуїції. Вони робили спроби щодо використання відомого лінійного математичного апарату для дослідження нелінійних систем. При цьому шляхом різних хитрощів намагалися пристосувати лінійні методи до розв'язання нових нелінійних задач. Однак застосування лінійного математичного апарату для розв'язання нелінійних задач не дає змоги отримати задовільних результатів досліджень нелінійних систем.

Для демонстрації систем, які мають хаотичну поведінку, використовують декілька прикладів таких систем. Перший пов'язано з відбиттям двох матеріальних точок від трьох кульок (рисунок 1.17, а). На рисунку видно, що коли дві матеріальні точки відбиваються від кульок, їх траєкторії, спочатку близькі, швидко розходяться. Причина нестійкості траєкторій – висока чутливість до початкових умов, яка спричинена кривизною поверхні кульок.

Інший приклад називається більярдом Синая. На рисунку 1.17, б показано так званий розсіювальний більярд. На рисунку видно, що, як і в попередньому прикладі, дві траєкторії матеріальних точок, які спочатку були близькими, після відбиття від криволінійних стінок швидко розбігаються. Криволінійні стінки в цьому прикладі виконують ту саму роль, що і кульки в попередній системі.

На систему, що розвивається за цілком відомими законами й поводить себе хаотично, не впливають сторонні джерела шуму, а також квантова ймовірність. Хаос створюється власною динамікою нелінійної

системи – її властивістю експоненціально швидко розводити скільки завгодно близькі траєкторії. Унаслідок чого форма траєкторій значною мірою залежить від початкових умов.

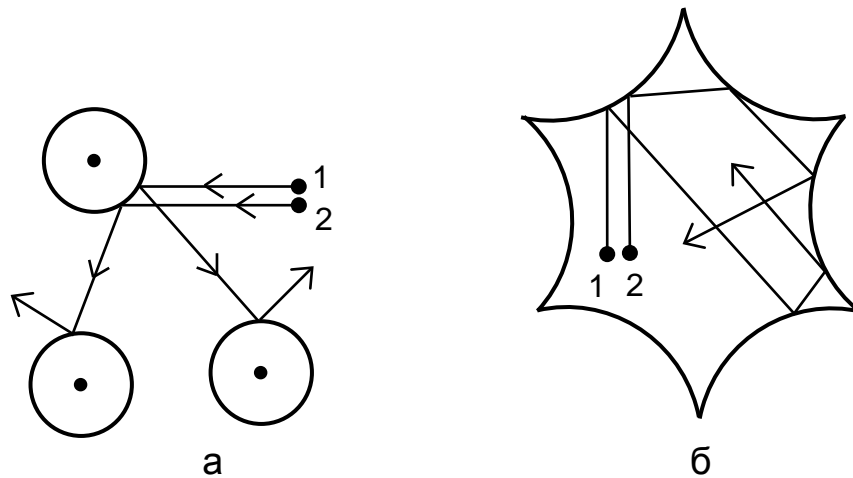


Рисунок 1.17 – Приклади систем із хаосом:  
а – система з трьох кульок; б – більярд Синая

Це можна пояснити на прикладі нелінійного коливального контуру (розглядався вище), на який впливає зовнішній періодичний сигнал. Внесемо до системи невелике збурення – змінимо незначно початковий заряд конденсатора. Тоді коливання в збуреному і незбуреному контурах (спочатку майже синхронні) дуже скоро стануть абсолютно різними. Оскільки в реальному фізичному експерименті задати початкові умови можна лише з кінцевою точністю, передбачити поведінку хаотичних систем на тривалий час неможливо.

**Динамічний (детермінований) хаос** – явище в теорії динамічних систем, при якому поведінка нелінійної системи має вигляд випадкової, незважаючи на те, що воно визначається детерміністичними законами. Причиною появи хаосу є нестійкість системи відносно початкових умов і параметрів: невелика зміна початкової умови із часом приводить до скільки завгодно великих змін у динаміці системи [58].

У спеціальній літературі наведено таке визначення хаосу: «Хаос у грецькій міфології – безмежна первісна маса, з якої утворилося все те, що існує. У переносному значенні – безлад, плутанина» [58].

Оскільки початковий стан фізичної системи не може бути заданим абсолютно точно (наприклад, через обмеження вимірювальних інструментів), то завжди необхідно розглядати деяку (нехай і дуже невелику) область початкових умов. Під час руху в обмеженій області простору експоненціальна розбіжність у часі близьких орбіт приводить до перемішування початкових точок у всій області.

Коли говорять про детерміновану якість системи, мають на увазі, що її поведінка характеризується однозначним причинно-наслідковим зв'язком, тобто, знаючи початкові умови і закон руху системи, можна точно

передбачити її майбутнє. Саме таке уявлення про рух у Всесвіті є характерним для класичної ньютонівської динаміки. Хаос же, навпаки, відзначається безладним, випадковим процесом, коли перебіг подій не можна ні передбачити, ні відтворити. Поняття детермінованого хаосу об'єднує ці протилежні поняття – передбачуваність і випадковість.

**Гра під назвою «Хаос».** Розглянемо на площині рівнобічний трикутник  $A_0, A_1, A_2$  (рисунок 1.18) і кубик із числами 1, 2, ..., 6 на гранях [8]. Тоді залишок від ділення числа за модулем 3, що випадає після кидання кубика, буде дорівнювати 0, 1 або 2.

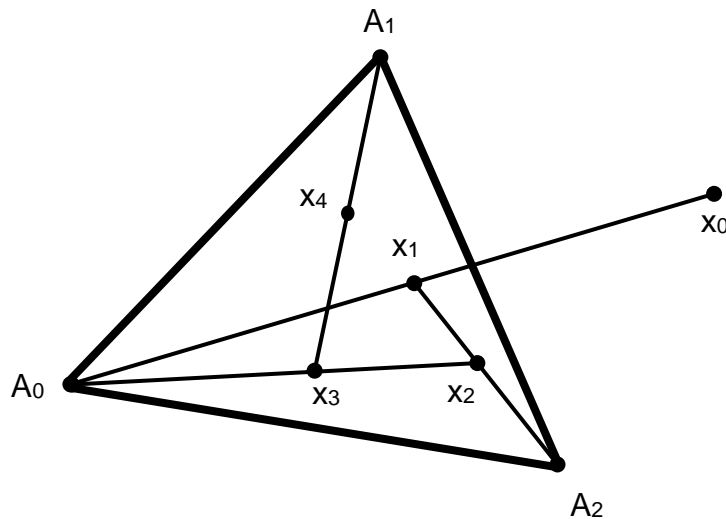


Рисунок 1.18 – Порядок дій у грі під назвою «Хаос»

Позначимо в просторі абсолютно довільну початкову точку  $x_0$  (див. рисунок 1.18). Початкова точка може бути як усередині трикутника, так і ззовні. На початку гри кидаємо кубик. Припустимо, випало число із залишком 0. З'єднаємо тоді точку  $x_0$  з вершиною трикутника  $A_0$  відрізком. Позначимо середину відрізка  $[x_0 A_0]$  точкою  $x_1$  (див. рисунок 1.18). Далі кидаємо кубик ще раз. Припустимо, випало число із залишком 2. З'єднаємо тоді точку  $x_1$  з вершиною трикутника  $A_2$  відрізком. Позначимо середину відрізка  $[x_1 A_2]$  точкою  $x_2$ . Гра продовжується далі, кубик кидаємо багато разів. Нехай уже є точка  $x_{n-1}$  і, якщо під час  $n$ -го кидання кубика випадає число із залишком  $\alpha_n$ , де  $\alpha_n = 0, 1, 2$ . Тоді з'єднаємо точку  $x_{n-1}$  із вершиною  $A_{\alpha_n}$ , і  $n$ -а точка  $x_n$  послідовності визначається як середина відрізка  $[x_{n-1}, A_{\alpha_n}]$ . Діючи таким чином, одержуємо послідовність  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  точок на площині [9].

Послідовність точок  $x_i$  залежить від вибору початкової точки  $x_0$  і від випадкової послідовності чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, які випадають під час кидання кубика. Але вибір початкової точки і кидання кубика є випадковими подіями. Інакше кажучи, у грі під назвою «Хаос» дуже багато невизначеностей: початкова точка  $x_0$  є довільно узятою і послідовність вершин є абсолютно випадковою. Детермінованим є тільки рівнобічний трикутник. Здається, що результатом такої гри буде випадковий набір

точок, що заповнюють трикутник. Але виявляється, що після певного перехідного процесу точки, що отримані під час гри (роботи рандомізованого алгоритму), заповнюють так само килим Серпинського (рисунок 1.19).

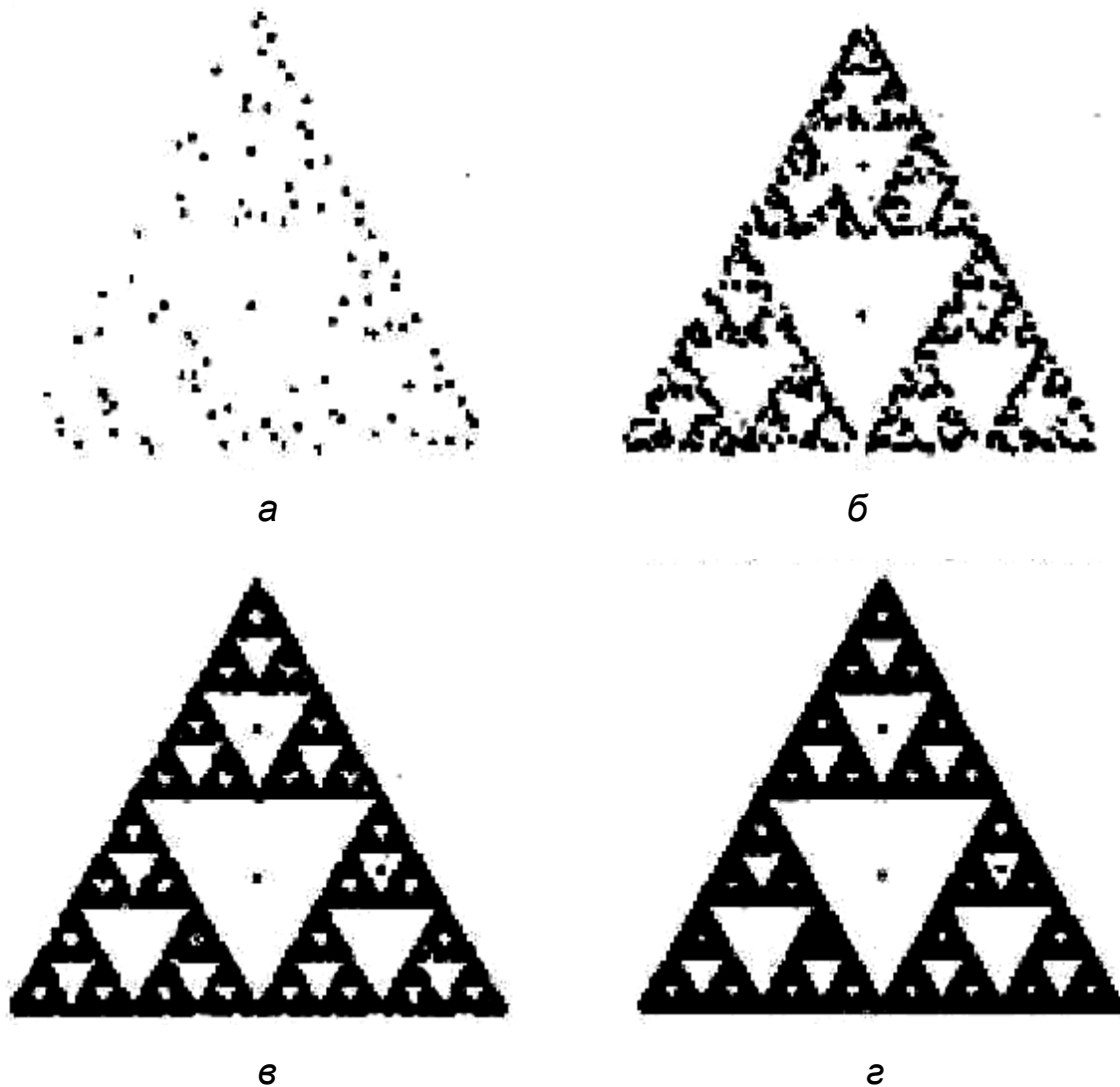


Рисунок 1.19 – Вигляд дисплея комп'ютера в грі «Хаос» після кидань кубика: а – 100; б – 500; в – 2000 і г – 10000

Рандомізовані алгоритми подібні до алгоритму, що реалізує гру «Хаос», засновані на теорії систем ітерованих функцій. Результатом роботи таких алгоритмів є притягувальна множина (атрактор), яка не залежить від вибору початкової множини або початкової точки. У разі гри «Хаос» таким атрактором є серветка Серпинського.

Динамічні системи можна умовно поділити на два типи. У першому типі траєкторії руху стійкі і не можуть бути значно змінені малими збуреннями. Такі системи передбачувані. Саме тому знаємо, що Сонце зійде завтра, через рік і через сто років. Для визначення майбутнього в цьому випадку достатньо знати рівняння руху і задати початкові умови.

Невеликі зміни в значеннях останніх призведуть лише до незначної помилки в прогнозі.

До іншого типу належать динамічні системи, поведінка яких нестійка, так що будь-які скільки завгодно малі збурення швидко (у масштабі часу, характерному для цієї системи) приводять до кардинальної зміни траєкторії. Анрі Пуанкаре в роботі «Наука і метод» 1908 року відзначив, що в нестійких системах абсолютно незначна причина, що «вислизає» від нас за своєю «крихітністю», викликає значну дію, яку неможливо передбачити. Передбачення стає неможливим, тому що явище є випадковим. Таким чином, прогнозування на тривалий час втрачає будь-який сенс.

У теорії хаосу значне місце займає **ефект метелика**. Цей ефект у природних науках описує властивість деяких хаотичних систем – незначний вплив на систему може мати великі та непередбачувані ефекти де-небудь в іншому місці та в інший час. Детерміновано-хаотичні системи чутливі до малих дій. У хаотичному світі складно передбачити, які варіації виникнуть зараз і в цьому місці, помилки і невизначеність зростають експоненційно із часом.

На перший погляд природа хаосу виключає можливість керувати ним. Однак нестійкість траєкторій хаотичних систем робить їх надзвичайно чутливими до керування. Наприклад, потрібно перевести систему з одного стану в інший (перемістити траєкторію з однієї точки фазового простору в іншу). Необхідний результат може бути отримано протягом заданого часу шляхом одного або серії малопомітних, незначних збурень параметрів системи. Кожне з них лише злегка змінить траєкторію, але через деякий час накопичення й експоненціальне посилення малих збурень приведуть до значної корекції руху. При цьому траєкторія залишиться на тому самому хаотичному аттракторі. Таким чином, системи із хаосом демонструють одночасно і успішну керованість, і дивовижну пластичність, чуйно реагуючи на зовнішні дії, вони зберігають тип руху.

Дослідження, пов'язані з фракталами і детермінованим хаосом, змінюють багато звичних уявлень про навколишній світ. Причому не про світ мікрооб'єктів, де людське око безсиле без спеціальної техніки, і не про явища космічного масштабу, а про звичайні предмети: хмари, річки, дерева, гори, трави тощо. Фрактали – явище, яке дає змогу переглянути погляди на геометричні властивості природних і штучних об'єктів, а динамічний хаос вносить радикальні зміни до розуміння того, який характер дії в часі можуть мати ці об'єкти.

## **1.2 Основні методи нелінійної динаміки**

**Основними методами нелінійної динаміки є:**

- фрактальний метод;
- метод псевдофазової площини (реконструкції аттрактора);
- метод відображень (перерізів) Пуанкаре;

- метод біфуркації нерухомих точок;
- метод стійкості динамічних систем (показників Ляпунова);
- метод дискретних відображень.

В останні десятиліття стрімко розвивається порівняно молодий метод нелінійної динаміки – фрактальний метод. Видано багато чудових робіт з теорії фракталів [9–26]. Кожна із цих робіт своєрідна й розкриває різні галузі застосування фракталів. У цих роботах також наведено велику кількість літератури із цього наукового напрямку. В основі фрактального методу нелінійної динаміки лежить поняття фрактальної розмірності. Фрактальна розмірність є додатним нецілим числом, що відображає деяким чином геометричну складність аналізованої структури (геофізичного сигналу, аерокосмічного зображення тощо). Різна складність земної поверхні й об'єктів спостереження приводить до різних значень фрактальної розмірності геофізичного сигналу або зображення земної поверхні. Цей факт дає змогу використовувати величину фрактальної розмірності для аналізу таких сигналів і зображень. Алгоритми фрактального аналізу достатньо прості й ефективні в реалізації.

Деякі особливості структури (форми) геофізичних сигналів, які неможливо або складно досліджувати аналітично, піддаються наочному уявленню і якісному дослідженню за допомогою перетворення (побудови) початкового сигналу в іншій площині аналізу. Перетворення геофізичного сигналу на фазову (псевдофазову) площину лежить в основі одного з основоположних методів нелінійної динаміки – методу псевдофазової площини (реконструкції атратора) [27–31]. Цей метод дає змогу підвищити ефективність аналізу геофізичних сигналів.

З методом псевдофазової площини тісно пов'язаний ще один метод нелінійної динаміки – метод відображень (перерізів) Пуанкаре [28, 29]. Припустимо, що аналізується структура (форма) геофізичного сигналу, яка відображена на псевдофазовій площині. Якщо замість того, щоб безперервно стежити за рухом зображальної точки, фіксувати характер зміни такого сигналу тільки в окремі моменти, то рух буде відображено послідовністю точок на псевдофазовій площині. Якщо моменти вибірки в часі розподіляються за певним правилом, то це відображення називається відображенням (перерізом) Пуанкаре. Спільно з методом псевдофазової площини такий метод можна використовувати для якісного оцінювання структури геофізичних сигналів.

Як зазначалося вище, однією з особливостей хаотичних режимів динамічних систем є чутливість до зміни початкових умов [6], тобто такі системи характеризуються нестійкістю кожної траєкторії, що належить атратору. Кількісною мірою цієї нестійкості є характеристичні показники Ляпунова [32–34]. Метод стійкості динамічних систем (показників Ляпунова) отримав найбільше поширення під час прогнозування стану динамічних систем або, іншими словами, передбачуваності поведінки системи [35, 36].



Ще одним із найбільш відомих методів нелінійної динаміки є метод біфуркації нерухомих точок динамічної системи [37–42]. Теорія біфуркацій пов'язана з дослідженням не однієї конкретної динамічної системи з фіксованими параметрами, якою, наприклад, є геофізичний сигнал, а з дослідженням групи динамічних систем, що залежать від великої кількості параметрів. Такі дослідження зазвичай проводять під час вивчення сценаріїв переходу до хаосу (вивчається ланцюжок біфуркацій).

Дискретні відображення є одним із найважливіших методів нелінійної динаміки [3–5, 43–45]. Побудовані за його допомогою прості математичні моделі нелінійної динаміки дають змогу одноманітно і наочно досліджувати типові ситуації глобального стискування й розтягування. Такий метод лежить в основі побудови фракталів і фрактальних недиференційовних функцій.

### **1.2.1 Метод фрактального аналізу**

#### **1.2.1.1 Поняття фрактала, перетворення подібності й ітерації**

Поняття фрактал і фрактальна геометрія, що з'явилися наприкінці 70-х років, із середини 80-х почали активно використовуватися математиками і програмістами. Уперше фрактальну природу нашого світу помітив математик Бенуа Мандельброт (20.11.1924–14.11.2010): «Чому геометрію часто називають холодною і сухою? Одна з причин полягає в її нездатності описати форму хмари, гори, дерева або берега моря. Хмари – це не сфери, гори – не конуси, лінії берега – це не кола, і кора не є гладкою, і блискавка не простягається по прямій. Природа демонструє нам не просто вищий ступінь, а зовсім інший рівень складності. Існування цих об'єктів кидає нам виклик, схиляючи до вивчення їх форм. Цього уникнув Евклід, залишивши осторонь питання про те, як бути з безформним» [10].

Термін «фрактал» походить від латинських слів «frangere» – ламати і «fractus» – дріб («що складається з фрагментів»). Термін було запропоновано Б. Мандельбротом у 1975 р. для позначення нерегулярних, але самоподібних структур, якими він займався [9]. Появу фрактальної геометрії прийнято пов'язувати з виходом у 1977 р. книги Б. Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature» [10]. У його роботах використані наукові результати інших вчених, що працювали в період з 1875 р. до 1925 р. у тій самій галузі (Анрі Пуанкаре, П'єр Фату, Гастон Жуліа, Георг Кантор, Фелікс Гаусдорф). Однак тільки в наш час вдалося об'єднати роботи науковців у єдину систему.

Фрактальна геометрія не «чиста» математична геометрична теорія. Це, імовірно, концепція, новий погляд на добре відомі речі, перебудова сприйняття, що примушує дослідника по-новому бачити світ.

Однак те, що Б. Мандельброт назвав «фрактальна геометрія», застосовувалося задовго і до нього, правда, без розуміння всієї її важливості. Перші наукові роботи з фрактальної геометрії з'явилися під

час кризи математики наприкінці 19 ст., коли Дебуа Раймон в 1875 р. опублікував повідомлення про безперервну недиференційовну функцію, побудовану Карлом Вейерштрассом. Криза математики продовжувалася приблизно до 1925 р. Основними її учасниками були Георг Кантор, Джузеппе Пеано, Анрі Лебег і Фелікс Гаусдорф. Незважаючи на те, що теорії цих математиків не відображають реального життя, Б. Мандельброт показав їх важливість під час побудови фізичних моделей. Річ у тому, що Б. Мандельброт указав на неточність у трактаті «Начала» Евкліда. Евклід приховав припущення про гладкість об'єктів. Неточність Евкліда не помічало людство впродовж майже двох тисячоліть вивчало геометрію навколишнього світу і вчилася математичній строгості. Він створив неевклідову геометрію нерівних шорстких та зазублених і роз'їдених ходами, порами, тріщинами і отворами, звивистих і подібних об'єктів.

Визначення фрактала навів Б. Мандельброт [9]: **«Фракталом називається множина, розмірність Гаусдорфа – Безиковича якої є строго більшою за топологічну розмірність».**

Пізніше він запропонував замінити це визначення іншим [10]: **«Фракталом називається структура, що складається з частин, які в якомусь сенсі подібні цілому».**

Після цього виникла проблема в тому, що строгого і повного визначення фрактала в наш час не існує. Усі формулювання нівелюються контрприкладми.

Перше визначення, незважаючи на правильність і точність, дуже обмежене. Воно виключає багато фракталів, що трапляються у фізиці.

Друге визначення містить його основну відмітну ознаку – фрактал є однакоим у будь-якому масштабі. Наприклад, купчасті хмари складаються з величезних «горбів», на яких розміщуються «горби» трохи менші, на них – «горби» ще менші і т. д., аж до найменшого масштабу, який може розрізнити спостерігач. Насправді, маючи дані тільки про зовнішній вигляд хмар і не використовуючи жодної додаткової інформації, розмір хмар оцінити неможливо.

Як впливає з визначень, уведених у наукову практику, основними властивостями фракталів є самоподібність та їх дробова розмірність.

Розглянемо докладніше друге визначення фрактала, яке ґрунтується на властивості самоподібності.

**Перетворенням подібності** з коефіцієнтом подібності  $k$  називається перетворення вигляду [3]

$$f: x_i' = k \cdot x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

або

$$p(A', B') = k^p(A, B), \quad (1.10)$$

де  $A$  і  $B$  – будь-які дві точки простору;  $A'$  і  $B'$  – їх образи під дією перетворення  $f$ .

Перетворення подібності наведено на рисунку 1.20.

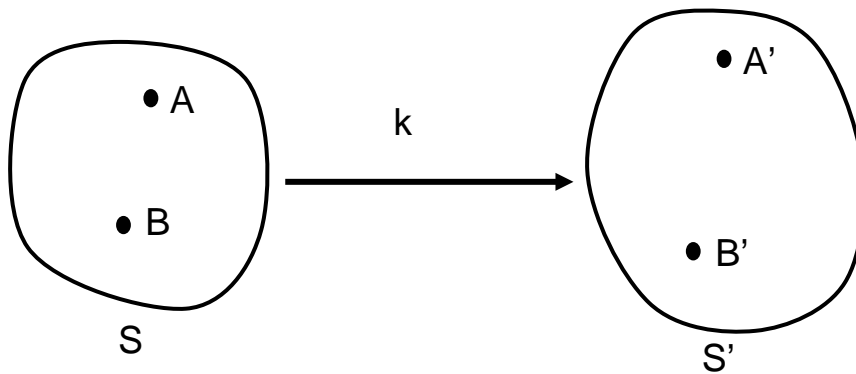


Рисунок 1.20 – Перетворення подібності

Перетворення  $f$  називається [3]:

- тотожним, якщо  $k = 1$ ;
- розтягувальним, якщо  $k > 1$ ;
- стискальним, якщо  $k < 1$ .

Коефіцієнт подібності також подають у канонічному вигляді  $k = e^\alpha$ , при цьому [3]:

- тотожному перетворенню відповідає  $\alpha = 0$ ;
- розтягувальному –  $\alpha > 0$ ;
- стискальному –  $\alpha < 0$ .

Коефіцієнт подібності в разі перетворення подібності за всіма напрямками той самий. Під час перетворення подібності може змінюватися розмір фігури, але не її форма. Інваріантом перетворення подібності є форма (рисунок 1.21). Перетворення подібності позначається так:  $A \supset A'$ .

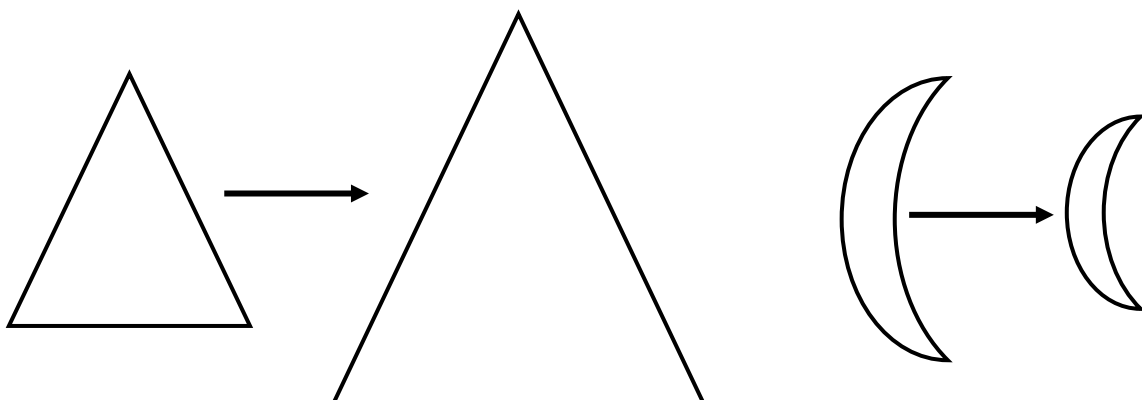


Рисунок 1.21 – Збереження форми під час перетворення подібності

**Афінне перетворення** – перетворення подібності з різними коефіцієнтами подібності в різних напрямках [3]:

$$f: x_i' = k_i x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Перетворення подібності (1.9) – окремий випадок афінних перетворень (1.11). Перехід від (1.9) до (1.11) – генералізація, або узагальнення, перехід від (1.10) до (1.11) – спеціалізація, або перехід від загального випадку до окремого.

Під час афінного перетворення прямі лінії перетворюються в прямі лінії (лінійне перетворення), але ні розміри, ні форма під час афінного перетворення не зберігаються (рисунок 1.22).

Послідовне виконання трьох афінних перетворень  $A_1 \circ A_2 \circ A_3$  асоціативне, тобто [3]

$$(A_1 \circ A_2) \circ A_3 = A_1 \circ (A_2 \circ A_3) = A_1 \circ A_2 \circ A_3. \quad (1.12)$$

Група афінних перетворень – комутативна, або абелева, тобто для будь-яких двох афінних перетворень  $A_1$  і  $A_2$  результат їх послідовного виконання не залежить від того, у якому порядку розміщено «множники» [3]:

$$A_1 \circ A_2 = A_2 \circ A_1. \quad (1.13)$$

Перетворення подібності також утворюють групу – підгрупу групи афінних перетворень. Перетворення подібності діють не тільки в просторі на геометричні фігури, але і на дискретні послідовності, а також на розв'язання диференціальних рівнянь і на самі диференціальні рівняння. Перетворення подібності лежать також в основі аналізу розмірності.

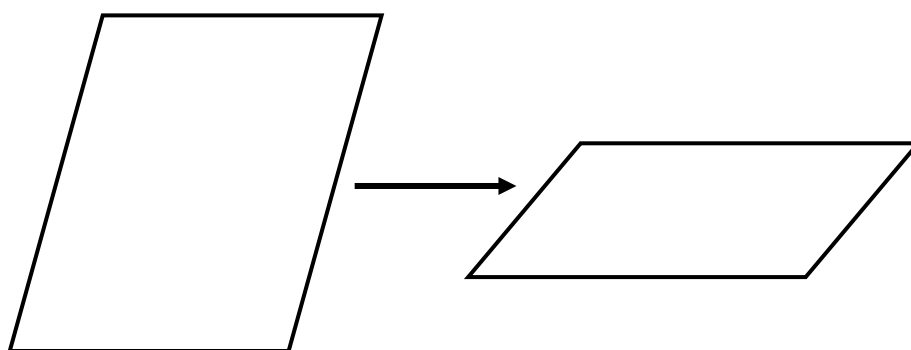


Рисунок 1.22 – Під час афінного перетворення не зберігається ні розмір, ні форма фігури

**Ітерацією** називають повторну дію функції  $f$  на  $x_0$ . Номер ітерації визначається кількістю повторень дій функції  $f$ :

$$x_n = f(x_{n-1}) = \underbrace{f(f(\dots(f(x_0))\dots))}_{n \text{ разів}}, \quad (1.14)$$

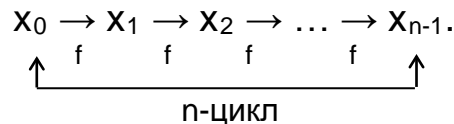
тобто  $n$ -ітерація є дія функції  $f$  на  $(n - 1)$  наближення  $x_{n-1}$ , або повторення дії функції  $f$   $n$  разів на  $x_0$ . Однак слід зазначити, що  $n$ -ітерація не є  $n$ -м ступенем функції  $f$ , а є результатом  $n$ -кратної суперпозиції.

**Спадкові властивості ітерацій** – властивості ітерацій, які вони отримують (за спадком) від основного відображення.

**Циклом** називається кінцева множина наближень, кожне з яких переходить у наступне під дією відображення  $f$ .

**Порядок циклу** – довжина циклу.

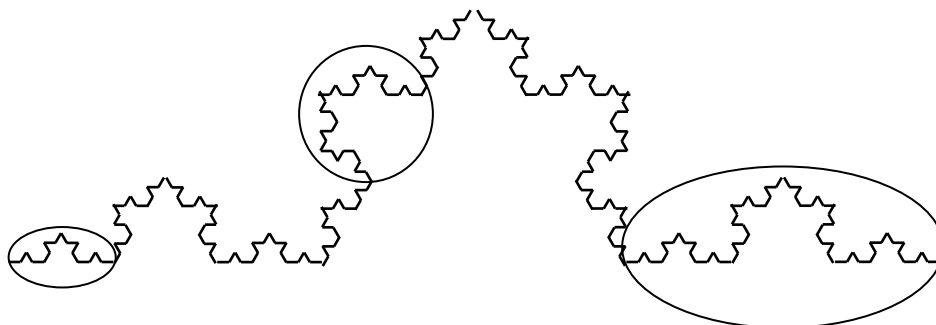
Наприклад,  $n$ -цикл має вигляд



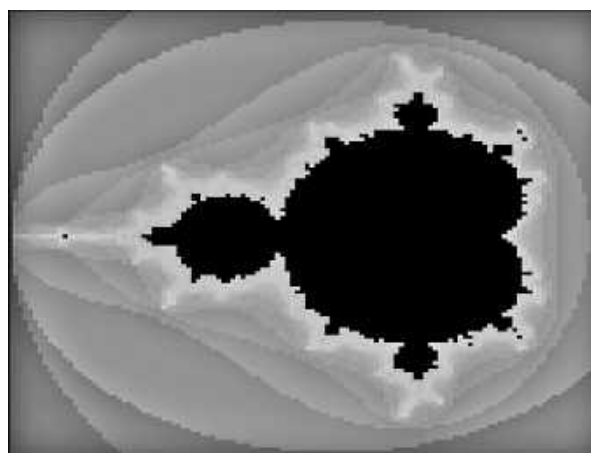
У програмуванні також використовується поняття рекурсії (функції, що викликає саму себе).

### 1.2.1.2 Класифікація та правила побудови фракталів

Розглянемо різні типи фракталів, що складаються із частин, які в якомусь сенсі подібні цілому. На рисунку 1.23 показано два типи фракталів: крива Коха (а) і множина Мандельброта (б).



а



б

Рисунок 1.23 – Різні типи фракталів: а – триадна крива Коха; б – фрактальна множина Мандельброта

З рисунків 1.23, а і б видно, що ці фрактали мають значні відмінності, тобто належать до різних типів. Однак у наведених фракталах є загальні властивості – це наявність рекурсивної процедури їх генерації та їх самоподібність (тих частин, які в якомусь сенсі подібні цілому). З огляду на це доцільно розглянути класифікацію фракталів. На сьогодні розрізняють три основні типи фракталів, що різняться правилами їх побудови [25]:

- геометричні фрактали;
- алгебраїчні (аналітичні);
- стохастичні (випадкові).

**Геометричні фрактали.** Фрактали цього класу найбільш наочно ілюструють властивість самоподібності та застосування ітераційного процесу. У двовимірному випадку їх отримують за допомогою деякої ламаної (або поверхні в тривимірному випадку), яку називають генератором. За один крок алгоритму кожний із відрізків, що створює ламану, замінюється на ламану-генератор у відповідному масштабі. Унаслідок нескінченного повторення цієї процедури виходить геометричний фрактал.

**Канторівську множину** було описано німецьким математиком Георгом Кантором у 1883 р. [8, 14]. Розглянемо порядок її побудови (рисунок 1.24). Візьмемо відрізок довжиною, що дорівнює 1 (перший крок – один відрізок,  $N = 1$ ). Розділивши його на три однакові частини, видалимо середню частину (другий крок – два відрізки,  $N = 2$ ). З двома відрізками, що залишилися, виконаємо ту саму процедуру і в результаті отримаємо чотири відрізки довжиною  $1/9$  кожен (третій крок – чотири відрізки,  $N = 4$ ) і так до нескінченності (рисунок 1.24). Множина точок, що виникла після цієї процедури, і є канторівською множиною.

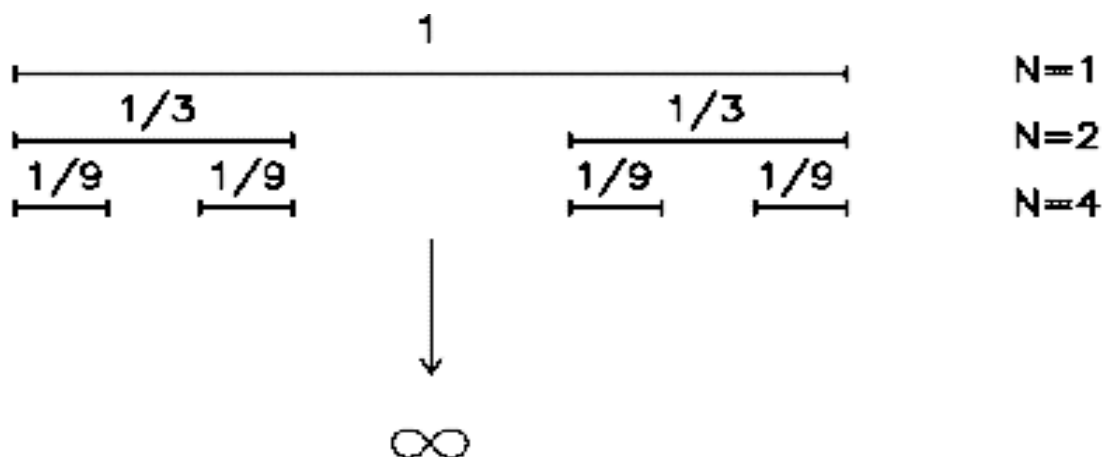


Рисунок 1.24 – Побудова канторівської множини

Довжина  $L$  канторівської множини дорівнює нулю:

$$L = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 2/3} = 0. \quad (1.15)$$

**Триадну криву Коха** було описано шведським математиком Гельге фон Кохом у 1904 р. [8, 14]. Побудова кривої починається з відрізка одиничної довжини – це нульове покоління кривої Коха (рисунок 1.25,  $n = 0$ ). Далі кожний відрізок (у нульовому поколінні існує один відрізок) замінюється на створюваний елемент, позначений на рисунку 1.25 як  $n = 1$ . Унаслідок такої заміни виходить наступне покоління кривої Коха. У першому поколінні – це крива із чотирьох прямолінійних відрізків, кожний завдовжки  $1/3$ . Для отримання другого покоління виконуються ті самі дії – кожний відрізок замінюється на зменшений створюваний елемент ( $n = 2$ ). Для отримання кожного подальшого покоління всі відрізки попереднього покоління необхідно замінити зменшеним створюваним елементом. Крива  $n$ -го покоління при будь-якому кінцевому  $n$  називається передфракталом. На рисунку 1.25 зображено чотири покоління кривої. Якщо  $n$  прямує до нескінченності, то крива Коха стає фрактальним об'єктом.

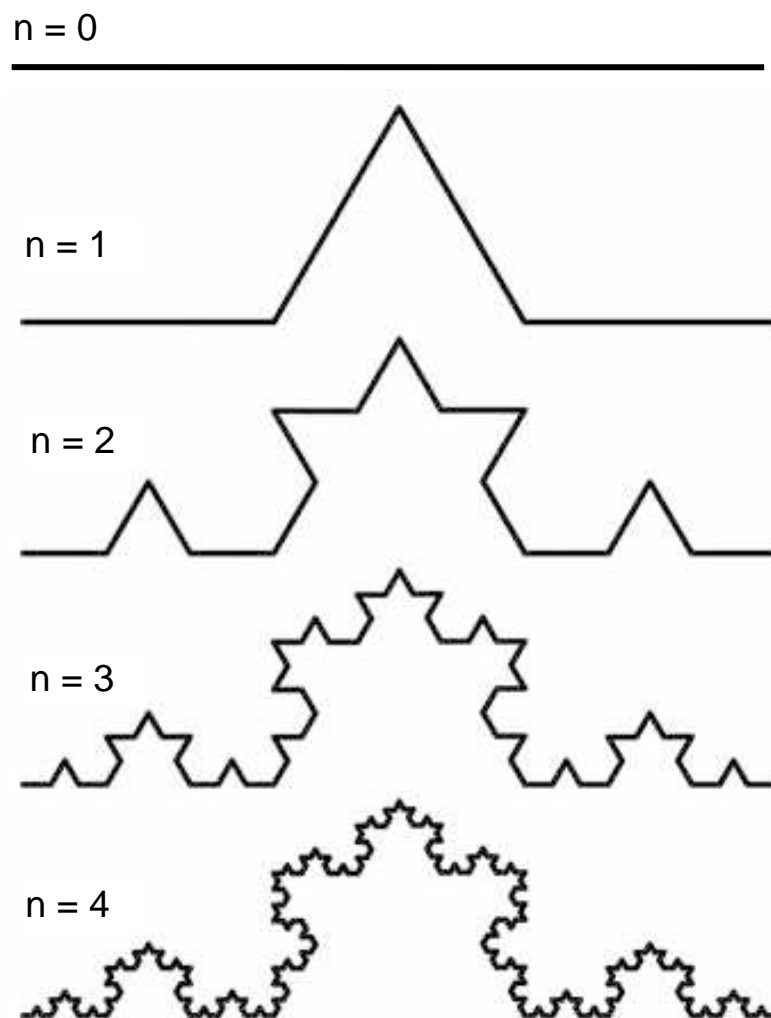


Рисунок 1.25 – Побудова триадної кривої Коха

На рисунку 1.26 показано ще один варіант фрактальної кривої Коха, яка має назву **сніжинка Коха**.

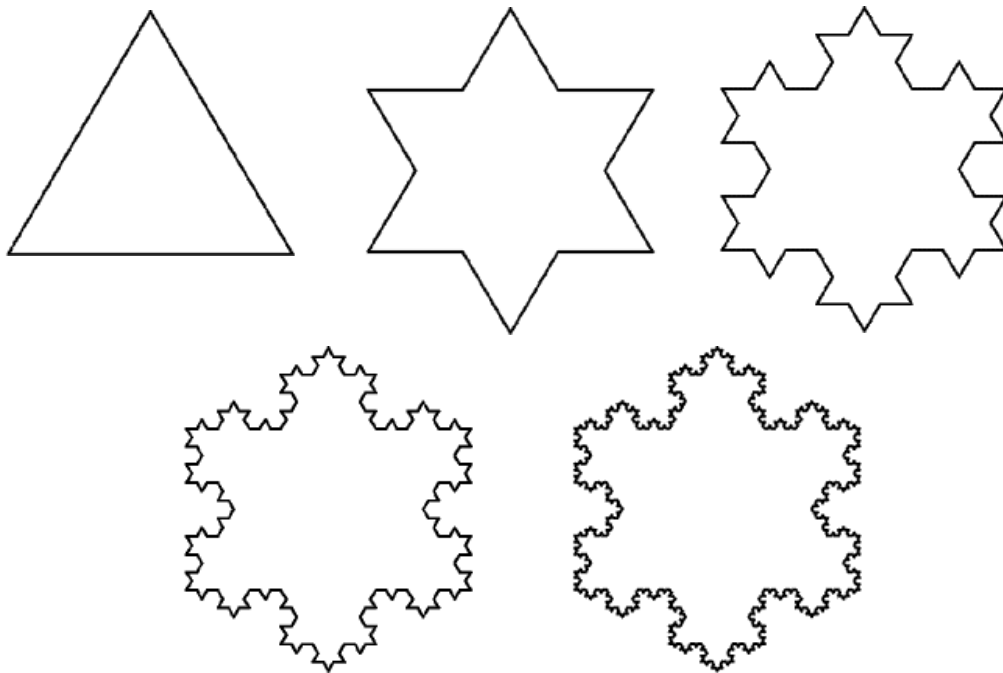


Рисунок 1.26 – Побудова сніжинки Коха

Сніжинка Коха є лінією нескінченної довжини, що обмежує скінченну площу. Перше твердження доводиться дуже просто, тому що при кожному кроці кількість сторін багатокутника збільшується в 4 рази, а довжина кожної сторони зменшується тільки в 3 рази. Якщо взяти довжину сторони створюваного трикутника за 1, то тоді довжина сніжинки Коха

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( \frac{4}{3} \right)^n = \infty. \quad (1.16)$$

Площа під кривою сніжинки Коха, якщо взяти площу створюваного трикутника за 1:

$$S = 1 + 3 \frac{1}{3^2} + 3 \cdot 4 \frac{1}{9^2} + 3 \cdot 4 \cdot 4 \frac{1}{27^2} + \dots \quad (1.17)$$

При цьому кількість додаткових трикутників збільшується в 4 рази, а їх сторона зменшується в 3 рази (відповідно, їх площа зменшується в  $3^2 = 9$  разів), унаслідок чого

$$S = 1 + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(3^{k+1})^2} = 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^k = 1 + \frac{3}{5} = 1,6. \quad (1.18)$$

Таким чином, площа під сніжинкою Коха в 1,6 раза є більшою за площу створюваного її трикутника.



**Килим Серпінського** будується з квадрата (рисунок 1.27,  $n = 0$ ) послідовним вирізанням серединних квадратів [8, 14]. Розділимо квадрат на дев'ять однакових квадратів, і квадрат, розташований у середині, видалимо.

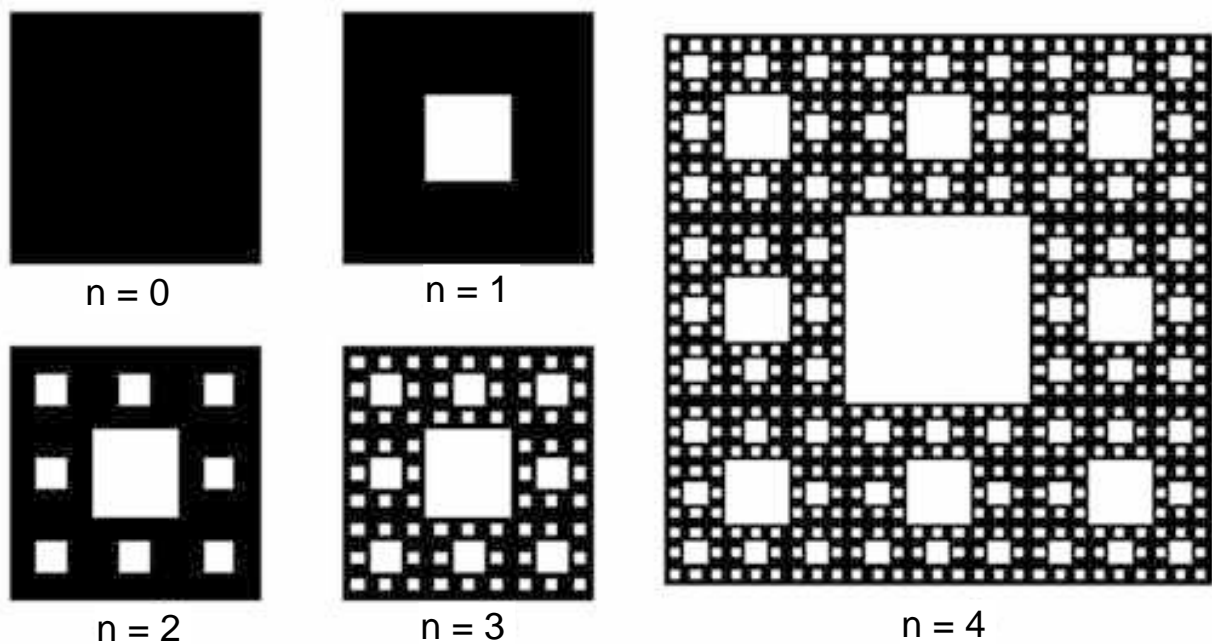


Рисунок 1.27 – Побудова килима Серпінського

Отримаємо квадрат із порожньою серединою (рисунок 1.27,  $n = 1$ ). Для восьми квадратів, що залишилися, знов повторимо вказану процедуру. Розділимо кожен з них на дев'ять однакових квадратів і серединні квадрати видалимо (рисунок 1.27,  $n = 2$ ).

Повторюючи схожі побудови, отримуватимемо все більш «діряву» фігуру (рисунок 1.27,  $n = 3$ ,  $n = 4$ ). Те, що залишається після всіх видалень, і буде килимом Серпінського. Оскільки видалені квадрати розташовуються все більш часто, на килимі Серпінського не буде жодного, навіть найменшого, квадрата без «дірки».

**Серветку Серпінського** (рисунок 1.28) було описано в 1915 р. [8, 14]. Її побудову починають не з квадрата, а з рівностороннього трикутника і, видаляючи центральні трикутники, отримують ще одну самоподібну фігуру, схожу на килим Серпінського. Розглянемо її будову.

Рівносторонній трикутник (рисунок 1.28,  $n = 0$ ) ділимо прямими, паралельними його сторонам, на чотири однакових рівносторонніх трикутника. З трикутника видаляємо центральний трикутник. Виходить множина, що складається з трьох трикутників першого рангу (рисунок 1.28,  $n = 1$ ). Роблячи так само з кожним трикутником першого рангу, отримаємо множину, що складається з дев'яти рівносторонніх трикутників другого рангу (рисунок 1.28,  $n = 2$ ). Продовжуючи цей процес нескінченно (рисунок 1.28,  $n = 3, 4, 5, \dots$ ), отримаємо серветку Серпінського.

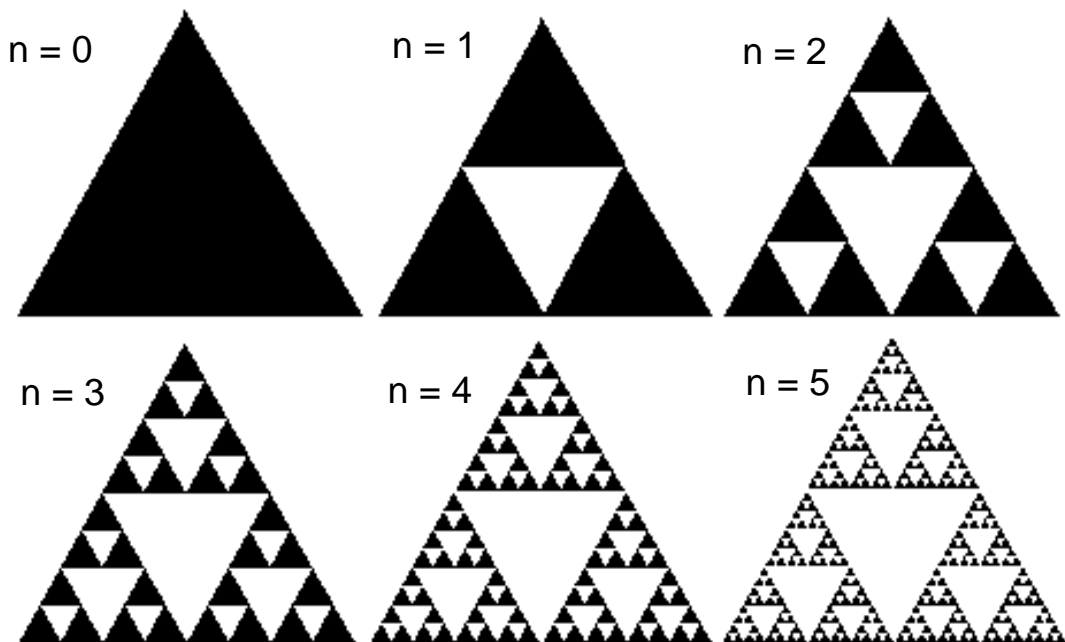


Рисунок 1.28 – Побудова серветки Серпінського

**Фрактальну криву Пеано** було описано в 1890 р. [8, 14]. Для її побудови поділимо квадрат на чотири однакові квадрати і з'єднаємо їх центри трьома відрізками, як показано на рисунку 1.29, а.

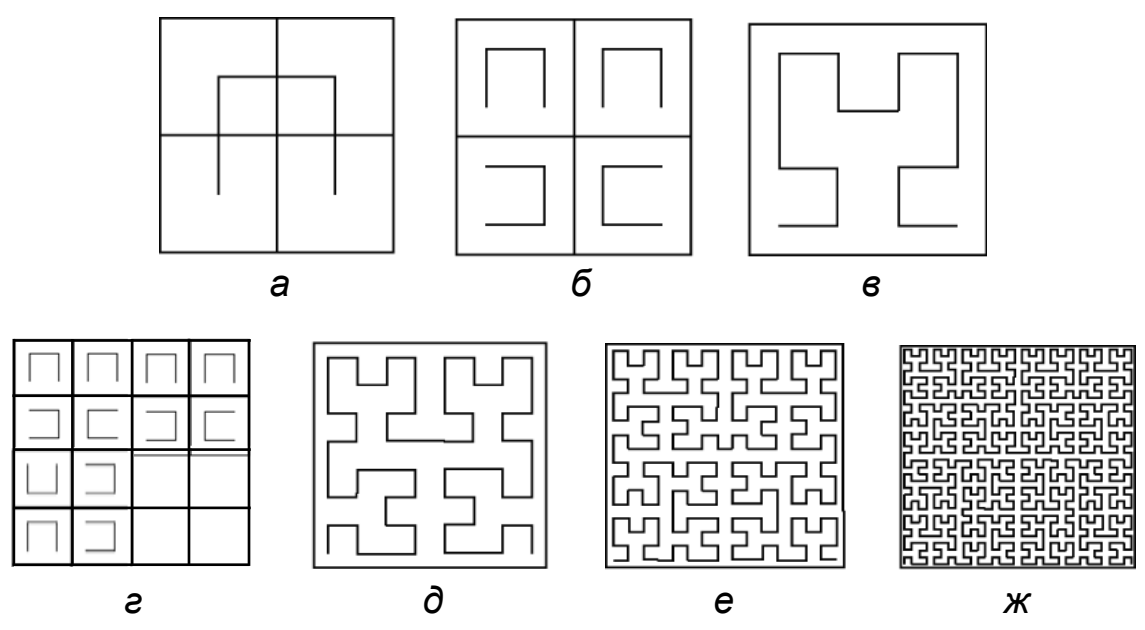


Рисунок 1.29 – Побудова кривої Пеано

Приберемо внутрішні сторони квадратів і з чотирьох копій складемо фігуру, зображену на рисунку 1.29, б. Знову видалимо внутрішні сторони квадратів і з'єднаємо трьома відрізками кінці ламаних, як показано на рисунку 1.29, в. Повторюючи описану процедуру, отримуватимемо все більш складні ламані (рисунок 1.29, г–ж), що наближаються до кривої

Пеано. Крива Пеано є безперервною. Ламані, що беруть участь у побудові кривої Пеано, на кожному етапі проходять через всі квадрати, а самі квадрати зменшуються, стягуючись до точок початкового квадрата. Тому крива Пеано буде проходити через всі точки початкового квадрата, тобто повністю заповнюватиме весь початковий квадрат. Крім того, вона матиме нескінченну довжину.

У машинній графіці використання геометричних фракталів необхідне під час отримання зображень дерев, кущів, берегової лінії. Двовимірні геометричні фрактали використовуються для створення об'ємних текстур (рисунок на поверхні об'єкта).

**Алгебраїчні (аналітичні) фрактали** є найбільшою групою фракталів. Отримують їх за допомогою нелінійних процесів у  $n$ -вимірних просторах [8, 14]. Найбільш вивчені двовимірні процеси. Якщо інтерпретувати нелінійний ітераційний процес як дискретну динамічну систему, то можна використовувати термінологію теорії дискретних систем: фазовий портрет, сталий процес, атрактор тощо.

Під час побудови **множини Мандельброта** вибирають деяке комплексне число  $c$ . Записують вираз  $z^2 + c$ , де  $z$  – комплексне число. Задають  $z_0 = 0$  (точніше  $z_0 = (0,0)$ ), яке підставляють у вказану формулу. Розв'язок одержують у вигляді  $z_1 = z^2 + c = 0^2 + c$ , тобто  $z_1 = c$ . Далі підставляють  $z_1$  у формулу і позначають його  $z_2$ . У такий спосіб будують послідовність комплексних чисел (точок на площині)  $z_{i+1} = z_i^2 + c$ ,  $z_0 = 0$ . На площині відзначають отримані точки – елементи цієї послідовності. Ітерації виконують для кожної стартової точки  $c$  прямокутної або квадратної області – підмножини комплексної площини.

Ітераційний процес продовжується доти, доки  $z_i$  не вийде за межі кола радіусом 2, центр якого лежить у точці  $(0,0)$  (це означає, що атрактор динамічної системи перебуває в нескінченності), або після достатньо великої кількості ітерацій (наприклад, 200 – 500)  $z_i$  зійдеться з якою-небудь точкою кола. Залежно від кількості ітерацій, у межах яких  $z_i$  залишався всередині кола, можна встановлювати колір точки. Якщо  $z_i$  залишається всередині кола протягом достатньо великої кількості ітерацій, ітераційний процес припиняється, а ця точка раstra забарвлюється в чорний колір. Таким чином, залежно від значення  $c$  можливі всього два варіанти – або точки в будь-якому разі «вилетять» у нескінченність, або всі вони будуть сконцентровані в колі радіусом 2 із центром на початку координат і ніколи не вийдуть за його межі («не вилетять»).

Множина точок, які внаслідок описаного процесу ніколи не «вилітають» у нескінченність, називається множиною Мандельброта, яку показано на рисунку 1.30.

Множину, яка зараз називається множиною Мандельброта, було винайдено і частково досліджено задовго до того, як 1 березня 1980 р. в дослідному центрі фірми IBM Б. Мандельброт отримав її за допомогою комп'ютера. На початку ХХ ст. в 1905 р. французький математик П'єр Фату

на папері встановив відмінність у поведінці точок описаної вище послідовності всередині кола і поза колом радіусом 2. П. Фату встановив, що є множина точок, які не «вилітають» із кола радіусом 2, але за відсутності комп'ютерів не міг навіть припустити вид цієї множини.

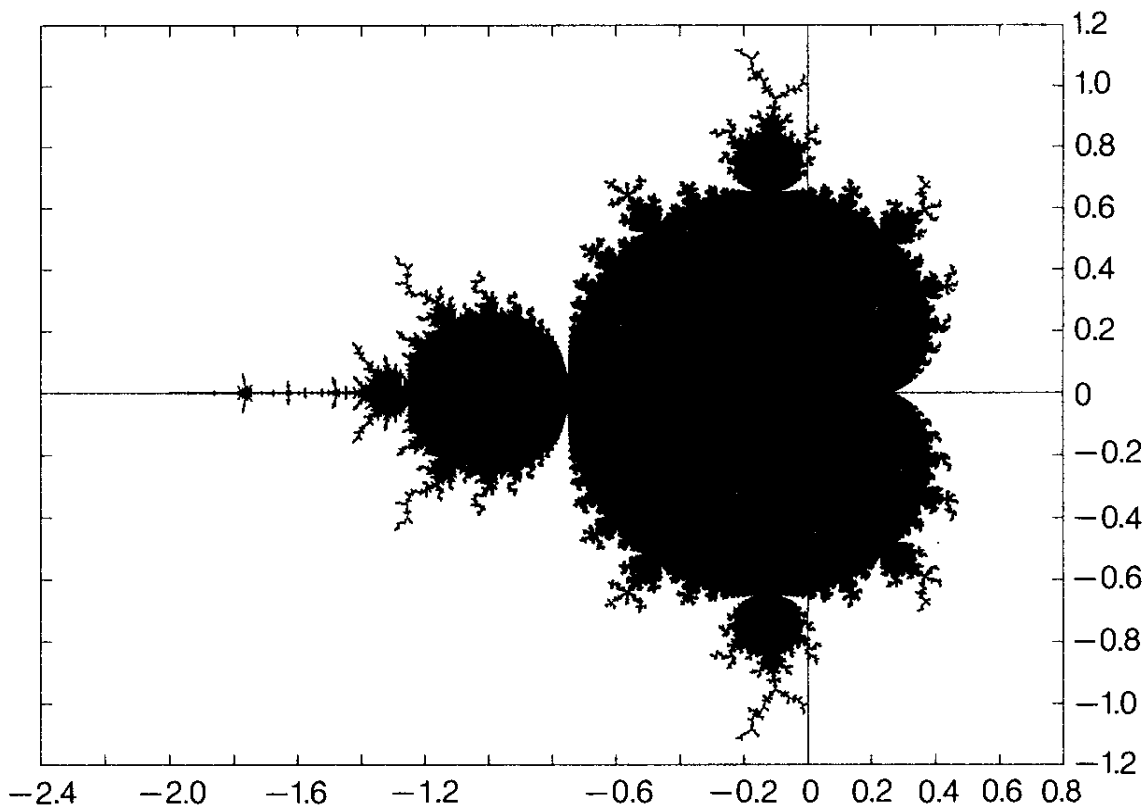


Рисунок 1.30 – Множина Мандельброта

Оскільки належність точок до множини Мандельброта ґрунтується на бінарній ознаці – «вилітає / не вилітає», то «справжнє» зображення множини Мандельброта є чорно-білим. Чорними зазвичай є точки, що належать множині, білими – усі інші.

Множина Мандельброта самоподібна. Під час її масштабування кожне наступне зображення, отримане збільшенням частини попереднього, у якомусь сенсі подібне до попереднього, і цей процес спостерігається в будь-якому масштабі.

**Множини Жулія** було досліджено в 1918 р. [8, 14]. На відміну від множини Мандельброта, яка одна, множин Жулія нескінченно багато. Однак множини Жулія і Мандельброта – «найближчі родичі». Під час побудови множини Мандельброта переглядаються значення  $c$  і для кожного значення  $z_0$  запускається ітеративний процес із точки  $(0,0)$ . Для побудови множини Жулія необхідно фіксувати значення  $c$  і вибирати початкові значення  $z_0$  з деякої області. При цьому критерій належності множині той самий – залишаються точки, які «не вилітають» у нескінченність. Описаним способом будують так звану заповнювальну

множину Жуліа. Критерій, пов'язаний із колом радіусом 2, зберігається, і саме значення  $c$  необхідно вибирати тільки з кола і точки вибирати тільки в ньому. Приклади двох множин Жуліа показано на рисунку 1.31.

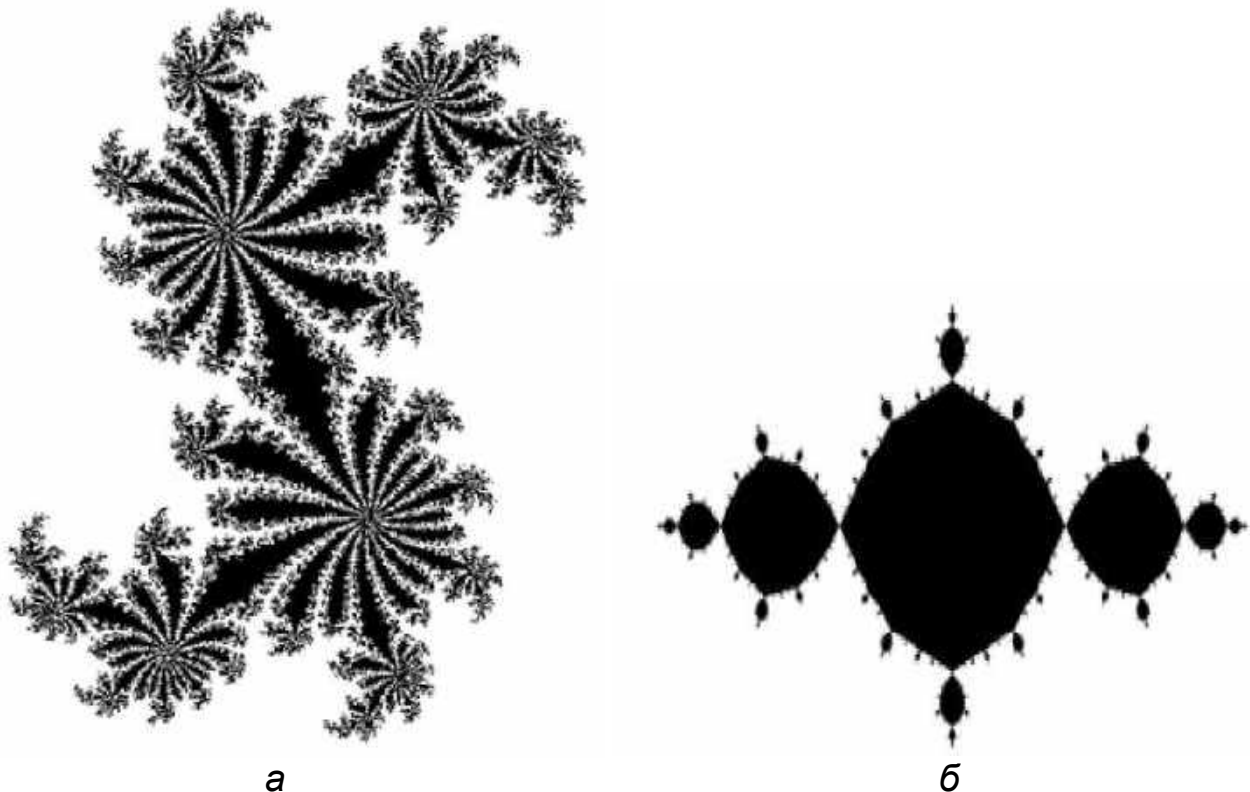


Рисунок 1.31 – Множини Жуліа: *a* – для  $c = (0,377; -0,248)$ ;  
*б* – для  $c = (-1; 0)$

Як і множину Мандельброта, множини Жуліа можна розфарбовувати залежно від швидкості спадання точок.

**Стохастичні (випадкові) фрактали** отримують у тому випадку, якщо в ітераційному процесі випадковим чином змінюють будь-які його параметри [8, 14]. При цьому виходять об'єкти дуже схожі на природні – несиметричні дерева, порізані берегові лінії тощо. Двовимірні стохастичні фрактали використовують під час моделювання рельєфу місцевості та поверхні морів.

Простим випадковим фракталом є траєкторія частинки, що здійснює броунівський рух, як показано на рисунку 1.32.

Інший приклад випадкового фрактала є складнішим, але так само поширеним у природі – одержують у процесі так званої дифузійно-обмеженої агрегації. Такі фрактали називають **фрактальними кластерами** [20].

Фрактальний кластер можна змоделювати таким чином. Вибирають сферу (у двовимірному випадку – коло) достатньо великого радіуса, на поверхні якої час від часу у випадкових місцях генерують частинки, які потім дифундують у середину сфери. У центрі сфери розташовується так

званий зародок. У разі зіткнення з ним частинка, що дифундує, «прилипає» до нього і більше не рухається. Потім із цим зародком стикається наступна частинка, випущена з поверхні сфери, і так відбувається до нескінченності. Потік частинок із поверхні сфери вважають достатньо малим, так що зіткненнями частинок, що дифундують, одна з одною можна нехтувати [14]. У такий спосіб утворюється дуже гілляста структура, яку у двовимірному випадку зображено на рисунку 1.33 [14]. Великі гілки всередині «екрануються» відростками достатньо великої довжини. Із зростанням структури кількість гілок і їх розміри збільшуються.

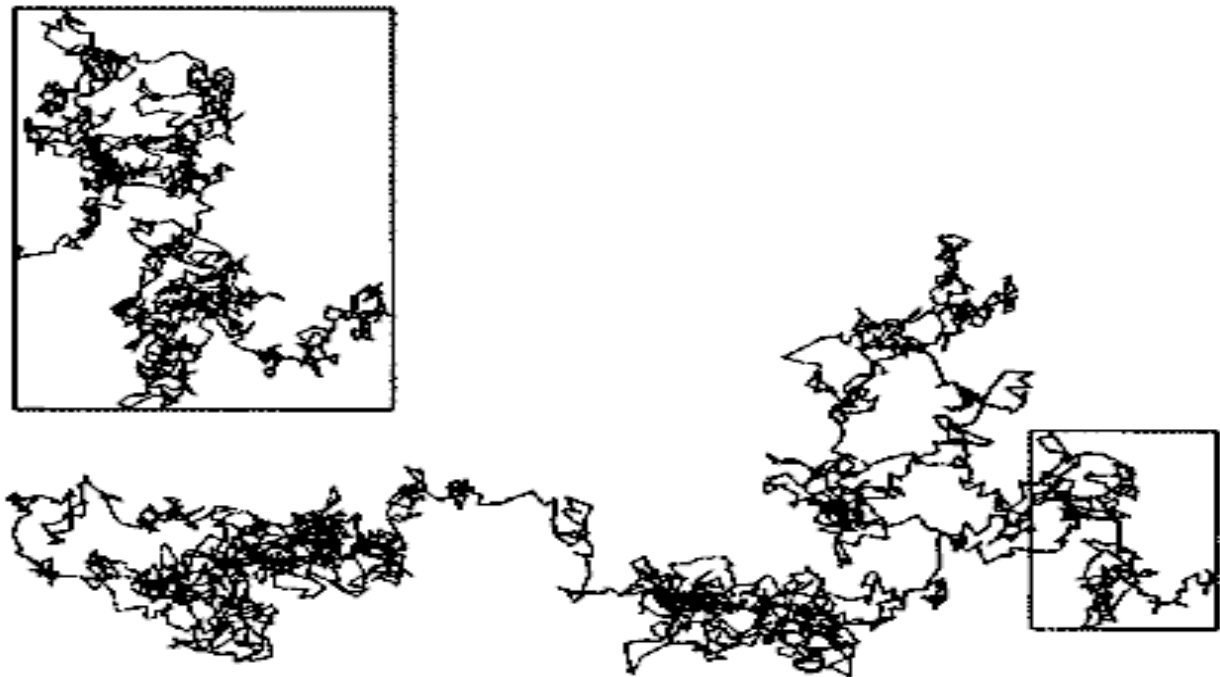


Рисунок 1.32 – Траєкторія броунівської частинки



Рисунок 1.33 – Фрактальний кластер, отриманий у процесі дифузійно-обмеженої агрегації

У природі подібні фрактальні кластери трапляються дуже часто. Так, наприклад, зростають корали, пухлини в живих організмах, звичайна пічна сажа, кристали з пересиченого розчину, сніжинки [20].

У суперіонних провідниках, наприклад AgBr, такі кластери обмежують час їх практичного використання. Під час достатньо тривалого проходження струму рухомі йони срібла, з'єднуючись, утворюють фрактальний кластер, який врешті-решт замикає електроди і виводить зразок провідника з ладу.

Існують й інші класифікації фракталів, наприклад ділення фракталів на детерміновані (алгебраїчні і геометричні) та недетерміновані (стохастичні).

### 1.2.1.3 Поняття розмірності

Центральним поняттям теорії фракталів є поняття розмірності – кількості вимірювань, за допомогою яких можна задати положення точки на геометричному об'єкті. Первинне визначення фрактала, яке навів Б. Мандельброт, пов'язане з таким поняттям: «фракталом називається множина, розмірність Гаусдорфа – Безиковича якої є строго більшою за топологічну розмірність» [9]. Розглянемо поняття розміру, міри і розмірності.

Розмір об'єкта можна виміряти лінійкою. Здебільшого розмір є малоінформативним. На рисунку 1.34, а показано дві фігури, і визначити, яка із цих фігур є більшою, майже неможливо. Якщо порівнювати висоту, то ліва фігура більше, а якщо ширину – права.

Порівняння розмірів може бути інформативним, якщо фігури (предмети) подібні одна до одної (рисунок 1.34, б). У цьому випадку під час порівняння будь-якого розміру: ширини, висоти, сторони, периметра, радіуса вписаного кола або будь-якого іншого завжди вийде, що права фігура (трикутник) є більшою.

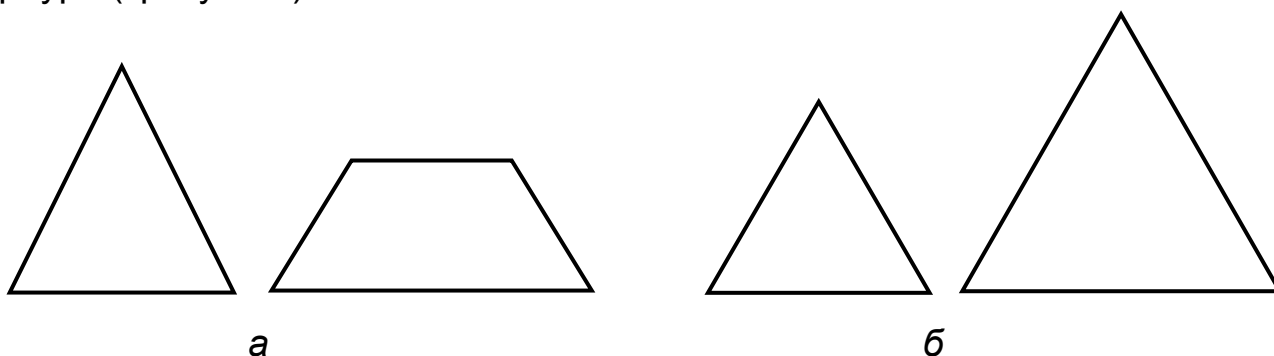


Рисунок 1.34 – Поняття розміру

Міра також призначена для вимірювання об'єктів, але її визначають не лінійкою. Головна її властивість – адитивність, тобто за умови злиття

двох об'єктів (фігур) міра суми об'єктів дорівнює сумі мір початкових об'єктів.

Міра одновимірних об'єктів пропорційна розміру. Якщо взяти відрізки довжиною 1 см і 3 см, скласти їх, то сумарний відрізок матиме довжину 4 см ( $1 + 3$ ).

Міру неодновимірних тіл обчислюють за деякими правилами, які добирають так, щоб міра зберігала адитивність. Наприклад, якщо взяти квадрати зі сторонами 3 см і 4 см (рисунок 1.35), і скласти їх, то можна підсумувати площі ( $9 + 16 = 25$ ), тобто сторона (розмір) буде дорівнювати 5 см. І доданки, і сума є квадратами, подібними один до одного, і можна порівнювати їх розміри. Виявляється, що розмір суми не дорівнює сумі розмірів.

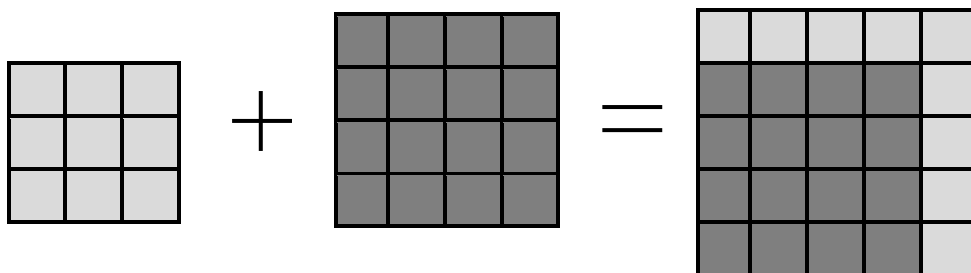


Рисунок 1.35 – Адитивність міри двовимірних тіл

Розмірність дає змогу пов'язати міру і розмір. Позначимо розмірність –  $D$ , міру –  $M$ , розмір –  $L$ . Формула, що пов'язує ці три величини, має вигляд

$$M = L^D. \quad (1.19)$$

Для звичних мір ця формула визначає конкретні характеристики фігур. Для двовимірних тіл ( $D = 2$ ) мірою  $M$  є площа  $S$ :

$$S = L^2, \quad (1.20)$$

для тривимірних тіл ( $D = 3$ ) – об'єм:

$$V = L^3. \quad (1.21)$$

Таким чином, можна зробити висновок: якщо фігуру зменшити в  $N$  разів (змінити масштаб), то вона поміститься в початковій фігурі  $N^D$  раз. Дійсно, якщо зменшити відрізок ( $D = 1$ ) у п'ять разів, то він поміститься в початковому відрізку рівно п'ять разів ( $5^1 = 5$ ). Якщо трикутник ( $D = 2$ ) зменшити в три рази (рисунок 1.36, а), то він поміститься в початковому трикутнику дев'ять разів ( $3^2 = 9$ ). Якщо куб ( $D = 3$ ) зменшити у два рази (рисунок 1.36, б), то він поміститься в початковому кубі вісім разів ( $2^3 = 8$ ).



Правильним є і інший висновок: якщо за умови зменшення розміру фігури в  $\epsilon$  разів, виявляється, що вона укладається в початковій фігурі  $N$  разів.

У 300 році до нашої ери **Евклід** розпочав книгу I «Начала», де подав декілька визначень:

1 Точка – це те, що не має частин.

2 Лінія – це довжина без ширини.

3 Поверхня – це те, що має тільки довжину і ширину.

У книзі XI він додав 4-те визначення: об'ємна фігура – це те, що має довжину, ширину і висоту.

Поняття розмірності є фундаментальним поняттям у фізиці та математиці. Спочатку розмірність розуміли як мінімальну кількість параметрів, необхідних для опису положення точки в просторі. Дійсно, на площині потрібно задати дві координати точки, на відрізку достатньо однієї.

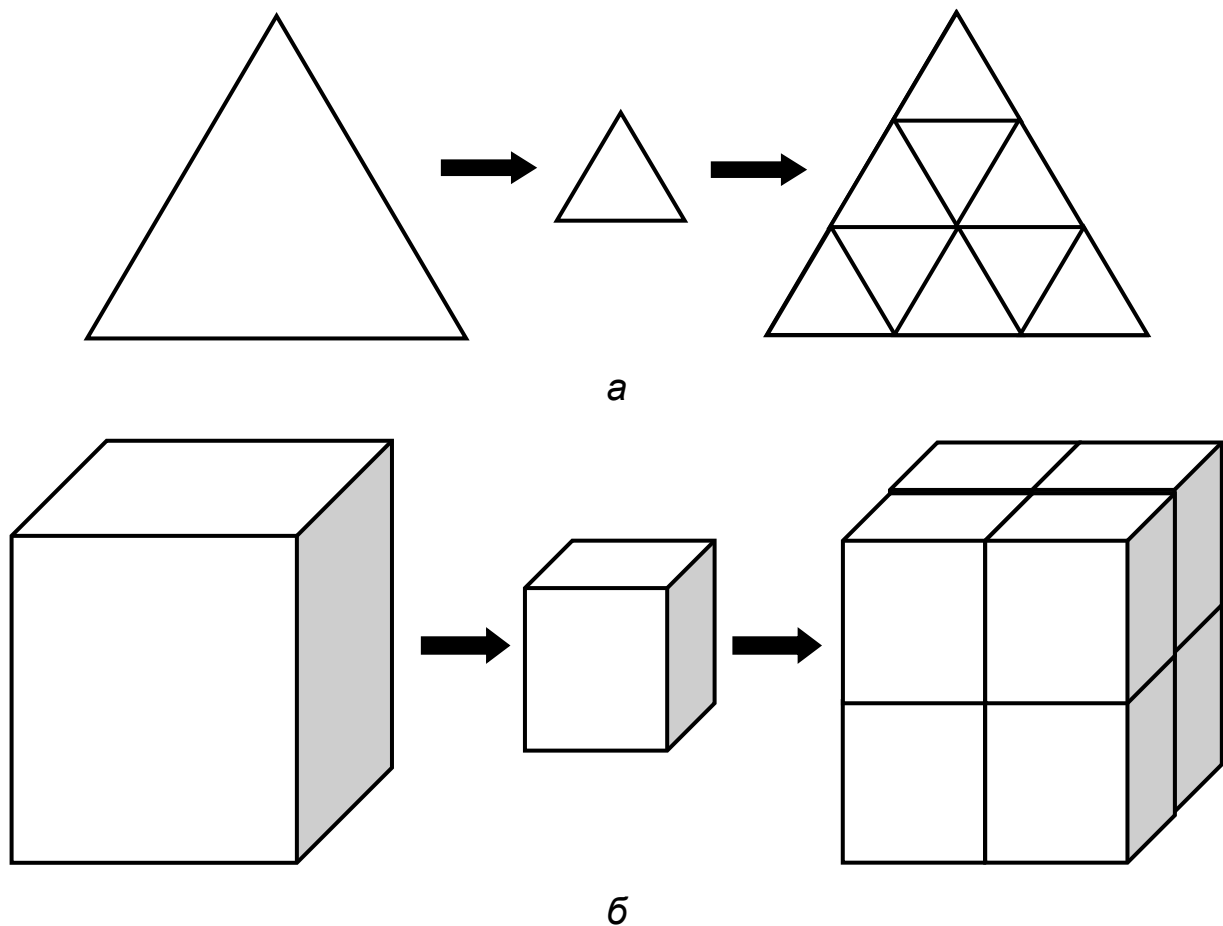


Рисунок 1.36 – Укладання трикутників (а), кубів (б)

У повсякденному житті постійно існують розмірності. Визначається довжина дороги (250 м), визначається площа квартири ( $8 \text{ м}^2$ ) і на наліпці пляшки води позначається її об'єм ( $0,5 \text{ дм}^3$ ). Ці поняття цілком зрозумілі і, здавалося б, не потребують роз'яснення. Лінія має розмірність 1. Це

означає, що, вибравши точку відліку, можна будь-яку точку на цій лінії визначити за допомогою одного числа – додатного або від’ємного. Це стосується всіх ліній – кола, квадрата, параболи і т. д.

Розмірність 2 означає, що будь-яку точку можна однозначно визначити двома числами. Не слід думати, що двовимірний означає плоский. Поверхня сфери теж двовимірна (її можна визначити за допомогою двох значень – кутів на зразок широти і довготи).

З математичного погляду розмірність визначається таким чином:

– для одновимірних об’єктів – збільшення у два рази їх лінійного розміру приводить до збільшення розмірів (у цьому випадку довжини) у два рази ( $2^1$ );

– для двовимірних об’єктів збільшення у два рази лінійних розмірів приводить до збільшення розміру (наприклад, площі прямокутника) в чотири рази ( $2^2$ );

– для тривимірних об’єктів збільшення лінійних розмірів у два рази приводить до збільшення об’єму у вісім разів ( $2^3$ ) і т.д.

Таким чином, розмірність  $D$  можна розрахувати з огляду на залежність збільшення розміру об’єкта  $S$  від збільшення лінійних розмірів  $L$ :

$$D = \lg(S)/\lg(L); \quad (1.22)$$

для лінії

$$D = \lg(2)/\lg(2) = 1;$$

для площини

$$D = \lg(4)/\lg(2) = 2;$$

для об’єму

$$D = \lg(8)/\lg(2) = 3.$$

Анрі Пуанкаре звернув увагу на необхідність аналізу поняття розмірності та вказав на індуктивну природу цього поняття [46]. Згідно з його ідеєю «простору» (або множини) слід приписувати розмірність  $n$ , якщо дві його точки можуть бути відокремлені видаленням підмножини точок розмірністю  $n - 1$  (рисунок 1.37). Далі для позначення розмірності простору  $X$  (або множини) використовуватимемо прийняте позначення  $\text{Dim}\{X\} = n$ .

З огляду на це визначимо індуктивну розмірність таким чином:

$$\text{Dim}\{\emptyset\} = -1,$$

де  $\emptyset$  – пуста множина.

Розмірність простору  $X$  є таким найменшим цілим числом  $n$ , що кожна точка простору має околицю, межі яких мають розмірність меншу за  $n$ .

Згідно з визначенням визначимо розмірність точки. Зрозуміло, що для відокремлення точки нічого не потрібно. Для її відокремлення

достатньо пустої множини  $\{\emptyset\}$ . Тоді розмірність точки буде на одиницю більшою за розмірність пустої множини:

$$\text{Dim}\{\text{point}\} = 1 + \text{Dim}\{\emptyset\} = 1 - 1 = 0.$$

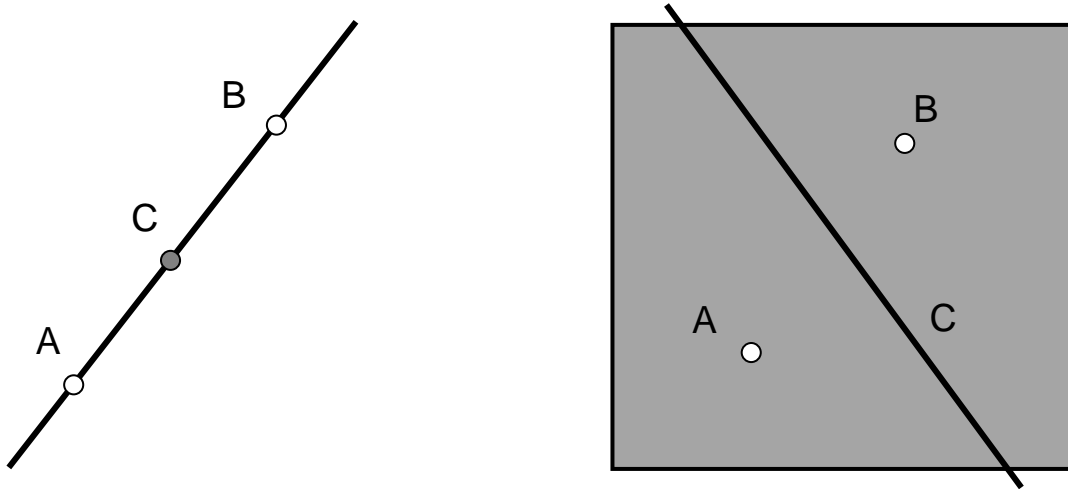


Рисунок 1.37 – Відокремлення точок множиною меншої розмірності

Таким чином, розмірність точки дорівнюватиме 0. Аналогічно можна тепер встановити розмірності відрізка і складніших множин:

$$\text{Dim}\{\text{line}\} = 1 + \text{Dim}\{\text{point}\} = 1 + 0 = 1;$$

$$\text{Dim}\{\text{square}\} = 1 + \text{Dim}\{\text{line}\} = 1 + 1 = 2;$$

$$\text{Dim}\{\text{cub}\} = 1 + \text{Dim}\{\text{square}\} = 1 + 2 = 3.$$

Очевидно, що визначена таким чином розмірність може набувати тільки цілих значень.

З розвитком теорії розмірності було знайдено інший шлях до її визначення [46]. Для простоти викладемо цю ідею у двовимірному випадку. Розглянемо двовимірну область і поділимо її на маленькі осередки, які мають свою межу (рисунок 1.38). Позначена на рисунку 1.38 точка належить відразу або чотирьом, або трьом осередкам. Змінюючи спосіб поділу на осередки, не можна досягти зникнення таких точок, що належать не менше ніж трьом осередкам.

На рисунку 1.38 видно, що якими би не були такий поділ і форма осередків, завжди будуть точки, що належать одночасно трьом осередкам. Це спостереження дало змогу сформулювати теорему Лебега – Брауера: якщо  $n$ -вимірна фігура поділена на достатньо малі осередки, то неодмінно існують точки цієї фігури, що належать щонайменше до  $n + 1$  осередків.

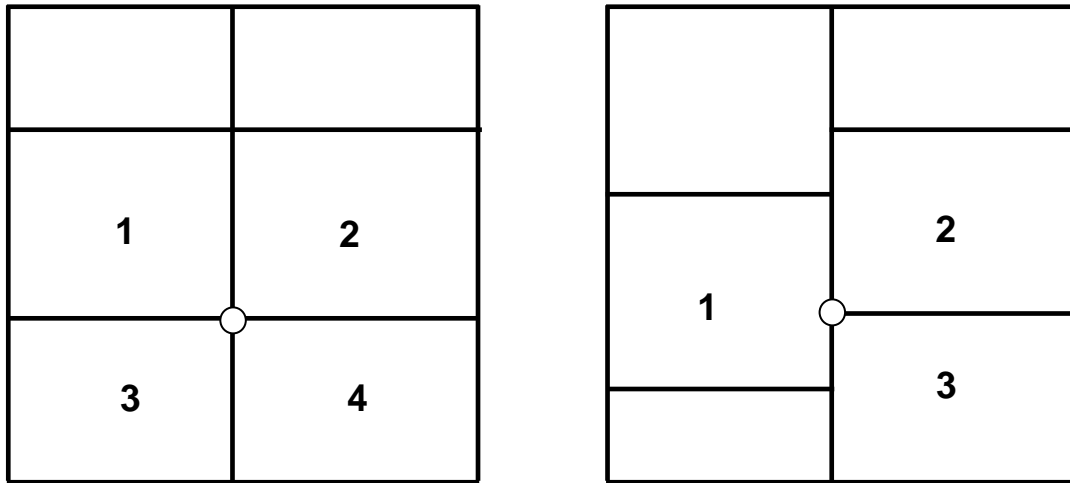


Рисунок 1.38 – Покриття квадрата осередками

Таким чином, отримаємо визначення розмірності, яка зберігається при безперервних взаємно однозначних відображеннях і є топологічним інваріантом. Це означає, що жодні множини не можуть бути топологічно еквівалентними, якщо мають різну розмірність. Із цієї причини визначену вище розмірність також називають топологічною розмірністю простору  $X$ , яку можна визначити двома способами: відокремлюючи дві точки або покриваючи простір достатньо малими осередками. Необхідно зазначити, що топологічна розмірність завжди є цілим числом, а для пустої множини її значення дорівнює  $-1$ .

#### 1.2.1.4 Визначення фрактальної розмірності

**Розмірність Гаусдорфа – Безиковича** (ємнісна розмірність), що найчастіше використовується, дає змогу оцінити фрактальні характеристики різних структур [14, 25]. Щодо ідеальних об'єктів класичної евклідової геометрії ця розмірність дає ті самі числові значення, що й топологічна розмірність (інакше кажучи, дорівнює нулю для точки, одиниці – для гладкої плавної лінії, двом – для фігури і поверхні, трьом – для тіла і простору). Але, збігаючись зі старою топологічною розмірністю на ідеальних об'єктах, нова розмірність чутливіша до різних недосконалостей реальних об'єктів і дає змогу розрізняти й індивідуалізувати те, що раніше було непомітним.

Так, відрізок прямої, відрізок синусоїди і меандр не відрізняються з огляду на топологічну розмірність – усі вони мають топологічну розмірність, яка дорівнює одиниці, тоді як їх розмірність Гаусдорфа – Безиковича різна і дає змогу числом вимірювати ступінь звивистості. Але найнезвичайніше в розмірності Гаусдорфа – Безиковича те, що ця розмірність може набувати не тільки цілих значень, як топологічна розмірність, але й дробових значень.

Дорівнює одиниці для прямої (нескінченної, напівнескінченної або для скінченного відрізка), але розмірність Гаусдорфа – Безиковича

збільшується зі збільшенням звивистості (1,02 – для злегка звивистої лінії, 1,15 – для звивистої, 1,53 – для дуже звивистої тощо), тоді як топологічна розмірність наполегливо ігнорує всі зміни, що відбуваються з лінією, тільки якщо немає розриву або склеювання яких-небудь точок. При цьому, збільшуючи своє значення, розмірність Гаусдорфа – Безиковича не змінює його стрибком, що характерно для топологічної розмірності. Саме для того, щоб підкреслити здатність розмірності Гаусдорфа – Безиковича набувати дробових, нецілих значень, Б.Мандельброт назвав її фрактальною розмірністю.

Нехай у  $d$ -вимірному просторі розміщено якийсь геометричний об'єкт – якусь лінію (криву), що являє собою множину рівномірно розподілених  $N_0$  точок. Простий спосіб виміряти довжину кривої полягає в тому, щоб покрити цю множину точок малими квадратами зі стороною завдовжки  $\varepsilon$  (рисунок 1.39), замість квадратів можна взяти кола радіусом  $\varepsilon$ . Кожна точка кривої буде належати одному з квадратів. Квадрати, у яких немає точок кривої, враховуватися не будуть. Іншими словами, необхідно знайти мінімальну кількість таких квадратів  $N(\varepsilon)$ , що покривають усю множину.

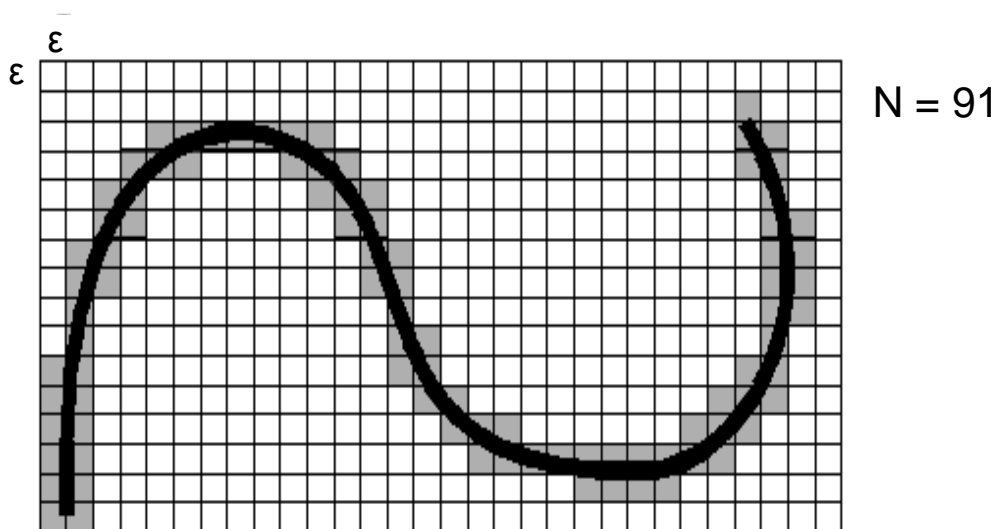


Рисунок 1.39 – Покриття кривої квадратами

Уведемо (побудуємо) суму по всіх квадратах, що покривають криву, яка залежить від параметрів  $p$  і  $\varepsilon$ :  $m_p = \sum \varepsilon^p$ , де  $p$  – довільний дійсний параметр. Спрямуємо розмір квадратів  $\varepsilon$  до нуля і подивимося, як залежить значення цієї межі від параметра  $p$ . Межа (рисунок 1.40) за малих  $p$  дорівнює  $\infty$ , а за великих – 0.

Є проміжне критичне значення  $p_x$ , таке, що за зменшення  $p$  значення  $m_p$  прямує до нуля для  $p > p_x$  і до нескінченності для  $p < p_x$ , тобто відбувається стрибок від 0 до  $\infty$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_p(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & p > p_x, \\ \infty, & p < p_x. \end{cases} \quad (1.23)$$

Значення  $p = D$  і називається розмірністю Гаусдорфа – Безиковича.

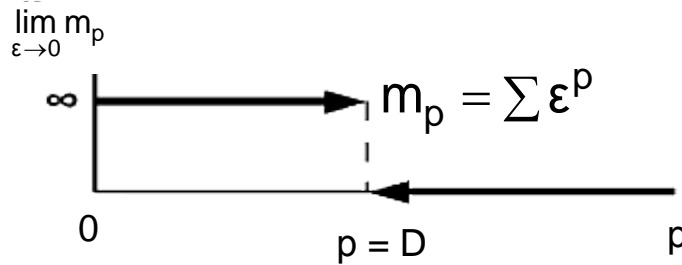


Рисунок 1.40 – Залежність межі  $\lim m_p$ , якщо  $\varepsilon \rightarrow 0$

Розглянемо, чому дорівнює розмірність Гаусдорфа – Безиковича, наприклад одиничного квадрата  $Q$  (рисунок 1.41).

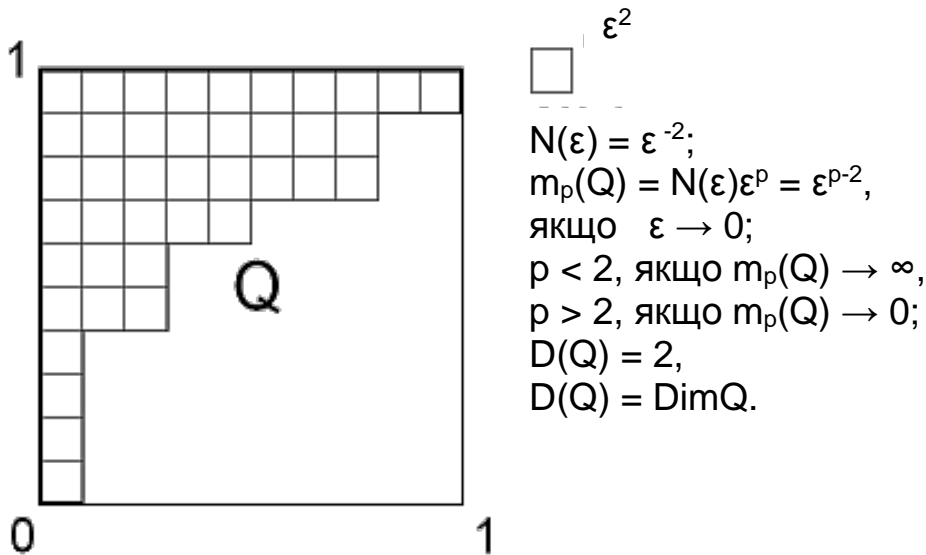


Рисунок 1.41 – Розмірність Гаусдорфа – Безиковича квадрата  $Q$

Його топологічна розмірність дорівнює 2. Для цього будемо покривати його малими квадратами розміром  $\varepsilon$ . Наведена вище сума або міра Гаусдорфа дорівнює  $\varepsilon^p$ , помножена на кількість членів суми, оскільки всі доданки однакові. Кількість малих квадратів розміром  $\varepsilon$ , що покривають квадрат  $Q$ , легко підрахувати, і воно становить

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-2},$$

тоді

$$m_p(Q) = N(\varepsilon)\varepsilon^p = \varepsilon^{p-2}.$$

Якщо  $p > 2$ , то ця сума пропорційна додатному ступеню  $\varepsilon$  і за умови прямування  $\varepsilon$  до нуля змінюється на нуль. Якщо  $p < 2$ , то сума пропорційна

від'ємному ступеню  $\varepsilon$ , і межа при  $\varepsilon \rightarrow 0$  дорівнює  $m$ . Тоді згідно з визначенням, наведеним вище, розмірність Гаусдорфа – Безиковича квадрата  $Q$

$$D(Q) = 2.$$

Таким чином, для звичайних множин розмірність Гаусдорфа – Безиковича збігається з їх топологічною розмірністю

$$D(Q) = \text{Dim}Q.$$

Якщо  $N_0$  велике, то кількість квадратів, що покривають лінію, змінюватиметься залежно від  $\varepsilon$  як [3]

$$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon}. \quad (1.24)$$

Аналогічно, якщо точки розподілити рівномірно по двовимірній поверхні в тривимірному просторі, то мінімальна кількість кубів, що покривають множину, змінюватиметься залежно від  $\varepsilon$  як

$$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (1.25)$$

Розмірність загалом визначається законом подібності

$$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^D}. \quad (1.26)$$

Узявши логарифм (основа логарифму може бути довільною) від правої та лівої частин співвідношення (1.26), отримуємо [3]

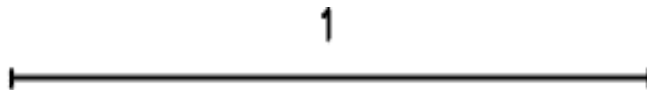


$$\lg N(\varepsilon) = -D \lg \varepsilon. \quad (1.27)$$

Знайдемо  $D$  як

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)}. \quad (1.28)$$

Розглянемо порядок визначення розмірності Гаусдорфа – Безиковича для деяких прикладів фрактальних множин.

**Канторівська множина.** На кожному кроці побудови цієї множини визначимо кількість і довжину відрізків:

	Номер кроку	Кількість відрізків	Довжина відрізка
	$n = 0$	$N = 1$	$\epsilon = 1$
	$n = 1$	$N = 2$	$\epsilon = 1/3$
	$n = 2$	$N = 4$	$\epsilon = (1/3)^2$

Знайдемо фрактальну розмірність. Для цього візьмемо за основу відрізок завдовжки  $\epsilon = 1/3^n$ .

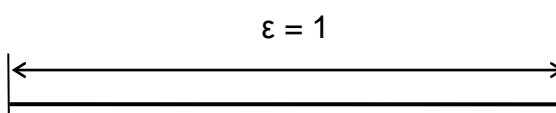
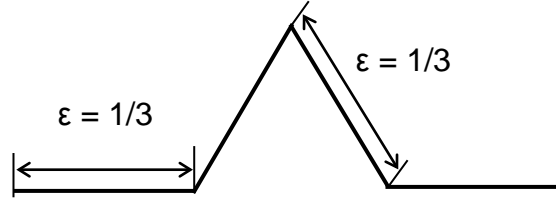
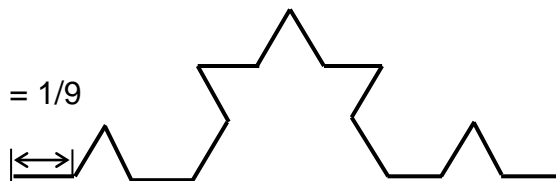
Мінімальна кількість таких відрізків, що необхідна для покриття множини:

$$N(\epsilon) = 2^n,$$

тому їх фрактальна розмірність

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N(\epsilon)}{\lg(1/\epsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg 2^n}{\lg 3^n} = \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0,6309.$$

**Крива Коха.** На кожному кроці побудови цієї кривої визначимо кількість і довжину відрізків:




	Номер кроку	Кількість відрізків	Довжина відрізка
	$n = 0$	$N = 1$	$\epsilon = 1$
	$n = 1$	$N = 4$	$\epsilon = 1/3$
	$n = 2$	$N = 16$	$\epsilon = (1/3)^2$

Знайдемо фрактальну розмірність кривої Коха. Як видно, на  $n$ -му кроці кількість сторін трикутників  $N(\epsilon) = 4^n$ , а довжина сторони  $\epsilon = (1/3)^n$ , тому



$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg 4^n}{\lg 3^n} = \frac{\lg 4}{\lg 3} \approx 1,2618.$$

**Серветка Серпінського.** На кожному кроці побудови серветки Серпінського визначимо кількість і довжину сторін трикутників:

	Номер кроку	Кількість чорних трикутників	Довжина сторони трикутника
	$n = 0$	$N = 1$	$\varepsilon = 1$
	$n = 1$	$N = 3$	$\varepsilon = 1/2$
	$n = 2$	$N = 9$	$\varepsilon = (1/2)^2$

Кількість чорних трикутників у цій будові збільшується як  $3^n$ , де  $n$  – номер кроку, а довжина їх сторони зменшується як  $1/2^n$ . Тому фрактальна розмірність

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg 3^n}{\lg 2^n} = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1,5849.$$

Таким чином, розмірності Гаусдорфа – Безиковича розглянутих фракталів мають дробові а не цілі значення, які є строго більшими за їх топологічні розмірності (канторівська множина  $\text{Dim KM} = 0$ , крива Коха  $\text{Dim KK} = 1$ , серветка Серпінського  $\text{Dim CC} = 2$ ).

Існує два заперечення стосовно використання ємності як міри фрактальної розмірності – теоретичне й обчислювальне. По-перше, ємнісна розмірність – геометрична міра, тобто вона не враховує частоту, з якою траєкторія відвідує елемент покриття (квадрат або коло). По-друге, підрахунок гіперкубів, що створюють покриття множини, потребує великих витрат обчислювального часу.

Ще одним типом розмірності, яку часто використовують, є **інформаційна розмірність** [14]

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum P_i \lg P_i}{\lg \varepsilon}. \quad (1.29)$$

Така розмірність є подібною до ємнісної розмірності (1.28), але враховує в тій або іншій формі частоту, з якою траєкторія потрапляє в елемент поділу (коло або квадрат). Як і в разі ємності, множину точок, розмірність якої потрібно визначити, покривають  $N$  квадратами зі стороною завдовжки  $\varepsilon$ . Отож множина точок розглядається як рівномірна дискретизація безперервної траєкторії.

Інформаційна розмірність пов'язана з ємнісною як  $D_1 \leq D$ .

**Кореляційна розмірність** є третім найпоширенішим типом фрактальної розмірності. Під час її визначення безперервна траєкторія дискретизується – замінюється множиною з  $N$  точок  $\{x_i\}$ . Потім обчислюють відстань між парами точок  $r_{ij} = |x_i - x_j|$ , використовуючи або звичайну евклідову міру відстані (квадратний корінь із суми квадратів компонент), або яку-небудь еквівалентну міру (наприклад, суму абсолютних величин компонент вектора). Кореляційну функцію визначають як [14]

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left( \begin{array}{l} \text{кількість пар } (i, j), \\ \text{для яких відстань } r_{ij} < \varepsilon \end{array} \right). \quad (1.30)$$

Ця функція залежить від  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  за ступеневим законом, тобто

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = a\varepsilon^{D_2},$$

тому кореляційну розмірність можна визначити за нахилом прямої на графіку  $(\lg C, \lg \varepsilon)$ :

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg C(\varepsilon)}{\lg \varepsilon}. \quad (1.31)$$

Інформаційна і кореляційна розмірності обмежують ємнісну розмірність знизу, тобто

$$D_2 \leq D_1 \leq D.$$

Однак у багатьох випадках усі три розмірності дуже подібні.

**Розмірність Реньї** узагальнює всі розглянуті вище розмірності. За визначенням  $q$ -розмірність Реньї визначають за формулою [3]

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\lg \sum_{i=1}^N P_i^q}{\lg \varepsilon}, \quad (1.32)$$

де  $P_i$  – імовірність попадання на  $i$ -ту компоненту фрактала.

**Показник Герста.** Одним із способів обчислення коефіцієнта H є аналіз так званої R/S статистики (нормованого розмаху) [14]. Герст Г. досліджував зміну рівня води в річці Ніл. Позначав у щорічний рівень води. Тоді середній рівень води (середнє значення) за  $\tau$  років становить

$$\langle y \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} y(t). \quad (1.33)$$

Було отримано новий (кумулятивний) ряд, що є сумою за час  $t$  щорічних коливань рівня річки Ніл щодо середнього рівня. Вираз для накопиченого відхилення  $X(t, \tau)$  поточного значення від середнього значення  $\langle y \rangle_{\tau}$  часового ряду  $y(t)$  за період дослідження  $\tau$  має вигляд

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{y(u) - \langle y \rangle_{\tau}\}. \quad (1.34)$$

Стандартне відхилення оцінюється за допомогою виразу

$$S = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{y(t) - \langle y \rangle_{\tau}\}^2}, \quad (1.35)$$

а  $t$  набуває дискретних цілочислових значень.

При цьому діапазон між максимальним і мінімальним значеннями  $X(t, \tau)$  за час  $\tau$  позначається  $R(\tau)$ . Розмах накопиченого відхилення  $X(t, \tau)$  визначається таким виразом:

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau), \quad (1.36)$$

тоді R/S-статистику можна визначити безрозмірним відношенням діапазону  $R(\tau)$  до стандартного відхилення  $S$ :

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H. \quad (1.37)$$

Узявши логарифм співвідношення (1.37), отримуємо такий вираз:

$$\lg\left(\frac{R}{S}\right) = H \lg\left(\frac{\tau}{2}\right). \quad (1.38)$$

Вираз (1.38) описує графік залежності нормованого розмаху від періоду спостереження, побудованого в подвійному логарифмічному масштабі (рисунок 1.42).

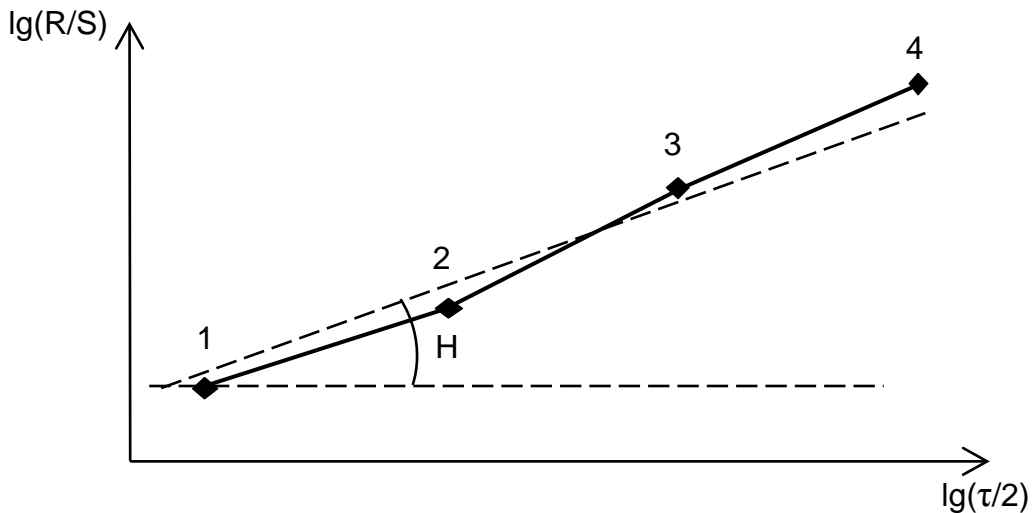


Рисунок 1.42 – Графік залежності  $\lg(R/S)$  від  $\lg(\tau/2)$

Як видно на рисунку 1.42, шуканий показник  $H$ , який називається показником Герста, буде дорівнювати коефіцієнту кута нахилу отриманого графіка.

За певних умов фрактальну розмірність часового ряду може бути обчислено за допомогою цього показника за формулою [29]

$$D = 2 - H. \quad (1.39)$$

Фрактальна розмірність залежить від того, як її вимірювати. Це означає, що, окрім формул для підрахунку розмірності, необхідно точно задати і спосіб вимірювання. Ці особливості можуть приводити до утворення не тільки різних видів розмірностей, але й різних понять, різних підходів до вимірювання.

**Метод покриття.** Спосіб визначення фрактальної розмірності за допомогою покриття сигналів (зображень) квадратами (кубами) містить такі кроки:

1 Задати деяку величину (значення)  $\varepsilon$ , розбити часову область існування початкових даних на квадрати зі стороною довжиною  $\varepsilon$  і підрахувати, скільки квадратів накривають усі відомі точки. Виходить одне значення  $N(\varepsilon)$ .

2 Припустити, що було проведено обчислення  $N(\varepsilon)$  для різної довжини сторони  $\varepsilon$  (наприклад, це значення  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_1/2, \varepsilon_3 = \varepsilon_1/4$ )

$$\lg N(\varepsilon) = D \lg \varepsilon.$$

За отриманими даними можна побудувати залежність  $\lg N(\varepsilon)$  від  $\lg 1/\varepsilon$  (рисунок 1.43).

3 Оцінити фрактальну розмірність за отриманими даними, при цьому обмежитись пошуком «найбільш лінійної» ділянки залежності  $\lg N(\varepsilon)$  від  $\lg 1/\varepsilon$ . Потім побудувати на цій ділянці лінійну апроксимацію

$$\lg N(\varepsilon) = b \lg \varepsilon + C,$$

наприклад за методом найменших квадратів (МНК). Як оцінку фрактальної розмірності вибрати  $D = b$ , що дорівнює тангенсу кута нахилу прямої МНК.

Найважче формалізувати в цьому алгоритмі вибір лінійної ділянки, за якою слід оцінювати розмірність. Апроксимація лінійної ділянки з використанням МНК не завжди дає змогу одержати достовірний результат.

На рисунку 1.43 показано графік залежності  $\lg N(\varepsilon)$  від  $\lg 1/\varepsilon$ , якщо лінійна апроксимація проводилася за всіма точками з використанням МНК. З рисунка видно, що така побудова прямої лінії не дала змогу виділити на графіку лінійну ділянку, а помилка апроксимації становила 15 %.

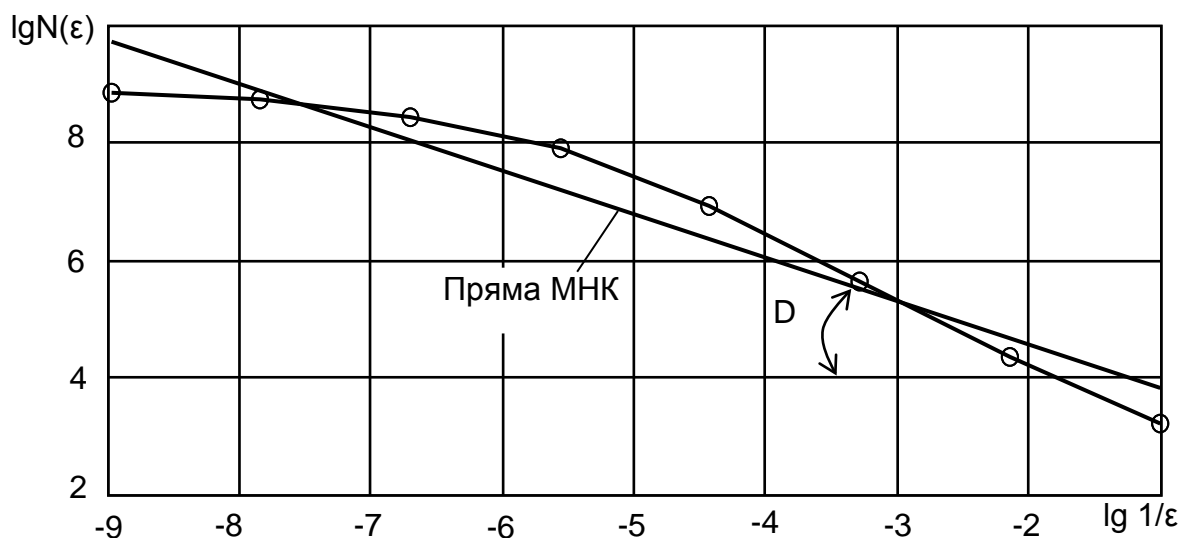


Рисунок 1.43 – Визначення фрактальної розмірності з використанням методу покриття

Розглянемо можливість вибору лінійної ділянки графіка за окремими точками. Спочатку лінійну апроксимацію можна здійснювати на першій ділянці лінійності (рисунок 1.44, а). Як видно з рисунка 1.44, а, пряма лінія буде добре описувати перші три точки графіка, але переважна більшість даних у цьому випадку буде не задіяною (праворуч на графіку), і помилка апроксимації буде високою (12 %).

На другій ділянці лінійності (рисунок 1.44, б) пряма лінія буде добре описувати (охоплювати) п'ять точок графіка, і помилка апроксимації в цьому випадку становитиме 1,4 %, тобто величина фрактальної розмірності буде визначена з більшою точністю.

Точний вибір лінійної ділянки графіка залежності  $\lg N(\varepsilon)$  від  $\lg 1/\varepsilon$  дає змогу правильно визначити величину фрактальної розмірності. Пошук лінійної ділянки і розрахунок фрактальної розмірності здійснювався за допомогою спеціального пакета розширення FracLab 2.0, що було розроблено для системи математичного моделювання MATLAB [47].

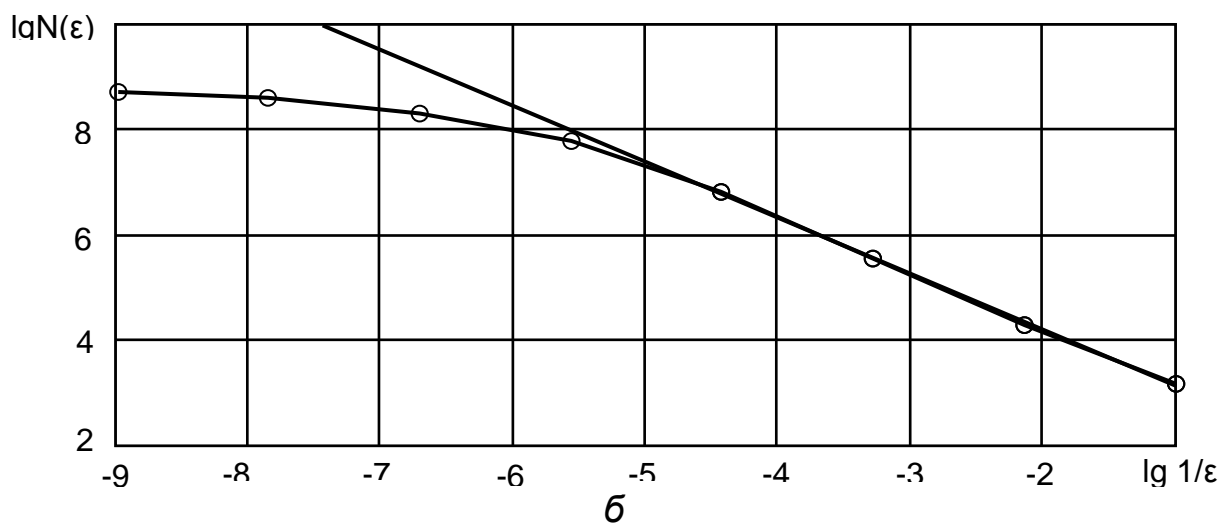
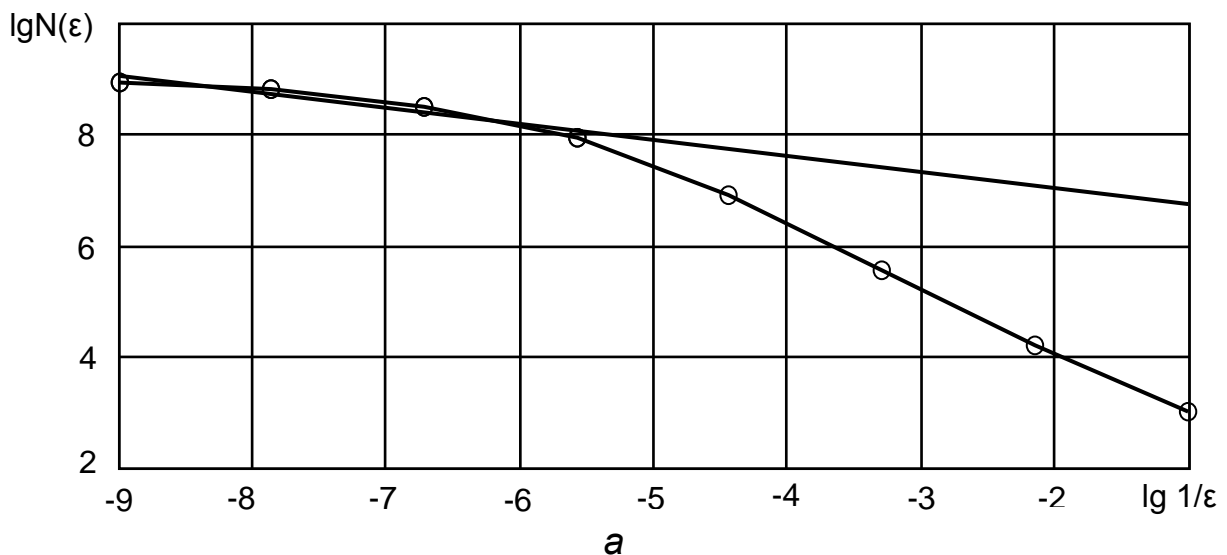


Рисунок 1.44 – Вибір «найбільш лінійної» ділянки графіка:  
 а – на першій ділянці лінійності; б – на другій ділянці лінійності

Таким чином, під час розрахунку фрактальної розмірності необхідно визначити не тільки формулу, за якою буде проведено розрахунок, а й метод визначення і вибрати «найбільш лінійну» ділянку графіка, на якій буде розраховано фрактальну розмірність.

### 1.2.1.5 Вплив відношення сигнал / шум на величину фрактальної розмірності

Дослідимо вплив відношення сигнал / шум на величину фрактальної розмірності за допомогою комп'ютерного експерименту [48]. Як модель сигналу було обрано модель простого гармонічного коливання одиничної амплітуди ( $U = 1$ ) і довільної частоти, кількість точок на період було обрано  $N = 1024$ .

Для моделювання випадкової величини (шуму) застосовувалася вбудована функція створення векторів із нормальним законом розподілу

$\text{norm}(N, m, \sigma)$  системи математичних обчислень Mathcad, при цьому кількість точок випадкової величини дорівнювало  $N = 1024$ , математичне сподівання –  $m = 0$ , а середньоквадратичне відхилення (СКВ) змінювалося від  $\sigma = 0,15$  до  $\sigma = 1$  з дискретністю  $\Delta\sigma = 0,05$ .

Досліджувана вибірка формувалася як результат складання сигналу і шуму [48]. Відношення сигнал / шум розраховувалося як  $q = 20\lg(U/\sigma)$ . При цьому відношення сигнал / шум дорівнювало  $q \approx 16; 14; 12; 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3,5; 3; 2,5; 2; 1,5; 1; 0,5; 0$  дБ.

На рисунку 1.45 наведено модельовані дані: сигнал (а), шум із СКВ  $\sigma = 0,5$  (б), а також адитивна суміш сигналу і шуму, якщо  $q = 16$  дБ (в);  $q = 10$  дБ (г);  $q = 4$  дБ (д);  $q = 1$  дБ (е).

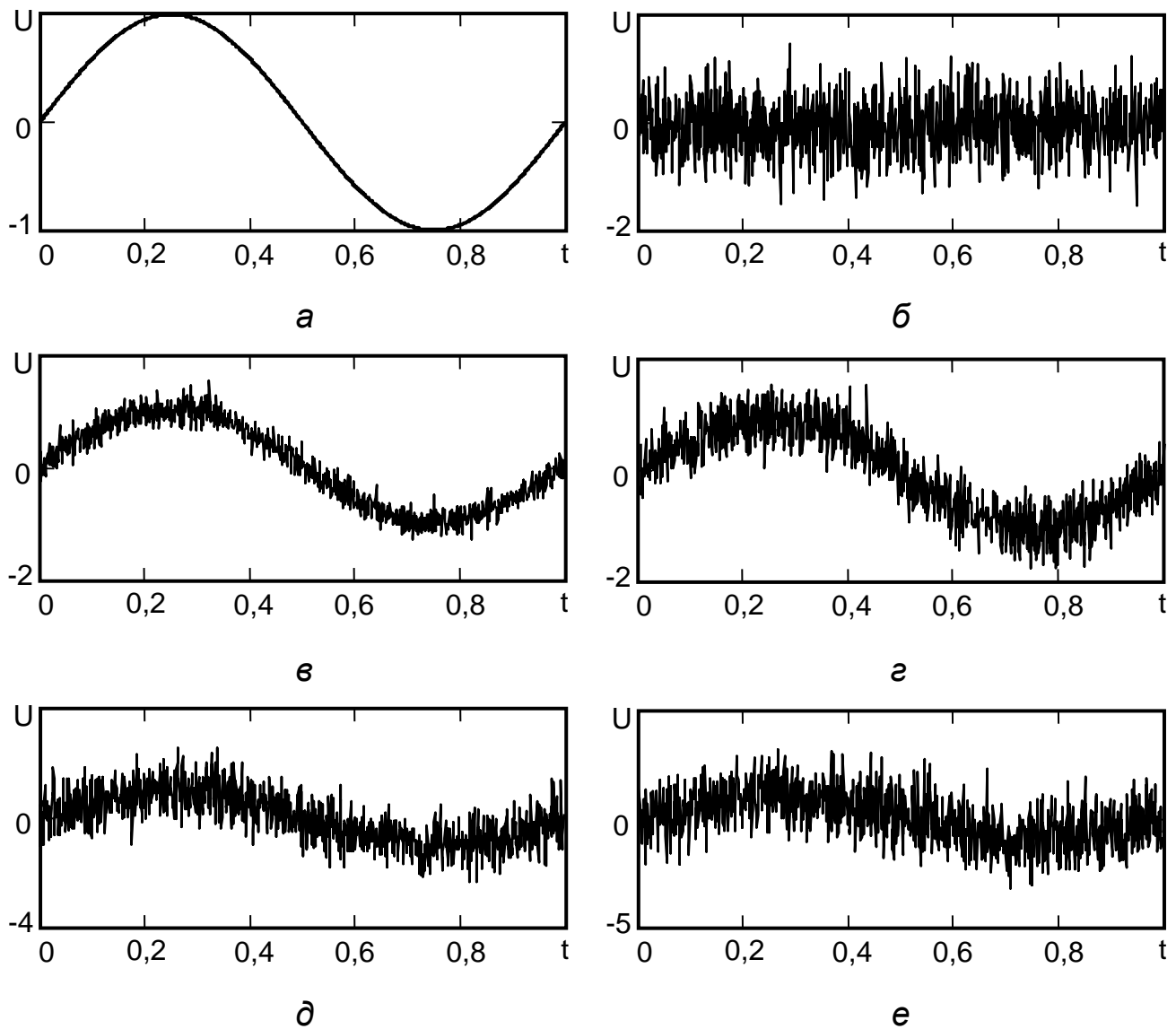


Рисунок 1.45 – Модельовані дані: а – сигнал; б – шум із СКВ  $\sigma = 0,5$ ; в – адитивна суміш сигналу і шуму, якщо  $q = 16$  дБ; г – якщо  $q = 10$  дБ; д – якщо  $q = 4$  дБ; е – якщо  $q = 1$  дБ

За допомогою спеціального пакета розширення FracLab 2.0 системи математичного моделювання MATLAB методом покриття було

розраховано фрактальні розмірності всіх модельованих даних [48]. Сигнал без шуму (див. рисунок 1.45, а) має розмірність  $D_0 = 1,016$ , а простий шум (див. рисунок 1.45, б) –  $D_0 = 1,578$ . Аналіз модельних даних шуму (багаторазове повторення генерації випадкових величин і зміна СКВ) показав, що величина фрактальної розмірності змінюється в межах від  $D_0 = 1,49$  до  $D_0 = 1,6$ .

Таким чином, розраховані значення фрактальних розмірностей свідчать про різний ступінь порізаності сигналу і шуму.

Подальше оброблення полягало в обчисленні фрактальних розмірностей адитивної суміші сигналу і шуму за умови різних значень СКВ шуму (різних відношень сигнал / шум) [48]. Результати розрахунків наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Фрактальні розмірності за умови різних відношень сигнал / шум

Відношення сигнал / шум, дБ	16	14	12	10	9	8	7	6	5
Фрактальна розмірність	1,313	1,356	1,368	1,405	1,428	1,458	1,463	1,474	1,500
Відношення сигнал / шум, дБ	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
Фрактальна розмірність	1,489	1,503	1,510	1,530	1,497	1,494	1,535	1,495	1,555

На рисунку 1.46 наведено залежність нахилу прямих МНК від величини відношення сигнал / шум [59]. Нижня пряма відповідає сигналу, а найвища пряма – шуму. Прямі, розташовані між ними, одержані для адитивної суміші сигналу і шуму за умови різних відношень сигнал / шум (прямі знизу вгору відповідають  $q = 16$  дБ;  $q = 10$  дБ;  $q = 7$  дБ;  $q = 4$  дБ;  $q = 2,5$  дБ;  $q = 1$  дБ).

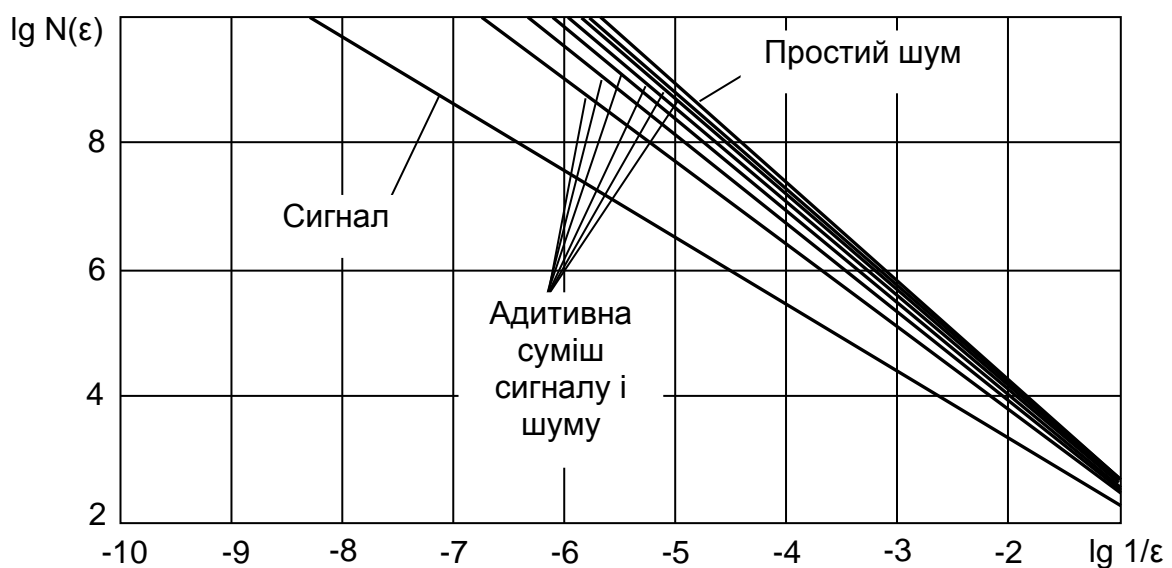


Рисунок 1.46 – Залежність нахилу прямих МНК від величини відношення сигнал / шум



Аналіз даних у таблиці 1.1 і на рисунку 1.46 показує, що зі зменшенням відношення сигнал/шум (із збільшенням СКВ шуму) величина фрактальної розмірності (нахил прямої МНК) адитивної суміші сигналу і шуму збільшується і прямує до величини фрактальної розмірності (нахилу прямої МНК) простого шуму. Порогове значення відношення сигнал/шум, за якого фрактальна розмірність адитивної суміші відрізняється від діапазону змін фрактальної розмірності шуму ( $D_0 = 1,49 - 1,6$ ), становить 6 дБ [48].

Таким чином, на величину фрактальної розмірності впливає величина відношення сигнал/шум. Зменшення відношення сигнал/шум (збільшення СКВ шуму) приводить до збільшення величини фрактальної розмірності адитивної суміші сигналу і шуму та прямує до величини фрактальної розмірності простого шуму. Фрактальна розмірність адитивної суміші майже не відрізняється від фрактальної розмірності простого шуму за умови відношень сигнал/шум, який є меншим за 6 дБ.

## 1.2.2 Метод фазової площини

### 1.2.2.1 Побудова фазових портретів

Деякі особливості структури (форми) сигналів, які неможливо або складно досліджувати аналітично, можна досліджувати якісно за допомогою перетворення початкового сигналу в іншу площину аналізу. В основі перетворення початкового часового ряду у фазову (псевдофазову) площину – метод фазової (псевдофазової) площини (реконструкції атрактора).

Поняття фазової площини виникло за аналогією з фазовим простором, що використовується в класичній і статистичній механіці. Загалом фазовий простір можна визначити як абстрактний математичний простір, у якому осями координат є стан системи та її похідні.

Використання фазової площини дає змогу отримати розв'язок диференціального рівняння не з використанням інтегрування, а його поданням на площині з прямокутною системою координат.

Під фазовою площиною мається на увазі площина, кожна точка якої однозначно визначає стан (фазу) системи.

**Метод фазової площини** є графоаналітичним методом дослідження динамічних систем, що описуються такими рівняннями [49]:

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \quad (1.40)$$

де  $x$  і  $y$  – змінні стани системи;  $P(x,y)$  і  $Q(x,y)$  – функції, що задовольняють умови теорем існування і єдиності рішень;  $t$  – час (незалежна змінна).

Поведінку такої системи можна подати геометрично на площині в прямокутних декартових координатах. У разі такого подання кожний стан

динамічної системи однозначно є точкою на площині з координатами  $x$ ,  $y$ , і, навпаки, кожна точка площини є одним станом досліджуваної динамічної системи. Площина  $Oxy$  називається **фазовою площиною** (рисунок 1.47). Як змінна  $y$  може бути вибрана швидкість зміни координати  $x$ , тобто  $y = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$  [49].

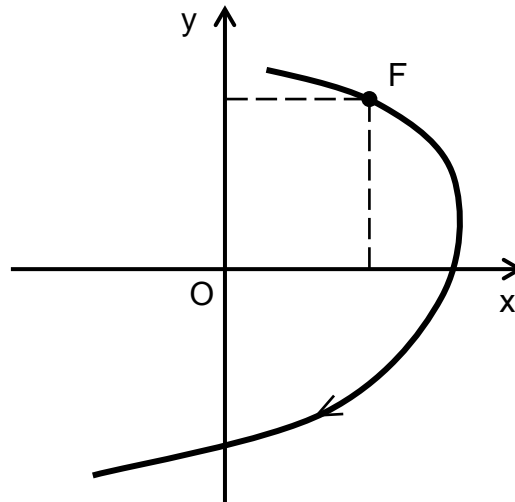


Рисунок 1.47 – Фазова площина, зображальна точка  $F$  і фазова траєкторія

Зміна стану системи зображується на фазовій площині рухом точки  $F$ , яку називають **фазовою точкою, або зображальною точкою**.

Траєкторія, по якій рухається зображальна точка, називається **фазовою траєкторією**. Швидкість і напрям її руху визначаються вектором фазової швидкості  $\{P, Q\}$ . Важливо, що через кожен точку фазової площини проходить тільки одна фазова траєкторія.

Сукупність фазових траєкторій називається **фазовим портретом** системи та відображає сукупність усіх можливих поєднань системи й типи можливих рухів у ній.

**Метод фазової площини** полягає в побудові фазового портрета системи і подальшого його аналізу. Метод дає змогу визначити кількість, типи і характер особливих точок, ізольованих замкнених траєкторій і сепаратрис і дає можливість, спостерігаючи за виглядом фазових траєкторій, наочно уявити всю сукупність рухів, що виникають у динамічній системі за будь-яких початкових умов.

Для побудови фазових портретів до появи комп'ютерів використовували три основні способи:

- метод ізоклін;
- побудову Льенара;
- дельта-метод.

**Метод ізоклін** [49]. У диференціальних рівняннях є три змінні:  $x$ ,  $y$  і  $dy/dx$ . Величина  $N = dy/dx$  є нахилом фазової траєкторії на фазовій площині. Позначимо деяке конкретне значення  $N$  через  $N_1$ , тоді

$$N_1 = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}. \quad (1.41)$$

У рівнянні (1.41) існують тільки дві змінні  $x$  та  $y$ , тому воно визначає єдину криву на площині  $\{x, y\}$ . Властивістю цієї кривої є те, що ця крива – геометричне місце всіх точок, для яких нахил фазової траєкторії дорівнює  $N_1$ . Ця крива має назву **ізокліна**. Якщо задати ряд значень для  $N$  і побудувати сімейство ізоклін, то фазові траєкторії можуть бути побудовані для будь-яких вибраних початкових умов із відрізків прямих, спрямованих відповідно до нахилу, що визначають ізокліни.

Методику побудови наведено на рисунку 1.48. Лінії зі стрілками  $N_1, N_2, N_3$  і  $N_4$  вказують необхідний нахил фазової траєкторії, коли вона перетинає відповідну ізокліну. Якщо початкові умови задані точкою  $A$ , проведемо через цю точку дві прямі, що мають нахил  $N_1$  і  $N_2$  і спрямовані в бік ізокліни  $N_2$ . Оскільки траєкторія в точці  $A$  має нахил  $N_1$ , то наступну ізокліну вона має перетинати з нахилом  $N_2$  і лежати в середині кута, який утворений проведеними відрізками прямих. Можна припустити, що траєкторія перетинає ізокліну  $N_2$  у точці  $B$  із нахилом  $N_2$ . Точка  $B$  вибрана в середині відрізка допоміжної побудови, що відсікається лініями. Хоча це є наближеним результатом, але помилка буде малою, якщо сам відрізок малий. Точність може бути підвищена нанесенням на графік проміжних ізоклін, коли відрізки великі.

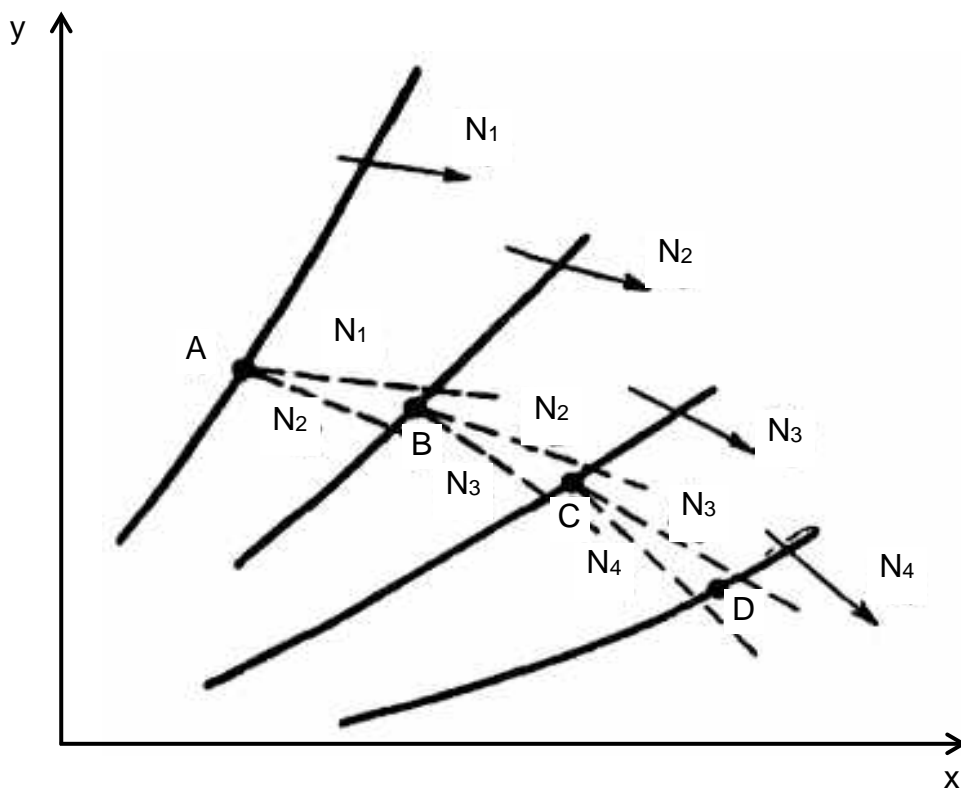


Рисунок 1.48 – Побудова фазової траєкторії за ізоклінами

Подальші точки С і D отримують за допомогою тієї самої процедури, як показано на рисунку 1.48. Фазові траєкторії мають бути проведені так, щоб вони проходили через позначені точки і перетинали ізокліни з необхідним нахилом. Якщо ізокліни побудовані, то для проведення великої кількості фазових траєкторій потрібно не набагато більше часу, ніж для побудови однієї траєкторії.

Для деяких рівнянь ізокліни є прямими або легко обчислюваними кривими і можуть бути побудовані дуже швидко. Для інших рівнянь, зокрема для деяких нелінійних, ізоклінами є достатньо складні криві і, щоб побудувати кожен ізокліну, необхідно обчислити велику кількість її окремих точок. У таких випадках метод ізоклін виправдовує себе тільки тоді, коли потрібно отримати повний фазовий портрет. Для якнайшвидшої побудови одиничної фазової траєкторії краще скористатися іншими методами.

Для прикладу на рисунку 1.49 наведено сімейство ізоклін і фазовий портрет, побудований методом ізоклін, для наведеного нелінійного диференціального рівняння

$$\ddot{x} + x\dot{x} + x = 0. \quad (1.42)$$

**Побудова Льєнара** [50]. Г. Льєнар запропонував побудову, що дає змогу визначити нахил фазової траєкторії в будь-якій точці фазової площини для запису рівняння

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0. \quad (1.43)$$

Позначивши  $y = \dot{x}$ , можна записати

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F(y) - x}{y}.$$

Візьмемо  $-F(y) - x = 0$  і побудуємо за цим рівнянням криву на фазовій площині в координатах  $x, y$ , як показано на рисунку 1.50.

Припустимо, що початок фазової траєкторії (відповідно до заданих початкових умов) лежить у точці Р. З точки Р проводимо пряму, паралельну осі  $x$ , до перетину в точці А з кривою, яка визначається рівнянням  $F(y) + x = 0$ . Після цього з точки А проводимо паралель щодо осі  $y$ , яка перетинається з віссю  $x$  в точці С. Нахил лінії СР дорівнює

$$\frac{y}{F(y) + x}.$$

Шуканий нахил є оберненою величиною зі знаком мінус відносно нахилу лінії СР. Оскільки нахил фазової траєкторії в точці Р буде

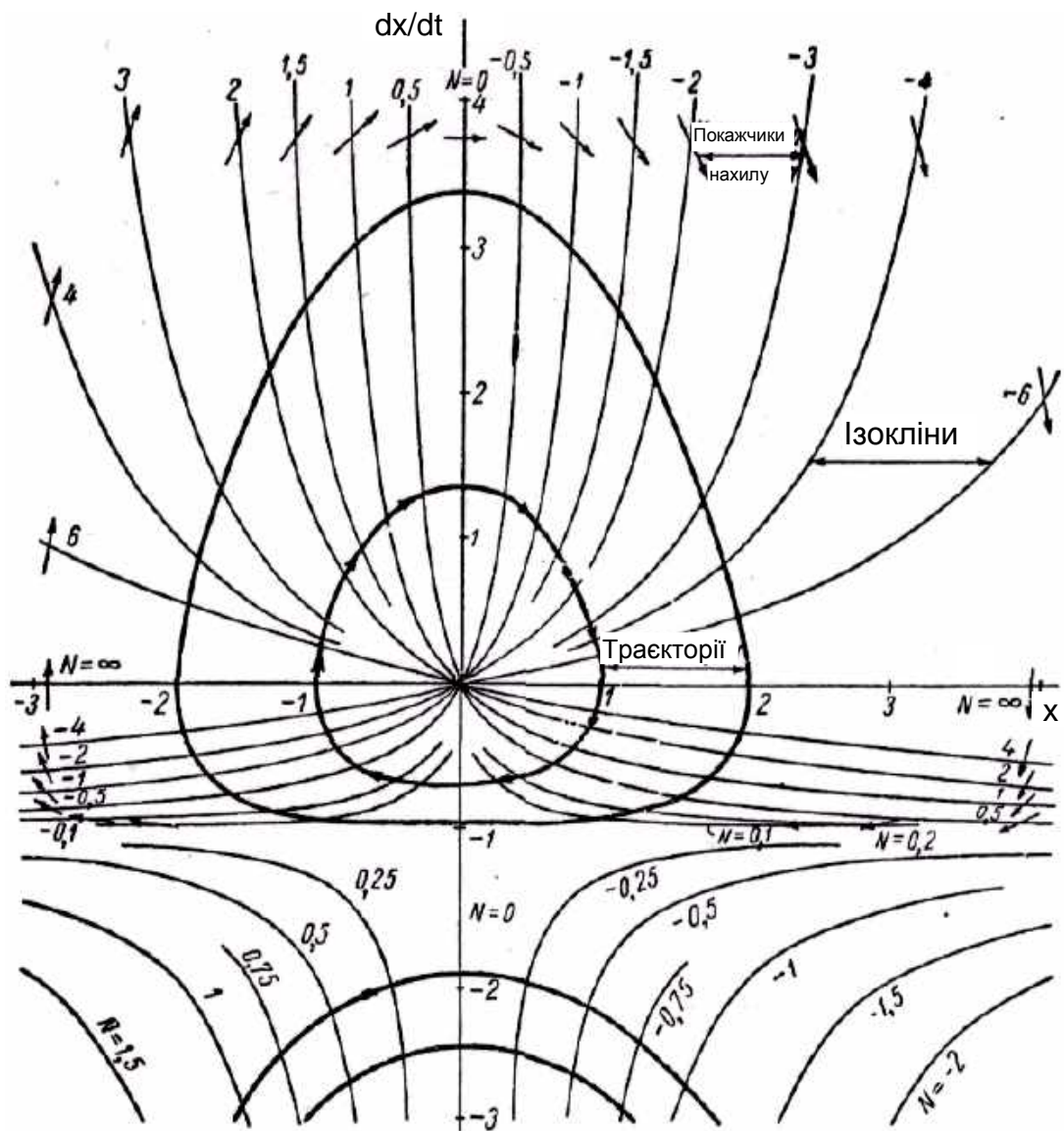


Рисунок 1.49 – Фазовий портрет рівняння  $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$

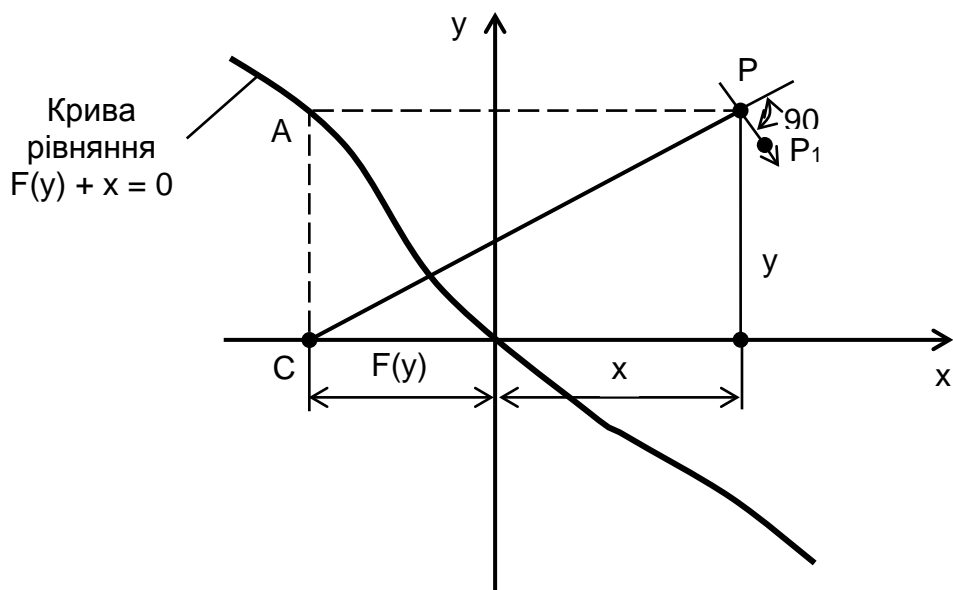


Рисунок 1.50 – Побудова Льенара, де  $C$  – центр побудови

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-[F(y) + x]}{y},$$

то він визначається як нахил перпендикуляра до CP в точці P.

Є декілька способів побудови траєкторії за допомогою такої методики. Перший починається з точки P, з якої проводять короткий відрізок відповідно до визначеного нахилу траєкторії. Припустимо, що цей відрізок апроксимує відповідну ділянку траєкторії. Відрізок обривають у певній точці P<sub>1</sub> і повторюють з неї всю побудову, унаслідок чого отримують наступну точку P<sub>2</sub>. У вдосконаленому способі спочатку точку P<sub>1</sub> визначають так само, як зазначалося вище, і визначають нахил у точці P<sub>1</sub>. Другий прямолінійний відрізок проводять знову з точки P, але з нахилом, визначеним для точки P<sub>1</sub>. Тепер два відрізки, проведені із точки P, відсікають на горизонталі, що проходить через P<sub>1</sub>, певний відрізок. Середина цього відрізка і має бути вибрана як наступна точка фазової траєкторії. Далі побудова продовжується так само.

**Дельта-метод (δ-метод)** [50]. Як і інші методи побудови фазових траєкторій, дельта-метод передбачає зведення рівняння другого порядку до специфічного вигляду. Для кращого з'ясування принципової основи методу виконаємо відповідні алгебраїчні перетворення. Будь-яке диференціальне рівняння другого порядку набуває вигляду

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = 0. \quad (1.44)$$

Вираз, позначений як  $f(x, \dot{x}, t)$ , може і не містити в явному вигляді всіх змінних  $x$ ,  $\dot{x}$  і  $t$ . Рівняння (1.44) набуває вигляду

$$\ddot{x} + A^2[x + F(x, \dot{x}, t)] = 0, \quad (1.45)$$

де  $A$  – постійна величина.

Перетворення члена  $f(x, \dot{x}, t)$  до наведеної вище форми часто потребує віднімання або додавання до нього члена, пропорційного  $x$ . Зокрема, така операція необхідна, якщо  $f(x, \dot{x}, t)$  є явною функцією тільки величин  $\dot{x}$  і  $t$ . Бажано вибрати  $A = \omega_n$ , якщо будь-яким чином можна визначити власну частоту, але це необов'язково. Позначимо  $F(x, \dot{x}, t)$  як  $\delta$ , після чого рівняння (1.45) запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + \omega_n^2(x + \delta) = 0. \quad (1.46)$$

Саме завдяки цьому позначенню і його геометричній інтерпретації цей метод дістав назву δ-метода.

Перетворимо тепер вираз (1.46) для отримання нахилу фазової траєкторії:

$$\ddot{x} = -\omega_n^2(x + \delta);$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{d\dot{x}/dt}{dx/dt} = \frac{-\omega_n^2(x + \delta)}{\dot{x}}. \quad (1.47)$$

Якщо вибрати як координату фазової площини величину  $\dot{x}/\omega_n$ , то рівняння (1.47) перетвориться так:

$$\frac{d\frac{\dot{x}}{\omega_n}}{dx} = -\frac{x + \delta}{\frac{\dot{x}}{\omega_n}}. \quad (1.48)$$

Таким чином, у кожній фіксованій точці фазової площини нахил фазової траєкторії виражають як  $\delta$ , що само собою може бути достатньо складним виразом. Загалом  $\delta$  обчислюють так, як того потребують алгебраїчні операції, але в цьому випадку зручно припустити, що  $\delta$  відома для того, щоб надати геометричну інтерпретацію рівняння (1.48).

Розглянемо геометричну інтерпретацію рівняння (1.48), як показано на рисунку 1.51.

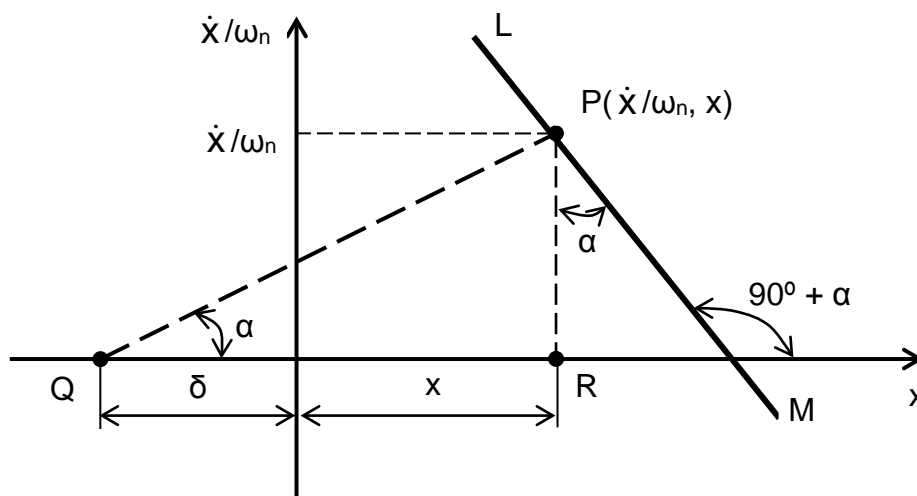


Рисунок 1.51 – Геометрична інтерпретація рівняння (1.48)

Точку  $P(\dot{x}/\omega_n, x)$  вибирають довільно, і знаменник рівняння (1.48) відразу визначається координатою  $\dot{x}/\omega_n$ . Для утворення чисельника цього рівняння необхідно значення  $\delta$  скласти з координатою  $x$ , що дає змогу одержати відрізок  $RQ = x + \delta$ :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\dot{x}}{\omega_n}}{x}.$$

Відрізок QP має нахил, який визначається виразом

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dot{x}}{\omega_n x}.$$

Лінія LM, проведена через P перпендикулярно до QP, має нахил

$$\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{x + \delta}{\dot{x}},$$

що видно з тригонометричних співвідношень між кутами, показаними на рисунку 1.51.

Таким чином, у кожній точці фазової площини нахил фазової траєкторії може бути визначено так:

- обчислюють значення  $\delta$  у вибраній точці;
- позначають точку Q, яку визначають складанням  $\delta$  і  $x$  (значення  $\delta$  може бути як додатним, так і від'ємним);
- будують перпендикуляр до QP у точці P.

Під час розв'язання багатьох задач можна застосовувати декілька методів. Якщо необхідно мати повний фазовий портрет, то кращим є метод ізоклін. Коли потрібно лише декілька траєкторій, то менші витрати часу забезпечуються застосуванням дельта-методу або побудови Льєнара. Коли ізокліни є прямими, кращі результати дає цей метод. Але для реалізації розглянутих методів потрібно чималого часу, і не для всіх типів диференційних рівнянь ці методи може бути застосовано. Тому побудова фазових траєкторій за допомогою зазначених методів використовується нечасто.

З розвитком комп'ютерної техніки побудова фазових траєкторій і фазових портретів значно спростилася. Для задач, що легко моделюються на обчислювальних машинах, зручно отримати розв'язок у вигляді  $x(t)$  і  $y(t)$ , а потім побудувати криву  $y = f(x)$ , виключивши  $t$ .

На рисунку 1.52, а і б наведено часову реалізацію періодичного сигналу (часового ряду)  $x(t)$  з одиничною амплітудою і його фазовий портрет на фазовій площині  $y(x)$ , що побудовані з використанням комп'ютера.

Як видно з рисунка 1.52, б, фазовий портрет періодичного сигналу з одиничною амплітудою є колом. Збільшення періоду сигналу не спричиняє зміну форми фазового портрета, а веде до накладення кіл одне на одне. Фазовий портрет витягується зі зміною амплітуди сигналу.



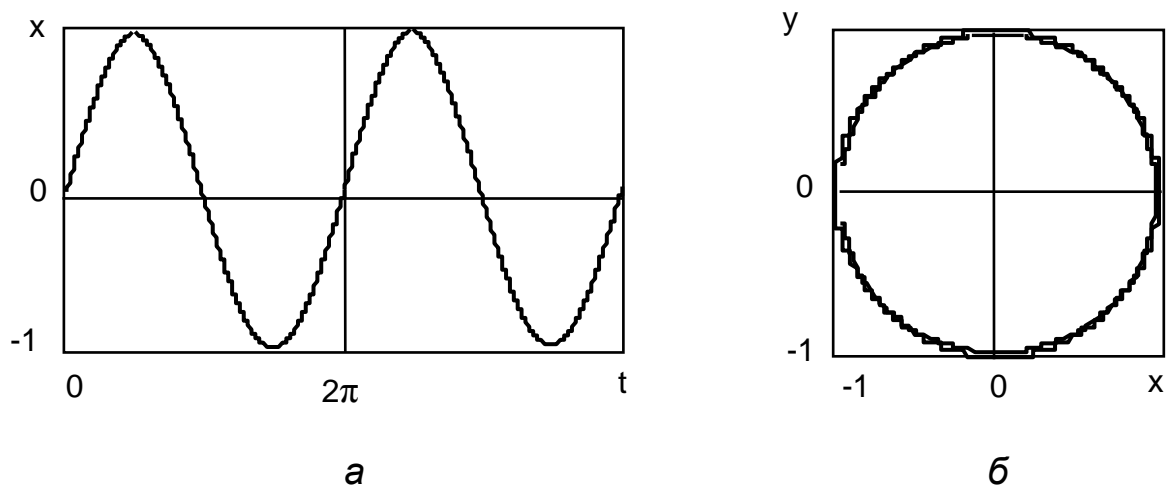


Рисунок 1.52 – Часова реалізація (а) і фазовий портрет (б) періодичного сигналу

Після того, як фазовий портрет отримано, можна зазначити низку особливостей у формі та розташуванні фазових траєкторій. На фазовій площині зазвичай можуть бути такі три типи фазових траєкторій:

- особливі точки, або положення рівноваги, які визначені внаслідок розв'язку системи рівнянь  $P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0$ ;

- ізольовані замкнуті траєкторії, що відповідають періодичним рухам у системі;

- сепаратиси, що розділяють фазову площину на області, які заповнені траєкторіями різних типів.

Різні типи фазових портретів, зокрема центр, фокус, вузол і сідло, показано на рисунку 1.53, а, б, в і г відповідно, а на рисунку 1.53, е також – сепаратису.

Більшість топологічних особливостей фазових траєкторій пов'язано з існуванням особливих точок, у яких їх нахил є невизначеним. Якщо розташування і вид різних особливих точок вдається визначити, це може бути корисною інформацією під час вирішення таких завдань: стійкості, точності сталого розв'язання, амплітуди і частоти власних коливань.

У деяких випадках ретельне дослідження фазових портретів навколо особливої точки допомагає пояснити ті або інші особливості, які спостерігаються під час роботи системи. Різні фізичні явища можна поділити на три групи:

**1 Стаціонарні явища**, основні характеристики яких не змінюються із часом. Фазовий портрет стаціонарного явища описується нерухомою точкою.

**2 Нестаціонарні явища**, для яких залежність від часу є принципово важливою. Фазовий портрет нестаціонарного явища описується рухомою по деякій траєкторії точкою. Нестаціонарні явища можуть бути:

- **періодичними** – чітко періодичні явища (фазовий портрет – замкнута крива);

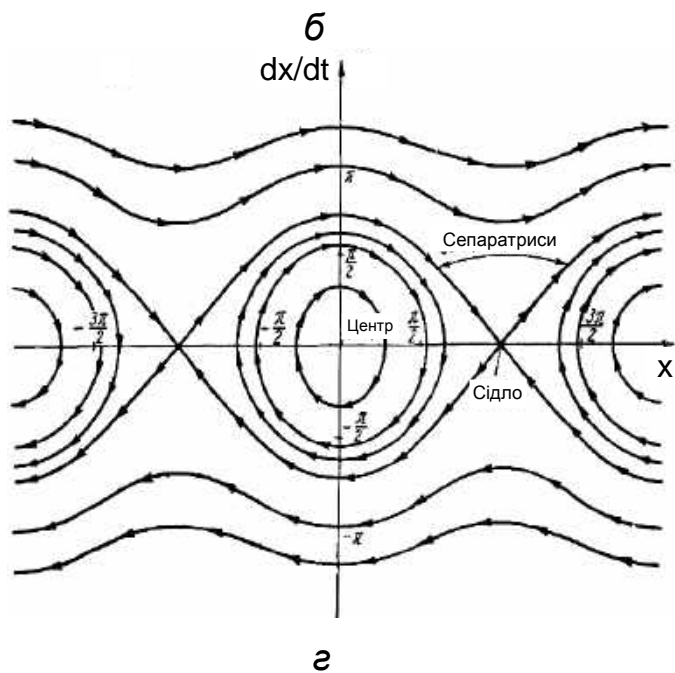
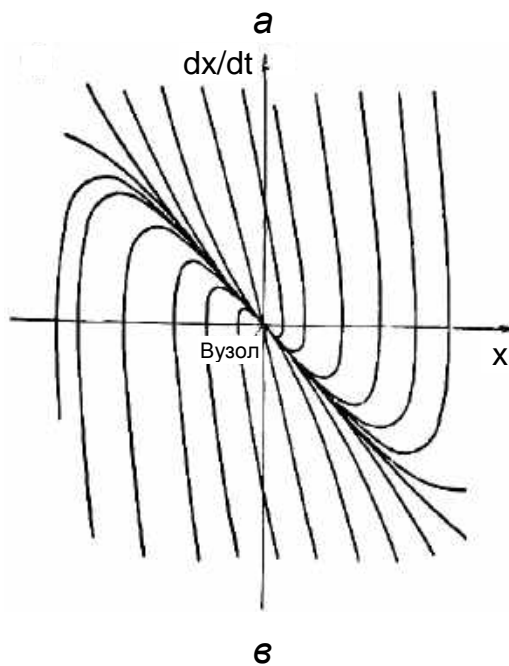
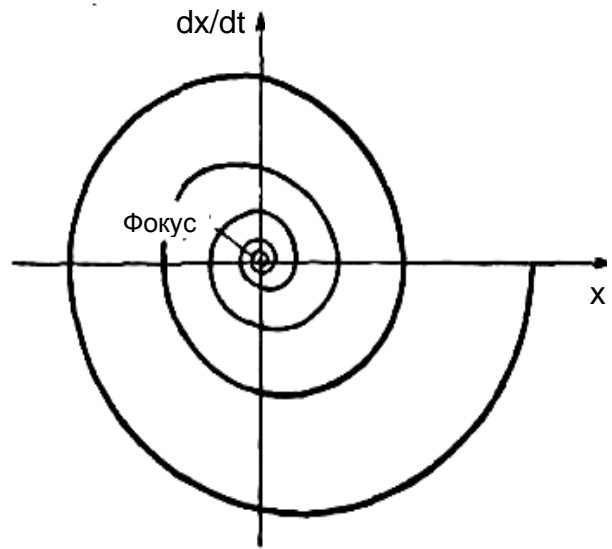
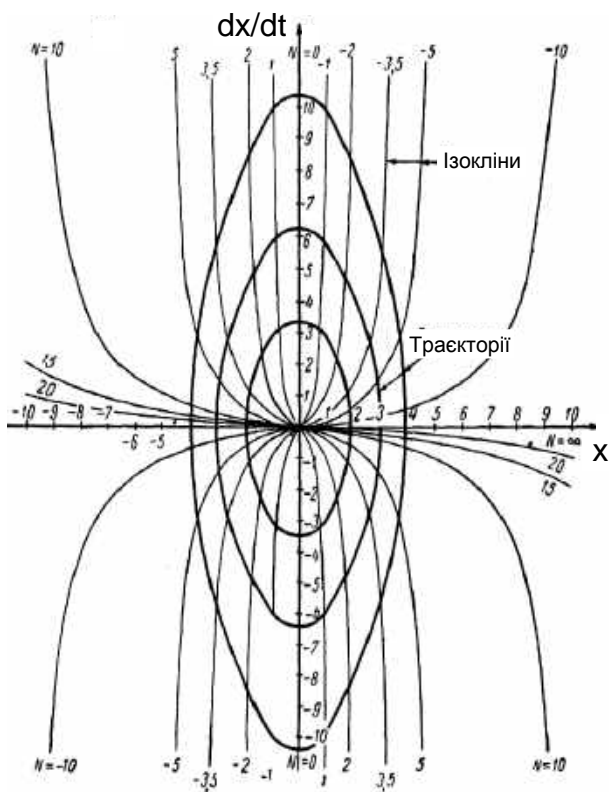


Рисунок 1.53 – Різні типи фазових портретів: а – центр; б – фокус (лінійна система); в – вузол (система другого порядку з надмірним демпфуванням); г – сідло і сепаратриса (маятник)

- **квазіперіодичними** – не строго періодичні явища, але в малому масштабі мають вигляд періодичних (фазовий портрет – майже замкнута крива);

- **хаотичними** – аперіодичні явища (фазовий портрет – незамкнута крива, що займає деяку площу більш-менш рівномірно).

**3 Квазістаціонарні** – нестаціонарні явища, але характерний масштаб їх еволюції набагато більший за той час, який цікавить.

Таким чином, для побудови фазових траєкторій раніше використовували графоаналітичні методи, але такі методи мали низьку точність будови і потребували багато часу для обчислення й побудови. Тому метод фазової площини не мав практичного застосування для аналізу структури сигналів. Поява комп'ютерів дає змогу спростити побудову фазових портретів складних систем і використовувати їх для аналізу геофізичних сигналів.

### 1.2.2.2 Поняття псевдофазової площини

В останні десятиліття в межах нелінійної динаміки отримано фундаментальні теоретичні результати і розроблено методики, що обґрунтовують принципову можливість прогнозування фізичних процесів на базі їх часових рядів. Однією з основоположних ідей є те, що під час побудови емпіричних моделей за часовим рядом, у яких бракує змінних, можна використовувати або послідовні значення доступної спостережуваної величини, або її послідовні похідні. Було доведено, що під час реконструкції за скалярною часовою реалізацією динамічної системи за методом часових затримок і за методом послідовних похідних гарантовано, що в нових змінних буде отримано еквівалентний опис початкової динамічної системи за умови достатньо великої розмірності відновлених векторів  $D$ . А саме має виконуватися умова  $D > 2d$ , де  $d$  – розмірність множини  $M$  у фазовому просторі початкової системи, у якому відбувається модельований рух [5]. У цих твердженнях і полягає зміст знаменитих **теорем Такенса**.

Для аналізу поведінки складних (нелінійних) динамічних систем, у яких відомо тільки один параметр (система з одним ступенем свободи), використовують метод побудови псевдофазової площини із часовою затримкою.

Для системи, у якій виміряна тільки одна величина, будується залежність сигналу від цієї ж величини в інший час, що затримується або випереджає цей момент на постійну величину:  $[x(t), x(t+T)]$ . Сигнал  $x(t+T)$  пов'язаний із  $\dot{x}(t)$ , результат має ті самі властивості, що й у разі використання дійсної фазової площини [5]. Побудова фазового портрета на псевдофазовій площині не потребує тривалого часу для розв'язання диференціальних рівнянь і обчислення кутів нахилу ізоклін, а використання комп'ютерів дає змогу будувати фазові портрети складних динамічних систем майже в реальному масштабі часу.

На рисунку 1.54 показано фазові портрети гармонічного сигналу, побудовані на псевдофазовій площині за різних часових затримках ( $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ ).

Як видно з рисунка 1.54, можна дібрати таке значення часової затримки, за якого фазовий портрет на псевдофазовій площині

відповідатиме фазовому портрету на реальній фазовій площині (див. рисунки 1.52, б і 1.54, в).

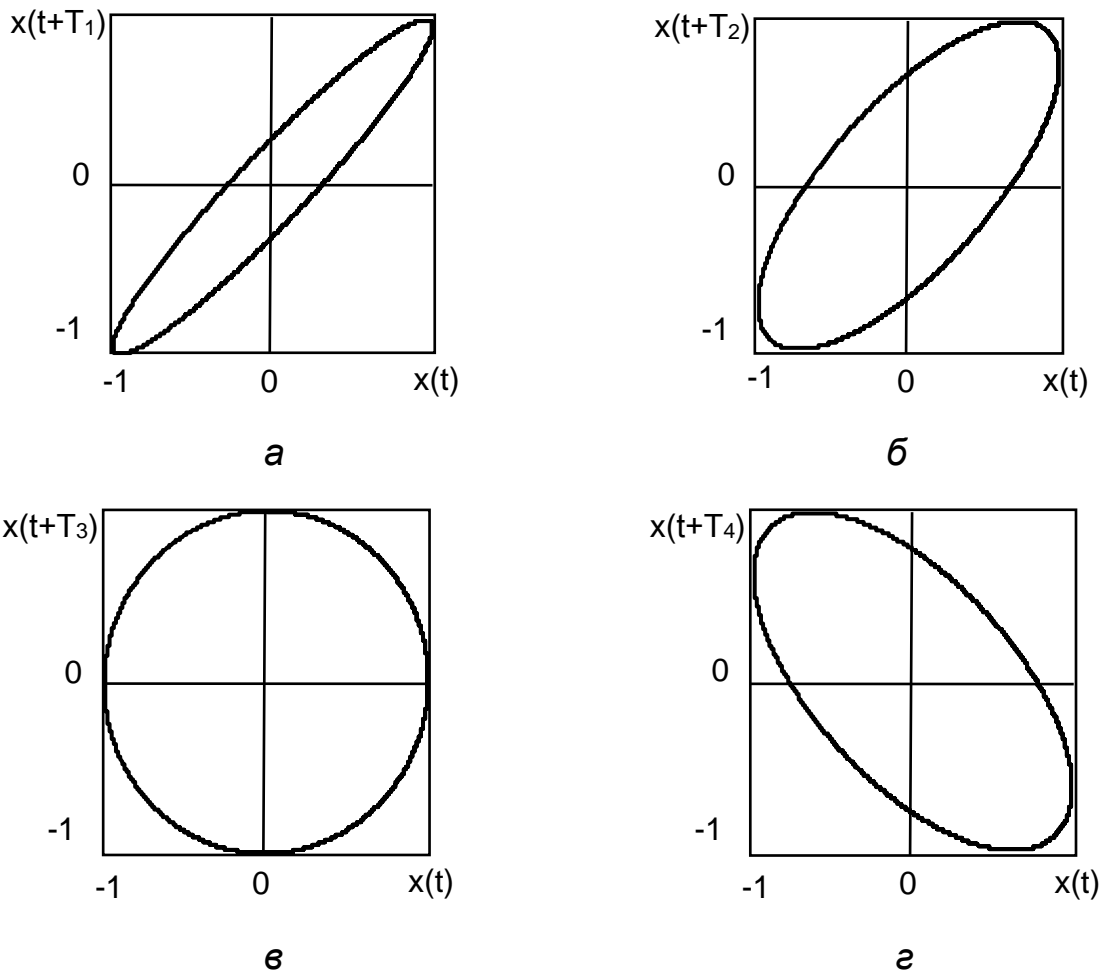


Рисунок 1.54 – Фазові портрети гармонічного сигналу, побудовані на псевдофазовій площині: часова затримка а –  $T_1$ ; б –  $T_2$ ; в –  $T_3$ ; г –  $T_4$

Найважчим завданням під час побудови фазового портрета на псевдофазовій площині є вибір правильного часу затримки  $T$  [5].

**Перший спосіб** – це вибрати значення  $T$ , яке є найближчим до першого нуля автокореляційної функції для ряду  $x_i$ :

$$B(T) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+T} - \bar{x}), \quad m = M - T, \quad (1.49)$$

де  $\bar{x}$  – середнє значення часового ряду;  $M$  – довжина часового ряду.

Приклад часового ряду (рисунок 1.55) і відповідна йому автокореляційна функція (рисунок 1.56) побудовані за допомогою програми Fractan.

**Другий спосіб** полягає в обчисленні спектра потужності часового ряду, тобто швидкого перетворення Фур'є автокореляційної функції. Якщо

в спектрі потужності є кратні дискрети, то затримка  $T$  вибирається такою, що дорівнює чверті періоду найвищої домінантної частоти.

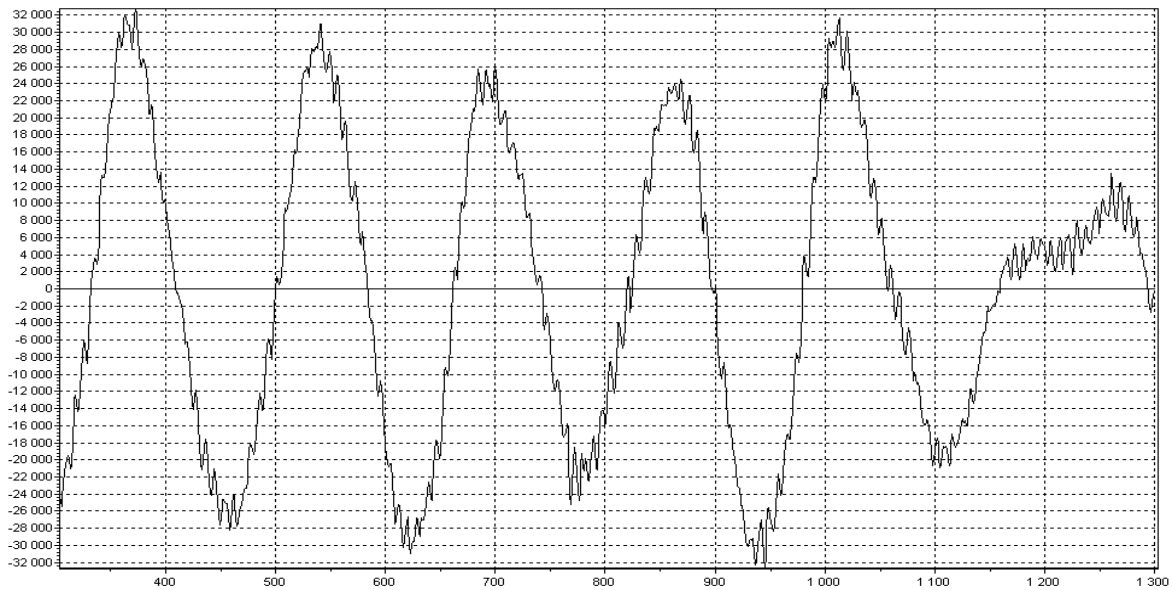


Рисунок 1.55 – Приклад часового ряду

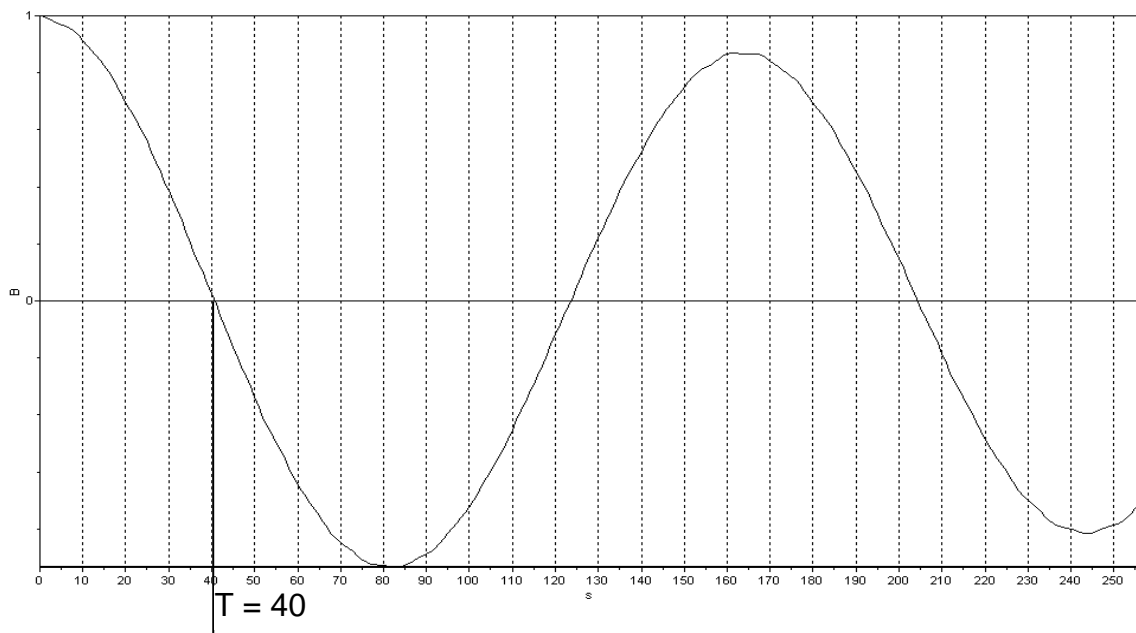


Рисунок 1.56 – Автокореляційна функція

**Третій спосіб** оснований на обчисленні середньої взаємної інформації між двома вимірюваннями. Припустимо, дано дві множини вимірювань  $A$  і  $B$ . Взаємна інформація між елементом  $a_i$  множини  $A$  і елементом  $b_j$  множини  $B$  визначається як кількість інформації, яку мають вимірювання  $a_i$  і  $b_j$  відносно один одного. Якщо вимірювання незалежні, то взаємна інформація дорівнює нулю. Усреднюючи значення за всіма вимірюваннями, отримуємо

$$I_{A,B} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) n \left[ \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right]. \quad (1.50)$$

Замінюючи  $a_i$  і  $b_j$  на  $x_i$  і  $x_{i+T}$  відповідно, отримуємо середню взаємну інформацію як функцію часової затримки  $T$ . Затримку  $T$  вибираємо такою, що дорівнює часу першого мінімуму у взаємній інформації.

На рисунку 1.57 зображено графік середньої взаємної інформації (побудований за допомогою програми Fractan) як функції часової затримки, що відповідає часовому ряду, який показано на рисунку 1.55.

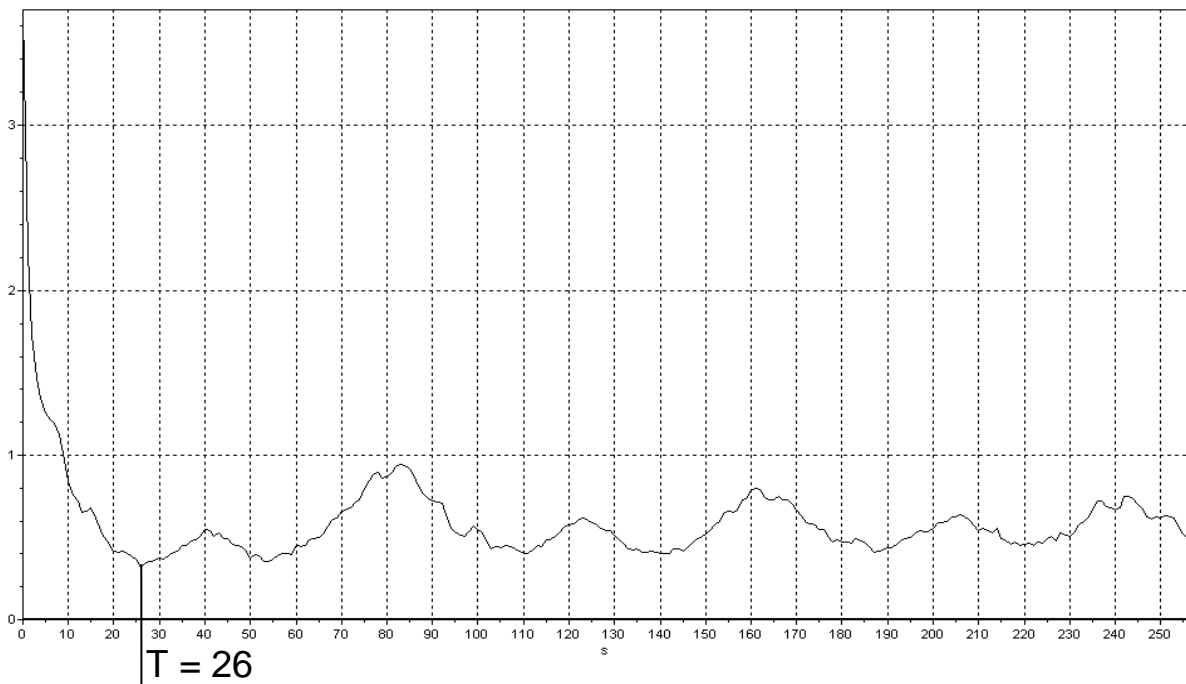


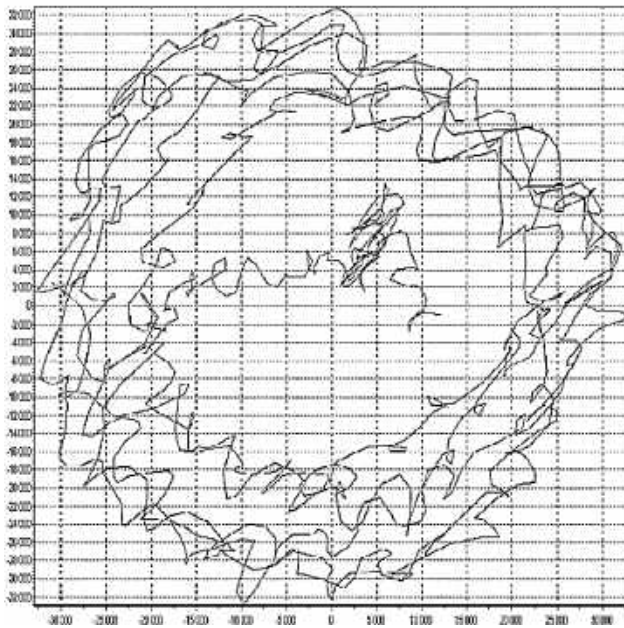
Рисунок 1.57 – Середня взаємна інформація

Перший нуль автокореляційної функції (див. рисунок 1.56), яка відповідає часовому ряду (див. рисунок 1.55), – це  $T = 40$ , а перший мінімум у взаємній інформації (див. рисунок 1.57) –  $T = 26$ .

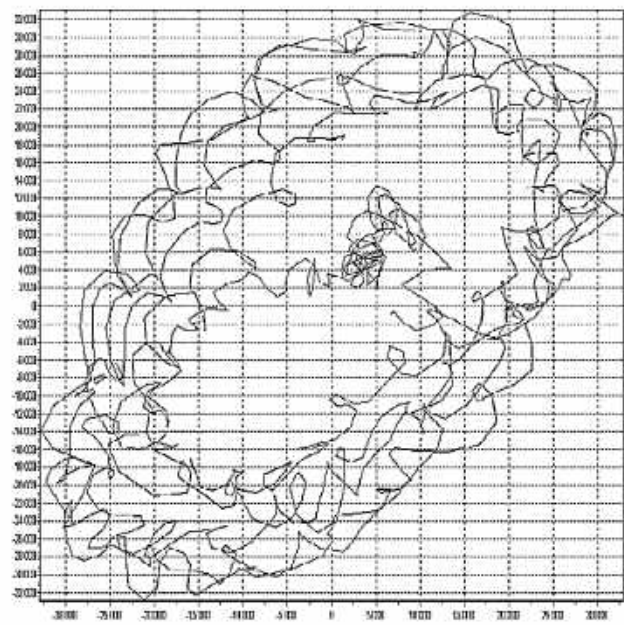
Фазові портрети, побудовані за допомогою програми Fractan при таких часових затримках, показано на рисунку 1.58, а і б відповідно.

Коли в системі є більше двох змінних, які описують стан (координату, швидкість і час або фазу зовнішньої сили), за допомогою декількох затримок можна побудувати траєкторії в псевдофазовому просторі більшої кількості вимірювань. Наприклад, тривимірний простір можна побудувати за допомогою вектора із компонентами  $[x(t), x(t + T), x(t + 2T)]$ .

Таким чином, побудову фазових портретів на псевдофазовій площині можна використовувати для наочного подання та якісного дослідження властивостей геофізичних систем, які неможливо або складно досліджувати аналітично.



*a*



*б*

Рисунок 1.58 – Фазові портрети, побудовані при  $T = 40$  (а) і  $T = 26$  (б)

### 1.2.2.3 Вплив відношення сигнал / шум на форму фазового портрета

Проведемо дослідження впливу відношення сигнал / шум на зміну форми фазового портрета за допомогою комп'ютерного експерименту [51]. Під час оцінки впливу відношення сигнал / шум будемо використовувати модельні дані, які було наведено вище на рисунку 1.45.

На рисунку 1.59 наведено фазові портрети сигналу (а), шуму із СКВ  $\sigma = 0,5$  (б), а також адитивної суміші сигналу і шуму, якщо  $q = 16$  дБ (в);  $q = 10$  дБ (г);  $q = 4$  дБ (д) і  $q = 1$  дБ (е), які побудовано на псевдофазовій площині із часовою затримкою  $T = 128$ , що відповідає чверті періоду синусоїдального сигналу.

Аналіз даних на рисунку 1.59, а і б показує, що форма фазового портрета періодичного сигналу має вигляд кола, а фазового портрета шуму – випадково заповнену область на псевдофазовій площині, фазові портрети адитивної суміші сигналу і шуму є сумою фазового портрета сигналу і фазового портрета шуму (рисунок 1.59, в–е).

Зменшення відношення сигнал / шум (збільшення СКВ шуму) приводить до того, що фазовий портрет адитивної суміші сигналу і шуму наближається до фазового портрета простого шуму. Відмінності у формах фазових портретів спостерігаються до величин відношення сигнал / шум вищих за 4 дБ (див. рис 1.59, д), за умови менших відношень сигнал / шум фазові портрети не відрізняються від фазового портрета шуму [51].

Розглянемо вплив величини часової затримки  $T$  на будову фазового портрета синусоїдального сигналу, шуму та їх адитивної суміші.

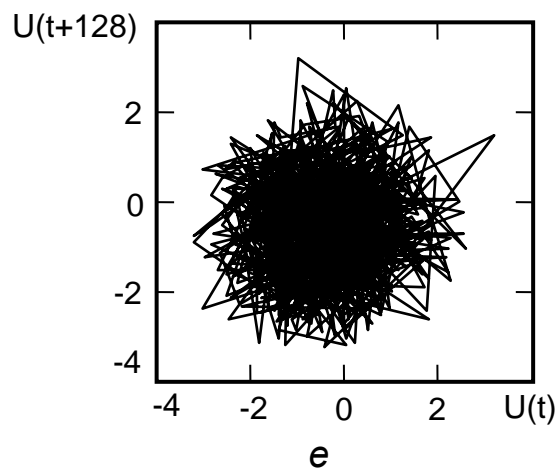
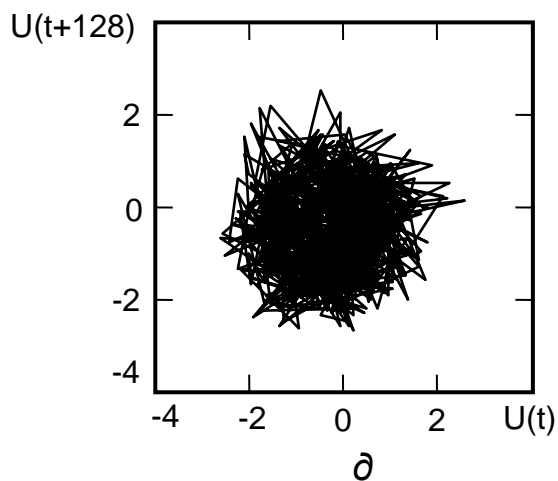
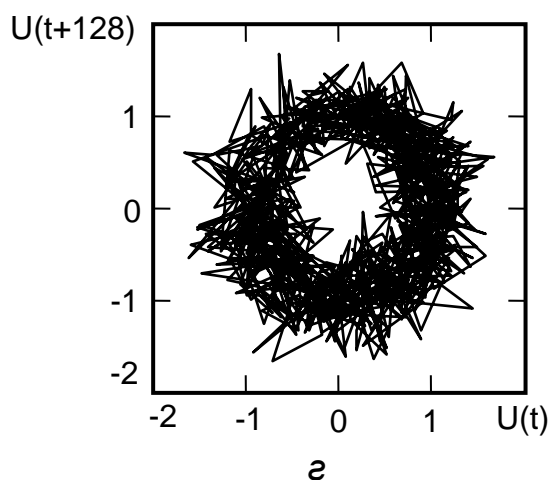
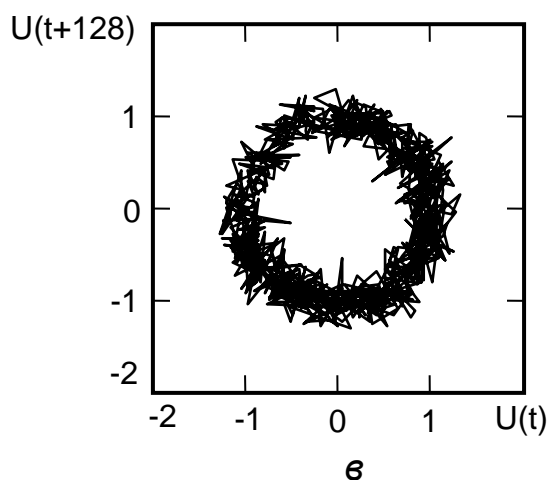
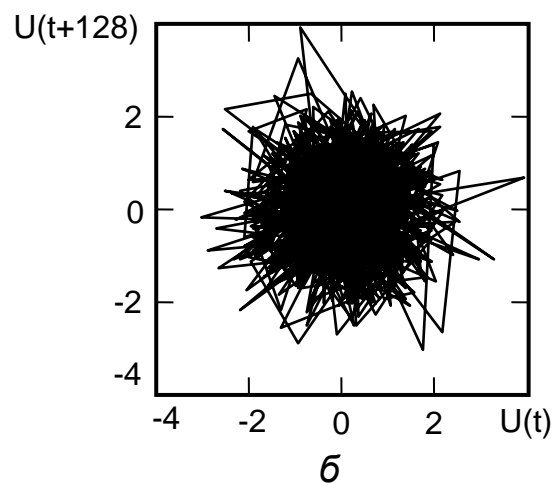
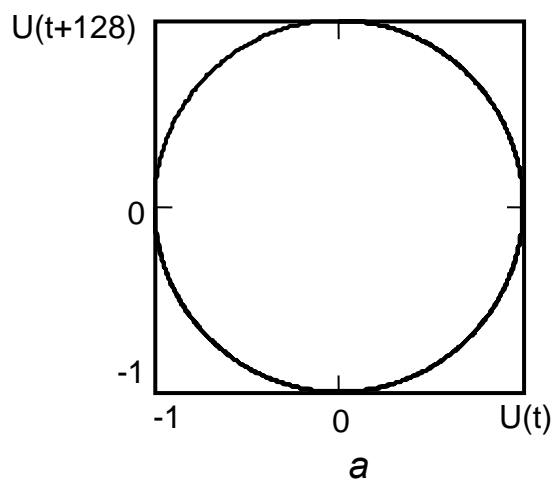
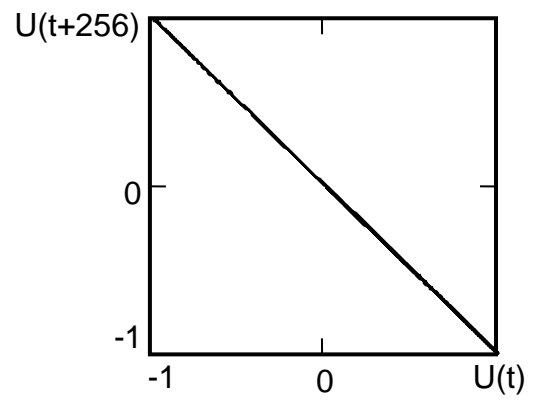
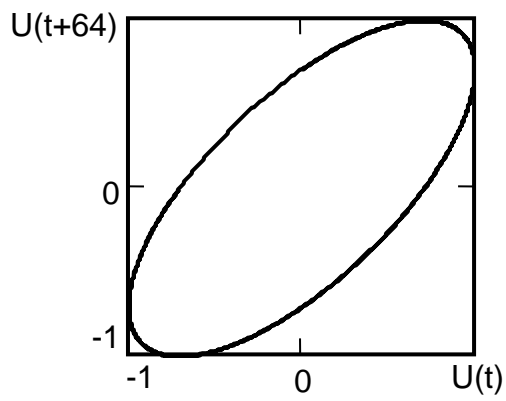


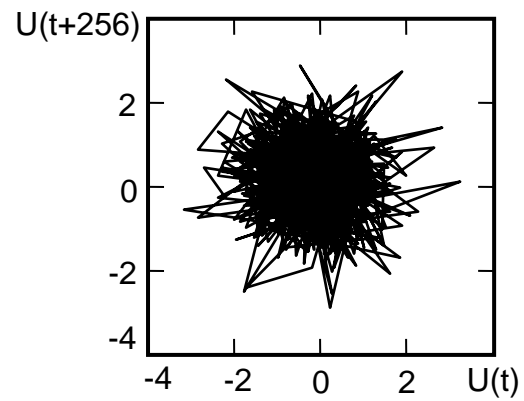
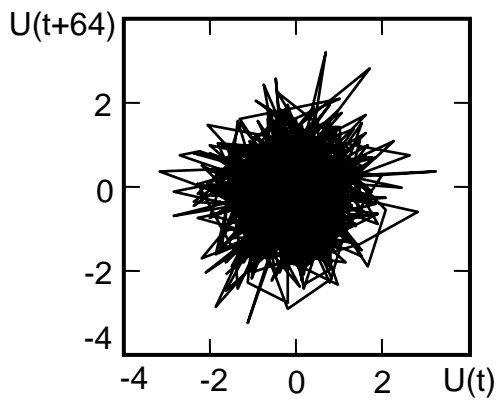
Рисунок 1.59 – Фазові портрети ( $T = 128$ ): а – сигналу; б – шуму із СКВ  $\sigma = 0,5$ ; в – адитивної суміші сигналу і шуму, якщо  $q = 16$  дБ; г – якщо  $q = 10$  дБ; д – якщо  $q = 4$  дБ; е – якщо  $q = 1$  дБ

На рисунку 1.60 наведено фазові портрети сигналу (а), шуму із СКВ  $\sigma = 0,5$  (б), а також адитивної суміші сигналу і шуму, якщо  $q = 10$  дБ (в) і  $q = 4$  дБ (г), які побудовано на псевдовазовій площині із часовою затримкою  $T = 64$  (рисунки ліворуч) і  $T = 256$  (рисунки праворуч).

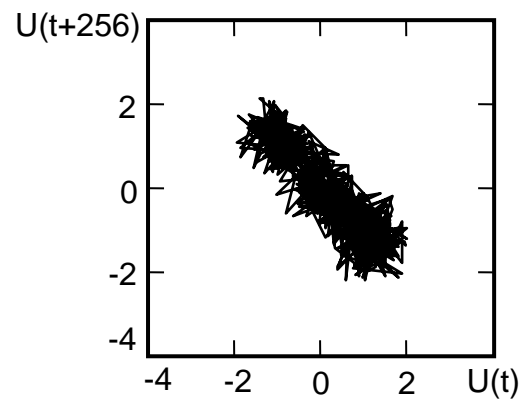
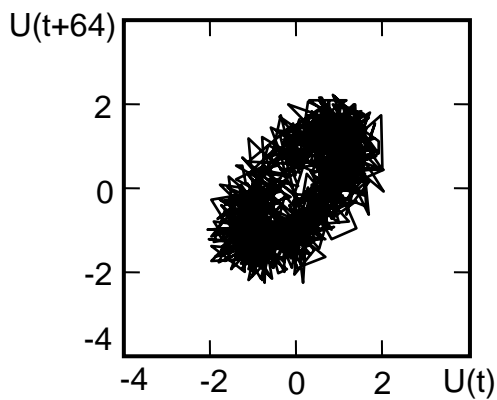




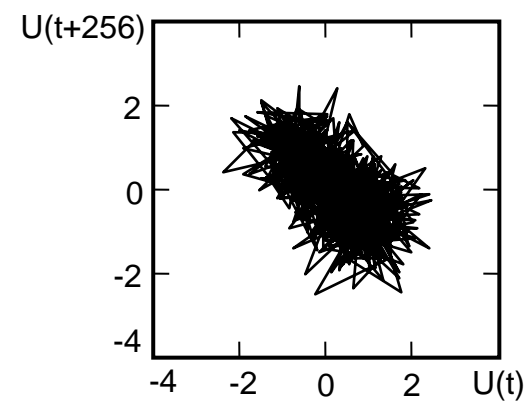
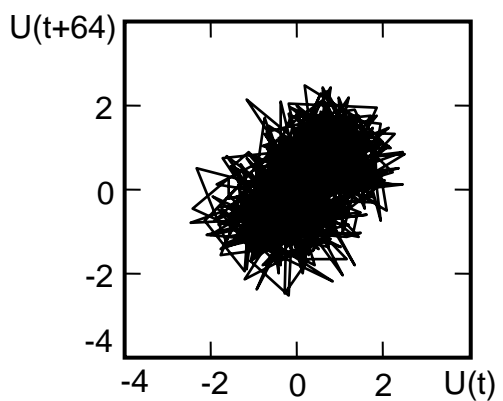
a



б



в



г

Рисунок 1.60 – Фазові портрети ( $T = 64$  і  $T = 256$ ): а – сигналу; б – шуму; в – адитивна суміш сигналу і шуму, якщо  $\rho = 10,5$  дБ; г – якщо  $\rho = 4$  дБ

Форма фазових портретів синусоїдального сигналу під час зміни  $T$  змінюється істотно: коло (див. рисунок 1.59, а) перетворюється в еліпс (див. рисунок 1.60, а, ліворуч) і навіть вироджується в пряму (див. рисунок 1.60, а, праворуч). При цьому поворот (ліворуч або праворуч) і довжина малої півосі еліпса (розширення або стиснення) залежить від часової затримки.

Як видно з порівняння рисунків 1.59, б і 1.60, б, форма фазового портрета шуму майже не залежить від величини часової затримки  $T$ , тобто фазова траєкторія шуму заповнює певну область псевдовазової площини.

Оскільки фазовий портрет адитивної суміші сигналу і шуму є сумою фазового портрета сигналу і фазового портрета шуму, то його форма змінюється під час зменшення або збільшення часової затримки. Характер зміни форми фазових портретів (див. рисунки 1.59, а і 1.60, в) обумовлено передусім зміною фазових портретів синусоїдального сигналу (поворот ліворуч або праворуч) і зміною довжини малої півосі еліпса (розширення або стиснення)) [51].

За умови малого відношення сигнал / шум, що дорівнює  $q = 4$  дБ і менше, і часовій затримці  $T = 128$  (див. рисунок 1.59, д, е) фазові портрети адитивної суміші сигналу і шуму не відрізняється від фазового портрета шуму (див. рисунок 1.59, б), проте за умови інших часових затримок, наприклад  $T = 64$  або  $T = 256$  (див. рисунок 1.60, в і г), фазові портрети адитивної суміші сигналу і шуму звужуються і повертаються праворуч або ліворуч, що обумовлено наявністю в суміші сигналу. Як уже наголошувалося вище, форма фазового портрета шуму під час зміни часової затримки не змінюється (див. рисунки 1.59, б і 1.60, б).

Таким чином, поворот (ліворуч або праворуч) і зміна довжини малої півосі еліпса (розширення або стиснення) фазового портрета може бути ознакою наявності корисного сигналу. Характер зміни фазових портретів зберігається за умови малих відношень сигнал / шум до 7 дБ.

### 1.2.3 Метод перерізу Пуанкаре

#### 1.2.3.1 Поняття дискретного відображення

Нехай  $X$  і  $Y$  – дві довільні множини. Відповідність, за якою з кожним елементом множини  $X$  зіставляється єдиний елемент множини  $Y$ , **називається відображенням**. Позначення відображення з множини  $X$  в множину  $Y$  є таким:  $X \xrightarrow{f} Y$ .

Розглянемо системи, стан яких характеризується однією змінною  $x$ , тобто фазовий простір одновимірний, а оператор еволюції задається рекурентним відображенням вигляду  $x_{n+1} = f(x_n)$ , де  $n$  – дискретний час.

**Дискретні відображення** є важливим класом простих математичних моделей нелінійної динаміки, їх подають у вигляді [3]

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.51)$$

де  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер наближення (дискретний час);  $x_0$  – початкове (нульове) наближення.

Простір визначення, простір значень і вигляд функції  $f$  визначається початковими (експериментальними) даними.

**Нерухомі точки** – точки, які перетворюються під дією відображення  $f$  у себе

$$x^* = f(x^*). \quad (1.52)$$

Геометрично нерухому точку  $x^*$  відображення  $f$  можна подати як точку перетину графіка функції  $y = f(x)$  із бісектрисою  $y = x$ . Нерухомі точки поділяються на: **стійкі (що притягують)** і **нестійкі (що відштовхують)**.

Критерієм стійкості точок є такі нерівності (якщо похідна в точці  $x^*$  існує) [3]:

$$|f'(x^*)| < 1 \quad \text{– нерухома точка } x^* \text{ стійка}; \quad (1.53)$$

$$|f'(x^*)| > 1 \quad \text{– нерухома точка } x^* \text{ нестійка}. \quad (1.54)$$

Якщо нерухома точка  $x^*$  стійка, то кожне подальше наближення (результат кожної подальшої ітерації) виявляється до неї ближче, ніж попереднє.

Якщо нерухома точка  $x^*$  нестійка, то кожне подальше наближення виявляється далі від неї, ніж попереднє.

**Зрушення Бернуллі (відображення «зуб пилки»)**. Розглянемо систему, оператор еволюції якої заданий таким правилом визначення нового стану за попереднім [3]:

$$x_{n+1} = \{2x_n\}, \quad (1.55)$$

де фігурні дужки позначають дробову частину числа. В іншій формі це співвідношення також записують як

$$x_{n+1} = rx_n \pmod{1}, \quad (1.56)$$

де  $r$  – ціле число більше за одиницю;  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ .

Сімейство дискретних кусково-лінійних відображень вигляду (1.56) називають **зрушеннями Бернуллі**.

Зрушення Бернуллі можуть бути зведено до двох операцій: перша – відрізок  $[0, 1]$  перетворюється у відрізок  $[0, r]$  (розтягування в  $r > 1$  разів за

вертикаллю), друга – узяття дробової частини (mod 1) (спуск до початкового одиничного квадрата).

Процес перетворення подібності й узяття дробової частини для двійкового зрушення Бернуллі наведено на рисунку 1.61:

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1},$$

де  $x \pmod{1}$  позначає дробову частину  $x$  [3].

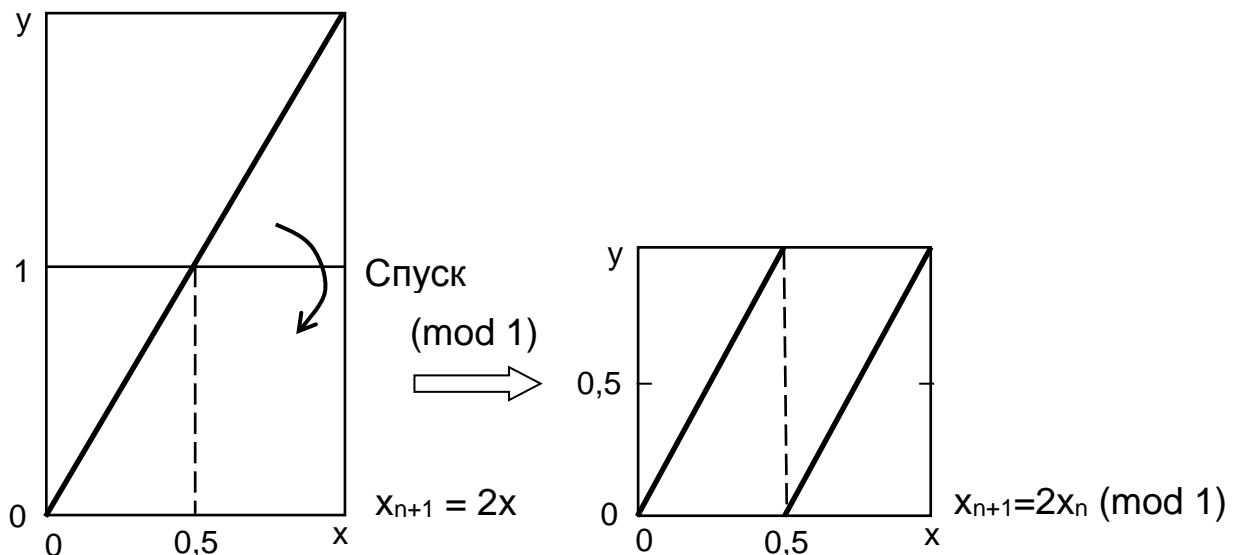


Рисунок 1.61 – Відображення: двійкове зрушення Бернуллі

Виникає питання, чи є розглянуте відображення динамічною системою. З використанням виразу (1.55) або (1.56) можна визначити стан системи в будь-якій подальший момент, якщо точно відомий початковий стан  $x_0$ . Тобто це динамічна система, яка може бути змодельована одновимірним рекурентним відображенням. На рисунку 1.62 наведено ітераційну діаграму відображення «зуб пилки», що показує динаміку під час старту із початкового стану  $x_0$ .

У двійковій системі числення множення на 2 відповідає зрушенню всього числа вліво на один розряд, а узяття цілої частини – відкиданню старшого розряду, тому  $x_{n+1}$  створюється із  $x_n$  зрушенням Бернуллі

$$x_0 = 0,01011 \dots; \quad x_1 = 0,1011 \dots; \quad x_2 = 0,011 \dots$$

Послідовність  $(x_0, x_1, \dots)$  називається **орбітою** точки  $x_0$ .

Як видно на рисунку 1.62, як початковий стан вибрано деяке число  $x_0$ , що належить інтервалу від 0 до 1. Наведемо це число у двійковій системі числення:

$$x_0 = 0,01011010001010011001010 \dots$$

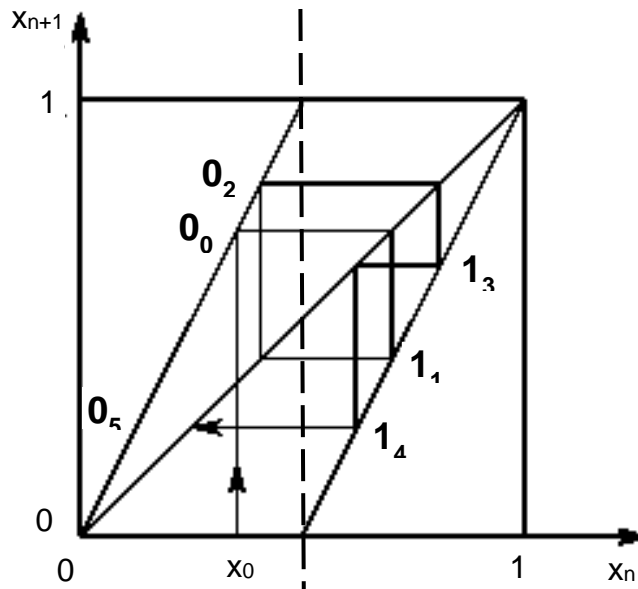


Рисунок 1.62 – Ітераційна діаграма відображення «зуб пилки» під час старту із початкового стану  $x_0$

Один крок еволюції в часі згідно з рівнянням (1.55) або (1.56) полягає в тому, що послідовність нулів і одиниць зрушується вліво на одну позицію, а цифра, що опинилася ліворуч від коми, відкидається. Унаслідок чого отримуємо:

$$x_1 = 0,1011010001010011001010 \dots;$$

$$x_2 = 0,011010001010011001010 \dots;$$

$$x_3 = 0,11010001010011001010 \dots \text{ і т. д.}$$

Можна задати початкову умову числом, що має довільну послідовність нулів і одиниць у двійковому записі. Наприклад, випадкову послідовність можна одержати підкиданням монети, якщо записати результати випробувань за правилом: орел – 0, решка – 1, – 010010 ... . Тоді якщо задати початковий стан  $x_0 = 0,010010 \dots$ , динамічна система (1.55) в процесі еволюції рухається до лівої і правої половин одиничного інтервалу (пунктирна лінія на рисунку 1.62) відповідно до випадкової послідовності. Унаслідок чого з'являється хаос у детермінованій системі.

Щоб створювати більш хаотичні системи, можна використовувати більш складні відображення Бернуллі, наприклад третинне зрушення (рисунку 1.63).

Якщо провести на рисунку 1.63 бісектрису через точки (0,0) і (1,1) (штрихова лінія), одержимо три нерухомі точки (0,0), (0,5;0,5), (1,1). У кожній із цих точок

$$|f'(x^*)| = r > 1,$$

тобто всі нерухомі точки третинного зрушення Бернуллі нестійкі.

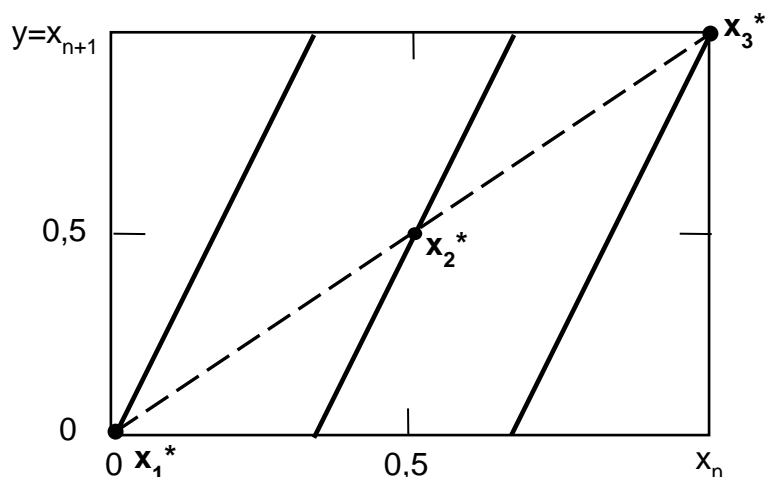


Рисунок 1.63 – Третинне зрушення Бернуллі

Як видно з рисунка 1.63, зрушення Бернуллі відображає одиничний відрізок  $[0, 1]$  в одиничний відрізок  $[0, 1]$ .

**Трикутне відображення (відображення «тент»).** Прикладом дискретного кусково-лінійного відображення також є трикутне відображення, яке отримало назву за форму свого графіка, що нагадує намет – тент. Його можна визначити за допомогою формули

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n, & 0 < x_n < \alpha \\ \alpha, & \\ \frac{1-x_n}{1-\alpha}, & \alpha < x_n \leq 1, \end{cases} \quad (1.57)$$

де  $\alpha$  – додатний параметр, менший за 1.

Окремий випадок симетричного тенту можна отримати, якщо параметр  $\alpha$  дорівнює  $1/2$  [3]

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.58)$$

Вигляд симетричного трикутного відображення наведено на рисунку 1.64, а. Трикутне відображення може бути побудовано шляхом накладання (суперпозиції) двох операцій: розтягування за вертикаллю і дзеркального відображення щодо горизонталі  $y = 1$  (рисунку 1.64, б) [3].

У трикутного відображення існують дві нерухомі точки:

$$x_1^* = 0; \quad 2(1-x_2^*) = x_2^*, \quad x_2^* = \frac{2}{3}. \quad (1.59)$$

Оскільки  $|f'(x^*)| = 2 > 1$ , то обидві нерухомі точки нестійкі. Ітерації трикутного відображення поведуться достатньо складним чином, унаслідок цього близькі в початковий момент точки «розбігаються».

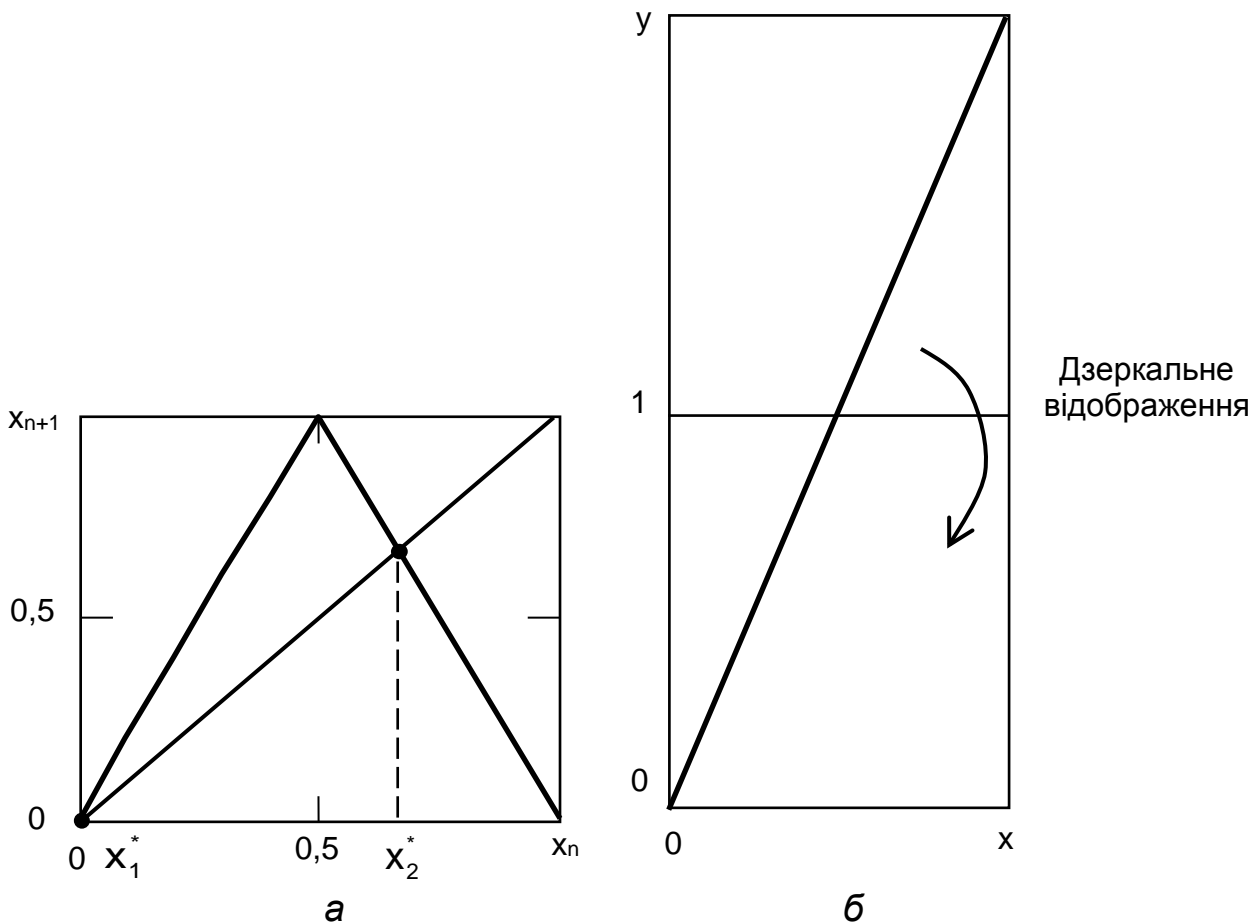


Рисунок 1.64 – Трикутне відображення (а), розтягування за вертикаллю і дзеркальне відображення щодо горизонталі  $y = 1$  (б)

На рисунку 1.65 наведено ітераційні діаграми відображення «тент»: симетричного, параметр  $\alpha = 0,5$  (а) і косою, параметр  $\alpha = 0,7$  (б), які показують динаміку системи під час старту з початкового стану  $x_0$ .

Як видно на рисунку 1.65, залежно від завдання початкового стану  $x_0$  можна формувати різні хаотичні послідовності в детермінованій системі. Застосування різних типів відображення «тент» (симетричне, косою) також приводить до різних хаотичних послідовностей.

**Квадратичне відображення (логістичне відображення або відображення Ферхюльста).** Складнішим відображенням є сімейство квадратичних відображень

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (1.60)$$

де  $x_n$  – динамічна змінна;  $\lambda$  – параметр, від величини якого залежить характер динаміки.

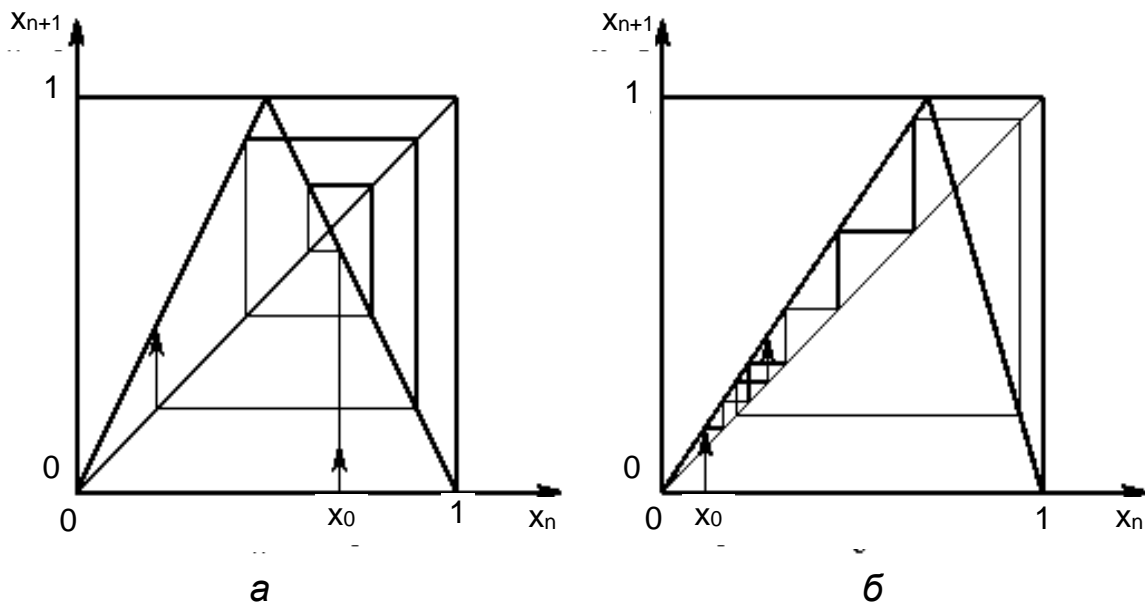


Рисунок 1.65 – Ітераційні діаграми відображення «тент» під час старту із початкового стану  $x_0$ : *а* – симетричного, параметр  $\alpha = 0,5$ ; *б* – косого, параметр  $\alpha = 0,7$

Логістичне відображення також подають у вигляді [3]

$$y = rx(1-x), \text{ якщо } 0 < r \leq 4, \quad (1.61)$$

або

$$x_{n+1} = r(x_n - x_n^2).$$

Насправді обидві форми запису еквівалентні та зводяться одна до одної заміною змінної і параметра:

$$x_n = \frac{x_n - 1/2}{r/4 - 1/2}, \quad \lambda = r \left( \frac{r}{4} - \frac{1}{2} \right).$$

Квадратичні (логістичні) відображення перетворюють одиничний відрізок  $[0, 1]$  на відрізок  $[0, r/4]$ . Графіки логістичного (квадратичного) відображення наведено на рисунку 1.66.

На рисунку 1.67 наведено ітераційну діаграму логістичного відображення, що показує динаміку під час старту із початкового стану  $x_0$ .

Як видно на рисунку 1.67, якщо задати певний початковий стан  $x_0$ , то можна створювати стійкі, а не хаотичні послідовності в системі.

У логістичного відображення є дві нерухомі точки (див. рисунок 1.66). Перша нерухома точка  $x_1^* = 0$  існує за всіх значень параметра  $r$ . Друга нерухома точка  $x_2^* \neq 0$  залежить від параметра  $r$  і визначається таким чином

$$x_2^* = rx_2^*(1-x_2^*); \quad 1 = r(1-x_2^*); \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{r}. \quad (1.62)$$



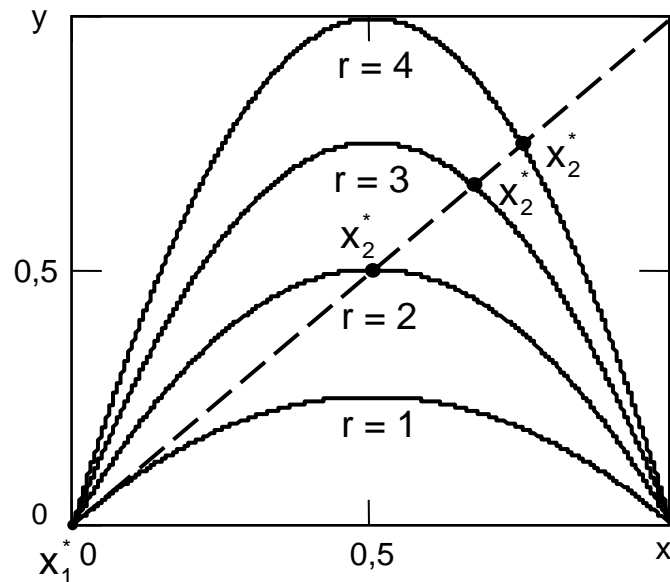


Рисунок 1.66 – Логістичне відображення

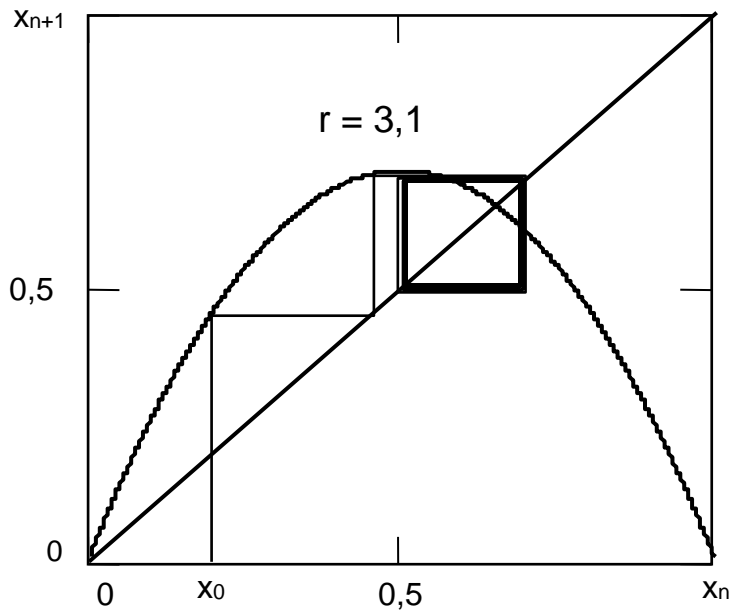


Рисунок 1.67 – Ітераційна діаграма логістичного відображення

Якщо  $\frac{1}{r} > 1$ , то нерухома точка  $x_2^*$  розташовується ліворуч від відрізка  $[0, 1]$ . Крайнє положення нерухомої точки  $x_2^*$  праворуч відповідає  $r = 4$ :

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{r} = \frac{3}{4}.$$

Стійкість нерухомих точок логістичного відображення залежить від параметра  $r$ :

$$|y'| = |r(1-x) + rx(-1)| = |-2rx + r|; \quad (1.63)$$

$$|y'(x_1^*)| = |r|; \quad (1.64)$$

$$|y'(x_2^*)| = \left| -2r \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + r \right| = |-2r + 2 + r| = |2 - r|. \quad (1.65)$$

З аналізу виразу (1.63) видно, що нерухома точка  $x_1^* = 0$  стійка, якщо  $r < 1$ , і нестійка, якщо  $r > 1$ , а з виразу (1.65) видно, що нерухома точка  $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$  стійка, якщо  $|2 - r| < 1$ , тобто, якщо  $1 < r < 3$ , і нестійка – якщо  $r > 3$ .

Логістичне (квадратичне) відображення – це теж штучно сконструйована модель динамічної системи, але вона має достатньо реалістичну інтерпретацію в біології для опису динаміки чисельності деяких біологічних популяцій.

**Перетворення пекаря** [52]. Відображення, що зберігає площу і що нагадує дії пекаря, який розкатує тісто, називають **звичайним перетворенням пекаря** (рисунок 1.68, а), а що не зберігає площу – **дисипативним перетворенням пекаря** (рисунок 1.68, б). У літературі англійською мовою воно позначається як Baker's map.

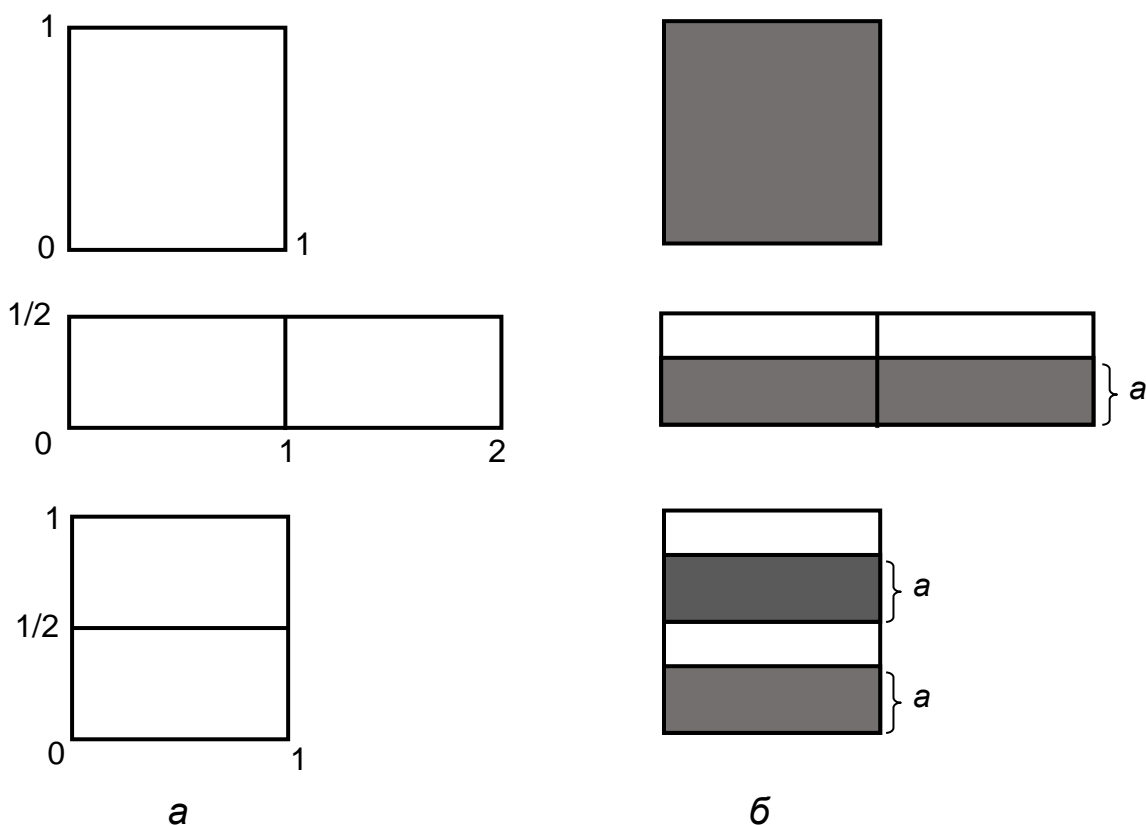


Рисунок 1.68 – Перетворення пекаря: а – звичайне; б – дисипативне

Математичний вираз для дисипативного перетворення пекаря має вигляд

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1},$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} ay_n, & \text{якщо } 0 \leq x_n < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + ay_n, & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad (1.66)$$

де  $a < 1$ .

Перше рівняння в (1.66) для  $x_{n+1}$  описує перетворення зрушень Бернуллі, а друге для  $y_{n+1}$  – визначає ширину і порядок перекладання початкового квадрата.

Розглянемо одиничний квадрат на площині  $(x, y)$ . Розрізаємо його навпіл як шматок тіста, накладаємо одну половинку на іншу й розкатуємо так, щоб відновити початкову форму (див. рисунок 1.68, б). Якщо кількість ітерацій велика, цей розподіл має вигляд набору тонких і довгих темних і світлих смужок, що розміщуються одна над одною. Після багаторазового повторення процедури, врешті-решт, отримують шматок тіста, який має однорідний вигляд. Узявши невеликий шматочок, виявляється, що в ньому є в рівних частках темні та світлі складові. Описана властивість відображення пекаря називається перемішуванням.

**Перетворення Смейла («підкова» Смейла) [52].** Як і в перетворенні пекаря, основною операцією під час побудови «підкови» Смейла є подвійна операція розтягування-складання. Візьмемо прямокутник ABCD і, розтягнувши його, наприклад, у два рази по осі  $x$  і одночасно стиснувши у  $2n$  разів по осі  $y$ , отримуємо прямокутник  $A_1B_1C_1D_1$  (рисунок 1.69, а). Якщо  $n > 1$ , то внаслідок такої процедури площа зменшується.

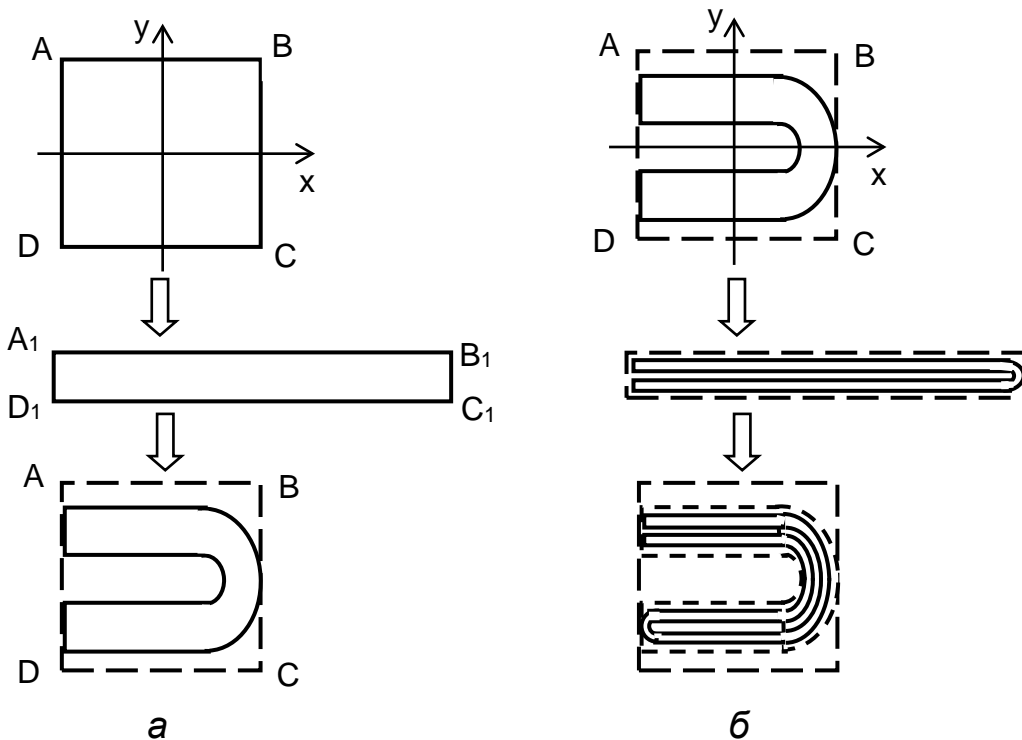


Рисунок 1.69 – Перетворення типу «підкови»: а – перша ітерація; б – друга ітерація

Складемо прямокутник  $A_1B_1C_1D_1$  у вигляді «підкови» і накладемо на початковий прямокутник  $ABCD$ . Повторюючи операцію (розтягування за віссю  $x$  і складання за віссю  $y$ ), отримуємо образ «підкови», що нагадує за формою шпильку для волосся (рисунок 1.69, б). Виконуючи операцію ітерації нескінченно багато разів, отримуємо складну багатошарову структуру  $S$ , що має всі властивості дивного атратора.

Те, що структура  $S$  є атрктором, гарантується значенням  $n > 1$ , яке веде до зменшення площі: образ кожної точки початкового прямокутника  $ABCD$  лежить усередині  $S$ . Крім того, атрктор  $S$  є дивним, оскільки має чутливість до заданих початкових умов: кожна ітерація подвоює компоненту  $x$  відстані між двома точками, у такий спосіб спричиняє експоненціальне збільшення відстані між точками.

Перетворення Смейла є дуже простим прикладом гіперболічності. Розтягування відбувається за віссю  $x$  (вісь  $x$  відповідає нестійкому різноманіттю), а стиснення – за віссю  $y$  (вісь  $y$  відповідає стійкому різноманіттю).

**Відображення «кіт Арнольда»** запропонував В. І. Арнольд, а для унаочнення його дії використовувалося зображення кота (рисунок 1.70). Розглянемо двовимірне відображення [3]

$$\begin{cases} p' = p + x \pmod{1}, \\ x' = p + 2x \pmod{1}. \end{cases} \quad (1.67)$$

Штрих позначає значення динамічних змінних, що належать до наступного кроку дискретного часу.

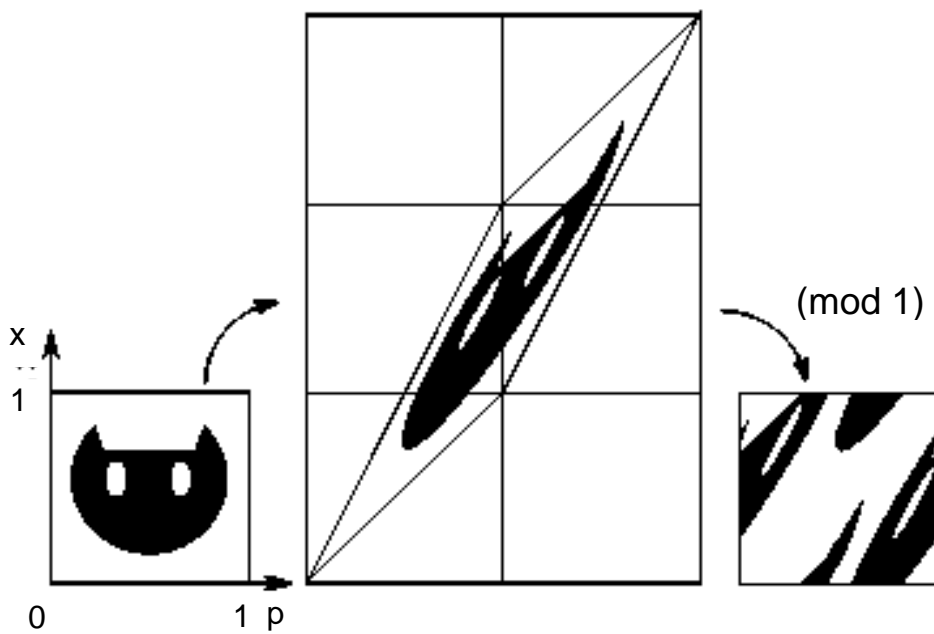


Рисунок 1.70 – Геометричне унаочнення дії класичного відображення «кіт Арнольда»

Геометрично перший крок процедури полягає в лінійному перетворенні координат  $\begin{pmatrix} p' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}$ , а другий – у перенесенні елементів картини, що вийшли за рамки одиничного квадрата, назад у нього. Останнє відповідає операції узяття модуля, завдяки наявності якої фазовий простір можна вважати періодичним за обох динамічних змінних  $p$  і  $x$ , що можна уявити як поверхню тора. Для наочного графічного подання динаміки зручніше використовувати просто одиничний квадрат (див. рисунок 1.70) [3].

Як і відображення пекаря, відображення kota Арнольда належить до класу консервативних динамічних систем. Математично це виражається в тому, що детермінант матриці  $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , яка задає відображення, дорівнює одиниці, та відображення зберігає міру (площу) будь-якої області, наприклад зображення kota.

Можна розглянути більш широкий клас лінійних відображень на торі, які визначаються будь-якими матрицями  $2 \times 2$  із цілочисельними елементами й одиничним визначником:

$$\begin{pmatrix} p' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} \pmod{1}, \quad (1.68)$$

$$ad - bc = 1. \quad (1.69)$$

Залежно від власних чисел матриці, які визначаються за допомогою розв'язання квадратичного рівняння

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \quad (1.70)$$

відображення вигляду (1.68) належать до одного з трьох типів:

- гіперболічне, якщо одне з власних чисел більше за 1, а друге менше за 1;

- параболічне, якщо  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ;

- еліптичне, якщо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  комплексно-зв'язані.

Відображення kota Арнольда належить до гіперболічного типу, оскільки його власні числа  $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$  і  $\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})/2$ . При ітераціях такого відображення зафарбована область (зображення kota) витягується вздовж напрямку першого (нестійкого) власного вектора на кожному кроці в  $\lambda_1$  разів і стискається вздовж другого (стійкого) власного напрямку в  $\lambda_2$  разів відповідно.

Після достатньо великої кількості ітерацій зображення kota перетворюється на надзвичайно вузьку смугу, витягнуту вздовж нестійкого власного напрямку, тобто близьку до довгого відрізка лінії, заданого рівнянням

$$p = [(\sqrt{5} - 1)/2]x \pmod{1}.$$

Якщо кутовий коефіцієнт ірраціональний, то лінія покриває поверхню тора всюди щільно. Тому картина має вигляд набору великої кількості вузьких чорних і білих смужок, що чергуються, на які перетворилися, відповідно, безліч точок, що належать зображенню кота, і доповнення цієї множини: чорна і біла «рідини» виявляються добре перемішаними (рисунок 1.71). Як видно на рисунку 1.71, процес перемішування швидко розвивається.

Ця властивість перемішування аналогічна тій, про яку йшлося для відображення пекаря. Вона строго доводиться у своєму точному математичному формулюванні для гіперболічних відображень на торі та є підставою для висновку про хаотичну динаміку цих систем. Зокрема, з перемішування виходить властивість ергодичності, яка полягає в тому, що обчислення статистичних середніх за ансамблем еквівалентно усереднюванню за часом уздовж типової індивідуальної траєкторії.

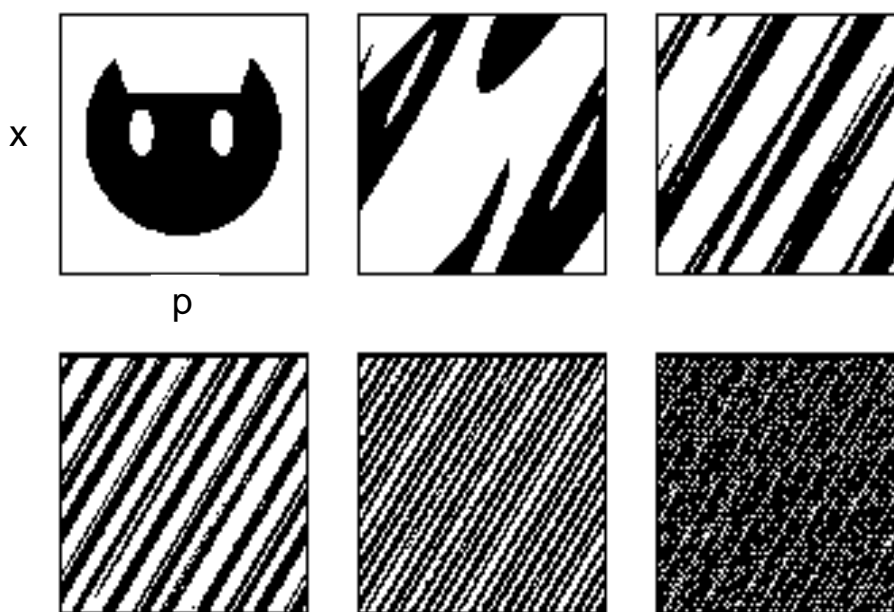


Рисунок 1.71 – Динаміка відображення «кіт Арнольда» протягом п'яти кроків ітерацій

### **Атрактор Смейла – Вільямса (соленоїд Смейла – Вільямса) [52].**

Приклад хаотичного атрактора, що дістав назву соленоїд Смейла – Вільямса, реалізується в тривимірному відображенні, яке будується таким чином. Розглянемо тривимірну область у формі тора (рисунок 1.72). Подаючи його для наочності як гумовий «бублик», розтягнемо його в довжину, складемо вдвічі та вкладемо в початковий тор. Щоб він там помістився, доводиться припустити, що під час процедури загальний об'єм «бублика» зменшується – площа поперечного перерізу має зменшитися більш ніж у два рази.



Рисунок 1.72 – Перші два кроки побудови атрактора Смейла – Вільямса

На рисунку 1.73 показано вигляд поперечного перерізу початкового тора після одноразового і дворазового застосування відображення. Це схоже на процедуру побудови множини Кантора: на кожному кроці в перерізі є деяка кількість дисків. Черговий крок побудови полягає в тому, що всередині кожного диска виділяються дві менші області у формі дисків, які залишаються для наступного кроку, а решта всієї множини виключається. Те, що залишиться в результаті, і є переріз атрактора Смейла – Вільямса.

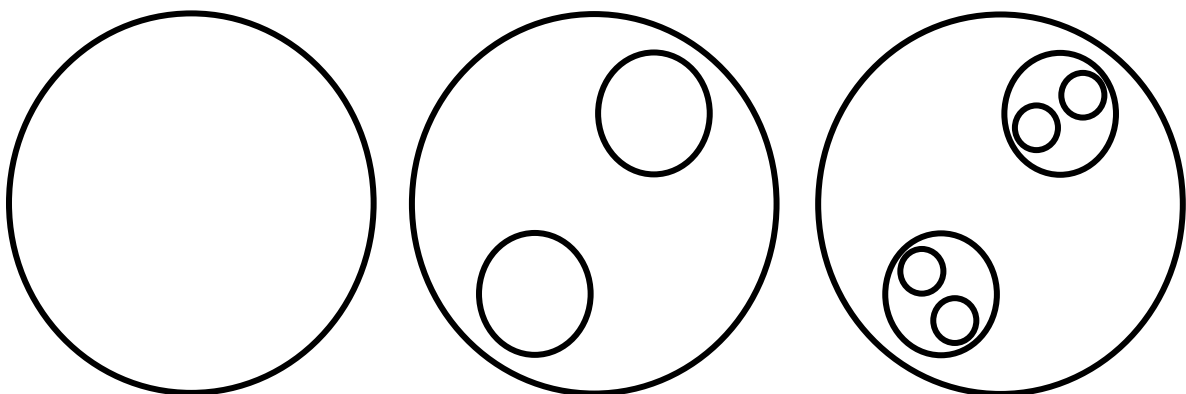


Рисунок 1.73 – Вигляд перерізу атрактора Смейла – Вільямса на перших кроках його побудови

Таким чином, дискретні відображення дають змогу досліджувати типові ситуації глобального розтягування та стиснення під час формування фрактальних функцій і сигналів.

### 1.2.3.2 Метод перерізу (відображень) Пуанкаре

Під час дослідження складних часових рядів для спрощення процесу спостереження за характеристиками динамічної системи, що змінюються, переходять від спостереження за поведінкою фазової траєкторії до вивчення зміни сигналу тільки у фіксовані моменти. Рух фазової траєкторії в цьому випадку подається послідовністю точок на псевдофазовій площині, яке є **відображенням (перерізом) Пуанкаре**, якщо моменти вибірки відповідають певному правилу [29].

Виберемо, наприклад, площину  $n_1x + n_2y + n_3z = c$  із нормальним вектором  $n \equiv (n_1, n_2, n_3)$  (рисунок 1.74). Як окремий випадок можна вибрати площу  $x = 0$ . Тоді відображення Пуанкаре складається з тих точок площини, через які траєкторія проходить в одному і тому самому напрямку, тобто якщо  $s(t)$  – одиничний вектор, дотичний до траєкторії, то скалярний твір  $s(t_n)n$  завжди повинен мати один і той самий знак.

Нехай рух подано траєкторією в тривимірному просторі з координатами  $(x, y = \dot{x}, z = \ddot{x})$ . Для побудови відображення Пуанкаре зробимо переріз фазової траєкторії площиною  $S$ , рівняння якої має вигляд  $ax + by + cz = d$ . Відображення Пуанкаре складається з тих точок цієї площини, у яких траєкторія проходить крізь неї з певного боку, тобто, якщо визначити лицьову і задню сторони площини, то слід фіксувати тільки ті точки фазової траєкторії, у яких вона проходить із передньої на зворотну сторону, або навпаки, але не в обох напрямках (див. рисунок 1.74) [52].

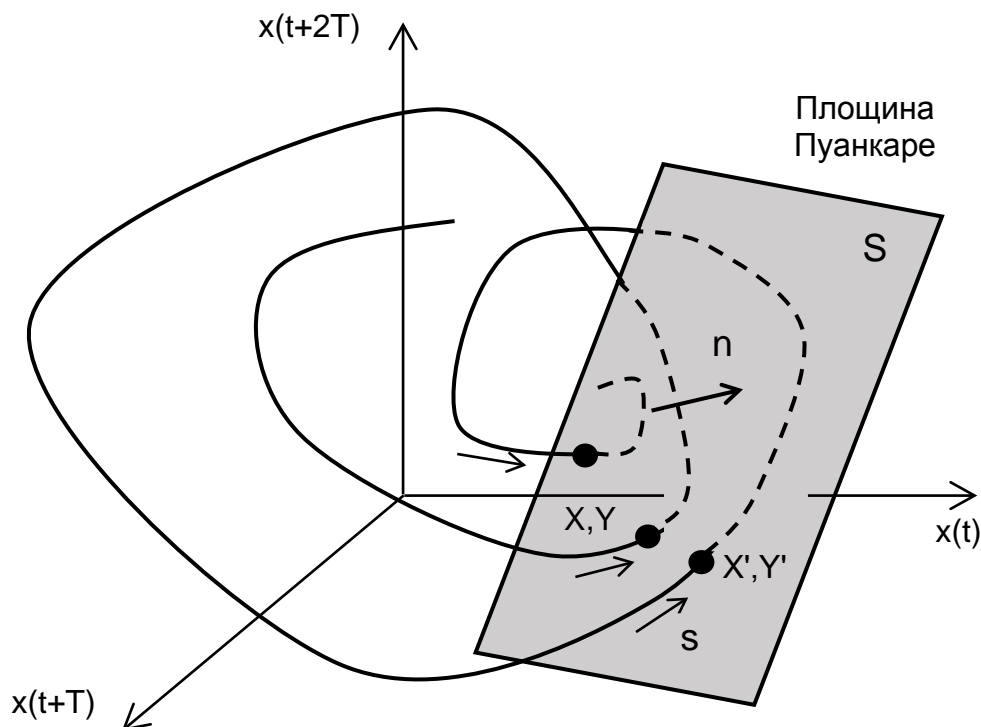


Рисунок 1.74 – Поведінка траєкторії на тривимірній псевдофазовій площині та типова площина Пуанкаре



Знайти відображення Пуанкаре для конкретних нелінійних систем у явному вигляді вдається дуже рідко, проте можливо в тих виняткових випадках, коли диференціальні рівняння допускають аналітичне рішення. Проте можна будувати відображення Пуанкаре як чисельний алгоритм.

Припустимо, що динамічна система описується диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x, y, z),\end{aligned}\tag{1.71}$$

і поверхня, що перерізає, задається рівнянням

$$S(x, y, z) = 0.\tag{1.72}$$

Якщо є реалізована у вигляді комп'ютерної програми процедура розв'язання системи рівнянь (1.71), наприклад методом Рунге – Кута, то можна задати як початкову умову деяку точку на поверхні, що перерізає, і будувати розв'язок крок за кроком різницевим методом, відстежуючи знак функції  $S(x, y, z)$ . Момент перетину траєкторією січної поверхні, що перерізає, – це момент зміни знака  $S$ . Можна зафіксувати, між якими за номером кроками різницевого методу це трапиться. Припустимо, що це відбулося між  $n$ -м і  $(n + 1)$ -м кроками, так що  $S_n = S[x(n\Delta t), y(n\Delta t), z(n\Delta t)]$  і  $S_{n+1} = S[x((n + 1)\Delta t), y((n + 1)\Delta t), z((n + 1)\Delta t)]$  мають протилежний знак.

Виникає запитання: як уточнити момент перетину. Розв'язання проблеми було надано Мішелем Ено і полягає в такому. Доповнимо систему рівнянь (1.71) ще одним співвідношенням [45]

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dS}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dS}{dz} \frac{dz}{dt},$$

або

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx} f_1(x, y, z) + \frac{dS}{dy} f_2(x, y, z) + \frac{dS}{dz} f_3(x, y, z).\tag{1.73}$$

Перепишемо рівняння, вважаючи незалежною змінною  $S$ . Позначимо для зручності

$$H(x, y, z) = \frac{dS}{dx} f_1(x, y, z) + \frac{dS}{dy} f_2(x, y, z) + \frac{dS}{dz} f_3(x, y, z).\tag{1.74}$$

Отримаємо

$$\frac{dx}{dS} = \frac{f_1(x,y,z)}{H(x,y,z)}, \quad \frac{dy}{dS} = \frac{f_2(x,y,z)}{H(x,y,z)}, \quad \frac{dz}{dS} = \frac{f_3(x,y,z)}{H(x,y,z)}, \quad \frac{dt}{dS} = \frac{1}{H(x,y,z)}. \quad (1.75)$$

Візьмемо значення  $x, y, z, t$  і  $S$ , одержані на  $(n + 1)$ -му кроці, і зробимо один крок за  $S$ , величина якого  $(- S_{n+1})$  (яка може бути як додатною, так і від'ємною). Після цього  $S$  перетвориться на нуль, а одержані в результаті  $x, y, z$  і  $t$  дадуть потрібні значення динамічних змінних і часу в момент перетину траєкторією поверхні  $S$ .

Алгоритм будови відображення Пуанкаре за методом Ено зручно програмувати відразу як чисельне розв'язання рівнянь (1.75). При цьому функція  $H(x, y, z)$  вважається рівною 1 доти, доки виконуються «стандартні» кроки за часом і визначаються відповідно до рівняння (1.74), коли виникає необхідність провести «нестандартний» крок за  $S$ . Оскільки в обох випадках використовується той самий різницевий метод, досягається бажане узгодження за точністю. У разі цього обсяг обчислень дещо збільшується через те, що кількість рівнянь стала більшою на одиницю, це компенсується очевидними перевагами методу [45].

Для систем, що задаються неавтономними диференціальними рівняннями з періодичними коефіцієнтами (систем із періодичною зовнішньою дією), процедура будови перерізу Пуанкаре виявляється зовсім простою. Якщо немає періодичної дії, система має двовимірний фазовий простір  $(x, y)$  і описується рівнянням вигляду

$$dx/dt = f_1(x, y); \quad dy/dt = f_2(x, y).$$

Наявність зовнішньої періодичної дії загалом виражається в тому, що функції  $f_1$  і  $f_2$  треба вважати періодично залежними від часу, тобто  $f_1(x, y, t) = f_1(x, y, t + T)$  і  $f_2(x, y, t) = f_2(x, y, t + T)$ , та записати

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z). \quad (1.76)$$

Введемо нову змінну  $z$ , що задовольняє рівняння  $z = 1$ . У такому випадку видно, що автономна система в тривимірному фазовому просторі (рисунок 1.75, а)

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = 1 \quad (1.77)$$

відповідає виразу (1.76).

Для будови відображення Пуанкаре за поверхню, що перерізає, зручно взяти площину  $z = \text{const}$  (рисунок 1.75, б).

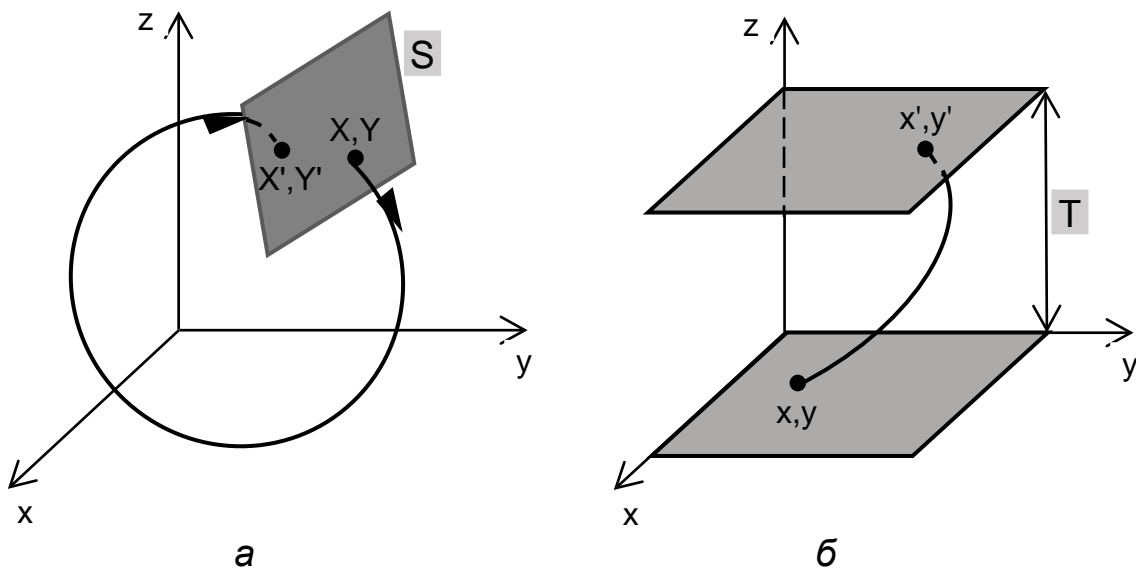


Рисунок 1.75 – Будова відображення Пуанкаре: а – для автономної системи в тривимірному фазовому просторі; б – для системи з періодичною зовнішньою дією

На площині, що перерізає, як координати можна використовувати природні динамічні змінні  $x$  і  $y$ . Оскільки за віссю  $z$  фазовий простір має періодичну структуру, то можемо не розрізняти точки, що розташовані одна від одної на відстані цілого числа періодів  $T$ . Іншими словами, якщо зображальна точка перетинає верхню площину (див. рисунок 1.75, б), то вона миттєво «перестрибує» на нижню площину і зберігає ті самі значення координат  $x$  і  $y$ . Допоміжну змінну  $z$  у такому разі можна не використовувати, тому що вона не відрізняється від часу  $t$ , і розглядати фазовий простір  $(x, y, t)$ .

Відображення Пуанкаре має простий сенс – воно описує зміну динамічних змінних за один період зовнішньої дії. Таке відображення іноді називають стробоскопічним відображенням. Уявіть, що динаміка системи більшу частину часу відбувається в темряві та недоступна для спостереження. Проте один раз за період зовнішньої дії на коротку мить спалахує яскраве світло, так що можна відстежувати дискретну послідовність станів, що відповідають моментам спалахів. Числова побудова стробоскопічного відображення Пуанкаре, на відміну від випадку автономних систем, не спричиняє жодних проблем – потрібно просто завжди вибирати крок ітерації так, щоб період дії містив ціле число кроків.

Під час математичного дослідження динамічних систем відображенням називають часову вибірку даних  $[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]$ , яка позначається  $x_n \equiv x(t_n)$ . У простому детермінованому відображенні величину  $x_{n+1}$  можна знайти за значенням  $x_n$ . Це часто записують у вигляді  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Припустимо, що аналізується рух, що відображається на псевдофазовій площині  $[x(t), x(t + T)]$ . Якщо замість того, щоб безперервно

стежити за рухом зображальної точки, фіксувати динамічні характеристики тільки в окремі моменти, то рух буде подано як послідовність точок фазової площини.

Якщо  $x_n \equiv x(t_n)$  і  $y_n \equiv x(t_n + T)$ , то ця послідовність точок фазової площини є двовимірним відображенням

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n).$$

Якщо моменти вибірки  $t_n$  відповідають певному правилу, це відображення називається відображенням Пуанкаре.

Таким чином, відображення (переріз) Пуанкаре дає змогу унаочнити стан динамічної системи в окремі фіксовані моменти й аналізувати її динамічні характеристики за поведінкою послідовності точок у фазовій (псевдофазовій) площині.

### 1.2.3.3 Вплив характеристик сигналів на структуру перерізу Пуанкаре

Для сигналів у коливальних системах відображення (переріз) Пуанкаре можна побудувати з використанням стробоскопічного вимірювання динамічних змін у моменти, що відповідають певній фазі руху, як наведено на рисунку 1.76. Для сигналів із  $n$  змінними переріз Пуанкаре будується за результатами вимірювання  $n - 1$  змінних у ті моменти, коли  $n$ -а змінна набуває певного значення або коли траєкторія у фазовому просторі перетинає деяку довільну площину [53].

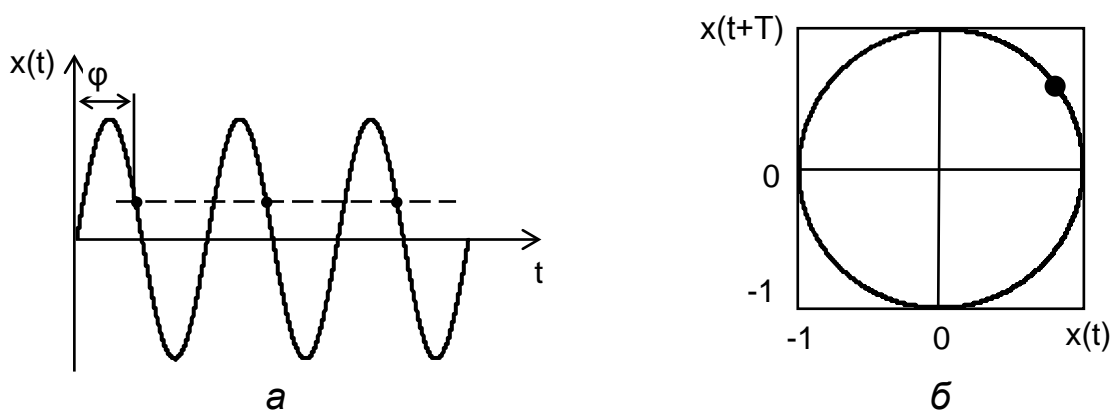
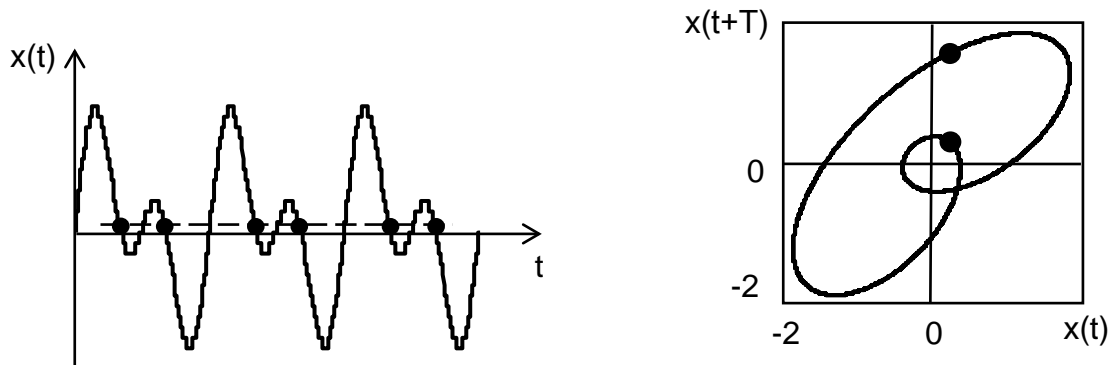


Рисунок 1.76 – Моменти реєстрації даних (а) і фазовий портрет із відображенням Пуанкаре (б) (точка на фазовому портреті)

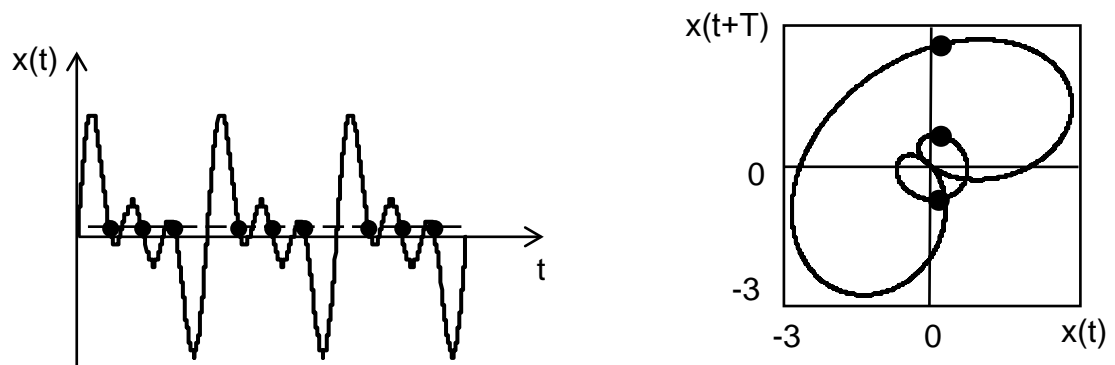
Якщо аналізується періодичний сигнал із періодом  $T$ , то під час побудови відображення (перерізу) Пуанкаре природно виділити вибірку із  $t_n = nT + \tau_0$ . Це дає змогу розрізнити періодичні та неперіодичні сигнали [29]. Наприклад, якщо вибірку синусоїдального сигналу, що наведено на рисунку 1.76, а, синхронізувати із його періодом, то відображення (переріз)

Пуанкаре буде мати вигляд однієї точки на псевдофазовій площині, як наведено на рисунку 1.76, б.

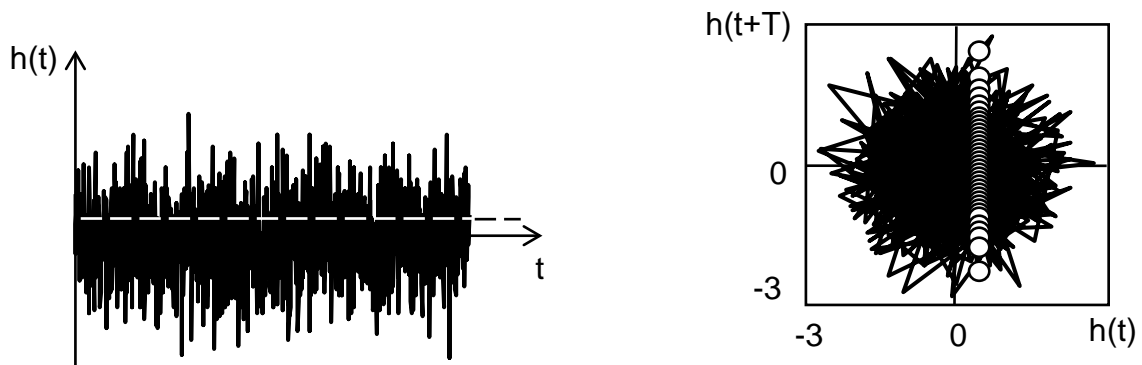
Якщо сигнал містить субгармоніки з іншими періодами, то переріз Пуанкаре містить декілька точок на псевдофазовій площині [53]. На рисунку 1.77, а, б (рисунки ліворуч) наведено сигнали, що містять суму двох і трьох синусоїдальних сигналів із кратними частотами, а на рисунку 1.77, а, б (рисунки праворуч) – фазові портрети і перерізи Пуанкаре (точки на фазових портретах), що відповідають таким сигналам.



а



б



в

Рисунок 1.77 – Моменти реєстрації даних (рисунки ліворуч) і фазові портрети з відображенням Пуанкаре (точки на фазових портретах) (рисунки праворуч) за наявності в сигналі однієї (а) і двох (б) синусоїдальних складових, а також шуму (в)

На рисунку 1.77, в наведено часову реалізацію, фазовий портрет і переріз Пуанкаре для шуму із нормальним законом розподілу.

Як видно з аналізу даних на рисунку 1.77, переріз Пуанкаре сигналу, що складається із суми двох синусоїдальних складових, містить дві точки, а переріз, що складається з суми трьох синусоїдальних складових, – три точки. Переріз Пуанкаре шуму (див. рисунок 1.77, в, праворуч) є набором точок (велика кількість точок), які майже не розділяються і створюють пряму лінію [53].

З даних рисунка 1.77 видно, що структура перерізу Пуанкаре дає змогу наочно вивчити поведінку динамічної системи і розділити періодичні сигнали від складних субгармонічних сигналів, а також виділити хаотичні (випадкові) сигнали (шум).

Таким чином, структура перерізу Пуанкаре, як і форма фазового портрета, змінюється залежно від поведінки динамічної системи, проте оскільки сигнал є динамічною системою з однією мірою свободи, то переріз Пуанкаре є менш інформативним, ніж фазовий портрет. Водночас структура перерізу Пуанкаре дає змогу добре розділяти корисний (періодичний) і квазіперіодичний сигнали, а також сигнал шуму.

### 1.3 Основні поняття теорій біфуркацій і стійкості

#### 1.3.1 Основні поняття теорії біфуркацій

**Біфуркація** (лат. bifurcus – роздвоєний) – набування нової якості руху динамічної системи в разі незначної (малої) зміни її параметрів. У широкому сенсі термін вживається для позначення будь-яких якісних перебудов або метаморфоз різних об'єктів під час зміни параметрів, від яких вони залежать [37]. Біфуркація характеризує перебудову вигляду руху реальної системи (фізичної, хімічної тощо). Явище біфуркації часто трапляється в природі та житті людини. Наприклад, біфуркація річок – поділ русла річки та її долини на дві гілки; біфуркація в медицині – поділ трубчастого органа (судини або бронха) на дві гілки однакового розміру, що розгалужені під однаковими кутами; біфуркація в навчальному закладі – поділ старших класів навчального закладу на два відділення тощо.

**Теорія біфуркацій динамічних систем** – теорія, яка вивчає зміни якісної картини поділу фазового простору, що залежить від зміни параметра (або декількох параметрів). Ця теорія стала одним із найбільш ефективних методів аналізу нелінійних явищ [37].

Класичною задачею теорії, яку було поставлено ще в минулому столітті, є задача про прогинання колони. Уявимо собі колону прямокутного перерізу, на яку зверху діє навантаження  $P$  (рисунок 1.78).

Під час збільшення навантаження колона коротшатиме і товщатиме, але її вісь залишатиметься прямою. Але при деякому критичному значенні

$P_c$  картина якісно зміниться – колона втратить прямолінійну форму і прогнеться праворуч або ліворуч. Якщо  $P < P_c$ , у колони є одна рівноважна форма. Якщо  $P > P_c$  – їх три: прямолінійна форма, яка стала нестійкою, і дві стійкі (одна відповідає прогинанню праворуч, інша – ліворуч).

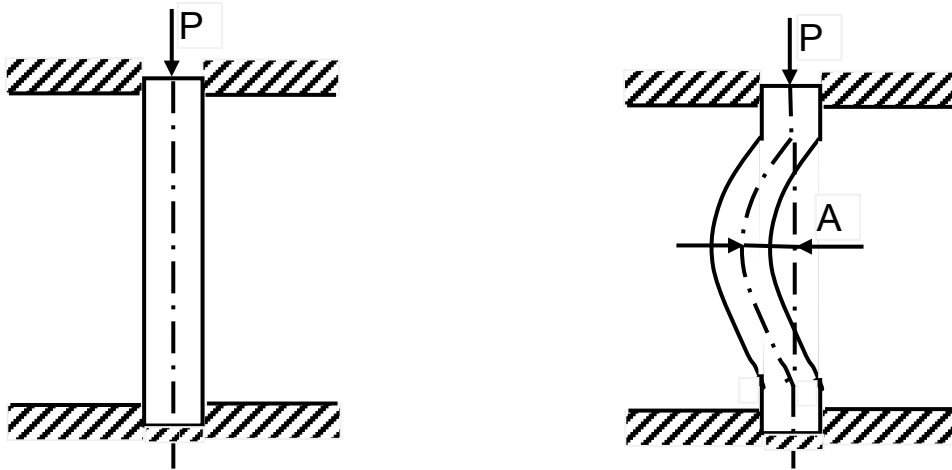


Рисунок 1.78 – Прогинання колони

Якщо графічно зобразити залежність відхилення осі колони  $A$  від величини навантаження  $P$ , то картина буде такою, як наведено на рисунку 1.79.

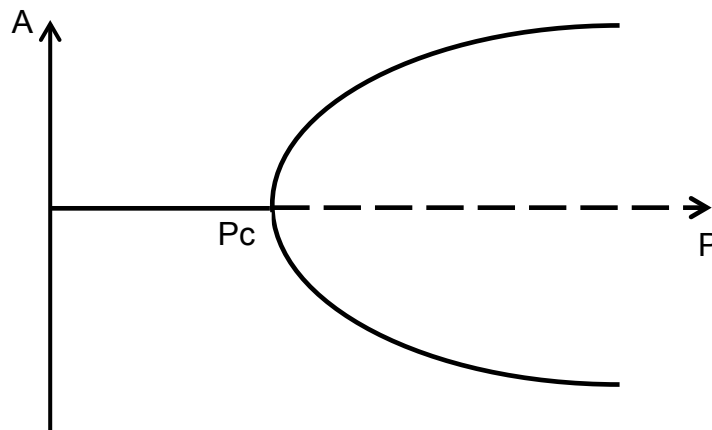


Рисунок 1.79 – Залежність відхилення осі колони від величини навантаження

На рисунку 1.79 стійкі стани рівноваги лежать на суцільній кривій, нестійкі – на пунктирній. Якщо  $P = P_c$ , змінюється кількість станів рівноваги та їх стійкість. Зміна кількості та стійкості розв'язань рівняння називається **біфуркацією** рішень. Таке явище є типово нелінійним. Класична лінійна теорія пружності дає в цьому випадку тільки один прямолінійний стан рівноваги. Задачею про втрату стійкості колони займалися такі математики, як Ейлер, Бернуллі і Лагранж. Одним із перших термін

«біфуркація» ввів К. Якобі 1834 року, але повною мірою значення теорії біфуркацій було усвідомлене А. Пуанкаре наприкінці XIX століття.

Нехай відомо розв'язок деякої нелінійної задачі за умови значення параметра  $\lambda = \lambda_0$ , тоді можна спробувати знайти розв'язок і при  $\lambda_0 + \Delta\lambda$ , де  $\Delta\lambda$  – мале число. При цьому аналіз стає **локальним** – замість пошуку загального розв'язку обмежуються вивченням того, що відбувається з конкретним розв'язком в околі одного значення параметра. Зазвичай передусім вибирають найбільш важливі значення параметра, де поведінка системи якісно змінюється, тобто точки біфуркації. При цьому найважливішою метою стає з'ясування всіх основних типів біфуркацій у різних задачах. А. Пуанкаре вважав, що розв'язання цієї великої та складної проблеми допоможе в дослідженні багатьох конкретних нелінійних явищ.

Основи теорії біфуркації закладені А. Пуанкаре і О. М. Ляпуновим на початку XX століття, потім цю теорію було розвинено О. О. Андроном і його учнями [41]. Знання основних біфуркацій дає змогу істотно полегшити дослідження конкретних фізичних систем, зокрема передбачити параметри нових рухів системи, що виникають у момент біфуркації, оцінити в просторі області існування параметрів та їх стійкість.

**Приклад перебудови характеру руху реальної системи** – виникнення конвекції в горизонтальному шарі рідини під час підігріву знизу. Збільшення температури нижньої поверхні  $T_n$  до деякої різниці температур  $T_n - T_v$  не приводить до появи макроскопічного руху рідини (тепловий потік між нижньою і верхньою поверхнями забезпечується завдяки молекулярному теплоперенесенню), але за умови деякого критичного значення  $T_n - T_v = \Delta T_{кр}$  виникає комірчаста конвекція, як це наведено на рисунку 1.80.

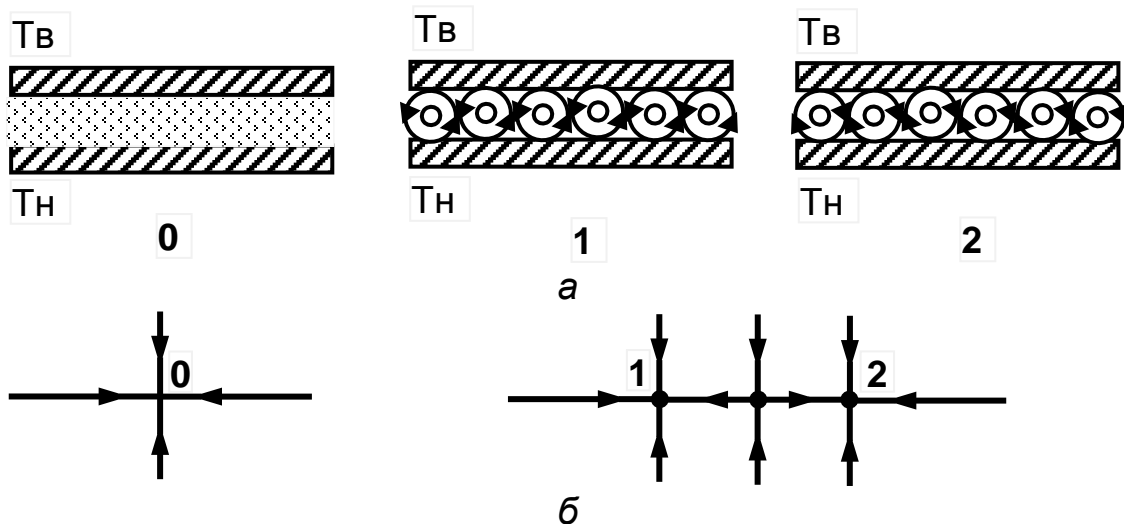


Рисунок 1.80 – Теплова конвекція в плоскому шарі рідини, що підігрівається знизу: а – стан 0, якщо  $(T_n - T_v) < \Delta T_{кр}$  – рідина в стані спокою, стани 1 і 2, якщо  $(T_n - T_v) > \Delta T_{кр}$  залежать від початкових умов; б – відповідні фазові портрети



У математичній моделі (у початкових рівняннях гідродинаміки або їх скінченномірних апроксимаціях) виникненню таких осередків відповідає біфуркація виникнення нових станів рівноваги (відповідних комірчастій структурі).

Математично біфуркація – це зміна топологічної структури поділу фазового простору динамічної системи на траєкторії, якщо її параметри змінюються незначно. Таке визначення спирається на поняття топологічної еквівалентності динамічних систем – дві системи топологічно еквівалентні, тобто мають однакову структуру поділу фазового простору на траєкторії, якщо рухи однієї з них можуть бути зведені до рухів іншої шляхом безперервної заміни координат і часу.

Серед різних біфуркацій під час аналізу моделей фізичних систем особливо цікаві так звані **локальні**. Це біфуркації, за яких відбувається перебудова окремих рухів динамічної системи. Простими і найбільш важливими з них є **біфуркації станів рівноваги і періодичних рухів** [37].

Розглянемо біфуркації станів рівноваги:

**1 Злиття і подальше зникнення двох станів рівноваги.** Прикладом може бути рух кульки в потенційній ямі з «поличкою» (рисунок 1.81).

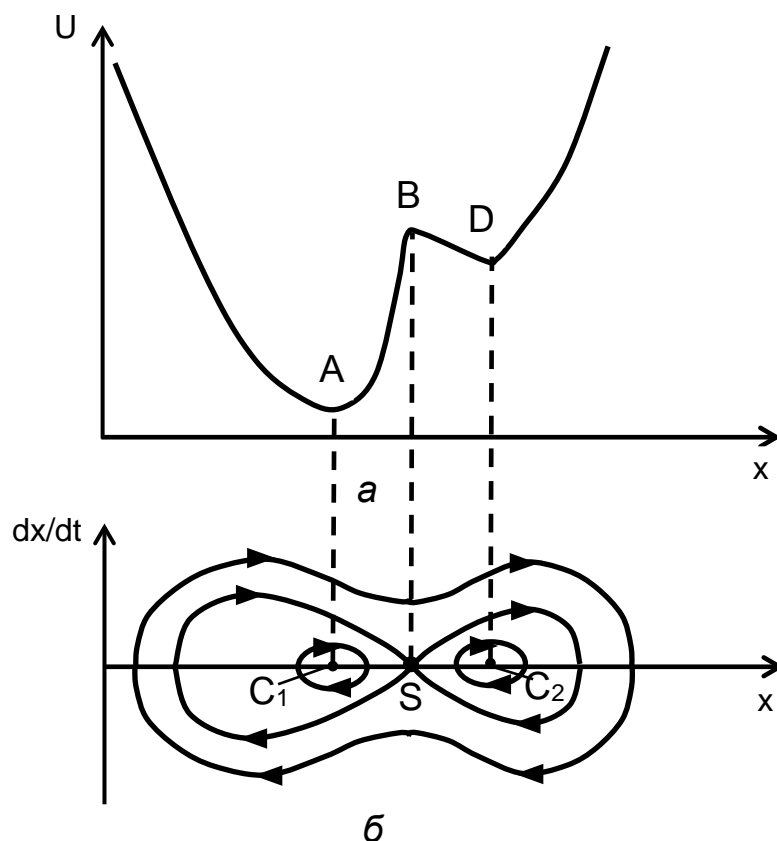


Рисунок 1.81 – Рух кульки в потенційній ямі з «поличкою» (а), його фазовий портрет (б)

У разі згладжування «полички» BD стан рівноваги сідло  $S$  і центр  $C_2$  рухаються в зустрічному напрямку і зникають (рисунок 1.82).

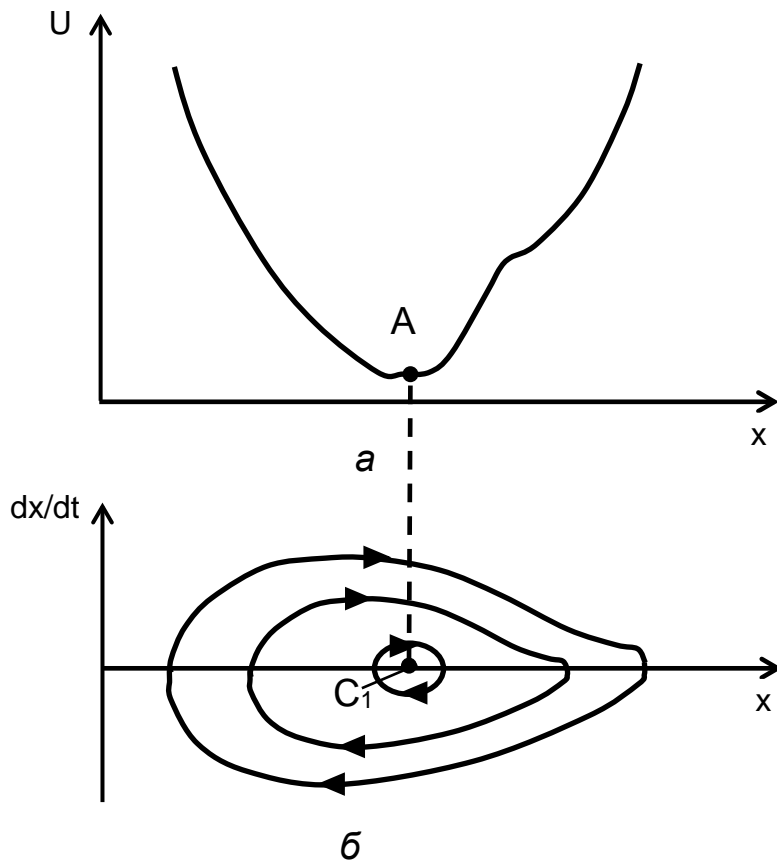


Рисунок 1.82 – Рух кульки після біфуркації (а), його фазовий портрет (б)

Таким чином, біфуркація під час дії зовнішньої дії (згладжування «полички» у потенційній ямі) може приводити до злиття і подальшого зникнення двох станів рівноваги.

**2 Виникнення граничного циклу зі стану рівноваги.** Приклад такої біфуркації – перехід простого лампового генератора, якщо керівна напруга відповідним чином змінюється від режиму статичних коливань до автоколивального режиму [39]. У цьому випадку на фазовій площині ( $x, \dot{x}$ ) (рисунок 1.83, а) зі стійкого фокусу на початку координат, якщо коефіцієнт загасання  $\alpha \geq 0$  виникає граничний цикл (рисунок 1.83, в), амплітуда якого при малих  $\alpha$  становить порядку  $\sqrt{\alpha}$ , а фокус стає нестійким.

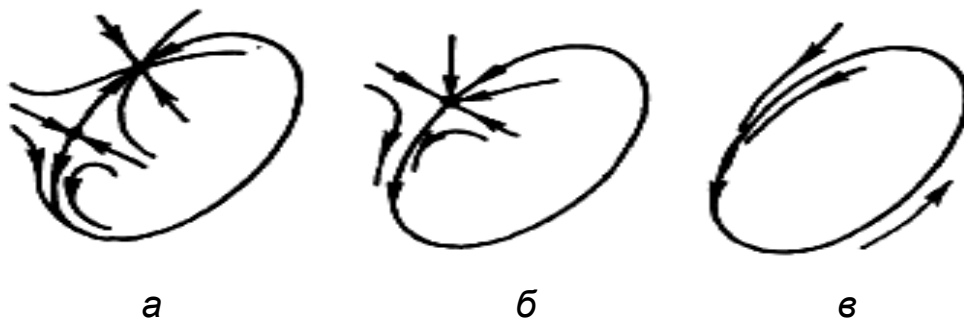


Рисунок 1.83 – Фазові портрети коливань генератора: а – до біфуркації; б – у момент біфуркації; в – після біфуркації

Розглянемо декілька моделей генераторів, для яких характерна біфуркація виникнення граничного циклу зі стану рівноваги.

**Модель генератора ван дер Поля** описується початковим (неусередненим) рівнянням

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = A \cos \omega t,$$

де  $\mu$  – величина, що характеризує величину нелінійності генератора.

Рівняння для амплітуд генератора ван дер Поля, що перебуває під дією періодичної сили, мають вигляд

$$\dot{a} = a[1 - (a^2 + b^2)] - \Delta\omega b - a_{\text{вн}}, \quad \dot{b} = b[1 - (a^2 + b^2)] - \Delta\omega a,$$

де  $\Delta\omega$  – розлад частоти.

Така біфуркація відповідає виникненню тора (рисунок 1.84), яка в експерименті відповідає переходу неавтономного осцилятора з режиму синхронізації в режим биття [39].

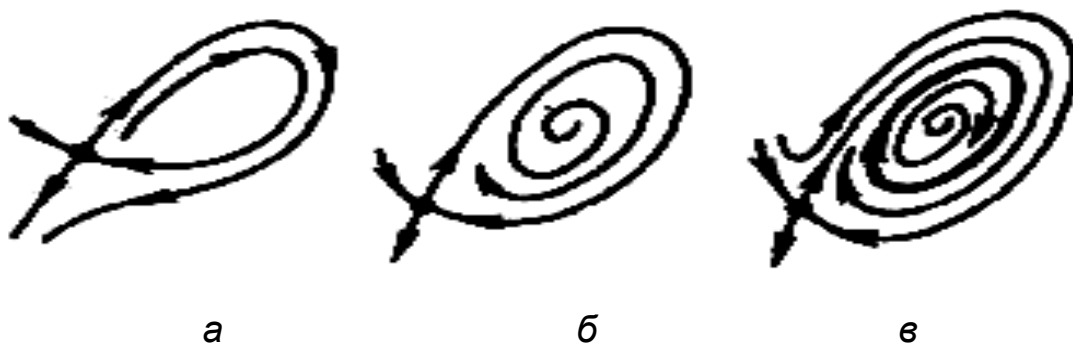


Рисунок 1.84 – Фазові портрети коливань генератора ван дер Поля: а – до біфуркації; б – у момент біфуркації; в – після біфуркації

Біфуркація рівняння ван дер Поля трапляється в різних напрямках фізики. Така біфуркація виникає, якщо здійснювати зміну двох або більше параметрів, наприклад у рівняннях гідродинаміки.

Моделлю такої біфуркації є рівняння ван дер Поля – Дуффінга

$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} + x - x^3 = 0.$$

Для стаціонарних хвиль у нерівноважних середовищах така біфуркація відповідає переходу від квазігармонійної хвилі до солітона, і далі – до кноїдальної хвилі (рисунок 1.85).

Іншою моделлю є рівняння автогенератора із жорстким збудженням (рисунок 1.86)

$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2 + \alpha x^4)\dot{x} + x = 0.$$

Одна з найбільш типових біфуркації виникнення або зникнення періодичних рухів [40].



Рисунок 1.85 – Фазові портрети коливань генератора ван дер Поля – Дуффінга: а – до біфуркації; б – у момент біфуркації; в – після біфуркації

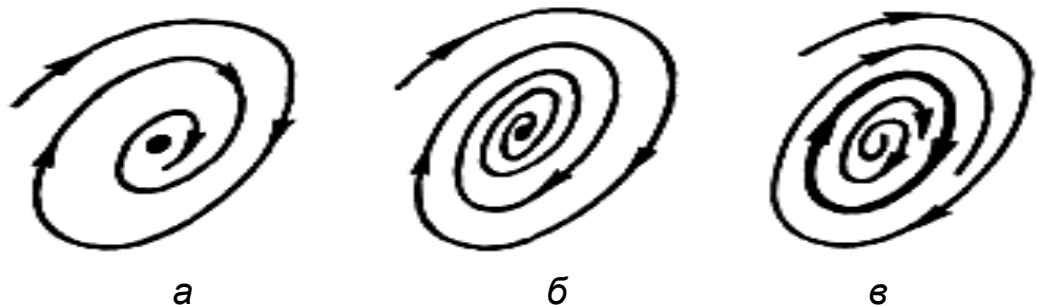


Рисунок 1.86 – Фазові портрети коливань автогенератора із жорстким збудженням: а – до біфуркації; б – у момент біфуркації; в – після біфуркації

Основні біфуркації, що наведено вище, відповідають виникненню граничного циклу зі стану рівноваги, якщо фазові портрети переглядати зліва направо (див. рисунки 1.83–1.86), або зникненню періодичних рухів, якщо фазові портрети переглядати справа наліво [39].

Якщо розглядати зникнення періодичних рухів, то перші два випадки (див. рисунки 1.83, 1.84) належать до біфуркацій за яких період періодичного руху  $T$  наближається до нескінченності (або частота  $\omega \rightarrow 0$ ), якщо  $\mu - \mu^* \rightarrow 0$ , а амплітуда коливань навколо середнього значення до нуля не наближається. У автоколивальних системах прикладом такої біфуркації є виникнення модуляції під час дії періодичної сили на автогенератор. Граничний цикл є зразком модульованих коливань, при яких виникає з петлі сепаратриси сідло-вузол під час злиття та зникнення двох станів рівноваги – сідла і вузла (див. рисунок 1.83). Дослідження такої біфуркації дає змогу визначити властивості нового режиму, що з'являється після переходу через критичну точку, – виникнення модуляції, що характеризується кінцевою амплітудою і близькою до нуля частотою модуляції. Так звана дотична біфуркація (див. рисунок 1.85) є біфуркацією зникнення стійкого періодичного руху в момент його злиття з нестійким періодичним рухом. У системах, що залежать від двох і більше параметрів, виникають складніші біфуркації (див. рисунок 1.86).

**3 Виникнення з одного рівноважного стану трьох станів рівноваги (спонтанне порушення симетрії).** Прикладом може бути зміна

руху кульки в жолобі, якщо на дні жолоба з'являється пагорб (рисунок 1.87).

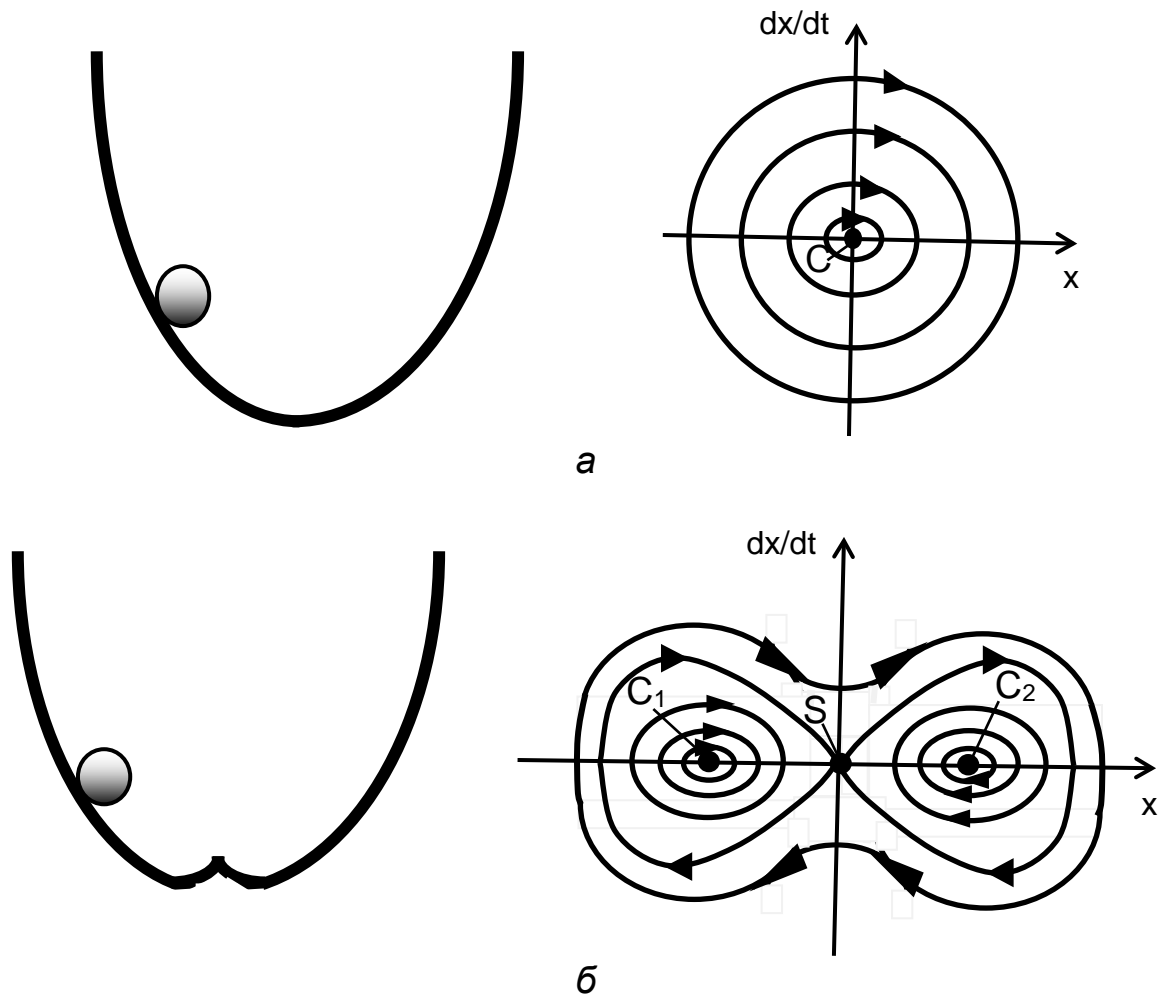


Рисунок 1.87 – Виникнення з одного стану рівноваги трьох за умови незначної зміни параметра (форми жолоба): а – форма жолоба і відповідний фазовий портрет із одним станом рівноваги типу центр С; б – форма жолоба з двома мінімумами і відповідний фазовий портрет із трьома станами рівноваги: сідло S і два центри  $C_1$  і  $C_2$

Такий випадок відповідає біфуркації, при якій із виродженого стану рівноваги типу центр (див. рисунок 1.87, а) виникають три стани рівноваги – сідло S і центри  $C_1$  і  $C_2$  (див. рисунок 1.87, б). При цьому можливе існування стійких несиметричних рухів у повністю симетричній системі [38].

Розглянемо біфуркації зміни стійкості періодичних рухів:

**1 Біфуркація подвоєння періоду.** Моделлю цією біфуркації є нелінійний осцилятор, що параметрично порушується періодичною силою, наприклад [40]

$$\ddot{x} - \mu\dot{x} + (1 + b\cos \omega t)x + x^3 = 0.$$

Така біфуркація характеризується тим, що в момент біфуркації невелике за модулем збурення через період просто змінює знак, а через наступний оборот у лінійному наближенні відбувається замикання траєкторії. Унаслідок такої біфуркації з початкового періодичного руху виникає стійкий періодичний рух приблизно подвоєного періоду (рисунок 1.88), а початковий режим стає нестійким.



Рисунок 1.88 – Фазові портрети коливань нелінійного осцилятора:  
*а* – до біфуркації; *б* – після біфуркації

Нескінченний ланцюжок біфуркації подвоєння періоду – один з найбільш поширених шляхів виникнення стохастичної поведінки в реальних системах.

**2 Виникнення двочастотних коливань.** Як модель може розглядатися генератор ван дер Поля під дією зовнішньої сили

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = A \sin \omega t.$$

Коливання такого генератора за деяких критичних параметрів можуть утворювати тор (рисунок 1.89), на якому розташовуються стійкі та нестійкі періодичні рухи.



Рисунок 1.89 – Фазові портрети коливань нелінійного генератора:  
*а* – до біфуркації; *б* – після біфуркації

Таким чином, біфуркація виникнення двовимірного тора з періодичної траєкторії відповідає появі двочастотних коливань у фізичній системі (генераторі).

**3 Виникнення пари стійких періодичних рухів.** Моделлю цією біфуркації є вимушені коливання пружної лінійки під дією малої періодичної сили. Така біфуркація (рисунок 1.90) характерна для нелінійних систем, для яких залежність потенційної енергії від змінної має два мінімуми, що перебувають під дією зовнішньої сили.

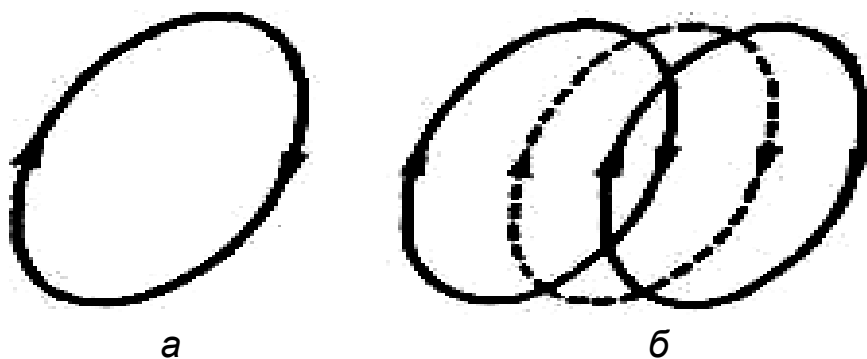


Рисунок 1.90 – Фазові портрети коливань пружної лінійки:  
а – до біфуркації; б – після біфуркації

У системах, що залежать від двох параметрів, або в системах із певним типом симетрії відбувається біфуркація, яка створює відразу два стійкі граничні цикли [41].

Таким чином, біфуркації, унаслідок яких зникають статичні або періодичні режими (тобто стани рівноваги або граничні цикли), можуть приводити до того, що динамічна система переходить у режим стохастичних коливань. Термін «біфуркація» іноді використовують для позначення перебудов таких об'єктів, які не змінюються в часі. У такому випадку вживається також термін «катастрофа».

### 1.3.2 Біфуркаційна діаграма та точка біфуркації

Теорія біфуркацій вивчає залежність якісної картини за умови безперервної зміни параметра вздовж деякої кривої. Схема, за якою відбувається зміна якісної картини, називається **біфуркаційною діаграмою**.

Розглянемо будову біфуркаційної діаграми на прикладі логістичного відображення, що розглядалося вище і яке є типовим прикладом того, як складна хаотична поведінка може виникати з простих нелінійних рівнянь

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad (1.78)$$

де  $x_n$  – динамічна змінна, що набуває значення від 0 до 1;  $\lambda$  – додатний параметр, від величини якого залежить характер динаміки.

Логістичне відображення також подають у вигляді виразів (1.60) і (1.61), які було наведено вище.

На рисунку 1.91, а наведено логістичне відображення (вершина параболи), яке побудовано, якщо  $\lambda < 3$  ( $\lambda = 2,8$ ). За таких величин  $\lambda$  ітераційний процес, що стартує з точки  $0 < x_0 < 1$  (на рисунку 1.91, а  $x_0 = 0,2$ ), збігається до точки тяжіння  $x^*$  ( $x^* = 0,64$ ), оскільки абсолютна величина тангенса кута нахилу проведеної до цієї точки дотичної задовольняє умову збіжності ітераційного процесу:  $|f'(x^*)| < 1$ .

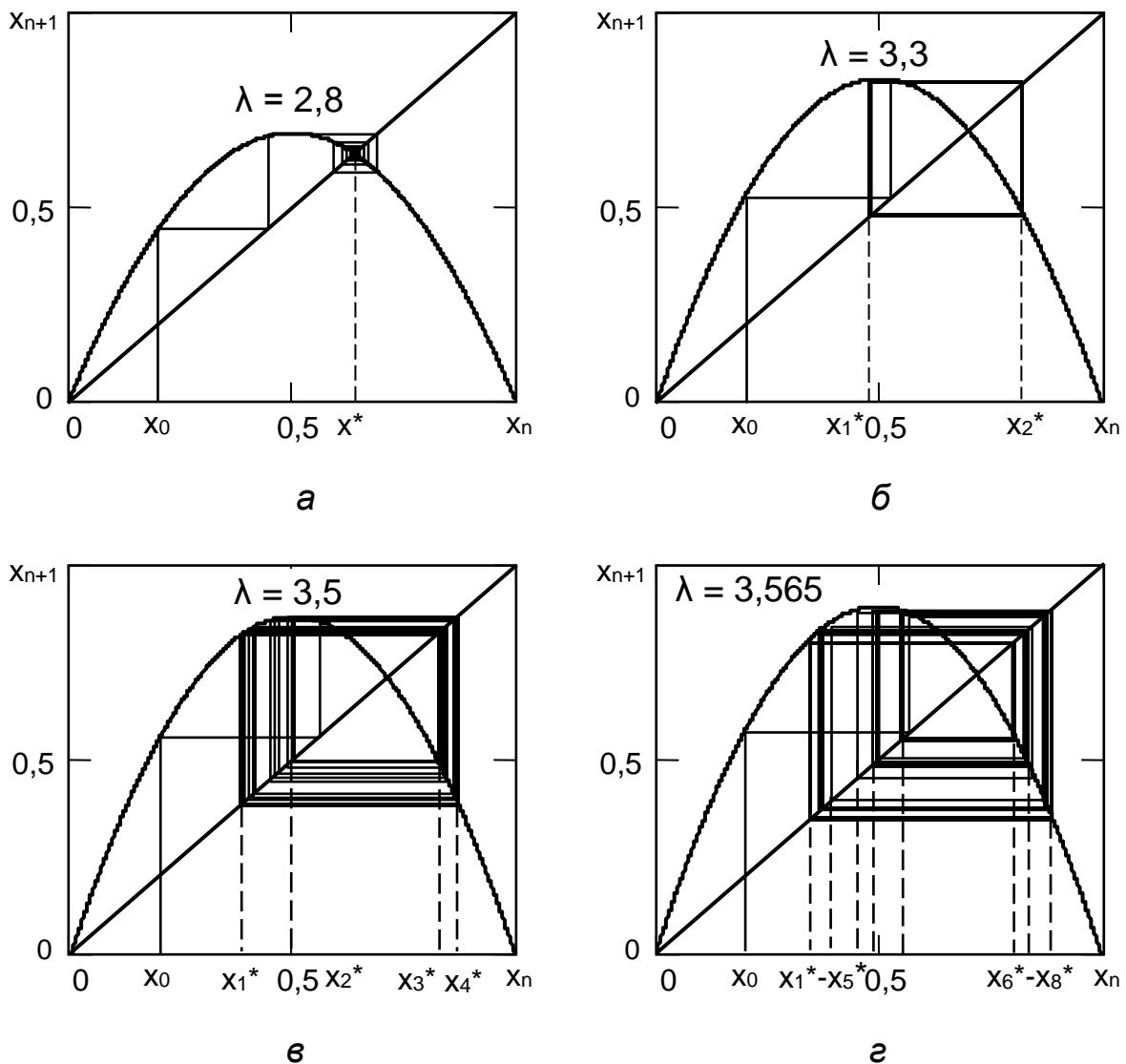


Рисунок 1.91 – Ітераційні діаграми логістичного відображення, якщо  $x_0 = 0,2$ : а –  $\lambda = 2,8$ ; б –  $\lambda = 3,3$ ; в –  $\lambda = 3,5$ ; г –  $\lambda = 3,565$

Якщо параметр  $\lambda$  стає більшим за три ( $\lambda > 3$ ), то порушується критерій збіжності:  $|f'(x^*)| > 1$ . Отже, раніше стійка точка  $x^*$  перестає бути такою; замість неї з'являються дві особливі точки  $x_1^*$  і  $x_2^*$  (рисунок 1.91. б), які вже не є стійкими для функції  $f(x)$ . Для функції  $f(x)$  точки  $x_1^*$  і  $x_2^*$  утворюють цикл періоду 2 [16]:



$$x_1^* = f(x_2^*) = f^{(2)}(x_1^*), \quad x_2^* = f(x_1^*) = f^{(2)}(x_2^*),$$

де  $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ .

Така ситуація зберігається доти, доки параметр  $\lambda$  лежить у певних межах. Якщо параметр  $\lambda$  виходить за ці межі, то точки тяжіння  $x_1^*$  і  $x_2^*$  зникають, оскільки для них не виконується умова тяжіння [16]:

$$|[f^{(2)}(x_1^*)]'| > 1, \quad |[f^{(2)}(x_2^*)]'| > 1,$$

але з'являються вже чотири точки  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$  і  $x_4^*$  (рисунок 1.91, в), для яких умова збіжності виконується [16]:

$$|[f^{(4)}(x_1^*)]'| > 1, \quad |[f^{(4)}(x_2^*)]'| > 1, \quad |[f^{(4)}(x_3^*)]'| > 1, \quad |[f^{(4)}(x_4^*)]'| > 1.$$

Для функції  $f^{(2)}(x)$  точки  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$  і  $x_4^*$  утворюють чотири періоди. Така геометрична конфігурація зберігається в області значень параметрів  $\lambda$ , яка є набагато вужчою за попередню. Якщо величина параметра  $\lambda$  перевищує межу другої області, то колишні точки притягання ( $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$  і  $x_4^*$ ) зникають і замість них з'являються вісім нових (рисунок 1.91, г), для яких умова збіжності ітераційної процедури виконуватиметься вже для  $f^{(8)}(x)$ . Каскад подвоєння точок притягання можна продовжувати до нескінченності, при цьому параметр  $\lambda$  наближається до деякої межі, яка є правою межею нескінченної послідовності чисел.

Для ілюстрації такого каскаду подвоєнь будують так звану біфуркаційну діаграму  $x^* = B(\lambda)$ , яка показує кількість і значення точок притягання  $x^*$  залежно від величини параметра  $\lambda$ . На осі  $y$  відкладаються значення  $x^*$ , що містяться на стійкому циклі або на іншому атракторі, а на осі  $x$  – значення параметра  $\lambda$ .

На рисунку 1.92 наведено біфуркаційні діаграми логістичного відображення за різних значень параметра  $\lambda$ . На рисунку 1.92, а видно, що, якщо  $\lambda = 2,8$  ( $\lambda < 3$ ), то подвоєння біфуркаційної діаграми немає. Перше подвоєння діаграми відбувається, якщо  $\lambda_1 = 3$  (рисунок 1.92, б, біфуркаційну діаграму побудовано, якщо  $\lambda = 3,3$ ), а циклу порядку два відповідають дві точки на одній вертикалі. Друге подвоєння діаграми відбувається, якщо  $\lambda_2 = 3,4495$  (рисунок 1.92, в, біфуркаційну діаграму побудовано, якщо  $\lambda = 3,5$ ), а циклу порядку три відповідають чотири точки на одній вертикалі. На рисунку 1.92, г побудовано біфуркаційну діаграму, якщо  $\lambda = 3,565$ , також видно третє подвоєння, якщо  $\lambda_3 = 3,5441$ , а циклу порядку чотири відповідають вісім точок на одній вертикалі і т. д. Далі точки  $\lambda_i$  настільки щільно лягають на осі  $\lambda$ , що вони стають невиразними. Відповідно до цих точок відбувається і біфуркація [16].

Таким чином, перша точка притягання  $x^*$  є стійкою, якщо значення коефіцієнта існують у межах  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ , точки притягання  $x_1^*$  і  $x_2^*$  існують у діапазоні  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , чотири точки притягання  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$ ,  $x_4^*$  – якщо  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ .

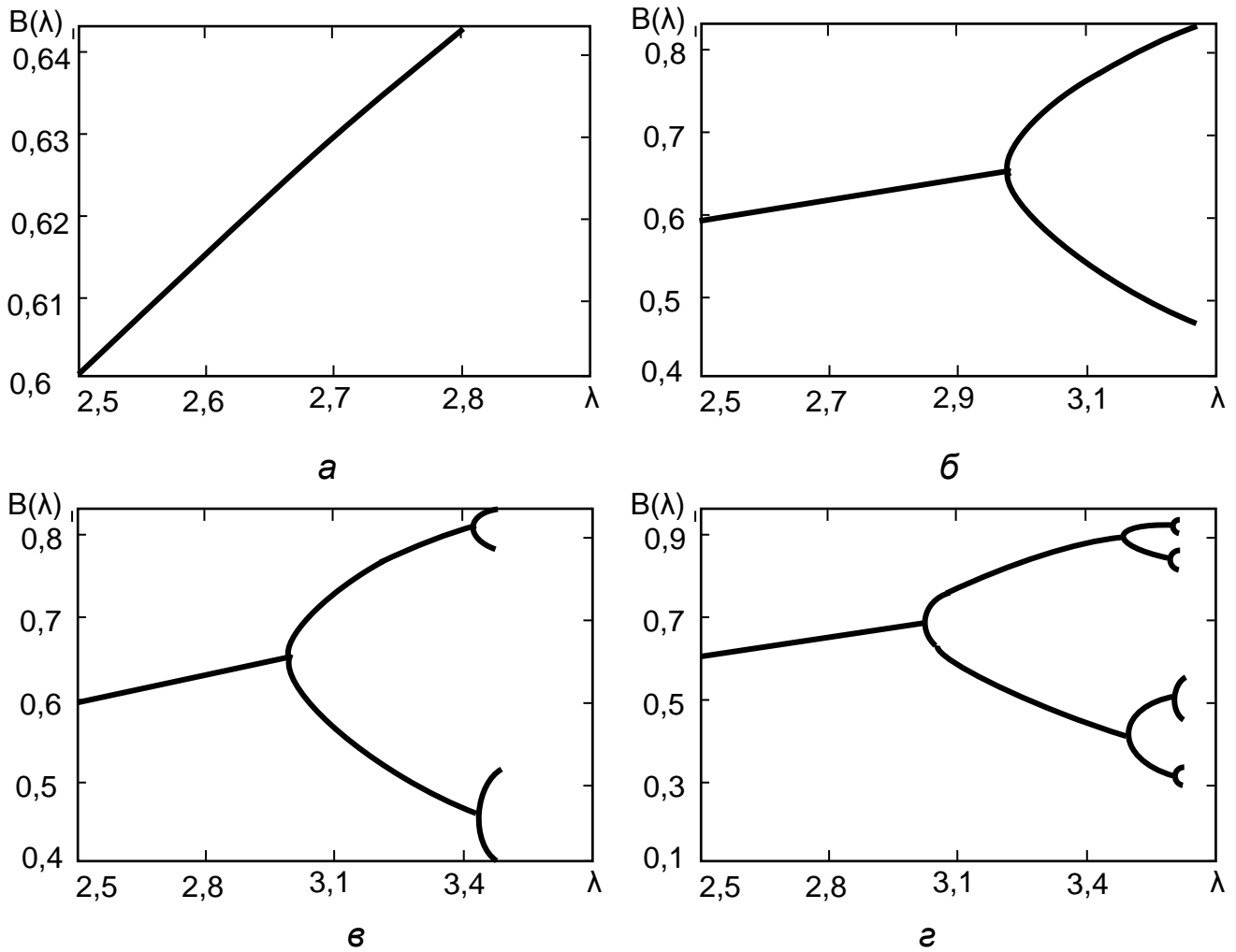


Рисунок 1.92 – Біфуркаційні діаграми логістичного відображення, якщо:  
 а –  $\lambda = 2,8$ ; б –  $\lambda = 3,3$ ; в –  $\lambda = 3,5$ ; г –  $\lambda = 3,565$

На рисунку 1.93 наведено значення точок притягання на біфуркаційній діаграмі для параметрів:  $\lambda = 2,8$  –  $x^* = 0,64$ ;  $\lambda = 3,3$  –  $x_1^* = 0,48$ ,  $x_2^* = 0,82$ ;  $\lambda = 3,5$  –  $x_1^* = 0,38$ ,  $x_2^* = 0,50$ ,  $x_3^* = 0,83$ ,  $x_4^* = 0,88$  [16].

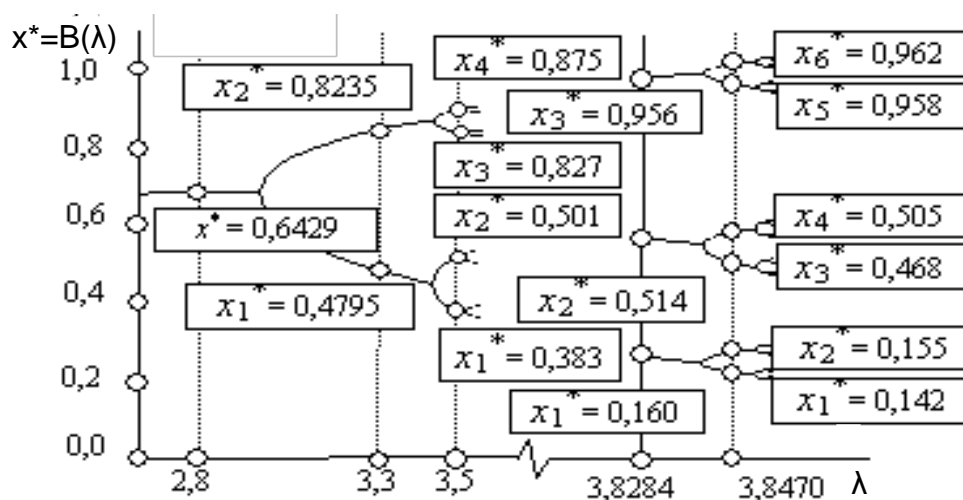


Рисунок 1.93 – Біфуркаційна діаграма зі значеннями точок притягання [16]

Цикли періоду п'ять і шість та інші також багатозначні і мають за вісью параметра  $\lambda$  початок і кінець існування. За величиною параметра  $\lambda_\infty = 3,57$  починається область  $\lambda_\infty < \lambda < 4$ , де відбувається не тільки подвоєння, але і потроєння періодів, є також інші непарні періоди: п'ять, сім, дев'ять і т. д [16]. Перший цикл непарного періоду нескінченно великого порядку з'являється, якщо  $\lambda = 3,6786$ , а цикл періоду три – якщо  $\lambda_{III} = 3,8284$ . На рисунку 1.94, а видно, що, якщо  $\lambda = 3,8284$ , виникають три точки притягання:  $x_1^* = 0,1599$ ;  $x_2^* = 0,5143$ ;  $x_3^* = 0,9563$ .

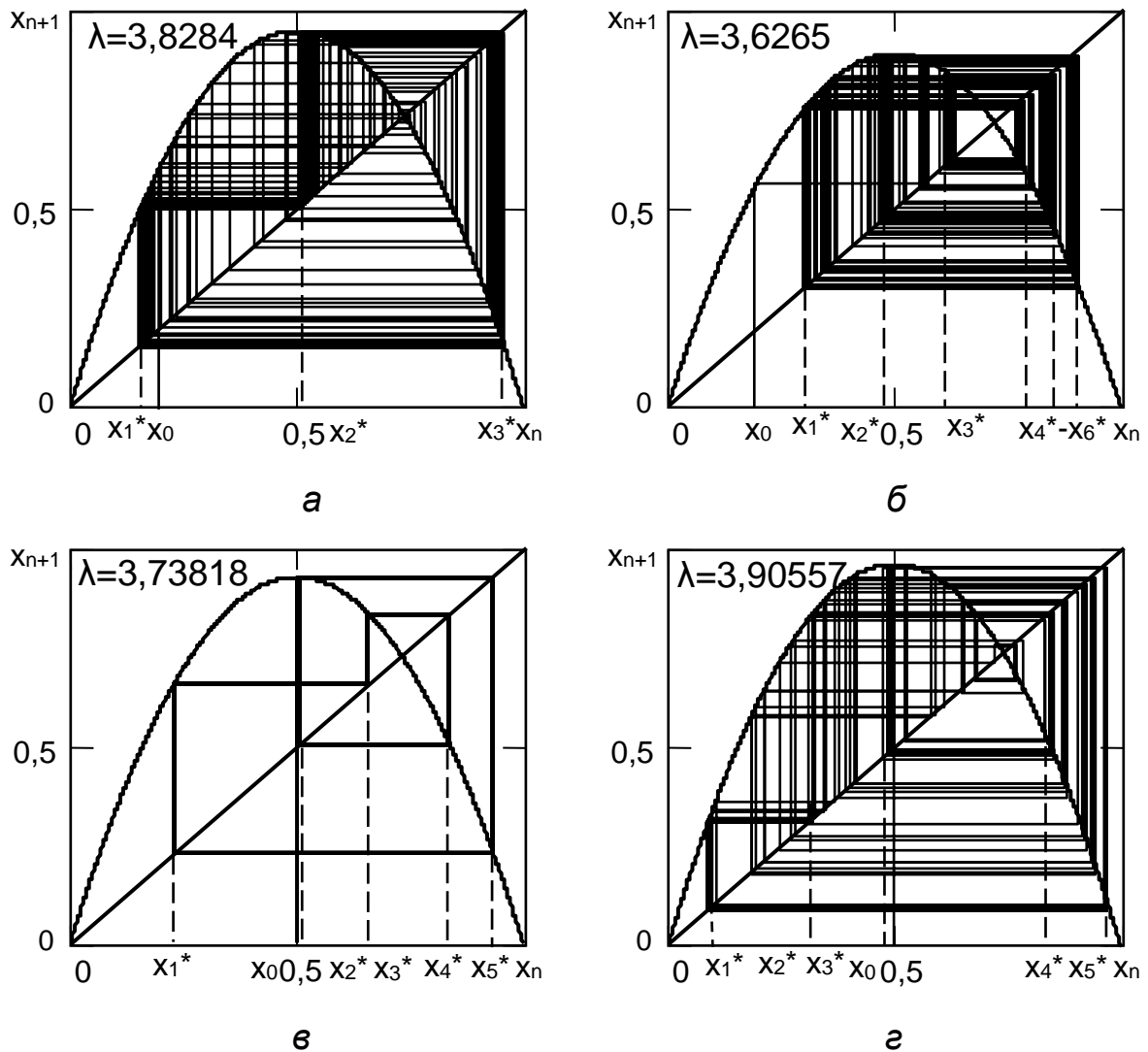


Рисунок 1.94 – Ітераційні діаграми логістичного відображення, якщо:  
 а –  $x_0 = 0,2$ ,  $\lambda = 3,8284$ ; б –  $x_0 = 0,2$ ,  $\lambda = 3,6265$ ;  
 в –  $x_0 = 0,5$ ,  $\lambda = 3,73818$ ; г –  $x_0 = 0,5$ ,  $\lambda = 3,90557$

Цикл періоду шість ( $3 \cdot 2 = 6$ ) виникає, якщо значення параметра  $\lambda$  дорівнює  $\lambda_{VI} = 3,6265$  (рисунок 1.94, б), але такий цикл існує також, якщо  $\lambda_{VI} = \{3,8415; 3,937516; 3,977760; 3,997583\}$ . Визначені значення точок притягання періоду шість для  $\lambda = 3,6265$ :  $x_1^* = 0,307$ ;  $x_2^* = 0,493$ ;  $x_3^* = 0,638$ ;  $x_4^* = 0,772$ ;  $x_5^* = 0,838$ ;  $x_6^* = 0,906$ , а також для  $\lambda = 3,8470$ :  $x'_1{}^* = 0,142$ ;  $x'_2{}^* = 0,155$ ;  $x'_3{}^* = 0,468$ ;  $x'_4{}^* = 0,505$ ;  $x'_5{}^* = 0,958$ ;  $x'_6{}^* = 0,962$ .

Цикл періоду п'ять починається ліворуч від точки  $\lambda_{III}$ , але потім повторюється і праворуч від неї, якщо  $\lambda_V = \{3,73818; 3,90557; 3,99026\}$ . Найбільш чутливим до змін параметра  $\lambda$  є центральний пік, мінімум або максимум якого завжди лежить у точці  $x_0 = 0,5$ . Тому в разі пошуку точок тяжіння зручно орієнтуватися саме на таку точку. За двох значень  $\lambda$  створюються відповідно дві системи точок притягання із періодом п'ять для  $\lambda = 3,73818$ :  $x_1^* = 0,229$ ;  $x_2^* = 0,507$ ;  $x_3^* = 0,661$ ;  $x_4^* = 0,838$ ;  $x_5^* = 0,934$  (рисунок 1.94, в) і для  $\lambda = 3,90557$ :  $x'_1{}^* = 0,090$ ;  $x'_2{}^* = 0,320$ ;  $x'_3{}^* = 0,497$ ;  $x'_4{}^* = 0,850$ ;  $x'_5{}^* = 0,976$  (рисунок 1.94, г) [16].

На рисунку 1.95 наведено біфуркаційну діаграму логістичного відображення, якщо параметр  $\lambda = 4$ .

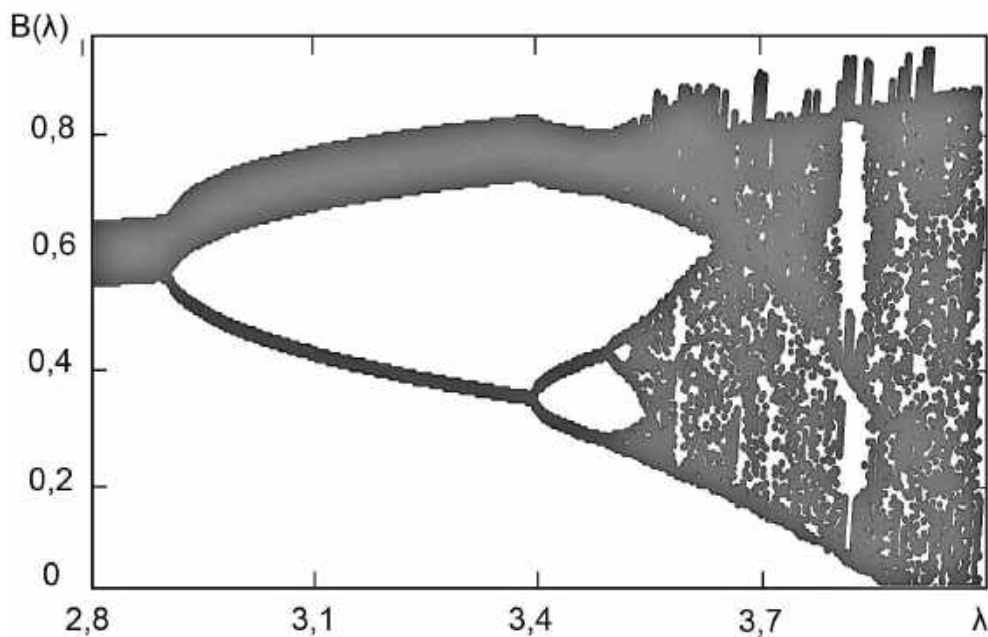


Рисунок 1.95 – Біфуркаційна діаграма логістичного відображення

На рисунку 1.95 добре видно точки біфуркацій подвоєнь періоду, де кожна «гілка дерева» розгалужується на дві. За достатньо великих значень параметра  $\lambda$  спостерігається хаос, відповідні області мають вигляд більш-менш рівномірно заповнених точками ділянок «крони». Як видно на рисунку, області хаосу змінюються на «вікна стійкості» («вікна прозорості» – вузькі зони за параметром  $\lambda$ , у яких динаміка стає періодичною). Найширша світла смуга відповідає значенням параметра  $\lambda$  у діапазоні  $3,8284 < \lambda < 3,8496$ .

Таким чином, біфуркаційна діаграма – подання будь-якої характеристичної властивості розв'язку рівняння як функції критичного параметра (для логістичного відображення – параметра  $\lambda$ ).

Параметр, зміна якого приводить до біфуркації, називається **критичним параметром (біфуркаційним параметром)**, а значення цього параметра, за яким відбувається біфуркація, називається **критичним значенням**.

Існує декілька визначень поняття «точка біфуркації», розглянемо їх.

У нерівноважній термодинамиці та синергетиці **точка біфуркації** – це зміна сталого режиму роботи системи.

У теорії самоорганізації термін **«точка біфуркації»** означає критичний стан системи, при якому система стає нестійкою щодо флуктуацій і виникає невизначеність: чи буде стан системи хаотичним або система перейде на новий, більш диференційований і високий рівень упорядкованості.

**Точка біфуркації** – точка в параметричному просторі (просторі, у якому кожній точці відповідає певний стан системи, а положення цієї точки визначається значеннями параметрів і змінних стану), у якій відбувається біфуркація.

Точка біфуркації, з якої всі отримані розв'язки стійкі, називається **точкою тяжіння (атрактором)**.

З точки біфуркації можуть виходити декілька розв'язків (стійких і нестійких). Якщо здійснювати коливання критичного параметра, то навколо критичної точки виникає властивість нестійкості розв'язку.

#### **Властивості точки біфуркації:**

**1 Непередбачуваність.** Зазвичай точка біфуркації має декілька гілок атратора (стійких режимів роботи) один із яких наслідуватиме система. Але заздалегідь неможливо передбачити, який новий атрактор буде мати система.

**2 Точка біфуркації має короткочасний характер** і розділяє триваліші стійкі режими системи.

Завдяки аналізу логістичного відображення було з'ясовано багато спільних властивостей одновимірних відображень, зокрема так званий сценарій переходу до хаосу Фейгенбаума. Але досі не зрозуміло, чому кількість точок притягання  $x^*$  то збільшується до нескінченності, то несподівано зменшується. Незрозумілою є також закономірність появи просвітів у біфуркаційній діаграмі, зокрема неясно, чим обумовлена їх ширина. Очевидно, що ця математична модель, що стала поширеною і викликала нескінченні суперечки про співвідношення хаотичного і регулярного, дискретного і безперервного, сама потребує репрезентативної моделі, яка б дала змогу вивчати зазначені проблеми [16].

Таким чином, аналіз механізмів переходу від порядку до хаосу в реальних системах і різних моделях виявив універсальність щодо небагатьох сценаріїв переходу до хаосу. Перехід до хаосу може бути подано у вигляді біфуркаційної діаграми (термін «біфуркація вживається для позначення якісних перебудов системи з виникненням нового режиму її поведінки). Перехід системи в непередбачуваний режим описується каскадом біфуркацій, які йдуть одна за одною. Каскад біфуркацій йде послідовно і приводить до появи вибору між двома розв'язками, потім чотирма і т. д., система починає коливатися в хаотичному, турбулентному режимі послідовного подвоєння кількості можливих значень.

### 1.3.3 Універсальність Фейгенбаума

**Каскад біфуркацій** (послідовність Фейгенбаума, або сценарій подвоєння періоду) – один із типових сценаріїв переходу від порядку до хаосу, від простого періодичного режиму до складного аперіодичного при нескінченному подвоєнні періоду. Послідовність Фейгенбаума має самоподібну фрактальну структуру – збільшення будь-якої області виявляє подібність виділеної ділянки до всієї структури.

У 1976 році американський фахівець у галузі математичної та теоретичної фізики Мітчел Фейгенбаум зробив відкриття, що полягає в тому, що **сценарій переходу до хаосу через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду універсальний для великого класу динамічних систем** [54].

Ще в 1971 році було виявлено цікаву властивість розв'язків рівняння на зразок  $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$ . Якщо змінювати параметр  $\lambda$ , то наявний періодичний розв'язок, що має період  $T$ , втрачає стійкість, а стійким стає розв'язок із періодом  $2T$ , потім  $4T$  і т. д. Інтервал зміни параметра  $\lambda$ , у межах якого цикл періоду  $2^n$  стійкий, швидко зменшується. Усі значення  $\lambda$ , у яких відбувається біфуркація подвоєння періоду, стають більш щільними до деякого значення  $\lambda = \lambda_{кр}$ . Щойно  $\lambda$  стає більшим за  $\lambda_{кр}$ , усередині деякої області фазового простору виявляється нескінченна кількість нестійких циклів (зокрема нескінченного з періодом  $T = 2$ ). Унаслідок чого за цією складною структурою відразу виникає хаотичний (дивний) атрактор.

На той час з'явилися сумніви в правильності сценарію виникнення турбулентності за Ландау. Відомо, що за певних умов протікання рідини буває різним: в одних умовах – рівним, стійким, регулярним, або, як кажуть, ламінарним, а в інших – нерівним, нестійким, нерегулярним – турбулентним. До речі, характер ламінарної течії дуже просто отримати з розв'язання рівнянь, а описати непередбачуваність турбулентної течії непросто.

Також у 1971 році в роботі Д. Рюеля і Ф. Такенса виникнення турбулентності пов'язувалося з появою дивного атрактора, який виникав після невеликої кількості (трьох) біфуркацій [30]. Як наголошувалося вище, дивним атрактором називається об'єкт у фазовому просторі, до якого наближаються усі або майже всі траєкторії і на якому вони нестійкі.

З'явилася ідея пов'язати безперервний перехід до турбулентності з можливістю реалізації в течії нескінченного каскаду біфуркацій подвоєння періоду.

Мітчел Фейгенбаум аналізував логістичне рівняння  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ , що докладно розглядалося вище. Він хотів вивчити комплексні аналітичні властивості функцій, що створюються таким відображенням. Рівняння аналітично не розв'язувалося, і М. Фейгенбаум зайнявся числовими розрахунками значень параметра  $\lambda$ , за яких відбувалося кожне подвоєння. Він використовував кишеньковий калькулятор, і тому розрахунки тривали

довго. М. Фейгенбаум визначив, що значення параметрів, що відповідають кожному подвоєнню, збігаються як геометрична прогресія. Це було дивно: кожен подальший крок можна було розрахувати аналітично. Знаменник прогресії тепер має назву **постійної Фейгенбаума**, його позначають буквою  $\delta$ , він дорівнює 4,6692... ( $\delta = 4,6692...$ ) [55].

Інше кажучи, Фейгенбаум визначив, що інтервал за параметром  $\lambda$  між послідовними біфуркаціями подвоєння періоду зменшується зі збільшенням їх номера так, що відношення [55]

$$\delta = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} \text{ або } \delta = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \quad (1.79)$$

наближається до константи  $\delta = 4,6692 \dots$  – **константи Фейгенбаума**.

Крім того, виявилось, що такий самий закон збіжності, із тією самою константою, діє для багатьох інших одновимірних відображень (наприклад,  $x_{n+1} = \lambda \sin x_n$ ), а також для багатьох нелінійних дисипативних систем, що описуються диференціальними рівняннями. Американський математик С. Смейл підказав М. Фейгенбауму, що подвоєння в розв'язку є і в рівнянні  $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ . Результат був той самий: знов з'явилася геометрична прогресія зі значенням  $\delta = 4,6692 \dots$ . Надалі виявилось, що послідовність подвоєнь має **властивість універсальності**, яка не залежить від конкретних особливостей системи, а в багатьох випадках і від розмірності фазового простору.

Універсальність полягає в тому, що для таких систем виникає геометрична прогресія – відстань між значенням параметра  $\lambda_n$ , за яким створюється цикл періоду  $2n$ , і значенням параметра  $\lambda_{kp}$ , за яким у системі виникає хаос, задовольняє умову

$$(\lambda_{kp} - \lambda_n) = \text{const } \delta^{-n},$$

де  $\delta = 4,6692 \dots$  – універсальна постійна Фейгенбаума.

Це, зокрема, означає, що якщо в експерименті виявлено декілька перших подвоєнь (у спектрі потужності їм відповідає поява дискретних піків на частотах  $f_0/2$ ,  $f_0/4$  і т. д., де  $f_0$  – частота основного періодичного руху), то можна передбачити значення  $\lambda_{kp}$ , після досягнення якого виникає хаос.

У 1980 році з'явився експеримент Лібахера і Мауера щодо конвекції рідини, у якому показувалося, що тепловий потік переходить у турбулентний стан за сценарієм Фейгенбаума. У цьому експерименті шар рідкого гелію в скляному прямокутному ящику підігрівався знизу. Як керувальний параметр використовувалося число Релея,  $Ra$ , пропорційне  $\Delta T$  – різниці температур між нижньою і верхньою поверхнями рідини. Коли різниця температур невелика, то є тепловий потік, але рідина нерухома. За умови деякої  $\Delta T_{kp}$  виникає роликівна конвекція: гаряча рідина

піднімається всередині ящика, холодна опускається вздовж країв, виникають вали (ролики) з направленим перебігом рідини (див. рисунок 1.80). Зі збільшенням різниці температур вали стають нестійкими. Уздовж валу пробігає хвиля. Тепла рідина піднімається за одним боком валу, холодна опускається за іншим. У вимірюваному спектрі потужності теплового потоку при конвекції в такому шарі зі збільшенням відбувалася послідовна зміна режимів, з'являлися субгармоніки, кратні частоті  $f_0$  періодичного руху: частоти  $f_0/2$ ,  $f_0/4$  і т. д. Далі експериментально нові подвоєння частоти  $f_0/8$  побачити складно – спектр стає суцільним [55].

Сценарій Фейгенбаума виявили і в зосереджених, і в розподілених системах різної природи. Фізичний сенс – швидкість переходу до хаосу систем, що мають подвоєння періоду. Характеризує велику кількість таких динамічних систем, як турбулентність, зростання популяцій, осциляція та ін.

Таким чином, постійна Фейгенбаума є універсальною і характеризує нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду під час переходу до детермінованого хаосу (сценарій Фейгенбаума).

Наводять декілька числових значень константи Фейгенбаума (перше – у [56], друге – у [57]), які дорівнюють:

$$\delta = 4,669\ 211\ 660\ 910\ 299\ 067\ 185\ 320\ 382\ 047\ \dots ;$$

$$\delta = 4,669\ 201\ 609\ 102\ 990\ 671\ 853\ 203\ 82\dots .$$

Для практичного використання застосовується округлене значення універсальної постійної Фейгенбаума –  $\delta = 4,6692$ .

Існує ще одна константа Фейгенбаума, яка визначає відношення між шириною гілки біфуркаційної діаграми і шириною однієї з її підгілок (окрім тих, які найближчі до згину) [57]:

$$\alpha = 2,502\ 907\ 875\ 095\ 892\ 822\ 283\ 902\ 873\ 218\ \dots .$$

Така константа також використовується для опису багатьох динамічних систем. Припускають, що обидві константи є трансцендентними, але це ще не доведено.

Таким чином, у кожній хаотичній системі, яка має поведінку подібну до логістичного відображення, буде здійснюватися біфуркація зі швидкістю, що дорівнює константі Фейгенбаума. Константа Фейгенбаума може бути використана для передбачення часу виникнення хаосу в системах.

### 1.3.4 Стійкість за Лагранжем, Пуассоном та Ляпуновим

Наявність хаотичної динаміки тісно пов'язана з нестійкістю, яка властива фазовим траєкторіям системи. Для унаочнення такої поведінки



розглянемо набір із чотирьох накладених одна на одну часових залежностей однієї з динамічних змінних для моделі Лоренца, що наведено на рисунку 1.96. Параметри моделі мали такі значення:  $r = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . Початкові умови змінних моделі вибирались:  $x_0 = 10,485 + \xi$ ,  $y_0 = 10,485 + \eta$ ,  $z_0 = 27 + \zeta$ , де  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  – випадкові змінні порядку 0,01. Першу часову залежність побудовано, якщо  $x_0 = 10,485$ ,  $y_0 = 10,485$ ,  $z_0 = 27$ , другу – якщо  $x_0 = 10,495$ ,  $y_0 = 10,485$ ,  $z_0 = 27$ , третю – якщо  $x_0 = 10,485$ ,  $y_0 = 10,495$ ,  $z_0 = 27$ , а четверту – якщо  $x_0 = 10,485$ ,  $y_0 = 10,485$ ,  $z_0 = 27,01$ .

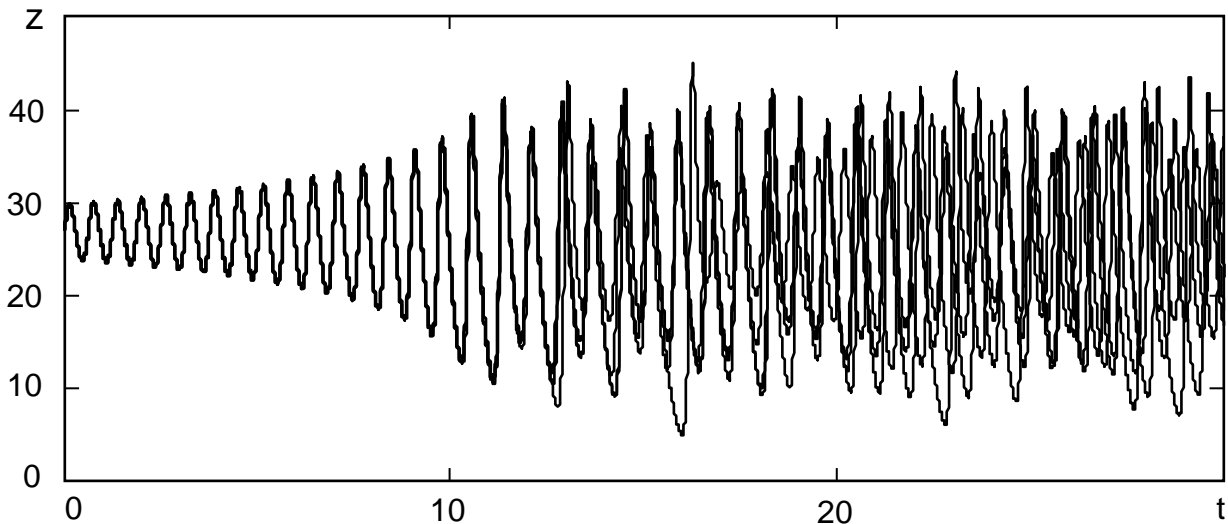


Рисунок 1.96 – Графік чутливої залежності розв’язків рівняння Лоренца від початкових умов у хаотичному режимі

Усі часові залежності отримані розв’язанням однакової системи рівнянь (див. вираз (1.4)), що показує хаотичну динаміку, за початкових умов, що незначно відрізняються (порядку 0,01). На рисунку 1.96 видно, що різні часові реалізації майже не різняться на початковій ділянці ( $t < 12$ ), але із часом ( $t > 20$ ) реалізації починають відрізняти одна від одної значно. Зв’язок між хаосом і нестійкістю можна відстежити і для інших модельних систем. Саме наявність нестійкості створює можливість з’єднати здавалося б нез’єднане – динамічну природу системи (передбачуваність) і хаос (непередбачуваність).

Під час аналізу поведінки динамічної системи найперше звертають увагу на її стійкість, тобто на реакцію динамічної системи на мале збурення її стану [38]. Якщо скільки завгодно малі зміни стану системи починають збільшуватися в часі – **система нестійка**. Якщо ж малі збурення зменшуються із часом – **система стійка**.

**Стійкість** – здатність системи зберігати поточний стан за наявності зовнішніх дій.

У механіці стійкість характеризується відповіддю на мале збурення системи, що перебуває в механічній рівновазі.

У математиці розв'язок диференційного рівняння (або траєкторія динамічної системи) називається **стійким**, якщо поведінка розв'язків із близькими початковими умовами не дуже відрізняються від поведінки початкового розв'язку. Слова «не дуже відрізняються» у такому випадку можна сформулювати по-різному, отримуючи різні формальні визначення стійкості: **стійкість за Лагранжем**, **стійкість за Пуассоном**, **стійкість за Ляпуновим** і т. д., акцентуючи увагу на різних аспектах динамічної поведінки фазової траєкторії або безлічі довколишніх траєкторій.

**Стійкість за Лагранжем** [38]. Точка  $x_0$ , а також фазова траєкторія  $x(t)$ , що виходить із неї, називаються стійкими за Лагранжем, якщо стан  $x(t)$  завжди (для всіх  $t > 0$ ) залишається в деякій обмеженій області фазового простору, тобто траєкторія залишається в замкнутій області (рисунок 1.97). Інакше кажучи, існує така константа  $R$ , що для всіх  $t > 0$ , маємо  $\|x(t)\| < R$ . Запис  $\|x(t)\|$  позначає зазвичай звичайну евклідову норму:

$$\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2},$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_N$  – компоненти вектора  $x$ .

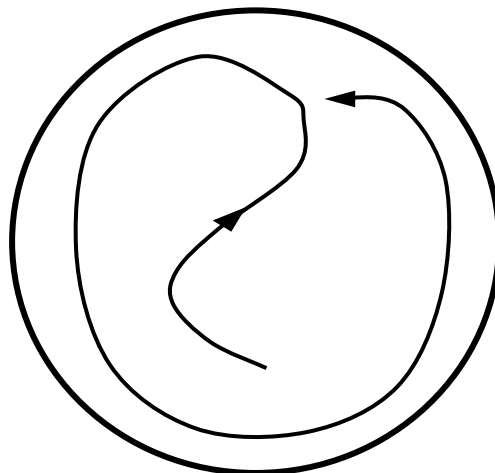


Рисунок 1.97 – Унаочнення стійкості за Лагранжем (траєкторія залишається в замкнутій області)

Якщо атрактор Лоренца (див. рисунок 1.9) розташовується в обмеженій області фазового простору, то безліч траєкторій системи Лоренца в цьому випадку стійкі за Лагранжем.

**Стійкість за Пуассоном** [38]. Траєкторія  $x(t)$  є стійкою за Пуассоном, якщо кожна її точка є  $\omega$ -обмеженою і  $\alpha$ -обмеженою на траєкторії  $x(t)$ , тобто

$$x(t) \in \Omega_x \cap A_x.$$

При цьому  $\omega$ -обмеженою, якщо виконується умова

$$\forall t_k \rightarrow \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = y,$$

де  $y$  – деяка точка фазового простору, що розглядається, а  $\alpha$ -обмежена, якщо виконується умова

$$\forall t_k \rightarrow -\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = z,$$

де  $z$  – деяка точка фазового простору, що розглядається.

Інакше кажучи, траєкторія, яка відрізняється від нерухомої точки буде стійкою за Пуассоном, якщо повертатиметься в скільки завгодно малий окіл кожної своєї точки нескінченну кількість разів (рисунок 1.98).

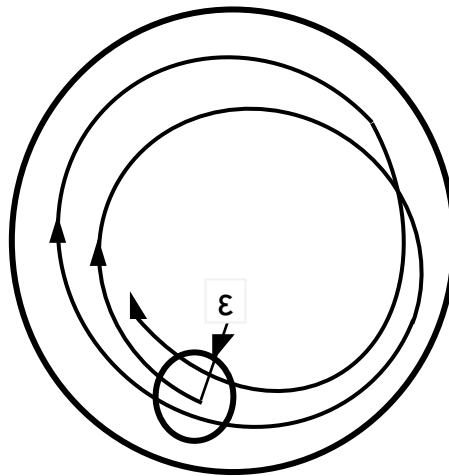


Рисунок 1.98 – Унаочнення стійкості за Пуассоном (траєкторія багато разів повертається в  $\delta$ -оточення стартової точки)

**Стійкість за Ляпуновим [38].** Визначення стійкості за Лагранжем і Пуассоном пов'язано з властивістю однієї, окремо узятій траєкторії. Поняття стійкості за Ляпуновим характеризує траєкторію з погляду поведінки сусідніх траєкторій, розташованих у її околі.

Припустимо, що динамічна система в разі старту з початкової точки  $x_0$  створює траєкторію  $x(t)$ . Розглянемо іншу траєкторію тієї самої системи  $y(t)$ , стартова точка якої  $y_0$  наближена до  $x_0$ . Якщо обидві траєкторії залишаються близькими в будь-якій подальший момент часу, то траєкторія  $x(t)$  називається стійкою за Ляпуновим (рисунок 1.99). Інакше кажучи, траєкторія  $x(t)$  стійка, якщо для будь-якого скільки завгодно малого додатного числа  $\epsilon$  існує таке  $\delta > 0$ , що для будь-якої точки старту з  $\delta$ -оточення точки  $x_0$ , тобто якщо за умови  $\|x_0 - y_0\| < \delta$ , виконується умова  $\|x(t) - y(t)\| < \epsilon$  для всіх  $t > 0$ .

Сильніша властивість – асимптотична стійкість. Траєкторія  $x(t)$  асимптотично стійка, якщо для будь-якого скільки завгодно малого  $\epsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що для  $\|x_0 - y_0\| < \delta$  є  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$  для всіх  $t > 0$  і  $t \rightarrow \infty$ .

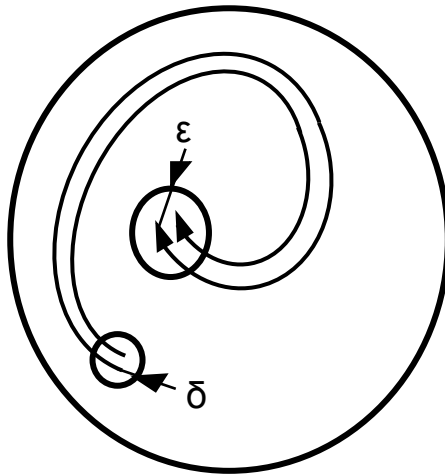


Рисунок 1.99 – Унаочнення стійкості за Ляпуновим  
(дві близькі на старті траєкторії залишаються близькими завжди)

Якщо говорять просто про стійку траєкторію, то завжди мають на увазі стійкість за Ляпуновим.

Поняття стійкості необхідне для опису складної, багатоконпонентної системи, оскільки її розвиток супроводжується втратою стійкості деякими режимами її функціонування і виникненням стійких систем. Одні структури зникають, виникають нові, які змінюють вигляд, стають більш досконалішими і потім знов змінюються на нові. Зміни можуть накопичуватися поступово, а можуть відбуватися стрибком у вигляді катастроф. У разі «фазових переходів» формування нових структур супроводжується втратою стійкості (навіть руйнуванням) попередніх. Система переходить з одного режиму функціонування в інший режим. Старий режим втрачає стійкість, і виникає новий стійкий режим, який може успадковувати деякі властивості попереднього, а може бути і відмінним.

### 1.3.5 Поняття характеристичних показників Ляпунова

Теорема Ляпунова стверджує таке [32]:

1 Для будь-якого розв'язку рівняння  $dx/dt = Ax(t)$ , де  $A$  – матриця, що складається із часткових похідних від компонент векторної функції  $F(x)$  за компонентами вектора  $x$ , існує **характеристичний показник Ляпунова** – дійсне число, відмінне від  $\pm \infty$ , який визначається як верхня межа

$$\Lambda_{\bar{x}(t)} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\bar{x}(T)\|. \quad (1.80)$$

2 У разі помноження розв'язку на константу показник Ляпунова не змінюється, тобто

$$\Lambda_{C\bar{x}(t)} = \Lambda_{\bar{x}(t)}. \quad (1.81)$$

3 Показник Ляпунова лінійної комбінації двох розв'язків  $\tilde{x}_1(t)$  і  $\tilde{x}_2(t)$  є меншим або дорівнює більшому з показників цих двох розв'язків, тобто

$$\Lambda_{C_1\tilde{x}_1+C_2\tilde{x}_2} \leq \max(\Lambda_{\tilde{x}_1}, \Lambda_{\tilde{x}_2}). \quad (1.82)$$

4  $\in \mathbb{N}$  (за розмірністю фазового простору) лінійно незалежних розв'язків  $\tilde{x}_i(t)$  рівняння  $dx/dt = \mathbf{A}x(t)$  (фундаментальна система розв'язків), яким відповідає  $N$  показників Ляпунова, що нумеруються в порядку зменшення:  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$ . Найбільше із цих чисел  $\Lambda_1$  називають **старшим показником Ляпунова**.

Спектр показників Ляпунова, тобто набір чисел  $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$ , необхідно розглядати як характеристику лінійної системи рівнянь  $dx/dt = \mathbf{A}x(t)$ , а не якогось одного розв'язку  $\tilde{x}(t)$ , оскільки спектр не залежить від вибору фундаментальної системи  $\{\tilde{x}_i(t)\}$ .

Для будь-якого розв'язку  $\tilde{x}(t)$  показником Ляпунова буде обов'язковим одне із чисел  $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$ .

Для кожної траєкторії  $x(t)$  рівняння у варіаціях  $dx/dt = \mathbf{A}x(t)$  існує певний спектр показників Ляпунова. Наявність у цьому спектрі показника  $\Lambda$  означає, що існує таке збурення початкової траєкторії, яке змінюється в часі, як  $\exp(\Lambda t)$  (поки амплітуда мала, а також виправдано використання лінійного наближення).

Наявність у спектрі хоча б **одного додатного показника Ляпунова** означає **нестійкість цієї фазової траєкторії**.

Якщо **всі показники від'ємні**, то це означає **асимптотичну стійкість траєкторії**.

Якщо **старший показник нульовий**, то це може свідчити про недостатність лінійного аналізу для висновку про **стійкість або нестійкість траєкторії за Ляпуновим** [38].

Розглянемо геометричний та алгебраїчний сенс показників Ляпунова. Уявимо ансамбль систем, кожна з яких описується нелінійним рівнянням, і всі вони характеризуються початковими умовами, що незначно відрізняються, так що у фазовому просторі системи є куляста хмара зображальних точок малого радіуса  $\varepsilon$  із центром на траєкторії  $x(t)$ . Із часом, у міру того як кожна точка хмари рухається за своєю фазовою траєкторією, вона буде деформуватися. Доти розміри хмари ще можна вважати малими, доки вона буде мати вигляд  $N$ -вимірного еліпсоїда (рисунок 1.100). На рисунку 1.100 кожен із показників характеризує зміну масштабу вздовж однієї з головних осей еліпсоїда, у яку за великий час  $T$  переходить нескінченно мала кулька із центром на цій траєкторії [38].

Нехай її розміри за  $N$  головними півосям в момент часу  $t$  будуть  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\} = \{\varepsilon \cdot \exp(\Lambda_1 t), \varepsilon \cdot \exp(\Lambda_2 t), \dots, \varepsilon \cdot \exp(\Lambda_N t)\}$ . У межі малих  $\varepsilon$  і великих  $t$  величини  $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$  визначають спектр характеристичних показників Ляпунова. Таким чином, кожен показник відповідає за

розширення або стиснення еліпсоїда зображальних точок уздовж однієї з його головних осей.

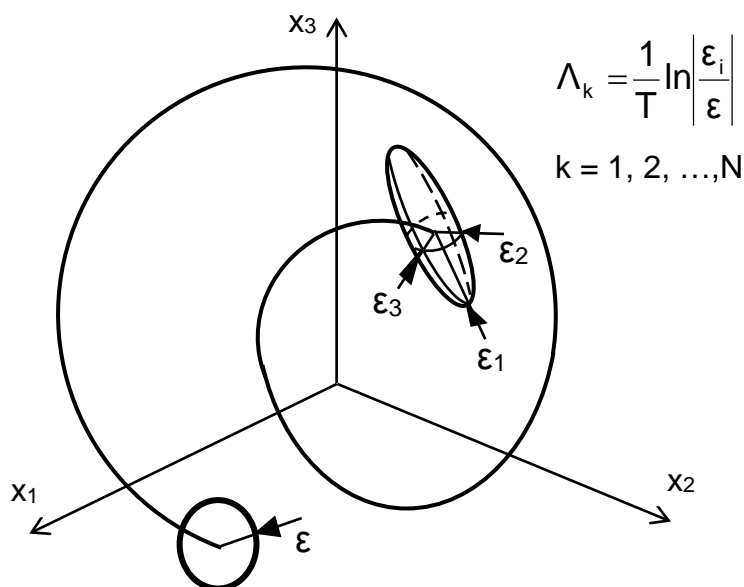


Рисунок 1.100 – Геометрична інтерпретація спектра показників Ляпунова

Більш точна алгебраїчна інтерпретація показників Ляпунова полягає в такому. Розглянемо знов певну фазову траєкторію  $x(t)$  і зміну малого збурення  $x(t)$  уздовж цієї траєкторії. Визначення показника Ляпунова (1.80) можна переписати таким чином:

$$\Lambda = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \ln \|\underline{x}(T)\|^2 = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \ln(\underline{x}^+(T), \underline{x}(T)), \quad (1.83)$$

де хрестик позначає транспонований вектор, а круглі дужки – скалярний твір:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \dots \\ \underline{x}_N \end{pmatrix}, \quad \underline{x}^+ = (\underline{x}_1 \underline{x}_2 \dots \underline{x}_N), \quad (\underline{x}^+, \underline{x}) = \underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + \dots + \underline{x}_N^2 = \|\underline{x}\|^2. \quad (1.84)$$

Через лінійність рівняння у варіаціях  $dx/dt = \mathbf{A}x(t)$ , вектори збурення в початковий ( $t = 0$ ) і кінцевий ( $t = T$ ) моменти часу пов'язані за допомогою деякої матриці  $U_T$  – матриці еволюції:

$$\underline{x}(T) = U_T \underline{x}(0). \quad (1.85)$$

Відповідно до правил лінійної алгебри звідси випливає, що  $\underline{x}^+(T) = \underline{x}^+(0)U_T^+$ . Тому можна записати

$$\frac{1}{T} \ln \|\underline{x}(t)\| = \frac{1}{2T} \ln(\underline{x}^+(0) U_T^+ U_T \underline{x}(0)). \quad (1.86)$$

Розглянемо задачі на власні вектори і власні значення для матриці  $V_T = U_T^+ U_T$ :

$$V_T u = k_s u. \quad (1.87)$$

Ця матриця розміру  $N \times N$  матиме  $N$  власних векторів  $u_s$  і власних значень  $k_s$  (серед яких можуть бути і вироджені). Якщо як вектор збурення заданий один із власних векторів матриці  $V_T$ , то в асимптотиці за  $T$  отримуємо один із  $N$  показників Ляпунова:

$$\frac{1}{T} \ln \|\underline{x}(t)\| = \frac{1}{2T} \ln(\underline{x}^+(0) V \underline{x}(0)) = \frac{1}{2T} \ln(\underline{x}^+(0) \underline{x}(0) k_s) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \Lambda_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln k_s}{2T}. \quad (1.88)$$

Власні числа матриці  $V = U^+ U$  називаються сингулярними числами матриці  $U$ . Таким чином, проведені розрахунки пов'язують спектр показників Ляпунова зі спектром сингулярних чисел матриці еволюції малих збурень досліджуваної траєкторії. Відомо, що сингулярні числа матриці  $N \times N$  становлять набір із  $N$  дійсних додатних чисел, так що в разі підстановки у формулу (1.88) всіх можливих власних векторів отримується повний спектр показників Ляпунова. Інтерпретація сингулярних чисел полягає в тому, що вони є чинниками перерахунку масштабу вздовж головних осей еліпсоїда, у який перетвориться куля із центром на початку координат під час дії такої матриці. Це дає змогу наочно подати геометричне трактування показників Ляпунова.

Розглянемо розрахунок показників Ляпунова. Загалом техніка розрахунку показників Ляпунова базується на такій ідеології. Припустимо, що задана  $n$ -вимірна динамічна система з безперервним часом. Щоб охарактеризувати стійкість її розв'язку, аналізується часова еволюція нескінченно малої  $n$ -вимірної сфери початкових умов. Із часом ця сфера перетвориться в еліпсоїд (рисунок 1.101).

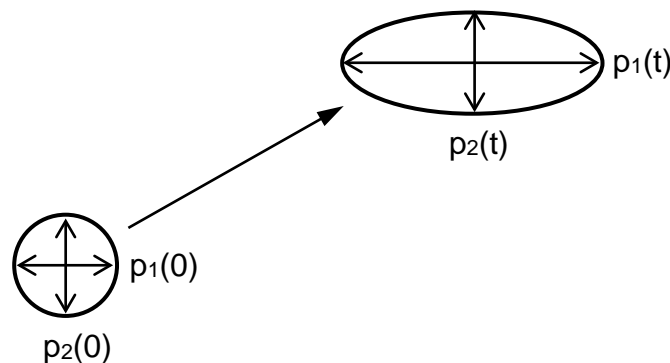


Рисунок 1.101 – Еволюція в часі нескінченно малої  $n$ -вимірної сфери початкових умов

Якщо розглядати спектр характеристичних показників Ляпунова, то  $i$ -й показник Ляпунова може бути визначений у термінах довжин осей еліпсоїда  $p_i(t)$ :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)}, \quad \Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)},$$

де  $\lambda_i, \Lambda_i$  – упорядковані показники від найбільшого до найменшого.

Таким чином, показники Ляпунова визначаються розширенням або стисненням сфери за різними напрямками у фазовому просторі. Оскільки орієнтація еліпсоїда безперервно змінюється в часі, змінюються і напрямки, що пов'язані з тим або іншим показником. Тому не можна говорити про якийсь один напрямок для кожної експоненти Ляпунова.

Відзначимо, що якщо задається тільки одне збурення (це означає, що якщо стежити лише за головною віссю еліпсоїда), то воно в лінійному наближенні буде збільшуватися згідно із законом  $e^{\lambda t}$ . Для двох незалежних збурень площа утвореного ними квадрата (або прямокутника) буде змінюватися згідно із законом  $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ , а для трьох – зміна об'єму описується законом  $e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$  і т. д. Така властивість приводить до дещо іншого визначення спектра експонент Ляпунова: сума перших  $j$  показників визначається швидкістю експоненціального збільшення  $j$ -вимірного елемента об'єму. Така інтерпретація забезпечує основу для техніки аналізу експериментальних даних (якщо потрібно обчислити декілька показників).

Будь-яка потокова динамічна система, якщо її розв'язок відмінний від стану рівноваги, має один нульовий показник, що характеризує майже не змінну величину осі еліпсоїда, дотичній до потоку. Осі, розмір яких буде збільшуватися (зменшуватися), відповідають додатним (від'ємним) показникам.

Розглянемо показники Ляпунова для атракторів. Якщо атрактор є станом рівноваги або граничним циклом, то він складається з однієї траєкторії, і відповідний спектр показників Ляпунова є атрибутом такого атрактора. Але атрактор може мати складнішу природу і містити безліч траєкторій, наприклад тор або дивний атрактор. У цьому випадку виникає запитання, чи можна говорити про показники Ляпунова атрактора, оскільки різні траєкторії на ньому можуть мати різні показники Ляпунова. Уважається, що типова, узята випадково траєкторія на атракторі з одиничною вірогідністю матиме деякий цілком певний спектр показників Ляпунова, який можна віднести до атрактора в цілому [34].

Спектр показників Ляпунова атрактора має задовольняти такі вимоги. По-перше, сума всіх  $N$  показників має бути від'ємною:

$$\sum_{s=1}^N \Lambda_s < 0. \quad (1.89)$$



Це умова дисипативності, завдяки якій атрактор є таким, що притягує безліч точок у фазовому просторі, на якій концентрується із часом хмара зображальних точок.

По-друге, у атрактора, відмінного від нерухомої точки, обов'язково має бути хоча б один нульовий показник.

Розглянемо дві траєкторії на атракторі, що стартують, відповідно, з точок  $x_0$  і  $y_0 = x(\Delta t)$ , де часове зрушення  $\Delta t$  вважається малим. За припущенням, атрактор не є нерухомою точкою, тому  $y_0$  не збігається з  $x_0$ . Обидві зображальні точки рухаються за однією траєкторією, тобто відрізняються тільки часовим зрушенням, так що

$$y(t) - x(t) = dx/dt \Delta t = \mathbf{F}(x) \Delta t.$$

Норма цієї різниці обмежена:  $\|\mathbf{F}(x) \Delta t\| < M \Delta t$ , так що показник Ляпунова для збурення типу зрушення вздовж траєкторії нульовий: якщо  $\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \ln \|y - x\| = 0$  для  $T \rightarrow \infty$ .

Розглянемо, якими можуть бути знаки показників Ляпунова атракторів, якщо розмірності фазового простору системи різні. Будемо вважати, що показники впорядковані в порядку зменшення, і додатний показник позначений знаком плюс, від'ємний – знаком мінус, а нульовий – нулем. Атрактору у фазовому просторі розмірності  $N$  відповідатиме тоді певний набір із  $N$  знаків, про який говорять як про сигнатуру спектра показників Ляпунова.

Якщо  $N = 1$ , то можливий тільки один варіант сигнатури:

– (–), що відповідає атрактору у вигляді нерухомої точки – стану рівноваги.

Для  $N = 2$  можливі два типи сигнатури:

– (–, –) – стійка нерухома точка;

– (0, –) – граничний цикл.

Зазначимо, що сигнатура не може містити знак плюс. Варіант (+, 0) виключається вимогою дисипативності (тоді сума показників Ляпунова не буде від'ємною), а варіант (+, –) – умовою обов'язкової наявності нульового показника атрактора, що не є нерухомою точкою. Нерухома ж точка з такою сигнатурою нестійка і не може бути атрактором.

Реалізація атрактора з додатним показником Ляпунова можлива за розмірності фазового простору  $N = 3$ . У цьому випадку припустимі такі варіанти:

– (–, –, –) – нерухома точка притягання;

– (0, –, –) – граничний цикл;

– (0, 0, –) – двовимірний тор;

– (+, 0, –) – дивний атрактор.

Для великих розмірностей фазового простору кількість можливостей збільшується. Наприклад, якщо  $N = 4$ , крім дивного атрактора з одним

додатним показником Ляпунова  $(+, 0, -, -)$ , може бути ситуація, що називається гіперхаосом:  $(+, +, 0, -)$  – два додатні показники.

З розглянутого вище можна зробити фундаментальний висновок – починаючи з розмірності фазового простору  $N = 3$ , виникає принципова можливість реалізації атрактора з додатним показником Ляпунова, а відповідно, і хаосу. Необхідно зазначити, що проведений розгляд належить до динамічних систем, що описуються автономними диференціальними рівняннями. Саме для таких систем призначена розглянута класифікація за сигнатурою спектрів показників Ляпунова.

Розглянемо способи обчислення старшого показника Ляпунова. Наведені вище приклади, у яких для режимів складної динаміки вдається аналітично знайти показники Ляпунова, є винятковими. Зазвичай для їх визначення доводиться використовувати числові методи. Розглянемо спочатку обчислення старшого показника Ляпунова, що особливо важливе для діагностики режимів складної динаміки – наявність додатного старшого показника є критерієм хаоса.

Є два способи обчислень:

– узяти дві копії динамічної системи з близькими початковими умовами і відстежити характер еволюції відстані між зображальними точками в часі;

– розв'язувати систему рівнянь динаміки, що описують рух зображальної точки вздовж фазової траєкторії, спільно з рівняннями у варіаціях, які описують еволюцію нескінченно малого збурення цієї траєкторії.

**Першому способу** можна віддати перевагу в тому випадку, якщо за яких-небудь причин виникає ускладнення виводу або числового розв'язку рівняння у варіаціях. При цьому в процесі розрахунків потрібно стежити, щоб відстань між зображальними точками залишалася малою порівняно з характерними масштабами неоднорідності розподілу векторного поля у фазовому просторі.

**Другий спосіб** вільний від вказаного ускладнення, але постановка завдання потребує попереднього аналізу (виведення рівнянь у варіаціях) і виявляється в результаті більш громіздкою. Усе ж таки слід віддати перевагу другому способу.

Є ще **третій підхід (спосіб)**, який оснований на обробленні запису реалізації часової залежності однієї або декількох динамічних змінних. Його можна рекомендувати тільки в тих випадках, коли йдеться не про числове розв'язання динамічних рівнянь, а, наприклад, про необхідність отримати інформацію про динаміку системи з експериментальних даних.

Процедура обчислення старшого показника Ляпунова починається з того, що проводиться числове розв'язання динамічних рівнянь на інтервалі часу, достатньому, щоб мати впевненість у виході траєкторії на атрактор. Унаслідок чого отримується деяка точка фазового простору  $x_0$ , яка

береться за початкову. Подальшу послідовність дій наведено на рисунку 1.102, яка відома як алгоритм Бенеттіна [38].

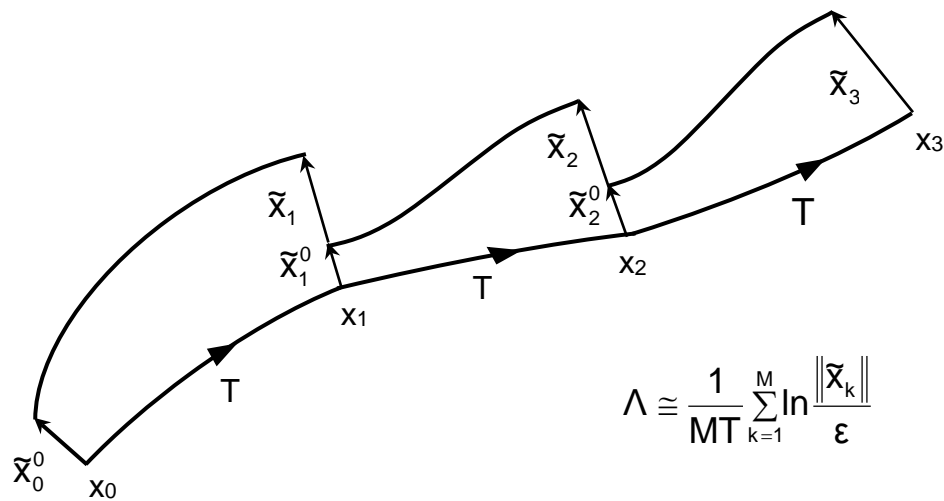


Рисунок 1.102 – Оцінювання старшого показника Ляпунова за допомогою алгоритму Бенеттіна

Розглядається траєкторія, що виходить із точки  $x_0$  і збурена траєкторія, що виходить із точки  $x_0 + \tilde{x}_0^0$ ,  $\|\tilde{x}_0^0\| = \epsilon$ . Визначається деякий інтервал часу  $T$ , проводиться числове розв'язання рівняння динаміки і визначається вектор стану та його збурення в момент  $T$ :  $x(T) = x_1$ ,  $\tilde{x}(T) = \tilde{x}_1$ .

Відношення  $\|\tilde{x}_1\|/\epsilon$  характеризує зміну норми вектора збурення за час  $T$ . Проводять перевизначення цього вектора так, щоб його напрямок залишився таким самим, а норма стала рівною вихідному значенню  $\epsilon$ , тобто  $\tilde{x}_1^0 = \epsilon \tilde{x}_1 / \|\tilde{x}_1\|$ . За наявності хаосу амплітуда збурення швидко збільшується. Перевизначення амплітуди збурення необхідне для того, щоб не дати їй збільшитися до рівня, який є порівняним із характерним масштабом неоднорідності фазового простору, або для виключення переповнення числових реєстрів комп'ютера. Потім продовжується процедура числового розв'язання рівняння з початковою точкою  $x_1$  і для збуреної траєкторії з початковою точкою  $x_1 + \tilde{x}_1^0$ . Унаслідок чого отримується вектор стану і збурення в момент  $2T$ :  $x(2T) = x_2$ ,  $\tilde{x}(2T) = \tilde{x}_2$ , далі розраховується відношення  $\|\tilde{x}_2\|/\epsilon$ , перевизначається вектор збурення  $\tilde{x}_2^0 = \epsilon \tilde{x}_2 / \|\tilde{x}_2\|$  і т. д. Якщо початкова точка  $x_0$  лежить на типовій траєкторії в атракторі, а початкове збурення  $\tilde{x}_0^0$  задано випадково, то еволюція амплітуди збурення буде визначатися старшим показником Ляпунова. Фактор зміни амплітуди збурення за  $M$  кроків визначається як

$$P = \prod_{k=1}^M (\|\bar{x}_k\|/\varepsilon),$$

тому старший показник Ляпунова оцінюється як

$$\Lambda \cong \frac{1}{MT} \ln P = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|\bar{x}_k\|}{\varepsilon}, \quad (1.90)$$

при цьому кількість кроків  $M$  має бути достатньо великим.

Для отримання статистично достовірної оцінки показника Ляпунова, а також оцінювання похибки бажано повторити процедуру декілька разів із різними початковими умовами для вектора стану і вектора збурення. Після цього отримані результати необхідно узагальнити за допомогою стандартних процедур статистичного оброблення (оцінювання середнього, середньоквадратичного відхилення, довірчого інтервалу).

Якщо алгоритм реалізовано на основі сумісного розв'язання початкових рівнянь системи і рівнянь у варіаціях, то немає жорстких обмежень на вибір параметрів  $\varepsilon$  і  $T$ . Величина  $T$  не має бути дуже великою, щоб не допустити переповнювання числових регістрів комп'ютера, а  $\varepsilon$  може просто дорівнювати одиниці.

Розглянемо розрахунок показників Ляпунова для типових систем – системи Лоренца та логістичного відображення.

Повна система диференціальних рівнянь Лоренца, що містить дванадцять рівнянь, може бути розв'язана числовим методом Рунге – Кутта з використанням перенормування векторів збурення та їх ортогоналізації під час обчислення. У роботі [58] наведено дані розрахунку трьох показників Ляпунова в системі Лоренца для значень параметрів  $r = 28$ ,  $a = 10$ ,  $b = 8/3$ , а саме  $\Lambda_1 = 0,897$ ;  $\Lambda_2 = 0$ ;  $\Lambda_3 = -14,563$ . Сума показників Ляпунова дорівнює  $-13,666$ . Сигнатура спектра показників  $(+, 0, -)$ . Наявність додатного старшого показника свідчить про хаотичну природу атрактора Лоренца. Унаслідок того, що система диференціальних рівнянь автономна, у спектрі є нульовий показник. Завдяки наявності великого за абсолютною величиною від'ємного показника, сума всіх трьох показників від'ємна (атрактор).

Розглянемо одновимірне логістичне відображення (1.60), що містить параметр  $\lambda$ , від якого залежить характер динаміки під час ітерацій. Від нього залежить і показник Ляпунова. Для кожного фіксованого  $\lambda$  під час обчислення показника Ляпунова можна використовувати співвідношення

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|,$$

у якому необхідно задати  $\frac{df(x)}{dx} = -2\lambda x$ .

Після проведення розрахунків для різних значень параметра  $\lambda$  із достатньо малим кроком отримуємо графік (рисунок 1.103), що містить інформацію про характер динаміки цієї системи.

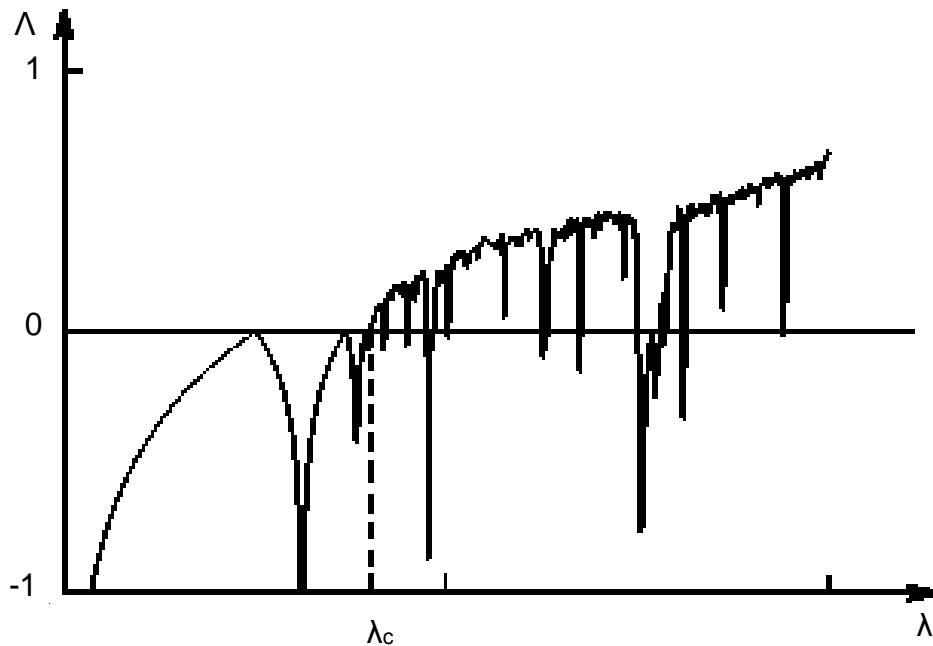


Рисунок 1.103 – Залежність показника Ляпунова  $\Lambda$  логістичного відображення від параметра  $\lambda$

На рисунку 1.103 видно, що безліч значень  $\lambda$ , що відповідають додатному показнику Ляпунова, тобто хаосу, розташовується в області  $\lambda > \lambda_c$ . Якщо значення параметра  $\lambda = \lambda_c$ , то є критична точка, яка розмежовує області регулярної та складної динаміки. Якщо показник Ляпунова  $\Lambda$  дорівнює нулю, то це характеризує якісну перебудову траєкторії ітераційного процесу. У докритичній області показник Ляпунова від'ємний і наближається до нуля тільки в окремих точках, що відповідають біфуркаціям подвоєння періоду. У закритичній області є безліч значень параметра, за яких показник Ляпунова додатний, тобто реалізується хаос. Ця множина є складною і має досконалу структуру [8].

Як видно на рисунку 1.103, графік показника Ляпунова містить провали в області від'ємних значень, вони відповідають так званим вікнам періодичності. Це кінцеві за шириною інтервали значень параметра  $\lambda$  в закритичній області, де режим динаміки виявляється періодичним.

Такі залежності показника Ляпунова від параметра характерні для широкого класу дисипативних нелінійних систем, що демонструють перехід до хаосу через подвоєння періоду.

### Запитання для самоперевірки

1. Що таке нелінійна динаміка?
2. Яку природу мають динамічні системи?

3. Як наочно можна зобразити рух динамічної системи?
4. Що в рівнянні ван дер Поля характеризують параметри  $\gamma$  і  $\beta$ ?
5. Які існують динамічні системи з дивним атрактором?
6. Які процеси моделюються за допомогою системи Лоренца?
7. Зміна якого параметра системи Лоренца приводить до появи дивного атрактора?
8. Які процеси моделюються за допомогою системи Реслера?
9. За якими параметрами виникає хаотичний атрактор у системі Реслера?
10. Які фізичні явища можна досліджувати за допомогою рівняння Дуффінга?
11. Яке геофізичне явище моделюється за допомогою динамо Рикітаке?
12. Що таке динамічний (детермінований) хаос?
13. У чому полягає різниця лінійних і нелінійних систем?
14. Чому система, що розвивається за цілком відомими законами, поводить хаотично?
15. У чому полягає суть ефекту метелика?
16. Які є основні методи нелінійної динаміки?
17. Які існують визначення фрактала, чим вони вирізняються і які проблеми створюють?
18. Які є основні властивості фракталів?
19. Які типи фракталів розрізняють і чим вони різняться?
20. Як будують геометричні фрактали, якими є загальні операції їх побудови?
21. У чому полягає різниця в побудові множини Мандельброта і множин Жуліа?
22. Де використовуються стохастичні (випадкові) фрактали?
23. Що і як об'єднує міру і розмір?
24. Як визначається розмірність, у якій враховано індуктивну природу цього поняття?
25. Як визначається розмірність, у якій використано покриття простору достатньо малими осередками?
26. Що таке топологічна розмірність? Наведіть приклади топологічної розмірності різних геометричних об'єктів.
27. Як визначається розмірність Гаусдорфа – Безиковича?
28. Які існують види фрактальних розмірностей і чим вони різняться?
29. У чому полягає суть методу покриття під час визначення фрактальної розмірності?
30. Як відрізняються величини фрактальних розмірностей періодичного сигналу і шуму?
31. Як впливає величина сигнал / шум на значення фрактальних розмірностей?

32. Що відображають фазова точка і фазова траєкторія на фазовій площині?
33. Що таке фазовий портрет і що він відображає?
34. У чому полягає суть методу фазової площини?
35. Які способи побудови фазових портретів використовували до появи комп'ютерів?
36. Які фізичні явища можна досліджувати за допомогою фазових портретів?
37. У чому полягає різниця між фазовою і псевдофазовою площинами?
38. Які використовують способи вибору правильного часу затримки під час побудови фазових портретів на псевдофазовій площині?
39. Як відрізняються форми фазових портретів періодичного сигналу і шуму?
40. Як впливає величина сигнал / шум на форму фазового портрета?
41. Як впливає час затримки на форму фазового портрета за умови різних величин сигнал / шум?
42. Що називається дискретним відображенням?
43. Які є основні дискретні відображення?
44. Як будується дискретне відображення – зрушення Бернуллі?
45. Яким чином можна створити хаотичний процес за допомогою зрушення Бернуллі?
46. Як будується трикутне відображення (відображення «тент»)?
47. Як будується логістичне відображення (квадратичне відображення)?
48. У чому різниця між звичайним і дисипативним перетворенням пекаря?
49. Які основні операції використовують під час побудови перетворення Смейла – Вільямса?
50. Як будується атрактор Смейла – Вільямса?
51. У чому полягає суть методу перерізу (відображень) Пуанкаре?
52. Які точки фазової траєкторії фіксуються на площині Пуанкаре?
53. Яку форму має переріз Пуанкаре періодичного сигналу?
54. Яку форму має переріз Пуанкаре, якщо сигнал містить декілька синусоїдальних складових?
55. Яку форму має переріз Пуанкаре шуму?
56. Що таке біфуркація?
57. Що вивчає теорія біфуркацій динамічних систем?
58. У чому полягає математична суть біфуркації?
59. Які існують типи локальних біфуркацій?
60. Які існують і чим характеризуються біфуркації станів рівноваги?
61. Які моделі приводять до виникнення граничного циклу зі стану рівноваги?

62. Які існують і чим характеризуються біфуркації зміни стійкості періодичних рухів?
63. Що таке біфуркаційна діаграма?
64. За яких значень параметра  $\lambda$  логістичного відображення виникає перша точка біфуркації?
65. Як на біфуркаційній діаграмі відображається хаотичний процес?
66. Що таке точка біфуркації?
67. Які існують властивості точки біфуркації?
68. Що характеризує каскад біфуркацій?
69. Як визначається і чому дорівнює константа Фейгенбаума?
70. Яка система називається стійкою, а яка – нестійкою?
71. Як визначається стійкість за Лагранжем?
72. Як визначається стійкість за Пуассоном?
73. Як визначається стійкість за Ляпуновим?
74. Що стверджує теорема Ляпунова?
75. Про що свідчить наявність у спектрі хоча б одного додатного показника Ляпунова?
76. У чому полягає геометричний сенс показників Ляпунова?
77. Які вимоги має задовольняти спектр показників Ляпунова атратора?
78. Що таке сигнатура спектра показників Ляпунова і що вона характеризує?
79. Чому сигнатура спектра показників Ляпунова не може містити знак плюс?
80. З якої розмірності фазового простору виникає принципова можливість реалізації хаосу?
81. Які існують способи обчислення старшого показника Ляпунова?
82. Які показники Ляпунова є в системі Лоренца для значень для значень параметрів  $r = 28$ ,  $a = 10$ ,  $b = 8/3$ ?
83. Що дає змогу аналізувати залежність показника Ляпунова логістичного відображення від параметра  $\lambda$ ?



## 2 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ ФРАКТАЛЬНИХ НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ І СИГНАЛІВ

### 2.1 Побудова фрактальних недиференційовних функцій

У минулому математики більше уваги звертали на множини і функції, для яких можуть бути застосовані методи класичних обчислювань. Функції, які не є досить гладкими або регулярними, часто ігнорувалися як «патологічні», що не слід вивчати, тобто становлять інтерес тільки для дослідників, які приділяють увагу «математичним дивам», а не для серйозних учених. Один відомий математик Шарль Ерміт навіть назвав такі функції «монстрами».

Поняття фрактальної недиференційовної функції можна визначити таким чином. Функцію  $y = f(x)$  називають фрактальною, якщо її графіком є фрактальна множина, тобто функція  $y = f(x)$  фрактальна, якщо існує значення функції  $y_0$ , яке є образом фрактальної множини точок. Як видно з такого визначення, фрактальна функція тісно пов'язана з її диференціальними властивостями.

Дійсно, безперервна фрактальна обмежена на  $[a, b]$  функція має на цьому відрізку континуальну (обмежену) множину екстремальних точок, що веде до недиференційованості щонайменше на континуальній множині. Функція однієї ніде недиференційовної змінної – це функція, що не має похідної в жодній точці. Розглянемо відомі (класичні) фрактальні недиференційовні функції, які були створені виданими математиками минулого й сучасності. Вивчення недиференційовних функцій привело до ідеї формування нових фрактальних недиференційовних функцій на основі циклоїдальних функцій.

#### 2.1.1 Структура класичних фрактальних недиференційовних функцій

**Побудова функції Больцано.** Бернард Больцано в 1830 році запропонував безперервну криву, що не має дотичної в жодній точці. Існує декілька варіантів побудови класичної недиференційовної функції Больцано, що відрізняються обчислювальними алгоритмами [52]. Розглянемо один з алгоритмів побудови:

1 Позначимо функцію Больцано як  $B(x)$ . Визначимо допоміжну функцію  $B_n(x)$  і розглянемо на її прикладі послідовність побудови функцій  $B_0(x), B_1(x) \dots$ . Для цього відрізок  $AB$  розділимо на чотири рівні частини і зробимо заміну його ламаною  $ACDEB$ , як показано на рисунку 2.1. Точки ламаної мають координати:  $A, C\left(p + \frac{\alpha}{4}, q - \frac{\beta}{2}\right), D\left(p + \frac{\alpha}{2}, q\right), E\left(p + \frac{3\alpha}{4}, q + \frac{\beta}{2}\right), B(p + \alpha, q + \beta)$ .

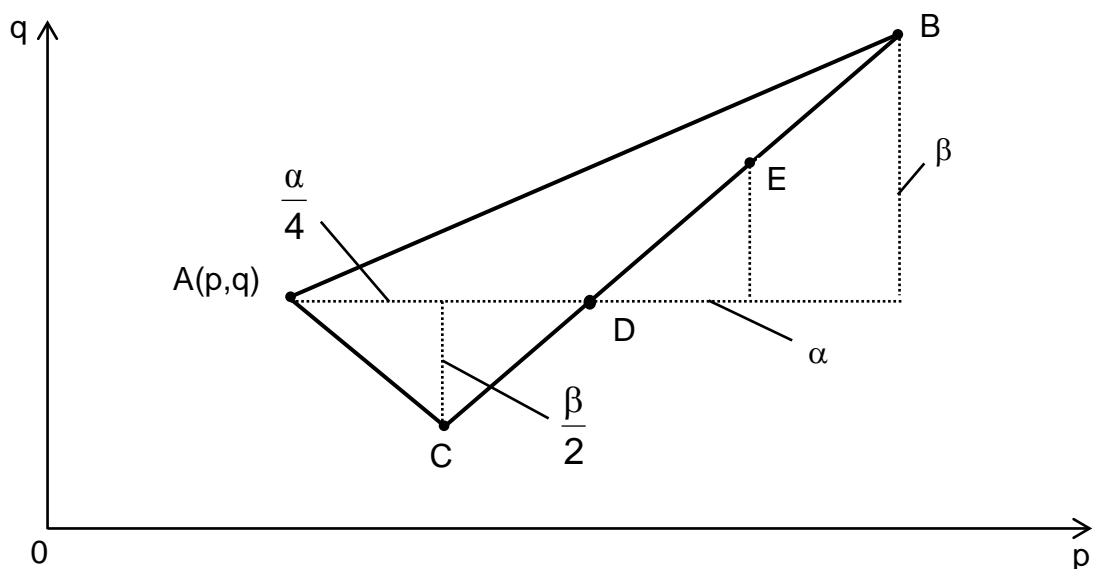


Рисунок 2.1 – Визначення В-операції

Розмістимо точку  $A(p, q)$  у начало координат і таку операцію будемо називати **В-операцією**.

Нехай графіком функції  $V_0(x)$  є відрізок  $A_1(0,0)$  і  $A_2(1,1)$ . Будемо застосувати до цих точок В-операцію і отримаємо точки:  $A_{11}(0,0)$ ,  $A_{12}\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $A_{13}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $A_{14}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $A_{15}(1,1)$ . Таке перетворення визначає функцію  $V_1(x)$  та її графік  $A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} A_{15}$ . На рисунку 2.2 наведено графіки функцій  $V_0(x)$  і  $V_1(x)$ .

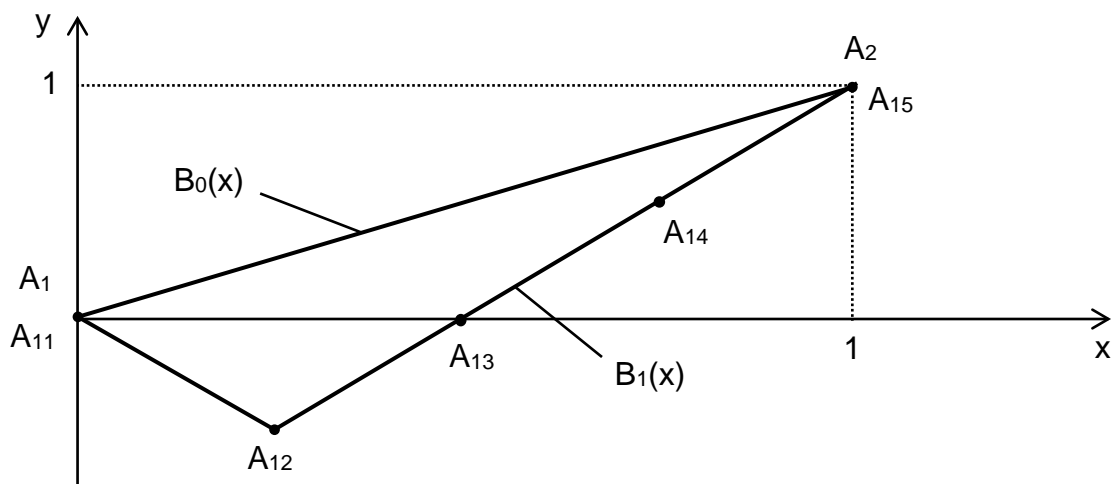


Рисунок 2.2 – Побудова функцій  $V_0(x)$  і  $V_1(x)$

2 Застосовуючи В-операцію до кожної пари точок  $A_{11}, A_{12}; A_{12}, A_{13}; \dots$ , отримаємо такі точки:  $A_{21}(0,0)$ ,  $A_{22}\left(\frac{1}{4^2}, \frac{1}{4}\right)$ ,  $A_{23}\left(\frac{2}{4^2}, 0\right)$ ,  $A_{24}\left(\frac{3}{4^2}, -\frac{1}{4}\right)$ ,  $A_{25}\left(\frac{4}{4^2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $A_{26}\left(\frac{5}{4^2}, -\frac{3}{4}\right)$ ,  $A_{27}\left(\frac{6}{4^2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $\dots$ . Визначимо функцію  $V_2(x)$ ,

вважаючи, що її графіком є ламана  $A_{21}, A_{22}, \dots$ . На рисунку 2.3 наведено графіки функцій  $V_1(x)$  і  $V_2(x)$ .

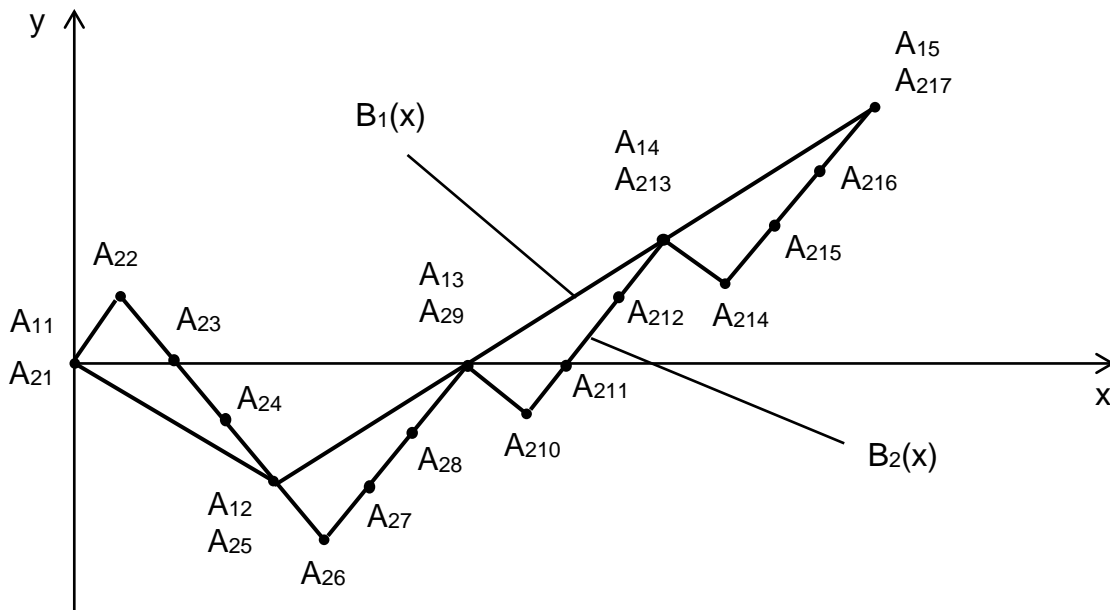


Рисунок 2.3 – Побудова функцій  $V_1(x)$  і  $V_2(x)$

3 Повторивши таку операцію  $n$  разів, отримаємо функцію  $V_n(x)$ . Вершини графіка  $V_n(x)$  мають абсциси  $0, \frac{1}{4^n}, \frac{2}{4^n}, \dots, \frac{(4^n - 1)}{4^n}, 1$ , тобто  $4^n + 1$  точку.

Коливання функції  $V_n(x)$  в кожному з проміжків

$$\left( \frac{s}{4^n}, \frac{s+1}{4^n} \right), s = \overline{0, 4^{n-1}}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

буде дорівнювати

$$\omega_n \left( \frac{s}{4^n}, \frac{s+1}{4^n} \right) = \frac{\beta}{2^n} = \frac{1}{2^n}. \quad (2.2)$$

Якщо  $x = \frac{k}{4^n} = \frac{l}{4^p}$  ( $p > n$ ), то  $V_n \left( \frac{k}{4^n} \right) = V_p \left( \frac{l}{4^p} \right)$  і точка  $A_{12}$  збігається з точкою  $A_{25}$ . Відповідно до побудованої функції однозначно визначимо функцію Больцано  $V(x)$  для значень  $x = \frac{k}{4^n}$  ( $0 \leq k \leq 4^n, n = 0, 1, 2, \dots$ ), вважаючи

$$V \left( \frac{k}{4^n} \right) = V_n \left( \frac{l}{4^n} \right). \quad (2.3)$$

Із цього виходить, що графік функції  $V(x)$  проходить через вершини всіх ламаних  $V_n(x)$ , а коливання  $V(x)$  на будь-якій безлічі точок  $x = \frac{k}{4^n} = \frac{l}{4^p}$  буде меншим  $\frac{1}{2^{n-2}}$ , тому  $V(x)$  буде безперервною на множені  $V_n(x)$ . За інших значень  $x$  функція  $V(x)$  визначається граничним переходом  $V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x)$ .

Таким чином, функція Больцано визначена на відрізку  $[0, 1]$ . Наведений алгоритм простий у реалізації, але потребує побудови або рекурсивного алгоритму, або ітеративного з урахуванням усіх допоміжних функцій  $V_k(x)$ .

**Побудова функції Рімана.** Георг Фрідріх Бернгард Ріман у 1861 році запропонував функцію, яка не має кінцевої похідної в жодній точці  $x$ . Вираз для функції Рімана має вигляд [52]

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}, \quad (2.4)$$

де  $x$  – ірраціональне або раціональне число вигляду  $\frac{2m}{4n+1}, \frac{2m+1}{2(2n+1)}$ , а  $m$  і  $n$  – цілі числа  $N \rightarrow \infty$ .

Графіки функції Рімана, побудовані згідно з формулою (2.4) для різних значень  $N$ , наведено на рисунку 2.4.

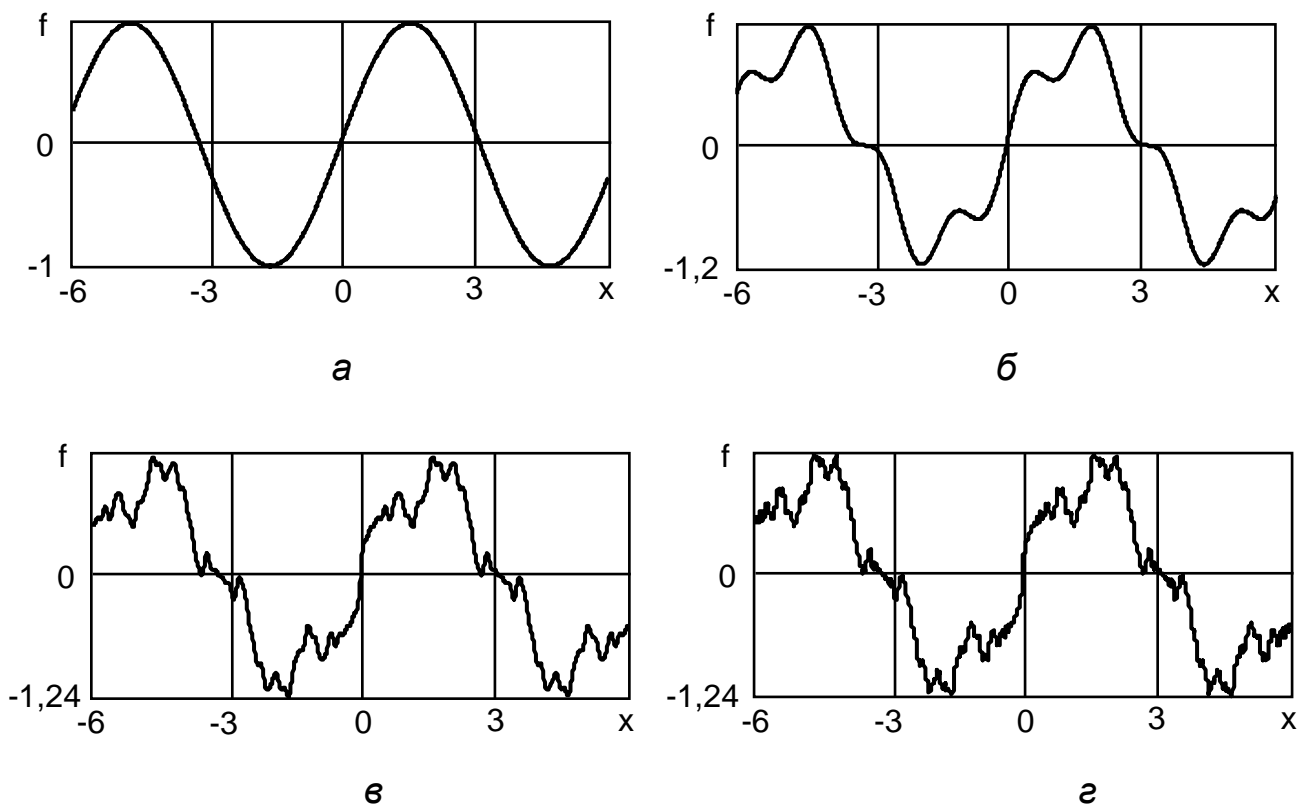


Рисунок 2.4 – Графіки функції Рімана, якщо:  
 $a - N = 1$ ;  $б - N = 2$ ;  $в - N = 6$ ;  $г - N = 12$

Як видно на рисунку 2.4, а, якщо  $N = 1$ , то функція Рімана є звичайною синусоїдою з одиничною амплітудою. Зі збільшенням  $N$  порізаність і амплітуда функції Рімана збільшується (рисунки 2.4, б, в, г). Збільшення порізаності і амплітуди більше помітно, якщо  $N$  мають невеликі значення,  $N < 10$ .

У 1970 році Дж. Джевер довів, що ця функція все ж таки має похідну в деяких раціональних точках, тобто вона не є недиференційованою.

**Побудова функції Ганкеля.** Герман Ганкель у 1873 році побудував функцію, що мала такий вигляд [52]:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \sin(\pi x n) \sin\left(\frac{1}{\sin(\pi x n)}\right), \quad (2.5)$$

де  $n$  – натуральне число;  $s > 1$ ;  $N \rightarrow \infty$ .

Функції Ганкеля, якщо  $s = 3$ , побудовані згідно з формулою (2.5) для різних значень  $N$ , наведено на рисунку 2.5.

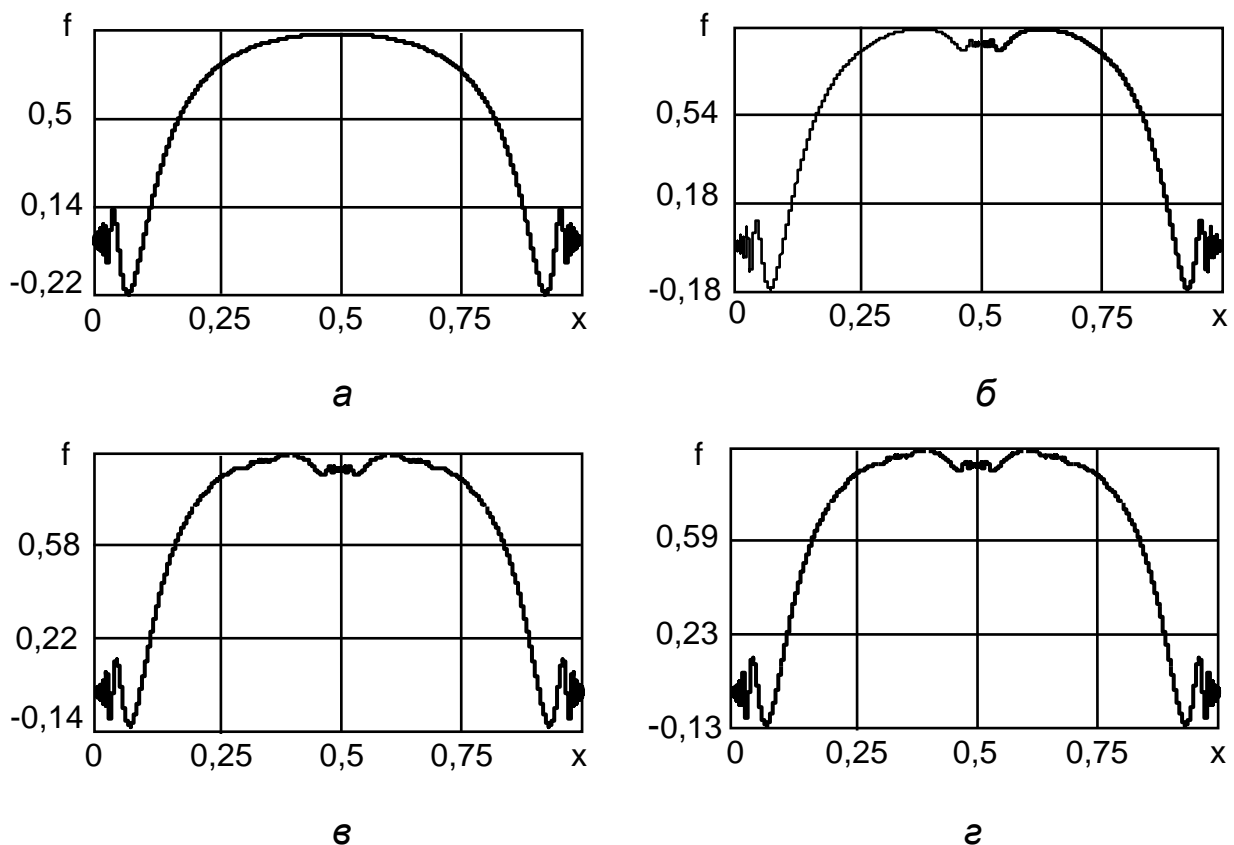


Рисунок 2.5 – Графіки функції Ганкеля, якщо:  
а –  $N = 1$ ; б –  $N = 2$ ; в –  $N = 6$ ; г –  $N = 12$

Відзначимо, що функція Ганкеля має особливості типу  $0 \sin(\infty)$  у випадку, якщо  $x$  належить до класу натуральних чисел. Це необхідно враховувати під час побудови графіка такої функції. Так само, як і у функції

Рімана, порізаність функції Ганкеля збільшується зі збільшенням  $N$ , що видно на рисунках 2.5, а, б, в, г, але порізаність не так сильно залежить від величини  $N$ .

**Побудова функції Вейєрштрасса.** Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс у 1872 році побудував функцію, що не має похідної в жодній точці, у такому вигляді [52]

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a^n \cos(b^n \pi x), \quad (2.6)$$

де  $0 < a < 1$ ;  $b > 1$  – непарне ціле число, при цьому  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

Графіки функції Вейєрштрасса, якщо  $a = 0,745$ ,  $b = 9$ , для різних значень  $N$  наведено на рисунку 2.6.

Зрозуміти причину недиференційованості функції Вейєрштрасса можна з такого. Для побудови  $f(x)$  спочатку береться гладка хвиля  $f_1(x) = a \cos(b\pi x)$  (див. рисунок 2.6, а). Потім на цю хвилю накладається друга хвиля  $f_2(x) = a^2 \cos(b^2 \pi x)$  (див. рисунок 2.6, б), що має меншу амплітуду і більшу частоту, ніж  $f_1(x)$ . Потім додається третя хвиля  $f_3(x) = a^3 \cos(b^3 \pi x)$  (див. рисунок 2.6, в) і т. д. Унаслідок чого виникає нескінченно порізана крива.

За результатом побудови такої функції видно одну властивість цієї кривої – її самоподібність. На рисунку 2.6, в наведено графік  $f(x)$  для  $-0,3 < x < 0,3$ , на рисунку 2.6, г – частину кривої, що визначена на прямокутній ділянці  $-0,15 < x < 0,15$ . Якщо цю область збільшити до розмірів початкового квадрата, то побачимо майже таку саму початкову криву (див. рисунки 2.6, в і г). Повторюючи побудову, можна переконатися, що крива відтворюється на будь-якому скільки завгодно малому масштабі. Інакше кажучи, наявна самоподібність – частина подібна до цілого.

Крім функції Вейєрштрасса, існує нескінченна кількість інших функцій, що мають аналогічні властивості самоподібності та недиференційованості.

**Побудова функції Вейєрштрасса – Мандельброта.** Як приклад масштабно-інваріантної фрактальної кривої розглянемо фрактальну функцію Вейєрштрасса – Мандельброта  $W(t)$ , яка визначається співвідношенням [14]

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{jb^n t}) e^{j\varphi_n}}{b^{(2-D)n}}. \quad (2.7)$$

Необхідно зазначити, що  $W(t)$  залежить від  $b$  тривіальним чином, оскільки тільки параметр  $b$  визначає, яку частину кривої можна побачити, коли аргумент  $t$  змінюється в заданому інтервалі. Параметр  $D$  має набувати значення в діапазоні  $1 < D < 2$ , а  $\varphi_n$  – довільна фаза (вибір різних значень фази  $\varphi_n$  відповідає різним функціям  $W(t)$ ).

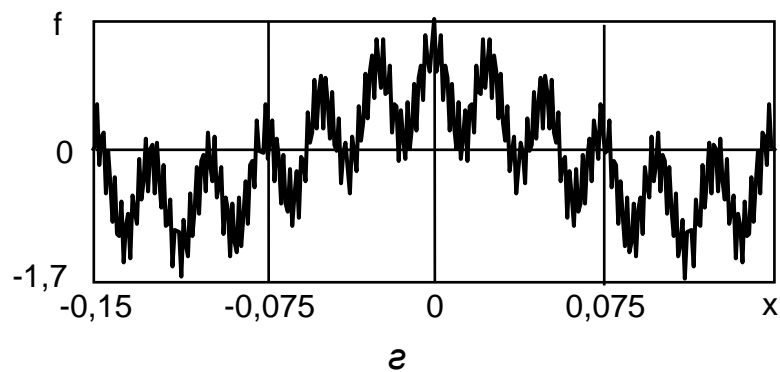
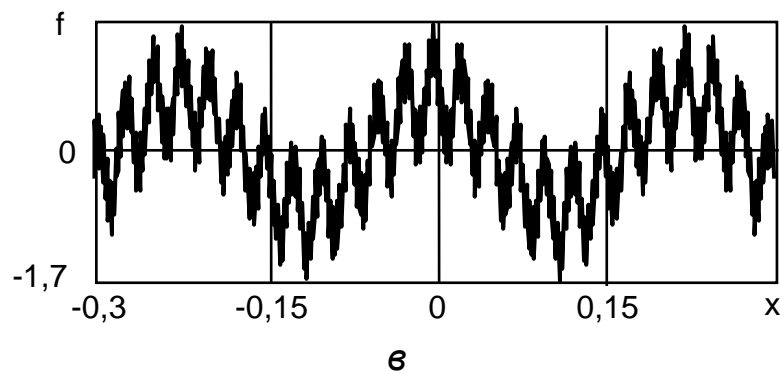
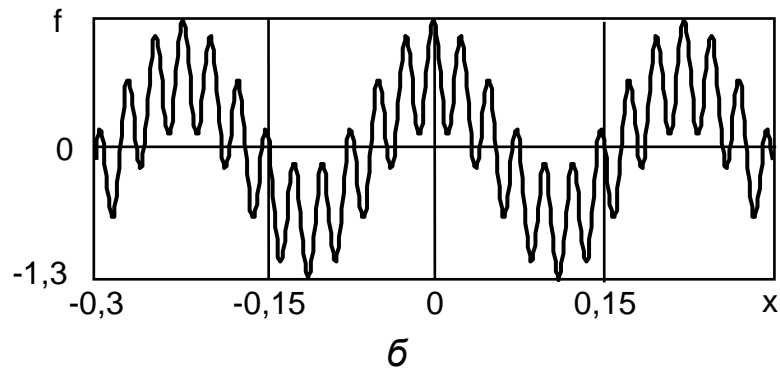
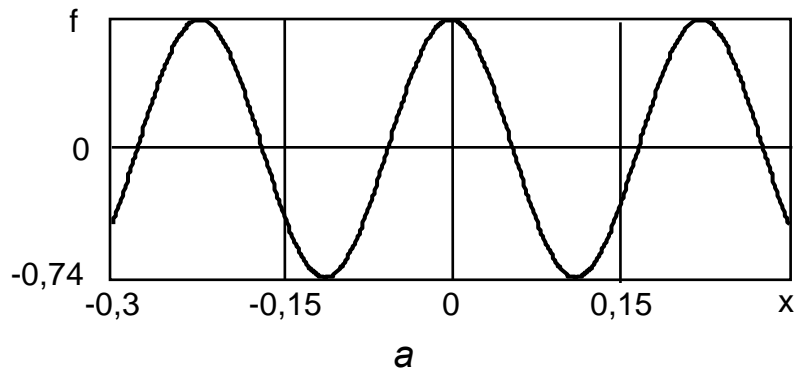


Рисунок 2.6 – Графіки функції Вейєрштрасса, якщо:  
 а –  $N = 1$ ; б –  $N = 2$ ; в –  $N = 3$  ( $-0,3 < x < 0,3$ );  
 г –  $N = 3$  ( $-0,15 < x < 0,15$ )

Функція Вейєрштрасса – Мандельброта безперервна, але недиференційована в жодній точці. Простий різновид такої функції можна

отримати, якщо покласти  $\varphi_n = 0$ . Косинусною фрактальною функцією Вейєрштрасса – Мандельброта називається дійсна частина функції  $W(t)$ :

$$C(t) = \operatorname{Re}W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (2.8)$$

Заведено вважати, що ця функція є фрактальною з розмірністю  $D$ . Відомо, що вона дійсно має розмірність  $D$ , якщо під цим терміном розуміти клітинну розмірність. На рисунку 2.7 наведено графіки функції Вейєрштрасса – Мандельброта для декількох значень параметрів в інтервалі «часу»  $0 \leq t \leq 1$ .

На рисунку 2.7, а і б видно, що для малих значень фрактальної розмірності  $D$  функція, по суті, гладка, але коли  $D$  наближається до двох (див. рисунок 2.7, в), функція починає сильно флуктувати і нагадує шум в електронних ланцюгах. Цей шум накладається на загальний тренд до зростання.

Функція  $C(t)$  – однорідна і задовольняє співвідношення однорідності

$$C(bt) = b^{2-D}C(t). \quad (2.9)$$

Таким чином, якщо відома функція  $C(t)$  на певному інтервалі значень  $t$ , то тим самим вона відома за будь-яких  $t$ . Функцію Вейєрштрасса – Мандельброта можна використовувати для отримання випадкових фрактальних кривих, вибираючи випадковим чином фазу  $\varphi_n$  на інтервалі від  $0$  до  $2\pi$ .

**Побудова модифікованої функції Вейєрштрасса.** Для опису фрактальних кривих можна також використовувати модифіковану функцію Вейєрштрасса [14]

$$f(t) = C \sum_{n=0}^{N-1} a^n \sin(Kb^n t + \varphi_n), \quad (2.10)$$

де  $C = \sqrt{\frac{2(1-a^2)}{1-a^{2N}}}$  – коефіцієнт контролю амплітуди;  $N$  – кількість складових функції (синусоїд);  $a$  – коефіцієнт масштабу нерівностей ( $0 < a < 1$ );  $K$  – основне просторове хвильове число;  $b > 1$  – параметр просторово-частотного масштабування;  $\varphi_n$  – довільна фаза.

Для точного опису форми флуктуації використовується фрактальна розмірність у вигляді

$$D = 1 + a. \quad (2.11)$$



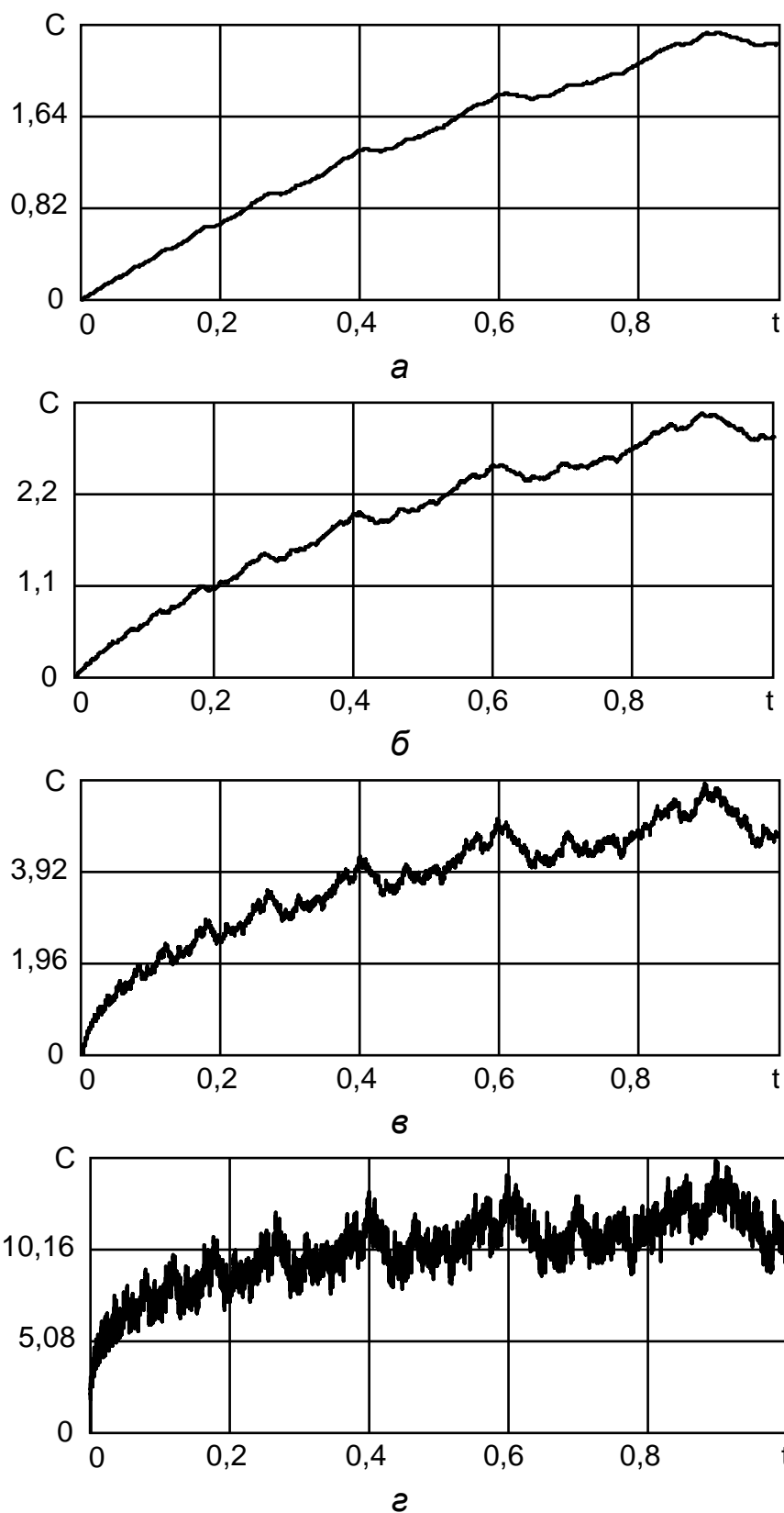


Рисунок 2.7 – Фрактальна функція Вейерштрасса – Мандельброта  $C(t)$ , якщо  $b = 1,5$ : а –  $D = 1,0$ ; б –  $D = 1,2$ ; в –  $D = 1,5$ ; г –  $D = 1,8$

На рисунку 2.8 наведено модифіковані функції Вейерштрасса для декількох значень параметрів  $N$  (2 і 5) та  $D$  (1,2; 1,5 і 1,8).

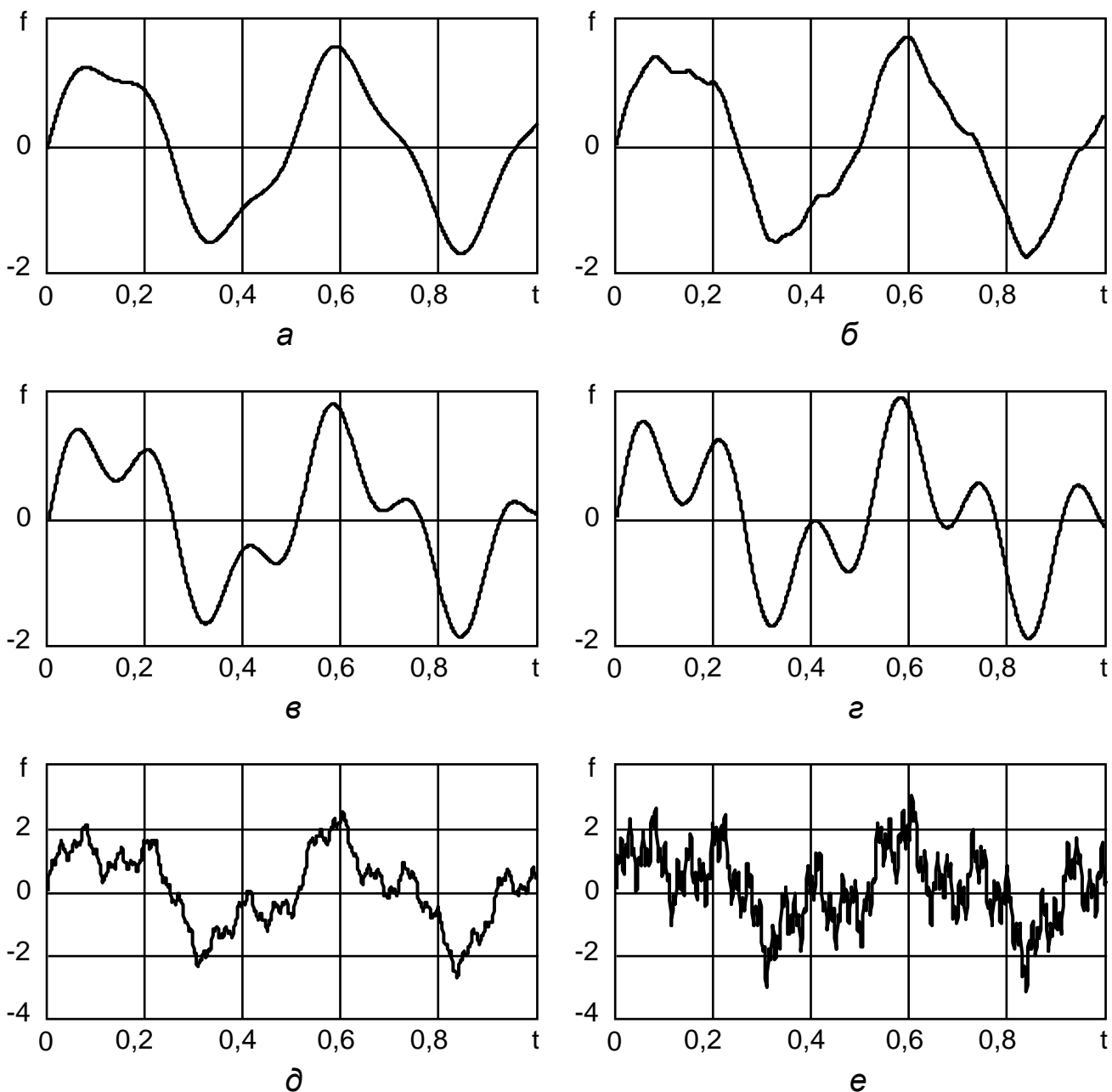


Рисунок 2.8 – Модифікована функція Вейєрштрасса, якщо  $b = 2,7$ :

$a - D = 1,2, N = 2$ ;  $б - D = 1,2, N = 5$ ;  $в - D = 1,5, N = 2$ ;

$г - D = 1,5, N = 5$ ;  $д - D = 1,8, N = 2$ ;  $е - D = 1,8, N = 5$

На рисунку 2.8 видно, що, якщо значення  $D$  близькі до одиниці, то функція  $f(t)$ , по суті, гладка (див. рисунок 2.8,  $a, б$ ), за умови збільшення значення від одиниці до двох можна отримувати різні фрактальні функції (див. рисунок 2.8,  $в, д$ ), які визначають міру, наприклад нерівності підстильної поверхні або флуктуації відбитого сигналу. На порізаність функції також впливає кількість складових  $N$ , що використовуються під час її побудови (див. рисунок 2.8,  $г, е$ ).

**Побудова функції Дарбу.** Жан Гастон Дарбу в 1872 році узагальнив функцію Ганкеля і побудував оригінальну функцію [52]

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin[(n+1)!x]}{n!}, \quad (2.12)$$

яка не має похідної за будь-яких  $x$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

Функція (2.12) для різних значень  $N$  має вигляд, що наведено на рисунку 2.9.

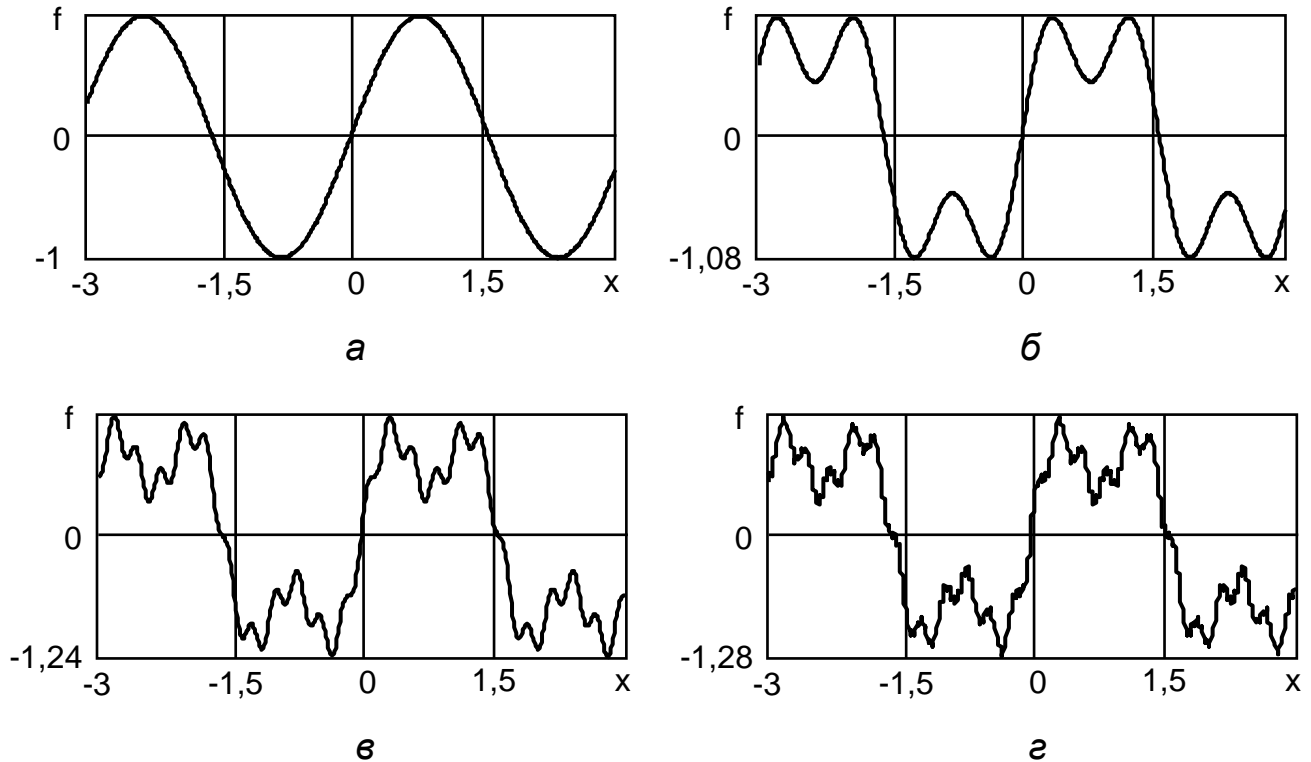


Рисунок 2.9 – Графіки функції Дарбу, якщо:  
 $a - N = 1$ ;  $б - N = 2$ ;  $в - N = 3$ ;  $г - N = 4$

На рисунку 2.9,  $a - г$  видно, що характер порізаності функції Дарбу зі збільшенням  $N$  стає складнішим, але такий самий, як і в розглянутих вище фрактальних функцій.

**Побудова функції ван дер Вардена.** Бартель Леендерт ван дер Варден у 1930 році запропонував функцію, побудова якої починається з функції  $f_0$ , і яка описується таким виразом [52]

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 1-x, & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де  $f_0(x+1) = f_0(x)$ .

Графік функції  $f_0$  наведено на рисунку 2.10,  $a$ .

Функція  $f_0(x)$  – безперервна на всій числовій осі й періодична з періодом один, лінійна на кожному відрізку  $\left[\frac{s-1}{2}; \frac{s}{2}\right]$ , де  $s$  – ціле число, а кутовий коефіцієнт графіка  $f_0(x)$  на кожному відрізку дорівнює  $\pm 1$ . Нехай

$$f_n(x) = \frac{f_0(4^n x)}{4^n}, \quad n > 0. \quad (2.13)$$

Функція  $f_n(x)$  визначає відстань між точкою  $x$  і найближчою до неї точкою  $\frac{m}{4^n}$ . Графіки функції ван дер Вардена, які побудовано згідно з формулою (2.13) для  $n = 0, 1, 2, 3$ , наведено на рисунку 2.10, а, б, в, г відповідно.

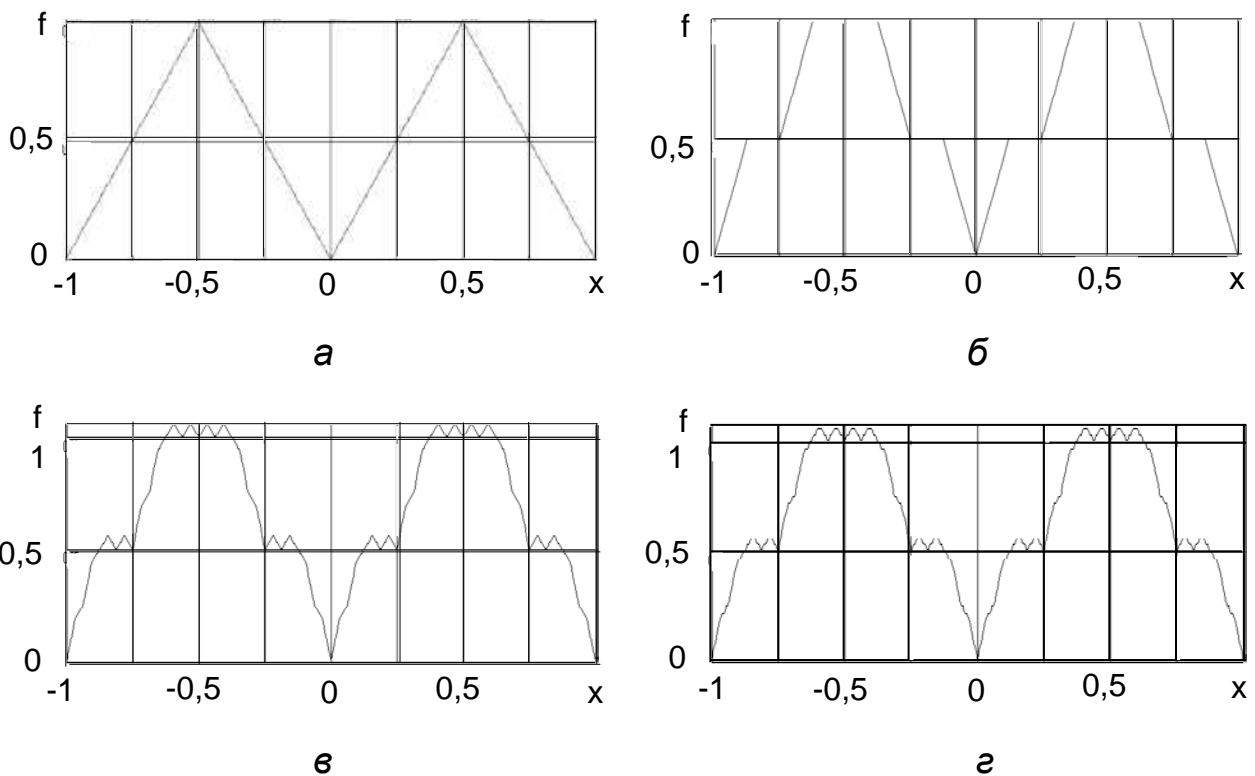


Рисунок 2.10 – Функція ван дер Вардена, якщо:  
 а –  $n = 1$ ; б –  $n = 2$ ; в –  $n = 3$ ; г –  $n = 4$

На рисунку 2.10 видно, що четверта ітерація майже не приводить до зміни структури функції ван дер Вардена, оскільки четверта гомеоморфна функція вже виключає візуальне розрізнення між третьою і четвертою ітераціями.

Ітераційна формула розрахунку функції ван дер Вардена має такий вигляд:

$$V(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{i-1} F\left(4^i, x - \frac{j}{i}\right),$$

$$F(a, x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq ax < \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{a} - x, & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq ax \leq 1, \end{cases}$$

де  $V(x)$  – функція ван дер Вардена;  $F(a, x)$  – допоміжна функція.

**Побудова функції Безиковича.** Абрам Самойлович Безикович побудував таку функцію в 1922 році. Побудова функції складається з таких етапів. На першому етапі будується відрізок ОС завдовжки  $2a = \ell$  ( $a = 0,5$ ) на рівні  $2a$  (рисунок 2.11, а). Потім у центральній частині відрізків  $[0, a]$  і  $[a, 2a]$  будуються відрізки завдовжки  $\ell_1 = a/4$  на рівні  $a = 0,5$  (рисунок 2.11, б) і т. д. (рисунок 2.11, в, г) [52].

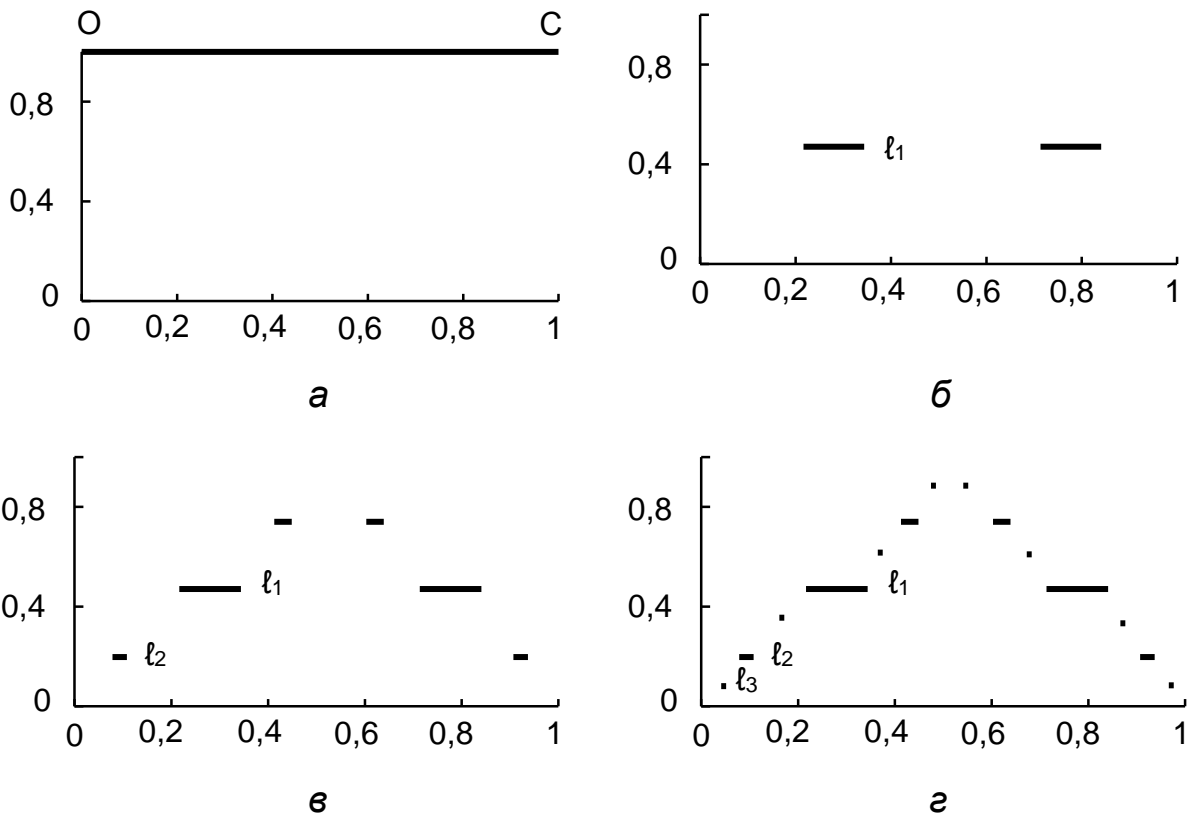


Рисунок 2.11 – Функція Безиковича:  
а – 1-й етап; б – 2-й етап; в – 3-й етап; г – 4-й етап

Безперервна функція Безиковича побудована таким чином, що не має в жодній точці ні правої, ні лівої похідної.

**Побудова послідовності Морсе – Туе.** Послідовність починається з нуля. На кожному наступному кроці до набору нулів і одиниць, що вже є на попередньому кроці, праворуч дописується його доповнення – набір чисел, у якому нуль замінений одиницею, а кожна одиниця – нулем [3]:

1-й крок 0;  
 2-й крок 01;  
 3-й крок 0110;  
 4-й крок 01101001;  
 5-й крок 0110100110010110;  
 6-й крок 01101001100101101001011001101001 і т. д. (2.14)

Далі, використовуючи принцип «копіювання попереднього члена і дописування праворуч його доповнення», одержується послідовність Морсе – Туе. У такої послідовності є властивість самоподібності, тобто вона містить фрагменти, які під час відповідного розтягування відтворюють усю послідовність. Як приклад розглянемо 6-й крок побудови послідовності (2.14). Починаючи з першого члена, вибирається кожен другий член послідовності (вони підкреслені). Як видно з алгоритму (2.14), вибрані члени утворюють послідовність Морсе – Туе [3]

0110100110010110.

Послідовність Морсе – Туе, окрім самоподібності, має властивість аперіодичності. Хоча послідовність Морсе – Туе і аперіодична, вона не є випадковою. Більш того, її структура має добре вираженим близьким і дальнім порядком. Наприклад, у цій послідовності не може бути груп, що складаються більш ніж із двох однакових членів поспіль.

Послідовність Морсе – Туе може бути використана для формування кодів фази в складних коливаннях.

Таким чином, в основі побудови класичних фрактальних недиференційовних функцій, також як і в основі побудови фракталів, лежить гіпотеза самоподібності, що допускає нескінченну серію вкладень один в одного однакових (гомеоморфних) об'єктів. Завдяки цьому об'єкт зменшується тільки в розмірі, але залишається гомеоморфним (подібним) початковому об'єкту. Класичні фрактальні недиференційовні функції можуть використовуватися для моделювання земної поверхні, що має різну порізаність, а також для моделювання сигналів, відбитих від різних негладких об'єктів.

### **2.1.2 Особливості побудови циклоїдальних фрактальних недиференційовних функцій**

Циклоїдальні функції належать до класу неявних функцій, які визначаються рівнянням вигляду  $F_0(y, x) = 0$ . Якщо неможливо розв'язати таке рівняння відносно  $y$ , то  $y$  називається неявною функцією аргумента  $x$ .

Якщо розглядати значення  $x$  і  $y$  як координати точки на координатній площині, то їх можна визначити через функцію третього змінного  $t$  у вигляді [59]

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = f(t). \end{cases}$$

### 2.1.2.1 Властивості звичайної циклоїди

Циклоїдою називається крива, яку описує точка, що лежить на колі  $K_0$ , яка котиться без ковзання за напрямною прямою (рисунок 2.12).

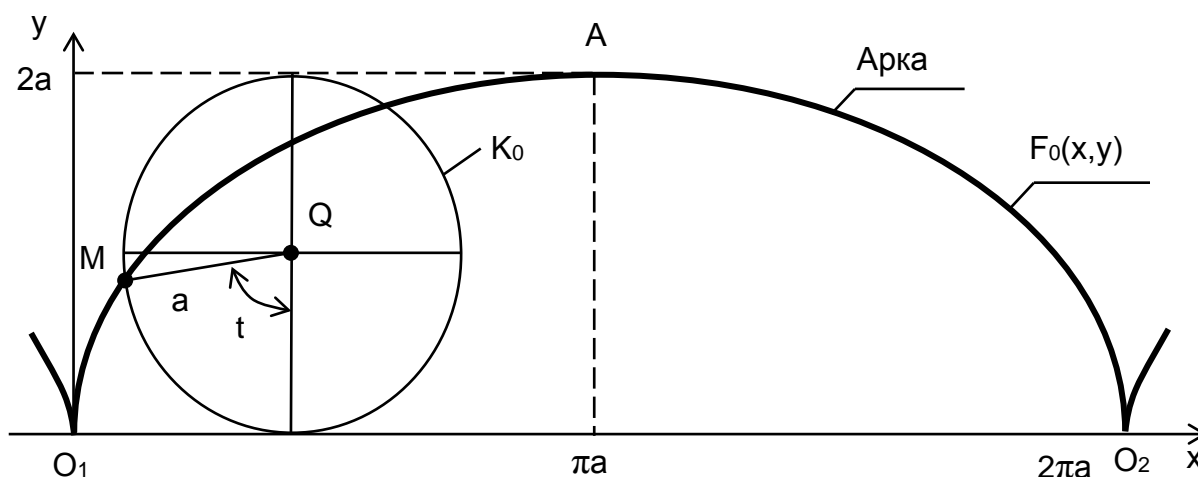


Рисунок 2.12 – Побудова циклоїди

Координати точки  $M$  під час руху кола визначаються рівнянням у декартовій системі координат [59]

$$a \cos\left(x + \sqrt{y(2a - y)} / a\right) - a + y = 0, \quad a > 0, \quad (2.15)$$

де  $a$  – радіус кола.

Для дослідження циклоїди зручніше використовувати рівняння в параметричній формі [59]

$$F_0(x,y) : \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 < t \leq 2, \quad (2.16)$$

де  $t$  – кут (кут за яким котиться коло).

Якщо змінювати кут  $t$  від  $0$  до  $2\pi$ , то точка  $M$  опише одну **арку** циклоїди, кінцевими точками якої є **точки повернення**  $O_n$  ( $2k_0 a \pi, 0$ ), де  $k_0 = 1, 2, 3, \dots, m$ . Максимальна точка арки  $A$  називається **вершиною** циклоїди, якій відповідають координати  $([2k_0 - 1]\pi a, 2a)$ . Відрізок прямої лінії між двома сусідніми точками повернення, що дорівнює  $2a$ , називається **підставою однієї арки** циклоїди. Окремі арки з'єднуються в точках, у яких мають загальну (вертикальну) дотичну. Ці точки

називаються **вістрями** арки. У вістрях похідної функції немає, тобто в цих точках функція недиференційована. Можна показати, що довжина дуги арки  $O_1AO_2$  дорівнює  $\ell_{\text{ц}} = 8a$ . Якщо арка циклоїди обертається навколо своєї підстави, то вона «народжує» поверхню, що обмежує яйцеподібне тіло, об'єм якого дорівнює  $V_{\text{ц}} = 5\pi^2 a^3$ , а площа, що обмежена аркою циклоїди та її підставою, дорівнює потрібній площі кола  $S_{\text{ц}} = 3\pi a^2$ .

Зазначимо ще одну властивість циклоїдальної функції. Циклоїда «народжує» синусоїдальну функцію. Покажемо це, розглянувши циклоїду, точку  $M$  на ній і відповідну точку  $P$  на синусоїді (рисунок 2.13). Центр кола, що рухається, позначимо буквою  $Q$ . Тоді вираз для синусоїди, що відповідає циклоїді матиме вигляд [62]

$$\begin{aligned} QP &= QM \cos(\alpha) = a \cos(\pi - \varphi) = -a \cos(\varphi) = & (2.17) \\ &= -a \sin(\pi/2 - \varphi) = a \sin(\varphi - \pi/2). \end{aligned}$$

З виразу (2.17) видно, що початок синусоїди ( $O$ ) не збігається з вістрям циклоїди, початок зрушено на  $\pi/2$  одиниць праворуч і на  $a$  одиниць вгору, як це наведено на рисунку 2.13.

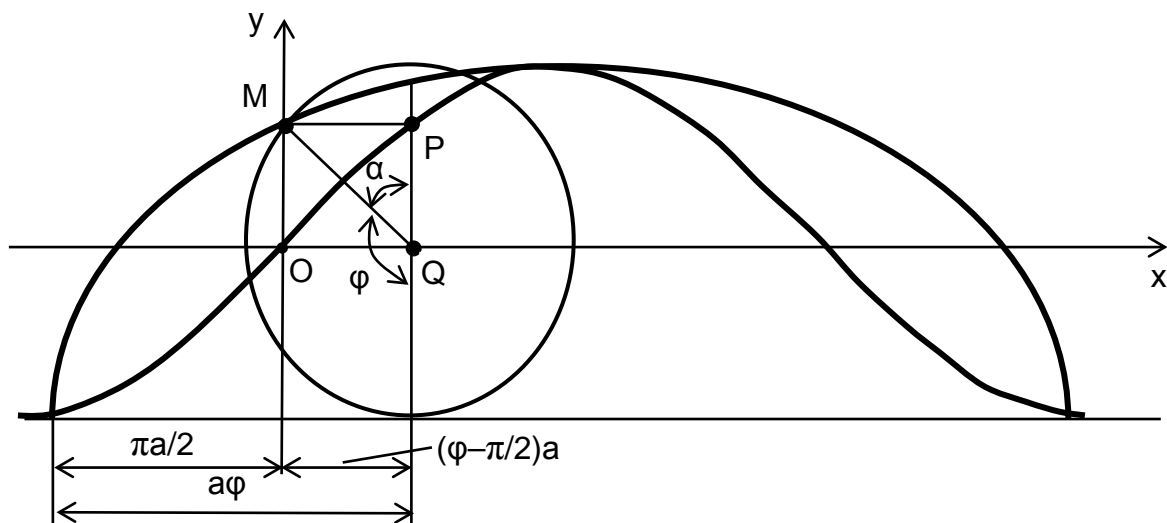


Рисунок 2.13 – Зв'язок циклоїди із синусоїдою

Визначимо площу синусоїди, скориставшись рисунком 2.14, на якому видно, що синусоїда ділить прямокутник  $ABCE$  на дві рівновеликі частини. Дійсно, якщо повернути фігуру  $AOTE$  на  $180^\circ$  навколо точки  $O$ , то вона буде сумісною з фігурою  $AOTK$ ; якщо повернути фігуру  $KBPT$  на  $180^\circ$  навколо точки  $P$ , то вона буде сумісною з фігурою  $СТРВ$ . Отже, площа, обмежена синусоїдою і підставою однієї арки циклоїди, дорівнює половині площі прямокутника  $AECB$ , основа якого  $AB$  дорівнює довжині кола, що рухається, тобто  $2\pi a$ , а висота  $KT$  – діаметра того самого кола ( $2a$ ). Отже, площа фігури  $AOTРВК$  (див. рисунок 2.14) дорівнює  $2\pi a 2a/2$ . Позначивши



цю площу буквою  $S_c$ , одержуємо вираз  $S_c = 2\pi a^2$ . Таким чином, площа, обмежена синусоїдою і підставою однієї арки циклоїди, дорівнює подвоєній площі кола, що рухається. Визначимо зв'язок між площами синусоїди і циклоїди.

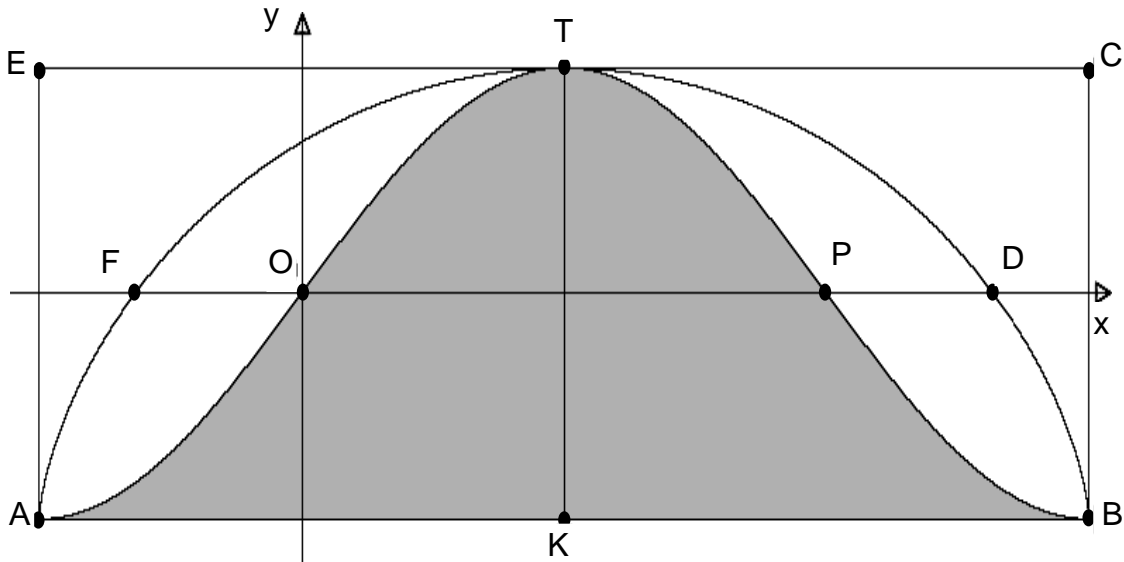


Рисунок 2.14 – До оцінювання площі синусоїди

Аналіз рисунку 2.14 показує, що площа циклоїди дорівнює сумі площі синусоїди і подвоєної площі «пелюстки»  $AFTO$  (фігури  $AFTO$  і  $BPTD$  однакові). Для визначення площі «пелюстки»  $AFTO$ , скористаємося тим, що подвоєна площа фігури  $AFTO$  дорівнює площі кола, що рухається ( $S_k = \pi a^2$ ). Отже, площа, обмежена аркою циклоїди та її підставою, дорівнює потрійній площі кола, що рухається  $S_c = 3\pi a^2$ . З розглянутого вище, можна визначити важливе для оцінювання розмірності фрактальних сигналів відношення площі циклоїди і синусоїди

$$\frac{S_c}{S_s} = \frac{3\pi a^2}{2\pi a^2} = 1,5. \quad (2.18)$$

Крім того, таке відношення дає змогу визначити площу синусоїди, яка «народжується» епіциклоїдою. Для визначення цієї площі розглянемо основні властивості епіциклоїди.

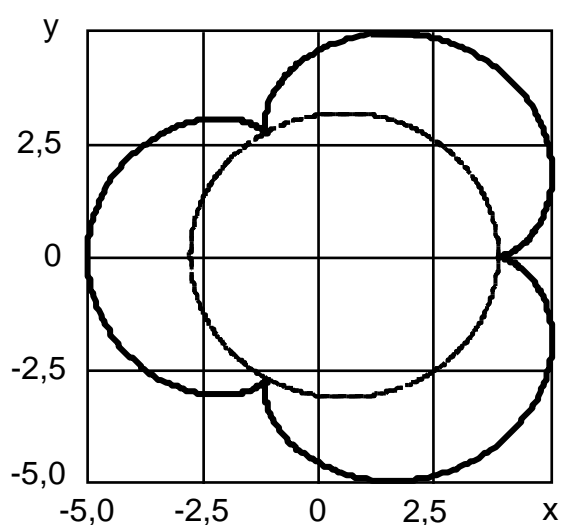
### 2.1.2.2 Особливості епіциклоїд і гіпоциклоїд

**Властивості епіциклоїди.** Особливістю епіциклоїди порівняно зі звичайною циклоїдою є те, що в епіциклоїді коло рухається не по прямій, а зовні по іншому (нерухомому) колу з радіусом  $R$ . У параметричній формі епіциклоїду може бути подано в такому вигляді [59]

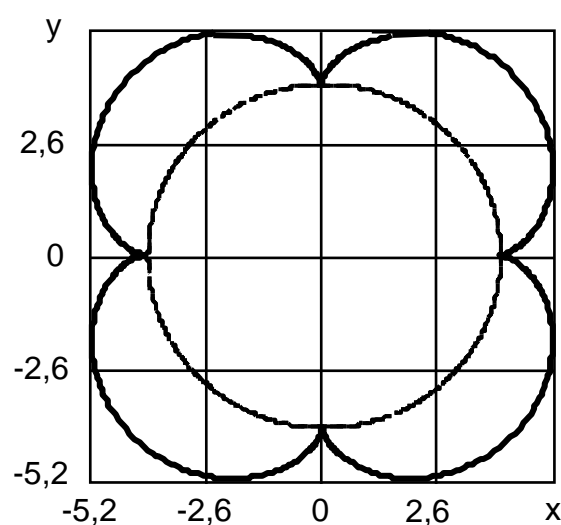
$$\begin{aligned}
 x &= (a + R)\cos(t) - a\cos\left([a + R]\frac{t}{a}\right), \\
 y &= (a + R)\sin(t) - a\sin\left([a + R]\frac{t}{a}\right),
 \end{aligned}
 \quad 0 < t \leq 2, \quad (2.19)$$

де  $R$  – радіус напрямного (нерухомого) кола.

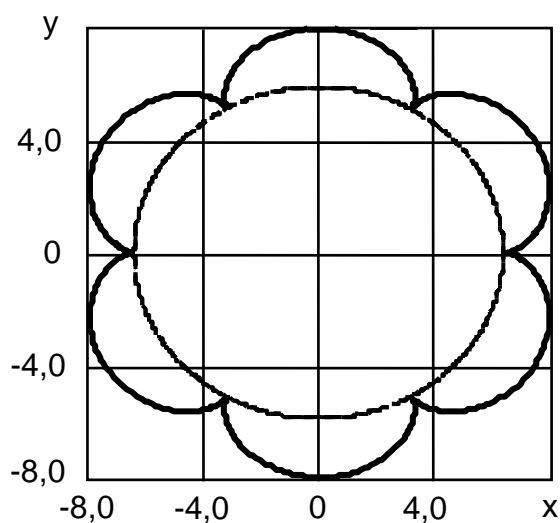
Залежно від співвідношення між радіусами нерухомого і рухомого кіл можна побудувати різні, хоча і споріднені, криві. Усі ці криві називаються епіциклоїдами. Якщо радіус  $R$  є більшим радіуса  $a$  в три, чотири, шість разів, то відповідно до виразу (2.19) можна побудувати криві з трьома, чотирма і шістьма вістрями (загостреннями), які наведено на рисунку 2.15, а, б, в відповідно.



а



б



в

Рисунок 2.15 – Епіциклоїди з трьома (а), чотирма (б) і шістьма (в) загостреннями

Метричні властивості епіциклоїди (довжина арок, площа епіциклоїди, площа синусоїди, яка визначається параметрами епіциклоїди) дуже схожі на такі самі властивості звичайної циклоїди. На відміну від циклоїди для оцінки метричних параметрів епіциклоїди, окрім радіуса  $a$ , необхідно вказати ще один параметр  $p$ , який показує, наскільки разів радіус напрямного (нерухомого) кола більший за радіус кола, що рухається  $\left(p = \frac{R}{a}\right)$ . Можна показати, що для відомих параметрів  $a$  і  $p$  довжина однієї арки епіциклоїди дорівнює

$$l_{\text{ец}} = \frac{8(p+1)a}{p}, \quad (2.20)$$

а площа однієї епіциклоїди визначається за допомогою виразу

$$S_{\text{ец}} = \frac{3p+2}{p} \pi a^2. \quad (2.21)$$

Так, наприклад, у епіциклоїди з двома загостреннями ( $p = 2$ ) довжина арки  $l_{\text{ец}} = 12a$ , а площа –  $S_{\text{ец}} = 4\pi a^2$ .

Як і звичайна циклоїда, епіциклоїда «народжує» синусоїду. Скориставшись виразами (2.18) і (2.21), визначимо площу синусоїди [63]

$$S_{\text{се}} = \frac{S_{\text{ец}}}{S_{\text{ц}}} S_{\text{с}} = \frac{2(3p+2)}{3p} \pi a^2, \quad (2.22)$$

яка пов'язана з площею епіциклоїди. На відміну від площі синусоїди, що «народжується» звичайною циклоїдою, площа синусоїди, яка «народжується» епіциклоїдою, залежить не тільки від радіуса  $a$ , але і від параметра  $p$ . Побудуємо синусоїдальну функцію, яка відповідає епіциклоїді, використовуючи вирази (2.17), (2.22), а також вираз площі синусоїди  $S_{\text{с}} = 2\pi a^2$ . Після відповідних перетворень отримаємо вираз синусоїдального сигналу, що відповідає епіциклоїді

$$y_{\text{ец}} = \frac{3p+2}{3p} a \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.23)$$

Аналіз виразу (2.23) показує, що, як і площа синусоїди, сигнал  $y_{\text{ец}}$  залежить не тільки від параметра  $a$ , як у циклоїди (див. вираз (2.17)), але і від параметра  $p$ .

**Властивості гіпоциклоїди.** Розглянемо особливості гіпоциклоїдальних функцій. Якщо більше коло буде нерухомим, а менше коло буде рухатися, торкаючись його зсередини, то будь-яка точка цього меншого кола опише криву, яку називають гіпоциклоїдою (рисунок 2.16).

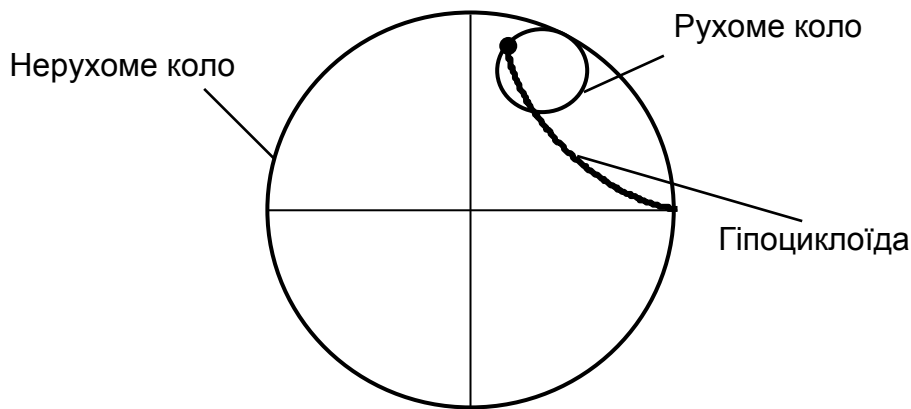


Рисунок 2.16 – Побудова гіпоциклоїди

Як і для епіциклоїди, рівняння для гіпоциклоїди доцільно подати в параметричній формі [59]

$$\begin{aligned} x &= (R - a)\cos(t) + a\cos\left([R - a]\frac{t}{a}\right), \\ y &= (R - a)\sin(t) - a\sin\left([R - a]\frac{t}{a}\right), \end{aligned} \quad 0 < t \leq 2\pi. \quad (2.24)$$

Величини, що входять у вираз (2.24), описано вище.

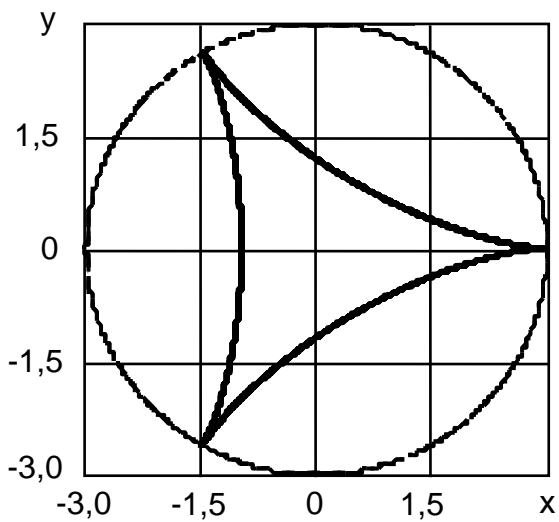
Якщо радіус рухомого кола буде у два, три, загалом у  $p$  разів менше радіуса нерухомого, то можна отримати гіпоциклоїду з двома, трьома, загалом із  $p$  загостреннями. На рисунку 2.17, а, б, в наведено гіпоциклоїди з трьома, чотирма і шістьма загостреннями.

Якщо радіус рухомого кола позначити як  $a$ , радіус нерухомого – як  $pa$ , то для довжини однієї арки гіпоциклоїди  $\ell_{гц}$  і для площі  $S_{гц}$  між однією аркою гіпоциклоїди і нерухомим колом будуть вирази

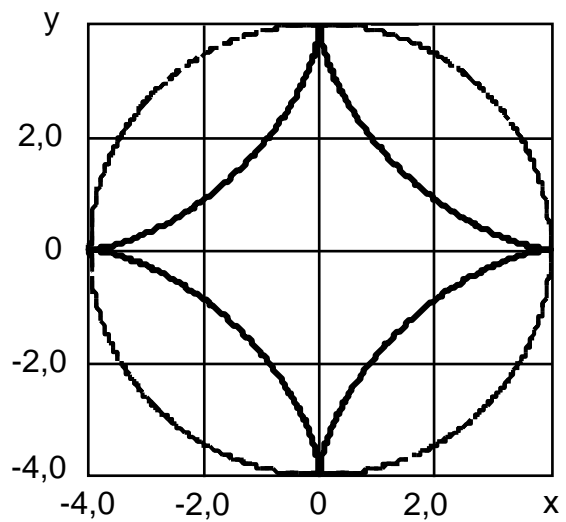
$$\ell_{гц} = \frac{8(p-1)}{p}a, \quad (2.25)$$

$$S_{гц} = \frac{3p-2}{p}\pi a^2. \quad (2.26)$$

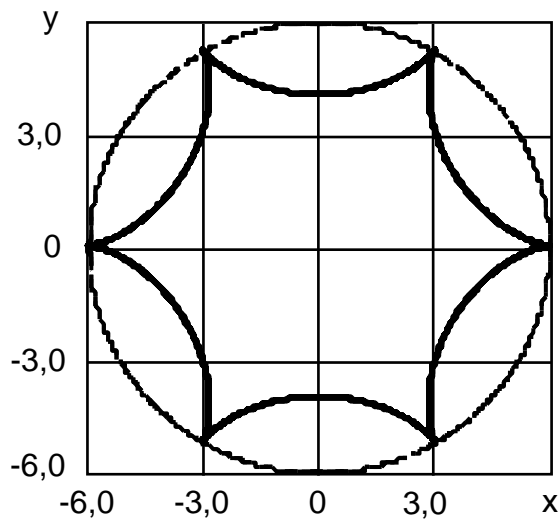
У разі необмеженого збільшення  $p$  права частина виразу (2.26) буде наближатися до  $3\pi a^2$ , тобто до обмеженої аркою звичайної циклоїди та її підставою, що показує зв'язок гіпоциклоїди і циклоїди.



а



б



в

Рисунок 2.17 – Гіпоциклоїди з трьома (а), чотирма (б) і шістьма (в) загостреннями

З всіх гіпоциклоїд, що наведено на рисунку 2.17, більш докладно розглянемо гіпоциклоїду із чотирма загостреннями, для якої  $R = 4a$ . Для такого випадку після перетворень за виразом (2.24) одержимо рівняння кривої в параметричній формі

$$\begin{aligned} x &= 4a \cos^3(t), \\ y &= 4a \sin^3(t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Крива, побудована згідно з виразом (2.27), називається **астроїдою**. Для астроїди, відповідно до формул (2.25) і (2.26), довжина однієї арки і площа між нею і нерухомим колом відповідно дорівнюють

$$l_a = 6a, \quad S_a = 2,5\pi a^2. \quad (2.28)$$

Під час обертання однієї арки навколо відрізка, що з'єднує протилежні загострення астроїди, утворюється поверхня, що обмежує тіло, об'єм якого дорівнює

$$V_a = \frac{1024}{105}\pi a^3 \approx 9,75283\pi a^3. \quad (2.29)$$

Гіпоциклоїда, як і звичайна циклоїда, «народжує» синусоїду. Використовуючи вирази (2.18) і (2.26), можна показати, що і в цьому випадку площа синусоїди [64]

$$S_{cr} = \frac{S_{гц}}{S_{ц}} S_c = \frac{2(3p-2)}{3p} \pi a^2 \quad (2.30)$$

однозначно пов'язана з площею гіпоциклоїди. Необхідно зазначити, що синусоїда розміщена між аркою астроїди і нерухомим колом. В окремому випадку площа синусоїди, яка пов'язана з астроїдою відповідно до виразу (2.30), дорівнює

$$S_{ca} = \frac{5}{3}\pi a^2. \quad (2.31)$$

Як і слід було чекати, площа синусоїди, що «народжена» гіпоциклоїдою, також як і у випадку з епіциклоїдою, залежить від параметрів  $a$  і  $p$ .

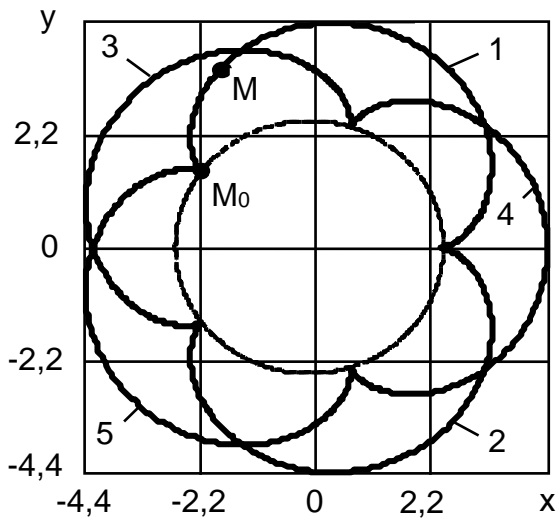
Побудова синусоїдального сигналу, що відповідає гіпоциклоїді, проводиться подібно до побудови сигналу, що відповідає епіциклоїді. Для цього використовується замість виразу (2.22) вираз (2.30). Одержаний синусоїдальний сигнал, що відповідає гіпоциклоїді, можна подати у вигляді

$$y_{гц} = \frac{3p-2}{3p} a \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.32)$$

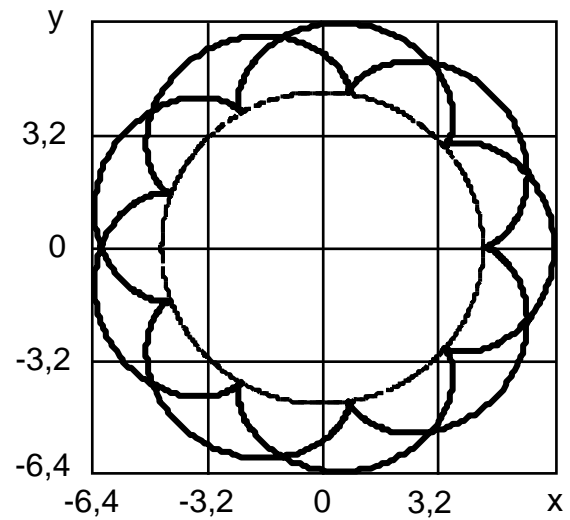
Як і у випадку епіциклоїди, сигнал, що відповідає гіпоциклоїді, визначається відношенням радіусів великого (нерухомого) і малого (рухомого) кіл (параметром  $p$ ).

**Властивості епіциклоїд і гіпоциклоїд із нескінченною безліччю арок.** Вище розглядалися епіциклоїди і гіпоциклоїди, у яких радіус нерухомого кола в ціле число разів більший за радіус рухомого кола. Проте відношення радіусів указаних кіл може бути також дробовим числом, причому для гіпоциклоїд – це неправильний дріб, а для епіциклоїд

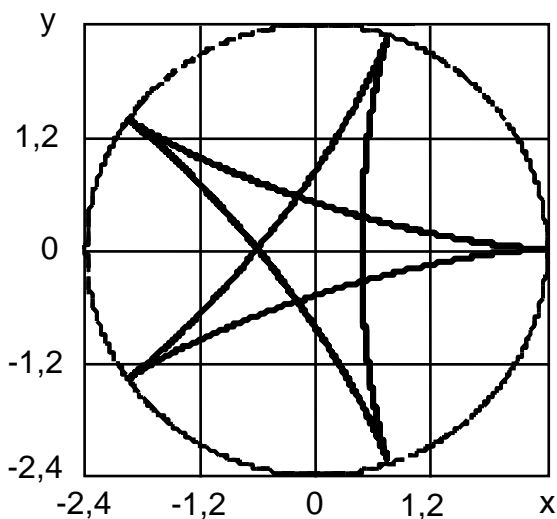
може бути як неправильним, так і правильним дробом. На рисунку 2.18, а, б, в і г для прикладу наведено декілька епіциклоїд і гіпоциклоїд із різними дробовими значеннями параметра  $p$ .



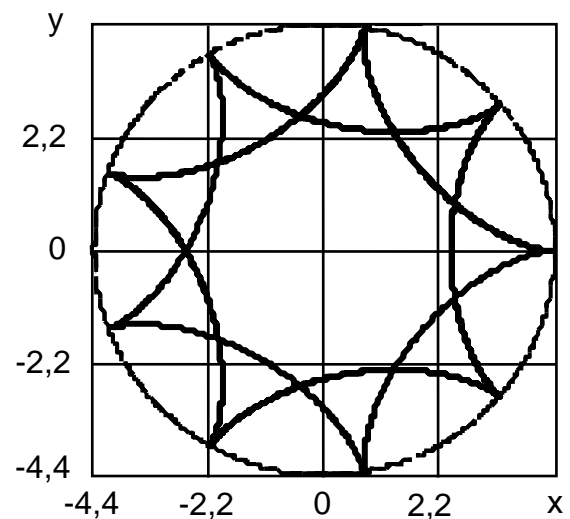
а



б



в



г

Рисунок 2.18 – Епіциклоїди і гіпоциклоїди з параметрами:  
а; в –  $p = 2,5$ ; б; г –  $p = 4,5$

На рисунку 2.18, а наведено епіциклоїду, у якої параметр  $p = 2,5$ . З рисунку видно, що повному обороту рухомого кола відповідає на нерухомому колі дуга  $120^\circ$ . Точка  $M$  опише п'ять петель, перш ніж повернеться в точку  $M_0$ . Незважаючи на свій надзвичайний «заплутаний» вигляд, ця крива є справжньою епіциклоїдою, і обчислення довжини однієї арки і площі між однією аркою та нерухомим колом проводиться за виразами (2.20) і (2.21). Необхідно зазначити, що про площу, яка

обмежена такою кривою говорити немає сенсу, оскільки одержані арки декілька разів будуть перетинатися одна з одною.

На рисунку 2.18, а також видно, що, якщо параметр  $p$  дорівнює нескоротному дроби  $\frac{n}{q}$ , то рухоме коло робить  $n$  обертів, оббігаючи при цьому  $q$  разів нерухоме коло, для того, щоб точка  $M$  повернулася в положення  $M_0$ . Після цього крива замикається. Ця крива буде з  $n$  загостреннями і з  $n(q-1)$  точками самоперетина. На рисунку 2.18, б наведено епіциклоїду, у якій відношення  $\frac{n}{q}$  дорівнює  $\frac{9}{2}$ . Така епіциклоїда має дев'ять точок самоперетина і дев'ять точок повернення.

Відзначимо, що такі самі припущення можна висунути і під час аналізу властивостей гіпоциклоїд (див. рисунок 2.18, в, г).

Для подальшого розгляду важливо підкреслити, що всі епіциклоїди торкаються зсередини нерухомого кола з радіусом, що дорівнює сумі радіуса нерухомого кола і діаметра рухомого кола. Водночас усі гіпоциклоїди торкаються ззовні нерухомого кола з радіусом, що дорівнює різниці радіуса нерухомого кола і діаметра рухомого кола. І в першому, і в другому випадках криві лежать цілком усередині кільця, утвореного двома концентричними колами.

Якщо значення радіуса рухомого кола  $a$  зафіксована, то збільшення параметра  $p$  приводить до необмеженого збільшення радіуса нерухомого кола  $R$ . Нерухоме коло при цьому все більш і більш «випрямляється» і наближається до своєї межі – прямої лінії. При цьому епіциклоїда і гіпоциклоїда «розгинаються» і перетворюються на звичайну циклоїду, що також видно з аналізу виразів (2.20) і (2.25). Такий підхід можна застосувати і під час аналізу площ епіциклоїди і гіпоциклоїди, а також синусоїд, що «народжуються» цими функціями.

### 2.1.2.3 Подібність і недиференційовність циклоїдальних функцій

Практичний інтерес становить застосування для побудови фрактальних недиференційовних функцій добре відомого класу неявних функцій – циклоїдальних [59]. Для використання циклоїдальних функцій як опорних під час побудови нових фрактальних недиференційовних функцій необхідно показати, що циклоїдальні функції мають основні властивості фрактальних функцій, властивість подібності, а також недиференційовність у деяких точках.

Розгляд фрактальної недиференційовної функції, отриманої на основі циклоїди, почнемо з оцінювання подібності двох циклоїд, що описуються функціями  $F_0(x,y) = 0$  і  $F_1(x,y) = 0$ , які наведено на рисунку 2.19. Припустимо, що функція  $F_1(x,y) = 0$  відображається на циклоїду нульового рангу  $F_0(x,y) = 0$ , і розмістимо на підставу  $2\pi a$



циклоїди нульового рангу дві циклоїди першого рангу  $F_1(x,y) = 0$  з підставою  $\pi a$  кожна. Повторюючи цю побудову  $n$  разів, отримаємо циклоїду  $n$ -го рангу, що описується функцією  $F_n(x,y) = 0$ . Як приклад на рисунку 2.19 наведено функцію  $F_n(x,y) = 0$ , якщо  $n = 2$ .

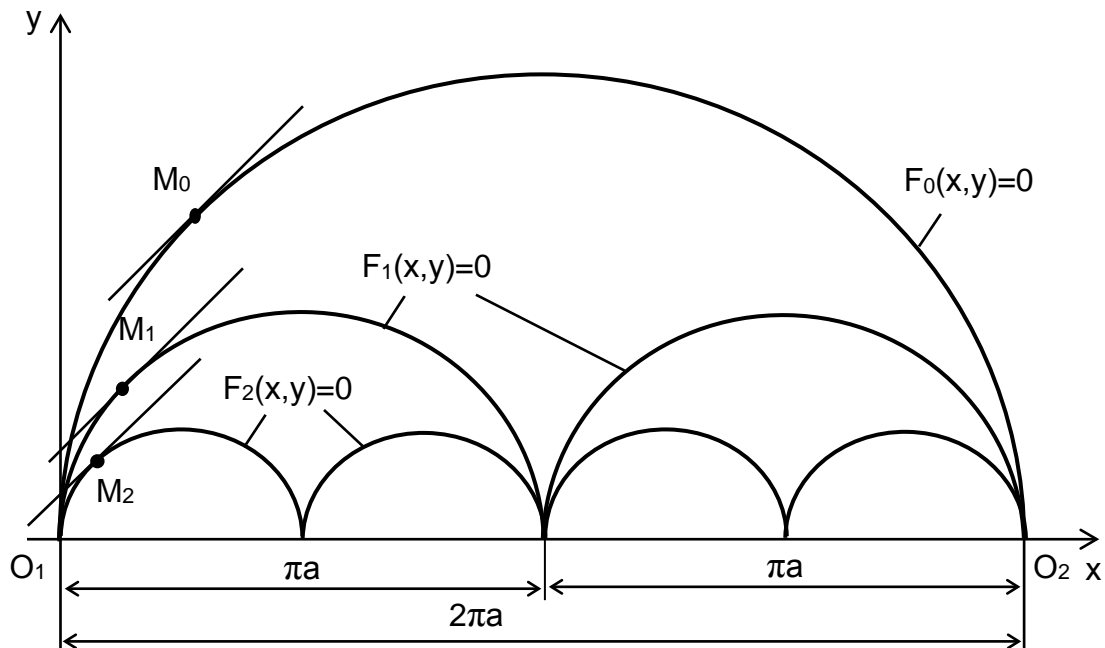


Рисунок 2.19 – Подібність циклоїд

Покажемо, що ці циклоїди подібні. Для того, щоб на підставі  $2\pi a$  циклоїди нульового рангу розмістилися дві циклоїди першого рангу, необхідно, щоб радіус рухомого кола цих циклоїд був у два рази менший за радіус  $a$  циклоїди нульового рангу. Можна записати

$$F_1(x,y) : \begin{cases} x = 0,5a[t - \sin(t)] \\ y = 0,5a[1 - \cos(t)] \end{cases}, \quad a > 0. \quad (2.33)$$

Оскільки параметр  $t$  має сенс кута повороту рухомого кола навколо своєї осі, то між точкою  $M_0$  циклоїди нульового рангу і точкою  $M_1$  циклоїди першого рангу буде взаємно однозначна відповідність, якщо їм відповідає одне і те саме значення параметра  $t$ . Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці циклоїди дорівнює похідній  $y'_x$  у цій точці, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin(t)}{a[1 - \cos(t)]} = \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}. \quad (2.34)$$

З виразу (2.34) видно, що для циклоїдальних функцій похідна  $y'_t$  не залежить від радіуса  $a$  і для точок  $M_0$  і  $M_1$  похідна набуває однакового значення, отже, у цих точках дотичні будуть паралельні. Оскільки довжина однієї арки циклоїди нульового рангу  $\ell_0 = 8a$ , то довжина циклоїди

першого рангу у два рази менша ( $\ell_1 = 4a$ ). У цьому випадку точка  $M_1$  віддалена від початку координат на відстань уздовж дуги удвічі менше, ніж віддалена точка  $M_0$ , тобто  $O_1M_0 = 2O_1M_1$ . Таким чином, циклоїди нульового і першого рангів є подібними з коефіцієнтом подібності  $k$ , що дорівнює двом. Такі самі припущення можна висунути щодо циклоїд першого і другого рангів і т. д. Оскільки циклоїди подібні, то буде відображення циклоїди другого рангу в циклоїду першого рангу, циклоїди першого рангу в циклоїду нульового рангу. Побудова продовжується необмежено і приводить до послідовності спадних континуумів

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \dots, \quad (2.35)$$

де  $C_n$  є сума  $2^n$  циклоїд з підставою  $1/2^n$ .

Під час нормування підстави циклоїди, що дорівнює  $2\pi a$ , переходимо до сегмента  $[0, 1]$ , який є власне континуумом, що лежить на прямій. Сегмент є непорожнім зв'язним компактом [46]. Оскільки під час безперервних відображень зберігається як зв'язність, так і компактність, то безперервне подання будь-якого континуума є континуумом. Із цього можна зробити висновок, що безперервне подання прямолінійного сегмента є континуумом. Тому будь-яка система  $n$  безперервних функцій (циклоїд)

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.36)$$

які задані на сегменті  $[0, 1]$ , визначає в  $n$ -вимірному просторі деякий континуум, що, як видно з рівняння (2.36), є безперервним поданням відрізка  $[0, 1]$  і який називають безперервною кривою в  $n$ -вимірному просторі. Система рівнянь (2.36) називається параметричним поданням цієї кривої. Континуум, що є безперервними поданнями прямолінійного сегмента, називають жордановим континуумом. Із жорданового континуума видно, що послідовності (2.36) можна поставити у відповідність спадну послідовність сегментів [46]

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots, \quad \Delta_n = [a_n, b_n], \quad (2.37)$$

при цьому довжина сегмента  $\Delta_n$  наближається до нуля, якщо  $n$  збільшується. Існує одна і лише одна точка, що належить усім сегментам  $\Delta_n$ . Аналіз виразів (2.36) і (2.37) дає змогу зробити висновок про те, що в цьому випадку циклоїді  $n$ -го рангу відповідає сегмент  $\Delta_n$ . Далі такий сегмент будемо називати сегментом  $n$ -го рангу.

Аналіз розглянутих властивостей циклоїди показує, що функція  $F(x, y) = 0$  є фрактальною, оскільки існує значення функції  $F_0$ , яке є фрактальною безліччю значень функцій  $F_i(x, y) = 0$ . Крім того, фрактальність циклоїди тісно пов'язана з її диференційовними властивостями.

Для оцінювання диференційовних властивостей циклоїдальних функцій розглянемо деяку безперервну функцію  $y = f(x)$ , яку наведено на рисунку 2.20.

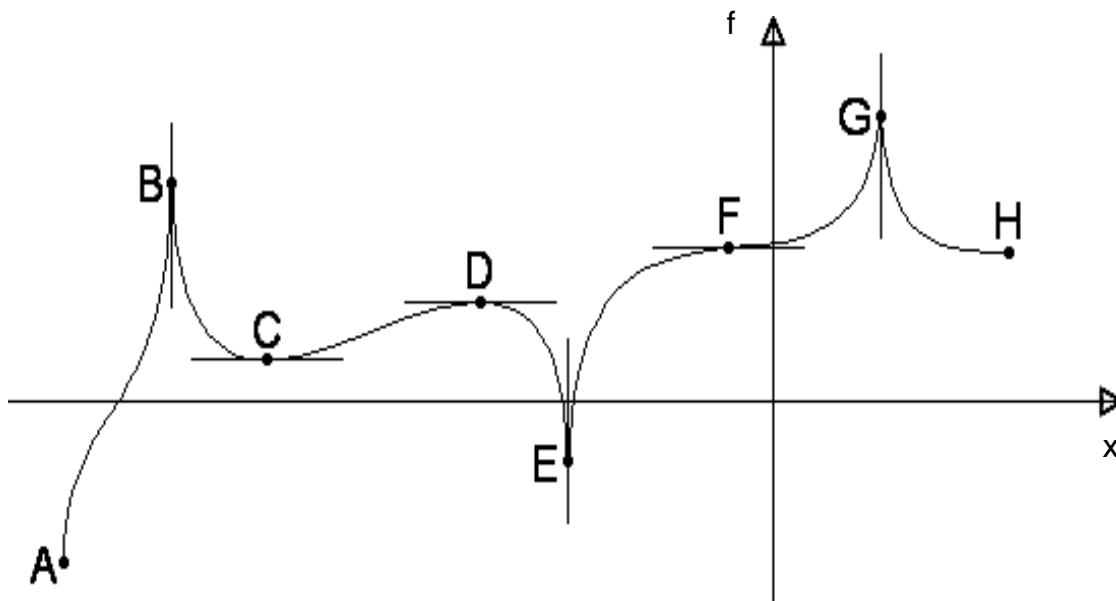


Рисунок 2.20 – До пояснення диференційовних властивостей циклоїди

З графіка на рисунку 2.20 видно, що  $f(x)$  має в точці E мінімальну величину, а в точці B – максимальну. Але абсцису  $x_0$  будь-якої із цих точок неможливо отримати як критичну величину з рівняння  $f'(x) = 0$ , оскільки для жодної із цих точок не має похідної  $f'(x)$ . Дійсно, дві пари кривих дуг AB і BC, DE і EF у точках B і E дотикаються до вертикальних прямих. Отож якщо скласти відношення  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  для абсциси  $x_0$  точок B або E, то видно, що абсолютна величина цього відношення наближається до  $+\infty$ , коли  $\Delta x \rightarrow 0$ . Звідси випливає, що похідної  $f'(x_0) = 0$  бути не може, і означає, що абсцису  $x_0$  в жодній із точок B і E не може бути отримано як критичну величину з рівняння  $f'(x) = 0$ . Нагадаємо, що критичною величиною змінної  $x$  називається величина, що задовольняє рівняння  $f'(x) = 0$ . Розглянуті точки B і E називаються загостреннями, і під час дослідження будь-яких значень функцій  $y = f(x)$  загострення потрібно враховувати [60].

Таким чином, з аналізу циклоїдальних функцій, з огляду на викладене вище, видно, що циклоїда є безперервною функцією, що дорівнює нулю в точках  $O_1$  і  $O_2$  (див. рисунок 2.19) і що не має похідних у загостреннях, оскільки в цих точках арки циклоїд дотичні до вертикальних прямих.

Оскільки властивості епіциклоїди і гіпоциклоїди схожі на властивості звичайної циклоїди, то можна показати, що епіциклоїдальні функції і гіпоциклоїдальні функції також мають властивості подібності, масштабної інваріантності та недиференційовності в деяких точках (загостреннях).

### 2.1.2.4 Будова циклоїдальних фрактальних недиференційовних функцій

Розглянемо функцію  $F(x,y) = 0$ . Визначимо опорну функцію (циклоїдальну функцію нульового рангу)

$$F_0(x,y) : \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad a = 1, 0 < t \leq 2\pi, \quad (2.38)$$

де  $F_0(x+1,y) = F_0(x,y)$ .

Функція  $F_0(x,y)$  безперервна на всій числовій осі, періодична з нормованим періодом, що дорівнює одиниці, нелінійна на кожному відрізку  $\left[\frac{s-1}{2}; \frac{s}{2}\right]$ , де  $s$  – ціле число, а кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди в

кожній її точці дорівнює  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$ , тобто кут нахилу  $\alpha$  дотичної до осі  $x$  дорівнює  $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ .

Можна показати, що циклоїдальна функція  $n$ -го рангу  $F_n(x,y)$  пов'язана із циклоїдальною функцією нульового рангу виразом [52]

$$F_n(x,y) = \frac{F_0(4^n x, y)}{4^n}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.39)$$

який дає змогу провести побудову фрактальної недиференційовної функції. Функцію, яку побудовано згідно з виразами (2.38) і (2.39), наведено на рисунку 2.21 для  $n = 1, 2, 3$ .

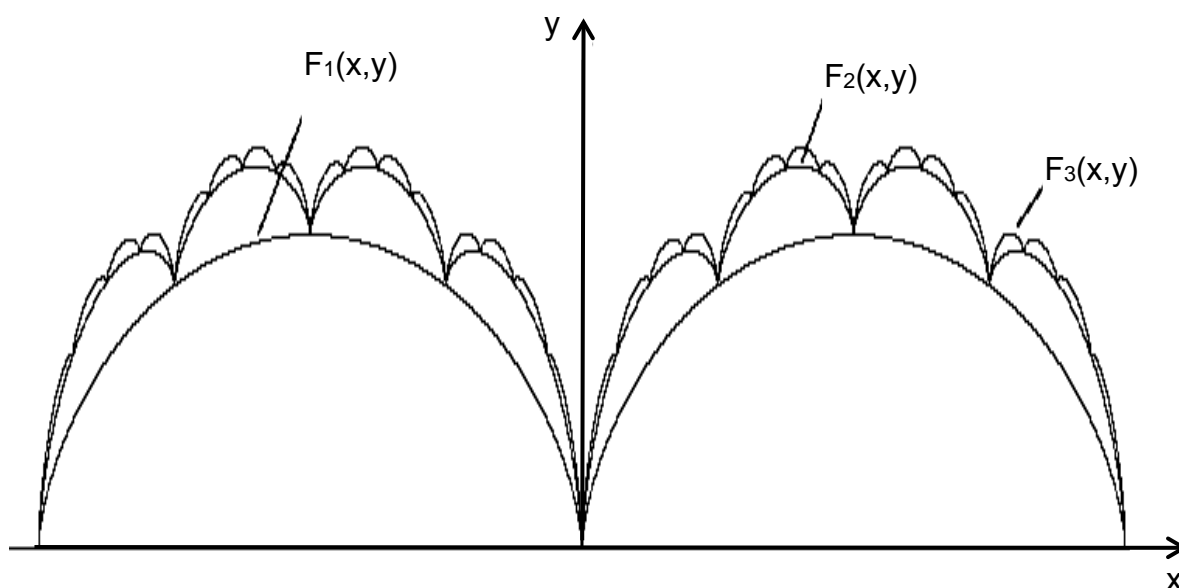


Рисунок 2.21 – Циклоїдальна фрактальна недиференційовна функція

Функція  $F_n(x,y)$  визначає відстань між точкою  $x$  і найближчою до неї точкою  $\frac{m}{4^{-n}}$ . Під час граничного переходу ( $n \rightarrow \infty$ ) точка  $x$  наближається до граничної точки  $\xi$ . Таким чином, функція, що визначена на сегменті  $[0, 1]$ , є фрактальною, оскільки вона відповідно до виразу (2.39) має властивості самоподібності та скейлінга.

Використання такої методики побудови фрактальної недиференційовної функції на основі опорної циклоїдальної функції дає змогу побудувати такі самі функції на основі епіциклоїдальних і гіпоциклоїдальних функцій, якщо використовувати їх як опорні (функції нульового рангу), які визначаються виразами (2.19) і (2.24). Епіциклоїдальна і гіпоциклоїдальна функції  $n$ -го рангу  $F_{ne}(x,y)$  і  $F_{nr}(x,y)$  пов'язані з функціями нульового рангу виразами [52]

$$F_{ne}(x,y) = \frac{F_{0e}(k^n x, y)}{k^n}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.40)$$

$$F_{nr}(x,y) = \frac{F_{0r}(k^n x, y)}{k^n}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.41)$$

за допомогою яких можна провести побудову відповідних фрактальних недиференційовних функцій. Такі функції можуть бути побудовані на основі арок епіциклоїди і гіпоциклоїди, які використовуються як опорні, на відміну від фрактальної недиференційовної функції, що будується на базі звичайної циклоїди, і мають своєю підставою не пряму, а нерухоме коло. Для прикладу на рисунку 2.22 наведено фрактальну недиференційовну функцію, яку побудовано з використанням астроїди (гіпоциклоїди), що відіграє роль опорної функції, для  $k = 2$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

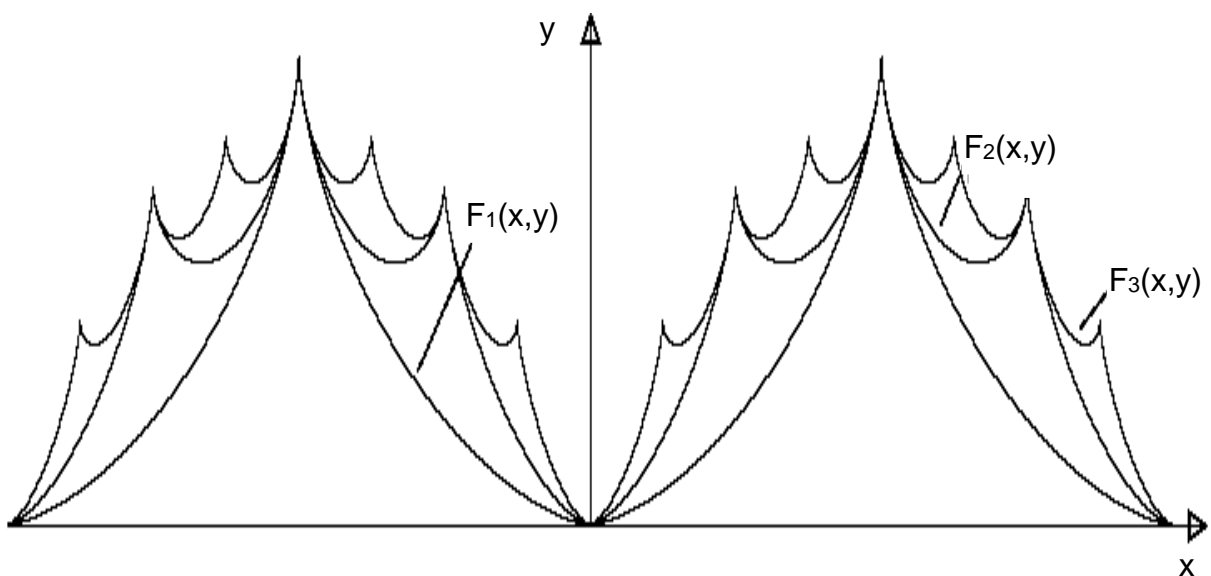


Рисунок 2.22 – Астроїдальна фрактальна недиференційовна функція

Аналіз астроїдальної функції показує, що вона має властивості самоподібності, масштабної інваріантності і, отже, є фрактальною [52].

З огляду на це можна зробити висновок про те, що фрактальні недиференційовні функції, які побудовані на основі опорних епіциклоїдальних і гіпоциклоїдальних функцій, наближаються до фрактальної недиференційовної функції, що побудована на основі простої циклоїди.

## 2.2 Основи формування та оброблення фрактальних сигналів

### 2.2.1 Методика побудови фрактальних сигналів

Основою формування структури фрактального сигналу є гіпотеза самоподібності, що допускає нескінченну серію вкладень одне в одне однакових (гомеоморфних) коливань. При цьому змінні параметри опорного коливання фрактального сигналу пов'язані між собою гіперболічною залежністю. Як опорні коливання можуть бути використані, наприклад, прості (синусоїдальні) коливання, а також сигнали з кутовою модуляцією.

Властивість гіперболічності під час формування фрактального сигналу з використанням опорного синусоїдального коливання може бути, наприклад, у стисненні (зменшенні) амплітуди і розтягуванні (збільшенні) частоти. Також можливе зменшення амплітуди і збільшення тривалості обвідної опорного коливання. У разі застосування як опорного коливання лінійно-частотно-модульованого (ЛЧМ) сигналу – ця властивість полягає в стисненні (зменшенні) амплітуди і розтягуванні (збільшенні) девіації (швидкості зміни) частоти.

Геометричними поданням опорного і гомеоморфних коливань, що беруть участь у формуванні фрактального сигналу, можуть бути об'єкти, що описуються класичними фрактальними недиференційовними функціями (функціями Рімана, Ганкеля, Вейерштрасса, Дарбу, ван дер Вардена), а також нові циклоїдальні фрактальні недиференційовні функції.

Під час побудови фрактального сигналу будемо використовувати правило, що ґрунтується на властивостях фрактальних недиференційовних функцій і враховує самоподібність, а також гіперболічність опорних коливань. Це правило визначається виразом [52]

$$F_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{F_0(k^n x)}{k^n}, \quad (2.42)$$

де  $F_0(x)$  – функція, що описує опорне коливання;  $k$  – коефіцієнт подібності (масштабний коефіцієнт);  $N$  – кількість коливань, що беруть участь у формуванні фрактального сигналу.

З виразу (2.42) видно, що масштаб зміни параметрів опорного коливання  $k$  однаковий (коефіцієнт стиснення рівний коефіцієнту розтягування). Залежно від вибору вигляду функції опорного коливання  $F_0(x)$  функція (2.42) описує фрактальний сигнал на основі або синусоїдального коливання, або на основі коливань із кутовою модуляцією.

Таким чином, **фрактальний сигнал є системою (сумою) сигналів, що складається із самоподібних опорних коливань, які в якомусь сенсі подібні до цілого сигналу [52].**

**Основними властивостями фрактальних сигналів є їх дробова розмірність і гіперболічність зміни параметрів опорних коливань.**

Розглянемо методику побудови фрактального сигналу з використанням опорного синусоїдального коливання. Як було наведено вище, синусоїдальну функцію може бути поставлено у взаємно однозначну відповідність циклоїдальній функції. Ця відповідність визначається загальним параметром цих функцій, яким є радіус рухомого кола  $a$ . Таким чином, знання циклоїдальної функції та її параметрів дає змогу побудувати синусоїдальну функцію вигляду  $y_i = f(x) = a \sin(x)$ . Таку функцію наведено на рисунку 2.23, якщо  $i = 0, 1$  [52].

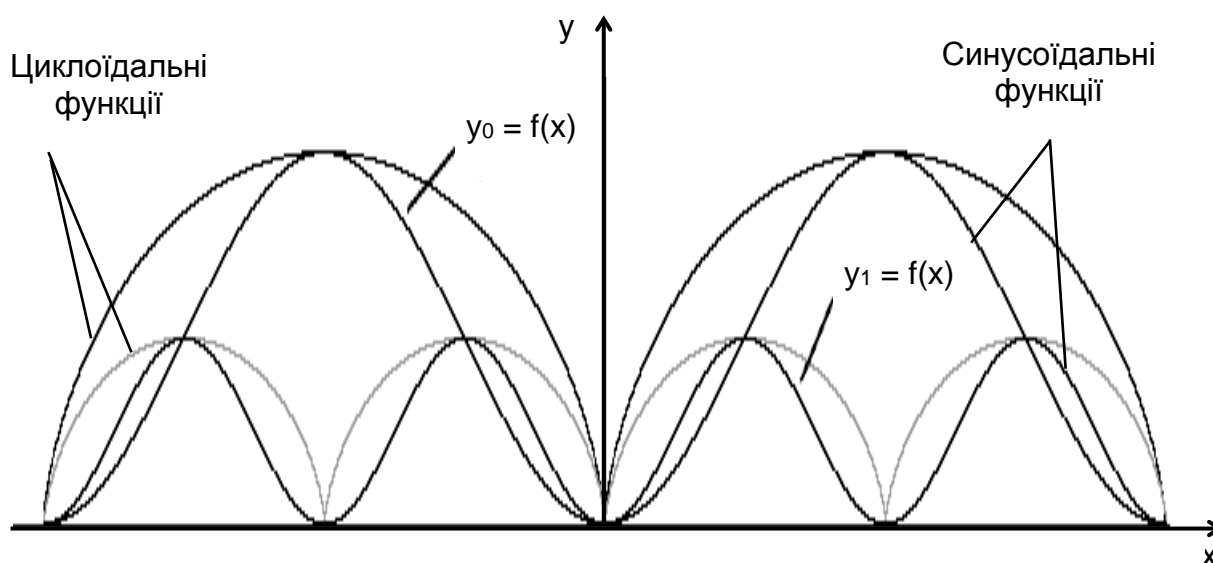


Рисунок 2.23 – Синусоїдальні та циклоїдальні функції

З графіків на рисунку 2.23 видно, що відбувається подвоєння періоду функції  $y_1 = f(x)$  порівняно з періодом функції  $y_0 = f(x)$ . Таке подвоєння обумовлене кратністю  $K_{pT}$  нескінченного сімейства періодів  $T^n$  функції  $y_1 = f(x)$  у періоді функції  $y_0 = f(x)$ . Оскільки функція, яка визначається виразом (2.42), є фрактальною, то використання функції [52]

$$F_n(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{F_0(k^n, a \sin x)}{k^n} \quad (2.43)$$

дає змогу сформувати фрактальний сигнал на основі синусоїди, яка «народжується» циклоїдою.

Якщо взяти  $x = 2\pi f_0$ , то модель фрактального сигналу в загальному вигляді можна подати за допомогою виразу [61]

$$u(a, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a}{k^n} \sin(2\pi f_0 k^n t + \varphi_0), \quad (2.44)$$

де  $N$  – кількість синусоїдальних функцій, що використовуються під час формування сигналу;  $a = U_0$  – радіус рухомого кола циклоїди, який для синусоїдальної функції є еквівалентним амплітуді;  $k$  – коефіцієнт подібності (масштабний коефіцієнт) синусоїдальних функцій;  $f_0, \varphi_0$  – початкові частота і фаза синусоїдальної функції.

## 2.2.2 Формування фрактальних сигналів із використанням опорних синусоїдальних, ЛЧМ- і КФМ-коливань

### 2.2.2.1 Побудова фрактальних сигналів із використанням опорного синусоїдального коливання

На рисунку 2.24 наведено процес формування фрактального сигналу, що містить дві синусоїдальні функції, якщо  $u_0 = f(t)$  і  $u_1 = f(t)$  – нульова і перша складові фрактального сигналу [52, 61]. Під час побудови сигналу використовувалася така сама методика, що й під час формування функції ван дер Вардена.

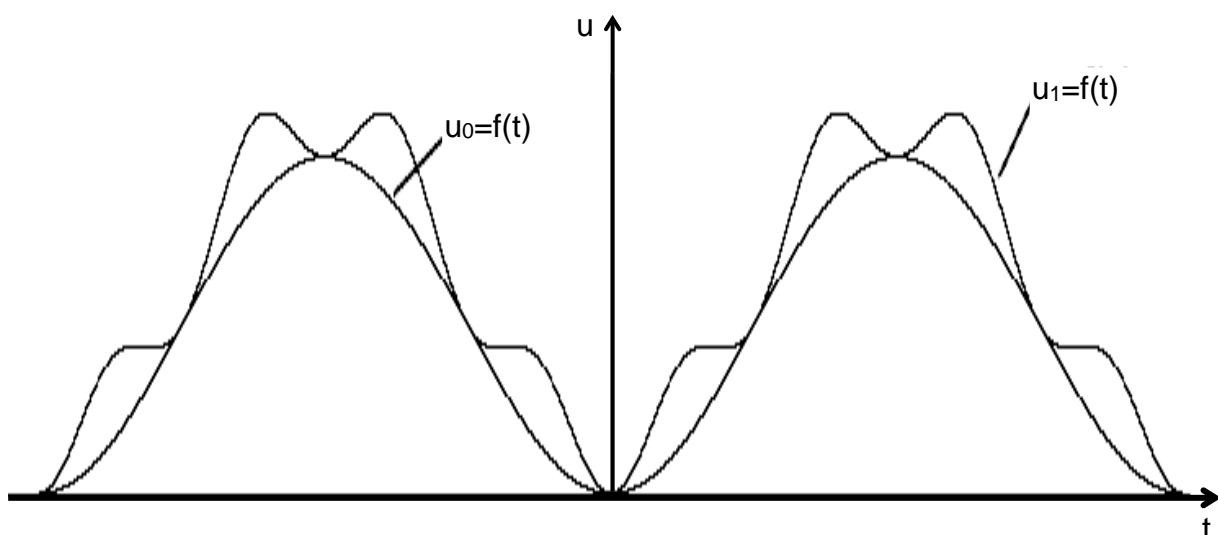


Рисунок 2.24 – Побудова фрактального сигналу на основі синусоїдальної функції

Аналіз виразу (2.44) показує, що фрактальний сигнал визначається радіусом  $a$  рухомого кола циклоїди, коефіцієнтом подібності  $k$  і кількістю



складових  $N$  під час поділу безлічі функції  $u(a,t)$ . Узявши похідну  $v = \frac{du}{dt}$ , можна побудувати фазовий портрет отриманого фрактального сигналу.

На рисунку 2.25 наведено, відповідно, часову реалізацію фрактального сигналу, його фазовий портрет, спектр і переріз Пуанкаре, якщо  $a = 1$ ,  $k = 2$  і  $N = 6$ , побудовані згідно з виразом (2.39).

На рисунку 2.25, а видно, що із збільшенням кількості взаємодійних складових коливальний процес ускладнюється [65].

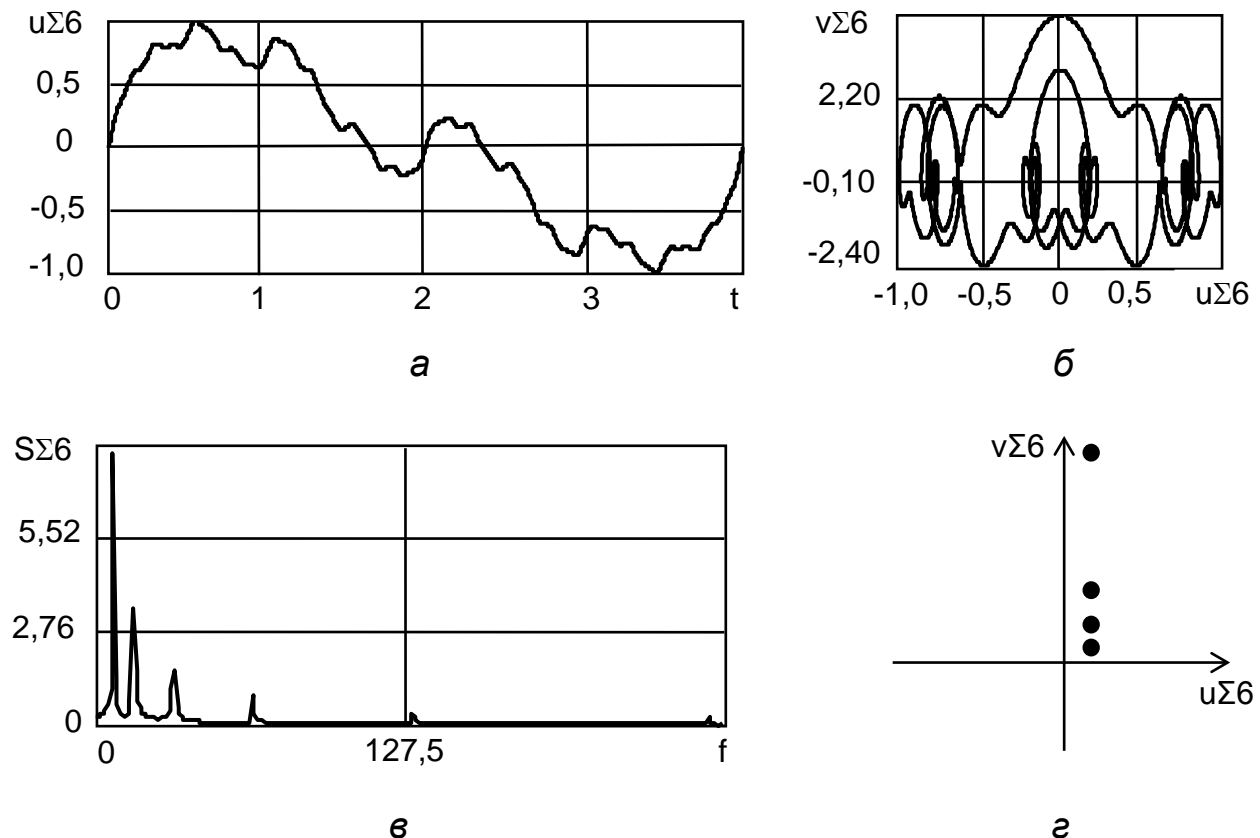


Рисунок 2.25 – Часова реалізація фрактального сигналу (сума шести складових) (а), фазовий портрет (б), спектр (в) і переріз Пуанкаре (г)

Аналіз даних рисунка 2.25, б показує, що фазовий портрет фрактального сигналу, який відображає складність коливального процесу, уже не є простим граничним циклом, а є сукупністю, вкладених один в одне однакових (гомеоморфних) фазових портретів окремих складових.

Структура перерізу Пуанкаре (див. рисунок 2.25, г) також ускладнюється і є набором із чотирьох окремих точок, розподілених уздовж осі  $v\Sigma_6$ . За умови інших часових параметрів можна отримати переріз Пуанкаре, що містить шість окремих точок.

Спектр фрактального сигналу (див. рисунок 2.25, в) складається із шести складових, частота і амплітуда яких змінюється за гіперболічним законом (частота – збільшується, а амплітуда – зменшується).

Аналіз фрактальної розмірності  $D$  такого сигналу показує, що вона є дробовою величиною і має своєю межею топологічну розмірність площини  $D_T = 2$ . Під час зміни параметра  $n$  від 0 до 5 відбувається збільшення фрактальної розмірності від  $D = 1,0181$  до  $D = 1,1337$ , якщо значення  $k = 2$  зафіксовано. Це пояснюється тим, що зі збільшенням кількості складових структура фрактального сигналу стає складнішою, отже, порізаність сигналу збільшується. Швидкість зміни фрактальної розмірності під час збільшення параметра  $n$  змінюється нелінійно, оскільки складові, що містить фрактальний сигнал, мають різний вплив на порізаність сигналу. Основний вплив, що найбільше призводять до ускладнення структури сигналу, дають перші п'ять складових, а додавання шостої майже не змінює його форму через невеликі (щодо першої складової) значення амплітуди і частоти. Збільшення параметра  $k$  також приводить до збільшення величини фрактальної розмірності. Крім того, найбільші зміни фрактальної розмірності спостерігаються, якщо параметр  $k$  збільшується від 2 до 4, а  $n = 2$ .

Таким чином, в основі формування структури фрактального сигналу лежить гіпотеза самоподібності, що допускає нескінченну серію вкладень одне в одне однакових (гомеоморфних) коливань. Змінні параметри опорного коливання фрактального сигналу при цьому пов'язані між собою гіперболічною залежністю. Використання перетворень фрактальних сигналів методами нелінійної динаміки і спектральної теорії дає змогу провести як якісний (фазові портрети і перерізи Пуанкаре), так і кількісний (фрактальні розмірності) аналіз структури сигналів.

**Тіло невизначеності фрактального сигналу на основі опорного синусоїдального коливання.** Під час використання для формування сигналу опорного синусоїдального коливання математичний вираз фрактального сигналу можна записати в такому вигляді:

$$u(t) = \sum_{n=0}^N \frac{U}{k^n} \cos(2\pi k^n f_0 t + \varphi_0), \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (2.45)$$

За допомогою виразу (2.45) можна отримати вираз для тіла невизначеності фрактального сигналу

$$\rho(\tau, F) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{U_0}{k^n} \right)^2 \frac{\tau_0}{2} \left| \frac{\sin[\pi k^n F(\tau_0 - |\tau|)]}{\pi k^n F(\tau_0 - |\tau|)} \right|, & \text{якщо } |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & \text{якщо } |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Вираз (2.46) описує форму тіла невизначеності фрактального сигналу, що наведено на рисунку 2.26. На рисунку 2.26 тіло невизначеності побудовано для кількості складових  $N = 3$ , тривалості фрактального сигналу  $\tau_0 = 2$  і масштабного коефіцієнта  $k = 2$ .

За допомогою виразу (2.46) можна показати, що за тих самих параметрів тривалості та частоти сигналу тіло невизначеності класичного синусоїдального сигналу буде ширшим за вісь  $F$ , ніж тіло невизначеності фрактального сигналу. Якщо збільшити кількість складових, що формують фрактальний сигнал, його тіло невизначеності стає більш вузьким, що є особливістю такого сигналу. Така особливість фрактального сигналу пов'язана із зміною параметрів, що дає змогу проаналізувати можливість його застосування для селекції різних об'єктів на фоні перешкод, обумовлених відбиттям від земної поверхні.

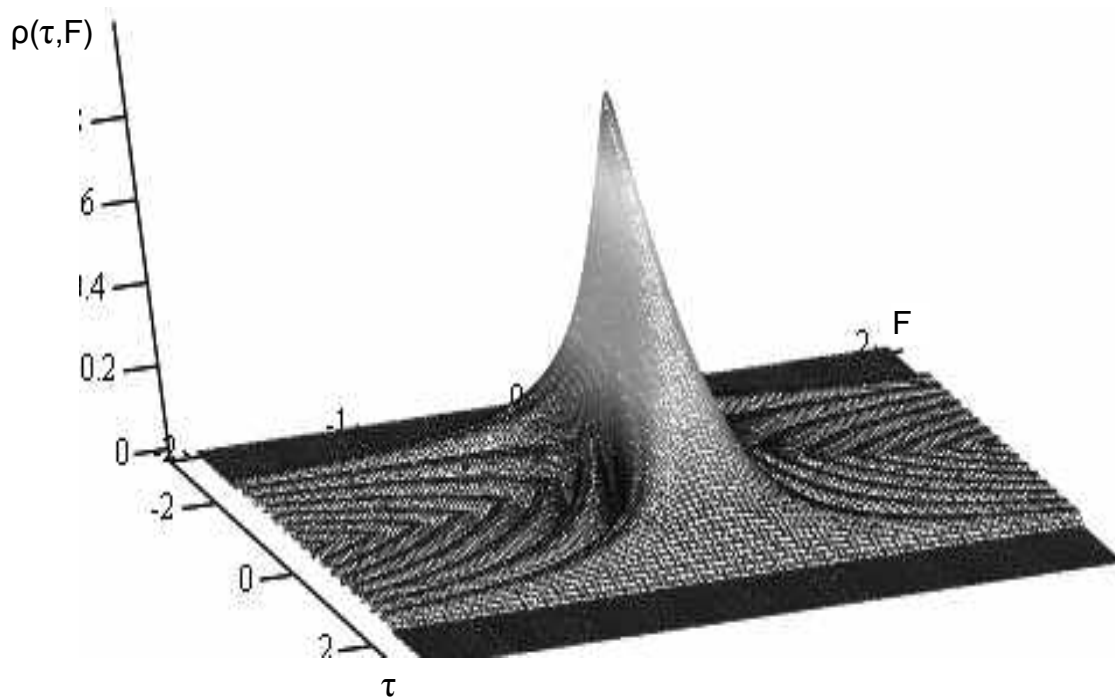


Рисунок 2.26 – Загальний вигляд тіла невизначеності фрактального сигналу

Розглянемо переріз тіла невизначеності, що є топографічною діаграмою. Топографічна діаграма будується з використанням характерної лінії рівня, як розділяє тіло невизначеності на область сильної кореляції  $\rho_s \geq 0,5$  і на область слабкої кореляції  $\rho_s \leq 0,5$ .

Ця лінія рівня визначається з рівняння

$$F_{1,2}(\tau) = \pm \frac{\sqrt{6}}{\tau_0 \sum_{n=0}^{N-1} k^n \pi \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right)} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right)}}. \quad (2.47)$$

У виразі (2.47) кожній величині  $\tau$  відповідає два значення  $F$ , що відповідають певному значенню  $N$ . Аналіз розв'язку (2.47) показує, що змінюючи кількість складових фрактального сигналу  $N$ , можна змінювати структуру перерізу тіла невизначеності.

На рисунку 2.27 для прикладу наведено переріз тіл невизначеності фрактальних сигналів, якщо кількість складових  $N = 0$  (суцільна лінія),  $N = 1$  (точкова лінія),  $N = 2$  (пунктирна лінія) і  $N = 3$  (штрихпунктирна лінія). Перерізи тіл невизначеності побудовано, якщо тривалість фрактальних сигналів дорівнює  $\tau_0 = 2$ . Зв'язок таких перерезів визначається коефіцієнтом масштабування (подібності)  $k^n$ .

Як видно з аналізу даних на рисунку 2.27, зміна кількості складових у фрактальному сигналі приводить до зміни його форми, що дає змогу, використовуючи цю специфічну властивість такого сигналу, зменшити або навіть повністю виключити вплив перешкод.

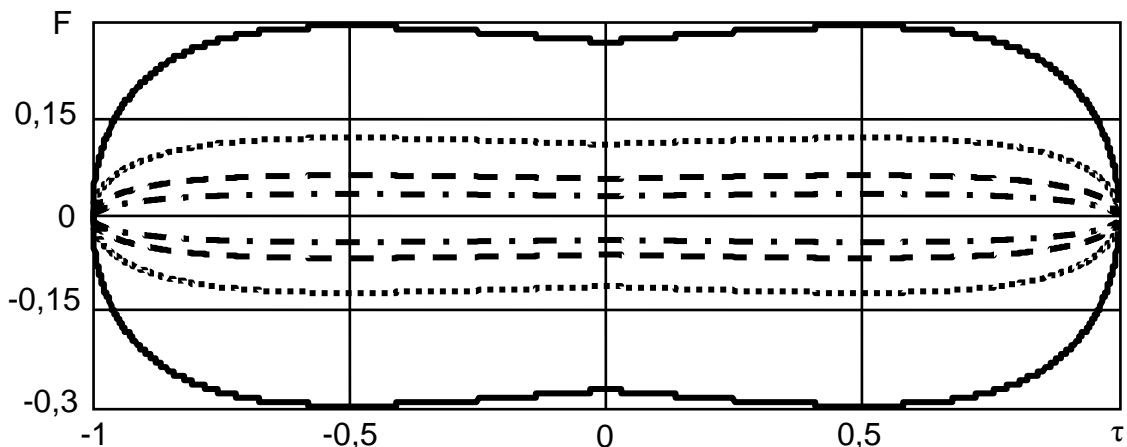


Рисунок 2.27 – Переріз тіл невизначеності синусоїдального коливання (суцільна лінія) і фрактальних сигналів (точкова, пунктирна і штрихпунктирна лінії)

Фрактальні сигнали займають проміжне місце між квазіперіодичними і хаотичними сигналами, оскільки спектр фрактальних сигналів близький до спектра квазіперіодичного сигналу, а в часовій області фрактальний сигнал, так само як і хаотичний сигнал, має вигляд випадкового. Крім того, фрактальний сигнал чутливий до зміни початкових умов, а під час дослідження його еволюції на фазовій площині виявляються ознаки існування дивного атрактора, що характерно для хаотичного сигналу.

### 2.2.2.2 Формування фрактального сигналу з використанням опорного ЛЧМ-коливання

Геометричним поданням опорного ЛЧМ-коливання є фазова траєкторія, яка намотується на двовимірний тор, вибраний як початковий. Крок обмотки тора змінюється за лінійним законом і відображає характер зміни коливання в часовій області [52, 61]. Геометричним поданням амплітуди ЛЧМ-коливання є радіус перерізу тора площиною, яка перпендикулярна внутрішній осі тора. Отже, геометричному поданню опорного коливання ставиться у відповідність його математичне подання в часовій області, що описується виразом

$$u(t) = U_0 \cos\left(f_0 t + \frac{\Delta f}{2\tau} t^2\right) = \frac{U_0}{2} \left\{ \exp\left[j\left(f_0 t + \frac{\Delta f}{2\tau} t^2\right)\right] + \exp\left[-j\left(f_0 t + \frac{\Delta f}{2\tau} t^2\right)\right] \right\}, \quad (2.48)$$

а в спектральній області – виразом

$$S(f) = \frac{U_0}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left\{ \exp\left[j\left((f_0 - f)t + \frac{\Delta f}{2\tau} t^2\right)\right] + \exp\left[-j\left((f_0 + f)t + \frac{\Delta f}{2\tau} t^2\right)\right] \right\} dt, \quad (2.49)$$

де  $U_0$ ,  $f_0$ ,  $\tau$ ,  $\Delta f$  – відповідно амплітуда, частота, тривалість і девіація частоти опорного ЛЧМ-коливання.

Першу складову фрактального сигналу в часовій області можна подати у вигляді [66]

$$u_1(t) = \frac{U_0}{k^1} \cos\left(f_0 t + k^1 \frac{\Delta f}{2\tau} t^2\right), \quad (2.50)$$

а  $n$ -ту складову сигналу у вигляді [66]

$$u_n(t) = \frac{U_0}{k^n} \cos\left(f_0 t + k^n \frac{\Delta f}{2\tau} t^2\right), \quad (2.51)$$

де  $k = 2, 3, 4, \dots$  – масштабний коефіцієнт;  $n$  – номер складової фрактального сигналу.

Аналіз виразів (2.50) і (2.51) показує, що  $n$ -і складові фрактального сигналу пов'язані з нульовою складовою узагальненою функцією [66]

$$F_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{F_0\left(U_0, \frac{k^n \Delta f}{\tau}\right)}{k^n}. \quad (2.52)$$

Узагальнена функція (2.52) є фрактальною, оскільки має властивості подібності й масштабної інваріантності. Також функція (2.52) дає змогу сформуванню фрактального сигналу на основі вказаного вище опорного ЛЧМ-коливання. У цьому випадку, використовуючи властивості функції, що визначається виразом (2.52), і враховуючи складові (2.50) і (2.51), фрактальний сигнал у загальному вигляді можна подати за допомогою виразу [66]

$$u(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{U_0}{k^n} \cos\left(f_0 t + k^n \frac{\Delta f}{2\tau} t^2 + \varphi_0\right), \quad (2.53)$$

де  $N$ ,  $\varphi_0$  – загальна кількість і початкова фаза складових сигналу.

Скориставшись математичними моделями окремих складових сигналу і фрактального сигналу в цілому, що описуються виразами (2.50) – (2.53), можна оцінити складність сформованого сигналу з використанням перетворень фрактального сигналу методами нелінійної динаміки і спектральної теорії. Розрахунки будемо проводити з використанням комп'ютерної програми Mathcad із кроком ітерацій  $t = 0,003$  за умов, що відповідають амплітуді опорного коливання  $U_0 = 1$ , його тривалості  $\tau = 2$ , девіації частоти  $\Delta f = 30$ , початковій фазі  $\varphi_0 = 0$ , кількості аналізованих компонент  $N = 6$  і масштабному коефіцієнту  $k = 2$ .

На рисунку 2.28, а наведено часову реалізацію фрактального сигналу як суми трьох складових  $u(t)$ , якщо  $n = 0, 1, 2$ . Під час переходу від нижніх частот до верхніх у межах тривалості окремих складових хаотичність фрактальних сигналів поступово збільшується, це підтверджується формою фазового портрета (див. рисунок 2.28, б) і структурою перерізу Пуанкаре (див. рисунок 2.28, г).

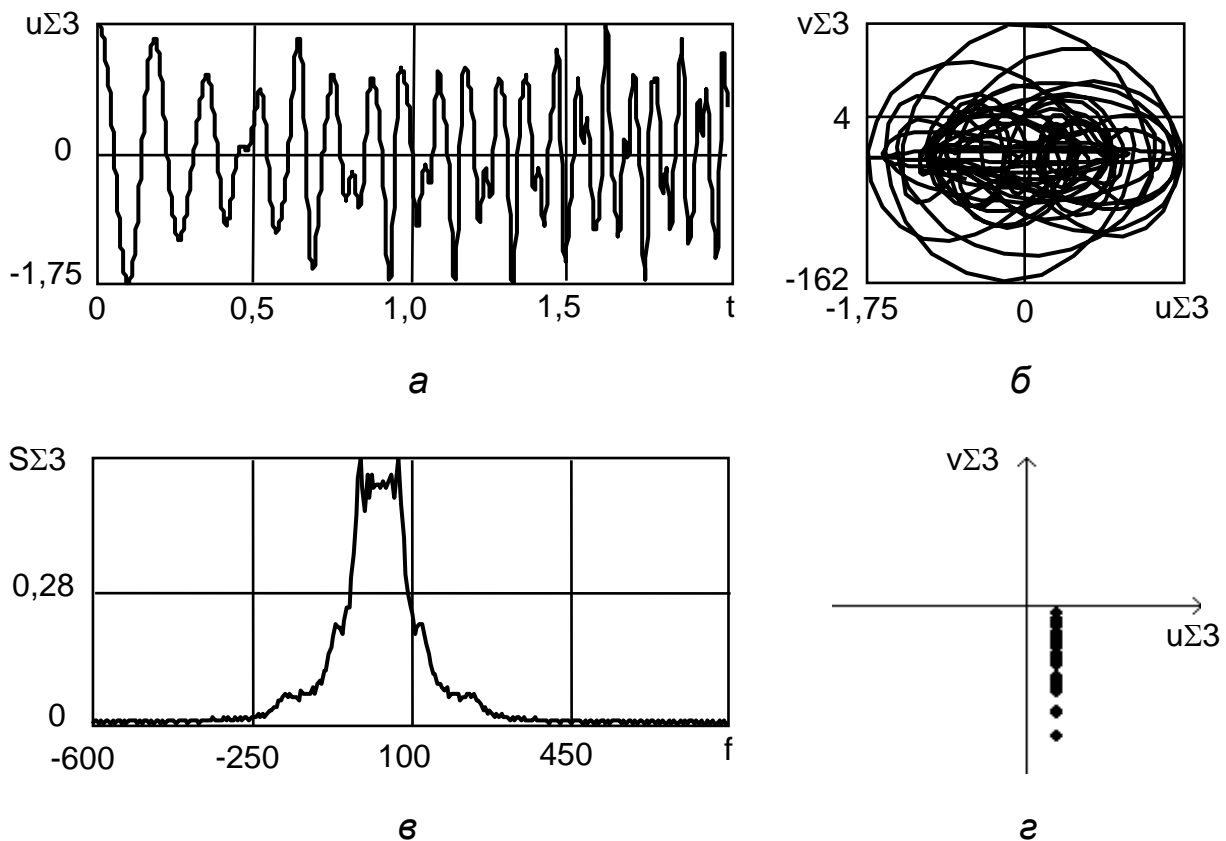


Рисунок 2.28 – Часова реалізація фрактального сигналу (сума трьох складових) (а), фазовий портрет (б), спектр (в) і переріз Пуанкаре (г)

Форма фазових портретів характеризує складність фрактальних сигналів, а структура перерізу Пуанкаре показує, що у фрактальних сигналах виникають періодичні цикли опорних коливань і що точки на перерізах Пуанкаре розподілені випадковим чином (див. рисунок 2.28, г), тоді як точки на перерізах Пуанкаре складових фрактального сигналу

розподілені за законом зміни частоти ЛЧМ-коливань. Спектр такого фрактального сигналу є сумою спектрів окремих складових (див. рисунок 2.28, в) і має ступінчасту структуру.

На рисунку 2.29, а наведено фрактальний сигнал у часовій області, отриманий як сума шести складових, і який дає змогу дослідити динаміку розвитку фрактального сигналу. Збільшення кількості складових у складі фрактального сигналу підвищує його хаотичність.

Підвищення хаотичності фрактального сигналу особливо проявляється в поведінці фазових траєкторій (див. рисунки 2.28, б і 2.29, б) і структурі перерізу Пуанкаре (див. рисунки 2.28, в і 2.29, в), щільність яких в останньому випадку різко збільшується.

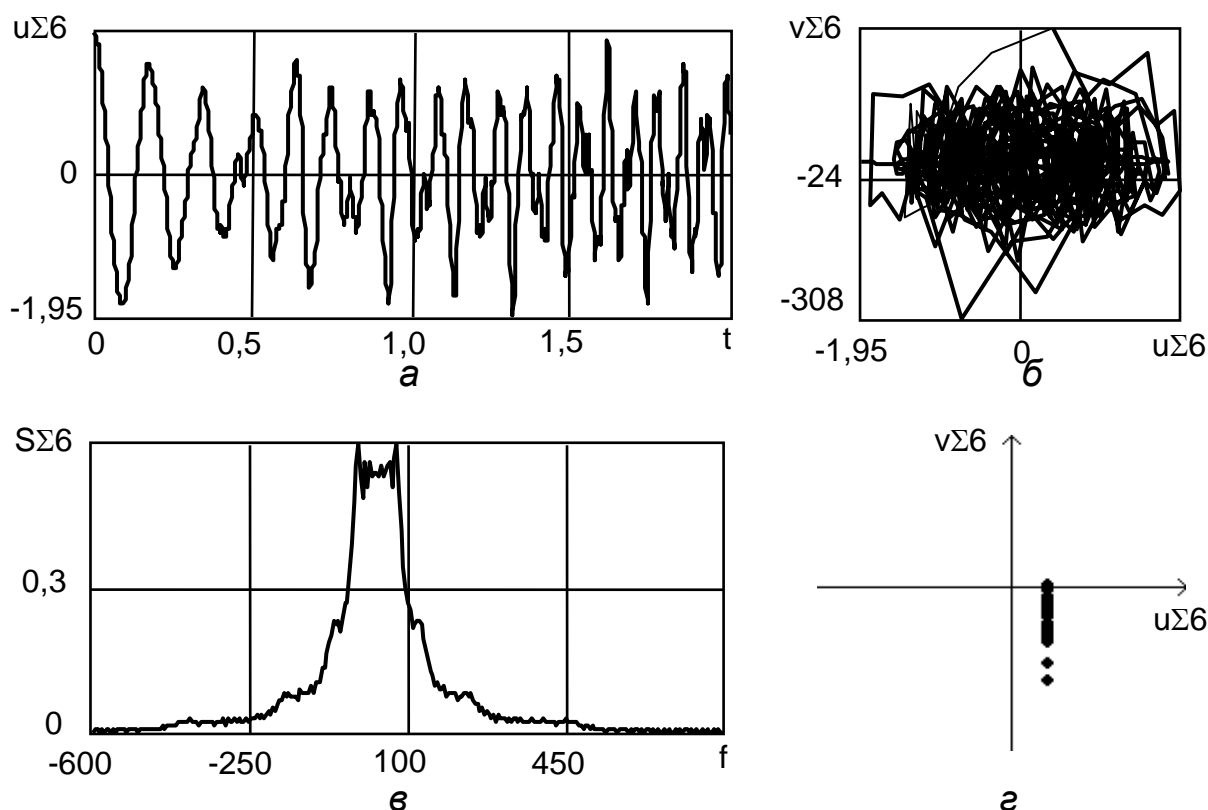


Рисунок 2.29 – Часова реалізація фрактального сигналу (сума шести складових) (а), фазовий портрет (б), спектр (в) і переріз Пуанкаре (г)

Сумарний спектр фрактального сигналу (див. рисунок 2.29, в) визначається переважно спектрами нульовою, першою і другою складових сигналу. У зв'язку із цим під час формування фрактального сигналу доцільно обмежитися кількістю складових  $N = 3 - 4$ , оскільки вплив п'ятої та шостої складових у сформованому фрактальному сигналі незначний.

Таким чином, використання перетворень фрактальних сигналів методами псевдофазової площини і перерізів Пуанкаре, а також спектральній теорії дало змогу якісно оцінити складність структури фрактальних сигналів на базі опорного ЛЧМ-коливання, а також з'ясувати механізм його побудови і провести аналіз динаміки його розвитку.

Розглянемо застосування фрактальної розмірності для кількісного аналізу складності фрактальних сигналів.

Результати розрахунків фрактальних розмірностей під час зміни кількості складових фрактального сигналу ( $n$ ) і величини коефіцієнта масштабування ( $k$ ) наведено на рисунку 2.30, а і б відповідно.

Аналіз графіків на рисунку 2.30 показує, що розмірності сигналу є дробовими, тобто сигнал фрактальний.

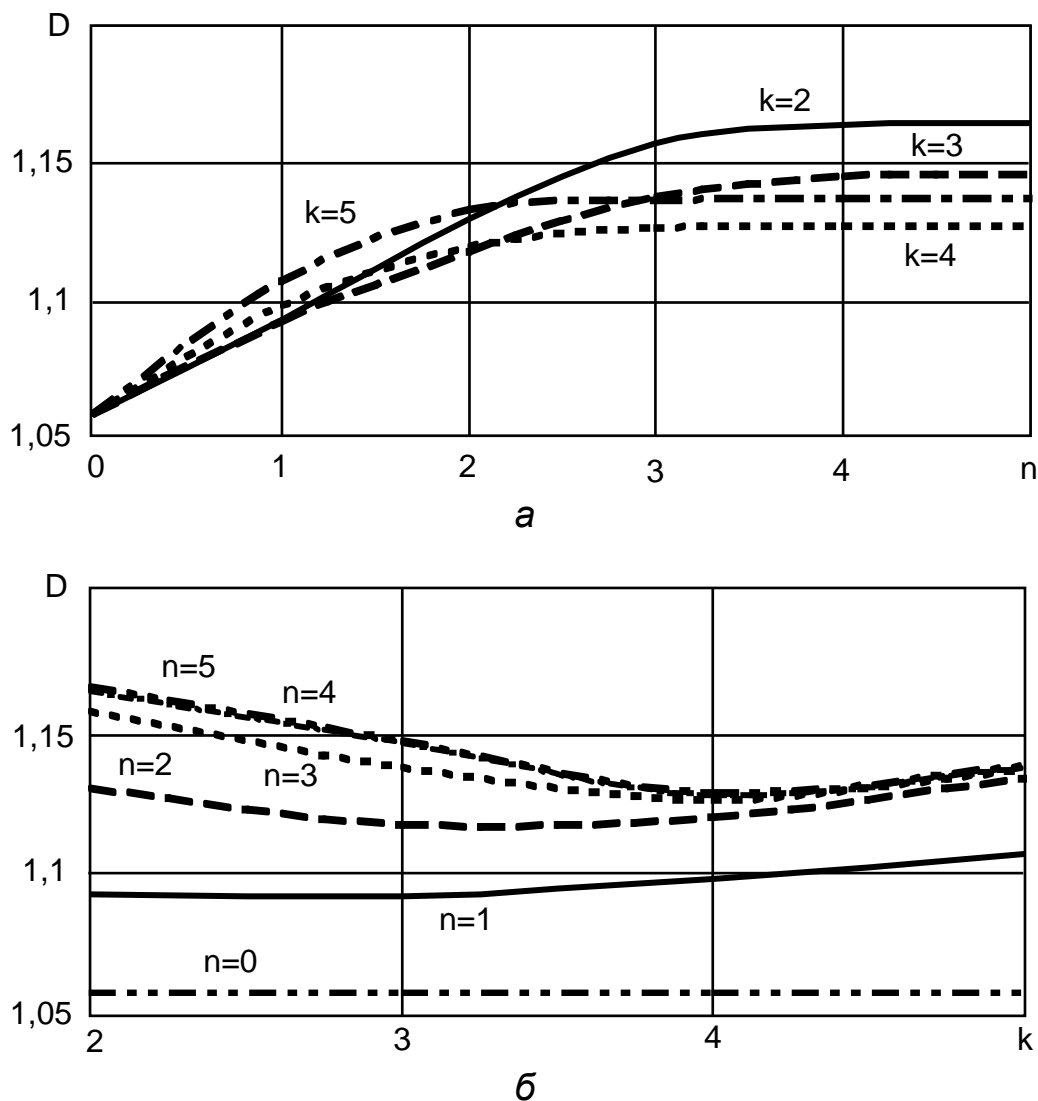


Рисунок 2.30 – Залежність фрактальних розмірностей від кількості складових (а) і коефіцієнта масштабування (б)

На рисунку 2.30, а також видно, що зміна параметра  $n$  від 0 до 5 приводить до збільшення фрактальної розмірності від  $D = 1,0581$  до  $D = 1,1454$ , якщо значення  $k = 2$  фіксовано. Збільшення фрактальної розмірності обумовлене збільшенням порізаності сигналу (ускладненням структури сигналу), якщо збільшується кількість його складових. Оскільки великі номери складових фрактального сигналу меншою мірою впливають на складність сигналу, то зі збільшенням параметра  $n$  фрактальна



розмірність змінюється не лінійно і, якщо  $n > 4$ , розмірність майже не змінюється. Основний вплив щодо ускладнення структури сигналу мають перші складові.

Аналіз даних рисунка 2.30, б показує, що зі збільшенням параметра  $k$  змінюється величина фрактальної розмірності, але характер зміни не завжди є зростальним, особливо це виявляється, якщо наявна велика кількість складових сигналу.

**Особливості побудови тіла невизначеності фрактального сигналу на основі опорного ЛЧМ-коливання.** Використовуючи методики побудови тіл невизначеності класичних сигналів і вираз (2.53), отримуємо вираз для тіла невизначеності фрактального сигналу

$$\rho(\tau, F) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{U_0}{k^n} \right)^2 \frac{\left| \sin \left\{ \pi \left[ \left( F + f_0 \frac{\tau}{\tau_0} k^n \right) (\tau_0 - |\tau|) \right] \right\} \right|}{\left| \pi \left[ \left( F + f_0 \frac{\tau}{\tau_0} k^n \right) (\tau_0 - |\tau|) \right] \right|} \left( 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \right), & \text{якщо } |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & \text{якщо } |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (2.54)$$

Загальний вигляд тіла невизначеності фрактального сигналу, отриманого на основі опорного ЛЧМ-коливання, відповідно до виразу (2.54) наведено на рисунку 2.31.

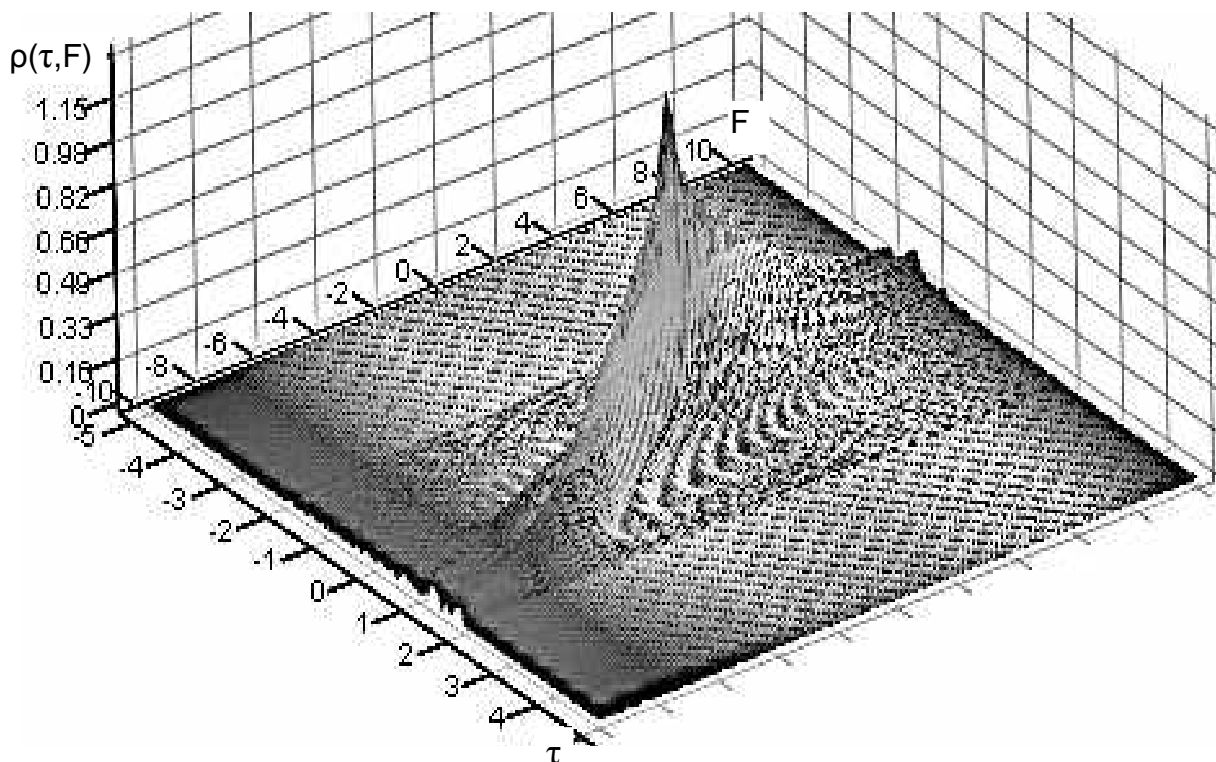


Рисунок 2.31 – Загальний вигляд тіла невизначеності фрактального сигналу

Для аналізу особливостей тіла невизначеності на рисунку 2.32, а наведено його проєкцію на площину «рівень тіла невизначеності  $\rho$  (вісь  $z$  на рисунку 2.31) – частота  $F$  (вісь  $x$  на рисунку 2.31)». Для порівняння на рисунку 2.32, б наведено проєкцію тіла невизначеності класичного (простого) ЛЧМ-коливання.

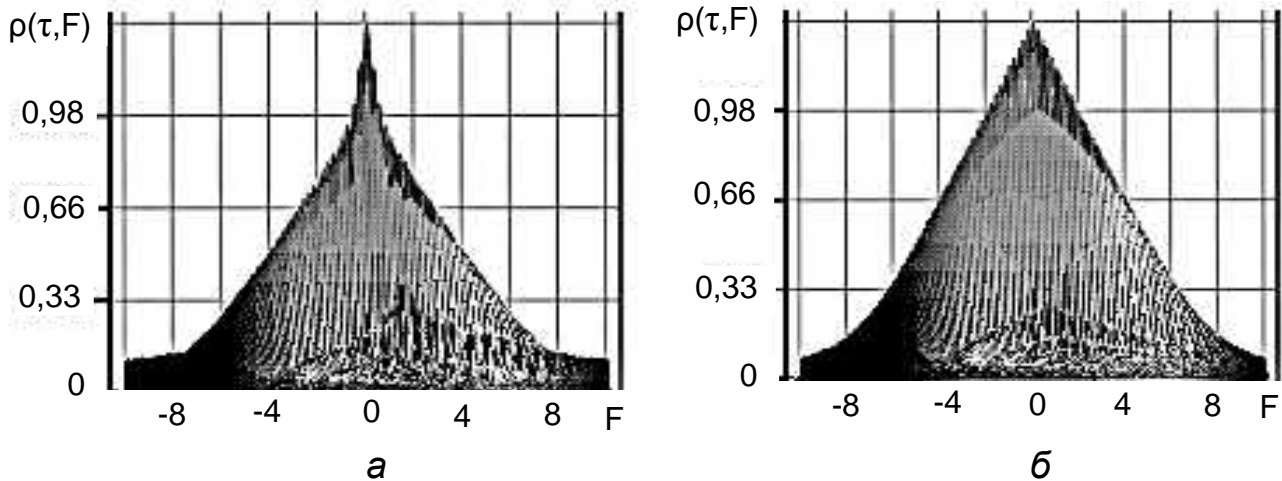


Рисунок 2.32 – Проєкції тіл невизначеності фрактального сигналу (а) і простого ЛЧМ-коливання (б)

На рисунках 2.31 і 2.32 видно, що тіло невизначеності фрактального сигналу та його проєкція відрізняються від подібних структур простого ЛЧМ-коливання. На рисунку 2.32 видно, що проєкція тіла невизначеності фрактального сигналу на половинному рівні (величина 0,66) приблизно в 1,5 раза вужча (спостерігається стиснення тіла) порівняно з проєкцією тіла невизначеності простого ЛЧМ-коливання, що свідчить про більший кутовий поворот тіла невизначеності фрактального сигналу.

Розглянемо переріз тіла невизначеності фрактального сигналу на половинному рівні, що характеризує область сильної кореляції

$$y_{1,2} = \sum_{n=0}^{N-1} -x \pm \frac{\sqrt{24}}{B(1-|x|)} \sqrt{1 - \frac{1}{2(1-|x|)}}, \text{ якщо } |x| \leq 0,5. \quad (2.55)$$

Переріз тіла невизначеності такого фрактального сигналу, які побудовано згідно з виразом (2.55), наведено на рисунку 2.33 суцільною лінією, якщо кількість складових фрактального сигналу  $N = 3$  і штрихпунктирною, якщо  $N = 4$ , а простого ЛЧМ-коливання – пунктирною лінією. Побудова перерізів проводилася за умови рівності девіації частоти простого ЛЧМ-коливання і опорного коливання фрактального сигналу, а також за рівності їх тривалості.

Аналіз перерізів тіл невизначеності показує, що за таких умов кут повороту перерізу тіла невизначеності фрактального сигналу більший, ніж кут повороту перерізу тіла невизначеності простого ЛЧМ-коливання.

Збільшення кількості складових, що беруть участь у формуванні фрактального сигналу за інших рівних умов, приводить до додаткового повороту перерізу тіла невизначеності фрактального сигналу.

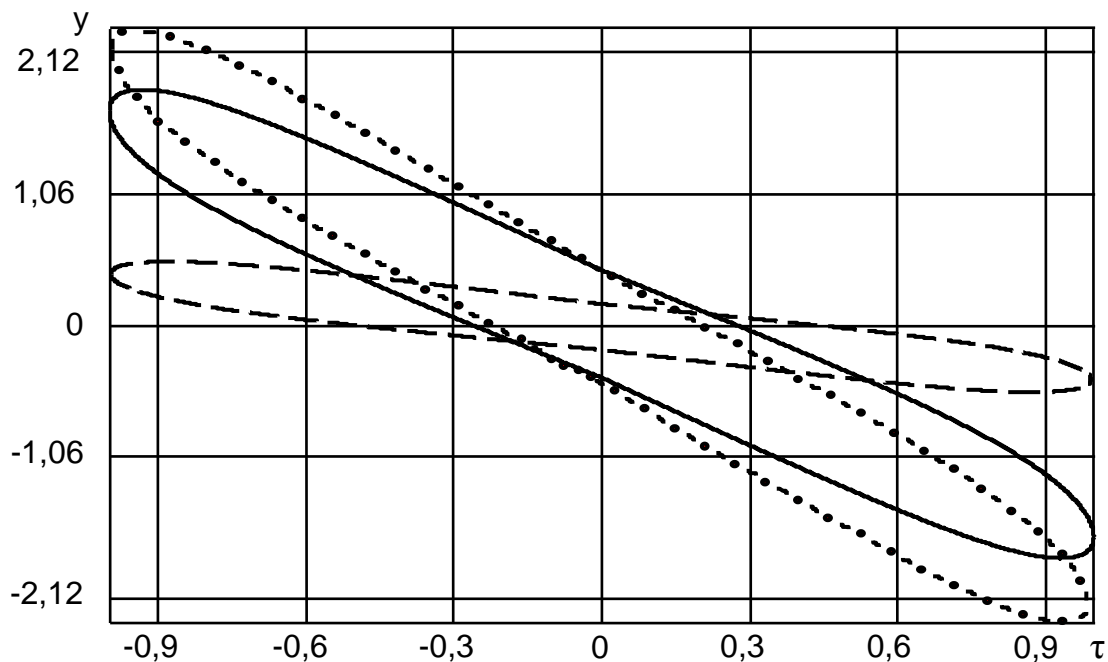


Рисунок 2.33 – Перерізи тіл невизначеності простого ЛЧМ-коливання (пунктирна лінія) і фрактальних сигналів (суцільна і штрихпунктирна лінії)

Таким чином, тіло невизначеності фрактального сигналу стискається на половинному рівні (величина 0,66) приблизно в 1,5 раза порівняно з тілом невизначеності простого ЛЧМ-коливання. Крім того, якщо змінити параметри фрактального сигналу, то можна змінювати положення його тіла невизначеності залежно від перешкодової обстановки.

### 2.2.2.3 Застосування КФМ-коливання під час формування фрактального сигналу

Структура фрактального сигналу, що формується на основі опорного кодо-фазо-маніпульованого (КФМ) коливання, визначається вибором допоміжної (опорної) кодової послідовності та її параметрами, а також вибором параметрів коливань внутрішньо-імпульсного заповнення. Для опорних послідовностей можуть вибиратися кодові послідовності Баркера,  $m$ -послідовність, сигнали, що використовують коди символів Лежандра (коди Пелі – Плоткіна) та ін. Для коливань внутрішньо-імпульсного заповнення можна застосовувати прості (синусоїдальні) коливання, а також коливання з будь-яким законом частотної модуляції, наприклад ЛЧМ-коливання. Розглянемо формування фрактального сигналу на основі кодової послідовності Баркера із кількістю дискрет  $m = 5$  і з внутрішньо-імпульсним заповненням у вигляді простих синусоїдальних коливань [52].

Для прикладу розглянемо візуальне подання п'ятизнакової кодової послідовності Баркера (рисунок 2.34, а), що має властивість ізоморфізму, яка, зокрема, характеризує взаємно однозначне відображення елементів (дискрет) послідовності на себе. У цьому випадку кожен елемент послідовності є еквівалентним самому собі, тобто має властивість рефлексивності [67]. Надалі таку кодову послідовність  $Y_0(t)$  будемо називати першою (опорною)  $\{\bar{z}_{0m}\}$  і поставимо їй у відповідність послідовність  $\{\bar{a}_m\}$ , тобто  $\{\bar{a}_m\} = \{\bar{z}_{0m}\}$ .

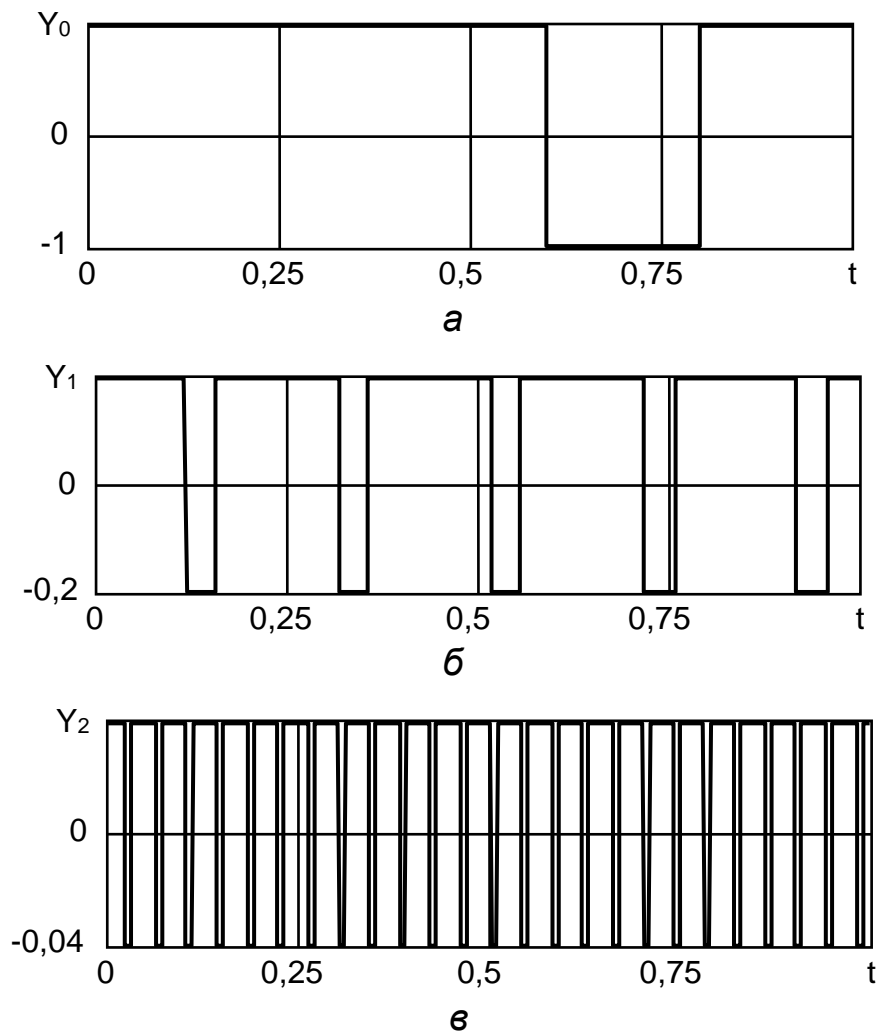


Рисунок 2.34 – Перша (а), друга (б) і третя (в) гомеоморфні п'ятизнакові кодові послідовності Баркера ( $m = 5$ )

На рисунку 2.34, а видно, що послідовності відповідає код  $\{\bar{z}_{0m}\} = \{111-11\}$ , амплітуда  $U_0 = 1$ , тривалість  $\tau = 1$  і тривалість однієї дискрети  $\tau_0 = 0,2$ . Для скорочення числових розрахунків і зручності аналізу розглянемо кодову послідовність фрактального сигналу на прикладі трьох окремих кодових послідовностей – першої і двох гомеоморфних [67].

На рисунку 2.34, б і в наведено другу і третю гомеоморфні послідовності відповідно, для яких характерна гіперболічність. У такому випадку гіперболічність припускає стиснення кодової послідовності за

амплітудою і розтягування за кількістю дискрет відповідно до масштабного коефіцієнта  $k = 5$  і кількості послідовностей  $n = 0, 1, 2$ .

Таким чином, застосування гомоморфізму в поєднанні з гіперболічністю параметрів кодової послідовності дає змогу подати зв'язок першої та гомеоморфних послідовностей узагальненою функцією [67]

$$F_n(x) = \frac{F_0(U_0, k^n \bar{z}_{0m})}{k^n}. \quad (2.56)$$

Узагальнена функція (2.56) є фрактальною, оскільки має властивості подібності та масштабної інваріантності, і дає змогу сформувати фрактальний сигнал на основі вказаних вище першої та гомеоморфних КФМ-послідовностей і з використанням простих (синусоїдальних) коливань.

Узагальнену функцію для внутрішньо-імпульсного заповнення кодової послідовності фрактального сигналу можна записати подібно до функції (2.56)

$$u_s(t) = \frac{u_{s0}(U_{s0}, k^n T^{-1})}{k^n}, \quad (2.57)$$

де  $U_{s0}, T$  – амплітуда і період першої складової заповнення відповідно;  $t$  – поточний час.

Вираз для кодової послідовності фрактального сигналу можна записати у вигляді [67]

$$Y(t,n) = \sum_{n=0}^N y(t,n), \quad (2.58)$$

де

$$y(t,n) = \begin{cases} \frac{U}{k^n}, & \text{якщо } 0 \leq \frac{t}{k^n} \leq \frac{0,6}{k^n}, \\ \frac{(-U)}{k^n}, & \text{якщо } \frac{0,6}{k^n} < \frac{t}{k^n} \leq \frac{0,8}{k^n}, \\ \frac{U}{k^n}, & \text{якщо } \frac{0,8}{k^n} < \frac{t}{k^n} \leq \frac{1}{k^n}, \\ 0, & \text{якщо } \frac{t}{k^n} \geq \frac{1}{k^n}. \end{cases} \quad (2.59)$$

На рис. 2.35 наведено кодову послідовність фрактального сигналу, яку отримано відповідно до виразу (2.58) для  $n = 0, 1, 2$  ( $N = 3$ ).

На рисунку 2.35 добре видно гомеоморфізм і гіперболічність кодової послідовності фрактального сигналу. На основі узагальнених функцій

(2.56), (2.57) і виразу (2.58) побудуємо фрактальний сигнал з використанням п'ятизнакового опорного КФМ-коливання [67]

$$u_{\text{фс}}(t) = \sum_{n=0}^N y(t,n) \frac{U_{s0}}{k^n} \sin\left(\frac{2\pi k^n t}{T}\right). \quad (2.60)$$

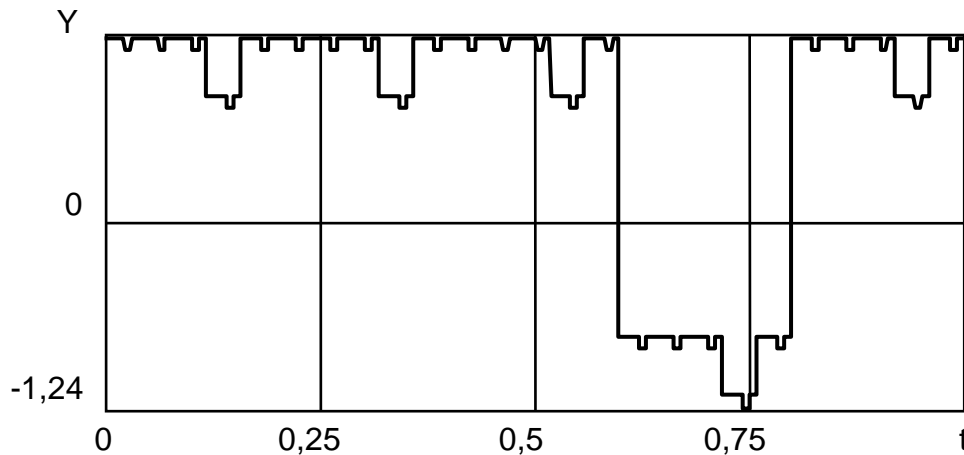


Рисунок 2.35 – Кодова послідовність фрактального сигналу

Використовуючи вираз (2.60), проведемо числове моделювання фрактального сигналу на основі п'ятизнакового кода Баркера. Скориставшись математичними моделями окремих складових (кодових послідовностей і складових внутрішньо-імпульсного заповнення) та фрактального сигналу в цілому, що описується виразом (2.60), проаналізуємо сигнал у часовій області, його фазовий портрет і спектр.

Розрахунки проводилися з використанням комп'ютерної програми Mathcad, якщо амплітуди дискрет першої послідовності та синусоїдальної складової були однаковими й дорівнювали  $U_0 = U_s = 1$ , тривалість сигналу  $\tau = 1$ , тривалість однієї дискрети  $\tau_0 = 0,2$ , кількість складових  $N = 3$  ( $n = 0, 1, 2$ ). Коефіцієнт масштабування  $k$  вибирався рівним кількості дискрет коду  $m = 5$ . Розрахунки проводилися для періоду синусоїдального коливання  $T = 0,2$ .

На рисунку 2.36 наведено часову реалізацію, фазовий портрет і спектр фрактального сигналу.

Аналіз рисунка 2.36, а показує, що, якщо період синусоїдального коливання  $T = 0,2$  однаковий або цілочислово кратний тривалості дискрети  $\tau_0$ , у часовій реалізації фрактального сигналу спостерігається п'ятизнакова кодова послідовність Баркера.

На рисунку 2.36, а також видно, що на часовій реалізації фрактального сигналу можна визначити тривалість дискрети і точки зміни фаз (у цьому випадку  $t = 0,6$  і  $0,8$ ), що є недоліком такого сигналу. Але загалом унаслідок формування сигналу на основі опорного КФМ-коливання наявна його хаотичність.

Структура фазового портрета фрактального сигналу (див. рисунок 2.36, б) характеризується порушенням гладкості фазових орбіт (траєкторій) і наявністю в них різких зламів, що обумовлено, очевидно, фазовою маніпуляцією синусоїдальних коливань, що заповнюють кодові послідовності.

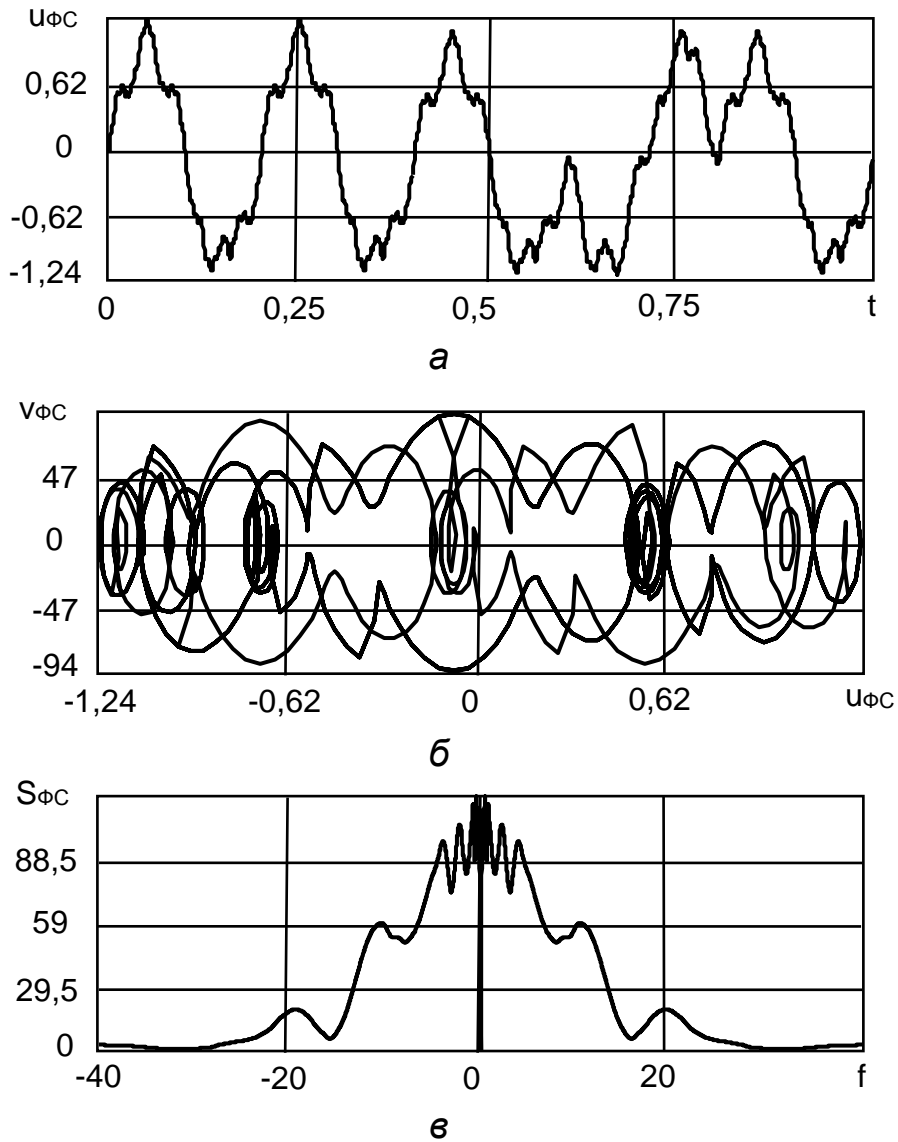


Рисунок 2.36 – Часова реалізація (а), фазовий портрет (б) і спектр (в) фрактального сигналу

Спектр фрактального сигналу, що наведено на рисунку 2.36, в, нормований до величини  $10^{-14}$  і характеризується наявністю резонансних сплесків спектральних складових, які розташовуються на «п'єдесталі».

#### 2.2.2.4 Формування КФМ фрактального сигналу на основі послідовності Морсе – Туе

Як зазначалося вище, в основі формування структури фрактального сигналу лежить гіпотеза самоподібності, що допускає нескінченну серію

вкладень одне в одне однакових (гомеоморфних) об'єктів [68]. При цьому об'єкт зменшується тільки в розмірі, але залишається подібним до початкового об'єкта. Під час формування фрактального сигналу такими об'єктами слід розуміти окремі детерміновані коливання (наприклад, прості (синусоїдальні) сигнали, а також сигнали з кутовою модуляцією) гомеоморфні опорному (базовому) коливанню.

Під час побудови фрактального сигналу на основі послідовності Морсе – Туе будемо використовувати правило, що ґрунтується на властивостях фрактальних недиференційовних функцій, що враховує самоподібність, а також гіперболічність опорних коливань. Це правило визначається за формулою (2.42).

Розглянемо методику отримання опорної (нульової) послідовності Морсе – Туе (номер послідовності  $N = 0$ ). Для отримання 16-символьної послідовності Морсе – Туе запишемо відповідну їй дельта-функцію [68]

$$\delta_m = (-1-11111-1-111-1-1-1-111). \quad (2.61)$$

ґратчаста функція  $z_m$  розраховується за формулою

$$z_m = U_0 \delta_m \quad (2.62)$$

за такими параметрами  $m = 1, \dots, 16$ ;  $U_0 = 1$ .

На рисунку 2.37 наведено ґратчасту функцію, що відповідає послідовності Морсе – Туе, у часі, якщо  $t$  змінюється від 0 до 1 з кроком  $\Delta t = 0,0625$ .

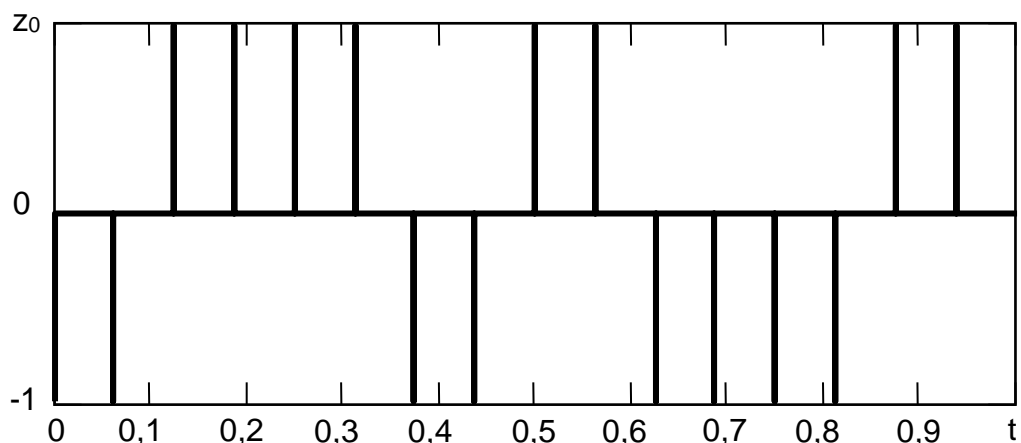


Рисунок 2.37 – ґратчаста функція, що відповідає послідовності Морсе – Туе зміни фази

Для побудови опорної послідовності Морсе – Туе скористаємося також функцією одиничного стрибка

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0, \\ 1, & \text{якщо } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.63)$$



З урахуванням виразів (2.62) і (2.63) і методики, що наведена в [69], запишемо вираз для нормованої обвідної опорної послідовності Морсе – Туе [68]

$$Y_0(t) = \sum_{m=1}^M z_m [F(t - (m-1)\tau_0) - F(t - m\tau_0)]. \quad (2.64)$$

У виразі (2.64)  $\tau_0 = 0,005$  – часова затримка, а амплітуда опорної (нульової) складової послідовності Морсе – Туе дорівнює  $Y_0(t) = 1$ . Опорну послідовність Морсе – Туе, що отримана за виразом (2.64), наведено на рисунку 2.38.

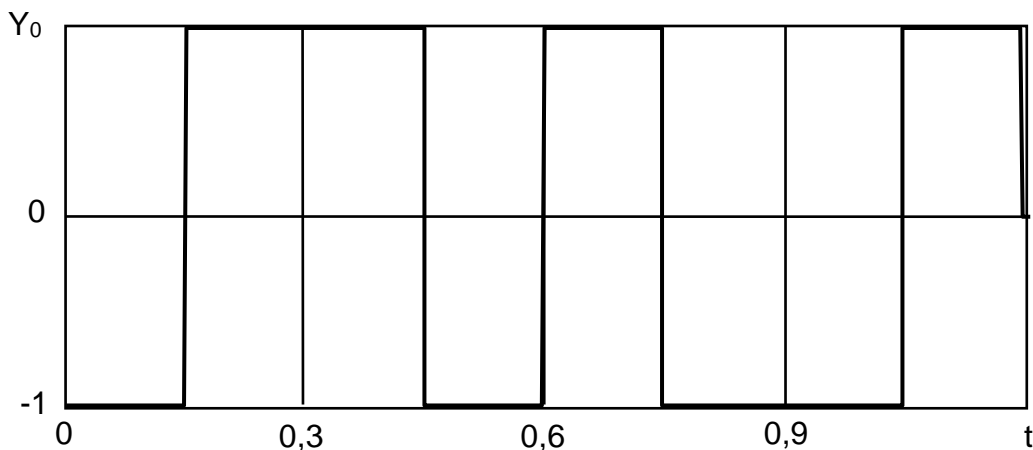


Рисунок 2.38 – Послідовність Морсе – Туе зміни фази нульової складової фрактального сигналу

На рисунку 2.39 наведено нульову складову фрактального сигналу, яка отримана відповідно до опорної (нульової) послідовності Морсе – Туе зміни фази і описується виразом [68]

$$U_{\Sigma}(t) = \sum_{n=0}^N \frac{Y_n(t,a)}{2^n} \sin\left(\frac{2\pi 2^n t}{T_0}\right), \quad (2.65)$$

якщо  $N = 0$  і період синусоїдального коливання, що заповнює послідовність,  $T_0 = 0,019$ .

У виразі (2.65)  $Y_n(t,a)$  описує код зміни фази  $n$ -ї складової фрактального сигналу.

Як коди змін фаз першої та другої гомеоморфних послідовностей Морсе – Туе візьмемо послідовності, що відрізняються від опорної відповідно амплітудами  $Y_1(t) = 0,5$  і  $Y_2(t) = 0,25$ . Вигляд кодів змін фаз першої та другої гомеоморфних послідовностей Морсе – Туе буде такими самими, як наведено на рисунку 2.38, будуть змінюватися тільки амплітуди кодів.

На рисунку 2.40, а і б наведено відповідно першу і другу гомеоморфні складові фрактального сигналу, що отримані з використанням першої та

другої послідовності Морсе – Туе зміни фази, які подаються за допомогою виразу (2.65).

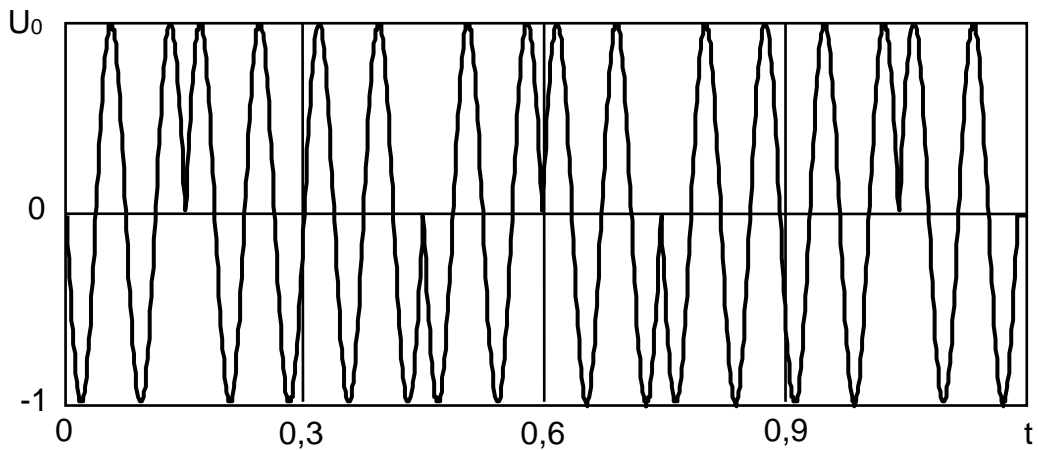


Рисунок 2.39 – Нульова складова фрактального сигналу, що отримана відповідно до нульової послідовності Морсе – Туе зміни фази

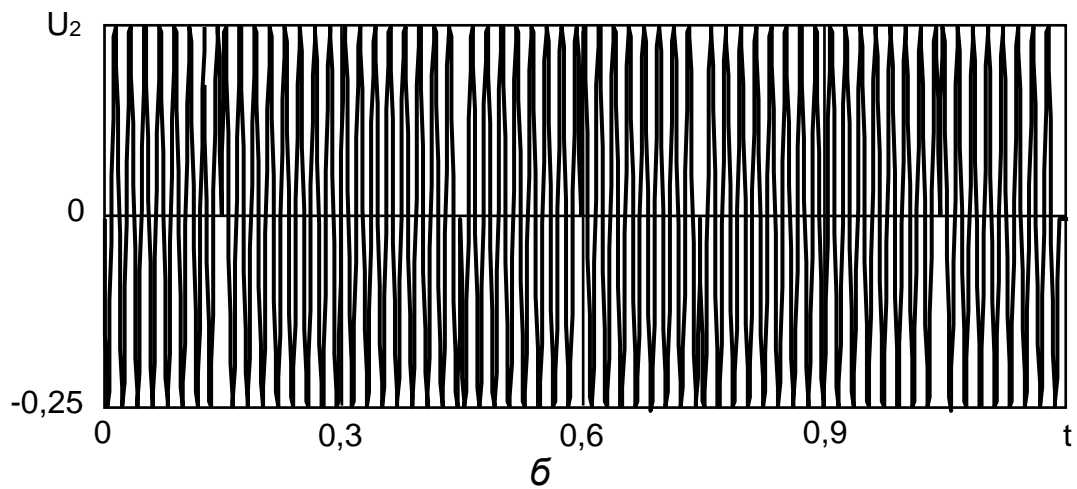
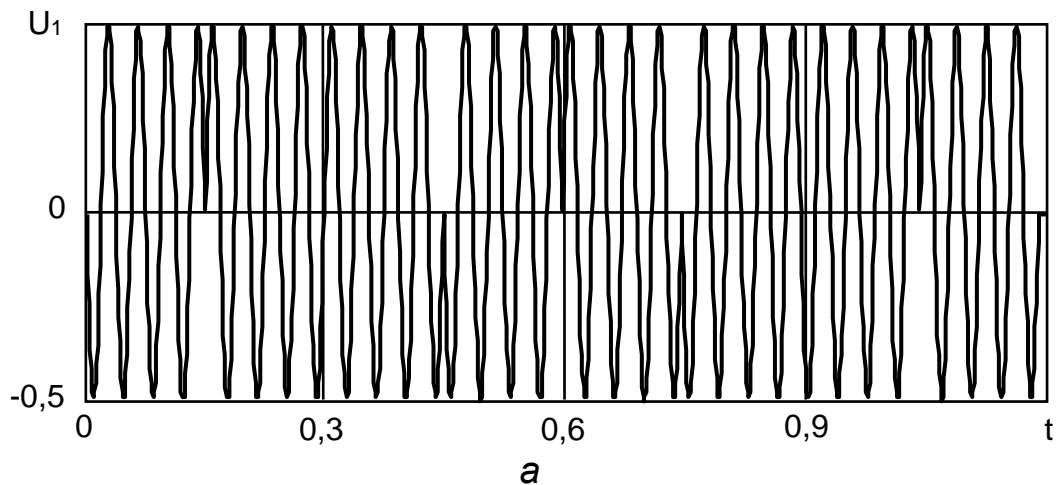


Рисунок 2.40 – Перша (а) і друга (б) складові фрактального сигналу, що отримані відповідно до першої та другої послідовностей Морсе – Туе зміни фази

Визначимо суму опорної та двох гомеоморфних послідовностей Морсе – Туе відповідно до виразу

$$Y_{\Sigma 3}(t) = Y_0(t) + Y_1(t) + Y_2(t)$$

і відповідну їм суму трьох складових фрактального сигналу згідно з виразом

$$U_{\Sigma 3}(t) = U_0(t) + U_1(t) + U_2(t).$$

Як видно на рисунках 2.39 і 2.40, амплітуди складових фрактального сигналу зменшуються у два рази відносно одна до одної, водночас частоти складових фрактального сигналу збільшуються у два рази, тобто наявні стиснення одних параметрів і розширення інших (властивість гіперболічності).

Вигляд сумарного коду послідовності Морсе – Туе зміни фази буде таким самим, як наведено на рисунку 2.38, буде змінено тільки амплітуду коду, яка становитиме  $Y_{\Sigma 3}(t) = 1,75$  [68].

На рисунку 2.41 наведено фрактальний сигнал, що має три складові ( $N = 2$ ), на основі послідовності Морсе – Туе зміни фази.

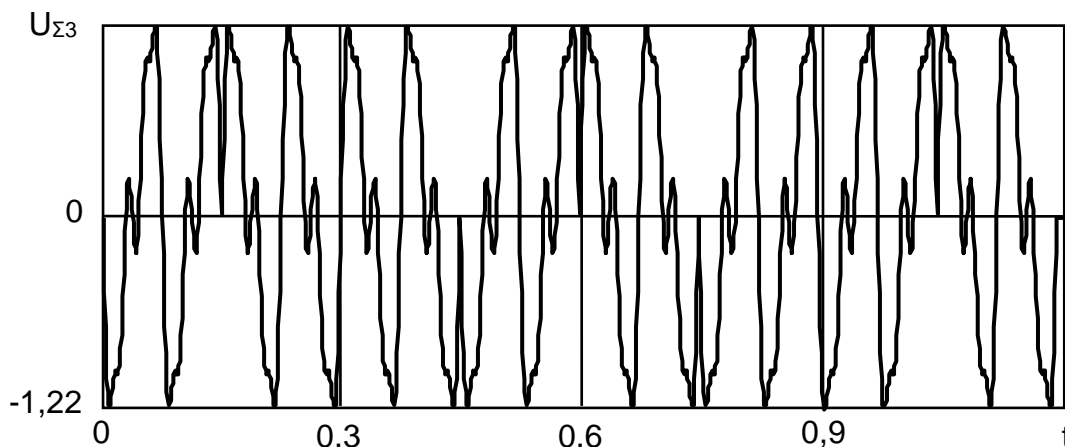


Рисунок 2.41 – Фрактальний сигнал, що отримано на основі послідовності Морсе – Туе зміни фази

На рисунку 2.41 видно, що спостерігається ускладнення форми сигналу в часовій області порівняно з опорною (нульовою) складовою, а якщо збільшувати кількість складових, то складність сигналу буде ще збільшуватися, що можна використовувати для розширення спектра сигналу.

На рисунку 2.42, а і б наведено відповідно фазові портрети сумарної послідовності Морсе – Туе зміни фази і сумарного фрактального сигналу, що побудований на основі такої послідовності. На рисунку 2.42, а наведено функцію  $Y_{\Sigma 3p}(t) = Y_{\Sigma 3}(t + T)$ , що зрушена на величину затримки

$T = 0,01$ , а на рисунку 2.42, б – функцію  $U_{\Sigma 3p}(t)$ , що є похідною сумарного фрактального сигналу  $U_{\Sigma 3}(t)$ .

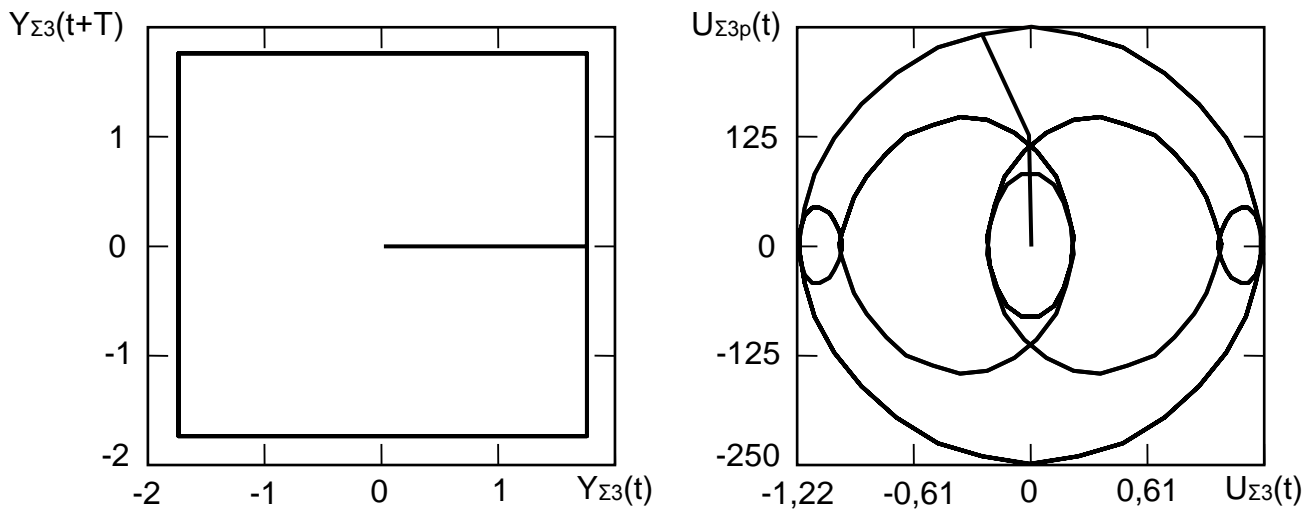


Рисунок 2.42 – Фазові портрети послідовності Морсе – Туе зміни фази (а) і фрактального сигналу (б)

На рисунку 2.42, б видно, що спостерігається дія окремих складових фрактального сигналу одна на одну. Унаслідок такої взаємодії виникає складний періодичний рух, якому на фазовій площині відповідає траєкторія вкладених одна в одну фазових портретів окремих складових фрактального сигналу.

На рисунку 2.43 наведено спектр сумарної послідовності Морсе – Туе зміни фази  $S_{\Sigma 3}(f)$ , що отримано за допомогою Фур'є-перетворення.

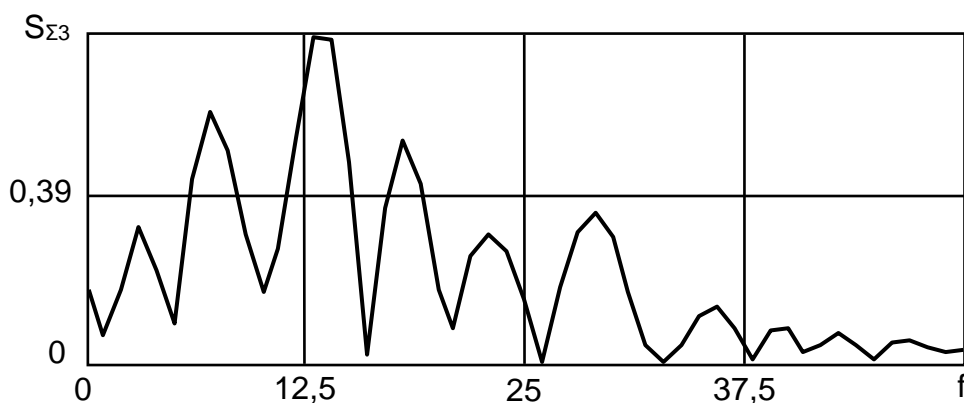


Рисунок 2.43 – Спектр сумарної послідовності Морсе – Туе зміни фази

Як видно на рисунку 2.43, особливістю спектра є наявність «п'єдестала» (відірваності спектра від нульового рівня). Багатомодовість спектра і наявність «п'єдестала» є ознаками хаотичності сумарної послідовності Морсе – Туе зміни фази. Така поведінка фрактального сигналу в часовій і частотній областях може бути використано для моделювання складних сигналів, відбитих від земної поверхні [68].

Таким чином, з використанням послідовності Морсе – Туе можна здійснити формування фрактальних сигналів. Структура таких сигналів є складною в часовій області, а аналіз форми фазових портретів показав, що в сумарному фрактальному сигналі спостерігається дія окремих складових одна на одну, унаслідок якої виникає складний періодичний рух.

### 2.2.2.5 Фрактальні сигнали в теорії коливань і теорії хаосу

Стисло розглянемо місце фрактальних сигналів у теорії коливань і теорії хаосу.

Квазіперіодичне коливання є сумою періодичних коливань, частота кожного з яких утворюється шляхом складання і віднімання базових частот, вибраних із деякої кінцевої множини. Зауважимо, що вказані базові частоти визначаються неоднозначно, але задано їх кількість  $p$ . Квазіперіодичний розв'язок з  $p$  базовими частотами називається  $p$ -періодним. Періодичне коливання є квазіперіодичним зі значенням  $p = 1$ .

Спектр квазіперіодичного сигналу містить кількість спектральних складових, що дорівнює кількості частот, які використовуються під час його формування [29]. Як було наведено вище, форма спектра фрактального сигналу близька до форми спектра квазіперіодичного сигналу. Проте квазіперіодичний сигнал не має властивості гіперболічності, оскільки змінюються тільки частоти окремих складових сумарного сигналу, інші параметри (наприклад, амплітуда) не змінюються. Крім того, квазіперіодичний сигнал не чутливий до зміни початкових умов. Чутливість до зміни початкових умов проявляють хаотичні сигнали.

Загальноприйнятого визначення хаосу не існує. Як зазначалося в розділі 1, у контексті фізики під детермінованим хаосом мається на увазі нерегулярний або хаотичний рух, який породжено нелінійними системами, для яких динамічні закони визначають еволюцію в часі стан системи за відомою передісторією [24]. Інакше кажучи, хаотичним можна назвати поведінку системи в сталому стані, який є локалізованим в обмеженій області і не є ні положенням рівноваги, ні періодичним або квазіперіодичним. Хаотична поведінка виникає не через зовнішні джерела шуму, не через нескінченну кількість ступенів свободи і не через невизначеність, пов'язану з квантовою механікою [70]. Необхідно розрізняти так звані випадкові та хаотичні коливання.

Перший термін належить до коливань, математичним описом яких є випадкова функція часу. Значення такого коливання може бути передбачено лише з деякою вірогідністю, меншою за одиницю. Для характеристики й аналізу випадкових коливань застосовується статистичний підхід. Основними характеристиками випадкових коливань є: закон розподілу вірогідності та спектральний розподіл потужності сигналу [71].

Хаотичні коливання, на відміну від випадкових, виникають як нерегульовані рухи в абсолютно детермінованих системах [29]. Ці рухи

можуть виникати за умови відсутності зовнішніх шумів і повністю визначаються властивостями самої детермінованої динамічної системи.

Спектр хаотичного коливання не може розглядатися таким, що складається виключно з дискретних частотних складових, навпаки, він є безперервним і широкосмуговим [70]. Такий подібний шуму спектр є невід'ємною властивістю хаотичних систем.

Іншою властивістю хаотичних систем є висока чутливість до зміни початкових умов [29]. Це означає, що якщо задані дві різні початкові точки, що розташовуються одна відносно одної на скільки завгодно близькій відстані, то траєкторії, що виходять із цих точок, розходяться (з деякою швидкістю, яка визначається характеристиками системи) доти, доки вони не перестануть бути корельованими (відповідно до будь-якого практичного критерію кореляції). На практиці ніколи не можна точно задати початковий стан будь-якої системи.

Зазвичай стан системи є відомим лише з деякою допустимою похибкою  $\eta > 0$ . Це означає, що якщо дві початкові умови  $x_0$  і  $\hat{x}_0$  розміщені одна від одної на відстань меншу за  $\eta$ , то розрізнити їх неможливо. Проте після закінчення кінцевого часу розв'язання функцій  $f_t(x_0)$  і  $f_t(\hat{x}_0)$  будуть відрізнятися одна від одної і перестануть бути пов'язаними між собою. Із цього випливає те, що незалежно від того, наскільки точно відома початкова умова, довготривала поведінка хаотичної системи ніколи не може бути прогнозованою [35].

Непередбачуваність поведінки – це та властивість хаотичних систем, що дає змогу вважати їх детермінованими системами, характер дій яких випадковий.

Таким чином, ознаками хаотичних коливань є [24, 29]:

- чутливість до зміни початкових умов (автокореляційна функція швидко спадає, найчастіше експоненціально);
- широкий спектр руху, що виникає на одній частоті (у спектрі потужності спостерігається широкосмуговий шум на низьких частотах);
- фрактальні властивості руху у фазовому просторі, які указують на наявність дивного атрактора (переріз Пуанкаре складається з точок, що заповнюють простір);
- складність регулярних рухів зростає під час зміни деякого параметра, наприклад подвоєння періоду (сигнал має вигляд випадкового);
- перехідні або переміжні хаотичні рухи, неперіодичні сплески нерегулярного руху (переміжність) або початковий нерегульований рух, який, врешті-решт, спрямований до регулярного.

Спектр хаотичного сигналу має широкий «п'єдестал» в області низьких частот [24, 29], чого майже немає у фрактального сигналу з невеликою кількістю складових. Проте фрактальний сигнал, так само як і хаотичний сигнал, має вигляд випадкового в часовій області.

Проведені дослідження дали змогу визначити, що фрактальні сигнали займають проміжне місце між квазіперіодичними і хаотичними сигналами, оскільки спектр фрактального сигналу близький до спектра квазіперіодичного сигналу, а в часовій області фрактальний сигнал, так само як і хаотичний сигнал, має вигляд випадкового.

Крім того, фрактальний сигнал чутливий до зміни початкових умов, а під час дослідження його еволюції на фазовій площині виявляються ознаки існування дивного атрактора, що характерно для хаотичного сигналу.

### 2.2.3 Основи оброблення фрактальних сигналів

Для оброблення фрактальних сигналів можна використовувати класичні методи фільтрового оброблення.

#### 2.2.3.1 Фільтрація фрактального сигналу, що формується на основі опорного синусоїдального коливання

Розглянемо багатоканальну фільтрацію фрактального сигналу, що формується на основі опорного синусоїдального коливання з використанням спектрального методу. Фрактальний сигнал має спектр [52]

$$S_{\text{фс}}(f) = \sum_{n=0}^N \frac{U_0}{k^n} e^{-j\pi k^n \tau} \frac{e^{j2\pi k^n \tau} - 1}{j2\pi k^n}. \quad (2.66)$$

Передавальна функція багатоканального фільтра фрактального сигналу має вигляд [52]

$$K_{\text{фс}}(f) = \sum_{n=0}^N \frac{U_0}{k^n} e^{j\pi k^n \tau} \frac{1 - e^{j2\pi k^n \tau}}{j2\pi k^n}. \quad (2.67)$$

На рисунку 2.44, а і б наведено спектр і передавальна функція багатоканального фільтра фрактального сигналу, що формується на основі опорного синусоїдального коливання, які побудовано відповідно до виразів (2.66) і (2.67), якщо  $N = 2$ .

Як видно на рисунку 2.44, спектр фрактального сигналу, сформованого з використанням першої і двох гомеоморфних складових, і передавальна характеристика фільтра такого сигналу однакові.

Сигнал на виході багатоканального фільтра для фрактального сигналу, що сформований за допомогою трьох складових з амплітудами  $U_0 = 1$ ,  $U_1 = 0,5$  і  $U_2 = 0,25$ , наведено на рисунку 2.45, а. На рисунку 2.45, б також наведено сигнал на виході фільтра для простого (не фрактального) синусоїдального сигналу з амплітудою  $U = 1,75$ .

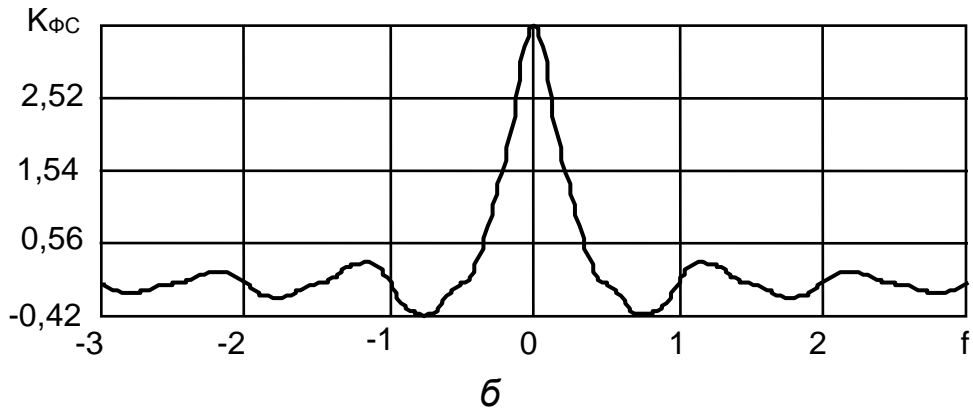
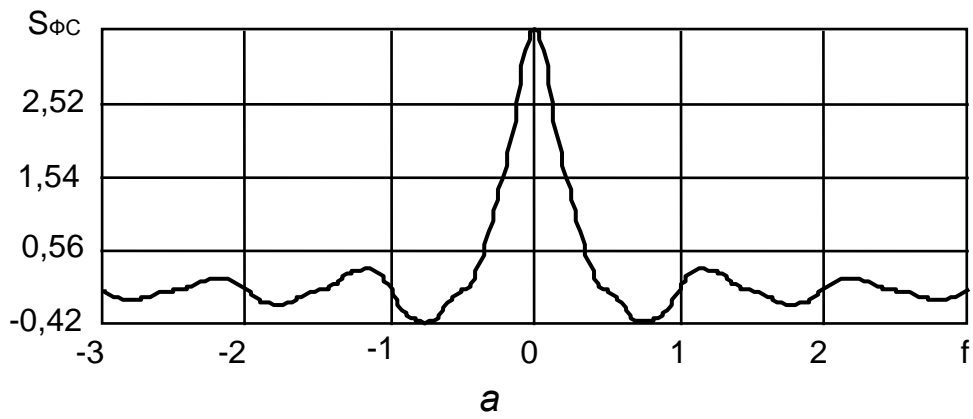


Рисунок 2.44 – Спектр (а) і передавальна функція фільтра (б) фрактального сигналу

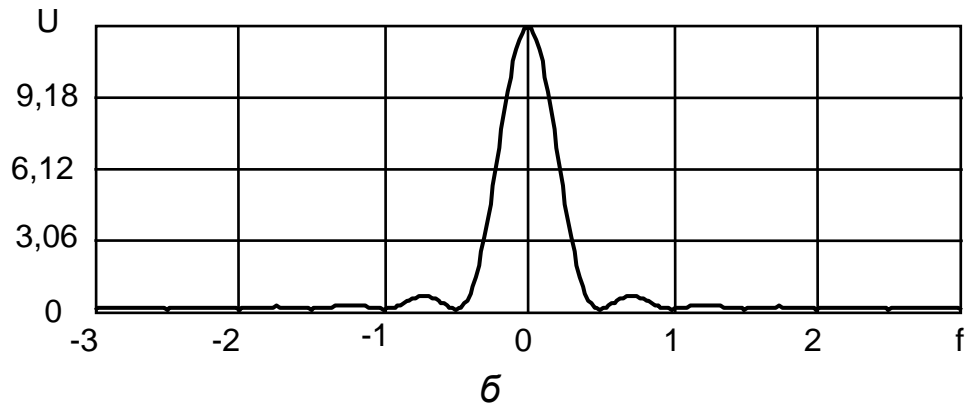
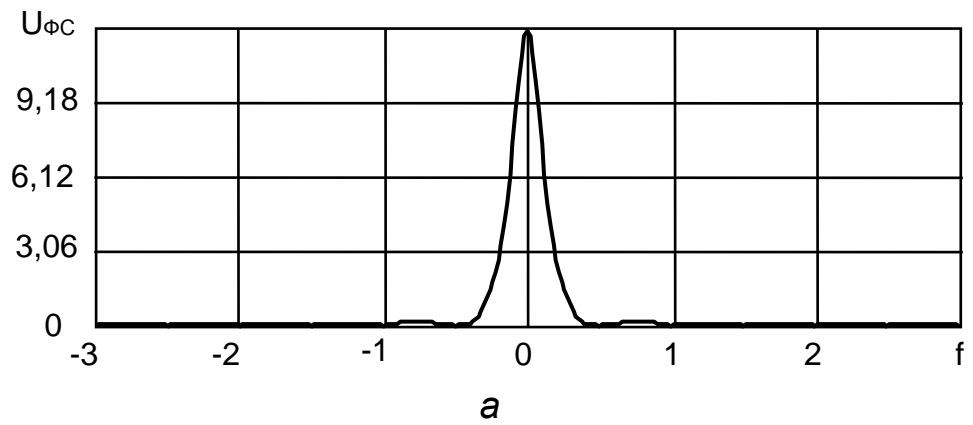


Рисунок 2.45 – Сигнали на виході багатоканального фільтра фрактального сигналу (а) і фільтра простого синусоїдального сигналу (б)



Порівняння рисунків 2.45, а і б показує, що фрактальний сигнал на виході багатоканального фільтра звужується в 1,5 раза, крім того, рівень перших бічних пелюсток фрактального сигналу нижчий порівняно з фільтрацією простого синусоїдального сигналу (рисунок 2.46) [72].

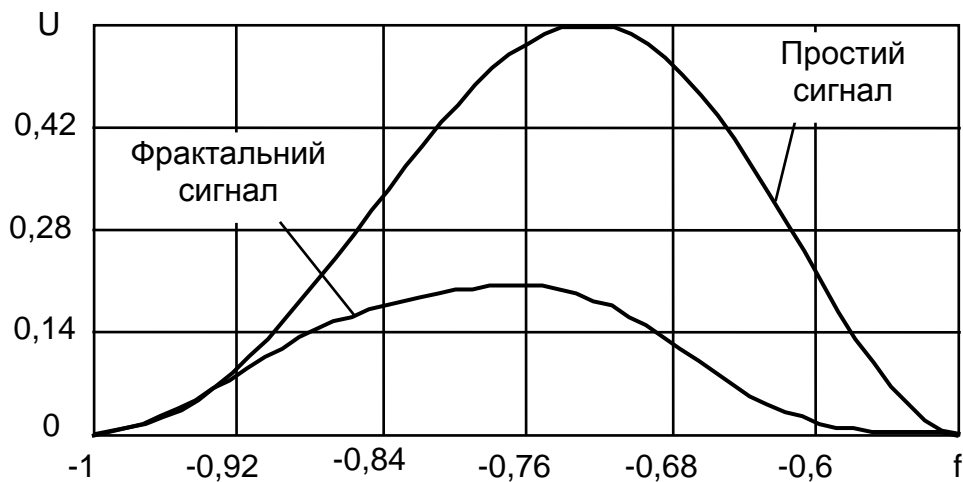


Рисунок 2.46 – До визначення рівня бічних пелюсток сигналів на виході фільтрів

Таким чином, результати фільтрації фрактального сигналу показали, що сигнал на виході фільтра звужується приблизно в 1,5 раза порівняно з фільтрацією простого синусоїдального сигналу, а рівень перших бічних пелюсток фрактального сигналу є нижчим, тобто фрактальний сигнал має кращу роздільну здатність. Аналіз виразу (2.67) показує, що фільтр фрактального сигналу має бути багатоканальним (кількість каналів дорівнює  $N + 1$ ).

### 2.2.3.2 Багатоканальна фільтрація фрактального сигналу, що формується з використанням опорного ЛЧМ-коливання

Розглянемо фільтрове оброблення фрактального сигналу, що формується на основі опорного ЛЧМ-коливання. Відомо, що стиснення широкосмугових сигналів, до яких належать класичний і фрактальний сигнали, є найбільш ефективним завдяки отриманню максимально можливого відношення сигнал / шум за результатами фільтрації. Як відомо, імпульсна характеристика  $H(t)$  фільтра ЛЧМ-сигналу  $U_1(t)$  відрізняється від функції, що описує цей сигнал, тільки постійним множником  $C$ , деякою часовою затримкою  $t_0$  і знаком часу  $t$ . З огляду на це можна записати вираз для імпульсної характеристики фільтра [61]

$$H_{\text{ЛЧМ}}(t) = C \cos(2\pi f_0 t - 0,5ht^2 + \varphi_0), \quad (2.68)$$

де  $C = \sqrt{\frac{2(f_2 - f_1)}{\pi\tau}}$  – постійна.

Особливість імпульсної характеристики фільтра фрактального сигналу  $H_{\text{ФС}}(t)$  полягає в тому, що в ній враховується масштабна інваріантність (скейлінг) сигналу, яка визначається масштабним коефіцієнтом  $k^n$ . З огляду на цю особливість та властивості імпульсної характеристики фільтра вираз для неї можна подати у вигляді [61]

$$H_{\text{ФС}}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{U_0 C}{k^n} \cos(2\pi f_0 t - 0,5hk^n t^2 + \varphi_0). \quad (2.69)$$

На рисунку 2.47, а і б наведено імпульсні характеристики фільтрів, отримані згідно з виразами (2.68) і (2.69) відповідно.

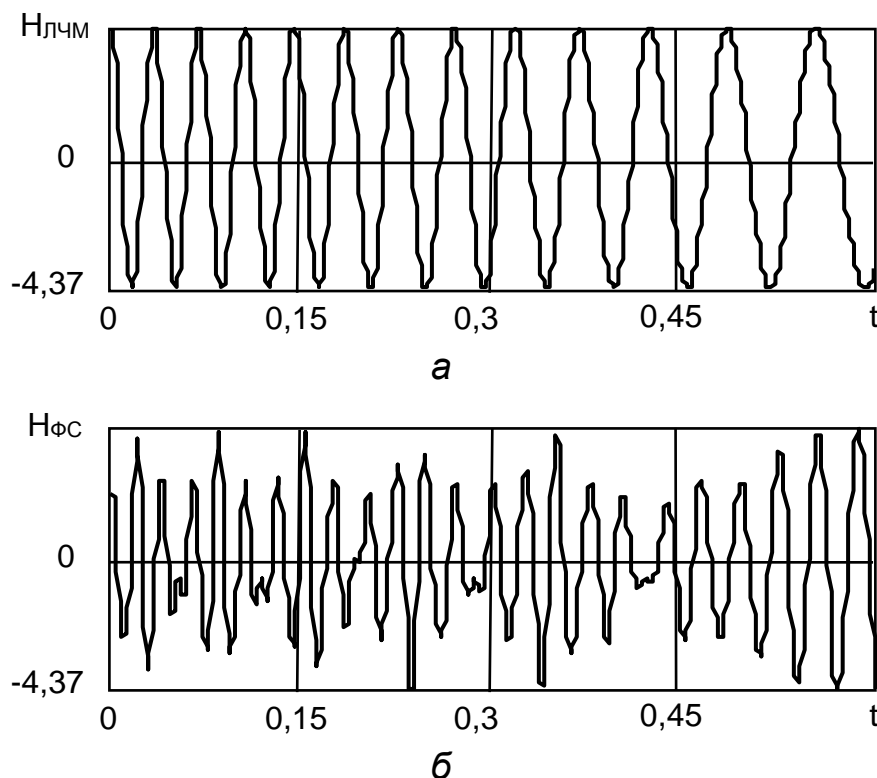


Рисунок 2.47 – Імпульсні характеристики фільтра ЛЧМ-сигналу (а) і фільтра фрактального сигналу (б)

Якщо на вхід фільтра подати ЛЧМ-сигнал, що відповідає імпульсній характеристиці, то на його виході буде сигнал, що описується виразом [61]

$$U_{\text{лчм}}(t) = U_1 C \left| \int_{t-t_0-0,5\tau}^{t-t_0+0,5\tau} \cos(2\pi f_0 t + 0,5ht^2) \cos(2\pi f_0(t-t_0) - 0,5h(t-t_0)^2) dt \right|. \quad (2.70)$$

Якщо на вхід фільтра з відповідною імпульсною характеристикою надходить фрактальний сигнал, то на виході фільтра буде сигнал, що визначається за допомогою виразу

$$U_{\Phi C}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{U_0 C}{\sqrt{k^n}} \left| \cos(2\pi f_0 t + 0,5hk^n t^2) \cos[2\pi f_0(t - t_0) - 0,5hk^n(t - t_0)^2] \right|. \quad (2.71)$$

Аналіз виразів (2.70) і (2.71) показує, що відносно сигналів ці фільтри є автокореляційними пристроями. Зважаючи на парність автокореляційної функції, напруги вихідних сигналів є парними функціями часу щодо моменту  $t_0$ .

Відомо, що автокореляційна функція  $R(\tau)$  максимальна, якщо  $\tau = t + t_0 = 0$ . Тому сигнал стискається фільтром і досягає максимального значення на його виході в момент часу  $t = t_0$ . Максимальні (пікові) значення стислих ЛЧМ- і фрактальних сигналів мають відповідно величини [61]

$$U_{\text{млч}}(t_0) = C_1 R(0) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(t) dt = C_1 E_{\text{лчм}}, \quad (2.72)$$

$$U_{\text{мфс}}(t_0) = C_2 R(0) = C_2 \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = C_2 E_{\text{фс}}. \quad (2.73)$$

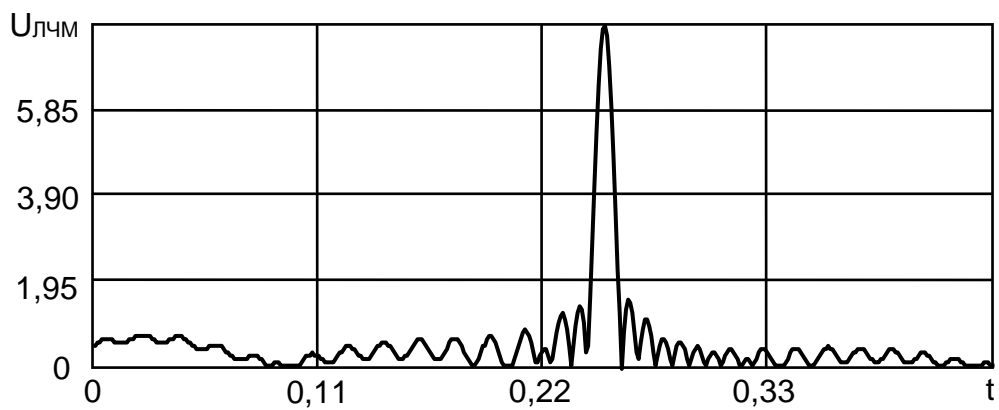
Таким чином, максимальні значення ЛЧМ-сигналу і фрактального сигналу на виходах фільтрів пропорційні повним енергіям таких сигналів на входах.

Стислі класичний ЛЧМ- і фрактальний сигнали, що розраховані за виразами (2.70) і (2.71), наведено на рисунку 2.48, а і б відповідно. Порівняння цих рисунків показує, що рівень стиснення фрактального сигналу перевищує приблизно у два рази рівень стиснення класичного ЛЧМ-сигналу.

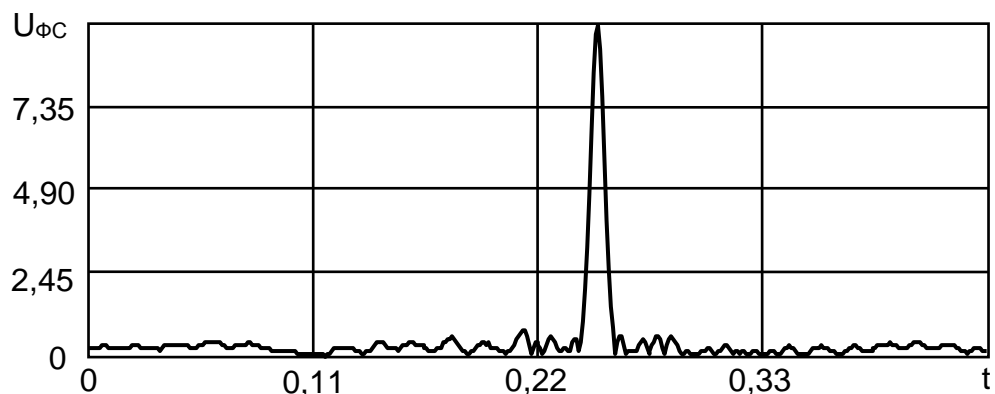
Рівень першої бічної пелюстки стислого фрактального сигналу становить величину 0,06 щодо основного максимуму і приблизно в три рази менший за рівень першої бічної пелюстки (0,19) стислого класичного ЛЧМ-сигналу (рисунок 2.49, а і б).

На рисунку 2.49 також видно, що перевагою стислого фрактального сигналу порівняно з стислим ЛЧМ-сигналом є вища роздільна здатність стислого фрактального сигналу. Так, розрізнення стислого ЛЧМ-сигналу за критерієм Релея (на половинному рівні) становить 0,01 (див. рисунок 2.49, а), тоді як розрізнення стислого фрактального сигналу – 0,0075 (див. рисунок 2.49, б). У такому випадку розрізнення стислих фрактальних сигналів перевищує розрізнення стислих ЛЧМ-сигналів приблизно в 1,33 рази.

Таким чином, фрактальні сигнали, що мають рівні амплітуди з класичними ЛЧМ-сигналами, мають менший рівень перших бічних пелюсток і вищу роздільну здатність.

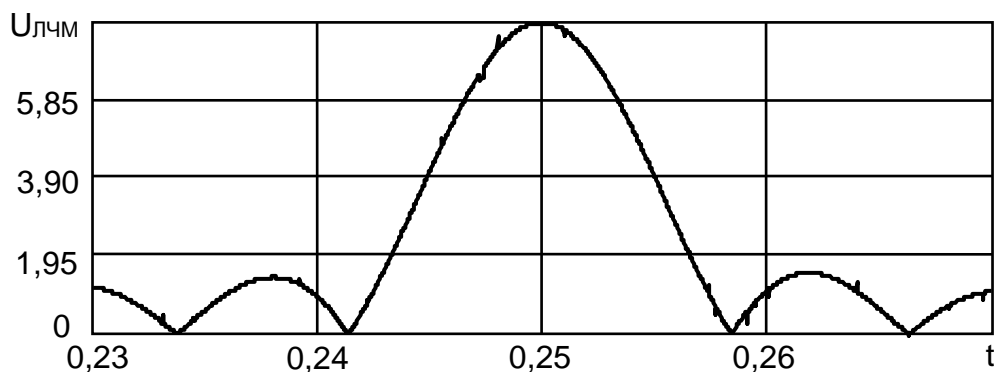


*a*

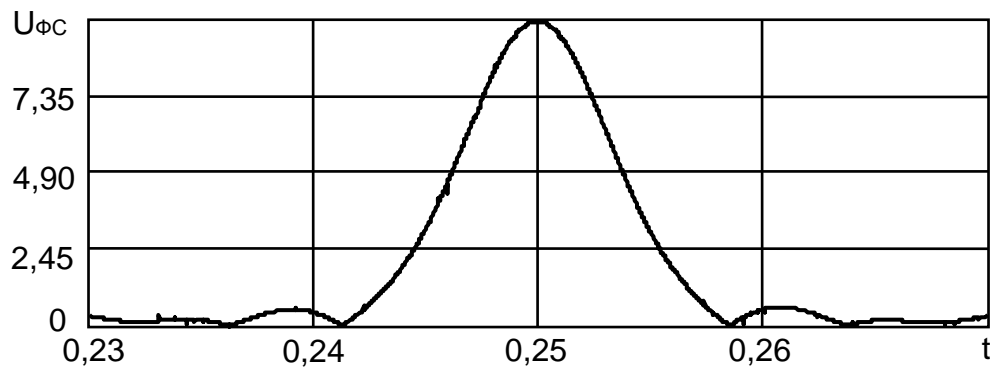


*б*

Рисунок 2.48 – Стислі ЛЧМ-сигнал (*a*) і фрактальний сигнал (*б*)



*a*



*б*

Рисунок 2.49 – До оцінювання рівнів бічних пелюсток стислих ЛЧМ-сигналу (*a*) і фрактального сигналу (*б*)

### 2.2.3.3 Фільтрове оброблення сумарної послідовності Морсе – Туе

Фільтрове оброблення послідовності Морсе – Туе можна здійснити шляхом використання пасивного методу стиснення послідовності. На основі такого методу реалізується фільтр, що містить лінію затримки, фазообертачі, що відображають код послідовності Морсе – Туе, і суматор. Як відомо, такий фільтр має імпульсну характеристику, яка є дзеркальним відображенням сумарної кодової послідовності Морсе – Туе. Таку імпульсну характеристику наведено на рисунку 2.50 і одержану відповідно до виразу [68]

$$H_{\Sigma 3}(t) = H_0(t) + H_1(t) + H_2(t),$$

де  $H_0(t)$ ,  $H_1(t)$ ,  $H_2(t)$  – імпульсні характеристики фільтрів опорної та гомеоморфних послідовностей Морсе – Туе.

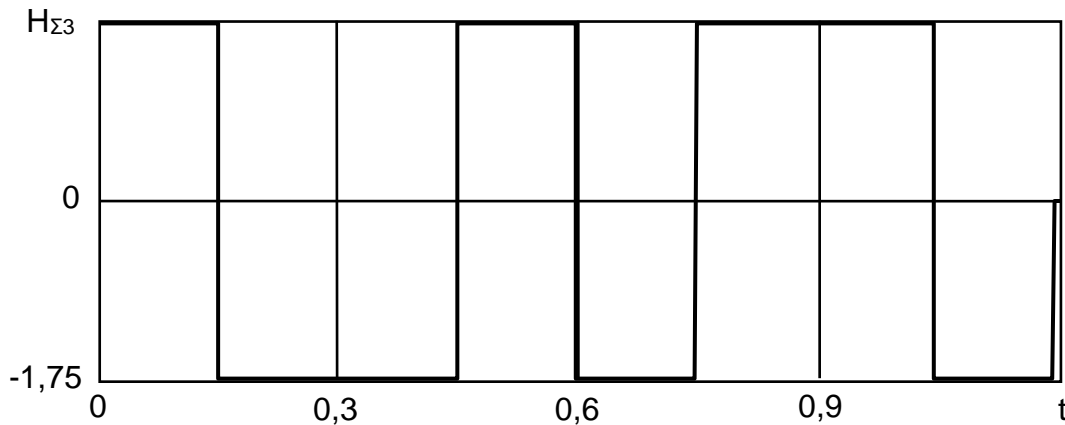


Рисунок 2.50 – Імпульсна характеристика фільтра послідовності Морсе – Туе зміни фази

Під час подання на вхід фільтра сумарної послідовності Морсе – Туе зміни фази  $Y_{\Sigma 3}(t)$  на його виході отримуємо стислу послідовність Морсе – Туе  $F_{\Sigma 3}(t)$ , що наведено на рисунку 2.51.

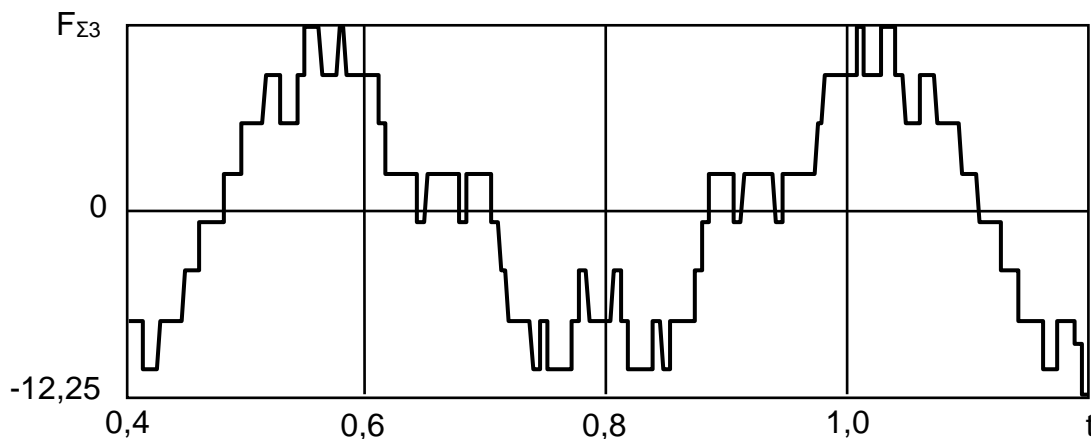


Рисунок 2.51 – Стисла послідовність Морсе – Туе

Характерною особливістю стислої послідовності Морсе – Туе є її дзеркальна симетричність. Це обумовлено тим, що стисла послідовність Морсе – Туе на вході фільтра має таку саму симетричність, як і початкова. Стислій послідовності Морсе – Туе відповідає фазовий портрет, що наведено на рисунку 2.52, де функція  $F_{\Sigma 3}(t + T)$  зрушена на час  $T = 0,005$  щодо функції  $F_{\Sigma 3}(t)$  [68].

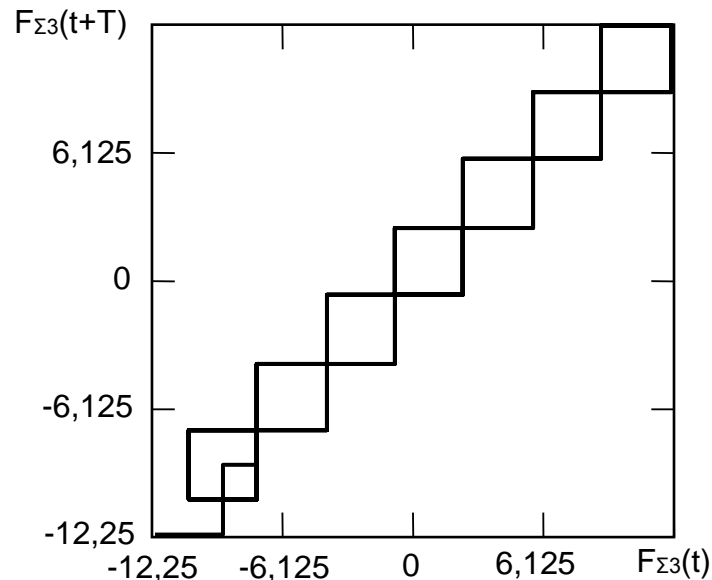


Рисунок 2.52 – Фазовий портрет стислої послідовності Морсе – Туе

Як видно з аналізу рисунка 2.52, фазовий портрет показує дзеркальність стислої послідовності Морсе – Туе  $F_{\Sigma 3}(t)$ .

Таким чином, стисла послідовність Морсе – Туе має дзеркальну симетричність. Фільтр такого сигналу може містити лінію затримки, фазообертачі, що відображають код послідовності Морсе – Туе, і суматор.

## 2.2.4 Оцінювання ефективності фрактальних сигналів під час впливу перешкод від земної поверхні

### 2.2.4.1 Оцінювання відношення сигнал / перешкода під час використання фрактальних сигналів, сформованих на основі простого синусоїдального коливання

Для розв'язання задачі селекції наземних об'єктів і перешкод, якщо вони довільно розташовані, доцільно використовувати апарат двовимірних кореляційних функцій сигналів, який дає змогу оцінити властивості зондувального сигналу.

Математичний вираз нормованої двовимірної кореляційної функції  $\rho(\tau, F)$  дає змогу описати поведінку відгуку сигналу на виході системи оброблення, а також визначити відношення потужностей корисного сигналу і перешкод, якщо відоме розташування об'єктів, розподіл

інтенсивності пасивної перешкоди (відбиття від земної поверхні) за часом і частотою. Також необхідно враховувати розподіл інтенсивності перешкоди за дальністю й енергетичний спектр флуктуацій перешкоди.

Під час селекції об'єктів із використанням фрактальних сигналів відношення сигнал / перешкода  $q_s$  має вигляд

$$q_s = \frac{P_s |\rho(\tau, 0)|^2}{\int_{\Delta F} G_{0s}(\tau, F) \int_{\Delta \tau} |\rho(\tau, F)|^2 d\tau dF} = \frac{P_s |\rho(\tau, 0)|^2}{\int_{\Delta F} \frac{1}{\Delta F} e^{-4\pi \cdot F^2 \left(\frac{1}{2\Delta F}\right)^2} \int_{\Delta \tau} |\rho(\tau, F)|^2 d\tau dF}. \quad (2.74)$$

Визначимо, як впливає на цю величину зміна характеристик фрактального сигналу і розподіл інтенсивності відбиття від земної поверхні. Знаменник виразу (2.74) визначає потужність відбиття від земної поверхні на виході каналу фільтрації, налаштованого на корисний сигнал у відповідному елементі розрізнення. Розглянемо, як залежить ця величина від структури тіла невизначеності фрактального сигналу.

Розподіл інтенсивності відбиття від земної поверхні й опорного (синусоїдального) коливання фрактального сигналу на частотно-часовій площині зручно подати топографічним методом, як це наведено на рисунку 2.53.

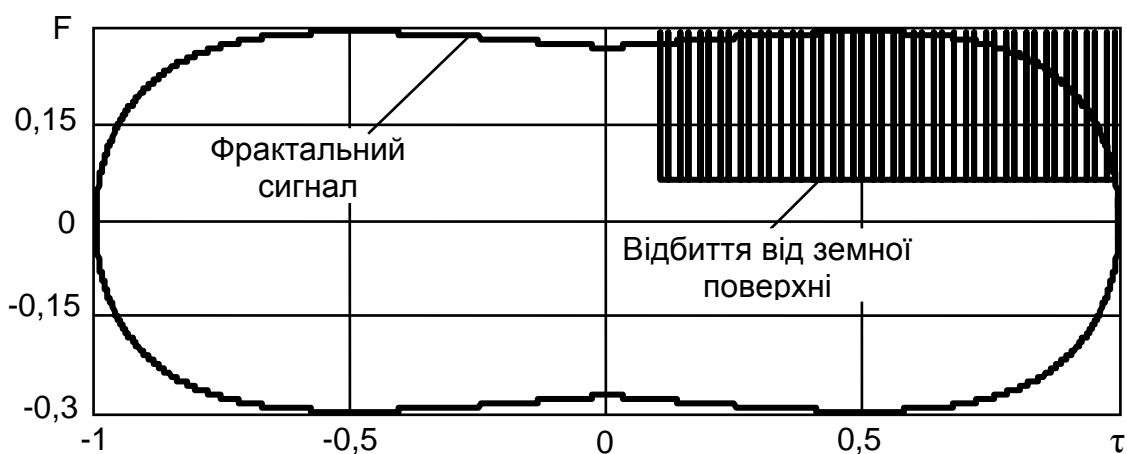


Рисунок 2.53 – Топографічне подання розподілу інтенсивності відбиття від земної поверхні й опорного коливання фрактального сигналу

Аналіз топографічної діаграми показує майже повне перекриття відбиття від земної поверхні з перерізом тіла невизначеності опорного коливання фрактального сигналу, що свідчить про найбільшу дію перешкоди на корисний сигнал. Це, як відомо, призводить до зниження відношення сигнал / перешкода на виході схеми фільтрації.

Для зменшення рівня відбиття від земної поверхні в елементах розрізнення, що лежать в області апріорних значень часу затримки  $\tau$  і

доплерівських зсувів частот фрактального сигналу (див. рисунок 2.53, область затримки  $\tau_2 = 0,1 \dots 1$  і зсуви частот  $\Delta F = 0,1 \dots 0,21$ ), структура фрактального сигналу і характеристика фільтра мають бути такими, за яких переріз тіла невизначеності фрактального сигналу перетинався б з областю розподілу відбиття від земної поверхні (див. рисунок 2.53, заштрихована область) у зоні, де її значення мінімальне.

Як видно з виразу (2.74), під час узгодженої фільтрації це може бути досягнуто завдяки зміні форми фрактальних сигналів. Необхідно зазначити, що через специфічність фрактальних сигналів, як порівняти з відомими класичними сигналами, його оброблення може бути здійснено багатоканальним фільтром. Кількість каналів такого фільтра визначається кількістю складових, що беруть участь у формуванні фрактальних сигналів.

У разі фільтрації для зменшення впливу відбиття від земної поверхні можна додатково використовувати зміну фазово-частотної характеристики фільтра. Але під час довільної зміни фазово-частотної характеристики фільтра разом зі зменшенням інтенсивності перешкоди на його виході може відбутися також і зменшення потужності корисного сигналу. У такому разі застосування фільтрації призводить до погіршення характеристик селекції об'єктів у разі відсутності перешкод, тобто коли під час оброблення перешкода обумовлена тільки внутрішніми шумами приймального каналу.

Динаміку зміни форми фрактального сигналу на прикладі поведінки перерізів його тіл невизначеності, якщо кількість складових сигналу відрізняється, було розглянуто вище (див. рисунок 2.27). За результатами аналізу такої динаміки видно, що зміна кількості складових фрактального сигналу приводить до зміни його форми. Це дає змогу використати таку специфічну властивість сигналу для зменшення або навіть повного виключення впливу перешкод від земної поверхні.

Оцінимо ефективність селекції об'єктів на фоні відбиття від земної поверхні за величиною відношення сигнал/перешкода  $q_s$ , яке визначається рівнем компенсації відбиття від земної поверхні. З аналізу виразу (2.74) видно, що ступінь компенсації залежить від форми енергетичного спектра (перший інтеграл) і форми тіла невизначеності фрактального сигналу (другий інтеграл). Змінюючи кількість складових фрактального сигналу, оцінимо величину  $q_s$ , якщо розподіл перешкоди, що лежить в області, обмеженій інтервалами часу затримки  $\Delta\tau = \tau = 0,1 \dots 1$  і доплерівських частот  $\Delta F = F = 0,05 \dots 0,3$ . Під час розрахунків вважалось, що тангенціальна складова швидкості відбиття від земної поверхні  $V_{tg} = 3$ , частота опорного коливання фрактального сигналу  $f_0 = 0,6 \cdot 10^9$ , ширина діаграми спрямованості антени  $\Delta\theta = 0,5$ .

На рисунку 2.54 наведено топографічні діаграми фрактальних сигналів і розподілу інтенсивності відбиття від земної поверхні.



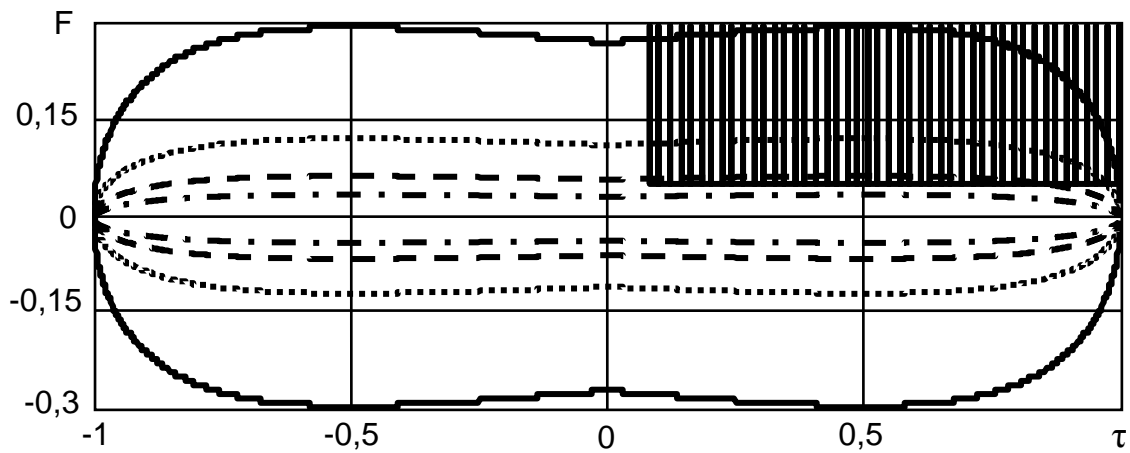


Рисунок 2.54 – Топографічні діаграми фрактальних сигналів на основі синусоїдального коливання і розподілу інтенсивності відбиття від земної поверхні

Аналіз діаграм показує, що найбільша інтенсивність відбиття від земної поверхні наявна в зоні перекриття перерізу тіла невизначеності опорної (нульової) складової фрактального сигналу (суцільна лінія на рисунку 2.54). Отже, область високої кореляції тіла невизначеності простого (синусоїдального) сигналу, який одночасно є опорним коливанням фрактального сигналу, значною мірою перекривається з областю розподілу перешкоди.

За набутих значень початкових даних у результаті розрахунку мінімальна потужність відбиття від земної поверхні  $G_0(\tau, F)$  становить величину що дорівнює 0,034, яка отримана, якщо  $G_{0\text{макс}} = 0,95$ . Розраховане значення потужності відбиття від земної поверхні  $G_0(\tau, F)$  дає змогу оцінити відношення сигнал / перешкода за потужністю  $q_{n0}$ , яке в цьому випадку дорівнює  $q_{n0} = 29,41$ , де індекс 0 – номер нульової складової фрактального сигналу і потужності  $G_0$ .

Точковою лінією на рисунку 2.54 зображено переріз тіла невизначеності фрактального сигналу, що формується нульовою і першою складовими. Як видно на рисунку 2.54, такий переріз тіла невизначеності перекриває меншу частину області розподілу перешкоди порівняно з розглянутою раніше ситуацією. Відношення сигнал / перешкода за потужністю дорівнює  $q_{n1} = 83,33$ .

Змінимо форму фрактального сигналу шляхом додавання до його складу ще однієї синусоїдальної складової. У цьому випадку спостерігається подальше звуження перерізу тіла невизначеності фрактального сигналу (на рисунку 2.54 штрихова лінія) і зниження його області перекриття з розподілом інтенсивності перешкоди. Виділена область перекриття під час використання такого фрактального сигналу значно менша порівняно із загальним розподілом інтенсивності перешкоди. Інакше кажучи, спостерігається селекція фрактального сигналу на фоні перешкоди. Під час використання фрактального сигналу

на основі трьох складових (нульова, перша і друга) за таких самих значень початкових даних, відношення сигнал / перешкода дорівнює  $q_{n2} = 109,42$ .

Додавання до складу фрактального сигналу четвертої синусоїдальної складової перерізу його тіла невизначеності продовжує звужуватися (на рисунку 2.54 штрихпунктирна лінія). На рисунку 2.54 видно, що перекриття перерізу тіла невизначеності фрактального сигналу з розподілом інтенсивності перешкоди немає, тобто за таких параметрів фрактального сигналу перешкода впливати на сигнал не буде.

Таким чином, за наявності відбиття від земної поверхні фрактальний сигнал може адаптуватися до перешкодової обстановки і використовуватися для розв'язання задач селекції об'єктів на фоні відбиття від земної поверхні.

#### 2.2.4.2 Оцінювання ефективності фрактального сигналу, що формується на основі опорного ЛЧМ-коливання, під час селекції об'єктів

Розглянемо динаміку селекції об'єктів на фоні відбиття від земної поверхні під час використання фрактального сигналу, що формується на основі опорного ЛЧМ-коливання. Становить практичний інтерес порівняльний аналіз ефективності процесу селекції під час використання класичного ЛЧМ-коливання, яке вважається опорним коливанням (нульова складова) фрактального сигналу і безпосередньо самого фрактального сигналу [74]. Для розрахунку було вибрано початкові дані, як і для синусоїдального сигналу – тангенціальна швидкість об'єкта  $V_{tg} = 3$ , ширина діаграми спрямованості антени  $\Delta\theta = 0,5$  і середня частота ЛЧМ-коливання  $f_0 = 0,6 \cdot 10^9$ , яких достатньо для оцінювання ширини спектра флуктуацій  $\Delta F$ . Можна записати розрахункову формулу відношення сигнал / перешкода

$$q_n = \frac{Ps|\rho(\tau,0)|^2}{\int_{-F}^F \Delta F e^{-\pi F^2 \Delta F^{-2}} \int_0^T |\rho(\tau,F)|^2 d\tau dF} \quad (2.70)$$

На рисунку 2.55 наведено динаміку зміни положення перерізу тіла невизначеності фрактального сигналу щодо розподілу перешкоди.

На рисунку 2.55 суцільною лінією показано переріз тіла невизначеності ЛЧМ-коливання, що є опорним під час формування фрактального сигналу, точковою, пунктирною і штрихпунктирною лініями зображено перерізи фрактальних сигналів, що сформовані на основі двох, трьох і чотирьох складових відповідно.

Як видно на рисунку 2.55, зміна форми фрактальних сигналів обумовлена збільшенням кількості складових у структурі сигналу, що приводить до зменшення області перекриття перерізу тіла невизначеності

фрактального сигналу з перешкодою, тобто спостерігається адаптація фрактального сигналу до перешкодової обстановки, як це було досліджено для фрактального сигналу, що формується на основі простого синусоїдального коливання. Процес адаптації полягає в зменшенні області перекриття, що обумовлено поворотом перерізів тіла невизначеності фрактальних сигналів із різними параметрами щодо перешкоди.

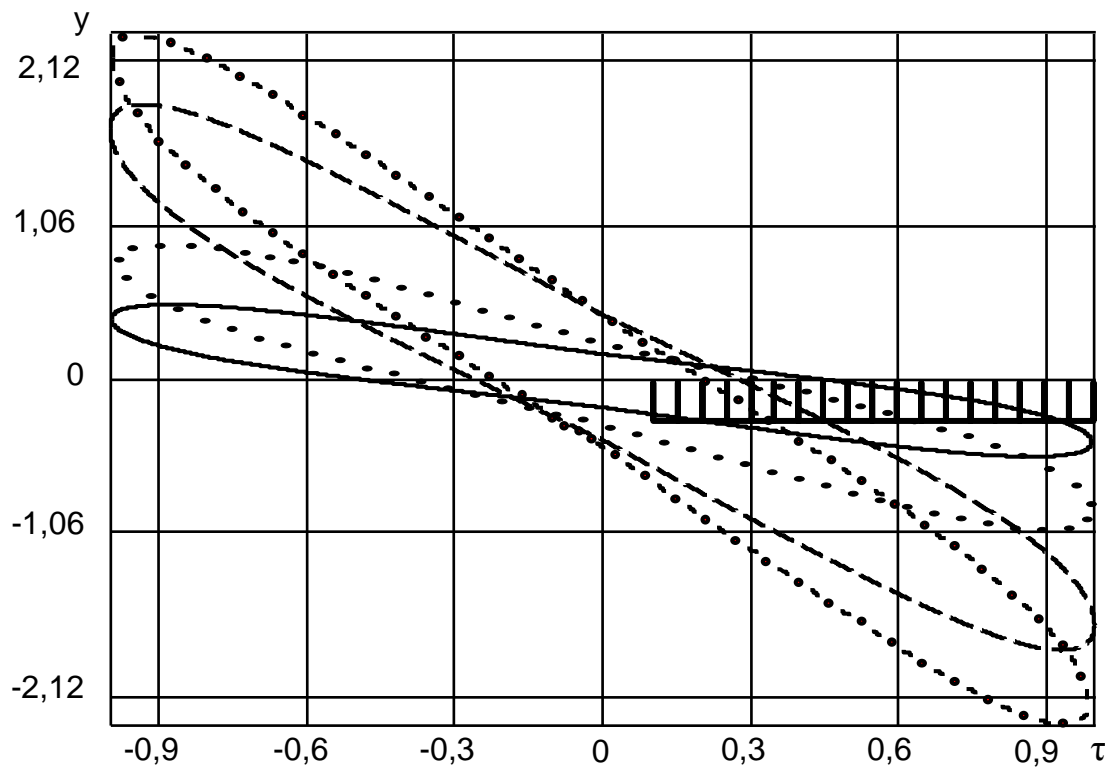


Рисунок 2.55 – Топографічні діаграми фрактальних сигналів на основі ЛЧМ-коливання і розподілу інтенсивності відбиття від земної поверхні

Аналіз даних на рисунку 2.55 показує, що область розподілу перешкоди значною мірою перекривається перерізом тіла невизначеності опорного ЛЧМ-коливання. Кількісною мірою, що відображає таке перекриття, є відношення сигнал / перешкода за потужністю, яке розраховується за допомогою виразу (2.70) і дорівнює  $q_{n0} = 100$ . На основі опорного ЛЧМ-коливання розглянемо інший фрактальний сигнал, що було сформовано шляхом додавання до його складу першої ЛЧМ-складової.

На рисунку 2.55 точковою лінією показано переріз тіла невизначеності сигналу, що має більший кут повороту порівняно з кутом повороту перерізу тіла невизначеності опорного ЛЧМ-коливання. Добре спостерігається поступовий «вихід» перешкоди з перерізу тіла невизначеності фрактального сигналу порівняно з перерізом тіла невизначеності опорного ЛЧМ-коливання. Відношення сигнал / перешкода за потужністю в цьому випадку збільшується і дорівнює  $q_{n1} = 140,84$ .

Проведемо зміну структури фрактального сигналу шляхом додавання в його склад другої складової (нульова, перша і друга), переріз тіла невизначеності такого сигналу показано пунктирною лінією на рисунку 2.55. Як і у попередньому випадку, наявне перекриття перерізу тіла невизначеності фрактального сигналу і області розподілу перешкоди. Але спостерігається стійка тенденція до зменшення зони перекриття під час використання фрактального сигналу, що підтверджується збільшенням відношення сигнал / перешкода за потужністю до  $q_{n2} = 153,89$  порівняно з величиною  $q_{n1}$ . Фізично це пов'язано з меншою енергією другої складової в енергію фрактального сигналу порівняно з енергіями нульової і першої складових.

На рисунку 2.55 штрихпунктирною лінією показано тіло невизначеності фрактального сигналу, що складається із чотирьох (нульова, перша, друга і третя) складових. У такому випадку наявне найменше перекриття області розподілу перешкоди і перерізу тіла невизначеності фрактального сигналу, що приводить до подальшого збільшення відношення сигнал / перешкода. Збільшення величини до  $q_{n3} = 157,31$  порівняно з величиною  $q_{n2} = 153,89$ , меншою, якщо порівняти з раніше розглянутими випадками.

Таким чином, застосування фрактального сигналу на основі опорного ЛЧМ-коливання дає змогу збільшити відношення сигнал / перешкода під час роботи в умовах наявності відбиття від земної поверхні шляхом зменшення області взаємного перекриття функції розподілу перешкоди і тіла невизначеності фрактального сигналу.

### Запитання для самоперевірки

1. Яким чином визначається поняття фрактальної недиференційовної функції?
2. З яких етапів складається алгоритм побудови функції Больцано?
3. Як залежать графіки функції Рімана від кількості її складових?
4. Від яких параметрів залежить форма функції Ганкеля?
5. Які існують основні властивості функції Вейерштрасса і в чому вони полягають?
6. Як впливає величина значення параметра  $D$  на форму графіків функції Вейерштрасса – Мандельброта?
7. Які параметри містить модифікована функція Вейерштрасса і як вони впливають на її форму?
8. Як змінюється характер порізаності функції Дарбу зі збільшенням кількості її складових?
9. З яких етапів складається алгоритм побудови функції ван дер Вардена?

10. З яких етапів складається алгоритм побудови функції Безиковича?

11. Як будується послідовність Морсе – Туе?

12. Як визначається циклоїда в параметричній формі?

13. Яким чином циклоїда пов'язана із синусоїдальною функцією?

14. Яким чином визначається площа синусоїди?

15. Як визначається епіциклоїда та які вона має властивості?

16. Як визначається гіпоциклоїда та які вона має властивості?

17. Які особливості мають епіциклоїди і гіпоциклоїди з нескінченною безліччю арок?

18. Яким чином доводяться властивості подібності та недиференційовності циклоїдальних функцій?

19. З яких етапів складається алгоритм побудови циклоїдальної фрактальної недиференційовної функції?

20. Які особливості мають епіциклоїдальні та гіпоциклоїдальні фрактальні недиференційовні функції?

21. Які властивості мають циклоїдальні фрактальні недиференційовні функції?

22. Що таке фрактальний сигнал?

23. Які існують основні властивості фрактальних сигналів?

24. У чому полягає суть властивості гіперболічності під час формування фрактального сигналу?

25. У чому полягає методика побудови фрактального сигналу?

26. Які методи нелінійної динаміки можна використовувати для аналізу структури фрактальних сигналів?

27. Які властивості має тіло невизначеності фрактального сигналу на основі опорного синусоїдального коливання?

28. Які є особливості формування фрактального сигналу з використанням опорного ЛЧМ-коливання?

29. Як змінюється форма фазових портретів і структура перерізу Пуанкаре в разі збільшення кількості складових ЛЧМ фрактального сигналу?

30. Які властивості має тіло невизначеності фрактального сигналу на основі опорного ЛЧМ-коливання?

31. Як залежить величина фрактальної розмірності від кількості складових і коефіцієнта масштабування ЛЧМ фрактального сигналу?

32. Яким чином формується кодова послідовність Баркера для фрактального сигналу?

33. Яка структура фрактального сигналу, що формується на основі опорного КФМ-коливання?

34. Які особливості фрактального сигналу, що формується на основі опорного КФМ-коливання, можна дослідити на його часовій реалізації?

35. Яким чином формується кодова послідовність Морсе – Туе для фрактального сигналу?
36. Які властивості квазіперіодичних сигналів є у фрактальних сигналів?
37. Які властивості хаотичних сигналів є у фрактальних сигналів?
38. Яке місце займають фрактальні сигнали в теорії коливань і теорії хаосу?
39. У чому полягають переваги фільтрації фрактального сигналу порівняно з фільтрацією простого синусоїдального сигналу?
40. На скільки знижується рівень перших бічних пелюсток фрактального сигналу порівняно з фільтрацією простого синусоїдального сигналу?
41. Чим відрізняються стислий класичний ЛЧМ-сигнал і стислий фрактальний сигнал?
42. На скільки знижується рівень перших бічних пелюсток фрактального сигналу порівняно з фільтрацією простого ЛЧМ-сигналу?
43. Яка характерна особливість є в стислої послідовності Морсе – Туе?
44. Як графічно можна подавати розподіл інтенсивності відбиття від земної поверхні та фрактального сигналу?
45. Яким чином фрактальні сигнали можуть адаптуватися до перешкодової обстановки?
46. Яким чином фрактальні сигнали дають змогу збільшити відношення сигнал / перешкода?

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Thompson, J. M. T. Nonlinear Dynamics and Chaos / J. M. T. Thompson, H. B. Stewart. – N. Y. : Wiley, 1986. – 376 p.
2. Lichtenberg, A. Regular and Stochastic Motion / A. Lichtenberg, M. Lieberman. – Berlin : Springer, 1983. – 528 p.
3. Jackson, E. A. Perspectives of Nonlinear Dynamics / E. A. Jackson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1989. – 227 p.
4. Becker, K. Dynamical system and fractals / K. Becker, M. Doerfler. – Cambridge : Cambridge university press, 1990. – 399 p.
5. Ott, E. Chaos in Dynamical Systems / E. Ott. – Cambridge : Cambridge University Press, 1993. – 385 p.
6. Devaney, R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems / R. L. Devaney. – Boston : Addison-Wesley Publishing Company, 1989. – 336 p.
7. Hilborn, R. C. Chaos and Nonlinear Dynamics / R. C. Hilborn. – Oxford : Oxford University Press, 1991. – 650 p.
8. Edgar, G. A. Measure, Topology, and Fractal Geometry / G. A. Edgar. – N. Y. : Springer-Verlag, 1990. – 304 p.
9. Mandelbrot, B. B. Fractals: Form, Chance and Dimension / B. B. Mandelbrot. – San-Francisco : Freeman, 1977. – 365 p.
10. Mandelbrot, B. B. The Fractal Geometry of Nature / B. B. Mandelbrot. – N. Y. : Freeman W. N. and Co., 1982. – 468 p.
11. Barnsley, M. Fractals Everywhere / M. Barnsley. – Boston : Academic Press, 1988. – 394 p.
12. Becker, K. H. Dynamical Systems and Fractals / K. H. Becker, M. Dorfler. – Cambridge : Cambridge University Press, 1989. – 397 p.
13. Bende, A. Fractals in Science / A. Bende, S. Halvin. – Berlin : Springer-Verlag, 1995. – 298 p.
14. Feder, J. Fractals / J. Feder. – N. Y. : Springer US, 1988. – 263 p.
15. Crownover, R. M. Introduction to Fractals and Chaos / R. M. Crownover. – London : Jones and Bartlett Publishers, Inc, 1995. – 352 p.
16. Kenneth, H. R. Discrete Mathematics and Its Applications / H. R. Kenneth. – N. Y. : McGraw Hill, 2011. – 928 p.
17. Gazale, M. J. Gnomon. From Pharaons to Fractals / M. J. Gazale. – Prinston : Prinston University Press, 2001. – 272 p.
18. Peitgen, H.-O. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical System / H.-O. Peitgen, P.H. Richter. – Berlin : Springer-Verlag, 1986. – 206 p.
19. Hutchinson, J. E. Fractals and Self Similarity / J. E. Hutchinson // Indiana University Mathematics Journal. – 1981. – V. 30 (5). – P. 713–747.
20. Mandelbrot, B. B. The Fractals and Chaos. The Mandelbrot Set and Beyond / B. B. Mandelbrot. – N. Y. : Springer, 2003. – 386 p.

21. Fractals in Physics: [Proceedings of the Sixth Trieste International Symposium on Fractals in Physics]. – Amsterdam : Elsevier Science Publishers B. V., 1986. – 672 p.
22. Турбин, А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. – Киев : Наук. думка, 1992. – 207 с.
23. Schroeder, M. Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise / M. Schroeder. – N. Y. : Freeman W. N. and Co., 1991. – 430 p.
24. Fisher, Y. Fractal Image Compression. Theory and Application / Y. Fisher. – N. Y. : Springer-Verlag, 1994. – 433 p.
25. Кононюк, А. Е. Дискретно-непрерывная математика. Кн. 6. Поверхности, Ч. 2. Фрактальная геометрия / А. Е. Кононюк. – Київ : Освіта України, 2016. – 618 с.
26. Falconer, K. J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications / K. J. Falconer. – Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 337 p.
27. Gleike J. Chaos. Making a New Science / J. Gleike. – N. Y. : Penguin Books, 1987. – 398 p.
28. Peters, E. E. Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment and Economics / E. E. Peters. – N. Y. : John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 286 p.
29. Moon, F. C. Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers / F. C. Moon. – N. Y. : John Wiley & Sons Ltd, 1987. – 312 p.
30. Takens, F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics, edited by D. A. Rand, L. S. Young. – Heidelberg : Springer-Verlag, 1981. – P. 366–381.
31. Eckmann, J. P. Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors / J. P. Eckmann, D. Ruelle // Rev. Mod. Phys. – 1985. – V. 57 (3). – P. 617–656.
32. Haddad, W. H. Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach / W. H. Haddad, V. S. Chellaboina. – Princeton : Princeton University Press, 2008. – 944 p.
33. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them : Pt. 1, 2 / M. Benetti, L. Galgani, A. Giorgilli [et al] // Mechanica. 15. – 1980. – № 1. – P. 9–30.
34. Determining Lyapunov exponents from a time series / A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney [et al] // Physica D. 16. – 1985. – № 3. – P. 285–317.
35. Сугаков, В. Й. Основы синергетики / В. Й. Сугаков. – Київ : Обереги, 2001. – 287 с.
36. Prigogine, I. Order from chaos. New dialog of man with nature / I. Prigogine, I. Stengers. – N. Y. : Verso Books, 2018. – 384 p.
37. Теория бифуркаций / В. И. Арнольд, В. С. Афраимович, Ю. С. Ильяшенко [и др.] // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1985. – Т. 5. – С. 5–220.



38. Jooss, G. Elementary Theory of Stability and Bifurcation Theory / G. Jooss, D. D. Joseph. – N. Y. : Springer-Verlag, 1980. – 285 p.
39. Marsden, J. The Hopf Bifurcation and Its Application / J. Marsden, M. McCracken. – N. Y. : Springer, 1976. – 368 p.
40. Guckenheimer, J. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields / J. Guckenheimer, P. Holmes. – N. Y. : Springer, 1983. – 453 p.
41. Gurel, O. Bifurcation Theory and Application in Scientific Disciplines / O. Gurel, O. Rossler. – N. Y. : Academy of Sciences, 1979. – 316 p.
42. Thompson, J. M. T. Instability and catastrophe in a scitech / J. M. T. Thompson. – Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 1982 – 254 p.
43. Stewart, I. Secrets of catastrophe / I. Stewart. – Berlin : Librairie Classique Eugene, 1982. – 87 p.
44. Bowen, R. Methods of Symbolic Dynamics / R. Bowen. – N. Y. : Springer-Verlag, 1976. – 245 p.
45. Alekseev, M. Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems / M. Alekseev, M.V. Yakobson // Physics Reports. – 1981. – V. 75 (5). – P. 290–325.
46. Базилевич, Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: теорія множин, математична логіка, комбінаторика, теорія графів / Л. Є. Базилевич. – Львів : Видавець І. Е. Чижиков. – 2013. – 487 с.
47. Специальный пакет расширения FracLab 2.0 системы математического моделирования MATLAB [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://project.inria.fr/fraclab/download/older-versions-2>.
48. Пащенко, Р. Э. Анализ влияния отношения сигнал/помеха на величину фрактальной размерности / Р. Э. Пащенко, Э. И. Пащенко // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил / Міністерство оборони України, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. – Харків, 2009. – Вип. 3 (21). – С. 62–65.
49. Chapman, M. J. Signal Processing in Electronic Communications: For Engineers and Mathematicians / M. J. Chapman, D. P. Goodall, N. C. Stell. – Amsterdam : Elsevier Science Publishers B. V., 1997. – 572 p.
50. Shabana, A. A. Theory of vibrations: An Introduction / A. A. Shabana. – N. Y. : Springer, 2018. – 568 p.
51. Пащенко, Р. Э. Влияние отношения сигнал/помеха на форму фазового портрета / Р. Э. Пащенко // Системи обробки інформації : зб. наук. пр. / Міністерство оборони України, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. – Харків, 2009. – Вип. 6 (80). – С. 93–96.
52. Пащенко, Р. Э. Основы теории формирования фрактальных сигналов / Р. Э. Пащенко. – Харьков : ЭкоПерспектива, 2005. – 296 с.
53. Пащенко, Р. Э. Анализ характеристик сигналов радиолокационных средств с использованием отображений (сечений)

Пуанкаре / Р. Э. Пащенко // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2010. – Вип. 1 (13). – С. 55–58.

54. Feigenbaum, M. J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations / M. J. Feigenbaum // J. Stat. Phys. – 1978. – V.19 (1). – P. 25–32.

55. Фейгенбаум, М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Фейгенбаум // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141. – № 2. – С. 343–374.

56. Вул, Е. Б. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм / Е. Б. Вул, Я. Г. Синай, К. М. Ханин // Успехи математических наук. – 1984. – Т. 39. – № 3. – С. 3–37.

57. Константи Фейгенбаума [Електронний ресурс] // Вікіпедія : вільна енциклопедія. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Константи\\_Фейгенбаума](https://uk.wikipedia.org/wiki/Константи_Фейгенбаума).

58. Wiggins, S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos / S. Wiggins. – N. Y. : Springer, 2010. – 312 p.

59. Веров, С. Г. Тайны циклоиды / С. Г. Веров // Квант. – 1975. – № 8. – С. 19–27.

60. Клепко, В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – Київ : Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

61. Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов: монография / Г. Н. Доля, В. К. Иванов, Р. Э. Пащенко и др.; под ред. Р. Э. Пащенко. – Харьков : ЭкоПерспектива, 2006. – 348 с.

62. Пащенко, Р. Э. Применение циклоидальной функции для синтеза фрактальных сигналов / Р. Э. Пащенко, Ю. П. Яковишен // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 1. – С. 9–13.

63. Пащенко, Р. Э. Применение эпициклоидальной функции для формирования фрактальных сигналов / Р. Э. Пащенко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2005. – № 1/2 (13). – С. 61–64.

64. Пащенко, Р. Э. Синтез фрактальных сигналов с использованием гипоциклоиды / Р. Э. Пащенко // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 2. – С. 12–16.

65. Иванов, В. К. Формирование фрактальных сигналов с использованием опорного гармонического колебания / В. К. Иванов, Р. Э. Пащенко // Успехи современной радиоэлектроники. – 2007. – № 12. – С. 3–17.

66. Пащенко, Р. Э. Формирование фрактальных сигналов с использованием линейно-частотно модулированных колебаний / Р. Э. Пащенко, О. А. Барданова, А. В. Шаповалов // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. / ІПМЕ НАН України. – Київ, 2003. – Вип. 22. – С. 142–152.

67. Пащенко, Р. Э. Формирование КФМ фрактальных сигналов с использованием кодов Баркера / Р. Э. Пащенко // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков : НТУ «ХПИ», 2004. – Вып. 39. – С. 8–13.
68. Пащенко, Р. Э. Формирование КФМ фрактальных сигналов на основе последовательности Морса – Туэ / Р. Э. Пащенко, Э. И. Пащенко // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил / Міністерство оборони України, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. – Харків, 2010. – Вип. 3 (25). – С. 78–82.
69. Antoniou, A. Digital Filters : Analysis, Design, and Signal Processing Applications / A. Antoniou. – N. Y. : McGraw Hill, 2018. – 348 p.
70. Паркер, Т. С. Введение в теорию хаотических систем для инженеров / Т. С. Паркер, Л. О. Чжуа // ТИИЭР. – 1987. – № 4. – С. 6–40.
71. Karlin, S. A First Course in Stochastic Processes / S. Karlin, H.M. Taylor. – N. Y. : Sec. Ed., Academic Press, 1975. – 386 p.
72. Пащенко, Р. Е. Фільтрація фрактальних радіолокаційних сигналів / Р. Е. Пащенко, О. І. Вовк, О. О. Окунів // Системи озброєння і військова техніка. – 2006. – № 1 (5) – С. 51–54.
73. Ширман, Я. Д. Теоретические основы радиолокации / Я. Д. Ширман. – Харьков : ВИРТА ПВО, 1984. – 408 с.
74. Пащенко, Р. Э. Анализ спектральных и энергетических характеристик линейно-частотно модулированных фрактальных сигналов / Р. Э. Пащенко // Системи обробки інформації : зб. наук. пр. / Міністерство оборони України, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. – Харків, 2004. – Вип. 7 (35). – С. 154–161.

Навчальне видання

**Пащенко Руслан Едуардович**

**МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ГЕОІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ**

**Частина 1**

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ**

Редактор А. Г. Литвин

Зв. план, 2024

Підписано до друку 27.09.2024

Формат 60x84 1/16. Папір офс. Офс. друк

Ум. друк. арк. 11,3. Обл.-вид. арк. 12,75. Наклад 50 пр.

Замовлення 115-24. Ціна вільна

---

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[http:// www.khai.edu](http://www.khai.edu)

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001