

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Н. В. Савченко

**МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ
НА ГРАФАХ
З НЕЧІТКИМИ ВАГАМИ**

Навчальний посібник

Харків
2024

УДК 519.17(075.8)
С13

Рекомендовано до друку
Вченою радою Національного аерокосмічного університету
ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»,
протокол № 1 від 23.08.2023

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
д-р техн. наук, проф. А. Г. Чухрай

Савченко, Н. В.

С13 Моделювання задач на графах з нечіткими вагами.
[Текст]: навчальний посібник / Н. В. Савченко. – Харків:
Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац.
ін-т». Видавець: О. А. Мірошніченко, 2024. – 96 с.

ISBN 978-617-8130-56-5.

У даному посібнику описано декілька класів задач, для формулювання та розв'язання яких застосовуються теорія графів і теорія нечітких множин. А саме розглядаються: задача розрахунку параметрів мережевого графа, задача про найкращі маршрути та задача про найкоротше з'єднання, задача про оптимальний потік, задача про призначення та задачі на багатодольних графах (узагальнення задачі про призначення) тощо. Даний посібник може бути використаний для теоретичної та практичної підготовки студентів як в аудиторії, так і під час самостійної роботи, у тому числі за умов дистанційного навчання.

Для студентів ВНЗ України, які навчаються за спеціальностями галузей знань «Математика та статистика», «Інформаційні технології» тощо. Даний посібник може бути корисним для магістрів, аспірантів і науковців, які використовують методи системного аналізу, інформатики, обчислювальної техніки, аналізу та моделювання складних систем і процесів та займаються створенням і використанням інтелектуальних систем.

Іл. 52. Бібліогр.: 19 назва

УДК 519.17(075.8)

© Савченко Н. В., 2024
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський, авіаційний
інститут», 2024

ISBN 978-617-8130-56-5

ЗМІСТ

Вступ	4
Попередні зауваження	5
Теорія мережевого планування і управління, її застосування.....	5
Задача про найкоротшу відстань на орієнтованій мережі без циклів	10
Задача про найкоротший маршрут на змішаному графі	12
Задача про найкоротше з'єднання.....	18
Задача про максимальний потік	21
Паросполучення в графах	30
Мережевий графік з нечіткими тривалостями робіт	48
Задача про найкоротший маршрут із нечітко заданим часом руху по комунікаціям	60
Задача про найкоротше з'єднання з нечітко визначеною економічною ефективністю комунікацій	71
Задача про максимальний потік із нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій	82
Задача про призначення з нечітко заданими витратами	88
Висновки.....	92
Бібліографічний список.....	93

Вступ

Сучасне суспільство постійно стикається з завданнями та проблемами, що потребують аналізу та оптимізації в різних сферах, починаючи від транспортних мереж і закінчуючи соціальними системами. Наприклад, у галузі транспорту вирішення проблеми оптимального маршруту для доставки вантажів або пасажирів може бути ускладненим через нечіткість у визначенні термінів та умов. Аналогічно, у соціальних системах важко точно передбачити вплив різних факторів на поведінку людей чи розвиток подій через їх нечіткість та мультиплікацію.

Отже, задачі, що виникають у різних областях, часто мають невизначені або нечіткі характеристики. Традиційні методи моделювання можуть бути недостатніми для врахування цієї невизначеності. Таким чином, необхідно використовувати нові інструменти та підходи, які дозволять ефективно працювати з нечіткими даними та забезпечать точні результати.

У цьому навчальному посібнику будуть досліджені основні концепції моделювання задач на графах з нечіткими вагами. Розглядатимуться різні підходи до визначення нечітких ваг, методи розв'язання таких задач, а також будуть наведені приклади їх застосування в різних областях.

У даному посібнику описано декілька класів задач, для формулювання та розв'язання яких застосовуються теорія графів і теорія нечітких множин. А саме розглядаються: задача розрахунку параметрів мережевого графа, задача про найкращі маршрути та задача про найкоротше з'єднання, задача про оптимальний потік, задача про призначення та задачі на багатодольних графах (узагальнення задачі про призначення) тощо.

Даний посібник може бути використаний для теоретичної та практичної підготовки студентів як в аудиторії, так і під час самостійної роботи, у тому числі за умов дистанційного навчання.

Попередні зауваження

Теорія графів почала розвиватися з XVIII ст. Перші роботи з неї належать Л. Ейлеру (1707-1783), який сформулював основні поняття теорії графів як розділу математики. Спочатку її розглядали як інструмент для знаходження рішень в азартних іграх та різних головоломках. З початку минулого століття графи знайшли широке застосування під час вирішення практичних задач. В даний час поняття графа використовується для опису великої області об'єктів та процесів. Теорія графів також тісно пов'язана з такими розділами математики, як теорія множин, теорія матриць, математична логіка та теорія ймовірності. В усіх цих розділах графи застосовуються для представлення різних об'єктів.

Популярність теорії графів визначається її предметом дослідження, що полягає у вивченні зв'язків між об'єктами. За останні десятиліття теорія графів набула нового періоду інтенсивних розробок. У цьому процесі явно простежується вплив запитів сучасних областей її застосування, які бурхливо розвиваються: теорії ігор, програмування, теорії передачі інформації, теорії управління, теорії електричних і контактних мереж, а також проблеми біології, психології та соціології, військової справи. На цей час розроблено численні алгоритми для роботи з графами.

Теорія мережевого планування і управління, її застосування

Теорія мережевого планування та управління (МПУ) використовується для вирішення задач планування. Її методи особливо корисні, коли потрібно виконати велику кількість різних технологічних операцій (робіт), залучаючи різних виконавців.

Методи МПУ дозволяють визначити термін виконання прийнятого плану проведення робіт та вказують список критичних робіт, тобто тих робіт, від виконання яких цей термін залежить в першу чергу.

При розв'язанні зазначених задач використовується модель у вигляді мережевого графіка.

Мережевий графік – це мережа без кратних ребер, всі ребра якої зважені і є дугами.

Роботам відповідають дуги мережевого графіка, поруч із дугою, що зображує роботу, вказується тривалість цієї роботи. Вершина мережевого графіка позначає певну подію – початок та/або закінчення роботи (робіт).

Подія, з якої робота починається, називається **початковою подією** для цієї роботи; подія, якою робота закінчується, називається **кінцевою подією** цієї роботи.

Роботи, для яких їхня початкова подія є кінцевою подією для даної роботи, називаються **наступними** для даної роботи; роботи, для яких їх кінцева подія є початковою подією даної роботи, називаються **попередніми** для даної роботи.

Розрізняють такі класи робіт.

1. **Дійсні** – це роботи, які потребують витрат сил, коштів та часу.
2. **Очікування** – це роботи, які потребують лише часу.
3. **Фіктивні** – це роботи, які потребують витрат ресурсів. Їхня тривалість дорівнює нулю. Вони використовуються для вказівки логічного зв'язку між подіями та роботами.

На мережевому графіку розрізняють:

- **вихідна подія** – визначає початок виконання всього комплексу робіт і не є кінцевою для жодної роботи;
- **завершальна подія** – визначає закінчення виконання всього комплексу робіт і не є початковою для жодної роботи;
- **проміжна подія** – це подія, яка визначає закінчення та/або початок певних робіт, вона має попередні та подальші роботи.

Довжиною шляху називається сума тривалостей робіт, із яких цей шлях складається.

Найдовший шлях називається **критичним шляхом**.

Довжина критичного шляху визначає тривалість виконання ухваленого плану проведення всього комплексу робіт. **Події та роботи**, що лежать на цьому шляху, називаються **критичними**. Будь-яка затримка з виконання будь-якої критичної роботи призводить до збільшення загального часу виконання всього комплексу робіт.

Мережевий графік будується виходячи з технологічної таблиці, у якій вказується тривалість кожної роботи та її зв'язок з попередніми та наступними роботами.

Вкажемо деякі правила побудови мережевих графіків, які будуть важливі для подальшого.

Мережевий графік не повинен мати циклів та кратних ребер.

Мережевий графік є мережею, тому він є зв'язним графом.

Мережевий графік повинен мати одну вихідну та одну завершальну події.

Події на мережевому графіку нумеруються числами. Для будь-якої роботи номер її початкової події повинен бути меншим за номер її кінцевої події.

Існують певні прийоми, що дозволяють досягнути того, щоб на мережевому графіку не було кратних ребер і були б точно одна вихідна та одна завершальна події.

Найважливішою задачею МПУ є побудова критичного шляху. Для цього спочатку визначаються параметри подій, потім параметри робіт i , виходячи з отриманих результатів, будується критичний шлях.

Наведемо коротко метод визначення параметрів подій та робіт i правило побудови критичного шляху.

Позначення:

i, j – номери подій;

(i, j) – робота, i – її початкова подія, j – її кінцева подія;

$t(i, j)$ – тривалість роботи (i, j) .

Обчислення починаються з визначення параметрів подій, потім визначаються параметри робіт та будується критичний шлях.

Параметри подій:

$t_p(i)$ – ранній термін настання події i – термін, раніше якого подія наступити не може. Для завершальної події ранній термін наступу дорівнює довжині критичного шляху;

$t_n(i)$ – пізній термін настання події i , який дорівнює різниці між довжиною критичного шляху та довжиною найбільшого шляху для події i . Це такий термін, що пізніше настання події призводить до відповідної затримки настання завершальної події, тобто до збільшення довжини критичного шляху;

$R(i)$ – резерв події (резерв часу в термінах настання події), дорівнює різниці між пізнім і раннім термінами настання події i .

Параметри робіт:

$t_{p.n.}(i, j)$ – ранній термін початку роботи (i, j) ,

$$t_{p.n.}(i, j) = t_p(i);$$

$t_{p.z.}(i, j)$ – ранній термін закінчення роботи (i, j) ,

$$t_{p.z.}(i, j) = t_p(i) + t(i, j);$$

$t_{п.з.}(i, j)$ – пізній термін закінчення роботи (i, j) ,

$$t_{п.з.}(i, j) = t_n(j);$$

$t_{п.п.}(i, j)$ – пізній термін початку роботи,

$$t_{п.п.}(i, j) = t_n(j) - t(i, j);$$

$R(i, j)$ – повний резерв роботи,

$$R(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j),$$

використання якого може змінити ранні терміни настання проміжних подій, але не змінює терміну раннього настання завершального події.

Спосіб розрахунку параметрів мережевого графіка.

1. Визначити ранні терміни настання подій:

а) ранній термін настання вихідної події дорівнює нулю;

б) для інших подій цей термін визначається в порядку збільшення номерів подій. Ранній термін настання події дорівнює максимальному з ранніх термінів закінчення робіт, для яких ця подія є кінцевою:

$$t_p(j) = \max\{t_p(i) + t(i, j)\},$$

тут максимум береться за всіма роботами, для яких подія j є кінцевою.

Зауваження 1. Ранній термін настання завершальної події дорівнює довжині критичного шляху (витрат часу на виконання плану).

2. Визначити пізні терміни настання подій:

а) пізній термін настання завершальної події дорівнює довжині критичного шляху;

б) для інших подій цей термін визначається в порядку зменшення номерів подій. Пізній термін настання події дорівнює мініимальному з пізніх термінів початку робіт, для яких ця подія є початковою:

$$t_n(i) = \min\{t_n(j) - t(i,j)\},$$

тут мінімум береться за всіма роботами, для яких подія i є початковою.

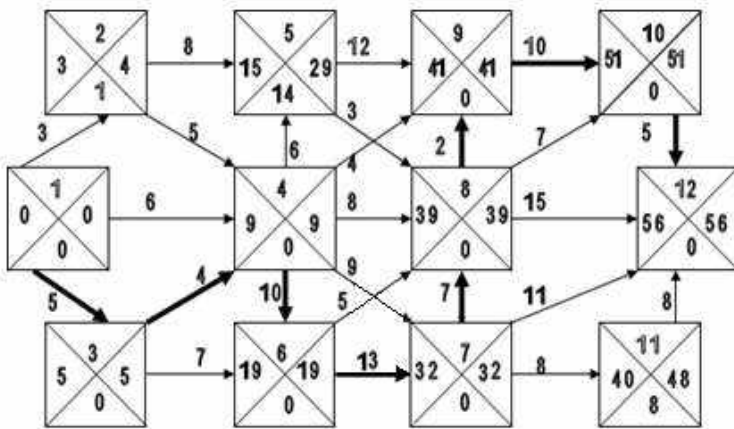
Зауваження 2. Зазначимо, що пізній термін настання вихідної події дорівнює нулю.

3. Визначити резерви подій:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Зауваження 3. Резерв події не може бути меншим за нуль.

4. Знайти всі критичні роботи: робота є критичною тоді і лише тоді, коли її повний резерв дорівнює нулю.



Позначення:



Рисунок 1 - Розрахунок параметрів мережевого графіка

Приклад 1. На рисунку 1 наведено результати розрахунку параметрів мережевого графіка.

Ми припускали, що роботи виконуються точно у запланований термін. Насправді час виконання роботи далеко

не завжди відомий точно. У деяких джерелах розглядаються ситуації, коли тривалість роботи є випадковою. Ми ж далі будемо припускати, що тривалість роботи задана нечітко у формі нечіткого числа.

Питання для самоперевірки:

1. Для чого використовують теорію МПУ?
2. Що дозволяють визначити методи МПУ?
3. Що таке «мережевий графік»?
4. Як на мережевому графіку позначають роботи?
5. Що позначає вершина мережевого графіку?
6. Які роботи називають «наступними» та «попередніми»?
7. Які існують класи робіт?
8. Які події розрізняють на мережевому графіку?
9. Що таке «довжина шляху» і який шлях називають «критичним»?
10. Виходячи з чого будується мережевий графік?
11. Вкажіть правила побудови мережевих графіків.
12. Що є найважливішою задачею МПУ?

Задача про найкоротшу відстань на орієнтованій мережі без циклів

Розглядаючи мережевий графік, ми вирішували задачу знаходження найдовшого шляху від першої вершини до останньої. Розглянемо задачу – знайти найкоротший шлях на мережевому графіку. При вирішенні проблем, пов'язаних з перевезеннями вантажів різними видами транспорту на дорогах з одностороннім рухом, часто виникає проблема вибору оптимального маршруту руху. Якість маршруту зазвичай оцінюється його протяжністю (часом руху, транспортними витратами, що вимірюються в грошових одиницях, тонно-кілометрах, тонно-годинах тощо). Надалі під терміном «довжина» будемо розуміти відстань, час або якийсь інший показник, що характеризує маршрут, значення якого дорівнює сумі значень показників, що характеризують комунікації маршруту, до мінімізації якого ми прагнемо.

Розглянемо таку задачу. Нехай є деяка мережа, яка є орієнтованим графом без циклів і кратних ребер, що містить n

вершин. Кожній її дузі (i, j) співвіднесено число d_{ij} , яке трактуватимемо як довжину комунікації (i, j) . Потрібно знайти шлях з вершини l у вершину n , який має мінімальну довжину. Під довжиною шляху розумітимемо суму довжин комунікацій, з яких він складається. Будемо також припускати, що всі $d_{ij} \geq 0$.

Алгоритм вирішення цього завдання має багато спільного з розглянутим раніше шляхом пошуку критичного шляху на мережевому графіку і виходить з методу динамічного програмування.

Перенумеруємо всі вершини мережі числами так, щоб для будь-якої комунікації номер вершини її початку був меншим за номер вершини її кінця.

Послідовно, починаючи з передостанньої вершини, в порядку спадання номерів вершин обчислюємо найкоротшу відстань S_{in} розглянутої вершини з номером i до вершини з номером n :

$$S_{in} = \min\{d_{ir} + S_{rn}\},$$

тут мінімум шукається за всіма комунікаціями, які починаються з вершини i , відзначимо, $i < r$. Тобто найкоротша відстань від розглянутої вершини до останньої дорівнює найменшій із сум: довжина комунікації, що починається в розглянутій вершині, плюс найкоротша відстань від кінця цієї комунікації до останньої вершини.

Нехай $S_{in} = d_{iu} + S_{un}$, тоді u – це номер вершини, в яку слід рухатись, потрапивши у вершину i . Розглянута вершина (вершина з номером i) отримує мітку (S_{in}, u) . Нехай перша вершина отримала мітку (S_{1n}, v) . Отже, довжина найкоротшого маршруту з вершини 1 у вершину n дорівнює S_{1n} і рухатися з вершини 1 треба у вершину v . Якщо мітка вершини v дорівнює (S_{vn}, w) , то, значить, з вершини v треба рухатися у вершину w і т. д.

Приклад 2. На рисунку 2 представлені результати розв'язання задачі по знаходженню найкоротшого шляху від першої вершини до вершини з номером сім. Найкоротший шлях виділений жирними лініями.

Зауважимо, що викладений алгоритм аналогічний методу визначення пізніх термінів настання подій у мережевому графіку.

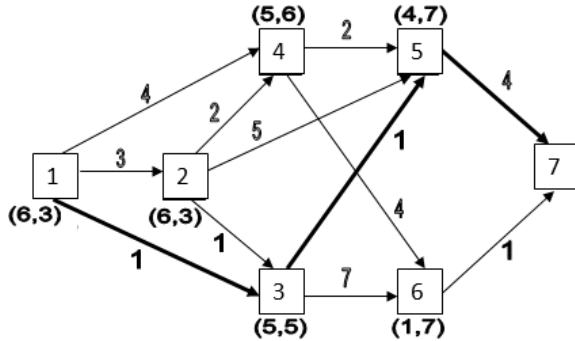


Рисунок 2 – Задача про найкоротшу відстань на орієнтованій мережі без циклів

Задача про найкоротший маршрут на змішаному графі

Задача про найкоротший шлях є одним із найважливіших класичних завдань теорії графів. Це завдання має різноманітні застосування на практиці, наприклад у GPS-навігаторах для пошуку найкоротшого шляху між двома пунктами. Наразі отримано цілу низку алгоритмів для її вирішення, ми зупинимося на **алгоритмі Дейкстри**.

Отже, маємо деяку мережу, що містить n вершин. Кожній її комунікації (i, j) відповідає число d_{ij} , яке трактуватимемо як довжину комунікації (i, j) . Потрібно знайти змішаний шлях з вершини 1 у вершину n , який має мінімальну довжину. Надалі для стислості замість терміну змішаний шлях будемо використовувати термін **маршрут**. Під **довжиною маршруту** будемо розуміти суму довжин комунікацій, з яких він складається. Будемо також припускати, що всі $d_{ij} \geq 0$.

Якщо вершини i та j не з'єднані жодною комунікацією, то тоді $d_{ij} = \infty$, якщо між вершинами i та j є тільки дуга (i, j) , то $d_{ji} = \infty$. Для неорієнтованих ребер приймаємо, що $d_{ij} = d_{ji}$. Зауважимо, що якщо на мережі є дуги (i, j) та (j, i) , то зовсім необов'язково, щоб $d_{ij} = d_{ji}$.

Розглянемо більш загальну задачу. Замість відшукування найкоротшого маршруту з першої вершини до вершини n

номером n будемо шукати найкоротші маршрути з першої вершини до решти вершин мережі.

Алгоритм Дейкстри вирішення цієї задачі полягає в тому, що ми послідовно розширюватимемо множину вершин, до яких шукані маршрути вже знайдені. Таким вершинам ми будемо надавати постійні позначки, решті – тимчасові позначки.

Постійна позначка складається з двох частин і для вершини з номером k має вигляд:

$$(\overline{r}; L_k),$$

де L_k – довжина найкоротшого маршруту від першої вершини до вершини з номером k ; r – така вершина, що комунікація (r, k) лежить на цьому маршруті.

Тимчасова позначка також складається з двох частин і для вершин з номером k має вигляд:

$$(r; l_k),$$

де r – вершина, сусідня з вершиною k (тобто вершини r і k з'єднані комунікацією (r, k)); l_k – довжина маршруту, що проходить через вершину r і з'єднує першу вершину з вершиною k .

Опишемо тепер алгоритм пошуку найкоротших маршрутів від першої вершини мережі до решти її вершин.

Алгоритм починається з підготовчого етапу, на якому відбувається початкова побудова позначок. Перша вершина отримує постійну позначку $(\overline{l}; \overline{0})$, інші вершини отримують тимчасові позначки $(l; d_{lk})$ (k – номер розглянутої вершини). Ми вважаємо, що кожна вершина мережі з'єднана з кожною. Якщо насправді комунікації між вершинами i та j немає, то ми вважаємо, що вона є, але має довжину, рівну нескінченності. Тому, якщо в нашій мережі комунікація (l, k) відсутня, то $d_{lk} = \infty$.

Надалі алгоритм складається із послідовності ітерацій, кожна з яких складається з наступних кроків.

1. Знаходимо таку вершину k , що

$$l_k = \min l_u,$$

тут мінімум береться за всіма вершинами u з тимчасовими позначками.

Виявляється, що l_k є найкоротшою відстанню від першої вершини до вершини k .

2. Тимчасова позначка $(r; l_k)$ вершини k замінюється на постійну позначку

$$\overline{(r; L_k)},$$

де $L_k = l_k$.

3. Перераховуємо тимчасові позначки. Для цього розглядаємо вершини з тимчасовими позначками, сусідні з вершиною k (яка щойно отримала постійну позначку), і перевіряємо, чи не буде коротшим шлях від першої вершини до аналізованої, якщо рухатися через вершину k . Якщо цей шлях коротший, то знаходимо його довжину і надаємо вершині j (j – номер аналізованої вершини) нову тимчасову позначку $(k; L_k + d_{kj})$; в іншому випадку тимчасова позначка вершини не змінюється. Тобто ми для кожної вершини j , сусідньої з вершиною k , яка має тимчасову позначку $(u(j); l_j)$, обчислюємо суму:

$$L_k + d_{kj}.$$

Якщо $L_k + d_{kj} < l_j$, то вершина отримує нову тимчасову позначку $(k; L_k + d_{kj})$. Інакше тимчасова позначка вершини не змінюється.

4. Якщо ще не всі вершини мають постійні позначки, то переходимо до кроку 2, інакше всі ітерації виконані і залишилося побудувати найкоротші маршрути.

Алгоритм закінчується етапом, у якому відновлюються найкоротші маршрути від першої вершини до інших. Розглянемо вершину з номером k , нехай вона має постійну позначку $\overline{(r; L_k)}$, отже найкоротший маршрут до неї від першої вершини проходить через вершину r . Розглядаємо вершину r , якщо ліва частина її постійної позначки дорівнює w , то найкоротший маршрут до неї проходить через вершину w , і так далі, поки не дійдемо до першої вершини. На цьому алгоритм закінчує свою роботу.

Приклад 3. Знайти шляхи найкоротшої довжини від першої вершини до інших на мережі, зображеної на рисунку 3.

Перша ітерація

Виконуючи крок 1, знаходимо, що $k = 4$ (ми розглянули всі вершини, що мають тимчасові позначки, тобто вершини 2, 3, 4, 5, 6, 7, і обрали з них ту, права частина позначки якої мінімальна).

Виконуючи крок 2, знаходимо, що вершина 4 отримує постійну позначку $(1; 1)$.

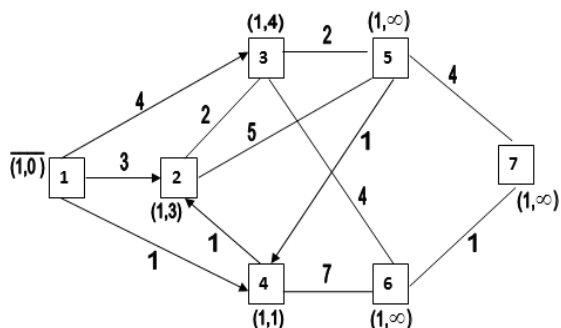


Рисунок 3 – Позначки після виконання підготовчого етапу

При виконанні кроку 3 перераховуємо тимчасові позначки для вершин, пов'язаних комунікаціями з четвертою вершиною – для вершин 2 і 6. До вершини 2 добиратися ближче, якщо рухатися через вершину 4: $1 + 1 < 3$, отже вона отримує нову тимчасову позначку $(4; 2)$. До вершини 6 теж ближче, якщо рухатися через четверту вершину: $1 + 7 < \infty$, отже, і вона отримує нову тимчасову позначку $(4; 8)$. Результати обчислень кроків 2 та 3 вказані на рисунку 4.

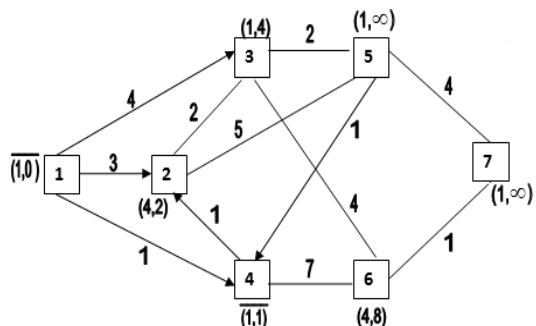


Рисунок 4 – Результати виконання першої ітерації

Друга ітерація

Крок 1. Знаходимо, що $k = 2$ (ми розглянули вершини 2, 3, 5, 6, 7 і вибрали з них ту, права частина позначки якої мінімальна).

Крок 2. Вершина 2 отримує постійну позначку $(4; 2)$.

Крок 3. Перераховуємо тимчасові позначки для вершин, пов'язаних комунікаціями з другою вершиною, – 3 та 5. Результати обчислень пунктів 3 та 4 алгоритму вказані на рисунку 5.

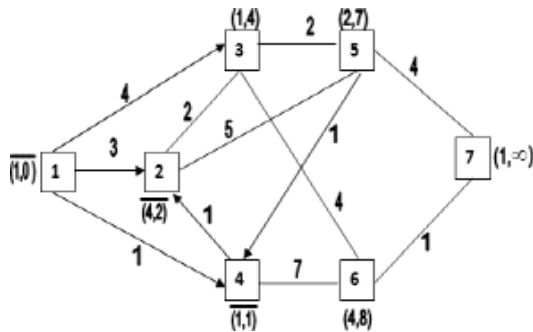


Рисунок 5 – Результати виконання другої ітерації

Зауважимо, що вершині 3 можна присвоїти нову тимчасову позначку $(2; 4)$, а можна залишити стару, що ми і зробили (це говорить про те, що до цієї вершини може бути декілька (два) найкоротших шляхи від першої вершини).

Подальші обчислення наведено на рисунках 6 – 8.

На рисунку 9 комунікації, що становлять найкоротші шляхи від першої вершини до інших, позначені жирними лініями.

Слід зазначити високу ефективність розглянутого алгоритму та його широку застосовність. Бортові комп'ютери сучасних автомобілів дозволяють знаходити трасу найкоротшого шляху, і роблять це за допомогою описаного алгоритму. Маршрутизатори, що є найважливішими елементами глобальної комп'ютерної мережі Інтернет, визначаючи маршрут доставки повідомлення з одного сервера на інший, також використовують цей алгоритм.

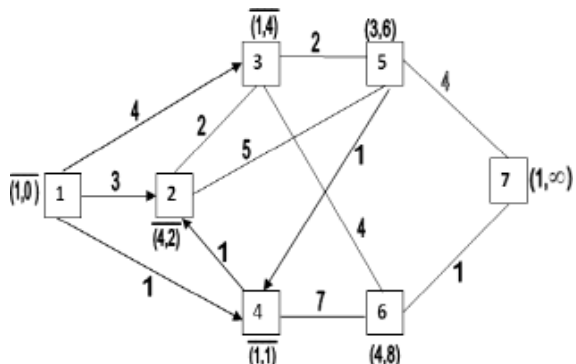


Рисунок 6 – Результати виконання третьої ітерації

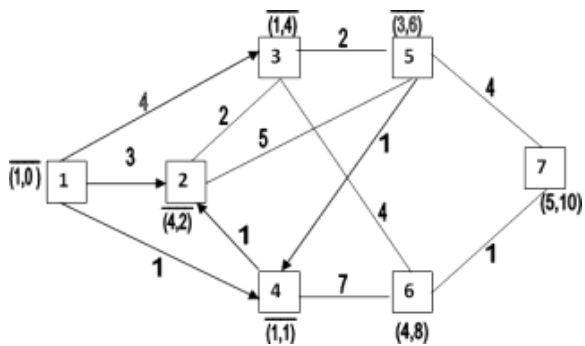


Рисунок 7 – Результати виконання четвертої ітерації

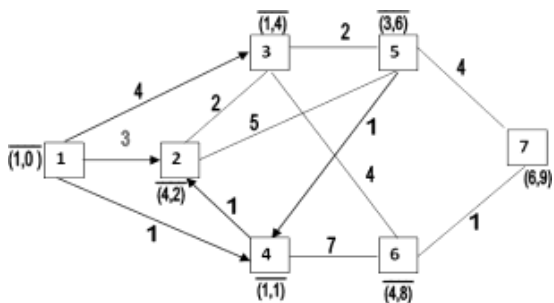


Рисунок 8 – Результати виконання п'ятої ітерації

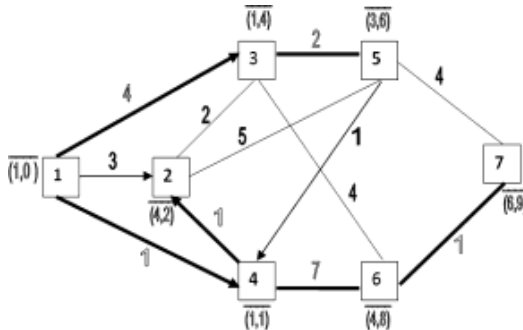


Рисунок 9 – Результати виконання останньої ітерації

Питання для самоперевірки:

1. Що розуміють під «довжиною маршруту»?
2. Надайте визначення «постійної позначки».
3. Як позначається «тимчасова позначка»?
4. Опишіть алгоритм пошуку найкоротших маршрутів від першої вершини мережі до решти її вершин.

Задача про найкоротше з'єднання

Розглянемо так звану задачу про найкоротше з'єднання, яка виникає при вирішенні, наприклад, наступної проблеми: відоме розташування деяких населених пунктів та траси доріг, які можна побудувати. Відомі також довжини (проектні вартості будівництва, час руху, вартість проїзду тощо) цих доріг. Потрібно визначити, які з цих доріг слід побудувати, щоб отримана дорожня мережа дозволяла потрапити з будь-якого пункту в будь-який інший і з усіх можливих таких мереж мала б найменшу вартість будівництва.

Задача про знаходження найкоротшого (най дешевшого з'єднання) має практичне застосування в ході будівництва або ремонту доріг, при прокладанні трубопроводів для постачання ряду пунктів питною водою, газом, нафтою та в ряді інших випадків, коли потрібно пов'язати певні пункти з найменшою витратою сил і засобів, тобто побудувати мінімальну мережу.

Сформулюємо аналізовану задачу мовою теорії графів: для заданого неорієнтованого графа знайти мінімальний кістяк – кістяк, сума ваг ребер якого мінімальна.

Теорема 1. Розв'язанням задачі про найкоротше з'єднання є кістяк.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто що підграф, який є рішенням задачі (що містить всі вершини мережі і має мінімальну вагу), не є деревом. Тоді у ньому існує цикл. Прибравши довільну комунікацію цього циклу, ми отримаємо підграф, що містить усі вершини, але меншої ваги, що суперечить вихідному припущенню.

Теорему доведено.

Для позначення мінімального кістяка будемо використовувати аббревіатуру МК (мінімальний кістяк).

Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний граф і $U \subset V$.

Наведемо суть алгоритму Краскала.

Нехай задано зв'язний зважений граф $G = (V, E)$, що має n вершин, і нехай для будь-якого ребра $e \in E$ визначено його вагу $d(e) > 0$.

Починаємо з графа $G_0 = (V, \emptyset)$, який складається лише з вершин графа $G = (V, E)$ і не має ребер. Цей граф можна розглядати як n компонент зв'язності, кожна з яких складається з однієї вершини.

Надалі алгоритм складається із послідовності наступних етапів. На етапі з номером k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) будується граф $G_k = (V, T_k)$, для цього до множини ребер T_{k-1} графа G_{k-1} додається одне ребро, яке вибирається по наступному правилу:

- у графі $G = (V, E)$ вибираємо ребро мінімальної ваги з числа ребер, що не належать T_{k-1} ;
- якщо додавання цього ребра до T_{k-1} не призводить до утворення циклу, то приєднуємо це ребро до T_{k-1} , отримуємо T_k та граф $G_k = (V, T_k)$;
- якщо цикл утворюється, то із ребер графа $G = (V, E)$, що залишилися, які не належать T_{k-1} , вибираємо ребро мінімальної ваги і т. д.

Граф G_{n-1} є мінімальним кістяком графа G .

Теорема 2. Алгоритм Краскала дає МК.

Доведення. Покажемо спочатку, що при $0 < i < n - 1$ граф G_i можливо побудувати. Справді, розглянемо множину ребер T_{i-1} та $E \setminus T_{i-1}$. В силу зв'язності графа G знайдеться таке ребро (k, l) , що $k \in T_{i-1}$ і $l \in E \setminus T_{i-1}$. Це ребро не утворює циклу з ребрами з T_{i-1} . Обравши з усіх таких ребер ребро з мінімальною вагою, отримаємо ребро, приєднання якого до T_{i-1} дасть T_i . Зауважимо, що $G_i = (V, T_i)$ – зв'язний граф.

Доведемо тепер, що T_{n-1} є кісткою мінімальної ваги в графі G .

Розглянемо граф G_{n-1} з множиною ребер T_{n-1} . Так як він зв'язний і складається з n вершин та $(n - 1)$ ребер і не має циклів, то він є деревом. Покажемо, що вага дерева G_{n-1} мінімальна.

Припустимо, що це не так. Серед усіх кістяків графа G , що мають мінімальну вагу, оберемо такий кістяк з множиною ребер T , який має з T_{n-1} максимальну кількість загальних ребер. Нехай $e_i = (a, b)$ – ребро з T_{n-1} , що не міститься в T і має мінімальний номер серед ребер множини T_{n-1} , що не входять до T . (Ребра в множині T_{n-1} отримали номери в процесі його побудови, в порядку їх приєднання до графа, що будується). У множині T є ланцюг, що з'єднує вершини a і b , приєднавши до неї ребро e_i , отримаємо цикл. У цьому циклі є ребро e , яке не входить в T_{n-1} (інакше T_{n-1} містить цикл). Замінивши в T ребро e на e_i , отримаємо новий кістяк $T' = T \setminus \{e\} \cup \{e_i\}$. Але T – кістяк мінімальної ваги, отже, вага T' не менше ваги T . Звідси випливає, що вага ребра e_i не менше ваги ребра e .

Приєднуючи ребро e до T_{i-1} (при $i = 1$ вважаємо $T_{i-1} = \emptyset$), ми не отримаємо циклу оскільки ребра $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e$ входять в множину T . Якби вага ребра e була менше за вагу ребра e_i , то при побудові дерева T_i ми взяли б не e_i , а e (або інше ребро з вагою меншою ваги e_i). Отже, вага ребра e_i дорівнює вазі ребра e , і ваги дерев з множинами ребер T та T' однакові.

Отже, T' – кістяк мінімальної ваги. Число ребер, загальних для множин T' та T , більше, ніж число загальних ребер для T_{n-1} і T ($T' = T \setminus \{e\} \cup \{e_i\}$), що суперечить вибору множини T . Отримана суперечність доводить теорему.

Приклад 4. Розглянемо мережу представлену на рисунку 10.

На першому кроці вибирається комунікація (c, d) (зауважимо, що можна було б вибрати (a, b)), потім (a, b) і (e, d) . Вибір (c, e) неможливий через порушення умови, пов'язаної з виникненням циклу, тому вибираємо (c, f) , потім (a, f) (або навпаки). На цьому побудова кістяка закінчується і процес обривається.

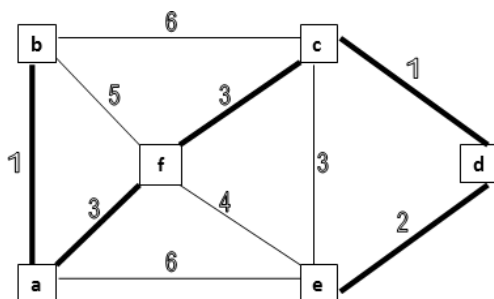


Рисунок 10 – Задача про найкоротше з'єднання

Задача про максимальний потік

У якості мережі розглянемо, наприклад, мережу автомобільних доріг у певному регіоні. Вершинам мережі відповідають деякі географічні пункти, а комунікаціям – дороги, що з'єднують ці пункти. При цьому ребро відповідає дорозі з двостороннім рухом, а дуга – дорозі з одностороннім рухом, здійснюваному у бік орієнтації дуги. Будемо знову припускати, що всі пункти (вершини) пронумеровані і їх число дорівнює n . Як і раніше, ми будемо ототожнюватимемо сам пункт з його номером. Задано пропускні здатності доріг b_{ij} (b_{ij} – пропускна здатність дороги, що з'єднує пункти i та j).

На мережі виділяються дві вершини, одна з них називається **джерелом**, її номер вважаємо рівним 1, позначимо її буквою s ; інша – **стоком**, її номер – n , її позначимо літерою t .

Потрібно знайти максимальний (за обсягом або вагою, або ціною, або тощо) потік вантажів, який можна пропустити з джерела в стік за одиницю часу, при цьому передбачається, що в проміжних пунктах вантажі не споживаються і не виникають.

Щоб сформулювати цю задачу точніше, введемо поняття потоку в мережі.

Потоком із джерела в стік в мережі називатимемо множину невід'ємних чисел x_{ij} (у прикладі з дорожньою мережею це обсяги перевезень по кожній комунікації за одиницю часу), які відповідають таким умовам:

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = 0, & \text{якщо } i \neq 1, k \neq n, \\ \sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn} = v, \end{cases} \quad (1)$$

$$v \geq 0, \quad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \text{ для всіх } i \text{ та всіх } j. \quad (3)$$

У лівій частині формули (1) перша сума береться по всім комунікаціям, для яких $b_{ij} > 0$ (якими можна здійснювати підвіз в пункт j); друга сума береться за всіма комунікаціями, для яких $b_{jk} > 0$ (якими можна здійснювати вивезення коштів з пункту j).

Число v (підкреслимо, що воно невід'ємне) називається **величиною потоку**. Число x_{ij} називається **потоком по комунікації** (ij). Відмітимо, що по дузі (ij) потік може протікати тільки в одному напрямку від i до j , тому $x_{ij} \geq 0$, а $x_{ji} = 0$; по ребру (ij) потік може протікати в обох напрямках, якщо він протікає від i до j , то $x_{ij} > 0$, якщо він протікає від j до i , то $x_{ji} > 0$.

Умови (1) виражають той факт, що в кожену вершину, крім джерела та стоку, приходять рівно стільки ж потоку, скільки з неї його виходить (у проміжних пунктах вантажі не споживаються і не виникають). Умови (3) показують, що потік по комунікації (ij) не може бути менше нуля та більше її пропускної спроможності.

Задача пошуку потоку, що має максимальну величину, є задачею лінійного програмування з цільовою функцією:

$$v = \sum_j x_{sj}, \quad (4)$$

підсумовування береться за всіма комунікаціями, що йдуть із джерела.

Але завдяки специфіці цієї задачі для її вирішення було отримано значно ефективніші методи, ніж симплекс-метод.

Розглянемо алгоритм, що впливає з теореми Форда-Фалкерсона про максимальний потік і мінімальний розріз.

Зауважимо, що якщо мережа є змішаним шляхом (змішаний шлях складається з ребер і дуг, при цьому при русі від початку змішаного шляху до кінця дуги прохід відбувається у напрямку їх орієнтації), то максимальна величина потоку дорівнює мінімальній з пропускних здатностей комунікацій цього шляху. Таким чином, комунікація з мінімальною пропускною здатністю є «вузьким місцем» у такій мережі. Узагальнимо поняття «вузького місця» для випадку довільних мереж. Для цього введемо поняття розрізу (X, \bar{X}) мережі, де X – підмножина множини V вершин мережі, $\bar{X} = V \setminus X$ – множина всіх вершин мережі, що не потрапили до X .

Розрізом (X, \bar{X}) називається множина всіх комунікацій (ij) , для яких $i \in X, j \in \bar{X}$ або навпаки $j \in X, i \in \bar{X}$, тобто розріз – це множина всіх комунікацій, у яких один кінець є вершиною з множини X , а другий – з множини \bar{X} . Видалення з мережі всіх комунікацій розрізу (X, \bar{X}) перетворює мережу на незв'язану, тобто вихідна мережа розпадається на дві (або більше) частини, які не пов'язані між собою.

Наприклад, розглянемо мережу, зображену на рисунку 11.

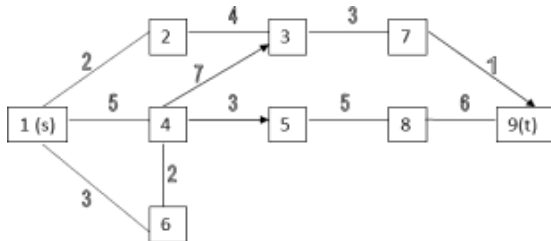


Рисунок 11 – Приклад дорожньої мережі

Розглянемо розріз (X, \bar{X}) , де $X = \{1,2,4\}$, $\bar{X} = \{3,5,6,7,8,9\}$, тоді розріз (X, \bar{X}) складається з дуг $(4,3)$ та $(4,5)$ і ребер $(2,3)$, $(1,6)$, $(4,6)$. Видалення цих комунікацій розбиває мережу на три не пов'язані між собою зв'язні частини (рисунки 12).

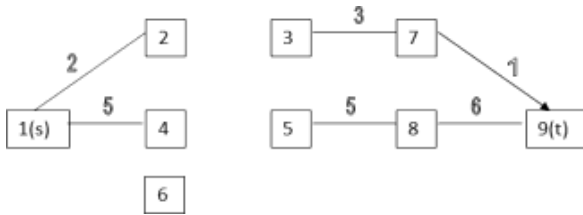


Рисунок 12 – Дорожня мережа після видалення комунікацій розрізу

Розріз (X, \bar{X}) називається таким, що **розділяє джерело і стік** (вершини s і t), якщо $s \in X, t \in \bar{X}$.

Пропускною здатністю (величиною) розрізу (X, \bar{X}) називається величина

$$C(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j)} b_{ij},$$

де сума береться за всіма дугами (i, j) , що ведуть з X в \bar{X} , і по всім ребрам (i, j) , що з'єднують вершини із X з вершинами із \bar{X} .

Взагалі кажучи, $C(X, \bar{X}) \neq C(\bar{X}, X)$. Для мережі, зображеної на рисунку 11, при

$$X = \{1, 2, 4\}, \bar{X} = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

маємо

$$C(X, \bar{X}) = 4 + 7 + 3 + 2 + 3 = 19, C(\bar{X}, X) = 4 + 3 + 2 = 9.$$

Розріз (X, \bar{X}) , що розділяє джерело і стік і має мінімальну величину, є узагальненням поняття «вузьке місце» змішаного шляху на випадок довільної мережі.

Розглянемо тепер алгоритм розв'язання задачі про максимальний потік. Зауважимо, що зазначений алгоритм безпосередньо впливає з доказу наступної теореми.

Теорема 3. (Форда – Фалкерсона про максимальний потік і мінімальний розріз). У будь-якій мережі величина максимального потоку з джерела в стік дорівнює величині мінімального (за пропускною здатністю) розрізу, що розділяє джерело та стік.

Доведення. Очевидно, що величина максимального потоку не може бути більшою за пропускну здатність будь-якого розрізу, що розділяє вершини s і t .

Доведемо і зворотне твердження. Припустимо, що величини b_{ij} – цілі. Насправді ця теорема вірна й у загальному випадку.

Отже, нехай числа x_{ij} задовольняють умовам (1) – (3). Якщо величина цього потоку дорівнює пропускній здатності деякого розрізу, що розділяє джерело і стік, вона дорівнює пропускній здатності саме мінімального розрізу (розрізу з мінімальною пропускну здатністю), що розділяє джерело і стік, і теорема доведена. Якщо ж ні, то величину потоку можна збільшувати доти, доки вона не стане рівною пропускній здатності деякого розрізу, що розділяє джерело і стік. Зазначимо, що числа x_{ij} , які відповідають умовам (1) – (3), завжди існують, наприклад $x_{ij} = 0$ для всіх i та j .

Покажемо, як можна збільшити потік у цьому випадку.

Маючи потік x_{ij} в мережі, побудуємо по ньому множину вершин X за наступними правилами:

1. $s \in X$, тобто джерело є елементом множини X .
2. Якщо $i \in X$ і $x_{ij} < b_{ij}$, то $j \in X$, тобто якщо для якоїсь вершини вже відомо, що вона є елементом множини X , при цьому існує така комунікація (i, j) , що запланований по ній потік x_{ij} (з вершини i у вершину j) менше пропускну спроможності b_{ij} цієї комунікації (в даному випадку потік по комунікації (i, j) у напрямку від i до j можна збільшити), то вершина j теж є вершиною з множини X .
3. Якщо $i \in X$ та $x_{ji} > 0$, то $j \in X$, тобто якщо $i \in X$ і потік, що надходить з деякої вершини j у вершину i (зустрічний потік) можна зменшити, то вершина $j \in X$. Вершини, що не належать множині X , утворюють множину \bar{X} .

Будуючи множину X за вказаними правилами, ми можемо отримати один із двох можливих випадків:

а) Вершина $t \notin X$. Тоді для всіх дуг та ребер з розрізу (X, \bar{X}) виконано $x_{ij} = b_{ij}$ ($i \in X, j \in \bar{X}$) і не існує таких комунікацій у цьому розрізі, що $x_{ji} > 0$ (це впливає відповідно до правил 2 і 3).

Отже, отримано потік, величина якого дорівнює $C(X, \bar{X})$.

Теорему доведено.

б) Тут нам буде потрібно поняття квазішляху: **квазішляхом** називатимемо таку послідовність ребер і дуг, що якщо прибрати орієнтацію з дуг, то вийде ланцюг. Тобто при русі вздовж квазішляху деякі дуги можуть бути пройдені в протилежному напрямку їх орієнтації.

Отже, другий випадок полягає у тому, що стік не належить X , тобто $t \notin X$. Тоді існує квазішлях з вершини s у вершину t , в якому для кожної комунікації зустрічний потік більший за нуль, а попутний потік менший за її пропускну здатність.

При русі по квазішляху, що розглядається, деякі його комунікації будуть пройдені в напрямку, що збігається з напрямом потоку по них (такі комунікації називаються **прямими комунікаціями**), інші – в напрямку, протилежному напрямку потоку (**зворотні комунікації**).

Отже, існує квазішлях із джерела в стік, в якому $x_{ij} < b_{ij}$ на всіх прямих комунікаціях та $x_{ji} > 0$ на всіх зворотних. Нехай a_1 – мінімальна з різниць $(b_{ij} - x_{ij})$ для всіх прямих комунікацій, якщо прямих комунікацій немає, то $a_1 = \infty$; a_2 – мінімальна з величин x_{ji} по всіх зворотних комунікаціях, якщо зворотних комунікацій немає, то $a_2 = \infty$. Візьмемо $a = \min\{a_1, a_2\}$. Очевидно, що $a > 0$.

Таким чином, ми можемо збільшити на a потік на всіх прямих комунікаціях квазішляху, що розглядається, і зменшити на a потік на всіх його зворотних комунікаціях. Тоді величина потоку збільшиться на a та нові значення x_{ij} потоків за комунікаціями задовольнятимуть умовам (1) – (3).

За новим потоком знову будемо множини X і т. д. Так як величина мінімального розрізу є величина скінченна, а ми щоразу збільшуємо потік не менше ніж на одиницю (ми ж передбачали пропускні здатності рівними цілим числам), то за скінченну кількість кроків ми обов'язково отримаємо максимальний потік. Теорему доведено.

Приклад 5. Знайти потік максимальної величини (максимальний потік) на мережі, що представлена на рисунку 13, що реалізує можливий обсяг перевезень матеріальних ресурсів від постачальника на тимчасовий склад в умовах обмеженої пропускної здатності мережі комунікацій району ліквідації наслідків надзвичайної ситуації.

1. Будуємо початковий потік x_{ij} . Для цього знаходимо декілька (можна і один) змішаних шляхів, що не перетинаються по комунікаціях, з джерела в стік. Для кожного з цих шляхів знаходимо максимальний потік, який можна пропустити по ним, нехай його величина дорівнює b :

$$b = \min_{(i,j)} x_{ij},$$

мінімум береться за всіма комунікаціями аналізованого шляху; нехай $x_{ij}=b$ для всіх комунікацій цього шляху, причому напрямком підвезення по кожній комунікації збігається з напрямком руху від початку цього шляху до його кінця.

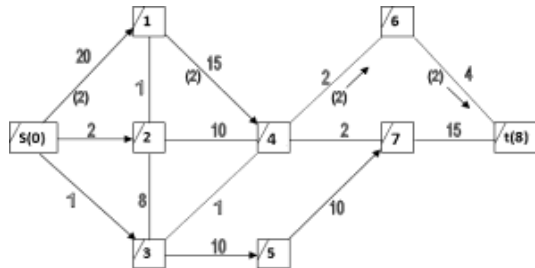


Рисунок 13 – Умови задачі про максимальний потік та її початковий потік

У прикладі ми взяли змішаний шлях, що проходить через вершини $s, 1, 4, 6, t$; для цього шляху $b = 2$. На рисунку 13 поряд з комунікаціями дано їх пропускі здібності, а обсяги перевезень дано у дужках, напрямком перевезень там, де це необхідно, зазначено стрілкою. Якщо обсяг перевезень по комунікації не вказано, він дорівнює нулю.

2. Будуємо множину X , її вершини на рисунку 13 позначені рискою у верхньому лівому куті прямокутника. Для подальшого корисно запам'ятовувати порядок побудови цієї множини. Ми будували множину X у порядку, наведеному на схемі (рисунок 14).

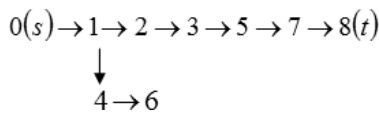


Рисунок 14 – Схема побудови множини X

Звичайно, порядок побудови цієї множини може бути й іншим.

Зазначимо, що вершини 4 і 6 можна не перевіряти на приналежність до множини X .

Ми бачимо, що вершина t потрапила до множини X , отже, потік можна збільшити.

3. Шукаємо квазішлях, потік уздовж якого можна збільшити. Цей квазішлях можна взяти зі схеми побудови множини X . На цій схемі знайдемо послідовність вершин від s до t . Квазішлях, що проходить через вершини цієї послідовності, і буде шуканим:

$(s, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 7), (7, t)$ (Рисунок 15).

Для цього шляху $a = 1$.

Далі на рисунках, що ілюструють рішення прикладу 5, у дужках вказані обсяги перевезень по комунікаціям; стрілками відзначені напрямки перевезень за відповідними комунікаціями; вершини з множини X позначені рискою в лівому верхньому куті відповідного прямокутника.

4. Збільшуємо потоки по комунікаціям цього квазішляху на a і виконуємо пункт 2 і т.д.

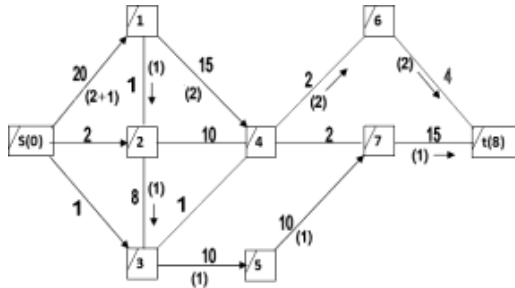


Рисунок 15 – План перевезень після першої ітерації

Рішення прикладу, що розглядається, представлено на рисунках 16 – 18.

Уздовж квазішляху $(s, 1), (1, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 7), (7, t)$ потік можна збільшити на 1.

Уздовж квазішляху $(s, 2), (2, 4), (4, 7), (7, t)$ $a = 2$, уздовж квазішляху $(s, 3), (3, 5), (5, 7), (7, t)$ $a = 1$ (дивись рисунок 16).

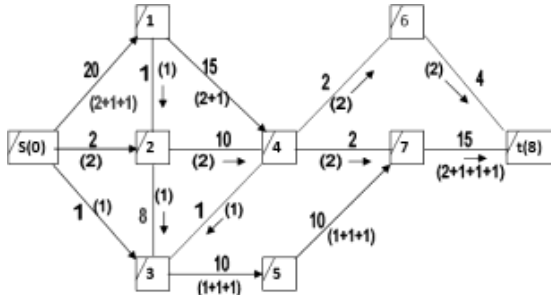


Рисунок 16 – План перевезень після другої-четвертої ітерації

Уздовж квазішляху $(s, 1), (1, 4), (4, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 7), (7, t)$ $a = 2$. Новий потік показаний рисунку 17. Зауважимо, що ребро $(4, 2)$ ми проходимо у зворотному напрямку, тому потік x_{24} ми зменшуємо на 2.

Уздовж квазішляху $(s, 1), (1, 4), (4, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 7), (7, t)$ $a = 5$ (дивись рисунок 18).

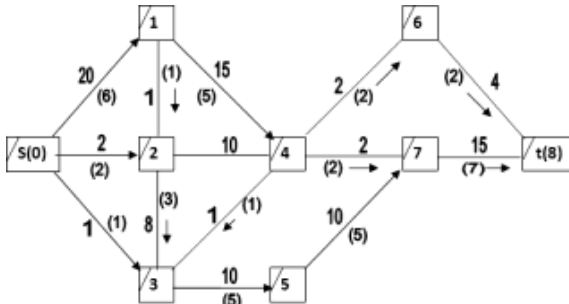


Рисунок 17 – План перевезень після п'ятої ітерації

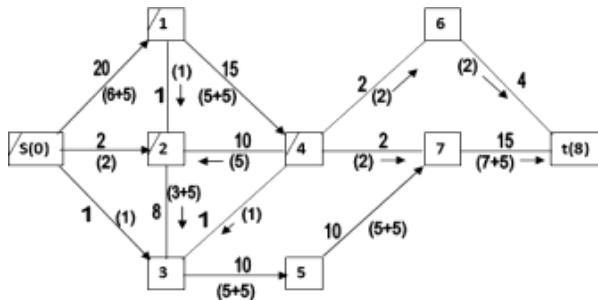


Рисунок 18 – Оптимальний план перевезень

Нагадаємо, що риска в кутку прямокутника, що зображує вершину, означає, що ця вершина потрапила до множини X . Ми бачимо, що після останньої ітерації $X = \{s, 1, 2, 4\}$ та $\bar{X} = \{3, 5, 6, 7, t\}$. Пропускна здатність розрізу (X, \bar{X}) дорівнює $2 + 2 + 1 + 1 + 8 = 14$. Потік такої величини представлений на рисунку 18.

Питання для самоперевірки:

1. Які вершини виділяють на мережі?
2. Що називають «потокком із джерела в стік»?
3. Як позначають «величину потоку» та «потік по комунікації»?
4. Що називається «розрізом»?
5. За яких умов розріз називається «розділяючим джерело і стік»?
6. Як визначається пропускна здатність (величина) розрізу?
7. Що таке «квазішлях»?
8. Які комунікації називають прямими, а які – зворотними?

Паросполучення в графах

Розглянемо задачу про призначення, у якій потрібно виконати n робіт силами n виконавців. При цьому всі виконавці повинні виконати точно по одній роботі і всі роботи повинні бути виконані. Відомий дохід, який отримується при виконанні кожної роботи кожним виконавцем. Потрібно розподілити роботи по виконавцям так, щоб сумарний прибуток від виконання всіх робіт був максимальним. Ця задача називається задачею про призначення.

Зауважимо, що у разі коли задані, скажімо, витрати на виконання різних робіт різними виконавцями, метою є такий розподіл, при якому сумарні витрати мінімальні. Використовуючи як характеристику призначення виконавця на роботу різницю між деяким числом і зазначеними витратами, ми від даної задачі на мінімум перейдемо до еквівалентної задачі на максимум.

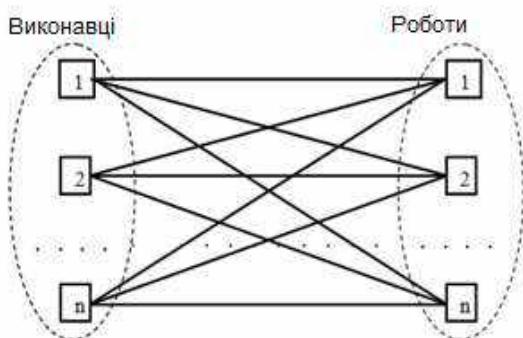
Найбільш ефективним методом вирішення сформульованої задачі є угорський метод, розроблений та опублікований Гарольдом Куном у 1955 р. Сам Кун дав алгоритму назву «угорський», тому що він був значною мірою заснований у ранніх

роботах двох угорських математиків: Денеша Кеніга та Ейгена Егерварі.

Моделей задачі про призначення існує дуже багато. Розглянемо модель, що використовує дводольні графи та сформулюємо задачу про призначення в термінах дводольних графів.

Розглянемо дводольний граф $G = (V_1, V_2, E)$, у якого множина вершин V складається з двох непересічних підмножин V_1 і V_2 (риснок 19):

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$



Рисунк 19 – Дводольний граф у задачі про призначення

Вершини з V_1 відповідають виконавцям, вершини з V_2 – роботам. Кожна вершина з V_1 з'єднана ребром з кожною вершиною з V_2 . Ці ребра відповідають можливим призначенням виконавців роботи. Кожному ребру співвіднесене число – дохід, який отримується при виконанні відповідної роботи відповідним виконавцем. Позначатимемо ці доходи як $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$, тут i – порядковий номер виконавця, j – роботи.

Розглянемо зважений дводольний граф $G = (V_1, V_2, E)$ з матрицею ваг $A = \|a_{ij}\|_{i=1, j=1}^{n, n}$.

Введемо необхідні означення.

Паросполученням P у дводольному графі $G = (V_1, V_2, E)$ називається така множина ребер із E , що будь-які два ребра з P не є суміжними.

Вершина, вільна відносно даного паросполучення, – це вершина, яка не належить жодному ребру цього паросполучення, а інші вершини називаються насиченими. Аналогічно, ребра із паросполучення називаються насиченими щодо цього паросполучення, а інші решта ребер – вільні.

Якщо зрозуміло, про яке паросполучення йдеться, то слова «відносно даного паросполучення» надалі будемо опускати.

Потужністю паросполучення називається кількість ребер у ньому.

Найбільшим (максимальним) паросполученням називається паросполучення, потужність якого максимальна серед усіх можливих паросполучень у даному графі.

Паросполучення повне (насичене, досконале) – це паросполучення, у якому всі вершини даного дводольного графа є насиченими. Якщо існує повне паросполучення, то будь-яке найбільше паросполучення є повним.

Вагою ребра (i, j) називається елемент a_{ij} матриці ваг A .

Вагою паросполучення P називається сума вагів його ребер.

Ланцюгом довжини k назвемо ланцюг, що містить k ребер.

Нехай P – паросполучення в графі $G = (V_1, V_2, E)$, тоді **P -ланцюгом, що чергується** відносно P називається така послідовність

$$(x_0, y_1), (y_1, x_1), (x_1, y_2), \dots, (x_k, y_{k+1})$$

ребер, у якій ці ребра по черзі належать і не належать паросполученню P .

Ланцюгом, що збільшує відносно паросполучення P називається такий P -ланцюг, що чергується, у якого початкова і кінцева вершини не належать паросполученню. Зауважимо, що оскільки перша та остання вершини є вільними, то перше і останнє ребра цього ланцюга не належать паросполученню P .

Як і раніше, якщо зрозуміло, про яке паросполучення йдеться, то слова «щодо паросполучення» опускатимемо.

На рисунку 20 ребра $(2,4), (3,5), (8,9)$ утворюють паросполучення, повне паросполучення утворюють, наприклад, виділені ребра $(1,2), (4,9), (3,6), (5,7), (8,10)$; для паросполучення $P = \{(1,2), (3,5), (8,9)\}$ вершинами, вільними щодо нього є

4,6,7,10 і до того ж це всі вільні щодо P вершини; інші вершини – насичені, вага паросполучення P дорівнює 12.

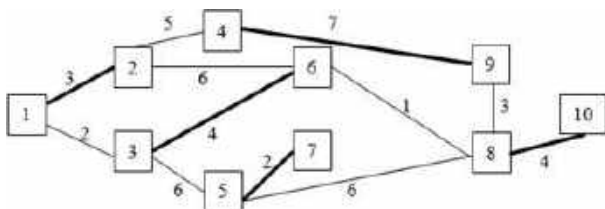


Рисунок 20 – Паросполучення, вільні та насичені вершини

Розглянемо на рисунку 21 паросполучення $P = \{(2,6), (5,8), (4,9)\}$ (виділено жирними лініями) і наступну послідовність ребер:

$(1,2), (2,6), (6,7)$.

У цій послідовності вершини 1 і 7 – вільні, вершини 2 і 6 – насичені в паросполученні P , ребро $(2,6)$ належить P і є насиченим, а ребра $(1,2)$ і $(6,7)$ – вільні. Отже, розглянута послідовність є P -ланцюгом, що чергується. Більш того, ця послідовність є ланцюгом, що збільшує.

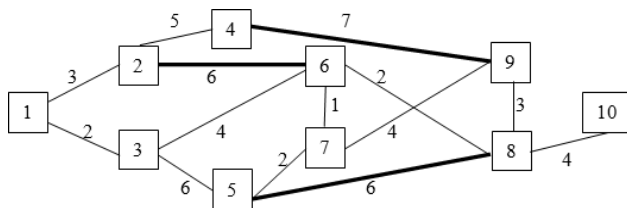


Рисунок 21 – P -ланцюг, що чергується

Теорема 4 (Бержа). Паросполучення є найбільшим тоді і тільки тоді, коли не існує збільшуючих щодо нього ланцюгів.

Алгоритм Куна заснований на теоремі Бержа. Його ідея полягає в наступному: спочатку береться порожнє паросполучення, потім на кожній ітерації алгоритму будується, поки це можливо, ланцюг, що збільшує. З його допомогою виходить паросполучення, потужність якого на одиницю більша за потужність поточного паросполучення. Це впливає з того, що

перша і остання вершини збільшуючого ланцюга – вільні, отже, його перше і останнє ребра – вільні. Тобто кількість вільних ребер у цьому ланцюгу на одиницю більша за кількість насичених. Включаючи в поточне поєднання всі вільні ребра цього ланцюга і виключаючи з нього всі його насичені ребра, отримуємо паросполучення на одиницю потужніше поточного.

Процес зупиняється тоді, коли ланцюг, що збільшує, знайти не вдається. Отримане на той час паросполучення є найбільшим.

Розглянемо спосіб побудови ланцюгів, що збільшують. Для цього потрібно ввести поняття пошуку в глибину та пошуку завширшки. Вершину з необхідною властивістю назовемо **цільовою вершиною**.

Пошук у глибину – це один із методів обходу графа. Стратегія пошуку в глибину, як це випливає з назви, полягає в тому, щоб йти «вглиб» графа, наскільки це можливо. Алгоритм пошуку описується рекурсивно: перебираємо всі ребра, що виходять з вершини, яка розглядається. Якщо ребро веде у вершину, яка не була розглянута раніше, то запускаємо алгоритм від цієї нерозглянутої вершини, а потім повертаємося і продовжуємо перебирати ребра. Повернення відбувається у тому випадку, якщо у розглянутій вершині не залишилося ребер, які ведуть у нерозглянуту вершину. Якщо після завершення алгоритму не всі вершини були розглянуті, необхідно запустити алгоритм від однієї з нерозглянутих вершин.

Наприклад, розглянемо граф, який зображено на рисунку 22. Під час пошуку у глибину вершини графа, зображеного рисунку 22а, проглядаються у порядку, зазначеному на рисунку 22б.

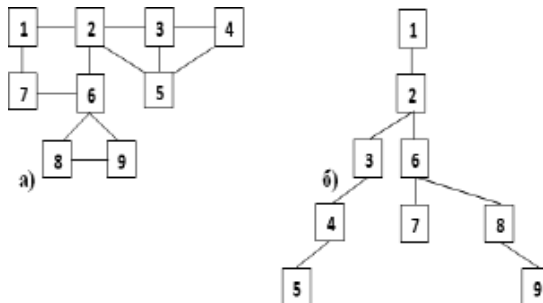


Рисунок 22 – Пошук у глибину

Пошук завширшки здійснюється шляхом послідовного перегляду окремих рівнів графа, починаючи з вершини-джерела s .

Розглянемо всі ребра, що виходять із вершини s . Якщо чергова вершина є цільовою, пошук завершується; в іншому випадку вершина додається до кінця черги. Після того, як будуть перевірені всі ребра, що виходять з вершини s , з черги витягується наступний вузол і процес повторюється.

Опишемо цей алгоритм більш строго:

1. Помістити вершину, з якої починається пошук, спочатку у вільну чергу.

2. Витягти з початку черги вершину і помітити її як розгорнуту.

Якщо вершина є цільовою, то завершити пошук з результатом "успіх".

В іншому випадку в кінець черги додаються всі наступники вершини (всі вершини, суміжні з аналізованою), які ще не розгорнуті і не перебувають у черзі.

Якщо черга порожня, то всі вершини зв'язного графа було переглянуто, отже, цільова вершина недосяжна з початкової; завершити пошук із результатом «невдача».

В іншому випадку повернутися до п. 2.

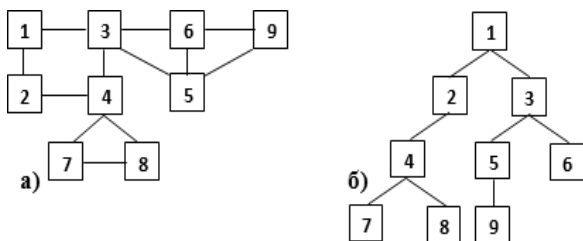


Рисунок 23 – Пошук завширшки

Приклад застосування цього методу наведено на рисунку 23. При пошуку завширшки вершини графа, зображеного на рисунку 23а, проглядаються у порядку, зазначеному на рисунку 23б.

Повернемося до алгоритму Куна. Він переглядає всі вільні вершини графа по черзі, запускаючи з кожної з них обхід, який намагається знайти збільшуючий ланцюг, що починається в цій

вершині. Нехай для вершини v такий ланцюг знайдено. Так як перша і остання її вершини є вільними, то перше і останнє її ребра теж вільні і загальна кількість ребер у такому ланцюзі непарна і, отже, кількість вільних ребер на одиницю більша за кількість насичених. Якщо тепер прибрати з поточного паросполучення всі насичені ребра побудованого збільшуючого ланцюга і додати до нього всі його вільні ребра, то потужність отриманого паросполучення збільшиться на одиницю. Зауважимо, що в отриманому паросполученні вершина v , яка була вільною, стає насиченою.

Алгоритм переглядає всі вершини v першої долі графа: $v = 1, 2, \dots, n$. Якщо поточна вершина v вже насичена поточним паросполученням, то цю вершину пропускаємо. Інакше алгоритм намагається насичити цю вершину, для чого запускається пошук збільшуючого ланцюга, що починається з цієї вершини.

Пошук збільшуючого ланцюга здійснюється за допомогою пошуку в глибину або ширину. Зупинимось на пошуку в глибину. В цьому випадку обхід починається у поточній ненасиченій вершині v першої долі. Переглядаємо всі ребра з цієї вершини, нехай поточне ребро – це ребро (v, t_0) . Якщо вершина t_0 ще не насичена паросполученням, то, значить, ми змогли знайти ланцюг, що збільшує: він складається з єдиного ребра (v, t_0) ; у такому разі просто включаємо це ребро в паросполучення і припиняємо пошук ланцюга, що збільшує, з вершини v .

Якщо t_0 вже насичена якимось ребром (p, t_0) , то пробуємо знайти збільшуючий ланцюг, що проходить через ребра $(v, t_0), (t_0, p)$. Для цього перейдемо у вершину p і шукатимемо збільшуючий ланцюг з цієї вершини.

В результаті цей обхід, розпочатий з вершини v , або знайде ланцюг, що збільшує, і тим самим, побудувавши нове паросполучення, ми наситимо вершину v , або такого збільшуючого ланцюга не знайдеться (і, отже, вершина v не зможе стати насиченою).

Після того, як всі вершини $v = 1, 2, \dots, n$ будуть переглянуті, поточне паросполучення буде найбільшим.

Приклад 6. Знайти найбільше паросполучення на графі, зображеному на рисунку 24.

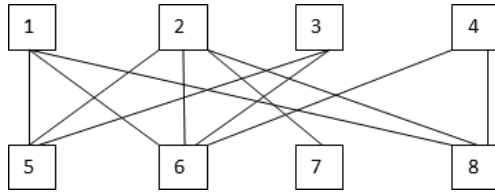


Рисунок 24 – Побудова найбільшого паросполучення

Розв'язання. Поточне паросполучення будемо позначати буквою P . Побудова найбільшого паросполучення складається з наступних кроків:

1. $\nu = 1$. Перше за порядком ребро з початком у цій вершині – це ребро $(1,5)$. Вершини 1 і 5 стають насиченими, $P = \{(1,5)\}$.
2. $\nu = 2$. Перше по порядку ребро з початком у вершині 2 – це ребро $(2,5)$, але вершина 5 вже насичена, вона насичена ребром $(1,5)$. Шукаємо збільшувачий ланцюг, що проходить через ребра $(2,5)$ та $(5,1)$. У якості вершини p ми маємо вершину 1. Перше по порядку вільне ребро з початком у вершині 1 – це ребро $(1,6)$. Отримали збільшувачий ланцюг $(2,5), (5,1), (1,6)$. Ребра $(2,5)$ та $(1,6)$ – вільні, ребро $(5,1)$ – насичене. Виключаючи з аналізованого паросполучення ребро $(5,1)$ і додаючи до нього ребра $(2,5)$ і $(1,6)$, отримуємо нове поточне паросполучення $P = \{(2,5), (1,6)\}$.
3. З вершини $\nu = 3$ порядок побудови збільшувачого ланцюга представлено на графі, зображеному на рисунку 25а. Виділено ребра, насичені у паросполученні, отриманому на попередньому кроці.
 Нове поточне паросполучення $P = \{(3,5), (2,6), (1,8)\}$.
4. З вершини $\nu = 4$ порядок побудови збільшувачого ланцюга зображено на графі, представлено у рисунку 25б.
 Нове поточне паросполучення $P = \{(4,6), (2,7), (3,5), (1,8)\}$ є насиченим (воно ж максимальне).

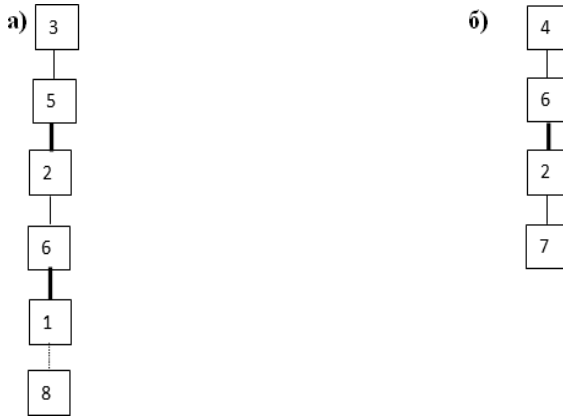


Рисунок 25 – Збільшуючі шляхи з вершин 3 та 4

Зауважимо, що число вершин у долях графа може бути різним.

При використанні дводольних графів задача про оптимальне призначення полягає у відшуванні паросполучення максимальної ваги у заданому зваженому дводольному графі.

Визначення 1. *Допустимою розміткою вершин* зваженого дводольного графа $G = (V_1, V_2, E)$ називається функція f , яка ставить у відповідність кожній вершині v графа G дійсне число $f(v)$ так, що $f(x_i) + f(y_j) \geq a_{ij}$, $x_i \in V_1$, $y_j \in V_2$ для всіх $i, j = 1, 2, \dots, n$. Число $f(v)$ будемо називати *міткою вершини v* .

Граф $G = (V_1, V_2, E)$ з допустимою розміткою вершин f будемо позначати через $G = (V_1, V_2, E, f)$.

Зауваження 4. Допустима розмітка вершин існує в кожному зваженому графі $G = (V_1, V_2, E)$. Її можна отримати, наприклад, поклавши

$$\begin{cases} f(x_i) = \max_{1 \leq k \leq n} a_{ik}, i = 1, 2, \dots, n, \\ f(y_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

Визначення 2. Нехай $G = (V_1, V_2, E, f)$ – зважений граф з допустимою розміткою вершин f . *Підграфом рівностей графа $G = (V_1, V_2, E, f)$* називається його підграф, який визначається

наступним чином: ребро (x_i, y_j) графа $G = (V_1, V_2, E, f)$ є ребром підграфа рівностей тоді і тільки тоді, коли $f(x_i) + f(y_j) = a_{ij}$. Підграф рівностей графа $G = (V_1, V_2, E, f)$ ми будемо позначати через G_{Af} .

Розглянемо граф, зображений на рисунку 26.

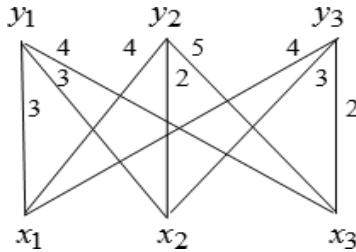


Рисунок 26 – Зважений дводольний граф

Його матриця ваг

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

На рисунку 27 представлений граф, зображений на рисунку 26, з допустимою розміткою вершин, що задається формулами (5) (мітки вершин вказані в дужках), на рисунку 28 – підграф рівності цього графа. Даний алгоритм Куна – Манкреса базується на наступній лемі.

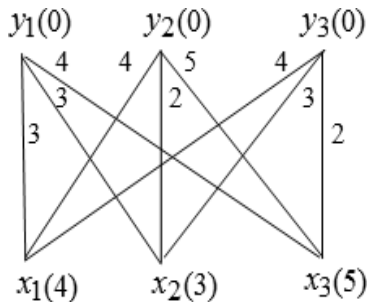


Рисунок 27 – Граф з допустимою розміткою вершин

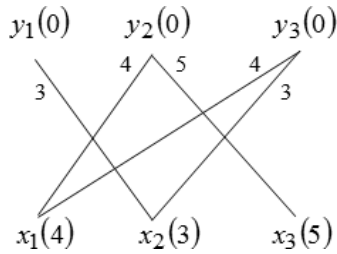


Рисунок 28 – Підграф рівності графа з рисунка 27 з допустимою розміткою вершин

Лема 1. (Про підграф рівностей). Нехай f – допустима розмітка зваженого графа $G = (V_1, V_2, E, f)$. Якщо підграф рівності графа $G = (V_1, V_2, E, f)$ містить досконале паросполучення P , то P є паросполученням максимальної ваги у графі $G = (V_1, V_2, E)$.

Доведення. Нехай P – досконале паросполучення в графі G_{Af} , а значить i в графі $G = (V_1, V_2, E)$. Нехай Q – інше досконале паросполучення в $G = (V_1, V_2, E)$. Нагадаємо, що вага графа – це сума ваг ребер, що входять до нього. Використовуючи визначення допустимої розмітки i той факт, що у досконалому паросполученні кожна вершина графа інцидентна рівно одному ребру, отримуємо, що вага $w(Q)$ паросполучення Q дорівнює вазі $w(P)$ паросполучення P :

$$\begin{aligned}
 w(Q) &= \sum_{(x_i, y_j) \in Q} a_{ij} = \sum_{(x_i, y_j) \in Q} (f(x_i) + f(y_j)) = \\
 &= \sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{j=1}^n f(y_j) = \sum_{(x_i, y_j) \in P} (f(x_i) + f(y_j)) = w(P),
 \end{aligned}$$

звідки випливає максимальність P .

Викладемо алгоритм Куна – Манкреса розв'язання задачі про призначення.

1. Задати у графі $G = (V_1, V_2, E)$ довільну допустиму розмітку f і знайти підграф G_{Af} графа $G = (V_1, V_2, E, f)$.

2. Знайти максимальне паросполучення P у G_{Af} і множину F вільних відносно P вершин долі V_1 .

3. Якщо $F = \emptyset$, перейти на крок 7.

4. Знайти всі ланцюги, що чергуються, в графі G_{Af} , які починаються у F , покласти S і T рівними множині всіх вершин відповідно до долей V_1 і V_2 , що зустрілися в цих ланцюгах.

5. Якщо в T немає вільних вершин, покласти

$$\Delta = \min_{x_i \in S, y_j \in V_2 \setminus T} \{f(x_i) + f(y_j) - a_{ij}\},$$

$$f(x) = f(x) - \Delta - \text{для всіх } x \in S,$$

$$f(y) = f(y) + \Delta - \text{для всіх } y \in T,$$

знайти новий граф G_{Af} і повернутися на крок 3. Інакше, виконувати крок 6.

6. Збільшити P , приєднавши до нього всі ненасичені ребра із знайденого ланцюга, що збільшує, і видаливши з нього всі насичені ребра, повернутися на крок 3.

7. Зупинка.

Приклад 7. Знайти оптимальне (максимальної ваги) паросполучення в графі $G = (V_1, V_2, E)$ з долями

$$V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ і } V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$$

та матрицею ваг

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 10 & 6 \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1. Задамо допустиму розмітку f_1 відповідно до формул (5)

$$f_1(x_1)=10, f_1(x_2)=8, f_1(x_3)=7, f_1(x_4)=5, f_1(x_5)=6,$$

$$f_1(y_1)=0, f_1(y_2)=0, f_1(y_3)=0, f_1(y_4)=0, f_1(y_5)=0.$$

Знайдемо у графі $G = (V_1, V_2, E)$ підграф рівностей G_{Af_1} (дивись рисунок 29, біля кожної вершини в дужках вказано її мітку).

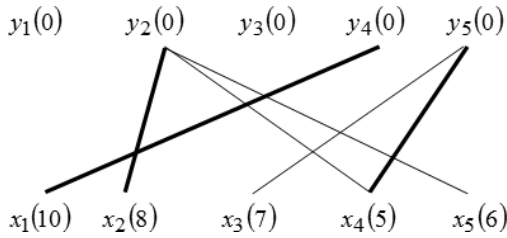


Рисунок 29 – Підграф рівностей G_{Af_1}

1.2. Розглянемо максимальне паросполучення P_1 в графі G_{Af_1} , виділене на рисунку 29 жирними лініями:

$$P_1 = \{(x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_4, y_5)\}, F_1 = \{x_3, x_5\}.$$

1.3. $F_1 \neq \emptyset$.

1.4. Будуємо всі ланцюги, що чергуються, в G_{Af_1} та починаються з вершин із F_1 :

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_2 - x_2 \quad \text{і} \quad x_5 - y_2.$$

Отримуємо, що

$$S = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, T = \{y_2, y_5\}, V_2 \setminus T = \{y_1, y_3, y_4\}.$$

1.5. Оскільки в T немає вільних вершин, то обчислюємо Δ , яке, як виявляється, дорівнює одиниці.

Знаходимо нову розмітку вершин f_2 :

$$f_2(x_1)=10, f_2(x_2)=7, f_2(x_3)=6, f_2(x_4)=4, f_2(x_5)=5, \\ f_2(y_1)=0, f_2(y_2)=1, f_2(y_3)=0, f_2(y_4)=0, f_2(y_5)=1.$$

Будуємо граф G_{Af_2} (рисунок 30) та повертаємося на крок 3.

2.3. $F_2 = \{x_3, x_5\}$.

2.4. Будуємо всі ланцюги, що чергуються, в G_{Af_2} , починаючи з вершин із F_2 :

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_2 - x_2 - y_4 - x_1, \quad x_5 - y_2 - x_2 - y_4 - x_1, \\ x_3 - y_5 - x_4 - y_4 - x_1.$$

Отримуємо, що

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, T = \{y_2, y_4, y_5\}, V_2 \setminus T = \{y_1, y_3\}.$$

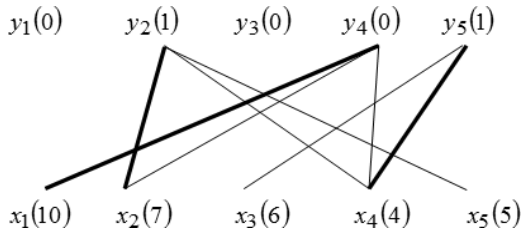


Рисунок 30 – Підграф рівностей G_{Af_2}

2.5. Так як в T немає вільних вершин, то обчислюємо Δ , яке дорівнює одиниці. Знаходимо нову розмітку вершин f_3 :

$$f_3(x_1) = 9, f_3(x_2) = 6, f_3(x_3) = 5, f_3(x_4) = 3, f_3(x_5) = 4.$$

Будуємо граф G_{Af_3} (рисунок 31) та повертаємося на крок 3.

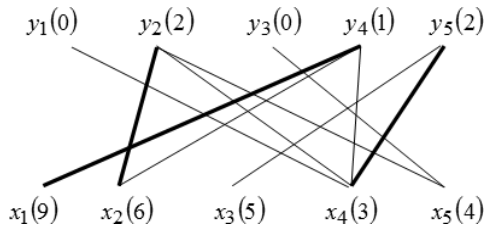


Рисунок 31 – Підграф рівностей

3.3. $F_3 = \{x_3, x_5\}$.

3.4. Будуємо всі ланцюги, що чергуються, в G_{Af_3} , починаючи з вершин із F_3 :

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_2 - x_2 - y_4 - x_1, \quad x_5 - y_2 - x_2 - y_4 - x_1,$$

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_4 - x_1, \quad x_3 - y_5 - x_4 - y_1, \quad x_5 - y_3.$$

Отримуємо, що

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \quad T = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, \quad V_2 \setminus T = \emptyset.$$

3.5. У T є вільні вершини – y_1, y_3 , тому виконуємо п. 6.

3.6. Замінюємо у знайдених збільшуючих ланцюгах

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_1 \quad \text{і} \quad x_5 - y_3$$

ненасичені ребра на насичені, отримуємо паросполучення (рисунок 32):

$$P_2 = \{(x_1 y_4), (x_2 y_2), (x_3 y_5), (x_4 y_1), (x_5 y_3)\},$$

повертаємось на крок 3.

4.3. $F_4 = \emptyset$, робота алгоритму завершена.

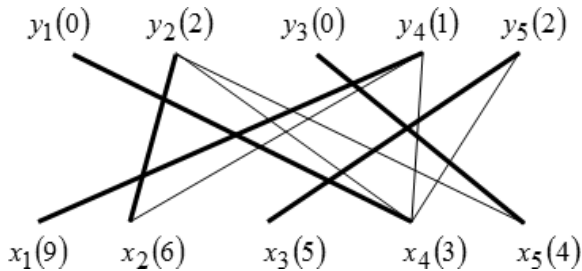


Рисунок 32 – Підграф рівностей G_{Af_3} з паросполученням P_2

Алгоритм Едмондса є узагальненням алгоритму Куна у разі довільних неорієнтованих графів без петель і кратних ребер.

Основна проблема полягає в тому, як знаходити збільшуючий ланцюг, якщо в графі є цикли непарної довжини. Нас цікавлять лише ті цикли довжиною $2k + 1$, в яких є k насичених ребер. У такому циклі є рівно одна вершина, не насичена ребрами цього циклу, назвемо її **базою**. До базової вершини підходить ланцюг, що чергується, парної (можливо, нульової) довжини, що починається у вільній (тобто не належить паросполученню) вершині, і цей ланцюг називається **стеблом**. Зрештою, підграф, утворений «насиченим» непарним циклом, називається **квіткою** (рисунок 33).

Спочатку буде збільшуючий ланцюг для деякої вільної вершини a . Побудова цього ланцюга припиняється, якщо:

- до нього не можна додати більше жодної вершини;
- до нього додається вільна вершина, тобто виявлено наявність збільшуючого ланцюга;
- досліджуване ребро замикає цикл (квітка).

Виявлення такого ребра означає, що знайдено квітку (рисунок 33). Вона складається з ланцюга P , який чергується і з'єднує вихідну вершину a з деякою вершиною b , і непарного циклу C . При цьому b є єдиною загальною вершиною ланцюга P і циклу C , а C можна розглядати як замкнутий ланцюг, що чергується, з початком і кінцем в b .

Виявивши квітку, перетворюємо всі насичені ребра ланцюга P на вільні, а вільні – на насичені.

Після цього перетворення множина насичених ребер є парсполученням тієї ж потужності, але замість вершини a вільною вершиною стає вершина b . Таким чином, на циклі C буде одна вільна вершина, і цей цикл є циклом, що чергується, який починається і закінчується в цій вершині. Виявляється, що такий цикл можна стиснути в одну вершину, не втрачаючи інформації про існування збільшуючих шляхів.

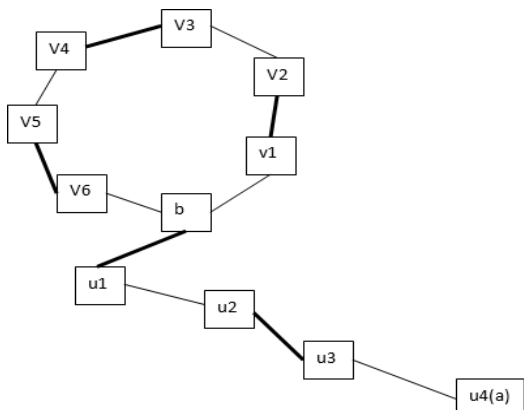


Рисунок 33 – Квітка зі стеблом

Операція стиснення підграфа H графа G полягає у наступному. Усі вершини цього підграфа видаляються з графа, а замість них додається нова вершина. Ця нова вершина з'єднується ребрами з тими і тільки тими вершинами графа G , що залишилися, які були суміжними хоча б з однією вершиною підграфа H . Граф, який отримується в результаті такої операції, будемо позначати G/H .

Теорема 5. Нехай M – парсполучення у графі G , C – цикл довжини $2k + 1$ у цьому графі, причому на циклі є k насичених ребер і одна вільна вершина. Нехай M' – парсполучення у графі $G' = G/H$, складене з усіх ребер парсполучення M , що не належать циклу C . Парсполучення M є найбільшим у графі G тоді і тільки тоді, коли M' – найбільше парсполучення у графі G' .

Приклад 8. Нехай при пошуку в глибину (рисунок 35) на графі (рис. 3.34) виявлено квітку, зображену на рисунку 34.

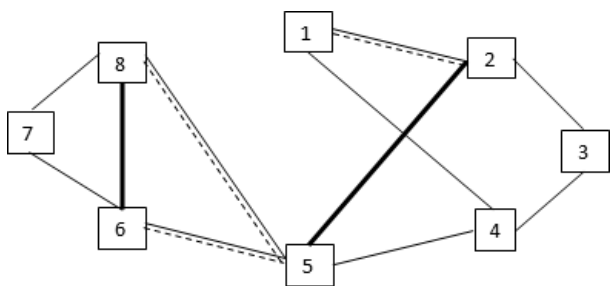


Рисунок 34 – Квітка: пунктиром позначені ненасичені ребра, жирними лініями – насичені

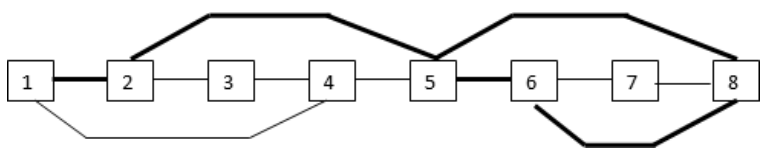


Рисунок 35 – Пошук у глибину на графі (рисунок 34)

Зазначимо, що цикл $2 - 3 - 4 - 5 - 2$ складається з парного числа ребер та його стебло містить непарне число ребер. Цикли $1 - 2 - 5 - 4 - 1$, $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ і $5 - 6 - 7 - 8 - 5$ мають парні стебла і самі складаються з парного числа ребер, цикл $6 - 7 - 8 - 6$ має непарне число ребер, але його стебла – $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6$ і $1 - 2 - 5 - 6$ містять непарне число ребер. Сформульованим раніше умовам задовольняє квітка із циклом $5 - 6 - 8 - 5$ та стеблом $1 - 2 - 5$ (рисунок 34).

Змінюючи насичені ребра на ненасичені та навпаки, отримуємо граф, зображений на рисунку 36.

Замінімо квітку (підграф із вершинами 5, 6, 8) однією вершиною «ц». Ця вершина з'єднується ребрами з тими і тільки тими з вершин даного графа, що залишилися, які були суміжними хоча б з однією з вершин 5, 6, 8. На отриманому графі побудуємо максимальне паросполучення (рисунок 37).

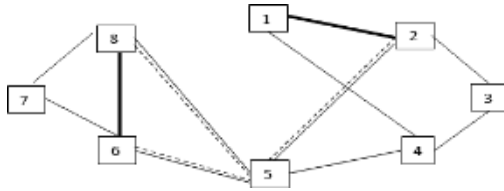


Рисунок 36 – Квітка після заміни насичених ребер стебла ненасиченими та навпаки

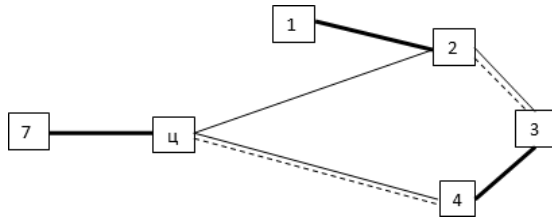


Рисунок 37 – Максимальне паросполучення після стиснення квітки

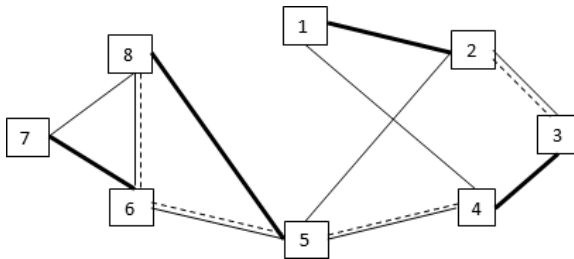


Рисунок 38 – Максимальне паросполучення

Відновлюємо квітку. Зауважимо, що при цьому нам потрібно змінити набір насичених ребер квітки, не змінивши їх числа. Результат представлений рисунку 38.

Розглянемо тепер вище описані задачі, припускаючи, що ваги ребер відповідних графів визначено нечітко і задано нечіткими числами.

Питання для самоперевірки:

1. Що називається «паросполученням»?
2. Які вершини та ребра паросполучення називаються «вільними» та «насиченими»?
3. Чим визначається «потужність паросполучення»?
4. Надайте визначення найбільшого (максимального) та повного паросполучення.
5. Надайте визначення ваги ребра та ваги паросполучення.
6. Які ланцюги називаються такими, що чергуються і такими, що збільшують?
7. Опишіть метод обходу графа – пошук у глибину.
8. Опишіть метод обходу графа – пошук завширшки.
9. Надайте визначення допустимої вершинної розмітки.
10. Що таке – база, стебло та квітка у паросполученні?
11. Опишіть послідовність побудови квітки.
12. У чому полягає операція стиснення підграфа?

Мережевий графік з нечіткими тривалостями робіт

Розглянемо мережевий графік. Припустимо, що тривалість роботи (i, j) є нечітким числом $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$, де a_{ij} – мінімально можливе значення часу виконання роботи, b_{ij} – максимально можливий час виконання роботи, $c_{ij} = b_{ij}$. Функцію приналежності нечіткого числа d_{ij} позначимо $\mu_{ij}(u)$ (рисунок 39), де u – елемент універсальної множини $U = [0, \infty)$. Будемо припускати, що на відріжку $[a_{ij}, b_{ij}]$ функція $\mu_{ij}(u)$ строго зростає.

Величину $\mu_{ij}(u)$ будемо трактувати як впевненість у тому, що робота (i, j) за час, не більший за u , буде виконано, як показник істинності нечіткого висловлювання «за час, не більший за u , робота (i, j) буде виконана».

Оцінимо якість плану проведення робіт, формалізованого у вигляді мережевого графіка. У якості функції належності плану нечіткої мети будемо використовувати ступінь досягнення своєчасності виконання плану проведення робіт.

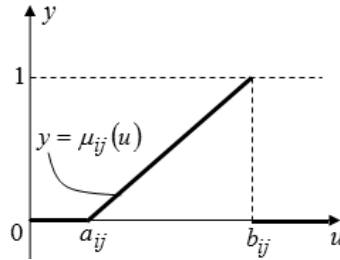


Рисунок 39 – Можливий графік функції $\mu_{ij}(u)$

Розглянемо задачу нечіткого математичного програмування з нечіткою множиною допустимих планів \hat{X} і нечітко визначеною метою.

У якості універсальної множини X , на якій визначено нечітку множину допустимих планів, будемо розглядати множину всіх можливих мережевих графіків, заданих на графі, що розглядається. Функцію належності нечіткої множини \hat{X} позначимо $\mu_{\hat{X}}(x)$, де $x \in X$.

Нечітко визначена мета формалізується нечіткою множиною \hat{X}_C з функцією належності $\mu_C(x)$, $x \in X$.

Плани з X є мережевими графіками, заданими на тому самому графі та відрізняються один від одного часом виконання робіт. Час виконання роботи (i, j) будемо позначати u_{ij} , підкреслимо, що тут йдеться про «чітке» значення часу виконання робіт. Для планів із множини X виконуються нерівності: $a_{ij} \leq u_{ij} \leq b_{ij}$. Тоді ступінь нашої впевненості у тому, що робота (i, j) буде виконана за час, не більший за u , дорівнює $\mu_{ij}(u)$. Оскільки допустимі плани відрізняються один від одного лише тривалістю виконання робіт, то для повної характеристики допустимого плану достатньо вказати лише ці тривалості робіт.

Якщо число дуг у графі дорівнює n , то кожному допустимому мережевому графіку $x \in X$ співвіднесено вектор значень тривалості робіт $u(x)$:

$$u(x) = (u_{i_1j_1}, u_{i_2j_2}, \dots, u_{i_nj_n}),$$

де $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$ – усі роботи на мережевому графіку;
 $u_{i_k j_k}$ – чітке значення тривалості (граничної тривалості) роботи
 (i_k, j_k) .

$$\mu_{\hat{x}}(x) = \min_k \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}).$$

Позначення:

$t(x)$ – тривалість критичного шляху на заданому графі у випадку, коли тривалість роботи (i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, дорівнює $u_{i_k j_k}$;

T^{min} – тривалість критичного шляху на аналізованому графі у випадку, коли тривалість роботи (i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, дорівнює $a_{i_k j_k}$; сам план з такими тривалостями робіт позначимо x^{min} .

Тоді

$$u(x^{min}) = (a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_n j_n});$$

T^{max} – тривалість критичного шляху на аналізованому графі у випадку, коли тривалість роботи (i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, дорівнює $b_{i_k j_k}$; сам план з такими тривалостями робіт позначимо x^{max} .

Тоді

$$u(x^{max}) = (b_{i_1 j_1}, b_{i_2 j_2}, \dots, b_{i_n j_n}).$$

У якості функції належності $\mu_{\hat{C}}(x)$ допустимого плану нечіткої мети \hat{C} будемо використовувати показник близькості плану, що розглядається, до найефективнішого плану – плану x^{min} , покладаємо

$$\mu_{\hat{C}}(x) = \frac{T^{max} - t(x)}{T^{max} - T^{min}}. \quad (6)$$

Зауваження 5. Якщо хочемо посилити (зменшити) роль ефективності варіанта, можна використовувати степеневі функції (7), тобто покласти

$$\mu_{\hat{C}}(x) = \frac{(T^{max} - t(x))^k}{(T^{max} - T^{min})^2}. \quad (7)$$

При $k = 2$ графік формули (7) представлений на рисунку 40.

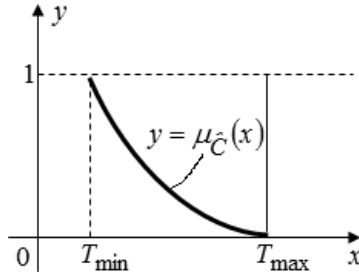


Рисунок 40 – Графік $\mu_{\hat{C}}(x)$ при $k = 2$ (формула (7))

Розв'язати задачу – означає досягти мети з тим чи іншим ступенем впевненості, причому слід враховувати і ступінь виконання обмежень (ступінь належності плану множині \hat{X}). Таким чином, у якості нечіткого розв'язку задачі розглядається перетин нечіткої мети та нечіткої множини допустимих планів, тобто нечітка множина \hat{D} з функцією належності

$$\mu_{\hat{D}}(x) = \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{C}}(x)\}. \quad (8)$$

За такого визначення розв'язку залишається питання, який план обрати. Одним із найпоширеніших способів є вибір альтернативи, що має максимальний ступінь приналежності нечіткому розв'язку, тобто альтернативи x^0 , для якої

$$\mu_{\hat{D}}(x^0) = \max_{x \in \hat{X}} \mu_{\hat{D}}(x) = \max_{x \in \hat{X}} \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{C}}(x)\} \quad (9)$$

Покладемо, що кількість робіт на мережевому графіку, як і раніше, дорівнює n , вихідна подія має номер 1, завершальна – m .

Нехай x^0 – оптимальний план, тобто

$$\mu_{\hat{D}}(x^0) = \max_{x \in \hat{X}} \mu_{\hat{D}}(x) = \max_{x \in \hat{X}} \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{C}}(x)\},$$

і нехай

$$\begin{aligned} u(x^0) &= (u_{i_1 j_1}^0, u_{i_2 j_2}^0, \dots, u_{i_n j_n}^0), \\ \mu_{\hat{X}}(x^0) &= \min_k \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = \mu_{i_v j_v}(u_{i_v j_v}^0) = \alpha, \\ \mu_{\hat{C}}(x^0) &= A, \\ t(x^0) &= \theta. \end{aligned}$$

Лема 2. $\alpha \leq A$.

Доведення. Припустимо, що $\alpha > A$, тоді $\mu_{\bar{D}}(x^0) = A$.

Нехай $\alpha - A = \delta$. Знайдемо такі u'_{ikjk} , що

$$\mu_{ikjk}(u'_{ikjk}) = \alpha - 0,5\delta = A + 0,5\delta, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Зрозуміло (дивись рисунок 39), що $u'_{ikjk} < u_{ikjk}$ за будь-якого k . Розглянемо наш мережевий графік, але з тривалостями робіт, рівними u'_{ikjk} . Тоді

$$u(x') = (u'_{i_1j_1}, u'_{i_2j_2}, \dots, u'_{i_nj_n}).$$

Так як тривалості всіх робіт зменшились, то і тривалість критичного шляху на мережевому графіку, що вийшов, зменшилася, а значить, значення функції належності нечіткої мети збільшилося і стало рівним $A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, тобто $\mu_{\hat{C}}(x') = A + \varepsilon$. Тоді

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{D}}(x') &= \min\{\mu_{\hat{X}}(x'), \mu_{\hat{C}}(x')\} = \min\left\{\min_k \mu_{ikjk}(u'_{ikjk}); \mu_{\hat{C}}(x')\right\} \\ &= \min\{A + 0,5\delta; A + \varepsilon\} > A. \end{aligned}$$

Отже,

$$\max_{x \in X} \mu_{\bar{D}}(x) > A,$$

що суперечить нашому припущенню. Це завершує доведення твердження лема.

Лема 3. $\alpha = A$.

Доведення. Раніше було доведено (дивись лему 2), що $\alpha \leq A$. Припустимо, що $\alpha < A$, зауважимо, що цьому випадку $\max_{x \in X} \mu_{\bar{D}}(x) = \alpha$.

Нехай $A - \alpha = \delta > 0$.

Відмітимо, що

$$\mu_{\hat{C}}(x^0) = \frac{T^{max} - t(x^0)}{T^{max} - T^{min}} = A > (A - 0,5\delta),$$

тоді, якщо

$$\Delta = T^{max} - t(x^0) - (A - 0,5\delta)(T^{max} - T^{min}), \quad (10)$$

то $\Delta = 0$.

Розглянемо допустимий план

$$x' = (u'_{i_1j_1}, u'_{i_2j_2}, \dots, u'_{i_nj_n}),$$

у якого

$$\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \mu_{i_k j_k}(u^0_{i_k j_k}) + \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

де $0 < \varepsilon \leq 0,5\delta$ і таке, що

$$u'_{i_k j_k} \leq u^0_{i_k j_k} + \frac{1}{n}(T^{max} - t(x^0) - (A - 0,5\delta)(T^{max} - T^{min})). \quad (11)$$

Для цього допустимого плану

$$\mu_{\hat{c}}(x') = \min_k \mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \min_k (\mu_{i_k j_k}(u^0_{i_k j_k}) + \varepsilon) > \alpha.$$

Крім того, оскільки тривалість кожної роботи збільшилася не більш ніж на Δ , то тривалість критичного шляху $t(x')$ задовольняє нерівності

$$t(x') \leq t(x^0) + T^{max} - t(x^0) - (A - 0,5\delta)(T^{max} - T^{min}),$$

що випливає з (11).

Тоді

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{c}}(x') &= \frac{T^{max} - t(x')}{T^{max} - T^{min}} > (A - 0,5\delta) \frac{T^{max} - T^{min}}{T^{max} - T^{min}} = \\ &= A - 0,5\delta = \alpha + 0,5\delta > \alpha. \end{aligned}$$

Отже,

$$\mu_{\bar{D}}(x') = \min\{\mu_{\hat{X}}(x'), \mu_{\hat{c}}(x')\} > \alpha,$$

що суперечить оптимальності плану x^0 . Отримане протиріччя доводить справедливість розглянутого твердження.

Теорема 6. Існує такий план

$$x^* \in X, \quad u(x^*) = (u^*_{i_1 j_1}, u^*_{i_2 j_2}, \dots, u^*_{i_n j_n}),$$

що

$$\mu_{\bar{D}}(x^*) = \mu_{\bar{D}}(x^0) = A \quad \text{і} \quad \mu_{i_k j_k}(u^*_{i_k j_k}) = A \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доведення. Побудуємо план x^* . Для цього розглянемо план x^0 . З леми 3 випливає, що $\mu_{\hat{X}}(x^0) = A$. Якщо для роботи (i_k, j_k) виконується нерівність $\mu_{i_k j_k}(u^0_{i_k j_k}) > A$, то зменшимо її

тривалість так, щоб значення її функції належності дорівнювало A , $k = 1, 2, \dots, n$. Позначим цей план через x^* .

Для цього плану $\mu_{\bar{x}}(x^*) = A$.

Так як тривалість всіх робіт не збільшилась, то і тривалість критичного шляху на отриманому мережевому графіку не зросла, отже, $\mu_{\hat{c}}(x^*) \geq A$.

Звідси $\mu_{\bar{D}}(x^*) = A$.

Що й потрібно було довести.

Властивість, сформульована в теоремі 6, дозволяє будувати простий алгоритм наближеної побудови оптимального мережевого графіку, тобто графіку з максимальним значенням функції $\mu_{\bar{D}}(x)$ – функції належності нечіткого розв'язку.

Алгоритм полягає в наступному.

Задавшись числом кроків N , вважаємо $\Delta = \frac{1}{N}$. На кроці з номером k , $k = 0, 1, \dots, N$, знаходимо такі тривалості робіт u_{ij} , що

$$\mu_{ij}(u_{ij}) = k \cdot \Delta.$$

Мережевий графік, що отримали, позначимо x^k , маємо $\mu_{\bar{x}}(x^k) = k \cdot \Delta$. Обчислюємо $\mu_{\hat{c}}(x^k)$ і, нарешті $\mu_{\bar{D}}(x^k)$. Мережевий графік x^{k_0} , для якого

$$\mu_{\bar{D}}(x^{k_0}) = \max_{0 \leq k \leq N} \mu_{\bar{D}}(x^k)$$

є наближеною відповіддю на питання про оптимальний графік.

Приклад 9. Необхідно побудувати мережевий графік виконання комплексу робіт з реконструкції регіонального центру управління. Список робіт та вся необхідна інформація про них представлені у таблицях 1 та 2.

Будемо припускати, що тривалості робіт є нечіткими числами, їх функції належності, як це часто робиться, наближатимемо до лінійних функцій (дивись рисунок 39), тобто вважатимемо, що

$$\mu_{ij}(u) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } u \leq a_{ij}, \\ \frac{u - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}, & \text{якщо } a_{ij} < u < b_{ij}, \\ 0, & u \geq b_{ij}. \end{cases} \quad (12)$$

Таблиця 1 – Дані про логічні зв'язки між роботами

№ з/п	Назва роботи	Попередні роботи
1	Підготовчі роботи	-
2	Демонтаж старого обладнання	-
3	Ремонтні будівельно-монтажні роботи	1
4	Підготовка фундаменту під нове обладнання	1, 2
5	Підготовка до монтажу нового обладнання	1
6	Електротехнічні роботи	1
7	Монтаж нового обладнання	4, 5
8	Підключення обладнання до електромережі	6, 7
9	Налагодження та технологічні випробування обладнання	8
10	Оздоблювальні роботи	3, 6, 7
11	Приймання центру в експлуатацію	9, 10

Тут b_{ij} – час, за який робота (i, j) буде обов'язково виконана; $\mu_{ij}(b_{ij}) = 1$, тобто наша впевненість у тому, що цього часу вистачить для виконання роботи, дорівнює одиниці. За час більше a_{ij} робота з певним, більшим за нуль, ступенем впевненості буде виконана, за час a_{ij} і менше її не виконати.

На підставі даних таблиці 1 будуюмо мережевий графік (без зазначення тривалості робіт), він зображений на рисунку 41, тут поруч зі стрілками в дужках вказані номери відповідних робіт.

Таблиця 2 – Дані про тривалість робіт

№ з/п	Назва роботи	Позначення роботи (i, j)	Дані про тривалість робіт (год.)	
			a_{ij}	b_{ij}
1	Підготовчі роботи	(1, 2)	10	20
2	Демонтаж старого обладнання	(1, 3)	6	8

3	Ремонтні будівельно-монтажні роботи	(2, 6)	60	210
4	Підготовка фундаменту під нове обладнання	(3, 4)	100	105
5	Підготовка до монтажу нового обладнання	(2, 4)	50	90
6	Електротехнічні роботи	(2, 5)	45	75
7	Монтаж нового обладнання	(4, 5)	40	45
8	Підключення обладнання до електромережі	(5, 7)	17	22
9	Налагодження та технологічні випробування обладнання	(7, 8)	30	35
10	Оздоблювальні роботи	(6, 8)	15	45
11	Приймання центру в експлуатацію	(8, 9)	5	15

У якості функції належності аналізованих планів нечіткої мети будемо розглядати функцію

$$\mu_{\hat{c}}(x) = \frac{T^{max} - t(x)}{T^{max} - T^{min}}$$

Мережевий графік із тривалостями робіт, що відповідають значенню функцій належності, яке дорівнює 0,5, зображено на рисунку 42, ці тривалості вказані поруч із відповідними стрілками. Нагадаємо, що пунктирними стрілками позначаються фіктивні роботи.

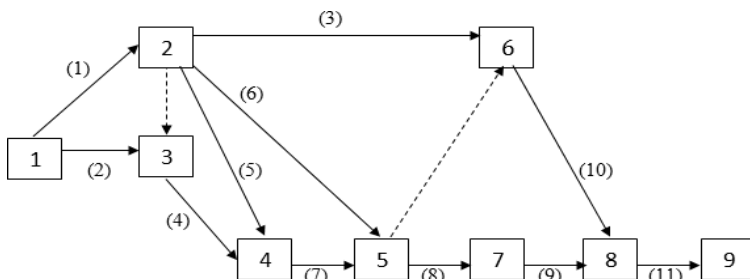


Рисунок 41 – Графічне зображення логічного зв'язку робіт

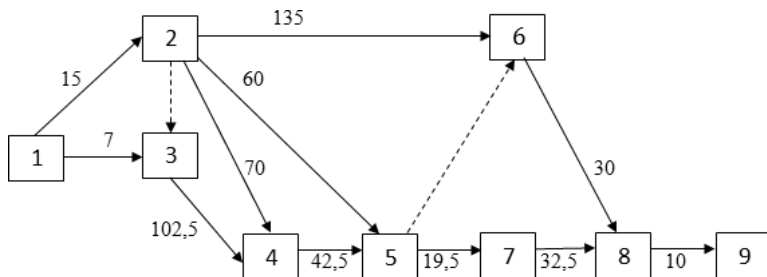


Рисунок 42 – Варіант мережевого графіка виконання комплексу робіт із реконструкції центру

Вирішувати задачу наближеного пошуку мережевого графіка з максимальним значенням функції $\mu_{\bar{D}}(x)$ будемо з кроком $\Delta = 0,1$. Проміжні результати обчислень зведено до таблиці 3.

Зауважимо, що при заповненні четвертої графі таблиці 3 обчислювалися довжини критичних шляхів за умови, що тривалості всіх робіт відповідають значенню функцій належності, вказаному у третій графі таблиці. При цьому виявилось, що при зміні значень цих функцій від нуля до 0,7 критичний шлях проходить через події 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9; а за зміни цих значень від 0,8 до одиниці він проходить через події 1, 2, 6, 8, 9.

Нагадаємо, що при обчисленнях значення функцій належності змінювалися з кроком 0,1.

Таблиця 3 – Проміжні результати рішення прикладу 9

№ з/п	k	$\mu_{\bar{x}} = \Delta \cdot k$	Тривалість критичного шляху	μ_c	$\mu_{\bar{D}}$
1	2	3	4	5	6
1	0,0	0,00	202	1,00	0,00
2	1,0	0,10	206	0,95	0,10
3	2,0	0,20	210	0,91	0,20
4	3,0	0,30	214	0,86	0,30
5	4,0	0,40	218	0,82	0,40
6	5,0	0,50	222	0,77	0,50
7	6,0	0,60	226	0,73	0,60

8	7,0	0,70	230	0,68	0,68
9	8,0	0,80	250	0,45	0,45
10	9,0	0,90	270	0,23	0,23
11	10,0	1,00	290	0,00	0,00

Аналіз останньої графі таблиці 3 показує, що приблизно оптимальне значення функції належності нечіткого розв'язку дорівнює 0,68, що досягається при $\mu_{\hat{x}} = 0,70$, при $k = 7$.

Оцінюючи якості мережевого графіка можна використовувати інші підходи. Розглянемо два випадки.

1. Оцінкою є надійність виконання плану за заданий час τ . Оптимальним вважатимемо план, час виконання якого не перевищує заданої величини, а надійність його виконання при цьому максимальна.

Як і раніше, позначимо через \hat{X} нечітку множину допустимих планів у розглянутій задачі, X – множина мережевих графіків, заданих на графі, що розглядається, і відрізняються один від одного тривалостями виконання робіт (хоча б однієї).

Будемо, як і раніше, припускати, що тривалість роботи (i, j) є нечітким числом $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$, де a_{ij} – мінімально можливе значення часу виконання роботи, b_{ij} – максимально можливий час, $c_{ij} = b_{ij}$. Функцію належності нечіткого числа d_{ij} позначимо $\mu_{ij}(u)$ (рисунок 39), де u – елемент універсальної множини $U = [0, +\infty]$. Будемо припускати, що на відрізку $[a_{ij}, b_{ij}]$ функція $\mu_{ij}(u)$ строго зростає і неперервна.

Оскільки, як і раніше, допустимі плани відрізняються один від одного лише тривалістю виконання робіт, то для повної характеристики допустимого плану достатньо вказати лише ці тривалості робіт.

Якщо кількість робіт у графі дорівнює n , то плану $x \in X$ відповідає вектор тривалості робіт

$$u(x) = (u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \dots, u_{i_n j_n}),$$

де $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$ – всі роботи на мережевому графіку, $u_{i_k j_k}$ – чітке значення тривалості роботи (i_k, j_k) .

Нехай $t(x)$ – тривалість критичного шляху на мережевому графіку (у тому випадку, коли на графі, який розглядається, тривалість роботи (i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, дорівнює $u_{i_k j_k}$).

Функція $\mu_{\hat{X}}(x)$ – функція належності нечіткої множини допустимих планів \hat{X} , визначається формулою:

$$\mu_{\hat{X}}(x) = \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq n} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}), & \text{якщо } t(x) \leq \tau, \\ 0, & \text{якщо } t(x) > \tau. \end{cases}$$

Нехай x^0 – оптимальний розв'язок задачі, що розглядається, тобто

$$\mu_{\hat{X}}(x^0) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{X}}(x).$$

Нехай

$$u(x^0) = (u_{i_1 j_1}^0, u_{i_2 j_2}^0, \dots, u_{i_n j_n}^0)$$

і

$$\mu_{\hat{X}}(x^0) = \max_{\substack{x \in X \\ t(x) \leq \tau}} \min_{1 \leq k \leq n} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}) = \alpha.$$

Теорема 7. Існує такий $x^* \in X$, що

$$t(x^*) = \tau, \mu_{\hat{X}}(x^*) = \mu_{\hat{X}}(x^0) \text{ і } \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) = \alpha \text{ за будь-якого } k.$$

Доведення. Розглянемо план x^* із такими тривалостями виконання робіт, що їх надійності однакові та рівні α . Нагадаємо, що у прийнятих позначеннях

$$u(x^*) = (u_{i_1 j_1}^*, u_{i_2 j_2}^*, \dots, u_{i_n j_n}^*),$$

і тоді сказане означає, що для будь-якого k від 1 до n

$$\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) = \alpha.$$

Оскільки за будь-якого k від 1 до n виконується нерівність

$$\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) \leq \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0),$$

то тривалість кожної роботи в мережевому графіку x^* не перевищує тривалості цієї роботи в x^0 . Значить, тривалість виконання плану, формалізованого мережевим графіком x^* , не перевищує τ , тобто $t(x^*) \leq \tau$.

Якщо $t(x^*) < \tau$, то, значить, ми можемо трохи збільшити тривалості виконання всіх робіт, укладаючись у відведений час τ . Але, збільшивши тривалість виконання робіт, ми збільшимо і надійність того, що цих тривалостей достатньо для їх виконання. Таким чином, ми отримаємо новий план, час виконання якого не перевищує заданого часу τ , а надійність більша α . А це суперечить оптимальності плану x^0 . Отже, $t(x^*) = \tau$.

Таким чином, $t(x^*) = \tau$ і $\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) = \alpha$ для будь-якого k від 1 до n , а отже, план x^* задовольняє всім умовам теореми і вона доведена.

При наближеному розв'язанні задачі можна скористатися описаним вище алгоритмом, злегка його спростивши, — не треба обчислювати значення функцій належності планів, що розглядаються, нечіткої мети і нечіткому рішенню, тобто не треба заповнювати останні дві графи таблиці 3.

Нехай в умовах прикладу 9 потрібно визначити максимальне значення надійності, з яким прийнятий план проведення робіт буде виконано за час, не більше 250 год. З таблиці 3 видно (дивись дев'ятий рядок цієї таблиці), що це значення 0,8.

2. Оцінкою є час, необхідний для виконання прийнятого плану при заданій надійності його виконання. Оптимальним вважатимемо план, надійність виконання якого менше заданої величини, а час виконання при цьому мінімальний. Для наближеного розв'язання сформульованої задачі знову ж таки можна скористатися таблицею, аналогічною до таблиці 3, але без двох останніх граф.

Нехай в прикладі 9 потрібно визначити, скільки часу достатньо для того, щоб план проведення робіт був виконаний з надійністю 0,6. З даних таблиці 3 бачимо (дивись сьомий рядок), що цей час дорівнює 226 год.

Задача про найкоротший маршрут із нечітко заданим часом руху по комунікаціям

При організації руху великий інтерес представляє задача про знаходження найкоротшого маршруту, що з'єднає два заданих пункти. Зазначимо, що у якості транспортних витрат можна розглядати не тільки пройденої відстань. Часто інтерес представляють сумарні грошові витрати на проїзд маршрутом або час руху по ньому або витрата пального і т. п.

Таку задачу розглядав, наприклад, Дейкстра, який побудував ефективний алгоритм її вирішення, який використовується в даний час, зокрема, GPS-навігаторах. Ця задача обговорювалась раніше. Але Дейкстра та інші автори припускали, що витрати на рух з будь-якої комунікації чітко визначені, що насправді далеко не завжди відповідає дійсності.

Будемо припускати, що всього на мережі є m пунктів, всі пункти впорядковані і перенумеровані числами від 1 до m , при цьому перший пункт має номер 1, останній – номер m . Надалі часто сам пункт будемо ототожнювати з його номером.

Для визначеності під витратами розумітимемо час, при цьому будемо припускати, що його визначено однозначно, а задається він нечітким числом. Потрібно знайти оптимальний маршрут між двома заданими пунктами на наявній мережі комунікацій (між першим та останнім пунктами). Зазначимо відразу, що саме поняття «оптимальний маршрут» потребує уточнення.

Наведемо строгу постановку задачі. Тепер ми будемо припускати, що транспортні витрати (час) задаються нечіткими числами. Нечітке число – нечіткий час руху по комунікації (i, j) , що з'єднує пункти i та j на мережі, що розглядається, будемо позначати t_{ij} :

$$t_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle,$$

де a_{ij} – мінімально можливий час руху по комунікаціям (i, j) ;
 c_{ij} – максимально можливий час руху по комунікаціям (i, j) ;
 b_{ij} – мода.

Функцію належності нечіткого числа t_{ij} будемо позначати $\mu_{ij}(t)$, де t – елемент універсальної множини T – множини можливих чітких (звичайних) значень витрат часу на рух, $\mu_{ij}(b_{ij}) = 1$, $\mu_{ij}(a_{ij}) = 0$, $\mu_{ij}(c_{ij}) = 0$. Для визначеності вважатимемо, що $T = [0, +\infty)$, функція належності $\mu_{ij}(t)$ строго зростає на відрізку $[a_{ij}, b_{ij}]$ і строго спадає на $[b_{ij}, c_{ij}]$.

У підході до поняття «оптимальний маршрут» будемо, як і раніше, слідувати ідеям, сформульованим Заде і Беллманом.

Універсальною множиною допустимих планів тепер є множина X – множина мереж даної (розглядаємої) конфігурації із заданим для кожної комунікації «чітким» значенням часу руху по ній. Це «чітке» значення часу руху по комунікації (i, j) для мережі $x \in X$ позначатимемо $t_x(i, j)$. Зазначимо, що два допустимі плани x та y вважаються різними, якщо існує така (хоча б одна) комунікація (i, j) , що $t_x(i, j) \neq t_y(i, j)$, тобто час руху хоча б по одній комунікації на цих мережах різний. Функцію

належності нечіткої множини допустимих планів \hat{X} задачі позначимо $\mu_{\hat{X}}(x)$, $x \in X$.

Будемо припускати, що мережа має n комунікацій: $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$. Їх множини позначимо літерою \mathfrak{R} :

$$\mathfrak{R} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}.$$

Тоді $t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), \dots, t_x(i_n, j_n)$ – набір значень часу руху по комунікаціям для плану x , цей набір ми позначатимемо $\Phi(x)$.

Оскільки допустимі плани відрізняються один від одного лише часом руху за комунікаціями, то для повної характеристики допустимого плану x достатньо вказати лише набір чисел:

$$\Phi(x) = \{t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), \dots, t_x(i_n, j_n)\}.$$

Маршрут від першого пункту до останнього за планом x , що вимагає мінімальних витрат часу на рух, позначимо $\mathfrak{Z}(x)$. Цей маршрут складається з $k(x)$ комунікацій: $(1, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k(x)-1}, i_{k(x)})$. Таким чином,

$$\mathfrak{Z}(x) = \{(1, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k(x)-1}, i_{k(x)})\}.$$

Тут $i_{k(x)} = m$.

Тоді час руху $t(\mathfrak{Z}(x))$ за маршрутом $\mathfrak{Z}(x)$ задається формулою

$$t(\mathfrak{Z}(x)) = \sum_{(u,v) \in \mathfrak{Z}(x)} t_x(u, v).$$

Нехай для плану x час руху по комунікаціям дорівнює $t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), \dots, t_x(i_n, j_n)$, тоді під надійністю плану x будемо розумітимемо величину

$$\min_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \mu_{kl}(t_x(k, l)).$$

В якості нечіткої множини допустимих планів розглянемо нечітку множину \hat{X} , задану на універсальній множині X функцією належності

$$\mu_{\hat{X}}(x) = \min_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \mu_{kl}(t_x(k, l)). \quad (13)$$

Нечітко визначену мету (нечітка мета) будемо формалізувати нечіткою множиною \hat{X}_c з функцією належності $\mu_c(x)$, $x \in X$.

Позначимо:

$t^{min}(x)$ – мінімальний час руху з першого пункту в останній при плані x ;

T^{min} – мінімальний час руху з першого пункту в останній, коли час руху по кожній комунікації (i, j) мінімальний, тобто рівний a_{ij} , сам план з таким часом руху по комунікаціям позначимо x^{min} ,

$$\Phi(x^{min}) = \{a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \dots, a_{i_nj_n}\};$$

T^{max} – максимальний час руху з першого пункту в останній, коли час руху по кожній комунікації (i, j) максимальний, тобто дорівнює c_{ij} , сам план з такими значеннями часу позначимо x^{max} ,

$$\Phi(x^{max}) = \{c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2}, \dots, c_{i_nj_n}\}.$$

Як функцію належності розглянутих планів нечіткої мети (нечіткої множини, що формалізує нечітку мету) використовуватимемо показник близькості плану x до найефективнішого плану – плану x^{min} , що ми і пропонуємо характеризувати як близькість (за часом) маршрутів $\mathfrak{Z}(x)$ і $\mathfrak{Z}(x^{min})$. Покладемо

$$\mu_{\hat{c}}(x) = \frac{T^{max} - t^{min}(x)}{T^{max} - T^{min}}. \quad (14)$$

Нечітким розв'язком задачі, що розглядається, будемо вважати нечітку множину \hat{D} з функцією належності $\mu_{\hat{D}}(x)$, що є перетином нечіткої множини допустимих планів і нечіткої мети:

$$\mu_{\hat{D}}(x) = \min\{\mu_{\hat{c}}(x), \mu_c(x)\}. \quad (15)$$

У якості розв'язку пропонується план x^0 , для якого

$$\mu_{\hat{D}}(x^0) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{D}}(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_{\hat{c}}(x), \mu_c(x)\}. \quad (16)$$

Дослідимо деякі властивості розв'язку.

Нехай для плану x^0 виконується рівність (16) та нехай

$$\Phi(x^0) = (t_{x^0}(i_1, j_1), t_{x^0}(i_2, j_2), \dots, t_{x^0}(i_n, j_n)),$$

$$\mu_{\hat{c}}(x^0) = \min \mu_{i_k j_k}(t_{x^0}(i_k j_k)) = \mu_{i_v j_v}(t_{x^0}(i_v j_v)) = \alpha,$$

$$\mu_c(x^0) = A,$$

$$\mu_{\hat{D}}(x^0) = B,$$

$$t^{min}(x^0) = \theta.$$

Теорема 8. Для задачі, що розглядається $B = \alpha = A$.

Доведення. Якщо $\alpha > A$, то $B = A$. Нехай $\alpha - A = \delta$, візьмемо $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ і встановимо такі тривалості $t_{x'}(i_k, j_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, руху по комунікаціям, що

$$\mu_{i_k j_k}(t_{x'}(i_k j_k)) = \mu_{i_k j_k}(t_{x^0}(i_k j_k)) - \varepsilon, \quad t_{x'}(i_k j_k) \leq b_{i_k j_k},$$

тобто зменшимо тривалість руху по всім комунікаціям мережі так, щоб значення функцій належності для цих тривалостей стали б на ε менше. Зрозуміло, що тривалість $t^{\min}(x')$ найкоротшого маршруту для допустимого плану, що отримали, буде менше, ніж для плану x^0 , тобто менше, ніж $t^{\min}(x^0)$. Але тоді $\mu_c(x') > \mu_c(x^0) = A + \delta^*$. Отримаємо, що

$$\mu_{\bar{x}}(x') = \min_k \mu_{i_k j_k}(t_{x'}(i_k j_k)) = \mu_{i_v j_v}(t_{x^0}(i_v j_v)) - \varepsilon = \alpha - \varepsilon,$$

$$\mu_{\bar{D}}(x') = \min\{\mu_{\bar{x}}(x'), \mu_c(x')\} = \min\{\alpha - \varepsilon, A + \delta^*\} = \min\{A + \varepsilon, A + \delta^*\} > A.$$

Отже, x^0 не є оптимальним планом, отримане протиріччя показує, що α не може бути більше A .

Якщо $\alpha < A$, то $B = \alpha$. Нехай $A - \alpha = \Delta$, візьмемо

$$\varepsilon = \frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2n},$$

нагадаємо, що n дорівнює числу комунікацій.

Розглянемо новий план x'' , тривалості руху по комунікаціям якого порівняно з планом x^0 збільшено на ε , тобто для будь-якої комунікації (i, j) покладемо час руху за нею рівним $t_{x^0}(i, j) + \varepsilon$. При цьому значення функції належності нового тимчасового значення комунікації (i, j) збільшиться на τ_{ij} .

Нехай

$$\tau = \min_{(i,j) \in \mathbb{R}} \tau_{ij},$$

тобто

$$\mu_{\bar{x}}(x'') = \alpha + \tau.$$

Сумарна тривалість руху по всіх комунікаціях мережі збільшена на величину, що дорівнює

$$\varepsilon \cdot n = \frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2n} \cdot n = \frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2}.$$

Отже, і сумарна тривалість руху по будь-якому маршруту від першого пункту до останнього для плану x'' збільшилась не більше ніж на

$$\frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mu_c(x'') &= \frac{T^{\max} - t^{\min}(x'')}{T^{\max} - T^{\min}} \geq \\ &\geq \frac{T^{\max} - \left(t^{\min}(x^0) + \frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2} \right)}{T^{\max} - T^{\min}} = \\ &= \frac{T^{\max} - t^{\min}(x^0)}{T^{\max} - T^{\min}} - \frac{\Delta}{2} = A - \frac{\Delta}{2} = \alpha + \frac{\Delta}{2} > \alpha = B, \end{aligned}$$

Остаточоно отримуємо, що

$$\mu_{\bar{D}}(x'') = \min\{\mu_{\bar{X}}(x''), \mu_c(x'')\} \geq \min\left\{\alpha + \tau, \alpha + \frac{\delta}{2}\right\} > \alpha = B,$$

отже, план x^0 не є оптимальним, а це суперечить нашому припущенню.

Тим самим доведено, що $B = A = \alpha$.

Теорема 9. Нехай план x^0 задовольняє рівності (16) і $\mu_{\bar{D}}(x^0) = B$. Тоді для задачі, що розглядається, існує такий оптимальний план x^* , що $\mu_{ij}(t_{x^*}(i, j)) = B$ для будь-якої комунікації (i, j) .

Доведення. Нехай план x^0 задовольняє рівності (16) і нехай

$$\mu_{\bar{X}}(x^0) = \min_k \mu_{i_k j_k}(t_{x^0}(i_k j_k)) = \mu_{i_v j_v}(t_{x^0}(i_v j_v)) = \alpha,$$

$$\mu_c(x^0) = A.$$

В силу теореми 8 $B = A = \alpha$. Розглянемо план x' , для якого

$$\mu_{i_k j_k}(t_{x'}(i_k, j_k)) = B$$

для будь-якої комунікації (i_k, j_k) .

Тоді

$$\mu_{\bar{X}}(x') = B.$$

Зауважимо, що $t_{x'}(i_k, j_k) \leq t_{x^0}(i_k, j_k)$ для будь-якої комунікації (i_k, j_k) .

Отже, $t^{\min}(x') \leq t^{\min}(x^0)$ і, значить, $\mu_c(x') \geq \mu_c(x^0) = \alpha = B$.

Таким чином,

$$\mu_{\bar{D}}(x') = \min\{\mu_{\bar{X}}(x'), \mu_c(x')\} = B.$$

Отже, $\mu_{\bar{D}}(x') = B$ і план x' оптимальний. Поклавши $x^* = x'$, ми отримуємо план із висновку теореми.

Остання теорема дає алгоритм наближеного розв'язку нашої задачі.

Цей алгоритм полягає у наступному:

Задавшись числом кроків N , вважаємо $\Delta = \frac{1}{n}$. На кроці з номером k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) знаходимо такі значення часу руху t_{ij} по комунікації, що

$$\mu_{ij}(t_{ij}) = k \cdot \Delta \text{ для будь-якої комунікації } (i, j).$$

Мережу, яку отримали, позначимо x^k , маємо: $\mu_{\bar{x}}(x^k) = k \cdot \Delta$. Обчислюємо $\mu_c(x^k)$ і, нарешті, $\mu_{\bar{D}}(x^k)$. Маршрут, що вимагає мінімальних витрат часу на рух з першого пункту в останній при плані x^{k_0} , для якого

$$\mu_{\bar{D}}(x^{k_0}) = \max_{0 \leq k \leq N} \mu_{\bar{D}}(x^k)$$

є наближеною відповіддю на питання про оптимальний маршрут.

Приклад 10. Визначити оптимальний у зазначеному вище сенсі маршрут на мережі доріг, схема якої зображена на рисунку 43, необхідну інформацію про нечіткий час руху з кожної комунікації представлено у таблиці 4. На рисунку поряд з кожним ребром, що зображує комунікацію, вказано моду (у годинах) нечіткого часу руху по ній.

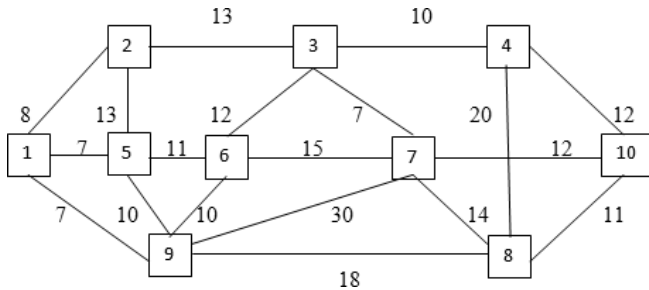


Рисунок 43 – Схема мережі доріг до прикладу 10

Нагадаємо, що нечіткий час руху по комунікаціям (i, j) є нечітким числом $t_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$. Його функція приналежності $\mu_{ij}(t)$ не спадає на відрізку $[a_{ij}, b_{ij}]$ і не зростає на $[b_{ij}, c_{ij}]$ (рисунок 44).

Таблиця 4 – Дані про нечіткий час руху

Дорога (i, j)	Параметри		
	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}
(1,2)	4	8	10
(1,5)	5	7	11
(1,9)	6	7	9
(2,3)	9	13	15
(2,5)	10	13	17
(3,4)	6	10	13
(3,6)	8	12	12
(3,7)	5	7	10
(4,8)	15	20	26

Дорога (i, j)	Параметри		
	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}
(4,10)	8	12	13
(5,9)	7	10	15
(5,6)	7	11	14
(6,9)	8	10	12
(6,7)	10	15	16
(7,8)	10	14	19
(7,9)	25	30	33
(7,10)	10	12	15
(8,9)	16	18	25
(8,10)	10	11	14

Зазначимо, що фіксованому значенню функції належності, не рівному одиниці, відповідають два значення часу. Оскільки ми прагнемо зменшити час, то з цих двох значень будемо використовувати найменше.

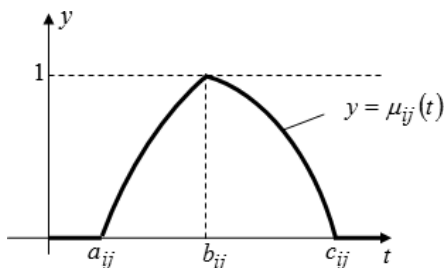


Рисунок 44 – Приклад графіка функції приналежності $\mu_{ij}(t)$

У верхній частині таблиці 5 вказані чіткі значення часу руху за відповідними комунікаціями мережі, зображеної на рисунку 43, при цьому для кожного значення функції належності зазначені менші з двох можливих значень часу.

За даними відповідної графі верхньої частини таблиці 5 з використанням алгоритму Дейкстри знаходимо маршрут, що вимагає мінімальних витрат часу і саме цей час буде t^{min} . Зазначимо, що при значеннях $\mu_{\hat{x}}$ в межах від 0 до 0,2 таким маршрутом є шлях, що проходить через пункти 1, 2, 3, 4, 10; при значеннях $\mu_{\hat{x}}$ в межах від 0,3 до 0,5 – через пункти 1, 2, 3, 7, 10; при

значеннях $\mu_{\bar{x}}$ в межах від 0,6 до 1,0 – через пункти 1, 9, 8, 10. Оптимальне значення функції належності нечіткого рішення дорівнює приблизно 0,36, воно досягається при часових значеннях, надійність яких дорівнює 0,4, що видно і на рисунку 44.

Таблиця 5 – Вихідні дані та проміжні результати для задачі про оптимальний маршрут

Код КОМУН	$k \cdot \Delta$										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(1,2)	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8
(1,5)	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7
(1,9)	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7
(2,3)	9	9,4	9,8	10,2	10,6	11,0	11,4	11,8	12,2	12,6	13
(2,5)	10	10,3	10,6	10,9	11,2	11,5	11,8	12,1	12,4	12,7	13
(3,4)	6	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2	9,6	10
(3,6)	8	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12
(3,7)	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7
(4,10)	8	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12
(4,8)	15	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20
(5,9)	7	7,3	7,6	7,9	8,2	8,5	8,8	9,1	9,4	9,7	10
(5,6)	7	7,4	7,8	8,2	8,6	9,0	9,4	9,8	10,2	10,6	11
(6,9)	8	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10
(6,7)	10	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15
(7,10)	10	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12
(7,9)	25	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30
(7,8)	10	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	12,4	12,8	13,2	13,6	14
(8,9)	16	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18
(8,10)	10	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11
РЕЗУЛЬТАТИ											
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\mu_{\bar{x}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
t^{min}	27,00	28,60	30,20	31,60	32,80	34,00	34,40	34,80	35,20	35,60	36,00

μ_c	1,00	0,82	0,64	0,49	0,36	0,22	0,18	0,13	0,09	0,04	0,00
μ_D	0,00	0,10	0,20	0,30	0,36	0,22	0,18	0,13	0,09	0,04	0,00

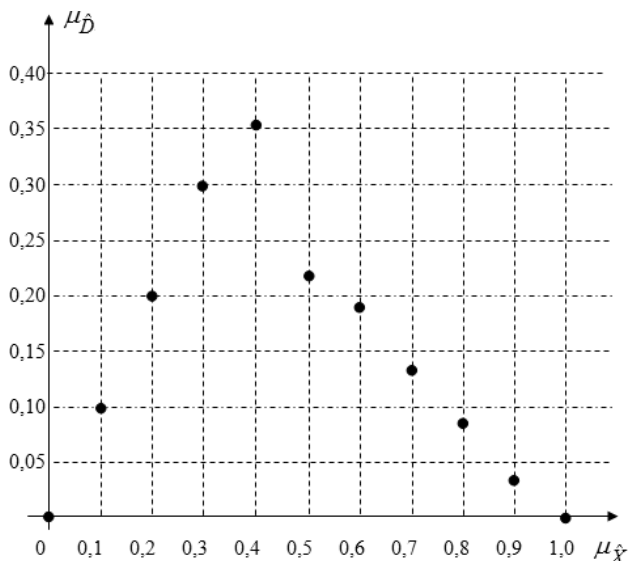


Рисунок 45 – Графік функцій належності нечіткого рішення μ_D в залежності від значень функції належності μ_X нечіткої множини допустимих планів

Для отримання більш точної, але, звичайно, теж наближеної відповіді, розглянемо рисунок 45, на якому зображені два графіки:

- графік залежності значень функції належності нечіткої множини допустимих планів від значення функцій належності нечітких витрат часу на рух по комунікаціям $y = \mu_X(\mu_{ij}(t))$ (нагадаємо, що ми маємо справу лише з ситуаціями, коли значення останніх функцій однакові для всіх комунікацій);

- графік залежності значень функції належності нечіткої мети $y = \mu_c(\mu_{ij}(t))$ від того ж аргументу, що й перший графік.

Таблиця 6 – Дані щодо залежності функцій μ_c та $\mu_{\bar{D}}$ від значень функції $\mu_{ij}(t)$

$\mu_{ij}(t)$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$\mu_{\bar{X}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
t^{min}	27,00	28,60	30,20	31,60	32,80	34,00	34,40	34,80	35,20	35,60	36,00
μ_c	1,00	0,82	0,64	0,49	0,36	0,22	0,18	0,13	0,09		0,00
$\mu_{\bar{D}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,36	0,22	0,18	0,13	0,089	0,04	0,000

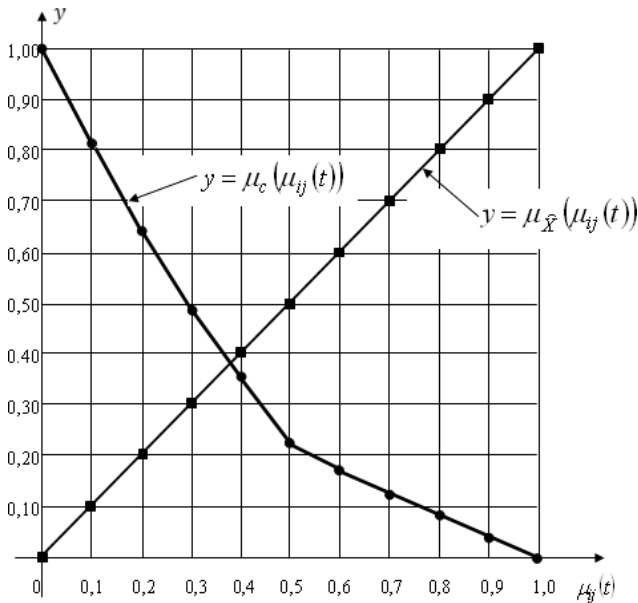


Рисунок 46 – Графік функцій належності $\mu_{\bar{X}}$ та μ_c

Наближаючи на графіку (рисунок 46) результати з таблиці 6 (точки) ламаними лініями, ми можемо трохи уточнити результат, отриманий на рисунку 45. На рисунку 46 бачимо, що

$$\max_{0 \leq k \leq N} \min\{\mu_{\bar{X}}(x^k), \mu_c(x^k)\}$$

досягається при $\mu_{\bar{X}}(x) = 0,38$, при цьому оптимальне значення функції належності $\mu_{\bar{D}}$ нечіткого рішення дорівнює 0,38. Тобто

ступінь упевненості в тому, що варіант із тривалостями руху, взятими з шостої графи таблиці 5, оптимальний, дорівнює 0,38.

Зупинимося на деяких інших підходах до поняття оптимальності в цій задачі.

Оцінюючи якості маршруту можна використовувати інші підходи. Розглянемо два випадки.

1. Оцінкою є ступінь впевненості особи, яка приймає рішення, у тому, що мінімальні витрати часу на рух від першого пункту до останнього не перевищать заданої величини τ . Оптимальним пропонується вважати план, для якого час руху від першого пункту до останнього не перевищує τ , а ступінь упевненості у його реалізації максимальна серед усіх таких планів.

Нехай в умові прикладу 10 потрібно визначити максимальне значення ступеня впевненості особи, яка приймає рішення, у тому, що на рух від першого пункту до останнього знадобиться не більше 35 год.

З таблиці 5 видно (дивись графу 8), що це значення дорівнює 0,70.

2. Оцінкою якості плану є час, якого із заданою надійністю достатньо на рух від першого пункту до останнього. Оптимальним вважатимемо план, надійність якого не менше заданої величини, а час руху від першого пункту до останнього при цьому мінімальний.

Для наближеного розв'язання сформульованої задачі знову ж таки можна скористатися таблицею, аналогічною до таблиці 5.

Нехай в прикладі 10 потрібно визначити, за який мінімальний час можна переїхати з першого пункту в останній із заданим ступенем впевненості, що дорівнює 0,6. З даних таблиці 5 бачимо (дивись графу 7), що цей час дорівнює 34,4 год.

Задача про найкоротше з'єднання з нечітко визначеною економічною ефективністю комунікацій

Розглянемо ще одну задачу, пов'язану із мережами комунікацій, ми вже згадували про неї раніше, це так звана задача про найкоротше з'єднання. Йдеться про створення найбільш економічної мережі комунікацій, що з'єднує всі пункти, що розглядаються. Під економічною ефективністю можна

розуміти, наприклад, сумарну довжину комунікацій мережі, вартість побудови цієї мережі, сумарний час руху або вартість проїзду і т. д. Ми надалі говоритимемо про сумарну вартість створення всіх необхідних комунікацій. У деяких науково-технічних джерелах характеристику економічної ефективності кожної комунікації задають чітко, однозначно. Насправді цей показник однозначно визначений далеко не завжди, скажімо, вартість створення комунікації залежить від великої кількості факторів і точно передбачити її можливо далеко не завжди. Ми збираємося врахувати цей факт, застосовуючи теорію нечітких множин.

Отже, розглянемо мережу з m комунікаціями (скінченний, зв'язний, неорієнтований граф G , кожному ребру якого співвіднесено деяке число, у нас це витрати на створення відповідної комунікації) з n вершинами (пунктами). Пункти припускати перенумерованими числами від 1 до n . Надалі вершину ототожнюватимемо з її номером. Як це заведено в теорії графів, комунікацію (ребро), що з'єднує пункт i з пунктом j , позначатимемо (i, j) . Будемо припускати, що множина комунікацій

$$\mathfrak{R} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)\}$$

деяким чином упорядкована і що вартість створення комунікації (i, j) є нечітким числом d_{ij} з функцією приналежності $\mu_{ij}(d)$ (дивись формулу (17) та рисунку 47), заданої на універсальній множині можливих значень витрат $[0, \infty)$.

$$\mu_{ij}(d) = \begin{cases} f_{ij}^1(d), & \text{якщо } d \in [a_{ij}, b_{ij}], \\ f_{ij}^2(d), & \text{якщо } d \in [b_{ij}, c_{ij}], \\ 0, & \text{якщо } d < a_{ij} \text{ або } d > 0. \end{cases} \quad (17)$$

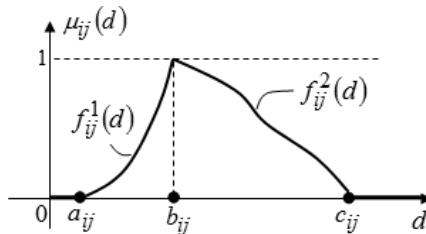


Рисунок 47 – Приклад графіка функції належності

Передбачається, що $f_{ij}^1(d)$ строго зростаюча функція, $f_{ij}^2(d)$ – строго спадна функція, обидві вони неперервні,

$$f_{ij}^1(a_{ij}) = f_{ij}^2(c_{ij}) = 0, \quad f_{ij}^1(b_{ij}) = f_{ij}^2(b_{ij}) = 1.$$

Вирішуючи сформульовану задачу, будемо, як і раніше, використовувати підхід Заде та Беллмана.

Розглянемо множину мереж комунікацій, заданих на тому самому графі і які відрізняються одна від одної витратами на будівництво відповідних комунікацій. Тому повною характеристикою мережі (варіанту) є набір значень витрат.

Як універсальну множину будемо розглядати множину

$$U = \{u \in R^m | u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

де R^m – m -вимірний евклідовий простір:

$$R^m = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_m) | u_i - \text{дійсне число}, \quad i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Припустимо, що осі координат відповідають комунікаціям.

Якщо

$$\mathfrak{R} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)\}$$

є впорядкованою множиною комунікацій на мережі, то перша координата відповідає комунікації (i_1, j_1) , друга – (i_2, j_2) і т. д. Уздовж координатних осей відкладаються вартості створення відповідних комунікацій. Точкою $u \in U$ є точка з координатами

$$(u_1, u_2, \dots, u_m),$$

тобто u – це варіант (план) витрат на створення комунікацій мережі.

Кожній точці $u \in U$ відповідає набір (вектор) значень функцій належності

$$\Psi(u) = (\mu_{i_1 j_1}(u_1), \mu_{i_2 j_2}(u_2), \dots, \mu_{i_m j_m}(u_m)),$$

де $\mu_{i_k j_k}(u_k), k = 1, 2, \dots, m$ – ступінь нашої впевненості в тому, що затрати на створення комунікацій (i_k, j_k) рівні u_k .

У якості нечіткої множини допустимих планів будемо розглядати нечітку множину \hat{X} , визначену на універсальній множині U , для якої функція належності $\mu_{\hat{X}}(u)$ визначається формулою (18):

$$\mu_{\hat{X}}(u) = \min_{1 \leq k \leq m} \mu_{i_k j_k}(u_k), \quad u \in U. \quad (18)$$

Тобто кожній комунікації відповідає своя нечітка множина з функцією приналежності $\mu_{i_k j_k}(u_k)$.

Зауважимо, що формулу (18) отримано на підставі визначення кон'юнкції нечітких висловлювань.

Аналогічно нечітку мету у задачі, що розглядається, будемо формалізувати нечіткою множиною $\tilde{X}_{\tilde{c}}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{c}}(u), u \in U$.

Позначимо:

$M(u)$ – множина комунікацій, які при варіанті u з'єднують всі пункти і при цьому їх сумарна вартість мінімальна в порівнянні з усіма іншими наборами комунікацій, що з'єднують всі пункти, при варіанті u ;

$S(u)$ – мінімальні сумарні витрати на створення комунікацій, що з'єднують усі пункти, при допустимому плані u ;

u^{min} – мінімальні витрати на створення комунікацій, що з'єднують всі пункти, що розглядаються, коли витрати на створення будь-якої комунікації (i, j) мережі мінімальні, тобто рівні a_{ij} , сам план з такими затратами на створення комунікацій позначимо u^{min} :

$$u^{min} = \{a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \dots, a_{i_mj_m}\};$$

S^{max} – максимальні витрати на створення комунікацій, що з'єднують всі пункти, що розглядаються, коли витрати на створення будь-якої комунікації (i, j) мережі максимальні, тобто рівні c_{ij} , сам план з такими затратами на створення комунікацій позначимо u^{max} :

$$u^{max} = \{c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2}, \dots, c_{i_mj_m}\}.$$

Зазначимо, що для заданого $u \in U$ для будь-якої комунікації з \mathfrak{X} відома вартість її створення. Тому, застосовуючи алгоритм Красскала, ми можемо обчислити $S(u)$.

Як функцію приналежності планів нечіткої мети будемо використовувати показник економічної ефективності плану, значення якого будемо характеризувати близькістю (за витратами) планів u та u^{min} . Покладемо

$$\mu_{\tilde{c}}(u) = \frac{S^{max} - S(u)}{S^{max} - S^{min}}. \quad (19)$$

Нечітким розв'язком зазначеної задачі будемо вважати нечітку множину \tilde{D} з функцією належності $\mu_{\tilde{D}}(u)$, що є перетином нечіткої множини допустимих планів і нечіткої мети:

$$\mu_{\bar{D}}(u) = \min\{\mu_{\bar{X}}(u), \mu_{\bar{C}}(u)\}. \quad (20)$$

Як розв'язок задачі пропонується розглядати план u^0 , для якого

$$\mu_{\bar{D}}(u^0) = \max_{u \in U} \mu_{\bar{D}}(u) = \max_{u \in U} \min\{\mu_{\bar{X}}(u), \mu_{\bar{C}}(u)\}. \quad (21)$$

Зазначимо такі властивості розв'язку.

Нехай

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0), \\ \mu_{\bar{X}}(u^0) = \min_{1 \leq k \leq m} \mu_{i_k j_k}(u_k^0) = \alpha, \\ \mu_{\bar{C}}(u^0) = A, \\ \mu_{\bar{D}}(u^0) = B, \\ S(u^0) = \theta. \end{array} \right. \quad (22)$$

Теорема 10. Знайдеться такий оптимальний план u^* , що $\mu_{i_k j_k}(u_k^*) = B$ для будь-якої комунікації (i_k, j_k) .

Доведення. Розглянемо наступні варіанти: $\alpha = A$, $\alpha < A$ і $\alpha > A$.

1. Нехай $\alpha = A$. Якщо $\alpha = 1$, то $\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = 1$ для будь-якої комунікації (i_k, j_k) і план u^0 – шуканий. Якщо $\alpha < 1$, то побудуємо такий план u' , що

$$\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \alpha \text{ для будь-якого } k.$$

Зауважимо, що для кожної комунікації (i_k, j_k) існують два різні значення витрат, при яких значення функції належності збігаються і дорівнюють ε (крім розглянутого випадку, коли $\alpha = 1$), позначимо ці значення s_k^1 і s_k^2 . Нехай $s_k^1 < s_k^2$. Зазначимо, що $s_k^1 < b_{i_k j_k} < s_k^2$.

При побудові плану u' у якості значення для u'_k будемо брати менше із цих двох значень, тобто s_k^1 .

Оскільки із рівностей (22) маємо $\alpha \leq \mu_{i_k j_k}(u_k^0)$, то в силу властивостей функцій належності витрат на створення комунікацій, $s_k^1 \leq u_k^0$.

Отже, витрати на створення будь-якої комунікації при плані u' не перевищують відповідних витрат при плані u^0 . Значить, $S(u') \leq S(u^0)$, а через оптимальність u^0 ми маємо, що $S(u') \geq S(u^0)$, отже, $S(u') = S(u^0) = B$ і u' – оптимальний план.

2. Нехай $\alpha = A$. Збільшимо на ε ($0 < \varepsilon < b_{ij}$) для будь-якої комунікації (i_k, j_k) витрати на її створення, отримаємо план u' (це можна зробити в силу неперервності функцій належності, що розглядаються), нехай при цьому значення відповідних функцій належності збільшилися не менше, ніж на δ кожне. В силу неперервності функцій належності ε можна вибрати так, щоб збільшені на δ значення функцій належності не перевершували б одиниці. Так як на ділянках від a_{ij} до b_{ij} відповідні функції належності строго зростають, то $\delta > 0$. Витрати $S(u')$ збільшуються в порівнянні з $S(u^0)$ не більше ніж на $m \cdot \varepsilon$, величина ж $\mu_{\bar{x}}(u')$ збільшиться порівняно з $\mu_{\bar{x}}(u^0)$ не менше ніж на δ .

Тоді

$$\begin{aligned} \mu_C(u') &= \frac{S^{max} - S(u')}{S^{max} - S^{min}} \leq \frac{S^{max} - [S(u^0) + m \cdot \varepsilon]}{S^{max} - S^{min}} = \\ &= \mu_C(u^0) - \frac{m \cdot \varepsilon}{S^{max} - S^{min}}. \end{aligned}$$

Виберемо ε так, щоб виконувалася нерівність

$$\alpha < A - \frac{m \cdot \varepsilon}{S^{max} - S^{min}}.$$

Звідси

$$\varepsilon < \frac{A - \alpha}{m} \cdot (S^{max} - S^{min}) = \beta.$$

Отже, при виборі $\varepsilon < \beta$ значення $\mu_C(u')$, хоча і зменшуються порівняно з $\mu_C(u^0)$, але залишаються все-таки більше α , значення ж $\mu_{\bar{x}}(u')$ збільшується у порівнянні з $\mu_{\bar{x}}(u^0)$ не менше ніж на δ . Отже,

$$B = \mu_{\bar{D}}(u^0) < \mu_{\bar{D}}(u')$$

і u^0 не є оптимальним планом, що суперечить нашому припущенню, отже, даний випадок неможливий.

3. Нехай $\alpha > A$. Розглянемо такий план u' , для якого $\mu_{i_k j_k}(u') = \alpha - \varepsilon$, причому із двох наявних тут можливих значень витрат для плану u' візьмемо менші. Отримані значення витрат не більше аналогічних значень у плані u^0 , значить,

$$\mu_C(u') \geq \mu_C(u^0) = A,$$

тоді

$$\mu_{\bar{D}}(u') = \min\{\mu_{\bar{X}}(u'), \mu_C(u')\} \geq \min\{\alpha, A\} = A.$$

Оскільки u^0 – оптимальний план, то $\mu_{\bar{D}}(u')$ не може бути більше A , отже, $\mu_{\bar{D}}(u') = A$ і u' – оптимальний план, його і можна взяти в якості плану u^* із висновку теореми. Теорему доведено.

Теорема 10, як і попередня, дає можливість отримати алгоритм відшукування наближеного розв'язку задачі. Як і раніше, задаючи з певним кроком значення функцій належності витрат, знаходимо відповідні значення витрат. Знаючи витрати на створення кожної комунікації мережі, знаходимо, використовуючи алгоритм Краскала, найкоротше з'єднання, визначаємо значення функції належності нечіткої мети і, нарешті, значення функції належності нечіткого розв'язку. Визначивши останнє значення для всіх кроків алгоритму, вибираємо з них максимальне, воно і буде наближеним оптимальним значенням функції належності нечіткого рішення, відповідний план наближено є оптимальним.

Приклад 11. Необхідно побудувати дорожню мережу, яка зв'яже дані шість пунктів. Відомо, які з доріг, що з'єднують ці пункти, можна побудувати (рисунок 48) та функції належності $\mu_{ij}(d)$ нечітких множин, що формалізують нечіткі витрати на будівництво цих доріг.

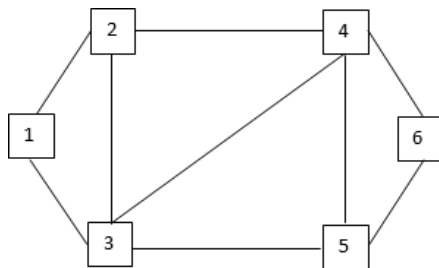


Рисунок 48 – Дороги, які можуть бути побудовані

Припустимо, що для комунікації (i, j) :

$$\mu_{ij}(d) = \begin{cases} \frac{d^2}{b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}} - \frac{a_{ij}d}{b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}}, & \text{якщо } d \in [a_{ij}, b_{ij}], \\ \frac{d^2}{b_{ij}^2 - c_{ij}b_{ij}} - \frac{a_{ij}d}{b_{ij}^2 - c_{ij}b_{ij}}, & \text{якщо } d \in [b_{ij}, c_{ij}], \\ 0, & \text{якщо } d \leq a_{ij} \text{ або } d \geq c_{ij}. \end{cases} \quad (23)$$

Значення параметрів a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} для різних доріг вказано в таблиці 7 в умовних одиницях.

Таблиця 7 – Дані про нечіткі витрати

Дорога (i, j)	Параметри		
	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}
(1,2)	5	6	15
(1,3)	7	8	9
(2,3)	1	10	12
(2,4)	5	7	14
(3,4)	3	9	11
(3,5)	6	8	16
(4,5)	2	7	10
(4,6)	5	10	12
(5,6)	4	9	15

Для заповнення верхньої частини таблиці 8 розглянемо перше співвідношення з (23):

$$y = \mu_{ij}(d) = \frac{d^2}{b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}} - \frac{a_{ij}d}{b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}},$$

Розв'язавши його відносно d , отримаємо

$$d = \frac{a_{ij} + \sqrt{a_{ij}^2 + 4(b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}) \cdot \mu_{ij}(d)}}{2}. \quad (24)$$

У верхню частину таблиці 8 у клітинки рядка, відповідної комунікації (i, j) , заносяться результати обчислень за формулою (24) при заданих значеннях функції $\mu_{ij}(d)$.

Таблиця 8 – Вихідні дані та проміжні результати для прикладу 11

Код комун.	$k \cdot \Delta$										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(1,2)	5	5,12	5,23	5,34	5,44	5,54	5,64	5,73	5,82	5,91	6
(1,3)	7	7,11	7,22	7,33	7,43	7,53	7,63	7,72	7,82	7,91	8
(2,3)	1	3,54	4,77	5,72	6,52	7,23	7,87	8,45	9,00	9,51	10
(2,4)	5	5,27	5,51	5,73	5,94	6,14	6,33	6,51	6,68	6,84	7
(3,4)	3	4,57	5,11	5,80	6,38	6,91	7,39	7,83	8,24	8,63	9
(3,5)	6	6,26	6,49	6,71	6,92	7,12	7,31	7,49	7,67	7,84	8
(4,5)	2	3,12	3,83	4,39	4,87	5,30	5,69	6,05	6,39	6,70	7
(4,6)	5	5,85	6,53	7,11	7,62	8,09	8,52	8,92	9,30	9,66	10
(5,6)	4	4,92	5,61	6,18	6,69	7,15	7,57	7,96	8,32	8,67	9
РЕЗУЛЬТАТИ											
$k \cdot \Delta$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$\mu_{\hat{x}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
S	15,00	21,27	24,55	27,36	29,32	31,09	32,54	33,74	34,88	35,96	37,00
μ_c	1,00	0,72	0,57	0,44	0,35	0,27	0,20	0,15	0,10	0,05	0,00
$\mu_{\hat{D}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,35	0,27	0,20	0,15	0,10	0,05	0,00

Зауважимо, що так як ми при заданому значенні функції належності витрат орієнтуємося на менші значення витрат, то значення параметра c_{ij} ми не використовуємо під час заповнення таблиці 8.

На рисунку 49 зображено графік залежності функції належності нечіткого рішення $\mu_{\hat{D}}(u)$ від значень функції належності нечіткої множини допустимих планів $\mu_{\hat{x}}(u)$. З аналізу цього графіка видно, що оптимальне значення функції належності нечіткого рішення приблизно дорівнює 0,35, оптимальним планом є план, вартості створення комунікацій при якому зазначені в шостій графі таблиці 8.

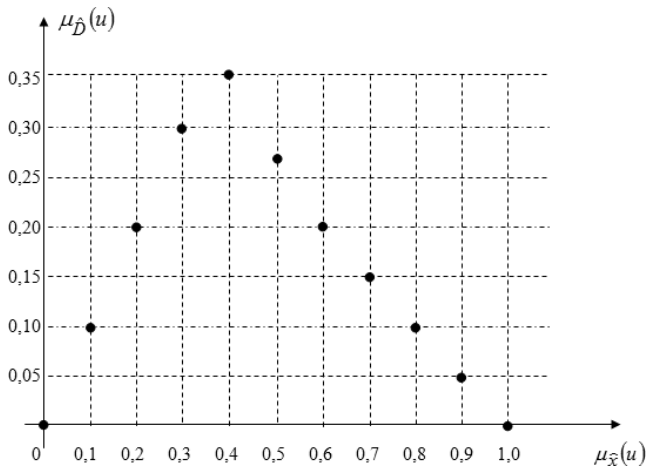


Рисунок 49 – Графік залежності значень функції $\mu_{\tilde{D}}(u)$ від значень $\mu_{\tilde{X}}(u)$

Для отримання більш точної, але, звичайно, теж наближеної відповіді, розглянемо рисунок 50, на якому зображені два графіки:

- графік залежності функції належності нечіткої множини допустимих планів від значення функцій належності нечітких витрат за створення комунікацій (нагадаємо, що ми маємо справу лише з ситуаціями, коли усі ці значення однакові для всіх комунікацій);

- графік залежності функції належності нечіткої множини мети $\mu_c(u)$ від того ж аргументу, що і перший графік.

Аналіз графіків рисунку 50 показує, що розв'язку задачі відповідає точка перетину цих графіків, її ж координати дорівнюють приблизно 0,375 для обох координат. З графіка видно, що максимальне значення функції $\mu_{\tilde{D}}(u)$ (рівне, відповідно до формули (13), мінімальному із значень функцій $\mu_{\tilde{X}}(u)$ і $\mu_c(u)$) дорівнює приблизно 0,375.

Оцінюючи якість плану будівництва доріг можна використовувати й інші підходи. Розглянемо два із них.

1. Оцінку є ступінь впевненості особи, яка приймає рішення, у тому, що мінімальні витрати на створення необхідної мережі доріг не перевищать заданої величини s . Оптимальним пропонується вважати план, для якого вартість створення

необхідної мережі доріг не перевищує s , а ступінь упевненості у його реалізації максимальна серед усіх таких планів.

Нехай в умовах прикладу 11 потрібно визначити максимальне значення ступеня впевненості особи, яка приймає рішення, у тому, що на створення необхідної мережі доріг потрібно не більше 35 одиниць коштів.

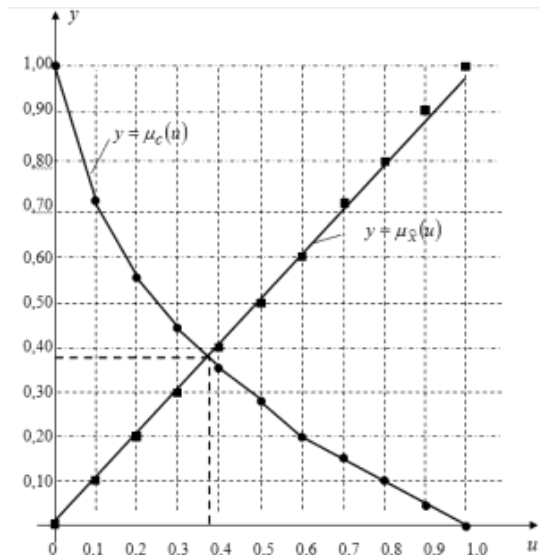


Рисунок 50 – Графіки функцій $\mu_{\chi}(u)$ і $\mu_c(u)$

З таблиці 8 видно (дивись графу 10), що це значення приблизно дорівнює 0,8.

2. Оцінкою є сумарні витрати, яких із заданою надійністю вистачає на будівництво мережі. Оптимальним пропонується вважати план, надійність якого не менша за задану величину, а витрати при цьому мінімальні. Для вирішення цієї задачі знову ж таки можна скористатися таблицею, аналогічною таблиці 8.

Нехай в умовах прикладу 11 потрібно визначити мінімальні витрати на створення мережі доріг, і щоб при цьому ступінь впевненості в достатності цих витрат для будівництва мережі, що розглядається, була не менше 0,6. З даних восьмої графі таблиці 8 бачимо, що ці витрати дорівнюють 32,54 ум. од.

Задача про максимальний потік із нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій

Розглянемо задачу про максимальний потік, але тепер будемо вважати, що пропускні здатності комунікацій є нечіткими і задаються нечіткими числами. Для формулювання поняття оптимальності скористаємося ідеями Заде і Беллмана, про які вже йшлося вище.

Наведемо точне формулювання даної задачі.

Розглянемо мережу комунікацій (скінченний, зв'язний, змішаний граф, кожному ребру якого співвіднесено деяке число) з n вершинами (пунктами) і m комунікаціями.

Вершини будемо вважати пронумерованими числами від 1 до n . Надалі вершину будемо ототожнювати з її номером. Комунікацію (ребро), що з'єднує пункт i з пунктом j , позначатимемо (i, j) . Будемо припускати, що множина комунікацій

$$\mathfrak{R} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)\}$$

певним чином впорядкована і що пропускна спроможність комунікації (i, j) є нечітким числом $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$ з функцією належності $\mu_{ij}(d)$ (дивись рисунок 46 і формулу (17)), заданої на універсальній множині можливих значень пропускних спроможностей $[0, +\infty)$. Нехай

$$U = [0, +\infty) = \{u \in R^m \mid u_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Як множину допустимих планів будемо розглядати нечітку множину \hat{V} , задану на універсальній множині

$$V = \{v \in R^m \mid v_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Будемо припускати, що осі координат у просторі R^m відповідають комунікаціям: перша координата відповідає комунікації (i_1, j_1) , друга – (i_2, j_2) і т. д. Вздовж координатних осей при розгляді множини U відкладаються значення пропускних здатностей, а при розгляді множини V – заплановані обсяги перевезень по відповідним комунікаціям, тобто u_k – значення пропускної здатності комунікації (i_k, j_k) і v_k – запланований обсяг перевезення по цій комунікації; оскільки $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, то v – план перевезень по всій мережі.

Позначимо через $v^*(u)$ максимальний потік (обсяг перевезень) на даній мережі, у разі, коли пропускні спроможності комунікацій дорівнюють

$$u = (u_{i_1j_1}, u_{i_2j_2}, \dots, u_{i_mj_m}).$$

Тоді

$$v^*(u) = (v_{i_1j_1}^*(u), v_{i_2j_2}^*(u), \dots, v_{i_mj_m}^*(u)).$$

Функція належності $\mu_{\hat{V}}(v)$ нечіткої множини \hat{V} задана на універсальній множині V і визначається формулою

$$\mu_{\hat{V}}(v) = \begin{cases} \max_{u \in U} \min_{(i_kj_k) \in \mathfrak{R}} \mu_{i_kj_k}(u_{i_kj_k}), \\ 0, \text{ у інших випадках,} \end{cases} \quad (25)$$

тобто якщо v – максимальний потік при значеннях пропускних спроможностей, рівних $u_{i_1j_1}, u_{i_2j_2}, \dots, u_{i_mj_m}$, то його надійність дорівнює $\min_{(i_kj_k) \in \mathfrak{R}} \mu_{i_kj_k}(u_{i_kj_k})$, в іншому випадку вона дорівнює нулю. Але один і той же потік може виявитися максимальним при різних значеннях пропускних спроможностей комунікацій. У якості $\mu_{\hat{V}}(v)$ ми використаємо значення істинності висловлювання $\bigvee_{u \in U} (v = v^*(u))$, тому для обчислення значення функції $\mu_{\hat{V}}(v)$ ми повинні використовувати формулу (25), $\mu_{\hat{V}}(v)$ – це максимальний із ступенів нашої впевненості в тому, що v є максимальний потік на мережі, що розглядається.

Отже, формула (25) отримана на підставі визначення кон'юнкції нечітких висловлювань.

Як і раніше нечітко визначену мету даної задачі будемо формалізувати нечіткою множиною $V_{\hat{c}}$ з функцією належності $\mu_{\hat{c}}(v), v \in V$.

Позначимо:

$S(v)$ – величина потоку при допустимому плані v ;

$v^*(u)$ – максимальний потік при пропускних здатностях u ;

$S(v^*(u))$ – величина максимального потоку при пропускних здатностях u ;

S^{min} – величина максимального потоку у разі, коли пропускні здатності всіх комунікацій мінімальні, тобто рівні a_{ij} ;

S^{max} – величина максимального потоку у випадку, коли пропускні здатності всіх комунікацій максимальні, тобто рівні c_{ij} .

Зазначимо, що при заданому $u \in U$ для будь-якої комунікації з \mathfrak{X} відома її пропускна здатність. Тому, застосовуючи, наприклад, алгоритм Форда – Фалкерсона, ми можемо обчислити $S(v^*(u))$.

У якості функції належності $\mu_{\hat{c}}$ для аналізованих планів нечіткої мети розглядатимемо показник близькості аналізованого плану v до найбільшого за величиною максимального потоку, що саме ми і пропонуємо характеризувати близькістю величини $S(v)$ до величини S^{max} .

Покладемо

$$\mu_{\hat{c}}(v) = \frac{S(v) - S^{min}}{S^{max} - S^{min}}. \quad (26)$$

Нечітким розв'язком задачі будемо вважати нечітку множину \hat{D} з функцією належності $\mu_{\hat{D}}(v)$, що є перетином нечіткої множини допустимих планів і нечіткої мети:

$$\mu_{\hat{D}}(v) = \min \{ \mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{c}}(v) \}. \quad (27)$$

У якості розв'язку пропонується план v^0 , для якого

$$\mu_{\hat{D}}(v^0) = \max_{v \in V} \mu_{\hat{D}}(v) = \max_{v \in V} \min \{ \mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{c}}(v) \}. \quad (28)$$

Обговоримо деякі властивості розв'язку.

Нехай

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{V}}(v^0) &= \min_{(i_k j_k) \in \mathfrak{X}} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = \alpha, \\ v^0 &= v^*(u^0), \\ \mu_{\hat{c}}(v^0) &= A, \\ \mu_{\hat{D}}(v^0) &= B, \\ S(v^0) &= \theta. \end{aligned} \quad (29)$$

Теорема 11. Знайдеться такий набір u' значень пропускних спроможностей комунікацій мережі, що $\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = B$ для будь-якої комунікації (i_k, j_k) і $\mu_{\hat{D}}(v^*(u')) = \mu_{\hat{D}}(v^0)$.

Доведення. Розглянемо такі можливі варіанти: $\alpha = A$, $\alpha < A$ і $\alpha > A$.

1. Нехай $\alpha = A$. Тоді $\alpha = A = B$. Якщо $\alpha = 1$, то $\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = 1$ для будь-якої комунікації (i_k, j_k) і план v^0 – шуканий. Якщо $\alpha < 1$, то побудуємо такий план v' , що

$$\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \alpha \text{ для будь-якого } k.$$

Покажемо, що u' – оптимальний план.

Зауважимо, що для кожної комунікації (i_k, j_k) існують два різні значення пропускної спроможності, при яких значення функції належності збігаються і дорівнюють α (за винятком випадку, коли значення функції належності дорівнює одиниці), позначимо ці значення $u_{i_k j_k}^1$ і $u_{i_k j_k}^2$. Нехай $u_{i_k j_k}^1 < u_{i_k j_k}^2$. При побудові плану u' як значення для $u_{i_k j_k}$ при будь-якому k братимемо більше із цих двох чисел, тобто $u_{i_k j_k}^2$. Зазначимо ще, що $u_{i_k j_k}^1 < b_{ij} < u_{i_k j_k}^2$.

Оскільки із рівності (29) маємо $\alpha \leq \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0)$, то в силу властивостей функцій належності пропускних спроможностей, $u'_{i_k j_k} = u_{i_k j_k}^2 \geq u_{i_k j_k}^0$. Значить, $S(v^*(u')) \geq S(v^0)$. Маємо: $\mu_{\bar{c}}(v^*(u')) \geq \mu_{\bar{c}}(v^0)$ і $\mu_{\bar{b}}(v^*(u')) \geq \mu_{\bar{b}}(v^0)$. Але в силу формули (28) $\mu_{\bar{b}}(v^0) \geq \mu_{\bar{b}}(v^*(u'))$, тоді $\mu_{\bar{b}}(v^*(u')) = \mu_{\bar{b}}(v^0) = B$ і план u' є оптимальним.

Що й потрібно було довести.

2. Нехай $\alpha < A$, тоді $B = \alpha$. Розглянемо комунікації (u_k, j_k) , для яких $\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = \alpha$. Збільшимо на ε значення функцій належностей їх пропускних спроможностей, але так, щоб мінімальне значення цих функцій належності дорівнювало $\alpha + \varepsilon < A$. При цьому самі пропускні спроможності трохи зменшаться (тут, як і раніше, з двох можливих значень беремо більше), а отже, трохи зменшиться величина максимального потоку, тобто значення функції належності нечіткої мети зменшиться і стане рівним $A - \delta$. Через неперервність функцій належності ε можна обрати таким чином, щоб виконувалась нерівність

$$\alpha + \varepsilon \leq A - \delta.$$

Позначимо через u' вектор отриманих значень функцій належності і v' як максимальний потік при відповідних пропускних спроможностях, тобто $v' = v^*(u')$. Тоді

$$\mu_{\bar{v}}(v') = \mu_{\bar{v}}(v^*(u')) = \alpha + \varepsilon.$$

Маємо:

$$\mu_{\bar{c}}(v') = A - \delta,$$

$$\mu_{\bar{v}}(v') = \alpha + \varepsilon,$$

$$\alpha + \varepsilon \leq A - \delta,$$

тоді

$$\mu_{\bar{D}}(v') = \min\{\mu_{\bar{V}}(v'), \mu_{\bar{C}}(v')\} = \min\{\alpha + \varepsilon, A - \delta\} = \alpha + \varepsilon > \alpha.$$

Отже, план v^0 не оптимальний, що суперечить зробленому припущенню. Значить, випадок, коли $\alpha < A$, неможливий.

3. Нехай $\alpha > A$. Розглянемо такий вектор u' значень пропускних спроможностей, що $\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \alpha - \varepsilon$, де ε таке, що $\alpha - \varepsilon > A$, причому з двох можливих значень пропускних спроможностей для кожної комунікації оберемо більше.

Розглянемо максимальний потік $v^*(u') = v'$, зауважимо, що $v' > v^0$ і тоді $\mu_{\bar{C}}(v') > A$.

Обираючи ε отримуємо, що

$$\mu_{\bar{D}}(v') > \mu_{\bar{D}}(v^0),$$

чого не може бути, отже, $\alpha = A$, і ми отримуємо перший випадок. Що й треба було довести.

Остання теорема так само, як і деякі попередні, дає можливість будувати алгоритм наближеного розв'язку задачі. Як і раніше, задаємо з певним кроком значення функцій належності пропускних спроможностей та знаходимо відповідні значення пропускних спроможностей комунікацій. Знаючи значення пропускних спроможностей, знаходимо максимальний потік при таких пропускних спроможностях, визначаємо значення функції належності нечіткої мети та, нарешті, значення функції належності нечіткого розв'язку.

Визначивши значення функції належності нечіткого розв'язку для усіх кроків алгоритму, обираємо з цих значень максимальне. Відповідний максимальний потік і дає шукане наближене розв'язку даної задачі.

Приклад 12. Знайти оптимальний потік на мережі, схема якої зображена на рисунку 51. Пропускні здатності (u_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4, 5$; $j = 2, 3, 4, 5, 6$)) передбачаються нечіткими і при значеннях функції належності, взятих з кроком 0,1, зазначені в таблиці 9.

З останнього рядка таблиці 9 видно, що максимальне значення функції належності нечіткого розв'язку дорівнює 0,46, що відповідає значенню функцій належності пропускних спроможностей комунікацій, що дорівнює 0,5, значення пропускних спроможностей комунікацій зазначені у відповідній графі таблиці.

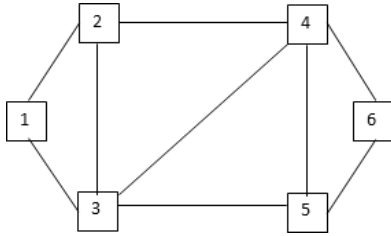


Рисунок 51 – Граф-схема комунікацій

Таблиця 9 – Нечіткі пропускні спроможності та максимальний потік

u_{ij}	Значення функцій приналежності пропускних спроможностей										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_{12}	50	48	46	40	30	29	28	24	24	22	20
v_{12}^*	46	44	42	39	30	27	25	20	24	11	10
u_{13}	40	30	26	25	24	23	22	22	22	21	20
v_{13}^*	33	28	25	25	24	23	21	22	12	20	15
u_{23}	24	23	22	19	16	15	14	13	12	11	10
v_{23}^*	24	23	22	19	10	9	9	6	12	0	0
u_{24}	22	21	20	20	20	18	16	14	12	11	10
v_{24}^*	22	21	20	20	20	18	16	14	12	11	10
u_{34}	30	25	23	23	22	21	20	18	16	13	10
v_{34}^*	30	25	23	20	11	10	9	10	8	4	0
u_{35}	27	26	25	24	23	22	21	18	17	16	15
v_{35}^*	27	26	25	24	23	22	21	18	17	16	15
u_{45}	30	28	26	25	23	22	21	19	15	16	15
v_{45}^*	0	0	0	0	5	4	3	4	0	0	0
u_{46}	55	52	50	40	26	24	22	20	20	15	10
v_{46}^*	52	46	43	40	26	24	22	20	0	15	10
u_{56}	45	42	40	35	30	26	24	22	16	16	15

v_{56}^*	27	26	25	24	28	26	21	22	16	16	15
$S(v^*)$	79	72	68	64	54	50	46	42	36	31	25
$\mu_C(v^*)$	1,00	0,87	0,80	0,72	0,54	0,46	0,39	0,31	0,20	0,11	0,00
$\mu_D(v^*)$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,45	0,39	0,31	0,20	0,11	0,00

Задача про призначення з нечітко заданими витратами

Розглянемо задачу про призначення в термінах дводольних графів. Припустимо, що прибуток d_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$), одержуваний під час виконання роботи з номером j виконавцем з номером i , є нечітким числом: $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$, де a_{ij} – мінімально можливе значення прибутку під час виконання роботи з номером j виконавцем з номером i , c_{ij} – максимально можливий прибуток, b_{ij} – мода. Функцію належності нечіткого числа d_{ij} позначимо через $\mu_{ij}(u)$, де u – елемент універсальної множини $U = [0, +\infty)$.

Будемо вважати, що функція $\mu_{ij}(u)$ неперервна, на відрізку $[a_{ij}, b_{ij}]$ строго зростає і на відрізку $[b_{ij}, c_{ij}]$ строго спадає, $\mu_{ij}(b_{ij})=1$, $\mu_{ij}(a_{ij})=\mu_{ij}(c_{ij})=0$. Необхідно знайти «найкраще» досконале паросполучення, тобто оптимальний розподіл виконавців по роботам.

Величину $\mu_{ij}(u)$ будемо трактувати як впевненість у тому, що прибуток при виконанні роботи з номером j виконавцем з номером i дорівнює u , як показник істинності нечіткого висловлювання «дохід при виконанні роботи з номером j виконавцем з номером i дорівнює u ».

Будуючи математичну модель розглянутої задачі у підході до поняття «оптимальний план», як і раніше, слідуватимемо ідеям, сформульованим Заде та Беллманом. Позначимо через X множину всіх можливих зважених дводольних графів $G_F = (V_1, V_2, E, F)$, вершини з V_1 відповідають виконавцям, вершини з V_2 відповідають роботам. Кожна вершина з V_1 з'єднана ребром з кожною вершиною із V_2 . Ці ребра відповідають можливим призначенням виконавців на роботи і в сукупності утворюють множину E . Кожному ребру (i, j) співвіднесено

невід'ємне число (вага) $u_{ij} = F(i, j)$ – прибуток при виконанні відповідної роботи відповідним виконавцем. Наголосимо, що тут йдеться про «чітке» значення цього прибутку. Ступінь нашої впевненості у тому, що цей прибуток складає u_{ij} одиниць, дорівнює $\mu_{ij}(u_{ij})$. Оскільки графи, що розглядаються, відрізняються один від одного тільки величинами прибутків при виконанні різних робіт різними виконавцями, то для повної їх характеристики достатньо вказати тільки значення цих прибутків.

Нехай x_F – досконале паросполучення (розподіл виконавців по роботах), що має максимальну вагу на графі G_F (максимальний сумарний прибуток за відповідних прибутків за виконання конкретних робіт); якщо таких паросполучень декілька, то x_F якесь із них. Множина таких паросполучень, що відповідають всім можливим відображенням F , позначимо через Y . Паросполучення x_F буде вважатися заданим, якщо задана множина ребер, з яких воно складається:

$$x_F = \{(i_{1F}, j_{1F}), (i_{2F}, j_{2F}), \dots, (i_{nF}, j_{nF})\}.$$

Позначимо:

$S(x_F)$ – максимальний сумарний прибуток при виконанні всіх робіт у випадку, коли для будь-якого ребра (i, j) прибуток при виконанні роботи j виконавцем i дорівнює $F(i, j)$;

F^{min} – таке відображення, що $F^{min}(i, j) = a_{ij}$ для будь-якого $(i, j) \in E$;

F^{max} – таке відображення, що $F^{max}(i, j) = c_{ij}$ для будь-якого $(i, j) \in E$.

Задаємо на множині Y нечітку множину \hat{Y} з функцією належності $\mu_{\hat{Y}}(x_F)$, $x_F \in Y$. Величина $\mu_{\hat{Y}}(x_F)$ є ступінню нашої впевненості в тому, що паросполучення x_F є досконалим паросполученням максимальної ваги (сумарний прибуток при виконанні всіх робіт при відповідних призначеннях максимальний). Зауважимо, що оскільки паросполучення x_F ми шукаємо на графі G_F , то:

$$\mu_{\hat{Y}}(x_F) = \min \mu_{ij}(F(i, j)).$$

Враховуватимемо також ступінь належності паросполучення x_F нечіткій меті. Функція належності нечіткої мети характеризує

ступінь нашої впевненості в економічній ефективності плану x_F , тобто близькості цього плану до плану x_{Fmax} .

Близькість плану x_F до плану x_{Fmax} будемо характеризувати величиною

$$E(x_F) = S(x_{Fmax}) - S(x_F).$$

У якості функції належності нечіткої мети (нечіткої множини \hat{C}) будемо використовувати нормовану функцію $E(x_F)$, тобто покладемо

$$\mu_{\hat{C}}(x_F) = \frac{S(x_F) - S(x_{Fmin})}{S(x_{Fmax}) - S(x_{Fmin})}.$$

Нагадаємо, що в підході Беллмана – Заде пропонується вважати ступенем приналежності альтернативи x нечіткому розв'язку задачі число, що дорівнює мінімуму зі ступеня належності цієї альтернативи нечіткій меті та ступенів належності цієї альтернативи всім нечітким множинам, що задають обмеження задачі. Функція ж належності перетину розглянутих множин дорівнює мінімуму з функцій належності цих множин.

Як нечіткий розв'язок \hat{D} вихідної задачі пропонується використовувати перетин нечітких множин \hat{Y} та \hat{C} . Функція належності $\mu_{\hat{D}}(x_F)$ нечіткого розв'язку задається формулою

$$\mu_{\hat{D}}(x_F) = \min\{\mu_{\hat{C}}(x_F), \mu_{\hat{Y}}(x_F)\}.$$

Розв'язком задачі пропонується вважати план x_F , для якого значення функції $\mu_{\hat{D}}(x_F)$ максимальне.

Таким чином, ми отримуємо задачу нечіткого математичного програмування:

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{D}}(x_F) &\rightarrow \max, \\ x_F &\in Y. \end{aligned}$$

Приклад 13. Нехай потрібно розподілити трьох виконавців по трьом роботам. Прибутки при виконанні робіт задаються нечіткими числами та дорівнюють відповідно:

$$\begin{aligned} d_{11} &= (1,2,3), d_{12} = (1,4,5), d_{13} = (2,2,4), \\ d_{21} &= (2,4,6), d_{22} = (1,3,5), d_{23} = (2,3,4), \\ d_{31} &= (2,4,6), d_{32} = (2,4,5), d_{33} = (2,3,4). \end{aligned}$$

Відображення F задано таблицею 10 та рисунком 52. Значення функцій належності μ_{ij} задані таблицею 10.

Таблиця 10 – Відображення F і функції належності μ_{ij}

(i, j)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$F(i, j)$	2,5	2	4	3	4	3	5	4,5	2,25
$\mu_{ij}(F(i, j))$	0,50	0,33	0,00	0,50	0,50	1,00	0,50	0,50	0,25

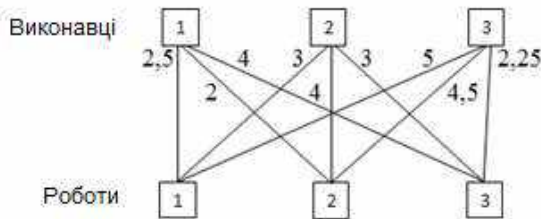


Рисунок 52 – Модель задачі про призначення з прикладу 13

Досконалим паросполученням максимальної ваги при зазначених у таблиці 10 прибутках при виконанні робіт є паросполучення

$$x_F = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}.$$

Сумарний прибуток при цьому дорівнює

$$S(x_F) = 4 + 4 + 5 = 13.$$

При мінімальних значеннях прибутків d_{ij} при виконанні робіт розглядаємо паросполучення x_{Fmin} , яким є паросполучення $\{(1,3), (2,1), (3,2)\}$, при цьому $S(x_{Fmin}) = 6$, при максимальних прибутках – паросполучення x_{Fmax} є, наприклад, паросполученням $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ і $S(x_{Fmax}) = 15$. Тоді

$$\mu^c(x_F) = \frac{13 - 6}{15 - 6} = 0,78.$$

Отже, ступінь нашої впевненості в економічній ефективності того, що при прибутках, заданих відображенням F перший виконавець повинен виконувати третю роботу, другий – другу і третій – першу, дорівнює 0,78.

Зауважимо, що дана задача багато в чому аналогічна задачі про найкоротший маршрут з нечітко заданим часом руху по комунікаціям. Для цієї задачі має місце теорема, аналогічна теоремі 8, що дозволяє використовувати для її вирішення алгоритм, аналогічний раніше запропонованому.

Висновки

Моделювання задач на графах з нечіткими вагами є потужним інструментом для аналізу та вирішення складних задач в умовах невизначеності.

У даному навчальному посібнику було описано декілька класів задач, для формулювання та розв'язання яких застосовуються теорія графів і теорія нечітких множин. А саме розглядалися: задача розрахунку параметрів мережевого графа, задача про найкращі маршрути та задача про найкоротше з'єднання, задача про оптимальний потік, задача про призначення та задачі на багатодольних графах (узагальнення задачі про призначення) тощо.

Моделювання задач на графах з нечіткими вагами є надзвичайно перспективним напрямом досліджень, оскільки воно дозволяє більш точно моделювати реальні проблеми, де невизначеність і нечіткість є невід'ємними компонентами.

Тому відзначимо певні перспективи для дослідження у цьому напрямку:

- розширення теоретичної бази, включаючи вивчення нових типів нечітких графів та їх властивостей;
- вдосконалення існуючих та розробка нових алгоритмів для більш ефективного розв'язання задач з нечіткими вагами;
- поєднання методів нечіткої логіки з іншими підходами, такими як машинне навчання, евристичні алгоритми та метаевристики, для покращення якості та швидкості розв'язання задач;
- використання нечітких графів у нових галузях, таких як інтелектуальні транспортні системи, управління ризиками, біоінформатика та інші;
- розробка спеціалізованого програмного забезпечення та інструментів для аналізу та візуалізації нечітких графів.

Бібліографічний список

1. Zadeh, L. A. Fuzzy sets // Information and Control. — 1965. — Vol. 8, № 3. — P. 338–353.
2. Kruse, R. Foundations of Fuzzy Systems / R. Kruse, J. Gebhard, F. Klawonn. — N. Y. : John Wiley and Sons Inc., 1994. — 407 p.
3. Zadeh, L. A. Outline a new approach to the analysis of complex systems and decision processes // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1973. — Vol. 3, is. 1. — P. 28–44.
4. Dijkstra, E. W. A Note on Two Problems in Connection with Graphs, Num.Math. — 1959. — № 1. — P. 269–271.
5. Kruskal, B. On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem // Proc. AMS. — 1956. — Vol. 7, № 1. — P. 48–50.
6. Ford, L. R. Maximal Flow Through a Network / L. R. Ford, D. R. Fulkerson // Canalian J. of Math. — 1956. — № 8 (3). — P. 399–404.
7. Kuhn, H. W. The Hungarian Method for the assignment problem, Naval Research Logistics Quarterly. — 1955. — № 2. — P. 83–97.
8. Ford, L. R. A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and Application to the Hitchcock Problem / L. R. Ford, D. R. Fulkerson // Canalian J. of Math. — 1957. — № 9 (2). — P. 210–218.
9. Altrock, C. Fuzzy logic. Bd. 1 : Technologie. — Munchen, BRD : R. Oldenburg Verlag GmbH, 1993. — 475 s.
10. Altrock, C. Fuzzy logic. Bd. 2 : Technologie. — Munchen, BRD : R. Oldenburg Verlag GmbH, 1994. — 375 p.
11. Kaufmann, A. Gil Introduccion de la teoria de los subconjuntos borrosos a la gestion de las empresas / A. Kaufmann, J. Aluja. — Santiago de Compostela: Milladoiro, 1986. — 198 p.
12. Becker, M. Verfahren zur bedarfsgesteuerten Abtauerkennung in Kalteanlagen unter Einsatz eines Fuzzy Entscheiders / M. Becker, S. von Recum // Proc. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium. — Ilmenau, BRD, 1994. — S. 316–323.

13. Borisov, A. N. A theory of possibility for decision-making / A. N. Borisov, O. A. Krumberg // Fuzzy Sets and Systems. — 1983. — Vol. 9, № 1. — P. 34–38.
14. Теорія графів у задачах розподілу ресурсів. Кн. 1: Алгоритми та методи обчислень [Текст] : підручн. для студ. техн. спец. вищих навчальних закладів / Ф. О. Демченко, С. В. Лістровий, М. І. Луханін, Р. В. Семчук. — Харків : Нове слово, 2008. — 120 с.
15. Теорія графів у задачах розподілу ресурсів. Кн. 2. Диференціально-ігровий підхід до моделювання систем [Текст] : підруч. для студ. техн. спец. вищих навчальних закладів / С. В. Лістровий, М. І. Луханін, О.П. Мартинова, Р.В. Семчук. — Харків : Нове слово, 2007. — 144 с.
16. Стьопкін, А. В., Пластун, Д. А. (2016). Алгоритм Форда Фалкерсона. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ.—Слов'янськ: ДДПУ, 2016.—Випуск № 6—168 с.
17. Yannakakis Mihalis, Gavril Fanica. Edge dominating sets in graphs // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1980. — Т. 38, вып. 3. — С. 364–372. — doi:10.1137/0138030.
18. Глазжан І. М., Новиков В. Г. Основи мережевого планування та управління. - Харків: Изд-во ХГУ, 1966.
19. Andrew V. Goldberg and Robert E. Tarjan. A new approach to the maximum-flow problem (англ.) // Journal of the ACM: journal. — ACM Press, 1988. — Vol. 35, no. 4. — P. 921-940. — ISSN 0004-5411. — doi:10.1145/48014.61051

Наукове видання

Савченко Ніна Валеріївна

**МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ
НА ГРАФАХ
З НЕЧІТКИМИ ВАГАМИ**

Навчальний посібник

ISBN 617-8130-56-5



9 786178 113056 5

Редакція авторська

Підписано до друку 18.06.2024.
Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Папір офсетний. Гарнітура Arial.
Ум. друк. арк. 5,58. Наклад 20 прим.

Видавець: Мірошніченко Олег Анатолійович
61002, м. Харків, вул. Дарвіна, 16, кв. 25.
Свідоцтво Державного комітету телебачення і радіомовлення України
серія ДК № 5818 від 28.11.2017 р.
ел. пошта: merash@i.ua

Надруковано у друкарні «Impress»
61002, Харків, вул. Пушкінська, 56
Тел.: (057) 714-42-11, 752-08-38
www.impress.biz.ua