МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Н. В. Савченко, В. М. Кузніченко

НЕЧІТКІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ

Навчальний посібник

Харків
2024

УДК [519.87+681.51.01:510.644.4](075.8)
С13

Рекомендовано до друку
Вченою радою Національного аерокосмічного університету
ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»,
протокол № 1 від 23.08.2023

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
д-р техн. наук, проф. А. Г. Чухрай

Савченко, Н. В.

С13 **Нечіткі системи управління.** [Текст]: навчальний посібник / Н. В. Савченко, В. М. Кузніченко – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» Видавець: О. А. Мірошниченко, 2024. – 118 с.

ISBN 978-617-8130-55-8.

У даному посібнику розглянуто основні поняття, методи та задачі дослідження операцій, що мають важливий прикладний характер для прийняття рішень у різних галузях людської діяльності та використовують підходи нечіткої логіки. Також розглянуто низку нечітких технічних систем управління, таких як управління змішувачем води, управління мобільним роботом, паркування автомобіля, вибір оптимального маршруту та інше. Даний посібник може бути використаний для теоретичної та практичної підготовки студентів як в аудиторії, так і при самостійній роботі, у тому числі за умов дистанційного навчання.

Для студентів ВНЗ України, які навчаються за спеціальностями галузей знань «Математика та статистика», «Інформаційні технології». Даний посібник може бути корисним для магістрів, аспірантів і науковців, які використовують методи системного аналізу, інформатики, обчислювальної техніки, аналізу та моделювання складних систем і процесів та займаються створенням і використанням інтелектуальних систем.

Іл. 28. Бібліогр.: 16 назв

УДК [519.87+681.51.01:510.644.4](075.8)

ISBN 978-617-8130-55-8

ЗМІСТ

ВСТУП

Однією із складових частин сучасної науки управління є, безсумнівно, множина кількісних методів дослідження складних явищ і процесів, які у сукупності становлять теорію дослідження операцій. Ці методи надають процесу управління необхідну обґрунтованість, мінімізують суб'єктивізм при виборі управлінських рішень та дають можливість певною мірою оптимізувати процеси управління.

Нині у сфері дослідження операцій досягнуто дуже вагомих результатів. Однак більшість з існуючих математичних методів, розроблених як інструментарій для дослідження конкретних процесів та явищ, виявляються ефективними при вирішенні управлінських задач лише в умовах наявності вичерпної інформації про досліджувані явища та процеси.

Якщо такі умови не дотримуються, то кількісні методи дослідження не можуть дати один показник (або набір показників) для однозначної характеристики досліджуваного явища, якого було б достатньо для прийняття однозначного управлінського рішення. У цьому випадку результатом дослідження є цілий ряд характеристик або рішень, що визначаються перебором значень параметрів, про які інформація була відсутня або була неповною.

У процесі розв'язання різних управлінських задач, зокрема і задач про відшукання рішень використання матеріально-технічних засобів різних структур, необхідним етапом є збір вихідної інформації, що в умовах тимчасових обмежень перестала бути цілком повною, а носить наближений, неточний характер.

З урахуванням вищесказаного цей посібник присвячено теоретичним основам і практичним рекомендаціям щодо вирішення задач, які виникають в процесі прийняття рішень у ситуаціях, коли вихідні дані, необхідні для їх вирішення, задані неоднозначно та мають нечіткий характер.

У посібнику розглядаються деякі задачі, які за чітко заданої вихідної інформації традиційно відносяться до дослідження операцій: транспортна задача, задача про ранець, задача управління запасами, задача векторної оптимізації. Розмова про кожен клас задач починається із наведення необхідних визначень та методів вирішення задач цього класу. Потім досліджуються аналогічні задачі, але з нечіткими вихідними даними. Будуються алгоритми (зазвичай, наближені) розв'язку наведених задач. Наводяться змістовні приклади. Також у посібнику мова йдеться про вирішення задач управління організаційними та технічними системами з використанням нечіткого логічного висновку. Розглядаються кілька прикладів управління різними системами.

РОЗДІЛ 1. ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1.1. Попередні зауваження

Важливою складовою дослідження операцій є математичне програмування.

Транспортні задачі лінійного програмування при управлінні матеріально-технічним забезпеченням виникають, наприклад, у випадках, коли забезпечення кількох підрозділів здійснюється з кількох складів, розташованих у різних районах регіону, і потрібно визначити, який обсяг матеріальних засобів треба доставити з кожного складу до кожного підрозділу.

Задача про ранець (задача про завантаження, про рюкзак) та її модифікації часто виникають у економіці, прикладній математиці, криптографії, генетиці, військовій справі, логістиці тощо при знаходженні оптимального завантаження транспорту (літака, поїзда, корабля) або складу. У загальному вигляді ці задачі можна сформулювати так: із заданої множини предметів з характеристиками «вартість» і «вага» потрібно відібрати деяке число предметів таким чином, щоб отримати максимальну сумарну вартість за одночасного дотримання обмеження на сумарну вагу. Серед інших методів для її вирішення можна використовувати метод гілок та меж або динамічне програмування.

Для забезпечення безперервного та ефективного функціонування практично будь-якої системи необхідно створення запасів. Задача управління запасами виникає, коли необхідно створити запас матеріальних ресурсів чи предметів споживання для задоволення попиту в заданому інтервалі часу.

Однак зазвичай попит на предмети постачання не є цілком визначеним. У літературі часто зустрічаються моделі постачання з імовірнісним попитом, у даному посібнику попит передбачається нечітким, а вихідна інформація у розглянутих задачах однозначно визначена або носить імовірнісний характер. Для подолання таких ситуацій будемо використовувати елементи теорії нечітких множин.

1.2. Задача лінійного програмування

Предметом математичного програмування є методи аналізу та вирішення певних класів задач щодо вибору найкращого варіанта дій зі всіх можливих варіантів. Можливий варіант називається ***допустимим планом***, план, що є розв'язком задачі, – ***оптимальним планом***.

Основоположником математичної теорії, що отримала назву «математичне програмування», є математик Л. В. Канторович (1912 – 1986). Його перші результати, присвячені описаній проблемі, були опубліковані в 1939 р. З того часу математичне програмування розвивалося дуже бурхливо і нині перетворилося на розгалужену математичну дисципліну. Інтерес, який проявляється з боку дослідників, що працюють у різних галузях, до математичного програмування, пояснюється прагненням знайти найкращий варіант використання наявних ресурсів, яких зазвичай не вистачає із-за їх обмеженості.

Природно, що суттєвим способом підвищення ефективності використання ресурсів під час виконання поставлених задач є покращення використання зазначених ресурсів, а в ідеалі оптимальне їх використання. Допомогти цьому можуть оптимізаційні моделі, важливу роль у дослідженні яких і грає математичне програмування.

Приклад 1.1. Потрібно спланувати розосередження матеріальних ресурсів у три заздалегідь визначені пункти *A, B, C,* що знаходяться від складу на відстані 20, 30 і 12 кілометрів відповідно. Для вивезення вантажів виділяється 100 однотипних автомобілів. На центральному складі є 20 механізованих вантажних майданчиків, кожен з яких забезпечує навантаження одного автомобіля за 18 хвилин. У пунктах призначення розвантаження провадиться бригадами вантажників із застосуванням засобів малої механізації. Час розвантаження одного автомобіля бригадою вантажників складає 20 хвилин. У пунктах *A* та *B* є по 7 бригад, у пункті *C* – 9 бригад вантажників.

Метою розв'язання задачі є вибір плану вивезення вантажів, що забезпечує максимум добового вивезення вантажів (максимум добової кількості рейсів).

Середня швидкість автомобіля – 40 км/год, роботи організовані у дві зміни (зміна – 8 годин). Час подачі автомобілів для першого навантаження плюс час на прибуття у місце дислокації складає 1,3 години. Отже, протягом доби перевезення здійснюються 14,7 годин, або 882 хвилини, і кількість рейсів за добу до пункту *A* дорівнює дев'яти, пункту *B* — 7, пункту *C* — 12.

Побудувати математичну модель цієї задачі у формі задачі математичного програмування.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 — кількість автомобілів, які здійснюють перевезення до пунктів *A, B, C* відповідно. Зазначимо, що ці кількості не можуть бути меншими за нуль і повинні бути цілими числами. Так як за добу на кожному механізованому навантажувальному майданчику завантажується 882/18 = 49 автомобілів, то загальна кількість машин, що завантажуються за добу, не може бути більше за 980.

Зведемо всю наявну інформацію до таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 - Вихідні дані для прикладу 1.1

Найменування ресурсу	Пункти розвантаження			Кількість ресурсу
	A	*B*	*C*	
Автомобілі	x_1	x_2	x_3	100
Число рейсів	9	7	12	980
Бригада вантажників	7	7	9	23

Сумарна кількість рейсів за добу дорівнює

$$9x_1 + 7x_2 + 12x_3.$$

За умовами навантаження ми отримуємо обмеження:

$$9x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 20 \cdot 49 = 980.$$

За умовами розвантаження отримуємо умови:

$$9x_1 \le (882/20)\cdot 7\ ,\ 7x_2 \le (882/20)\cdot 7,\ 12x_3 \le (882/20)\cdot 9$$

або, з урахуванням вимоги цілої чисельності змінних:

$$x_1 \le 34\ ,\ x_2 \le 44,\ x_3 \le 33$$

Ще однією умовою є вимога про те, що загальна кількість автомобілів, що використовуються, не може перевищувати 100 одиниць:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 100.$$

Остаточно отримуємо математичну модель аналізованої задачі, вона є задачею математичного програмування.

З огляду на умови цілої чисельності невідомих вона належить до задач цілочисельного програмування.

$$9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \to \max$$

обмеження:

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \le 980, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 100, \\ x_1 \le 34, x_2 \le 44, x_3 \le 33, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \\ x_1, x_2, x_3 - \text{цілі числа}. \end{cases}$$

Якщо остання умова не є суттєвою, то, відкинувши її, ми отримаємо задачу лінійного програмування.

Окремим випадком задач математичного програмування є задачі лінійного програмування.

Визначення 1.1. ***Задача лінійного програмування*** — це задача математичного програмування, у якій цільова функція і обмеження задаються за допомогою лінійних функцій.

Задача лінійного програмування у загальній формі має вигляд:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \to \max(\min), \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\{\le = \ge\}b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\{\le = \ge\}b_2, \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}\{\le = \ge\}b_m \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$x_{ij} \geq 0;\ i = 1,..,m;\ j = 1,\dots,n. \qquad (1.3)$$

Запис $(\leq = \geq)$ в системі обмежень (1.2) означає, що в обмеженнях можливі будь-які з цих трьох знаків, причому в різних обмеженнях знаки можуть бути різними.

Коефіцієнти c_i, a_{ij} та праві частини обмежень b_i - задані числа.

Приклад 1.2. Для проведення аварійно-відновлювальних робіт виникла потреба у відновленні руху транспорту через водну перешкоду. На роботи з підготовки до зведення переправи залучено два підрозділи, які мають здійснити заготівлю трьох видів необхідних для будівництва ресурсів (r_1, r_2, r_3) в обсягах, що дорівнюють відповідно 500, 300 та 450 умовних одиниць. Час, необхідний на заготівлю першим підрозділом одиниці ресурсу r_1 становить 4 години, одиниці ресурсу r_2 — 10 годин, ресурсу r_3 — 10 годин. Час, необхідний на заготівлю другим підрозділом одиниці ресурсу, становить відповідно 6, 8 і 20 годин.

Потрібно на основі побудованої математичної моделі даної задачі у формі задачі лінійного програмування розподілити зазначене завдання між підрозділами так, щоб сумарні витрати часу обох підрозділів на його виконання були мінімальними.

Розв'язання. Зведемо всю наявну інформацію в таблицю 1.2 і введемо позначення: x_{ij} $(i = 1,2,3;\ j = 1,2)$ – кількість одиниць ресурсу r_i, яке має заготовити підрозділ з номером j.

Таблиця 1.2 - Вихідні дані для прикладу 1.2

Ресурси	Час виготовлення одиниці ресурсу (год.) та обсяги завдань				Необхідні обсяги ресурсу (у. о.)
	Першим підрозділом		Другим підрозділом		
r_1	4	x_{11}	6	x_{12}	500
r_2	10	x_{21}	8	x_{22}	300
r_3	10	x_{31}	20	x_{32}	450

Математична модель має вигляд:

$$4x_{11} + 10x_{21} + 6x_{12} + 8x_{22} + 20x_{32} \to min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + \qquad x_{12} \geq 500, \\ x_{21} + \qquad x_{22} \geq 300, \\ x_{31} + \qquad x_{32} \geq 450, \\ x_{11} \geq 0;\ x_{21} \geq 0;\ x_{31}, x_{12} \geq 0;\ x_{22}, x_{32} \geq 0. \end{cases}$$

Розв’язавши цю задачу симплекс-методом, отримаємо відповідь: сумарні витрати часу становлять 8900 годин, перший підрозділ має виготовити 500 одиниць ресурсу першого типу та 450 одиниць третього, витративши на це 6500 годин, другий підрозділ має виготовити 300 одиниць ресурсу другого типу, витративши для цього 2400 годин.

Слід зазначити, що започаткування методів розв'язання задач лінійного програмування було здійснено американським математиком Д. Данцигом наприкінці 40-х років ХХ - го століття. Саме від нього і пішла назва симплекс-метод.

Питання для самоперевірки:

1. Що є предметом математичного програмування?
2. Як називається план, який є розв’язком заданої задачі?
3. Який план називається допустимим при розв’язанні заданої задачі?
4. Що визначає «задача лінійного програмування»?
5. Який вигляд у загальній формі має задача лінійного програмування?
6. Які вам відомі методи розв’язання задач лінійного програмування?

1.3. Транспортна задача лінійного програмування

Транспортна задача лінійного програмування є частковим випадком задачі лінійного програмування. Нагадаємо її постановку:

− у пунктах $A_1, A_2, \dots, A_m$ розташовані постачальники з однорідними матеріальними ресурсами в кількостях $a_1, a_2, \dots, a_m$ відповідно;

− у пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$ перебувають споживачі цих ресурсів, їх потреби дорівнюють відповідно $b_1, b_2, \dots, b_n$;

− відомі транспортні витрати з доставки одиниці вантажу з будь-якого складу будь-якому споживачеві (відстань між пунктами, вартість доставки одиниці матеріальних засобів тощо). Витрати з доставки однієї одиниці вантажу зі складу A_i споживачеві B_j $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ будемо позначати через c_{ij}.

Необхідно знайти план підвезення ресурсів від постачальників до споживачів, який вимагає мінімальних сумарних витрат і забезпечує потреби кожного споживача.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min, & (1.4)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, & (1.5)\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, & (1.6)\\ x_{ij} \ge 0,\ \ i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n. & (1.7) \end{cases}$$

Тут x_{ij} – обсяг товару, що поставляється від постачальника A_i до споживача B_j. Їх сукупність позначатимемо літерою X і будемо називати сумарними витратами на перевезення вантажу за планом:

$$x = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}\}.$$

Приклад 1.3. З трьох нафтових баз, розташованих у пунктах $A_1,\ A_2,\ A_3$, здійснюється постачання пального у пункти заправки $B_1,\ B_2,\ B_3, B_4$.

Таблиця 1.3 - Вихідні дані для прикладу 1.3.

<table>
<tr><td rowspan="2">Бази</td><td colspan="4">Пункти заправки</td><td rowspan="2">Можливості, т</td><td rowspan="2">Відпускна ціна, тис. грн/т</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>25</td><td>20</td><td>18</td><td>9</td><td>100</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>16</td><td>20</td><td>12</td><td>17</td><td>150</td><td>25</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>19</td><td>22</td><td>15</td><td>20</td><td>170</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Потреби, т</td><td>60</td><td>80</td><td>35</td><td>120</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Можливості щодо відпуску пального з баз (у тонах) за аналізований період, відпускна ціна на базах (у тисячах гривень за тонну), потреби у пунктах заправки (у тонах) за аналізований період зазначені у таблиці 1.3, а витрати на доставку тони пального з кожної бази на будь-який пункт заправки (у тисячах гривень за тонну) зазначені у таблиці 1.4.

Потрібно на основі побудованої математичної моделі цієї задачі визначити план підвезення пального, що вимагає мінімальних витрат і забезпечує пальним всі пункти заправки в повному обсязі.

Таблиця 1.4 - Сумарні витрати на закупівлю та доставку пального

<table>
<tr><td rowspan="2">Бази</td><td colspan="8">Пункти заправки</td><td rowspan="2">Можливості, т</td></tr>
<tr><td colspan="2">B_1</td><td colspan="2">B_2</td><td colspan="2">B_3</td><td colspan="2">B_4</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>40</td><td>x_{11}</td><td>35</td><td>x_{12}</td><td>33</td><td>x_{13}</td><td>24</td><td>x_{14}</td><td>100</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>41</td><td>x_{21}</td><td>45</td><td>x_{22}</td><td>37</td><td>x_{23}</td><td>42</td><td>x_{24}</td><td>150</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>37</td><td>x_{31}</td><td>40</td><td>x_{32}</td><td>33</td><td>x_{33}</td><td>38</td><td>x_{34}</td><td>170</td></tr>
<tr><td>Потреби, т</td><td colspan="2">60</td><td colspan="2">80</td><td colspan="2">35</td><td colspan="2">120</td><td>-</td></tr>
</table>

Розв’язання. Зауважимо, що витрати на постачання тони пального складаються з двох доданків: витрати на закупівлю та витрати на підвезення.

З урахуванням даних із таблиці 1.3 отримуємо таблицю 1.4. У цій таблиці в комірках, що відповідають маршрутам руху, поряд з витратами на постачання тони пального зазначені обсяги підвезення пального з баз до пунктів заправки. Так як ці обсяги є невідомими в нашій задачі, ми позначили їх через x_{ij}: x_{ij} – це обсяг підвезення з бази A_i $(i = 1, 2, 3)$ у пункт заправки B_j $(j = 1, 2, 3, 4)$.

З урахуванням зроблених позначень отримуємо математичну модель:

$$40x_{11} + 35x_{12} + 33x_{13} + 24x_{14} + 41x_{21} + 45x_{22} + 42x_{24} + 37x_{31} + 40x_{32} + 33x_{33} + 38x_{34} \to min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100, \\ x_{21}\text{ь} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 170, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 60, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 80, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 35, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 120, \\ x_{11} > 0, x_{12} > 0, x_{13} > 0, x_{14} > 0, \\ x_{21} > 0, x_{22} > 0, x_{23} > 0, x_{24} > 0, \\ x_{31} > 0, x_{32} > 0, x_{33} > 0, x_{34} > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану задачу, отримаємо, що оптимальними обсягами підвезення є:

− з першої бази до четвертого пункту – 100 т;
− з другої бази до третього пункту – 5 т;
- з другої бази до четвертого пункту – 20 т;
− з третьої бази у перший пункт – 60 т
− з третьої бази у другий пункт – 80 т
− з третьої бази до третього пункту – 30 т.

Сумарні витрати становлять 9 835 000 грн.

Питання для самоперевірки:

1. В чому суть транспортної задачі?
2. Які вихідні дані необхідно знати при вирішенні транспортної задачі лінійного програмування?
3. Який вигляд має математична модель транспортної задачі?

1.4. Задача про ранець

При організації постачання важливу роль відіграє процес забезпечення підвезення матеріальних ресурсів та їх зберігання. Для вирішення подібних задач корисною може виявитися так звана задача про ранець, яка є окремим випадком задачі математичного програмування.

Задача про ранець формулюється наступним чином:

– є штучні вантажі n типів $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$;

– відомі вага та вартість штуки кожного вантажу (дивись таблицю 1.5);

– є транспортний засіб вантажопідйомністю D;

– визначити, скільки штук вантажу кожного типу треба завантажити у цей засіб, щоб вартість взятих вантажів була б максимальною.

Таблиця 1.5 - Вихідні дані для задачі про ранець

Тип вантажу	A_1	A_2	…	A_n
Вага (т/шт.)	d_1	d_2	…	d_n
Вартість (грн/шт.)	c_1	c_2		c_n
Число завантажених штук	x_1	x_2		x_n

Математична модель розглянутої задачі має вигляд:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max \qquad (1.8)$$

$$d_1x_1 + dx_2 + \dots + d_nx_n \le D, \qquad (1.9)$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ \dots;\ x_n \ge 0, \qquad (1.10)$$

$$x_1,\ x_2, \dots, x_n \text{ – цілі числа} \qquad (1.11)$$

Приклад 1.4. Потрібно завантажити літак вантажністю 40 т контейнерами. Усього є 4 типи контейнерів. Їх вага та вартість наведені в таблиці 1.6.

Визначити варіант завантаження літака, у якому сумарна вартість взятих контейнерів максимальна.

Таблиця 1.6 - Вихідні дані для прикладу 1.4

Тип контейнера	A_1	A_2	A_3	A_4
Вага, т/шт.	2	3	5	7
Вартість, тис. грн/шт.	2	5	6	10
Число завантажених штук	x_1	x_2	x_3	x_4

Розв'язання. Побудуємо передусім математичну модель задачі, позначивши через x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ число контейнерів відповідного типу, що завантажуються в літак:

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 10x_4 \to max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 40, \\ x_1 > 0;\ x_2 > 0;\ x_3 > 0;\ x_4 > 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{цілі числа} \end{cases}$$

Аналізуючи дану модель, отримуємо, що при оптимальному варіанті завантаження літака у нього треба завантажити 13 контейнерів другого типу або 11 контейнерів другого типу та один контейнер четвертого типу. Сумарна вартість запланованих до навантаження контейнерів дорівнює 650 тисяч гривень.

Питання для самоперевірки:

1. В чому полягає суть задачі про ранець?
2. Які вихідні дані необхідно знати при розв'язанні задачі про ранець?
3. Який вигляд має математична модель задачі про ранець?

1.5. Елементи теорії управління запасами

Для забезпечення безперервного та ефективного функціонування практично будь-якої системи потрібне створення запасів деяких ресурсів. Задача управління запасами виникає, коли необхідно створити запас матеріальних ресурсів чи предметів споживання з задоволення попиту у заданому інтервалі часу.

Підтримка запасів на певному рівні сприяє ефективному функціонуванню аналізованої системи. Рівень запасів не повинен бути надто високим або надто низьким. Визначення оптимального рівня запасів – задача виняткової складності, і покладатися лише на інтуїцію відповідної посадової особи тут надто небезпечно. Вирішенням цієї та пов'язаних з нею задач і займається теорія управління запасами.

У будь-якій задачі управління запасами необхідно визначити обсяги матеріальних ресурсів, що замовляються, і терміни виконання замовлень. При цьому виникає проблема пошуку розв’язку, що задовольняє суперечливим вимогам скорочення витрат на зберігання та надійного попиту, що є справою досить складною і потребує ретельного кількісного аналізу.

На основі попиту (потреби), що виникає у споживачів у певні (або випадкові) моменти часу, до системи управління постачанням надходять заявки (вимоги) на предмети постачання. Управління рівнем запасів здійснюється у вигляді замовлень на створення чи поповнення запасу.

Заявки, породжені попитом, задовольняються до того часу, поки їхній сумарний обсяг не перевищить обсягу початкового запасу.

Всі наступні заявки не можуть бути задоволені до поповнення запасу. Внаслідок цього виникає дефіцит і споживач зазнає втрат, що відносяться на рахунок системи постачання, що компенсує збиток споживачів у формі штрафів.

Зрозуміло, що утримання запасів, що гарантують задоволення будь-якого попиту, може виявитися невигідним через збільшення витрат на зберігання. Проте виплачувати великі штрафи також невигідно. Тому система постачання базується на принципі встановлення певного рівня запасу ресурсів, який іноді відновлюється.

З кожним поповненням запасів пов'язані певні витрати. У цих умовах необхідно обрати такий рівень запасів, обсяг та строки їх поповнення, за яких сумарні витрати на постачання були б мінімальними.

Слід мати на увазі, що реальні системи постачання, звичайно ж, значно складніші ніж вищеописана система. У загальному випадку задачі управління запасами зводяться до задач нелінійного програмування, загальних ефективних методів вирішення яких немає.

Витрати (сумарні витрати) є критерієм ефективності у задачах управління запасами, і вони повинні враховувати різні види витрат, що виникають у системах управління запасами.

Залежно від особливості досліджуваної ситуації виникає велика кількість класів моделей управління запасами.

Розглянемо одну з найпоширеніших моделей теорії управління запасами.

Насамперед наведемо вербальний опис цієї моделі, який полягає в наступному.

Є склади одного рівня, з них відбувається постачання однорідними матеріальними ресурсами, властивості яких не змінюються з часом. Попит на предмети постачання детермінований, неперервний та постійний; його інтенсивність характеризується тим, що за період постачання Q сумарна потреба у предметі постачання дорівнює N. Поповнення запасів відбувається миттєво; витрати на поповнення не залежать від обсягу поставки та дорівнюють K грн за одне постачання; обсяги поставок однакові, інтервали часу між ними також однакові. Витрати на зберігання матеріальних засобів пропорційні обсягу запасу на складах та часу, протягом якого він зберігається; ці витрати становлять S грн за одиницю ресурсу у одиницю часу. Штраф за дефіцит пропорційний його обсягу і часу його наявності та становить P грн за одиницю коштів у одиницю часу. Передбачається, що дефіцит, який накопичився, покривається за рахунок нових поставок і максимальний розмір дефіциту на інтервалі часу між поставками однаковий для кожного такого інтервалу.

Проаналізуємо роботу описаної системи за період часу від початку роботи до моменту T, коли відбувається чергове постачання (від одного постачання до іншого) (рисунок 1.1).

В початковий момент часу на склади системи надходить запас X, і потім до часу t_1 система видає матеріальні ресурси, зменшуючи тим самим рівень запасів на своїх складах. На момент часу t_1 рівень запасів у системі знижується до нуля. На інтервалі часу від t_1 до T система відчуває дефіцит, і на момент часу T дефіцит досягає свого максимального рівня d, потім весь цикл повторюється.

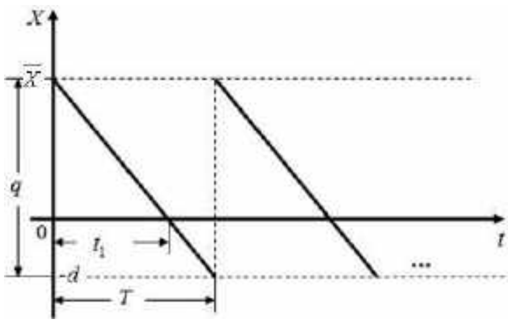


Рисунок 1.1 - Детермінована динамічна модель управління запасами з дефіцитом

При розгляді цієї моделі ми будемо використовувати такі позначення:

θ - розрахунковий період планування, міс.;

N – величина попиту за період θ, т;

K – витрати на одну поставку, грн;

S – вартість зберігання одиниці матеріальних ресурсів за одиницю часу, грн/т·міс.;

P – штраф за дефіцит одиниці матеріальних засобів в одиницю часу, грн/т·міс.;

X – максимальний рівень запасів, т;

T – довжина інтервалу часу між поставками, міс.;

q – обсяг попиту за час T, він же обсяг постачання, т;

d – максимальний рівень дефіциту, т;

$L(d, q)$ – сумарні витрати за час θ (грн.) при заданих d і q;

n – число поставок за час θ, шт.;

t_1 - час бездефіцитної роботи на інтервалі між поставками, міс.

Математична модель аналізованої системи постачання має такий вигляд:

$$L(d,q) = \frac{KN}{q} + \frac{(q-N)^2}{2q} S\theta + \frac{d^2}{2q} P\theta \to \min, \quad (1.12)$$

$$\mathrm{N} > q \geq 0; \; d \geq 0, \quad (1.13)$$

$$n = \frac{N}{q} - \text{ціле число.} \quad (1.14)$$

Зауважимо, що задача (1.12) – (1.14) є задачею математичного програмування.

Зазначимо також, що в аналогічній моделі відсутня умова (1.14). Цією вимогою дійсно можна знехтувати, якщо відносні похибки округлення результатів розв'язання задачі (1.12) – (1.13) невеликі, наприклад коли кількість поставок n досить велика.

Без урахування вимоги цілої чисельності оптимальний обсяг постачання q^*, інтервал часу між ними T^*, оптимальні витрати L^* та оптимальний розмір дефіциту d^* визначаються за формулами (1.15) – (1.18):

$$q^* = \sqrt{\frac{2KN}{\theta S}} \sqrt{\frac{S+P}{P}}, \quad (1.15)$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2K\theta}{NS}} \sqrt{\frac{S+P}{P}}, \quad (1.16)$$

$$L^* = \sqrt{2NS\theta} \sqrt{\frac{P}{P+S}}, \quad (1.17)$$

$$d^* = q^* - q^* \frac{P}{P+S}. \quad (1.18)$$

Якщо кількість поставок при цьому виявляється нецілою і помилка округлення велика, то необхідно, використовуючи формули (1.12) і (1.18), обчислити витрати при числі поставок, що дорівнює максимальному цілому числу, що не перевищує отриманого дробового числа поставок, і при числі поставок на одиницю більшу цього числа. Вибрати з двох отриманих значень менше, це буде оптимальне значення витрат на постачання.

Приклад 1.5. Нехай загальний обсяг постачання пального становить 24000 т. Витрати, пов'язані із забезпеченням одного постачання, не залежать від її обсягу та становлять 40000 грн. Вартість зберігання запасів пропорційна обсягу запасу і часу зберігання та становить 20000 грн за тонну за місяць. Дефіцит, що накопичився до моменту чергового постачання, покривається з цього постачання. Збитки, які зазнав споживач за час дефіциту, компенсуються системою постачання у вигляді виплати штрафів. Штраф за дефіцит складає 30000 грн за тонну в місяць. Знайти оптимальний обсяг постачання q^*, інтервал часу між поставками T^*, оптимальні витрати L^*.

Рішення. Вихідні дані: $\theta = 12$ мес., $N = 24000$ т,

$$K = 40000\,\frac{\text{грн}}{\text{поставка}}, \qquad S = 20000\,\frac{\text{грн}}{\text{т} \cdot \text{мес}}, \qquad P = 30000\,\frac{\text{грн}}{\text{т} \cdot \text{мес}}$$

Використовуючи формули (1.15), (1.16), отримуємо, що

$$q^* = \sqrt{\frac{2*40000\cdot 24000}{12\cdot 20000}} \cdot \sqrt{\frac{20000+30000}{30000}} \approx 115{,}45 \text{ т.}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2\cdot 40000*12}{24000\cdot 20000}} \cdot \sqrt{\frac{20000+30000}{30000}} \approx 0{,}58 \text{ міс.}$$

По формулі (1.17) знаходимо, що

$$L^* = \sqrt{2 \cdot 24000 \cdot 40000 \cdot 12} \cdot \sqrt{\frac{30000}{20000 + 30000}} \approx 16627 \text{ грн.}$$

Число поставок при цьому дорівнює:

$$n^* = \frac{N}{q^*} = \frac{24000}{115{,}45} \approx 207{,}9.$$

Помилка округлення є значною, тому визначимо витрати при $n = 207$ і $n = 208$. Результати розрахунку зведені в таблицю 1.7.

Таблиця 1.7 – Витрати при $n = 207$ і $n = 208$

n	q	L
207	115.45 т.	16627825 грн.
208	115.38 т.	16627692 грн.

Отже, оптимальна кількість поставок – 208.

У задачі (1.12) – (1.14) попит на предмети постачання передбачався детермінованим.

Розглянемо одну із задач із випадковим попитом – задача визначення необхідного числа запасних деталей.

Є деякий агрегат. Одна з його деталей іноді виходить з ладу. Відома ймовірність $p(r)$ того, що за весь час експлуатації агрегату ця деталь вийде з ладу точно r разів ($r = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Вартість однієї деталі дорівнює S, а витрати, пов'язані з її закупівлею та простоєм агрегату в разі відсутності цієї деталі в запасі, дорівнюють P. Визначити необхідну кількість запасних деталей для того, щоб математичне сподівання сумарних витрат через неправильно визначену потребу в запасних деталях було б мінімальним.

Функцією витрат у даному випадку є математичне сподівання сумарних «зайвих» витрат через неправильне визначення числа виходів деталі з ладу. Обчислимо дану функцію, позначивши її через $L(x)$, де x — кількість запасних деталей.

Якщо в запасі є x деталей, а за весь час експлуатації агрегату ця деталь виходила з ладу r разів, то зайві витрати дорівнюватимуть:

$(x - r)S$, якщо $x \geq r$,

$x - r)P$, якщо $x < r$.

Тоді

$$L(x) = S \cdot \sum_{r=0}^{x} (x - r) \cdot p(r) + S \cdot \sum_{r=x+1}^{\infty} (r - x) \cdot p(x).$$

Виявляється, що x^* є оптимальним числом запасних деталей і тоді, коли виконуються нерівності:

$$p(r \leq x^* - 1) \leq \frac{P}{P + S} p(r < x^*).$$

Вище було розглянуто лише два приклади систем управління запасами.

Але, на цьому перелік задач теорії управління не обмежується.

Питання для самоперевірки:

1. За яких умов виникає задача управління запасами?
2. Що необхідно визначити у задачі управління запасами?
3. У якому вигляді здійснюється управління рівнем запасів?
4. Що є критерієм ефективності у задачах управління запасами?
5. Вкажіть математичну модель для найпоширеніших систем постачання під час управління запасами.

1.6. Задача векторної оптимізації

Розглянемо задачу, яка часто зустрічається в процесі прийняття рішення щодо вибору найкращого способу дій у ситуації, коли якість варіанта використання ресурсів оцінюється за допомогою не одного, а кількох кількісних показників – критеріїв ефективності. І тут стає невизначеним саме поняття оптимальності, незрозуміло, який варіант вважається найкращим. Адже найкращий з погляду деяких із критеріїв спосіб дій може бути дуже поганим за іншими критеріями.

Як зазначалося, задача такого типу називаються задачею векторної (багатокритеріальної) оптимізації.

Наведемо формулювання ***задачі векторної оптимізації***.

Задано множину альтернатив $V = \{u, v, t, \dots\}$. Є також кілька функцій $f_1(u)$, $f_2(u)$, … , $f_k(u)$, областю визначення яких є множина V. Ці функції називаються ***частинними критеріями***.

Розглянемо ***векторний критерій:***

$$F(u) = (f_1(u),\ f_2(u), \dots,\ f_k(u)).$$

Потрібно обрати у множині V альтернативу, яка буде найкращою у сенсі векторного критерію $F(u)$.

Один з підходів до вирішення цієї задачі заснований на тому, що за допомогою деякої функції змінних здійснюється згортка векторного критерію і перехід до задачі з одним критерієм. Розглянемо функцію $G(x_1,\ x_2, \dots,\ x_k)$, за допомогою якої можна перейти до одного критерію $H(u)$, здійснивши згортку векторного критерію за формулою:

$$H(u) = G(f_1(u),\ f_2(u), \dots,\ f_k(u)).$$

Існують різні способи побудови згорток.

Часто у якості згортки використовується лінійна функція k змінних:

$$H(u) = \sum_{i=1}^{k} \delta_i f_i(u),$$

де $\delta_i \geq 0$ для будь-якого i та $\sum_{i=1}^{k} \delta_i = 1$.

Коефіцієнт δ_i відображає важливість частинного критерію $f_i(u)$.

Зауважимо, що для використання такої згортки необхідно, щоб:

- всі частинні критерії були на максимум (мінімум), тобто чим краще (гірше) за даним частинним критерієм варіант, тим більше (менше) значення критерію;

- всі частинні критерії мали однакову розмірність (були б безрозмірними величинами).

У літературі з векторної оптимізації пропонуються численні підходи, що дозволяють таким чином перетворити вихідні критерії, щоб вищезазначені умови виконувались.

Приклад 1.6. Потрібно обрати один із кількох наявних варіантів рішення застосування ресурсів. Кожен варіант оцінюється двома показниками: оперативна ефективність та економічна ефективність. Їх значення для різних варіантів зазначені в таблиці 1.7.

Таблиця 1.7 - Вхідні дані для прикладу 1.6

Критерії ефективності	Варіанти розв'язання		
	u_1	u_2	u_3
Оперативний (f_1)	0,60	0,75	0,80
Економічний (f_2)	1,00	0,67	0,00

Розв'язання. Нехай залежно від прийнятих рішень витрати можуть змінюватися від мінімального значення A до максимального значення B. Тоді витрати, пов'язані з конкретним рішенням, будуть дорівнювати $(1-\delta)B+\delta A$, де δ – деяке число від нуля до одиниці. Це будемо використовувати як критерій «економічна ефективність».

Звернемо увагу на те, що цей критерій є на максимум і безрозмірний. Нехай, наприклад, економічні витрати становлять відповідно 1, 2 та 4 умовних одиниць. Отже, $A = 1, B = 4$, тоді ефективність однієї умовної одиниці дорівнює 1, двох умовних одиниць – 0,67, трьох – 0,33, чотирьох – 0.

Оперативну ефективність характеризуватимемо ймовірністю виконання задачі. Припускатимемо, що ця ймовірність лежить в межах від 0,5 до 0,98.

Очевидно, що і цей критерій на максимум і безрозмірний.

Нехай особа, яка приймає рішення, встановила, що оперативний критерій втричі важливіший за економічний, тоді δ_1= 0,75 і δ_2 = 0,25. Обчислюючи значення критерію $H(u)$ для аналізованих варіантів, отримуємо:

$$H(u_1) = 0{,}75 * 0{,}06 + 0{,}25 * 1 = 0{,}70,$$
$$H(u_2) = 0{,}75 * 0{,}75 + 0{,}25 * 0{,}67 = 0{,}73,$$
$$H(u_3) = 0{,}75 * 0{,}80 + 0{,}25 * 0{,}00 = 0{,}60.$$

Отже, оптимальним є другий варіант (варіант u_2).

Далі розглянемо підходи до вирішення задач багатокритеріальної оптимізації, засновані на теорії нечітких множин і нечіткої логіки.

Питання для самоперевірки:

1. Задачі якого типу називаються задачами векторної оптимізації?
2. Які функції називаються частинними критеріями?
3. Вкажіть один із підходів до вирішення задачі векторної оптимізації.
4. Що частіше використовують для згортки векторного критерію?

1.7. Постановка транспортної задачі лінійного програмування з нечітко заданими потребами у матеріальних засобах

Розглянемо транспортну задачу лінійного програмування (п. 1.3), в якій потреби є нечіткими і задаються за допомогою нечітких множин. Будемо припускати, що постачання n споживачів однорідними матеріальними засобами проводиться з m складів, їх потреби $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_n$ рівні приблизно $b_1, b_2, \dots, b_n$ і є нечіткими величинами, заданими на універсальній множині $U = \left[0, \tilde{b}\,\right]$ ($\tilde{b}$ –досить велике число, $\tilde{b} \geq b_j$ за будь-якого j), з функціями приналежності ($\mu_{\tilde{b}_j}(x),\ j = 1, 2, \dots,\ n;\ x \epsilon \left[0, \tilde{b}\right)$:

$$\mu_{\tilde{b}_j}(x) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо } 0 \leq x \leq \left(b_j - \beta_j\right), \\ \dfrac{x - \left(b_j - \beta_j\right)}{\beta_j}, \qquad \text{якщо } b_j - \beta_j \leq x \leq b_j, \\ 1, \ \text{якщо } b_j \leq x \leq \tilde{b}, \end{cases}$$

де β_j – максимальна величина недопоставки, на яку може погодитися споживач з номером j.

Графік однієї з цих функцій наведено рисунку 1.2.

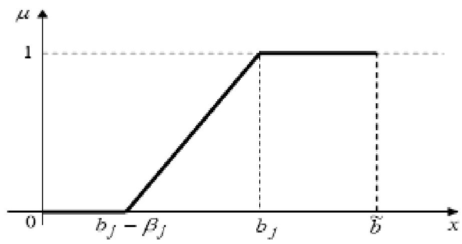


Рисунок 1.2 - Графік функції $\mu_{\tilde{b}_j}(x)$

Позначати ці нечіткі величини за аналогією з трикутними числами будемо $\langle b_j - \beta_j, b_j, \tilde{b} \rangle, j = 1, 2, \dots, n$.

Запаси на складах рівні відповідно $a_1, a_2, \dots, a_m$ і є звичайними чіткими числами, причому, хоча запасів, можливо, і вистачає для задоволення потреб у максимальних обсягах, має місце зацікавленість економією ресурсів. Передбачається, що задоволення потреб у мінімальних обсягах запасів вистачає.

Споживач із номером j готовий погодитися на деяке зменшення своїх потреб у порівнянні з величиною b_j, β_j — максимальна величина недопоставки, на яку може погодитися цей споживач.

Чим більша величина зменшення потреби j, тим менше значення функції приналежності, яку будемо трактувати як ступінь впевненості в тому, що споживач задоволений.

Знайти варіант постачання, у якому ступінь впевненості (значення функції належності) у тому, що він ефективний за витратами та рівнем забезпечення споживачів, максимальна.

1.8. Математична модель транспортної задачі з нечіткими потребами

Розглянемо один із підходів до вирішення таких задач.

Позначимо через C_{min} мінімальні сумарні витрати з доставки вантажів для випадку, коли потреби споживачів мінімальні, тобто дорівнюють $b_j - \beta_j$, $j = 1,2, \dots, n$.

Ступінь упевненості в тому, що запропонований варіант організації підвезення економічно ефективний, характеризуватимемо значенням функції належності одержуваних витрат нечіткому числу $\hat{C}_{ц}$ — «витрати майже мінімальні», що описує нашу мету, яка полягає в мінімізації витрат.

Чим більша різниця між витратами

$$C(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1.19)$$

пов'язаними з варіантом x і величиною C_{min}, тобто різниця $C(x) - C_{min}$, тим менше ми впевнені в тому, що план x економічно ефективний.

Будемо виходити з того, що $\hat{C}_{ц}$ є нечіткою величиною $\langle -\infty, C_{min}, C_{max} \rangle$ з функцією належності $\mu_{ц}(\mathrm{x})$. Тут C_{max} — мінімальні витрати, які є розв'язками задачі (1.4) – (1.7) у випадку, коли потреби дорівнюють b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, або у випадку нестачі запасів обираються такими, що їх загальна надійність повинна бути максимальною, тобто мінімальне із значень функцій належності цих потреб максимальне.

Розглянемо обмеження

$$\sum_{i}^{m} x_{ij} \geq \widehat{b_j}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

З огляду на те, що $\widehat{b_j}$ – нечіткі величини, ці обмеження задають нечіткі множини з функціями приналежності $\mu_j(x)$:

$$\mu_j(x) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \\ \mu_{\hat{b}_j}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right), \text{ якщо} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j \,. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Оптимальний варіант повинен належати всім зазначеним нечітким множинам і, крім того, повинен належати нечіткій множині мети з функцією належності $\mu_{ц}(x)$, тобто він повинен належати перетину зазначених нечітких множин. Функція приналежності цього перетину має вигляд:

$$\mu_{\cap}(x) = min\{\mu_{ц}(x),\ \mu_1(x),\ \mu_2(x), \dots ,\ \mu_n(x)\} \qquad (1.21)$$

Зауважимо, що функція $\mu_{\cap}(x)$ характеризує ступінь нашої впевненості в тому, що план x ефективний за сумарними витратами та рівнем забезпечення споживачів. Ми ж прагнемо міру цієї впевненості максимізувати. З урахуванням сказаного отримуємо модель (1.22) – (1.25):

$$min\{\mu_{ц}(x), \mu_1(x), \mu_2(x), \dots , \mu_n(x)\} \to \text{max}, \qquad (1.22)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq \widehat{b_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (1.23)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \qquad (1.24)$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n. \qquad (1.25)$$

Підкреслимо, що, на відміну завдання (1.4) – (1.7), праві частини нерівностей з (1.23) є нечіткими величинами.

Зазначимо деякі властивості оптимального плану задачі, що розглядається.

Нехай

$x^* = (x_{11}^*, x_{12}^*, \dots, x_{1n}^*, x_{21}^*, \dots, x_{2n}^*, \dots, x_{m1}^*, \dots, x_{mn}^*)$ – оптимальний план задачі (1.22) – (1.25),

$$min\{\mu_{ц}(x^*),\ \mu_1(x^*),\ \mu_2(x^*), \dots ,\ \mu_n(x^*)\} = I,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = b_j^*, j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, що x^* є розв'язком наступної задачі з чіткими обмеженнями:

$$min\{\mu_{ц}(x), \mu_1(x), \mu_2(x), \dots , \mu_n(x)\} \to \text{max}, \qquad (1.26)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq \widehat{b}_j, \quad j = 1,2, \dots, n \qquad (1.27)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1,2,\dots,m \qquad (1.28)$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n \qquad (1.29)$$

Справді, план x є допустимим планом задачі (1.26) – (1.29).

Нехай існує такий оптимальний план

$$x' = (x'_{11}, x'_{12}, \dots, x'_{1n}, x'_{21}, \dots, x'_{2n}, \dots, x'_{m1}, \dots, x'_{mn})$$

задачі (1.26) – (1.29), що

$$\mu_{\cap}(x' > \mu_{\cap}(x^*).$$

Нехай b'_j такі, що

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} \ge b'_j, j = 1,2,\dots,n.$$

Зауважимо, що $b'_j \ge b^*_j$ для j, а x' і x^* є оптимальними планами задачі (1.4) – (1.7), у якій праві частини із (1.5) рівні відповідно b'_j та b^*_j. Тому

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^*_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij},$$

отже,

$$\mu_{\text{ц}}(x^*) \ge \mu_{\text{ц}}(x').$$

Якщо

$\mu_{\text{ц}}(x^*) > \mu_{\cap}(x^*) = I,$ то $\mu_{\cap}(x') \le \mu_{\text{ц}}(x') \le \mu_{\text{ц}}(x^*) = I,$

що суперечить нашому припущенню.

Якщо $\mu_{\text{ц}}(x^*) > \mu_{\cap}(x^*) = I$, існує таке j_0, що $\mu_{j_0}(x^*) = I$. Оскільки x' — оптимальний план задачі (1.26) – 1.29), він є і її допустимим планом, для якого виконані усі її обмеження. Більш того, для цього плану виконані умови (1.27) у випадку, коли їхні праві частини дорівнюють b'_j. Отже, x' є допустимим планом задачі (1.22) – (1.25) і $\mu_{\cap}(x') > I,$ що суперечить припущенню оптимальності плану x^* у цій задачі.

Теорема 1.1. План x^* є розв'язанням задачі (1.26) – (1.29) і в тому випадку, коли праві частини всіх обмежень (1.27) такі, що $\mu_{\hat{b}_j}\left(b_j^*\right) = I, j = 1, 2, \dots, n$.

Доведення. Так як меншим значенням функцій приналежності відповідають менші значення правих частин обмежень (1.23) і за припущенням $I \leq \mu\left(b_j\right),\ j = 1, 2, \dots, n,$ то при заміні в (1.27) чисел $b_j^*,\ j = 1, 2, \dots, n,$ на такі числа $b_j',$ що $\mu\left(b_j'\right) = I$, множина допустимих планів b_j отриманої задачі буде містити в собі всі допустимі плани задачі (1.26) – (1.29) (якщо варіант є допустимим у деякій задачі, то він також є допустимим і в аналогічній задачі з меншими потребами). Отже, за такої заміни значення цільової функції задач (1.26) – (1.29) неспроможне погіршитися, тобто стати менше за $I.$ Що і треба було довести.

1.9. Алгоритм відшукання оптимального плану

Для наближеного розв'язання задачі (1.22) – (1.25) можна застосувати наступний алгоритм.

Змінюватимемо значення цільової функції з певним кроком, який дорівнює $e = \frac{1}{N}$, де N — число кроків. На k-му кроці $(0 \leq k \leq N)$ розв'язуємо задачу (1.4) – (1.7), у якій праві частини обмежень з формули (1.5), які дорівнюють b_j, замінені на числа, які рівні b_j^k, де $\mu_{\hat{b}_j}\left(b_j^*\right) = ke$. Розглядаємо лише ті k, за яких побудована задача має допустимі плани. Нехай оптимальне значення цільової функції даної задачі дорівнює I_k. Позначимо відповідний план підвезення через x^k. Тоді значення цільової функції задачі (1.26) – (1.29) при правих частинах (1.27), рівних b_j^k , дорівнює

$$min\left\{\frac{C_{max} - I_k}{C_{max} - C_{min}}, ke, ke, \dots, ke\right\}.$$

З отриманих для всіх аналізованих результатів обираємо максимальний, це і буде наближене розв’язання задачі (1.22) – (1.25).

1.10. Приклад розв’язання транспортної задачі з нечіткими потребами

Приклад 1.7. Для матеріально-технічного забезпечення чотирьох споживачів використовуються три постачальники матеріальних засобів. Потреба матеріальних засобах j-го споживача $(j = 1,2,3,4)$ дорівнює b_j (т). Можливості отримання матеріальних засобів у i-го $(i = 1,2,3)$ постачальника матеріальних засобів рівні V_i т.

Витрати на закупівлю одиниці матеріальних коштів у i-го постачальника матеріальних засобів та доставку її j-му споживачеві матеріальних засобів становлять C_{ij} грн. Розв'язанням задачі є план перевезень матеріальних засобів – x, тобто обсяги підвезення матеріальних засобів від i-го постачальника матеріальних засобів (ПМЗ) j-му споживачеві:

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}).$$

Необхідно визначити такий план перевезень матеріальних засобів, за якого забезпечувалася б достатня економічна ефективність та достатня повнота їх доставки.

Вихідні дані (значення коефіцієнтів цільової функції та правих частин обмежень) наведено у таблиці 1.8.

Таблиця 1.8 - Вихідні дані для прикладу 1.7

Постачальники МЗ	Затрати C_{ij}				Наявність мат. коштів у ПМЗ, т
	Потр.-1	Потр.-2	Потр.-3	Потр.-4	
ПМЗ-1	92	122	208	386	200
ПМЗ-2	62	92	180	355	250
ПМЗ-3	73	115	200	367	390

Потреба у МЗ, т	220	240	200	220	-

Як видно з таблиці 1.8, задоволення всіх потреб у обсязі запасів бракує, тому потреби b_j $(j = 1,2,3,4)$ розглядаються як нечітко задані.

Модель (1.4) – (1.7) з урахуванням даних таблиці 1.8 набуває вигляду:

$$92x_{11} + 122x_{12} + 208x_{13} + 386x_{14} + 62x_{21} + 92x_{22} + 180x_{23} + 355x_{24} + 73x_{31} + 115x_{32} + 200x_{33} + 376x_{34} \to min,$$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{4} x_{1j} \le 200, \\ \sum_{j=1}^{4} x_{2j} \le 250, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i1} \ge 220, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2} \ge 240, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3} \ge 200, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i4} \ge 220, \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n. \end{gathered} \qquad (1.30)$$

Потреби є нечіткими і задаються нечіткими величинами:

$$\widehat{b_1} = \langle 110,220,300 \rangle, \quad \widehat{b}_2 = \langle 120,240,300 \rangle,$$

$$\widehat{b}_3 = \langle 100,200,300 \rangle, \quad \widehat{b}_4 = \langle 110,200,300 \rangle.$$

заданими на універсальній множині [0,300].

Результати розрахунків наведено у таблиці 1.9 та рисунку 1.3.

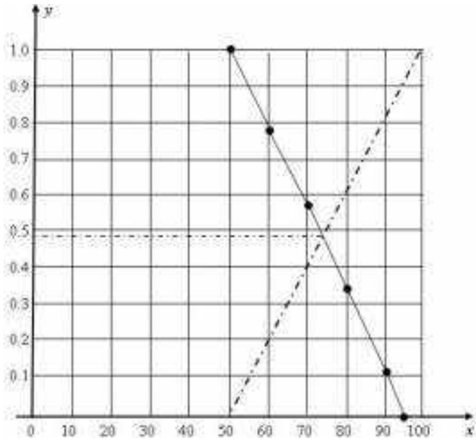
Значення потреб змінювалися з кроком 10% (крім останнього рядка, про особливості його заповнення йтиметься далі), що відповідає зміні значень відповідних функцій надійності на 0,2, оскільки

$$\mu_{\widehat{b_j}}(b_j^*) = \begin{cases} \dfrac{u-(b_j-\beta_j)}{b_j-(b_j-\beta_j)}, \text{якщо } u \in [b_j-\beta_j], \\ 1, \quad \text{якщо } \tilde{b} \geq u \geq b_j, \\ 0, \quad \text{якщо } 0 \leq u \leq (b_j-\beta_j), \end{cases}$$

а $(b_j-\beta_j) = 0{,}5b_j$.

Таблиця 1.9 - Результати розв'язання прикладу 1.7

№ кроку (k)	Надійність потреб (нечітких чисел (b_j^k),ступінь впевненості у тому, що план ефективний за рівнем забезпечення споживачів	Потреби споживачів				Мінімальні витрати (оптимальне значення цільової функції задачі (1.4)-(1.7) при відповідних значеннях потреб: (I_k)	Надійність функції цілі ($\mu_ц(x^k)$) (ступінь впевненості у тому, що план ефективний по витратам)
		№1 (b_1^k)	№2 (b_2^k)	№3 (b_3^k)	№4 (b_4^k)		
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,0	110	120	100	110	77080	1,0
1	0,2	132	144	120	132	93208	0,78
2	0,4	154	168	140	154	109576	0,57
3	0,6	176	192	160	176	126536	0,34
4	0,8	198	216	180	198	143736	0,11
5	0,9	209	228	190	209	152300	0,00



Тут x – рівень потреб у відсотках від максимального, y – надійність (графи 2 та 8 таблиці 1.9).

Рисунок 1.3 - Графіки ступеня впевненості у тому, що план ефективний за витратами (——— – графік функції $\mu_{ц}(x^k)$) та рівнем забезпечення споживачів (- - - - - - – графік функції надійності потреб).

Так, рівню надійності 0% відповідає рівень потреб у 50%, рівню надійності 20% відповідає рівень потреб 50%+10%=60%, рівню надійності 40% — рівень потреб 50%+20%=70% тощо.

Зазначимо, що задля забезпечення всіх потреб у повному обсязі з надійністю одиниця запасів не вистачає.

Тому розглянуто значення потреб, що відповідають рівню надійності до 0,90 включно (останній рядок таблиці). При більшому рівні надійності сума потреб стає більшою від суми запасів, і завдання перестає мати допустимі плани.

Таблиця 1.9 заповнювалася за такими правилами:

- друга графа розраховувалася за формулою:

$$\mu_{\hat{b}_j}\left(b_j^k\right) = k\,\frac{1}{N},$$

де k – номер кроку,

$N = 5$ – число кроків;

- для заповнення граф із третьої по шосту вирішуються рівняння:

$$\mu_{\hat{b}_j}\left(b_j^k\right) = k \cdot \frac{1}{5}.$$

Звідси

$$b_j^k = \frac{k}{5}\left(b_j - \left(\beta_j\right)\right) + \left(b_j - \beta_j\right);$$

- 3-я графа (для 1-го споживача) – за формулою

$$b_1^k = k\,(220 - 110)/5 + 110;$$

- 4-та графа (для 2-го споживача) – за формулою

$$b_2^k = k\,(240 - 120)/5 + 120;$$

- 5-та графа (для 3-го споживача) – за формулою

$$b_3^k = k\,(200 - 100)/5 + 100;$$

- 6-а графа (для 4-го споживача) – за формулою

$$b_4^k = k\,(220 - 110)/5 + 110;$$

- 7-а графа — у результаті розв'язання задачі (1.30), у якій значення правих частин обмежень за потребами взято з 3 – 6 граф відповідного рядка таблиці 1.9. В останньому рядку сьомої графи вказано (наближено) значення C_{max};

- 8-а графа - за формулою

$$\mu_{\text{ц}}(x^k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо при цьому } k \text{ задача не має доступних планів;} \\ \dfrac{C_{max} - I_k}{C_{max} - C_{min}}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

З аналізу представлених на рисунку 1.3 графіків видно, що максимальне значення упевненості у тому, що план ефективний за сумарними витратами і рівнем забезпечення споживачів, дорівнює приблизно 0,48. При цьому рівень забезпеченості становить 74%, тобто першому споживачеві слід планувати поставити 163 т, другому – 178 т, третьому – 148 т, четвертому – 163 т. Оптимальним планом підвезення є наступний:

$$x_{13} = 12; x_{22} = 178; x_{23} = 72; x_{31} = 163; x_{33} = 64; x_{34} = 163.$$

При цьому сумарні витрати дорівнюють 116 352 грн.

1.11. Випадок дефіциту запасів

Розглянемо задачу, пов'язану із забезпеченням споживачів у разі, коли для повного задоволення запитів запасів не вистачає.

Нехай маємо n споживачів однорідних матеріальних засобів, їх потреби рівні відповідно $b_1, b_2, \dots, b_n$. Планується, що їхнє постачання повинно проводитися зі складів $A_1, A_2, \dots, A_m$, з яких максимально можна отримати необхідні матеріальні засоби в розмірах $a_1, a_2, \dots, a_m$ відповідно. При цьому сумарні можливості з відпускання матеріальних засобів менші від сумарної потреби в них, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Потрібно визначити сумарні обсяги поставок кожному споживачеві для того, щоб усі споживачі були б задоволені максимальною мірою, тобто щоб мінімальна зі ступенів задоволеності була б максимальною.

Припускатимемо, що потреби є нечіткими і задаються за допомогою нечітких величин $\widehat{b_j}$, функції належності яких ми, як і раніше, позначимо $\mu_{\hat{b}_j}(u)$, $j = 1,2,\dots,n$. Значення функцій належності трактуватимемо як ступінь задоволеності відповідного споживача отриманим обсягом матеріальних засобів у розмірі u.

Для вирішення сформульованої задачі розглянемо задачу (1.22) – (1.25), в якій цільова функція дещо змінена, вважатимемо, що $\mu_{\text{ц}}(x) = 1$ для будь-якого допустимого плану x. Вирішення цієї задачі і буде розв'язком сформульованої задачі. Наголосимо, що в результаті ми отримаємо значення сумарних обсягів постачання споживачам. Якщо нас цікавить варіант доставки, що вимагає при отриманих значеннях сумарних обсягів поставок мінімальних витрат, треба вирішити звичайну транспортну задачу, в якій потреби споживачів дорівнюють отриманим сумарним обсягам поставок.

Приклад 1.8. Постачання трьох споживачів здійснюється із двох складів. Можливості складів з відпускання матеріальних засобів, потреби у цих засобах, витрати на доставку (гривень за тонну) зазначені у таблиці 1.10. Запасів для задоволення всіх потреб у повному обсязі не вистачає, але споживачі згодні на деяке зменшення своїх потреб, тому потреби розглядаються як нечіткі величини із заданими на універсальній множині [0,+∞) функціями приналежності (формули (1.31) – (1.33), рисунки 1.4 - 1.6). У центральній частині таблиці 1.10 зазначені витрати на доставку (гривень за тонну).

Таблиця 1.10 - Вихідні дані для прикладу 1.8

Склади	Споживачі			Об'єм запасів, т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	25	37	19	100
A_2	14	24	12	200
Потреби, т	150	120	80	

Визначити:

1) сумарні обсяги поставок зі складів споживачам, у яких спільна потреба споживачів виявляється задоволеною найбільшою мірою;

2) план підвезення, що забезпечує отримані сумарні обсяги поставок і вимагає мінімальних витрат.

$$\mu_{\hat{b}_1}(x) = \begin{cases} \frac{x-120}{30}, \text{якщо } x \in [120,150], \\ 1, \text{якщо } x > 150, \\ 0, \text{якщо } x < 120. \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\mu_{\hat{b}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-110}{10}, \text{якщо } x \in [110,120], \\ 1, \text{якщо } x > 120, \\ 0, \text{якщо } x < 110. \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\mu_{\hat{b}_3}(x) = \begin{cases} (\frac{x-60}{20})^2, \text{якщо } x \in [120,150], \\ 1, \text{якщо } x < 150, \\ 0, \text{якщо } x < 120. \end{cases} \quad (1.33)$$

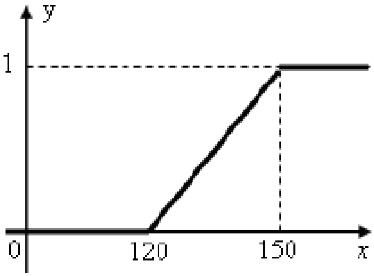


Рисунок 1.4 - Функція $\mu_{\hat{b}_1}(x)$

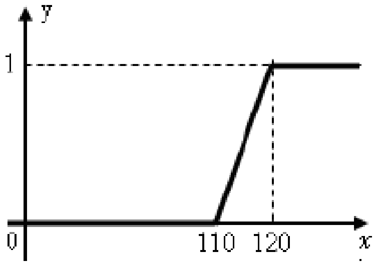


Рисунок 1.5 - Функція $\mu_{\hat{b}_2}(x)$

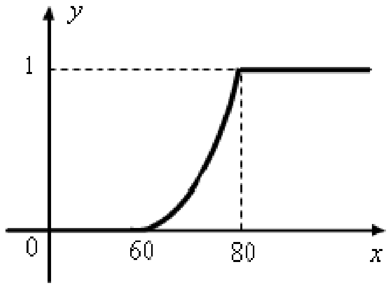


Рисунок 1.6 - Функція $\mu_{\hat{b}_3}(x)$

Розв'язання. Почнемо з відповіді на перше запитання. Приблизно вирішувати цю задачу можна, використовуючи метод, застосований у прикладі 1.1. Але можна вирішити дану задачу і точно.

Нагадаємо, що значення функції приналежності, що задає значення істинності висловлювання "{ступінь задоволеності першого споживача дорівнює a}, {ступінь задоволеності другого споживача дорівнює b} і {ступінь задоволеності третього споживача дорівнює c}", дорівнює мінімальному з чисел a, b, c.

Зауважимо, що споживачі в сукупності виявляються задоволені максимальною мірою, якщо задоволеність (надійність забезпеченості) кожного з них однакова.

Дійсно, нехай для визначеності перший споживач виявився задоволеним більшою мірою, ніж два інші. Якщо трохи зменшити ступінь його забезпеченості (але так, щоб вона залишалася більше ступеня забезпеченості решти споживачів), а обсяги постачання іншим споживачам не змінювати, то обсяг постачання першому споживачеві зменшиться і, отже, на складах залишаться незатребувані запаси. Ці запаси в деяких частках можна направити другому та третьому споживачам, збільшивши рівень їх задоволеності. У результаті отримуємо план забезпечення, у якому споживачі виявляються задоволеними більшою мірою. Шукатимемо максимальний загальний рівень забезпеченості всіх споживачів, позначимо його γ, а сумарні обсяги постачання споживачам відповідно x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases} \gamma \to max, \\ \mu_{\widehat{b_1}(x_1)} = \gamma, \\ \mu_{\widehat{b_2}(x_2)} = \gamma, \\ \mu_{\widehat{b_3}(x_3)} = \gamma, \\ x_1 + x_2 + x_3 = a_1 + a_2, \\ 150 \geq x_1 \geq 120;\ 120 \geq x_2 \geq 110;\ 80 \geq x_3 \geq 60. \end{cases} \qquad (1.34)$$

З урахуванням формул (1.31) – (1.33) та вихідних даних задача (1.34) перетворюється на задачу (1.35):

$$\begin{cases} \gamma \to max, \\ \frac{x_1 - 120}{30} = \gamma, \\ \frac{x_2 - 110}{10} = \gamma, \\ (\frac{x_3 - 60}{20})^2 = \gamma, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 100 + 200 = 300, \\ 150 \geq x_1 \geq 120;\ 120 \geq x_2 \geq 110;\ 80 \geq x_3 \geq 60. \end{cases} \qquad (1.35)$$

Знайдемо допустимі плани задачі (1.35), при цьому розв’яжемо систему її обмежень. Для початку виразимо x_1, x_2, x_3 через γ :

$$x_1 = 30\gamma + 120,$$
$$x_2 = 10\gamma + 110,$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\gamma} + 120.$$

Оскільки сума всіх поставок дорівнює 300, т

$$30\gamma + 120 + 10\gamma + 110 \pm 20\sqrt{\gamma} + 120 = 300.$$

Розв'язуючи систему з чотирьох рівнянь, знаходимо, що єдине допустиме (воно ж оптимальне) значення γ дорівнює

$$\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}.$$

Це і є розв'язком задачі (1.35). Зауважимо, що це значення для γ виходить у випадку $x_3 = -20\sqrt{\gamma} + 60$. При цьому значенні γ знаходимо, що

$$x_1 = \frac{525 - 15\sqrt{5}}{4},$$

$$x_2 = \frac{910 - 10\sqrt{5}}{8},$$

$$x_3 = \frac{440 + 40\sqrt{5}}{8}.$$

Отже, ми отримали відповідь на перше запитання.

Для відповіді на друге питання треба розв'язати транспортну задачу, в якій потреби дорівнюють отриманим значенням. Вихідні дані для цієї транспортної задачі наведено у таблиці 1.11.

Таблиця 1.11 - Умови транспортної задачі

Склади	Споживачі			Обсяг запасів, т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	25	37	19	100
A_2	14	24	12	200
Потреби, т	$\frac{525 - 15\sqrt{5}}{4}$	$\frac{455 - 5\sqrt{5}}{4}$	$\frac{220 + 20\sqrt{5}}{4}$	

Вирішуючи цю задачу будь-яким зручним методом, наприклад, методом потенціалів, знаходимо оптимальний план перевезень:

зі складу A_1 споживачеві B_1 треба доставити $\frac{180-20\sqrt{5}}{4}$ т вантажу;

зі складу A_2 споживачеві B_1 треба доставити $\frac{345+5\sqrt{5}}{4}$ т вантажу;

зі складу A_2 споживачеві B_2 треба доставити $\frac{445-5\sqrt{5}}{4}$ т вантажу;

зі складу A_1 споживачеві B_3 треба доставити $\frac{220+20\sqrt{5}}{4}$ т вантажу.

1.12. Задача про завантаження транспортного засобу штучними вантажами

Розглянемо задачу про ранець. Мова про неї йшла у п. 1.4. Але тепер ми припускатимемо, що корисності вантажів задані нечітко.

Отже, нагадаємо «чітку» постановку задачі про ранець.

Є штучні вантажі n видів - $W_1, W_2, \dots, W_n$. Відомі вага та корисність (вартість) штуки кожного вантажу: c_i – корисність штуки вантажу W_i, d_i – її вага, $i = 1, 2, \dots, n$. Є транспортний засіб вантажопідйомністю D. Визначити, скільки штук вантажу кожного типу треба завантажити на цей засіб, щоб корисність взятих вантажів була б максимальною.

Математична модель розглянутої задачі має вигляд:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max, \qquad (1.36)$$

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \le D, \qquad (1.37)$$

$$x_i \ge 0, i = 1, 2, \dots, n, \qquad (1.38)$$

$$x_i - \text{цілі числа}, i = 1, 2, \dots, n. \qquad (1.39)$$

Тут $x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ — кількість штук вантажу відповідного виду, що завантажуються.

Ми надалі розглядатимемо цю задачу, змінюючи в ній у разі потреби вектор $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ коефіцієнтів цільової функції — функції (1.36).

Так як ми виходимо з того, що корисності вантажів не задані однозначно, то, як уже зазначалося, скористаємося для їхнього завдання нечіткими множинами.

Нехай корисність вантажів $W_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ у моделі (1.36) – (1.39) є нечіткими трикутними числами $\langle a_i, b_i, e_i \rangle$ («біля b_i») з функціями приналежності, які ми позначатимемо $\mu_i(u)$. Самі ці нечіткі числа будемо позначати символом $\hat{c}_i$.

Зв'яжемо з нечітким числом $\hat{c}_i$ нечітке висловлювання $\tilde{C}_i(u)$ («значенням нечіткого числа $\tilde{c}_i$ є u»). При цьому природно вважати, що істинність цього висловлювання дорівнює нашій впевненості, що u є наближене значення цього нечіткого числа, тобто дорівнює $\mu_i(u)$.

Зауваження 1.2. Нехай $f = \langle a, b, e \rangle$, $(a < b < e)$ – деяке нечітке число та v – деяке число з інтервалу (0; 1). Через визначення нечіткого трикутного числа b існують такі значення v_1 і v_2, що $\mu_{\hat{f}}(v_1) = \mu_{\hat{f}}(v_2) = v$. Одне з них, нехай для певності це v_1, лежить в межах від a до b, тоді v_2 лежить в межах від b до e, отже, $v_1 < v_2$. Якщо $v = 1$, то $v_1 = v_2 = b$.

Розглянемо універсальну множину X– множина допустимих планів задачі (1.36) – (1.39) і Y - універсальна множина наборів значень корисностей вантажів (векторів $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – коефіцієнтів цільової функції задачі (1.36) – (1.39). Задамо на прямому добутку зазначених універсальних множин нечітку множину $\widehat{D}$ розв'язків задачі з функцією приналежності $\mu_{\widehat{D}}(x, c)$.

Значення цієї функції виражає ступінь нашої впевненості у тому, що вектором корисностей вантажів буде вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, а план завантаження $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ефективний.

Введемо позначення:

$$\mu(c) = min\{\mu_1(c_1), \mu_2(c_2), \ldots, \mu_n(c_n)\}.$$

Позначимо через $X^{\alpha}_{\text{еф}}$ нечітку множину «максимальна ефективність при таких векторах корисностей c, що $\mu(c) = \alpha$». Її функція приналежності $\mu_{\text{еф}}^{\alpha}$ характеризує ступінь нашої впевненості в ефективності плану $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ при найкращому векторі корисностей з числа векторів $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, для яких $\mu(c\ ) = \alpha$, тобто близькості у вказаному сенсі цього плану до оптимального плану $x^{\text{опт}}$ задачі (1.36) – (1.39) у разі, коли корисності вантажів максимальні (рівні e_i, $i\ =\ 1{,}2, \dots, n$).

Близькість плану x до плану $x^{\text{опт}}$ будемо характеризувати величиною

$$S^{\alpha} = \max_{c:\mu(c)=\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \right\}.$$

Через $c(\alpha, x)$ позначимо такий вектор корисностей $(c_1(\alpha, x_1), c_2(\alpha, x_2), \dots, c_n(\alpha, x_n))$, що

$$\max_{c:\mu(c)=\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, (\alpha, x_i) x_i.$$

Але оскільки $S^{\alpha}(x)$ може виявитися більше одиниці, то будемо використовувати, наприклад, нормовану функцію:

$$\mu_{\text{еф}}^{\text{c}(\alpha,x)}(x) = \frac{S^{\alpha}(x)}{S_{\text{опт}}}.$$

Тут $S_{\text{опт}}$ – оптимальне значення цільової функції задачі (1.36) – (1.39) у разі, коли корисності вантажів W_i максимальні, тобто рівні $e_i, i\ =\ 1, 2, \dots, n$.

Враховуючи сказане і, слідуючи ідеям Заде і Беллмана отримуємо, що

$$\mu_{\widehat{D}}\big(x, c(\alpha, x)\big) = \min\{\, \mu_{\text{еф}}^{c(\alpha,x)}(x),\ \mu_1(\alpha, x_1), \dots ,\ \mu_n(\alpha, x_n)\},$$

де (дивись формулу (1.3)):

$$\mu_i\big(c_i(\alpha, x_i)\big) = \begin{cases} \dfrac{c_i(\alpha, x_i) - a_i}{b_i - a_i}, \text{якщо } c_i(\alpha, x_i) \in [a_i, b_i], \\ \dfrac{c_i(\alpha, x_i) - e_i}{b_i - e_i}, \text{якщо } c_i(\alpha, x_i) \in [b_i, e_i], \quad i = 1{,}2, \dots, n, \\ 0, \qquad \text{інакше.} \end{cases}$$

Розв'язанням задачі (1.36) – (1.39) з нечіткими корисностями вважатимемо план, для якого ступінь його належності нечіткій множині розв’язків (нечіткій множині $\widehat{D}$) максимальна, тобто:

$$\begin{gathered} \mu_{\widehat{D}}(x, c(\alpha, x) \to max, \\ d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \le D, \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \dots,\ n, \\ x_i - \text{цілі числа}, i = 1, 2, \dots, n. \end{gathered} \tag{1.40}$$

1.13. Про одну властивість оптимального плану задачі (1.40)

Нехай (x^*, c^*) — оптимальний план задачі (1.40) та

$$E = \mu_{\widehat{D}}(x^*, c^*) = min\left\{\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*,x^*)}(x^*), \mu_1(c_1^*(\alpha^*, x^*)), \dots, \mu_n(c_n^*(\alpha^*, x^*))\right\}$$

тут $\alpha^* = \mu(c^*)$ та

$$\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*,x^*)}(x^*) = \frac{\max\limits_{c:\mu(c)=\alpha^*} \sum_{i=1}^{n} c_i^* x_i^*}{S_{\text{опт}}} = \sum_{i=1}^{n} c_i^*\, x_i^*.$$

Тоді

$$E = min\left\{\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*,x^*)}(x^*)\right\}, \mu(c^*)\}.$$

Розглянемо три можливості:

1) $\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*,x^*)}(x^*) = \mu(c^*)$;

2) $\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*,x^*)}(x^*) < \mu(c^*)$;

3) $\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*,x^*)}(x^*) > \mu(c^*)$.

Нехай $\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*,x^*)}(x^*) = \mu(c^*) = E$, отже, $\alpha^* = E.$

Так як

$$\mu(c^*) = min\{\mu_1(c_1^*), \mu_2(c_2^*)\ \dots,\ \mu_n(c_n^*)\},$$

то існує такий номер i_0, що

$$\mu_{i_0}\left(c_{i_0}^*\right) = \mu(c^*) = E.$$

Визначимо значення корисностей, для яких значення їх функцій приналежності дорівнює $\mu_{i_0}(c_{i_0}^*)$. Якщо цьому значенню відповідають два значення корисності деякого вантажу (дивись зауваження 1.2), виберемо з них більше. Отриманий вектор корисностей позначимо $c' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$.

$\mu_i(c'_i) = E$ для будь-якого i та $\mu(c') = E$.

Корисності c' не менші за корисності c_i^* за будь-якого i. Нехай $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ – оптимальний план задачі (1.36) – (1.39) з вектором корисностей c'.

Якщо $c'_i = c_i^*$ для будь-якого i, то $x'_i = x_i^*$.

Нехай існує такий номер k, що $c'_k > c_k^*$, тоді

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i\, x'_i \geq \sum_{i=1}^{n} c'_i\, x_i^* > \sum_{i=1}^{n} c_i^*\, x_i^*$$

та

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} c'_i\, x_i^*}{S_{\text{опт}}} > \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^*\, x_i^*}{S_{\text{опт}}} = E,$$

а це суперечить тому, що

$$\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) = \frac{\max\limits_{c:\mu(c)=\alpha^*} \{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*\}}{S_{\text{опт}}}.$$

Отримана суперечність свідчить про те, що $c'_i = c_i^*$ для будь-якого $i.$ Отже, у випадку, коли $\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) = \mu(c^*)$, корисності всіх вантажів у оптимальному плані задачі (1.40) однакові.

Нехай $E = \mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) < \mu(c^*)$.

Як і попередньому випадку, замість вектора корисностей c^* розглянемо вектор $c' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$, для якого $\mu_i(c_i) = E$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Корисності c'_i більше за корисності c_i^* за будь-якого i, тоді

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i\, x_i^* > \sum_{i=1}^{n} c_i^*\, x_i^*.$$

Що знову суперечить тому, що

$$\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*, x^*)} = \frac{\max\limits_{c:\mu(c)=\alpha^*} \{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*\}}{S_{\text{опт}}}.$$

Отже, цей випадок неможливий.

Нехай $\mu_{\text{еф}}^{c(\alpha^*,x^*)}(x^*) > \mu(c^*)$.

Знайдемо оцінку для максимального сумарного числа вантажів, що завантажуються:

$$D \geq \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \geq (\min_{1\leq j\leq n} d_j) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

отже,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{D}{\min\limits_{1\leq j\leq n} d_j} = f.$$

Візьмемо

$$\delta < \frac{\mu_{\text{еф}}^{\text{c}(\alpha^*,x^*)} - E}{f} S_{\text{опт}},$$

очевидно, що $\delta > 0$.

Розглянемо вектор значень функцій приналежності, всі координати якого рівні E. Збільшимо значення всіх координат цього вектора на ε і побудуємо вектор корисностей $c^\varepsilon = (c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon, \dots, c_n^\varepsilon)$, всі координати якого мають надійність, рівну $E + \varepsilon$. При цьому з можливих значень кожної координати візьмемо більше (дивись зауваження 1.2).

Нехай є таке $c^\varepsilon = c_i^* - \delta_i, i = 1, 2, \dots, n$. Через неперервність функцій приналежності $\mu_i(u), i = 1, 2, \dots, n$, існує таке ε, що $\delta_i \leq \delta$ для будь-якого значення i.

Розв'яжемо задачу (1.36) – (1.39) для випадку, коли корисності вантажів дорівнюють $c^\varepsilon = (c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon, \dots, c_n^\varepsilon)$. Нехай $x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, \dots, x_n^\varepsilon)$ – розв'язок цієї задачі. Очевидно, що

$$\mu(c^\varepsilon) = E + \varepsilon,$$

покажемо, що $\mu_{\text{еф}}(x^\varepsilon) > \text{E}$.

Маємо:

$$\mu^{\text{c}(\text{E}+\varepsilon,x^\varepsilon)}(x^\varepsilon) = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^\varepsilon x_i^\varepsilon}{S^{\text{опт}}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^\varepsilon x_i^*}{S^{\text{опт}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^* x_i^*}{S^{\text{опт}}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i^*}{S^{\text{опт}}}$$

$$\geq \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^* x_i^*}{S^{\text{опт}}} - \frac{f\delta}{S^{\text{опт}}} \mu_{\text{еф}}(\text{x}^*) > \text{E}.$$

Отже,

$$\mu_{\widehat{D}}\left(x^{\varepsilon}, c(E+\varepsilon, x^{\varepsilon})\right) = min\left\{\mu_{\text{эф}}^{c(E+\varepsilon,x^{\varepsilon})}(x^{\varepsilon}, \mu(c^{\varepsilon}))\right\} > E$$

та план x^* не є оптимальним, що суперечить нашому припущенню. Значить, даний випадок неможливий, і залишається тільки один перший. У першому випадку корисності всіх вантажів в оптимальному плані задачі (1.40) однакові.

З проведених міркувань видно, що в оптимальному плані задачі (1.40) вектор значень функцій приналежностей корисностей вантажів має рівні координати. Описаний далі алгоритм дозволяє знайти саме такий вектор корисностей і оптимальний план відповідної йому задачі (1.40). Відповідно до підходу Р. Беллмана та Л. Заде, цей план є оптимальним планом задачі (1.36) – (1.39).

1.14. Алгоритм розв'язання задачі

Вирішується послідовність задач із різними рівнями надійності корисності вантажів. Ці рівні змінюються з кроком $h.$ Для визначення величини кроку, задавшись допустимою величиною похибки ε, знаходимо число кроків M, вважаючи M рівним цілій частині числа $\frac{1}{\varepsilon}+1$. Величина кроку h дорівнює $\frac{1}{M}$.

При вирішенні k-ї $(k = 1,2,\ldots,M)$ задачі із зазначеної послідовності задач рівень надійності корисностей вантажів вважаємо рівним kh. Знаходимо такі значення корисностей вантажів, надійність яких дорівнює $kh,$ тобто знаходимо такі $c_i,$ $i = 1,2,\ldots,n,$ що

$$\mu_i(c_i) = kh, i = 0,1,2,\ldots,n. \tag{1.41}$$

Вирішуємо із цими корисностями задачу про ранець (1.36) – (1.39), знаходимо рівень нашої задоволеності (рівень надійності відхилення отриманої сумарної корисності від максимальної). Визначаємо значення цільової функції (мінімум із усіх надійностей) задачі (1.40). З отриманих $(M+1)$-го значення вибираємо найкраще (максимальне). Обсяги завантаження (значення невідомих x_i), при яких отримано це максимальне значення, і є оптимальним планом задачі (1.36) – (1.39) з нечіткими корисностями.

1.15. Приклад завантаження літака

Потрібно завантажити літак вантажністю 40 тон контейнерами. Контейнери різного типу мають різну вагу та різну цінність (корисність) для особи, яка приймає рішення (дивись таблицю 1.12). Визначити, скільки контейнерів кожного типу треба завантажити в цей літак, щоб сумарна корисність взятих контейнерів була б максимальною (кількість контейнерів кожного типу на складі не обмежена).

Передбачається, що корисності контейнерів визначені нечітко та задаються нечіткими трикутними числами $\langle a_i, b_i, e_i \rangle$.

Таблиця 1.12 - Вихідні дані для завантаження літака

Тип контейнера (K_i)	a_i, ум. од.	b_i, ум. од.	e_i, ум. од.	Вага контейнера, т
K_1	4	5	6	4
K_2	8	10	11	7
K_3	11	13	15	10
K_4	13	16	18	12
K_5	17	20	24	15

Розв'язання. Результати обчислень наведено у таблиці 1.13. Обчислення робилися з кроком $h = 0{,}1$.

Нагадаємо, що при заданому значенні функції приналежності (крім значення одиниця) корисність i-го вантажу приймає два значення: менше та більше за b_i.

Нехай план X є оптимальним варіантом завантаження при деяких корисностях, що мають задану надійність, і нехай ступінь впевненості в його економічній ефективності при цих корисностях дорівнює P. Ступінь впевненості в ефективності цього варіанта при великих значеннях корисностей (але значеннях корисностей з тими ж значеннями функції приналежності) буде не менше за P. Тому із двох можливих значень корисності при заданій надійності ми орієнтуємося на більше значення.

Таблиця 1.13 - Результати проміжних розрахунків для прикладу із завантаженням літака

Надійність значення корисності	Корисність типу контейнера					Максим. сумарна корисність	Ступінь ефектив-ності
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5		
0	6	11	15	18	24	63,0	1,000
0,1	5,9	10,9	14,8	17,8	23,6	62,2	0,987
0,2	5,8	10,8	14,6	17,6	23,2	61,4	0,975
0,3	5,7	10,7	14,4	17,4	22,8	60,9	0,967
0,4	5,6	10,6	14,2	17,2	22,4	59,8	0,949
0,5	5,5	10,5	14,0	17,0	22,0	59,0	0,936
0,6	5,4	10,4	13,8	16,8	21,6	58,4	0,927
0,7	5,3	10,3	13,6	16,6	21,2	57,8	0,917
0,8	5,2	10,2	13,4	16,4	20,8	57,2	0,908
0,9	5,1	10,1	13,2	16,2	20,4	56,6	0,898
1,0	5,0	10,0	13,0	16,0	20,0	56,0	0,889

Аналіз таблиці 1.13 показує, що оптимальне значення ступеня надійності корисності вантажів та ступеня ефективності дорівнює приблизно 0,9. Це досягається при значеннях корисності, зазначених у передостанньому рядку таблиці 1.13. При цьому оптимальний план завантаження наступний: завантажити 4 одиниці вантажу K_2 та одну одиницю вантажу K_4.

Зауваження 1.3. При заповненні 7-ї графи таблиці розв'язувалися задачі про ранець із відповідними значеннями корисності. Рішення було здійснено шляхом повного перебору всіх допустимих планів. Для вирішення цього завдання можна використовувати динамічне програмування.

1.16. Нечіткі множини в теорії управління запасами

Розглянемо детерміновану динамічну модель із дефіцитом. Припускатимемо, що весь інтервал постачання θ розбитий на n рівних частин довжина кожного з яких дорівнює $\frac{\theta}{n}$. Позначатимемо i-й інтервал $(i = 1, 2, \ldots, n)$ через $[t_i, t_{i+1})$.

Інтервал $[t_i, t_{i+1})$, $i = 1,2, \ldots, n$, утворює один цикл постачання, тобто на момент часу t_i запаси ресурсів постачання закінчилися і накопичився дефіцит у розмірі d_i, в цей момент здійснюється постачання обсягом x_i. На інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ до моменту, поки на складі системи постачання є запаси, здійснюється задоволення попиту, що надходить.

Після того, як запаси закінчилися, відбувається накопичення дефіциту та в момент t_{i+1} здійснюється чергове постачання обсягом x_{i+1} і так далі. Дефіцит, що накопичився (його обсяг дорівнює d_{i+1}), повністю задовольняється виплатою штрафу.

Нехай обсяг попиту на інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ дорівнює q_i, тоді обсяг поставки x_i повинен дорівнювати $q_i - d_i$, тобто

$$x_i = q_i - d_i \text{ та } q_i = x_i + d_i.$$

Необхідно визначити варіант постачання, у якому сумарні витрати мінімальні.

Розглянемо певний план постачання. Так як він повинен містити інформацію про попит на кожному інтервалі та розмір поставки на кожному з них, то позначати його будемо так:

$$(x, q) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

На інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ при плані постачання (x, q) система постачання має витрати $L_i(x_i, q_i)$, які складаються з витрат на постачання $K_i(x_i)$, витрат на зберігання $S_i(x_i, q_i)$ та витрат на сплату штрафів $P_i(x_i, q_i)$.

Таким чином,

$$L_i(x_i, q_i) = K_i(x_i) + S_i(x_i, q_i) + P_i(x_i, q_i).$$

Сумарні за всіма інтервалами витрати, пов'язані із зазначеним планом, позначимо через $L(x, q)$:

$$L(x,q) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i, q_i).$$

З урахуванням всього сказаного отримуємо таку математичну модель:

$$\begin{cases} L(x,q) \to min, \\ L(x,q) = \sum_{i=1}^{n}\big(K_i(x_i) + S_i(x_i,q_i) + P_i(x_i,q_i)\big), \\ q_i = f(t_i, t_{i+1}), \\ t_i = \frac{\theta}{n}(i-1), \\ n > 0, \ \ n - \text{ціле}, \\ q_i \geq x_i > 0, i = 1,2,..,n. \end{cases} \tag{1.42}$$

Тут функція $f(t_i, t_{i+1})$ і $K_i(x_i), S_i(x_i,q_i), P_i(x_i,q_i)$ задані при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай попит визначено нечітко, тобто обсяг попиту q_i на інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ є нечітким числом з функцією приналежності $\mu_i(u)$ (рисунок 1.9):

$$\mu_i(u) = \begin{cases} f_i(u), & \text{якщо } a_i \leq u \leq b_i, \\ 0, \text{в протилежному випадку}, \end{cases}$$

при цьому для будь-яких допустимих i функції $f_i(u)$ є зростаючими.

Апроксимуючи функцію $f_i(u)$ лінійною функцією, вважатимемо, що обсяг попиту q_i на інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ є нечіткою величиною $\langle a_i, b_i, e_i \rangle$ з функцією приналежності

$$\mu_i(u) = \begin{cases} \dfrac{u - a_i}{b_i - a_i}, & \text{якщо } a_i \ \leq u \leq b_i, \\ 0, \text{в протилежному випадку}, \end{cases}$$

заданою на універсальній множині $[0;\ +\infty)$ (рисунок. 1.10).

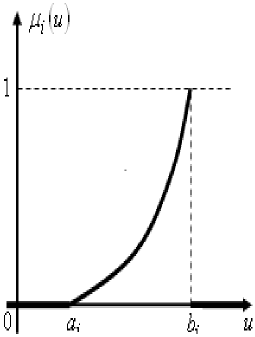


Рисунок 1.9 - Графік функції приналежності попиту

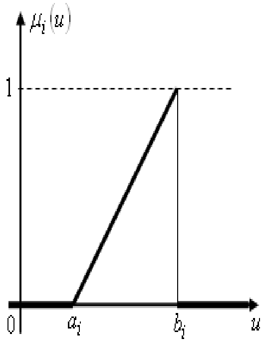


Рисунок 1.10 - Графік функції приналежності трикутного числа $\langle a_i, b_i, b_i \rangle$

Для подальшого викладу нам знадобляться такі позначення:

$x_i(q_i)$ - обсяг поставки, при якому витрати $L_i(x_i, q_i)$;

$$L_i(x_i, q_i)= \min_{0 \leq x_i \leq q_i} K_i(x_i)+S_i(x_i, q_i) + P_i(x_i, q_i);$$

L_i^{min} – мінімальні витрати на i-му інтервалі у випадку, коли попит на ньому мінімальний, тобто дорівнює a_i;

L^{min} – мінімальні витрати на постачання при мінімальному попиті на кожному інтервалі:

$$L^{min} = \sum_{i=1}^{n} L_i((x_i, a_i), a_i) \, ;$$

L_i^{max} – максимальні витрати на i-му інтервалі у випадку, коли попит на ньому максимальний, тобто дорівнює b_i;

L^{max} – максимальні витрати на постачання при максимальному попиті на кожному інтервалі:

$$L^{max} = \sum_{i=1}^{n} L_i((x_i, b_i), b_i).$$

Ступінь упевненості в тому, що запропонований варіант (x, q) організації постачання ефективний, будемо характеризувати відповідним значенням функції приналежності нечіткої величини $\hat{C}_{ц}$ – "витрати майже мінімальні", що описує нашу мету.

Чим більша різниця

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(x_i), q_i) - L^{min}$$

між витратами пов'язаними з варіантом (x, q) та мінімальними витратами L^{min}, тим менше ми впевнені в тому, що план (x, q) економічно ефективний.

Будемо виходити з того, що $\hat{C}_{ц}$ є нечіткою величиною $\langle L^{min}, L^{min}, L^{max} \rangle$ з функцією приналежності $\mu_{ц}(u)$ (рисунок 1.11), заданою на множині $[0, \infty +)$. Для плану (x, q) значення u визначається формулою: $u = L(x, q)$, тоді

$$\mu_{ц}(u) = \begin{cases} \dfrac{L^{max} - u}{L^{max} - L^{min}}, \text{якщо } u \epsilon \left[L^{min}, L^{max}\right], \\ 1, \quad \text{якщо } u \leq L^{min}, \\ 0, \quad \text{якщо } u \geq L^{max}. \end{cases}$$

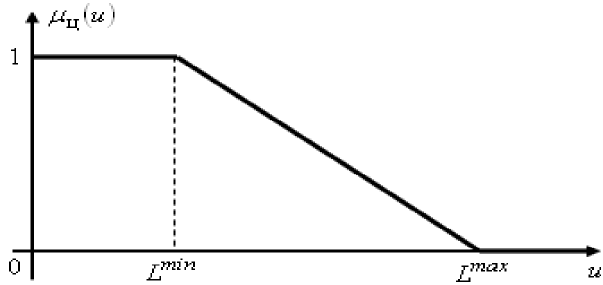


Рисунок 1.11 – Графік функції приналежності показника ефективності

Нехай $q_i \underset{i}{\epsilon} [a_i, b_i]$, тоді наша впевненість у тому, що на i-му інтервалі постачання сумарний попит дорівнюватиме q_i, що дорівнює $\mu_i(q_i)$. Таким чином, наша впевненість у тому, що сумарний попит по всіх інтервалах дорівнюватиме вектору $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, дорівнює

$$\mu(q) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(q_i).$$

Це випливає з визначення кон'юнкції, оскільки висловлювання «попит за інтервалами дорівнює $q_1, q_2, \dots, q_n$» еквівалентно наступній кон'юнкції висловлювань: «попит на першому інтервалі дорівнює q_1» І «попит на другому інтервалі дорівнює q_2» І … І «попит на n-му інтервалі дорівнює q_n».

Розв'язком задачі (1.42) при нечіткому попиті вважатимемо план постачання, при якому ступінь упевненості у тому, що він ефективний за витратами і рівнем забезпечення попиту (значення функції належності плану нечіткій множині «вирішення задачі»), максимальна.

Функцію приналежності нечіткій множині «вирішення задачі» будемо позначати як

$$\mu_{\text{роз}}(x, q).$$

З властивостей операцій над нечіткими множинами випливає, що

$$\mu_{\text{роз}}(x, q) = min\left\{\mu(q), \mu_{\text{ц}}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i(x_i), q_i\right)\right\}.$$

В якості розв'язку розглянутої задачі пропонується використовувати такий план постачання (x, q), при якому функція $\mu_{\text{роз}}(x, q)$ приймає максимальне значення, тобто який є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}
\mu_{\text{роз}}(x, q) \to max, \\
L(x, q) = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\big(K_i(x_i) + S_i(x_i, q_i) + P_i(x_i, q_i)\big), \\
q_i = f(t_i, t_{i+1}), \\
t_i = \frac{\theta}{n}(i-1), \\
n > 0,\ n - \text{ціле}, \\
q_i \geq x_i > 0,\ i = 1, 2, .., n.
\end{gathered} \tag{1.43}$$

1.17. Про одну властивість оптимального плану задачі

Нехай (x^*, q^*) – оптимальний план задачі (1.43) та $\mu_{\text{роз}}(x^*, q^*) = E$.

Твердження 1.2. Якщо вектор потреб $q' = (q_1', q_2', \dots, q_n')$

такий, що $\mu_i(q_i') = E$, і x' – вектор оптимальних розмірів поставок при векторі потреб q', то $\mu_{\text{роз}}(x, q) = E$.

Справедливість цього твердження випливає з того, що для будь-якого i має місце нерівність:

$$q_i' \leq q_i^*.$$

Але при зменшенні попиту оптимальні витрати на постачання зменшуються (принаймні не збільшуються) і, отже, економічна ефективність оптимального розв’язку не може погіршитися, тобто величина

$$\mu_{\text{ц}}(\sum_{i=1}^{n} L_i(x_i', q_i'))$$

не може стати менше E. Отже, $(x_i' \leq q_i')$ — теж оптимальний план задачі (1.43).

1.18. Алгоритм та приклад розв'язання задачі

Важливою для подальшого викладу властивістю плану x', про який йшлося у твердженні 1.2, є те, що надійності попиту на всіх інтервалах однакові, а це дозволяє будувати досить простий алгоритм наближеного розв'язання задачі (1.43), аналогічний алгоритму п. 1.14.

Вирішується послідовність задач із обсягами попиту, значення функцій приналежності яких змінюються з фіксованим кроком h. Для визначення величини кроку, задавшись допустимою величиною похибки ε, знаходимо число кроків M, вважаючи M рівним цілій частині числа $\frac{1}{\varepsilon} + 1$. Розмір кроку h дорівнює $\frac{1}{M}$.

При розв'язанні k-ї $(k = 0,1,2,\ldots,M)$ задачі із зазначеної послідовності задач значення функцій належності попиту на кожному часовому інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ вважаємо рівними kh. Знаходимо такі значення попиту на кожному з часових інтервалів, для яких значення функцій належності попиту рівні kh, тобто знаходимо такі $q_i, i = 1,2, \ldots, n,$ що

$$\mu_i(q_i) = kh, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вирішуємо з цими значеннями попиту задачу (1.42), знаходимо сумарні витрати на постачання, пов'язані з цим варіантом значень попиту, та визначаємо рівень нашої задоволеності (значення функції $\mu_{\text{ц}}$). Визначаємо значення цільової функції $\mu_{\text{роз}}$ (мінімум із усіх надійностей) задачі (1.43). З отриманих $M + 1$ значень обираємо найкраще (максимальне). Обсяги попиту і дефіциту, при яких отримано це максимальне значення, і є оптимальним планом задачі, що розглядається, — задачі (1.42) з нечітким попитом.

Приклад 1.9. Постачання ресурсами здійснюється протягом трьох циклів, тобто $n = 3, i = 1,2,3$. Тривалість кожного часового інтервалу $[t_i, t_{i+1})$ (циклу) однакова і становить один місяць (30 діб). Попит на кожному інтервалі постачання постійний з нечіткою інтенсивністю, отже, його сумарна величина на інтервалі постачання нечітка, вона описується нечіткою величиною (a_i, b_i, b_i). Значення чисел a_i та b_i зазначені у таблиці 1.14.

Таблиця 1.14 - Дані про нечіткі величини, що описують попит

	Номер періоду постачання (i)		
	1	2	3
a_i	100	150	80
b_i	120	200	100

Обсяги попиту, поставок, дефіциту вимірюються в тонах, витрати – в тисячах гривень, час – в добах.

Витрати на постачання пропорційні його обсягу та визначаються за формулою (1.44)

$$K_i(x_i = 5x_i, \;\; i = 1, 2, 3.) \qquad (1.44)$$

Витрати на зберігання пропорційні обсягу запасу та часу зберігання та становлять 0,1 тис. грн. на добу. Витрати зберігання на одному інтервалі постачання визначаються за формулою (1.45):

$$S_i(x_i, d_i) = 0{,}5x_i(30 - t_i^{\text{деф}}) \cdot 0{,}1\ ,\ i = 1, 2, 3. \qquad (1.45)$$

Тут $t_i^{\text{деф}}$(діб) – тривалість наявності дефіциту протягом i-го циклу постачання, тоді $30 - t_i^{\text{деф}}$(діб) – тривалість бездефіцитної роботи під час цього циклу.

Витрати на штраф за дефіцит пропорційні обсягу дефіциту та часу його наявності та становлять 0,5 тис. грн. на добу. Витрати зберігання на i-му інтервалі постачання визначаються за формулою (1.46):

$$P(x_i, d_i) = 0.5t_i^{\text{деф}}0.5, i = 1,2,3. \qquad (1.46)$$

Визначити обсяги поставок, за яких надійність забезпечення потреб та економічної ефективності максимальна.

Розв'язання. Змінюватимемо значення функцій приналежності з кроком 0,1, тобто $h = 0{,}1$. Результати обчислень зведено до таблиці 1.15.

Таблиця 1.15 - Проміжні результати для прикладу 1.9

Значення функції $\mu_i(q_i)$	Обсяг попиту за періодами			Мінімум сумарних витрат	Значення функції $\mu_{ц}$
	q_1	q_2	q_3		
1	2	3	4	5	6
0	100	150	80	1558,33	1,00
0,1	102	155	83	1605,55	0,90
0,2	104	160	86	1652,77	0,80
0,3	106	165	89	1700,00	0,70
0,4	108	170	92	1747,22	0,60
0,5	110	175	95	1794,44	0,50
0,6	112	180	98	1841,67	0,40
0,7	114	185	101	1888,88	0,30
0,8	116	190	104	1936,11	0,20
0,9	118	195	106	1978,60	0,11
1,0	120	200	110	2030,55	0,00

Так як попит постійний, то

$$t_i^{\text{деф}} = \frac{30(q_i - x_i)}{q_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тоді сумарні витрати на i-му (i = 1, 2, 3) інтервалі рівні

$$L_i((x_i), q_i) = 5x_i + 0{,}5x_i\left(30 - t_i^{\text{деф}}\right)0{,}1 + 0{,}5(q_i - x_i)t_i^{\text{деф}}0{,}5 = 6{,}5x_i - 0{,}05x_i t_i^{\text{деф}} + 0{,}25(q_i - x_i)t_i^{\text{деф}} = 6{,}5x_i - 1.5x_i \frac{q_i - x_i}{q_i} + 7.5\frac{(q_i - x_i)^2}{q_i}.$$

Для пошуку мінімуму цієї функції при заданому попиті (при заданому q_i) обчислимо її похідну:

$$(L_i(x_i, q_i))'_{x_i} = 5 + \frac{3}{q_i}x_i - \frac{15}{q_i}(q_i - x_i).$$

Розв'язуючи рівняння

$$5 + \frac{3}{q_i}x_i - \frac{15}{q_i}(q_i - x_i) = 0,$$

знаходимо точку екстремуму функції $L_i(x_i,\ q_i)$ (оптимальний обсяг поставки при розмірі попиту, що дорівнює q_i):

$$\bar{\bar{x}}_i = \frac{10}{18} \cdot q_{i,} \qquad (1.47)$$

оптимальний розмір дефіциту тоді дорівнює

$$\bar{\bar{d}}_i = q_i - \bar{\bar{x}}_i = \frac{8}{18}q_i. \qquad (1.48)$$

Мінімальні витрати при попиті q_i рівні

$$L_i(\bar{\bar{x}}_i, q_i) = 5\bar{\bar{x}}_i + 1.5\frac{(\bar{\bar{x}}_i)^2}{q_i} + \frac{7.5}{q_i}(q_i - \bar{\bar{x}}_i)^2. \qquad (1.49)$$

При заповнюванні п'ятої графи таблиці 1.15 за формулою (1.49) обчислено значення мінімальних витрат для кожного з трьох циклів постачання, їх суму та зазначено у відповідному рядку цієї графи.

Заповнення шостої графи здійснено за формулою

$$\mu_{\text{ц}} = \frac{L_{max} - u}{L_{max} - L_{min}},$$

де u – число з відповідного рядка п'ятої графи;

L_{max} – мінімальні витрати на постачання при максимальному попиті на кожному інтервалі; це число зазначене в останньому рядку п'ятої графи;

L_{min} – мінімальні витрати на постачання при мінімальному попиті на кожному інтервалі, число вказано у верхньому рядку п'ятої графи таблиці.

Зауваження 1.4. Цей приклад можна було, звісно, вирішити простіше. Для цього достатньо у формулу (1.49) підставити вираз для x_i (1.47). Виявляється, що мінімальні витрати на одному циклі постачання, а значить, на всьому інтервалі постачання θ, лінійно залежать від попиту, а це відразу означає: максимальне значення функції належності нечіткої множини «вирішення задачі», тобто функції $\mu_{\text{роз}}(x, q)$ дорівнює 0,5.

Зауваження 1.5. Ми розглянули задачу із заданим і рівним n числом інтервалів. Якщо кількість інтервалів не задано, можна розв'язати дану задачу з різними n і обрати найкращий результат.

1.19. Задача щодо визначення необхідної кількості запасних деталей

Розглянемо задачу про необхідну кількість запасних деталей. Наприклад, про те, скільки запасних автомобільних свічок для вантажних автомобілів необхідно мати в автогосподарстві з розрахунку на рік.

Необхідну кількість запасних деталей вважатимемо лінгвістичною змінною, наприклад, з термами — «дуже багато», «багато», «нормально», «трохи», «мало».

Будемо виходити з того, що кожен терм визначається нечітким трикутним числом (зауважимо, що тут можна використовувати і складніші конструкції). Наприклад, терму «нормально» може відповідати нечітке число <15, 20, 27> і так далі, графік функції приналежності такого терму «нормально» має вигляд, зображений на рисунку 1.12.

Знайти необхідну кількість запасних деталей.

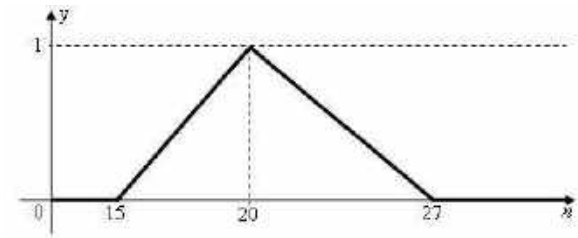


Рисунок 1.12 – Графік функції приналежності терма «нормально»

Для вирішення сформульованої задачі застосуємо наступний підхід.

1. Для кожного терму знаходимо «середню» кількість відмов. Наприклад, нехай терм «нормально» є нечіткою множиною

$N_{\text{нор}}$= 0/14+0,1/15+0,3/16+0,4/17+0,8/18+1/20+1/21+1/22+
+0,9/23+0,7/24+0,5/25+0,3/26+0,2/27+0/28.

Дефазифікація цієї нечіткої множини методом центру тяжіння дає значення, яке позначимо a_c:

$a_c = (0 \cdot 14 + 0{,}1 \cdot 15 + 0{,}3 \cdot 16 + 0{,}4 \cdot 17 + 0{,}8 \cdot 18 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 21 + 1 * 22 + +0{,}9 \cdot 23 + 0{,}7 \cdot 24 + 0{,}5 \cdot 25 + 0{,}3 \cdot 26 + 0{,}2 \cdot 27 + 0 \cdot 28) : (0 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}8 + 1 + 1 + 1 + 0{,}9 + 0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0) = \ 21{,}3.$

Аналогічно для інших термів отримуємо звичайні чіткі числа, які ми позначимо відповідно a_a, a_b, a_c, a_d, a_e.

2. Розглянемо універсальну множину, елементами якої є терми лінгвістичної змінної «кількість запасних деталей», тобто терми "дуже багато", "багато", "нормально", "трохи", "мало". Тоді нечітка множина $N_{\text{відмов}}$ («кількість відмов») має вигляд:

a /«мало» +b/«трохи» +c /«нормально» +d /«багато»+
+e /«дуже багато» = $^{a}/_{a_a} + {}^{b}/_{a_b} + {}^{c}/_{a_c} + {}^{d}/_{a_d} + {}^{e}/_{a_e}$.

Тут a, b, c, d, e — ступеня істинності нечітких висловлювань виду «a є елементом нечіткої множини $N_{\text{відмов}}$».

Використовуючи результати дефазифікації термів (пункт 1), здійснимо методом центру тяжіння дефазифікацію лінгвістичної змінної «число відмов», отримаємо, що необхідна кількість запасних деталей дорівнює

$$N = \frac{a * a_a + b * b_b + c * c_c + d * d_d + e * e_e}{a + b + c + d + e}.$$

Нехай для прикладу

$$a = 0{,}1;\ b = 0{,}2;\ c = 0{,}4;\ d = 0{,}2;\ e = 0{,}1;$$

$$a_a = 10,\ a_b = 14,\ a_c = 20, a_d = 27,\ a_e = 35.$$

Тоді

$$N = \frac{0{,}1 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 14 + 0{,}4 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 27 + 0{,}1 * 35}{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1} = 20{,}7.$$

1.20. Задача векторної оптимізації з нечіткими вихідними даними

При організації матеріально-технічного забезпечення часто доводиться враховувати кілька факторів (загалом кажучи, суперечливих), що характеризують якість прийнятих рішень, наприклад, оперативна та економічна ефективність. Крім того, багато параметрів, що впливають на результат, визначено неточно. Деякі підходи до вирішення таких задач були намічені в пункті 1.6. Наведемо приклади, що ілюструють реалізацію цих підходів.

Приклад 1.10. З п'яти можливих розв’язків потрібно вибрати один. Розв’язок характеризуються оперативною та економічною ефективністю. Оперативна ефективність вимірюється ймовірністю виконання поставленої задачі, економічна – витратами ресурсів (в умовних одиницях).

Позначення:

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – можливі розв’язки;

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ — універсальна множина.

Нечітка множина альтернатив C є чіткою і збігається з множиною X, тобто $C = X$;

$\mu_{\widehat{C}} = 1$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

$f_1(x_i)$ – оперативна ефективність розв'язка x_i, $i = 1,2,3,4,5$;

$f_2(x_i)$ – економічна ефективність розв'язка x_i $i = ,1,2,3,4,5$;

$\widehat{G}_1$ – чітка множина, що формалізує частинну нечітку мету, яка визначається частинним критерієм «оперативна ефективність», $\mu_1(x_i)$ – функція приналежності цієї множини;

$\widehat{G}_2$ –чітка множина, що формалізує частинну нечітку мету, яка визначається частинним критерієм «економічна ефективність», $\mu_2(x_i)$ – функція приналежності цієї множини;

функції $f_1(x_i), f_2(x_i), \mu_1(x_i), \mu_2(x_i)$ задані в таблиці 1.16;

$\mu_{\widehat{G}}(x_i)$ – функція приналежності нечіткої множини $\widehat{G}$, формалізує нечітку мету, що дорівнює мінімуму з функцій приналежності частинних нечітких цілей (мінімальному з відповідних елементів третього та четвертого рядків таблиці);

Таблиця 1.16 – Умова та результати розрахунків для прикладу 1.10

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f_1(x_i)$	0,1	0,5	0,7	0,85	0,95
$f_2(x_i)$	2	5	8	10	13
$\mu_1(x_i)$	0	0	0,3	0,7	1,0
$\mu_2(x_i)$	1,0	0,5	0,4	0,3	0,2
$\mu_{\hat{C}}(x_i)$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
$\mu_{\hat{G}}(x_i)$	0	0	0,3	0,3	0,2
$\mu_{\widehat{D}}(x_i)$	0	0	0,3	0,3	0,2

$\mu_{\widehat{D}}(x_i)$ – функція приналежності нечіткого розв’язку $\widehat{D}$, дорівнює мінімуму із значень функції $\mu_{\hat{C}}(x_i)$ та функції $\mu_{\hat{G}}(x_i)$.

Аналіз цієї таблиці показує, що відповіддю для поставленої задачі є вибір третього чи четвертого розв’язків. Для цих розв’язків графа $\mu_D(x_i)$ має максимальне значення, що дорівнює 0,3.

Нехай частинні критерії ефективності та множина альтернатив задаються за допомогою лінійних функцій.

Розглянемо спершу простішу задачу з двома частинними мінімізованими критеріями та з чіткою множиною допустимих планів (з чіткою множиною альтернатив):

$$\begin{cases} f_1(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to (min), \\ f_2(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \to (min), \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} \le b_m, \\ x_{ij} \ge 0, i = 1, .., m, j = 1, \ldots n. \end{cases} \tag{1.50}$$

Через $\mu_l(x)$, $(l = 1{,}2)$ позначимо функцію приналежності нечіткої множини, що формалізує частинну нечітку мету задачі, що визначається частинним критерієм f_l. Припускатимемо, що функції μ_l є спадними функціями свого аргументу і що мінімальне значення цих функцій дорівнює нулю, а максимальне — одиниці.

В літературі часто пропонується характеризувати ступінь приналежності альтернативи нечіткої мети значенням відповідного нормованого критерію, наприклад, для мінімізованого критерію $f(x)$ можна використовувати формулу

$$\mu(x) = \frac{f^{max} - f(x)}{f^{max} - f^{min}},$$

для максимізованого критерію – формулу

$$\mu(x) = -\frac{f^{max} - f(x)}{f^{max} - f^{min}},$$

де f^{max} і f^{min} – відповідно максимальне та мінімальне значення критерію f, якщо в задачі (1.50) залишити лише один цей критерій та прибрати інший (інші).

Будемо припускати, що $d_j \ge 0$, $a_{ij} \ge 0$, $b_i \ge 0$ для $i = 1{,}2, \ldots, m$, $j = 1{,}2, \ldots, n$.

Розглянемо сімейство задач, що залежать від параметра E, $1 \ge E \ge 0$:

$$
\begin{cases}
f_2(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \to (min), \\
\mu_1(x) \ge E, \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} \le b_m, \\
x_{ij} \ge 0, i = 1, .., m, j = 1, \dots n.
\end{cases} \qquad (1.51)
$$

Нехай x^E – оптимальний план задачі (1.51) при заданому E. План, при якому $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, є допустимим планом завдання (1.51) при $E = 0$.

Зі зростанням E множина допустимих планів задачі (1.51) не збільшується і змінюється від множини допустимих планів задачі (1.50) до множини планів, для яких $\mu_1(x) = 1$. Отже, оптимальне значення критерію $f_2(x)$ зі зростанням E не спадає, отже, функція $\mu_2(f_2(x))$ не може зростати та змінюється від одиниці до нуля.

Нехай

$$
W = \max_{0 \le E \le 1} min\{\mu_1(x^E), \mu_2(x^E)\} = min\{\mu_1(x^{E^0}), \mu_2(x^{E^0})\},
$$

тоді, згідно з п.1.6, план x^{E^0} вважається розв'язком задачі (1.50).

Будуючи по задачі (1.50) задачу (1.51), в якості цільової функції в (1.51) взяли другий частинний критерій з (1.50).

Зауважимо, що максимальне значення функції приналежності нечіткого рішення задачі (1.50) все одно вийшло б рівним W, а якби ми в якості цільової функції взяли б перший частинний критерій, оптимальний план міг би і змінитися.

Для наближеного розв'язання задачі (1.50) можна використати наступний алгоритм.

Нехай похибка у визначенні ступеня нашої впевненості в тому, що альтернатива x є розв'язанням сформульованої задачі, не повинна перевищувати Δ.

Розглянемо перший частинний критерій $f_1(x)$ та відповідну йому функцію приналежності $\mu_1(x)$. Будемо розв'язувати послідовність задач наступного виду:

$$\begin{cases} f_2(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \to max, \\ \mu_1(x) \geq k\Delta, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} \leq b_{m,} \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,..,m, j = 1,\dots,n. \end{cases} \quad (1.52)$$

Розв'яжемо нерівність $\mu_1(x) \geq k\Delta$ відносно $f_1(x)$, отримаємо:

$$f_1(x) \leq R(k\Delta).$$

Нехай, наприклад,

$$\mu_1(x) = -\frac{f_1^{max} - f_1(x)}{f_1^{max} - f_1^{min}},$$

де f_1^{max} та f_1^{min} — відповідно максимальне та мінімальне значення f_1, якщо в задачі (1.50) залишити лише один цей критерій та прибрати інший (інші); аналогічно, f_2^{max} та f_2^{min} – відповідно максимальне та мінімальне значення критерію f_2, якщо в задачі (1.50) залишити тільки його і прибрати f_1.

Тоді нерівність $\mu_1(x) \geq k\Delta$ у задачі перетворюється на нерівність

$$f_1(x) \leq f_1^{max} - \left(f_1^{max} - f_1^{min}\right)k\Delta$$

Задача (1.52) вирішується для $k = 0,1,2,\dots,h$, де $h = int\left(\frac{1}{\Delta}\right)$, тобто h – максимальне ціле число, що не перевищує $1/_{\Delta}$. Для кожного k знаходимо оптимальний план x^{*k} задачі (1.52), обчислюємо $\mu_1(x^{*k})$ та $\mu_2(x^{*k})$ та знаходимо $\mu_{\widehat{D}}(x^{*k})$:

$$\mu_{\widehat{D}}(x^{*k}) = min\{\mu_1(x^{*k}), \mu_2(x^{*k})\},$$

тобто для x^{*k} визначаємо значення функції приналежності нечіткому рішенню.

Якщо x^{**} — план, при якому значення $\mu_{\widehat{D}}(x^{*k})$ максимальне, тобто

$$\mu_{\widehat{D}}(x^{**}) = \max_{1 \leq k \leq n} \mu_{\widehat{D}}(x^{*k}),$$

то він вважається розв'язком задачі (1.50).

Приклад 1.11. (Задача про дієту). Продукти, що використовуються для харчування, вміст корисних речовин у 100 г продукту, калорійність 100 г продукту (у кілокалоріях) та їх вартість, потреба у корисних речовинах (у грамах) та кілокалоріях зазначені у таблиці 1.17. Потрібно розробити денний пайок (умовний), що забезпечує потреби в корисних речовинах і енергії та є найкращим за витратами та вагою.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель, прийнявши за невідомі змінні кількість відповідного продукту, що використовується в пайці: x_1 – хліба, x_2 — цукру, x_3 – згущеного молока, x_4 – яловичини, x_5 – ковбаси, одиницею виміру всіх невідомих є величина, рівна 100 г. Щоб гарантувати обмеженість множини допустимих планів, запровадимо вимогу про тому, що сумарна вага продуктів не має перевищувати 20 одиниць (2 кг).

Зауважимо, що у цій моделі дві цільові функції – вартість пайка та його вага.

Таблиця 1.17 - Дані задачі про дієту

Продукти	Корисні речовини			Калорійність	Вартість
	Жир	Білок	Вуглеводи		
Хліб	1,0	5,0	46,0	220	4,0
Цукор	0	0	100	380	4,5
Молоко згущене з цукром	8,0	7,0	38,0	320	16,0
Яловичина 1-ї категорії	16,0	19,0	0	220	30
Ковбаса с/к	41,0	24,0	0	530	102,0
Потреба	130 г	100 г	570 г	3800 ккал	-

З урахуванням сказаного отримаємо математичну модель:

$$
\begin{cases}
f_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to min, \\
f_2(x) = 4x_1 + 4.5x_2 + 16x_3 + 30x_4 + 102x_5 \to min, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 20, \\
x_1 + 8x_3 + 16x_4 + 41x_5 \ge 130, \\
5x_1 + 7x_3 + 19x_4 + 24x_5 \ge 100, \\
46x_1 + 100x_2 + 38x_3 \ge 570, \\
220x_1 + 380x_2 + 320x_3 + 220x_4 + 530x_5 \le 3800, \\
x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0,\ x_4 > 0,\ x_5 > 0.
\end{cases} \tag{1.53}
$$

Відповідно до викладеного раніше для наближеного розв'язання задачі (1.57) будемо з кроком $\Delta = 0{,}1$ розв'язувати послідовність задач (1.56).

Будемо припускати, що

$$
\mu_1(x) = \frac{f_1^{max} - f_1(x)}{f_1^{max} - f_1^{min}}, \qquad \text{та} \quad \mu_2(x) = \left(\frac{f_2^{max} - f_2(x)}{f_2^{max} - f_2^{min}}\right)^2.
$$

Для початку знайдемо f_1^{max} та f_1^{min}, для цього розв'яжемо задачу (1.50), враховуючі у ній тільки перший критерій f_1:

$$
f_1^{max} = 20 \text{ та } f_1^{min} = 9.87.
$$

Потім розв'яжемо задачу (1.54) при k, що змінюється від нуля до одиниці. Ці задачі розв'язані симплекс-методом, необхідні результати наведено у таблиці 1.18.

$$
\begin{cases}
4x_1 + 4.5x_2 + 16x_3 + 30x_4 + 102x_5 \to min, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 20 - 1.013k, \\
x_1 + 8x_3 + 16x_4 + 41x_5 \ge 130, \\
5x_1 + 7x_3 + 19x_4 + 24x_5 \ge 100, \\
46x_1 + 100x_2 + 38x_3 \ge 570, \\
220x_1 + 380x_2 + 320x_3 + 220x_4 + 530x_5 \le 3800, \\
x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0, x_5 > 0.
\end{cases} \tag{1.54}
$$

Таблиця 1.18 - Проміжні результати для прикладу 1.11

Крок (k)	Оптимальний план задачі (1.53) $-(x_k^*)$	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_3(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
1	2	3	4	5	6	7
0	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
1	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75

2	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
3	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
4	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
5	(0;2,19;9,25;3,5;0)	0,50	0,993	0,50	14,94	262,85
6	(0;5,39;0,81;7,72;0)	0,60	0,983	0,69	13,92	268,82
7	(0;5,7;0;6,62;0,59)	0,70	0,959	0,70	12,91	283,83
8	(0;5,7;0;4,96;1,23)	0,80	0,934	0,80	11,89	299,91
9	(0;5,7;0;3,3;1,9)	0,90	0,905	0,90	10,90	318,45
10	(0;5,7;0;0,02;4,15)	1,00	0,713	0,713	9,87	449,55

Аналізуючи п'ятий стовпець таблиці 1.18, помічаємо, що максимальне значення функція $\mu_{\hat{D}}(x_k^*)$ набуває при $k = 9$. Таким чином, оптимальним є план (0; 5,7; 0; 3,3; 1,9), тобто для пайку слід використовувати 570 г цукру, 330 г яловичини першої категорії та 190 г ковбаси с/к. Вага пайка дорівнює $10{,}90 \cdot 0{,}1$ кг = 1,090 кг, його вартість дорівнює 318,45 грн. Ступінь упевненості в тому, що цей план є найкращим, дорівнює 0,9.

Розглянемо задачу векторної оптимізації з p частинними критеріями та множиною альтернатив

$$X = \{x \in R^n | g_j(x) \le e_j, j = 1,2, \dots, \omega\}:$$

$$\begin{cases} f_i(x) \to max, \ \ i = 1,2, \dots, p, \\ g_j(x) \le e_j, \ \ j = 1,2, \dots, \omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n. \end{cases} \quad (1.55)$$

Позначимо: $\hat{G}_i \ \ (i = 1,2, \dots, p)$ – нечітка множина, що формалізує частинну нечітку мету, яка визначається частинним критерієм ефективності f_i; μ_i – функція приналежності нечіткої множини $\hat{G}_i$; $\hat{G}$ – нечітка множина, що формалізує нечітку мету; $\mu_{\hat{G}}$ – функція приналежності нечіткої множини мети; $\hat{X}_j$ – нечітка множина, що визначається умовою $g_j(x) \le e_j, \ \ j = 1,2, \dots, \omega$; μ_{p+j} – функція приналежності нечіткої множини X_j.

Розглянемо та розв’яжемо задачу (1.56):

$$\begin{cases} \mu_{\hat{D}}(x) = min\{\mu_1(x), \dots, \mu_p(x), \mu_{p+1}(x), \dots, \mu_{p+\omega}(x) \ \} \to max, \\ g_j(x) \le e_j, \ \ j = 1,2, \dots, \omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n. \end{cases} \quad (1.56)$$

Для вирішення задачі (1.56) пропонується розв'язати задачу (1.57):

$$\begin{cases} E \to max, \\ \mu_i(x) \geq E\mu_{\widehat{D}}(x^*) = \mathrm{E}^*, \\ \mu_{p+j}(x) \geq E, \;\; j = 1,2,\dots,\omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \end{cases} \tag{1.57}$$

Твердження 1.3. Нехай x^* – оптимальний план задачі (1.56), тоді x^* – оптимальний план задачі (1.57).

Доведення. Нехай (E^0, x^0) – оптимальний план задачі (1.57), тоді E^0 – оптимальне значення цільової функції цієї задачі. Нехай E^* — максимальне значення цільової функції задачі (1.56), тобто $\mu_{\widehat{D}}(x^*) = E^*$. Так як $\mu_i(x^*) \geq E^*$ за будь-якого $i = 1,2,\dots,p+\omega$, то (E^*, x^*) – допустимий план задачі (1.57) і, отже, максимальне значення E^0 цільової функції задачі (1.57) не менше за E^*, тобто

$$E^0 \geq E^*.$$

Так як (E^0, x^0) – оптимальний план задачі (1.57), то $\mu_i(x^0) \geq E^0$ для $i = 1,2,\dots,p+\omega$ та існує таке l, що $\mu_l(x^0) = E^0$. Якщо $E^0 \geq E^*$, то

$$\min_{1 \leq i \leq \omega} \mu_i(x^0) = E^0 > E^*.$$

Але тоді x^* – не оптимальний план задачі (1.56), що суперечить нашому припущенню. Отже, $E^0 = E^*$ та x^* – оптимальний план задачі (1.57).

Очевидно, що оптимальний план задачі (1.57) є оптимальним планом задачі (1.56).

Приклад 1.12. Розглянемо задачу використання обмежених ресурсів. Припустимо, що є можливість виробляти два види спеціальної техніки (СТ), причому споживання ресурсів чотирьох типів, запаси яких становлять відповідно 16, 12, 8 і 12 одиниць. При виробництві одиниці спеціальної техніки першого виду витрачається 4, 0, 1 та 2 одиниці відповідного ресурсу, при виробництві одиниці спеціальної техніки другого виду витрачається відповідно 0, 4, 2 та 2 одиниці ресурсів. Особа, яка приймає рішення, зацікавлена у максимізації виробництва спеціальної техніки обох видів. Визначити, скільки одиниць спеціальної техніки кожного виду треба зробити.

Розв'язання. Для зручності зведемо вихідні дані до таблиці 1.19 і побудуємо математичну модель розглянутої задачі.

Невідомими у задачі є обсяги виробництва:

x_1 – обсяг виробництва спеціальної техніки першого виду;

x_2 – обсяг виробництва спеціальної техніки другого виду.

Зауважимо, що у цій моделі дві цільові функції:

f_1 – Обсяг виробництва спеціальної техніки першого виду: $f_1(x_1) = x_1$;

f_2 – Обсяг виробництва спеціальної техніки другого виду: $f_2(x_2) = x_2$.

Таблиця 1.19 - До задачі виробництва СТ

Тип ресурсу	Витрата на одиницю СТ, од.		Запас ресурсу, од.
	1-го виду	2-го виду	
А	4	0	16
Б	0	4	12
В	1	2	8
Г	2	2	12

З урахуванням сказаного отримаємо математичну модель:

$$\begin{cases} x_{1 \to max}, \\ x_{2 \to max}, \\ 4x_1 \le 16, \\ 4x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{1.58}$$

Передбачається, що частинні цілі є нечіткими з функціями приналежності:

$$\mu_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_1^{max}},$$
$$\mu_2(x) = \frac{f_2(x)}{f_2^{max}},$$

а множина допустимих планів, для простоти, чітка.

Легко бачити, що максимально можливий обсяг виробництва спеціальної техніки першого виду дорівнює 4, а другого – 3, тоді

$$\mu_1(x) = \frac{f_1(x)}{4},$$
$$\mu_2(x) = \frac{f_2(x)}{3}.$$

Для наближеного розв'язання задачі (1.58) будемо змінювати E від нуля до одиниці з кроком: $\Delta = 0{,}1$ і розв'язувати послідовність задач по типу задачі (1.59):

$$\begin{cases} k \to max, \\ \frac{f_1(x)}{4} \geq \Delta k, \\ \frac{f_2(x)}{3} \geq \Delta k, \\ 4x_1 \leq 16, \\ 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ k \geq 0,\ -\text{ціле}. \end{cases} \tag{1.59}$$

Задача (1.59) еквівалентна задачі (1.60):

$$\begin{cases} k \to max, \\ x_1 \geq 0.4k, \\ x_2 \geq 0.3k, \\ 4x_1 \leq 16, \\ 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ k \geq 0,\ -\text{ціле}. \end{cases} \tag{1.60}$$

Необхідні результати розв'язання задачі (1.60) для різних k наведені в таблиці 1.20.

Аналізуючи дані таблиці 1.20, бачимо, що при $k \geq 9$ задача (1.60) не має допустимих планів, тобто у вихідній задачі немає планів, для яких ступінь їхньої приналежності нечіткому рішенню більша, ніж 0,8. Одним із планів, що належать нечіткому рішенню з надійністю 0,8, є план, відповідно до якого необхідно виробляти 3 одиниці спеціальної техніки першого виду та 2 одиниці спеціальної техніки другого виду.

Таблиця 1.20 - Результати розв'язання задачі (1.60)

Крок (k)	Оптимальний план задачі (1.60) - (x_k^*)	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_3(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
0	(0;0)	0,0	1,0	0,0	0	0
1	(0,4;0,3)	0,1	1,0	0,1	0,4	0,3
2	(0,8;0,6)	0,2	1,0	0,2	0,8	0,3
3	(1,2;0,9)	0,3	1,0	0,3	1,2	0,9
4	(1,6;1,2)	0,4	1,0	0,4	1,6	1,2
5	(2;1,5)	0,5	1,0	0,5	2,0	1,5
6	(2,4;1,8)	0,6	0,93	0,6	2,4	1,8
7	(2,8;2,1)	0,7	0,87	0,7	2,8	2,1
8	(3,2;2,4)	0,8	0,80	0,8	3,2	2,4
9	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-

РОЗДІЛ 2. НЕЧІТКІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ

2.1. Історична довідка

Основна задача теорії управління – відшукання стійких управлінь. Процес управління протікає у часі (чи залежить від якогось іншого параметра), при цьому управлінські рішення можуть прийматися у любий момент часу (безперервні задачі) чи дискретні моменти (багатоетапні задачі).

Одне з перших питань, з якими стикаються під час розробки динамічного об'єкта, – це вибір програми руху, при цьому термін «рух» сприймається достатньо ширше. Під рухом можна розуміти не тільки власне механічний рух, а й взагалі будь-яку зміну чи розвиток. Зазначимо, що параметром, від якого залежить цей рух (розвиток), не обов'язково має бути час.

Приклад 2.1 Розглянемо прямолінійний рух автомобіля.

В кожен момент часу стан автомобіля характеризується двома числами: пройденою відстанню s та швидкістю v руху. Ці дві величини змінюються з часом не мимоволі, а відповідно до волі водія, який може керувати роботою двигуна, змінюючи силу p, що розвивається ним. Таким чином, є три пов'язані між собою параметри: s, v, p.

Величини, що характеризують стан об'єкта, називають ***фазовими координатами***; величини, що описують управлінські дії, називаються ***керуючими параметрами.***

В щойно розглянутому прикладі $s, v -$ це фазові координати, p $-$ керуючий параметр.

Приклад 2.2. Якщо розглядати рух автомобіля не по прямій, а на площині, то фазових координат буде чотири (проекції положення та проекції швидкості), а параметрів, що управляють, — два: сила тяги двигуна і кут повороту керма.

Зауважимо, що в розглянутих прикладах аргумент (час) змінюється неперервно, і для розв'язання, наприклад, задачі з відшукання керування, яке б забезпечило переїзд автомобіля з пункту A до пункту B (скажімо, за мінімальний час), треба використовувати методи, запропоновані школою Понтрягіна. Ці приклади роблять природним такий опис керованого об'єкта.

Є певний об'єкт, що знаходиться у русі (розвитку). Стан об'єкта в кожний момент часу визначається значеннями його фазових координат $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ в цей момент. Рух об'єкта полягає у тому, що його стан з часом змінюється, тобто фазові координати об'єкта є функціями часу. Цей рух відбувається під впливом керуючих параметрів $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$, що теж є функціями часу. Ці функції людина (інший орган управління), яка приймає рішення, вибирає за своїм бажанням (можливо, в деяких межах). Фазовий стан $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ об'єкта в момент часу t залежить від його фазового стану в початковий момент t_0 та значень керуючих параметрів $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ у моменти часу від t_0 до t і, можливо, від впливу якихось зовнішніх факторів (параметрів).

Якщо їх немає або вони мають детермінований характер, ми маємо задачу управління детермінованим об'єктом (детерміновану систему управління); якщо ці фактори носять імовірнісний характер, то отримуємо імовірнісну систему управління; у разі коли вплив зовнішніх чинників носить нечіткий характер, отримуємо нечітку систему управління.

Розглядаючи значення керуючих параметрів як функції часу, ми називатимемо їх ***керуючими функціями***. У детермінованих системах управління передбачається, що, знаючи фазовий стан об'єкта в початковий момент часу t_0 і значення керуючих параметрів $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$, ми можемо однозначно визначити фазовий стан об'єкта в момент часу t_1 .

Кожен ***фазовий стан*** $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ є точкою, яка називається ***фазовою точкою***, n –вимірного простору з координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$, який називається ***фазовим простором***.

Щоб повністю задати рух об'єкта, треба задати його фазовий стан у початковий момент часу t_0 та вибрати керуючі функції

$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$, тобто вибрати векторну функцію $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$. Цю векторну функцію ми називатимемо ***управлінням.***

Рух об'єкта полягає в тому, що фазова точка $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, що зображує фазовий стан об'єкта у фазовому просторі, з часом переміщається в цьому просторі, описуючи деяку криву, яка називається ***фазовою траєкторією***. На рисунку 2.1 зображена фазова траєкторія, що виходить під час руху автомобіля (дивись приклад 2.1) з пункту A до пункту B.

.

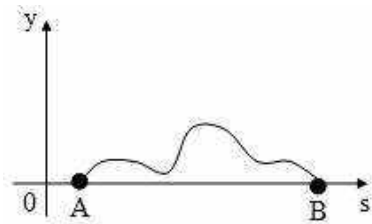


Рисунок 2.1 - Приклад фазової траєкторії

Пара векторних функцій $(x(t), u(t))$ називається ***процесом управління.***

Таким чином, щоб вирішити задачу управління динамічним об'єктом, треба знати механізм визначення фазового стану об'єкта в наступні моменти часу за його поточним фазовим станом та управлінням, обмеження, яким повинно задовольняти допустиме управління та фазові стани, початкові та кінцеві умови.

Наведемо загальне формулювання задачі управління для детермінованої системи управління: визначити процес управління $(x(t), u(t))$ при механізмі руху, що описується за допомогою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i(t) = f_i\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)\big), \qquad (2.1)$$

де $i = 1,2, \ldots, n,$ або з допомогою різницевих рівнянь:

$$x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k) =$$
$$f_i\big(x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k); u_1(t_k), u_2(t_k), \dots, u_m(t_k)\big), \qquad (2.2)$$
де $i = 1,2, \dots, n, k = 1,2, \dots, N$ (тут N – число моментів часу, в які можливе прийняття управлінських рішень), що задовольняють обмеженням вздовж траєкторії:
$$\big(x(t), u(t)\big) \in G, \qquad (2.3)$$
початковим та кінцевим умовам:
$$x(t_0) \in E_0, x(t_1) \in E_1. \qquad (2.4)$$
Зазначимо, що рівняння (2.1) або (2.2) є рівняннями руху, що дозволяють за заданим початковим фазовим станом та керуванням знайти фазову траєкторію. Суть обмежень (2.3) полягає в тому, що, взагалі кажучи, не будь-які фазові стани та управління є можливими.

Для розв'язання задач управління нечіткими системами управління в даний час досить успішно використовується нечітка логіка. При цьому механізм руху описується з допомогою бази знань, з допомогою системи правил, які у найпростішому випадку мають вигляд: якщо A, то B.

Нині теорія нечітких множин широко застосовується для вирішення задач управління складними технічними системами. На її основі отримано рішення великої кількості задач аналізу та управління. Системи, засновані на нечітких множинах, розроблені та успішно впроваджені в таких галузях, як: управління технологічними процесами, управління транспортом, медична діагностика, технічна діагностика, фінансовий менеджмент, біржове прогнозування, розпізнавання образів.

Практичний досвід розробки систем нечіткого логічного висновку свідчить, що терміни та вартість їх проектування значно менші, ніж при використанні традиційного математичного апарату, при цьому забезпечується необхідний рівень «перешкод і прозорості моделей». В науковій літературі багато прикладів широкого застосування теорії нечітких множин. Дана теорія дозволяє вирішувати задачі управління в ситуаціях, коли традиційні методи неефективні чи взагалі неприйнятні через брак точної інформації про об'єкт дослідження.

Зараз теорія нечітких множин є розвиненим науковим напрямом, на її основі отримано рішення великої кількості задач аналізу та управління: автомобільним транспортом, системами комунікації, хімічними реакторами, електричними двигунами, процесами зварювання, установками для очищення води, холодильними агрегатами, вентиляторами та кондиціонерами, нагрівальними приладами, печами для спалювання сміття та плавки скла, металообробними верстатами, бойлерами, акумуляторними агрегатами тощо.

Розширюється використання теорії нечітких множин і в економіці та управлінні підприємствами. Про це свідчить інтенсивне зростання у цій галузі досліджень кількості журнальних публікацій, поява монографій узагальнюючого характеру та спеціалізованих журналів.

У практичних додатках найактивніше використовується алгоритм Мамдані. Розглянемо кілька прикладів застосування саме цього алгоритму для вирішення деяких задач управління технічними системами.

Питання для самоперевірки:

1. Що є основною задачею теорії управління?
2. Що розуміють під терміном «рух»?
3. Як називають величини, які характеризують стан об’єкта?
4. Як називають величини, що описують управлінські дії?
5. Що таке керуючі функції?
6. Що таке «фазовий стан», «фазова точка» та «фазовий простір»?
7. Яку функцію називають «управлінням»?
9. Що називається «процесом управління?

2.2. Управління змішувачем води

Почнемо з найпростішого прикладу – у випадку, коли є одна вхідна змінна (один параметр) і одна вихідна змінна (один показник).

Приклад 2.3. "Змішувач води". При роботі душа використовуються холодна та гаряча вода, що подаються через змішувач. Найбільш комфортними умовами для людини, яка приймає душ, є вода з температурою в заданих межах. Як показує практика, температура води в душі змінюється, не залишаючись постійною.

Потрібно створити систему управління ручкою змішувача, щоб забезпечити комфортні умови користування душем. Поворот ручки вправо веде до підвищення температури води, що поступає, поворот вліво – до зменшення. Визначити, на який кут треба повернути ручку, якщо температура води дорівнювала 55°C.

У якості вхідної змінної (параметра) розглянемо лінгвістичну змінну «температура води» з термами «гаряча», «не дуже гаряча», «тепла», «не дуже холодна», «холодна», які формалізуються нечіткими трикутними і трапецеїдальними числами, визначеними на універсальній множені різних значень температур — на інтервалі [0°C, 70°C], графіки функцій приналежності представлені на рисунку 2.2.

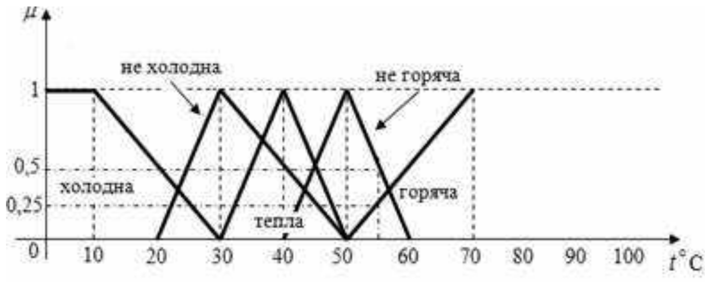


Рисунок 2.2 - Графіки функцій приналежності термів лінгвістичної змінної «температура води»

У якості вихідної змінної (як показник) розглянемо лінгвістичну змінну «ручка» з термами «вліво», «трохи вліво», «не чіпати», «трохи вправо», «вправо», які формалізуються нечіткими трикутними числами, визначеними на універсальній множині значень кутів повороту ручки – на інтервалі [-70°; +70°], їх графіки функцій приналежності представлені на рисунку 2.3. Кут повороту ручки позначатимемо літерою φ. Зменшення градуса повороту ручки ліворуч призводить до зниження температури води, що витікає.

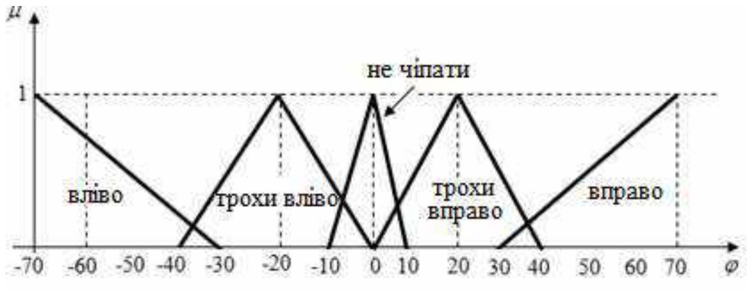


Рисунок 2.3 - Графіки функцій приналежності термів лінгвістичної змінної "ручка"

Будемо виходити з того, що користувач керується такими правилами:

1. Якщо вода гаряча, то повернути ручку змішувача вліво.

2. Якщо вода не гаряча, то повернути ручку трохи вліво.

3. Якщо вода тепла, то ручку не чіпати.

4. Якщо вода не холодна, то повернути ручку трохи праворуч.

5. Якщо вода холодна, то повернути ручку праворуч.

Введемо позначення:

A – Лінгвістична змінна «температура води»;

B — лінгвістична змінна "ручка".

Терми «холодна», «не холодна», «тепла», «не гаряча», «гаряча», позначатимемо відповідно A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Терми «вліво», «трохи вліво», «не чіпати», «трохи вправо», «вправо» будемо позначати відповідно B_1, B_2, B_3, B_4, B_5.

Для зручності сформуємо основу знань (таблицю нечітких правил) (таблиця 2.1).

Запис, наприклад, B_2 у цій таблиці означає таке правило: "Якщо вода не гаряча, то повернути ручку трохи вліво".

Таблиця 2.1 - База знань

Температура води (A)	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Ручка (B)	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1

Функції приналежності термів $A_i, i = 1,2,3,4,5$ будемо позначати μ_{A_i}, термів $B_j, j = 1,2,3,4,5 - \mu_{B_j}$.

Маємо:

$$\mu_{A_1}(55) = 0;\ \mu_{A_2}(55) = 0; \mu_{A_3}(55) = 0; \mu_{A_4}(55) = 0{,}50;$$
$$\mu_{A_5}(55) = 0{,}25,$$

тоді

$$\mu_{B_1}(55) = 0{,}25;\ \mu_{B_2}(55) = 0{,}50; \mu_{B_3}(55) = 0; \mu_{B_4}(55) = 0;$$
$$\mu_{B_5}(55) = 0.$$

Вкажемо значення функцій приналежності (з графіка на рисунку 2.3) термів B_1 і B_2 при значеннях аргументу, що змінюються з кроком 10°C. Результати наведено у таблиці 2.2.

Розглядаємо лише терми B_1 і B_2, оскільки значення функцій приналежності інших терм дорівнюють нулю.

Таблиця 2.2 - Значення функцій приналежності термів B_1 та B_2

φ	-70	- 60	- 50	- 40	- 30	- 20	- 10	0	10	20	30	40	50	60	70
$\mu_{B_1}(\varphi)$	1	0,75	0,50	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{B_2}(\varphi)$	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0

Закінчення таблиці 2.2

Визначимо значення змінної "ручка" за умови, що поточне значення температури води дорівнює 55°С.

Введемо два позначення.

Через $\mu_{ij}(t,\varphi)$ позначимо функцію приналежності нечіткого висловлювання [(значення терма A_i дорівнює t) і (значення терма B_j дорівнює φ)], тоді

$$\mu_{ij}(t,\varphi) = \min\left\{\mu_{A_i}(t), \mu_{B_j}(t)\right\};$$

значення функцій $\mu_{ij}(t,\varphi)$ для двох ситуацій, що розглядаються (для термів B_1 і B_2) вказані у двох верхніх рядках таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Значення шуканих функцій приналежності

φ	-70	- 60	- 50	- 40	- 30	- 20	- 10	0	10	20	30	40	50	60	70
$\mu_{51}(55,\varphi)$	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{42}(55,\varphi)$	0	0	0	0	0,50	0,50	0,50	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_B(55,\varphi)$	0,25	0,25	0,25	0,25	0,50	0,50	0,50	0	0	0	0	0	0	0	0

Закінчення таблиці 2.3

Через $\mu_B(t,\varphi)$ позначено функцію приналежності лінгвістичної змінної «ручка» за умови, що значенням змінної «температура води» є значення температури, що дорівнює t:

$$\mu_B(t,\varphi) = \max_{(i,j)} \mu_{ij}(t,\varphi).$$

Значення цієї функції вказані в нижньому рядку таблиці 2.3, вони дорівнюють максимальному числу з чисел відповідної графи.

Перший та останній рядки таблиці 2.3 задають функцію приналежності нечіткої множини «кут повороту ручки за умови, що $t = 55°C$».

Дефазифікація цієї нечіткої множини, дає

$$\frac{-(0{,}25 * (70 + 60 + 50 + 40) + 0{,}5 * (30 + 20 + 10))}{0{,}25 * 4 + 0{,}50 * 3 + 0 * 8} +$$

$$\frac{(0 * (0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70)}{0{,}25 * 4 + 0{,}50 * 3 + 0 * 8} = \frac{-85}{2.5} = -34.$$

Отже, ручку треба повернути на 34° ліворуч.

Для практичного використання цього підходу необхідно організувати періодичний вимір температури води і, отримавши результат виміру за наведеною схемою, визначити кут повороту ручки та повернути її на цей кут. Зрештою отримаємо воду потрібної температури. Зрозуміло, що для прискорення отримання бажаного результату треба зменшувати інтервал часу між вимірами.

2.3. Управління мобільним роботом

Нині актуальною стала задача автоматичного управління робототехнічними системами. Розглянемо процес управління мобільним роботом і одну з задач, яка при цьому зустрічається: роботу, що рухається з постійною швидкістю, необхідно обійти перешкоду, що зустрічається на шляху.

Введемо дві вхідні лінгвістичні змінні:

- "дистанція" (відстань d до перешкоди) з термами "далеко", "середньо", "близько", "дуже близько" (рисунок 2.4);

- "напрямок" (кут φ між поздовжньою віссю робота і напрямком на перешкоду) з термами "ліворуч", "прямо", "праворуч" (рисунок 2.5).

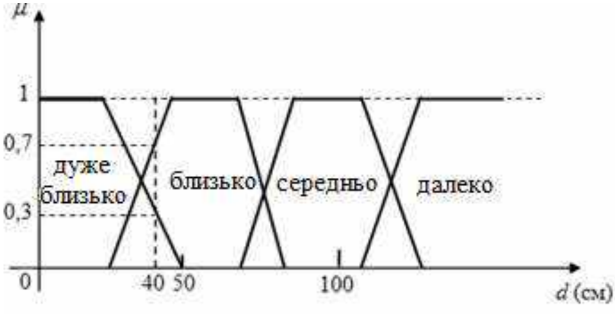


Рисунок 2.4 - Функції приналежності термів змінної «дистанція»

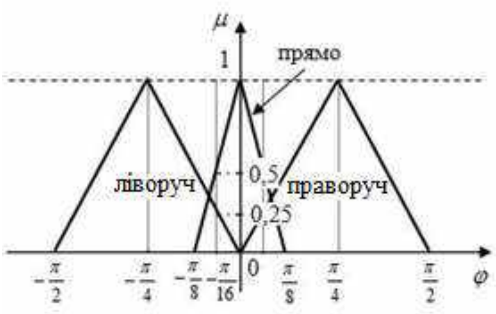


Рисунок 2.5 - Функції приналежності термів змінної «напрям»

Вихідна змінна — «рульовий кут» (кут повороту керма) з термами «різко вліво», «вліво», «прямо», «вправо», «різко вправо» (рисунок 2.6).

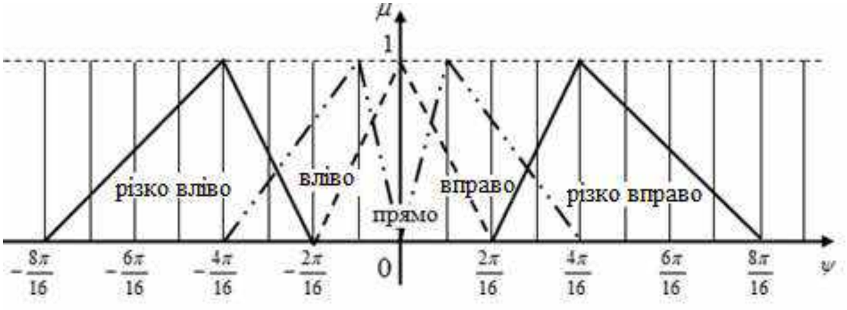


Рисунок 2.6 - Функції приналежності термів вихідної змінної

Задамо нечітку базу знань для даного прикладу за допомогою таблиці 2.4. Кожен запис у цій таблиці відповідає своєму нечіткому правилу, наприклад:

ЯКЩО «дистанція» = «близько» І «напрямок» = «праворуч», ТО «рульвий кут» = «ліворуч».

Таблиця 2.4 - Таблиця нечітких правил (база знань)

Напрям	Дистанція			
	Дуже близько	Близько	Середньо	Далеко
Праворуч	Ліворуч	Ліворуч	Прямо	Прямо
Прямо	Різко ліворуч (різко праворуч)	Ліворуч (праворуч)	Ліворуч (праворуч)	Прямо
Ліворуч	Праворуч	Праворуч	Прямо	Прямо

Таким чином, мобільний робот з нечіткою логікою буде працювати за таким принципом: дані з сенсорів про відстань до перешкоди та напрям до неї будуть фазифіковані, оброблені згідно з табличними правилами, дефазифіковані та отримані дані у вигляді управляючих сигналів надійдуть на привід робота.

Нехай із сенсорів отримані такі дані: «дистанція» = 40 см, «напрямок» = (- $\frac{\pi}{16}$).

Розв’язання. Позначення:

A – "напрямок", B – "дистанція", C – "рульовий кут";

A_1 – "праворуч", A_2 – "прямо", A_3 – "ліворуч";

B_1 – "дуже близько", B_2 – "близько", B_3 – "середньо", B_4 – "далеко";

D_1 – "різко вліво", D_2 – "вліво", D_3 –"прямо", D_4 – "вправо", D_5 – "різко вправо";

E_{ij}, $i = 1{,}2{,}3, j = 1{,}2{,}3{,}4$ — нечітке висловлювання [«напрямок» дорівнює A_i і «дистанція» дорівнює B_j] (таблиця 2.5).

Таблиця 2.5 - Таблиця нечітких правил у прийнятих позначеннях

Напрям	Дистанція			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}
A_2	E_{21}	E_{22}	E_{23}	E_{24}
A_3	E_{31}	E_{32}	E_{33}	E_{34}

Функцію приналежності цього нечіткого висловлювання при заданих значеннях φ і d вхідних змінних позначимо $\varphi\mu_{E_{ij}}(\varphi, d)$.

Позначимо $\mu_{A_i}(\varphi)$ – значення функції приналежності нечіткої множини, що формалізує терм A_1 лінгвістичної змінної «напрямок» при її значенні, що дорівнює φ. Аналогічно $\mu_{B_j}(d)$.

Маємо (рисунок 2.4):

$$\mu_{B_1}(40)= 0{,}30;\ \mu_{B_2}(40) = 0{,}70;\ \mu_{B_3}(40)= 0{,}00;$$

$$\mu_{B_4}(40)= 0{,}00.$$

Аналізуючи рисунок 2.5 бачимо, що

$$\mu_{A_1}(-\frac{\pi}{16})= 0{,}00;\ \mu_{A_2}\left(-\frac{\pi}{16}\right) = 0{,}50;\ \mu_{A_3}\left(-\frac{\pi}{16}\right) = 0{,}25.$$

З визначення нечіткої логічної операції І випливає, що $\mu_{E_{ij}}(\varphi, d) = \min\{\mu_{A_i}(\varphi), \mu_{B_j}(d)\}$. У таблиці 2.6 вказано значення функцій приналежності $\mu_{E_{ij}}(\varphi, d)$ при $\varphi = -\frac{\pi}{16}$ і $d = 40$ см.

Таблиця 2.6 - Значення функції приналежності $\mu_{E_{ij}}(-\frac{\pi}{16}, 40)$

	$\mu_{B_j}(-\frac{\pi}{16})$	B_1	B_2	B_3	B_4
$\mu_{A_i}(40)$		0,3	0,7	0	0
A_1	0	0	0	0	0
A_2	0,5	0,3	0,5	0	0
A_3	0,25	0,25	0,25	0	0

З таблиці 2.6 слідує, що можна розглядати лише чотири ситуації: $A_2 - B_1$, $A_2 - B_2$, $A_3 - B_1$, $A_3 - B_2$. У прийнятих позначеннях це відповідно $E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}$. Вони означають: різко вліво (різко праворуч), вліво (праворуч), праворуч, праворуч. Так як перешкода знаходиться зліва, то з двох можливостей у ситуаціях E_{21}, E_{22} будемо використовувати повороти вправо. Ситуації E_{21} відповідає терм D_5 лінгвістичної змінної «рульовий кут», ситуації E_{22} відповідає терм D_4 ситуації E_{31} – терм D_4, ситуації $E_{32} -$ D_4.

У ситуаціях E_{22}, E_{31}, E_{32} вихідний терм той самий $-$ D_4. Ступінь приналежності $\mu_{D_4}\left(-\frac{\pi}{16}, 40\right)$ вхідного вектора $\left(-\frac{\pi}{16}, 40\right)$ вихідному терму D_4 дорівнює максимальному з значень істинності нечітких висловлювань E_{22}, E_{31}, E_{32}, тобто

$$\mu_{D_4}\left(-\frac{\pi}{16}, 40\right) = \max\{0{,}5; 0{,}25; 0{,}25\} = 0{,}5.$$

Цей максимум досягається для ситуації E_{22}, тому надалі із трьох ситуацій E_{22}, E_{31}, E_{32} досить розглядати лише ситуацію E_{22}. Отже, нас цікавлять лише дві ситуації E_{21} та E_{22}.

Залишилося визначити кут повороту керма. Знаходити цей кут будемо приблизно.

Для цього змінюватимемо кут повороту керма від 0 до $\frac{\pi}{2}$ з кроком $\frac{\pi}{16}$. Нагадаємо, що кут повороту керма ми позначили літерою ψ. Позначимо функцію приналежності терму D_k, $k = 1,2,3,4,5$, лінгвістичної змінної «рульовий кут» через $\mu_{D_k}(\psi)$.

Результати обчислень зведені у таблицях 2.7 та 2.8.

Таблиця 2.7 заповнена на підставі графіків функцій приналежності термів вихідної змінної (рисунок 2.6).

Введемо ще два позначення.

Через $\mu_{ijk}(\varphi, d, \psi)$ позначимо функцію приналежності нечіткого висловлювання [(значення терма A_i дорівнює φ) І (значення терма B_j дорівнює d) І (значення терма D_k дорівнює ψ)], тоді

$$\mu_{ijk}(\varphi, d, \psi) = \min\{\mu_{A_i}(\varphi), \mu_{B_j}(d), \mu_{D_k}(\psi)\}.$$

Таблиця 2.7 – Значення функцій приналежності $\mu_{D_k}(\psi)$ (ступінь впевненості в тому, що прийнявши рішення D_k, треба повернути на кут ψ

ψ	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{8\pi}{16}$
$\mu_{D_5}(\psi)$	0	0	0	0,50	1	0,75	0,50	0,25	0
$\mu_{D_4}(\psi)$	0	1	0,67	0,33	0	0	0	0	0

Значення функції $\mu_{ijk}(\varphi, d, \psi)$ для двох ситуацій, що розглядаються, зазначені в другому і третьому рядках таблиці 2.8.

Таблиця 2.8 - Значення функції приналежності $\mu_{ijk}(\varphi, d, \psi)$

ψ	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{8\pi}{16}$
$\mu_{224}\left(-\frac{\pi}{16}, 40, \psi\right)$	0	0,5	0,5	0,33	0	0	0	0	0
$\mu_{215}\left(-\frac{\pi}{16}, 40, \psi\right)$	0	0	0	0,30	0,3	0,3	0,3	0,25	0
$\mu_{D}\left(-\frac{\pi}{16}, 40, \psi\right)$	0	0,5	0,5	0,33	0,3	0,3	0,3	0,25	0

Через $\mu_D(\varphi, d, \psi)$ позначимо функцію приналежності лінгвістичної змінної «рульовий кут» за умови, що значенням лінгвістичної змінної «напрямок» є кут, що дорівнює φ, а значенням лінгвістичної змінної «дистанція» є відстань, що дорівнює d:

$$\mu_D(\varphi, d, \psi) = \max_{(i,j,k)} \mu_{ijk}(\varphi, d, \psi).$$

Значення цієї функції вказані у четвертому рядку таблиці 2.8, вони дорівнюють максимальному з чисел відповідної графи.

Перший і четвертий рядки таблиці 2.8 задають функцію приналежності нечіткої множини:

"рульовий кут за умови, що $\varphi = (-\frac{\pi}{16})$ і $d = 40$".

Залишилося здійснити дефазифікацію цієї нечіткої множини, тобто перетворити її в чітке число (визначити, на який все ж таки кут треба повернути). Дефазифікація за методом "центра тяжіння" дає:

$$\frac{0\cdot 0+\frac{\pi}{16}\cdot 0{,}5+\frac{2\pi}{16}\cdot 0{,}5+\frac{3\pi}{16}\cdot 0{,}33+\frac{4\pi}{16}\cdot 0{,}3+\frac{5\pi}{16}\cdot 0{,}3}{0+0{,}5+0{,}5+0{,}33+0{,}3+0{,}3+0{,}3+0{,}25+0}+$$

$$+\frac{\frac{6\pi}{16}\cdot 0{,}3+\frac{7\pi}{16}\cdot 0{,}25+\frac{8\pi}{16}\cdot 0}{0+0{,}5+0{,}5+0{,}33+0{,}3+0{,}3+0{,}3+0{,}25+0} \cong 3{,}53\cdot\frac{\pi}{16}.$$

Отже повернути треба на кут 3,53$\cdot\frac{\pi}{16}$.

2.4. Паркування автомобіля

Швидкий розвиток науки і техніки спричиняє також великий інтерес до створення автоматичних систем управління різними підсистемами автомобіля, автоматизацію різних режимів руху транспорту на дорогах і, нарешті, створення системи управління автомобілем загалом.

Нині розробляються (і вже розроблені) автоматичні системи паркування автомобіля, керування його рухом у пробках, є, системи, що здійснюють рух автомобіля дорогами (при дотриманні деяких умов) в автоматичному режимі.

Розглянемо процес паркування автомобіля та алгоритм його реалізації, побудований на основі прийомів нечіткого логічного висновку.

Будемо вважати, що нам необхідно, щоб після закінчення паркування автомобіль опинився в заданому місці з нульовою швидкістю, тобто щоб його фазовим станом виявилася б точка A

фазового простору з координатами $a, b, 0,$ де a, b — координати точки, в якій автомобіль повинен виявитися в результаті паркування, 0 – значення його швидкості в момент закінчення паркування.

Передбачається, що жодних перешкод аналізованого процесу немає. Автомобіль рухається переднім ходом і під'їхати до заданої точки повинен передом. Передбачається, що початковий стан автомобіля (його положення і швидкість) дозволяє здійснити необхідний маневр. Оскільки розглянуті швидкості та можливі кути повороту керма досить малі, то передбачається, що рішення про зміну швидкості та кута повороту керма приймаються незалежно одне від одного. Для простоти будемо виходити з того, що в початковий момент автомобіль розташовувався щодо точки паркування так, як показано на рисунку 2.7.

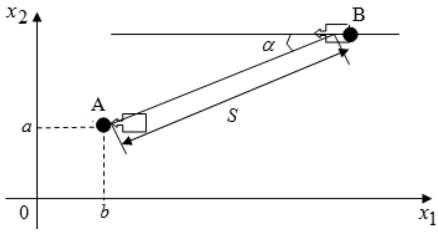


Рисунок 2.7 - Точка паркування та початкове положення автомобіля

Для побудови необхідного алгоритму насамперед введемо необхідні лінгвістичні змінні — три вхідні та дві вихідні.

Вхідні змінні:

s – відстань від автомобіля до точки паркування з термами "нуль", "мала", "середня", "велика". Універсальною множиною, на якій задані нечіткі множини, що формалізують ці терми, є інтервал від нуля до 10 м. Графіки функцій приналежності цих нечітких множин наведено на рисунку 2.8;

α – кут між поточним напрямом руху автомобіля і напрямком на точку паркування з термами «малий», «середній», «великий». Універсальною множиною, на якій задані нечіткі множини, що формалізують ці терми, є інтервал від нуля до 20°. Графіки функцій приналежності цих нечітких множин наведено рисунку 2.9;

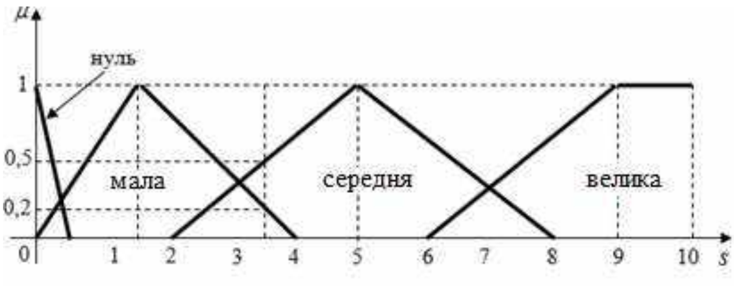


Рисунок 2.8 - Графіки функцій приналежності термів змінної s

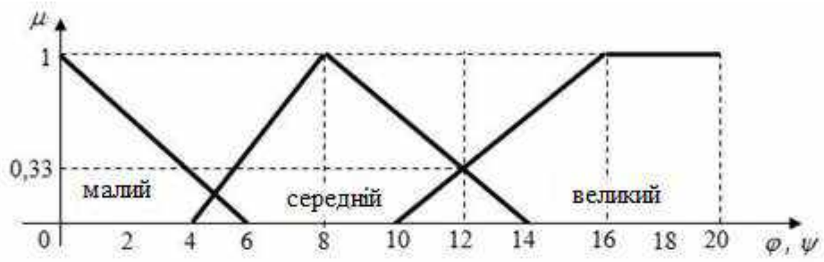


Рисунок 2.9 - Графіки функцій приналежності термів змінних φ та ψ

$v_{вх}$ – поточна швидкість автомобіля з термами "нуль", "мала", "середня", "велика". Універсальною множиною, на якій задані нечіткі множини, що формалізують ці терми, є інтервал від нуля до 5 м/с. Графіки функцій приналежності цих нечітких множин наведено рисунку 2.10.

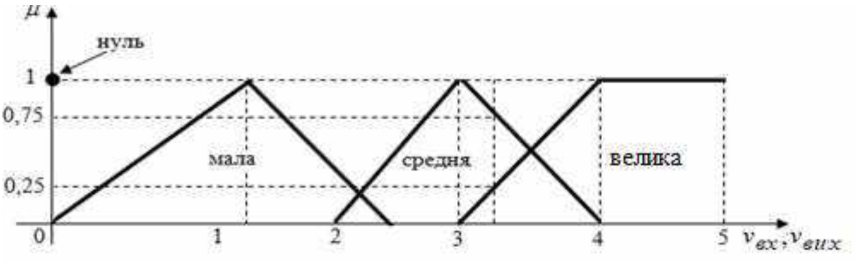


Рисунок 2.10 – Графіки функцій приналежності термів змінних $v_{\text{вх}}$ та $v_{\text{вих}}$

Вихідні змінні:

$v_{\text{вих}}$ – швидкість автомобіля через час t після прийняття чергового управлінського рішення з такими ж термами, як і для $v_{\text{вх}}$;

ψ – кут повороту керма щодо нейтрального положення з термами такими ж, як і у змінної φ.

Управління процесом паркування здійснюється в дискретні моменти часу з інтервалом Δt.

Позначатимемо терми «нуль», «мала», «середня», «велика» лінгвістичною змінною s через A_1, A_2, A_3, A_4 відповідно. Терми «малий», «середній», «великий» лінгвістичної змінної φ позначимо через B_1, B_2, B_3. Терми "нуль", "мала", "середня", "велика" лінгвістичної змінної $v_{\text{вх}}$ – через C_1, C_2, C_3, C_4 відповідно. Терми "нуль", "мала", "середня", "велика" лінгвістичної змінної $v_{\text{вих}}$ – через D_1, D_2, D_3, D_4. Терми "малий", "середній" "великий" лінгвістичної змінної ψ – через E_1, E_2, E_3. Позначати функції приналежності відповідних нечітких множин будемо μ_G, де G – один з перерахованих термів.

Задаємо нечітку базу знань. У попередньому прикладі ми задавали її за допомогою таблиці 2.4, але тепер нам знадобилася б тривимірна таблиця. До того ж, тепер у нас дві вихідні змінні. Тому ми для кожного значення лінгвістичної змінної φ (кут між поточним напрямком руху автомобіля та напрямком на точку паркування) побудуємо свою нечітку базу знань для кожної з вихідних змінних за допомогою звичайної двовимірної таблиці. Таким чином, нечітка база знань для прикладу буде містити по три таблиці для кожної з вихідних лінгвістичних змінних – таблиці 2.9: $B_1 v_{\text{вих}}$, $B_2 v_{\text{вих}}$, $B_3 v_{\text{вих}}$, $B_1 \psi$, $B_2 \psi$, $B_3 \psi$.

Таблиця 2.9 – $B_1 v_{\text{вих}}$. Таблиця нечітких правил для вихідної змінної $v_{\text{вих}}$ (φ =«малий»)

Відстань (s)	Швидкість ($\boldsymbol{v}_{\text{вх}}$)			
	Нуль (C_1)	Мала (C_2)	Середня (C_3)	Велика (C_4)
Нуль (A_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)
Мала (A_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)
Середня (A_3)	Мала (D_2)	Середня (D_3)	Середня (D_3)	Середня (D_3)
Велика (A_4)	Середня (D_3)	Середня (D_3)	Середня (D_3)	Середня (D_3)

Таблиця 2.9 – $B_2 v_{\text{вих}}$. Таблиця нечітких правил для вихідної змінної $v_{\text{вих}}$ (φ = «середній»)

Відстань (s)	Швидкість ($\boldsymbol{v}_{\text{вх}}$)			
	Нуль (C_1)	Мала (C_2)	Середня (C_3)	Велика (C_4)
Нуль (A_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)
Мала (A_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)
Середня (A_3)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Середня (D_3)	Середня (D_3)
Велика (A_4)	Середня (D_3)	Середня (D_3)	Середня (D_3)	Середня (D_3)

Таблиця 2.9 - $B_3 v_{\text{вих}}$. Таблиця нечітких правил для вихідної змінної $v_{\text{вих}}$ (φ =«великий»)

Відстань (s)	Швидкість ($\boldsymbol{v}_{\text{вх}}$)			
	Нуль (C_1)	Мала (C_2)	Середня (C_3)	Велика (C_4)
Нуль (A_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)

Мала (A_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)
Середня (A_3)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)	Мала (D_2)
Велика (A_4)	Середня (D_3)	Середня (D_3)	Середня (D_3)	Середня (D_3)

Таблиця 2.9 – $B_1\psi$. Таблиця нечітких правил для вихідної змінної ψ (φ =«малий»)

Відстань (s)	Швидкість ($\boldsymbol{v}_{\text{вх}}$)			
	Нуль (C_1)	Мала (C_2)	Середня (C_3)	Велика (C_4)
Нуль (A_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)
Мала (A_2)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)
Середня (A_3)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)
Велика (A_4)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)

Таблиця 2.9 – $B_2\psi$. Таблиця нечітких правил для вихідної змінної ψ (φ = «середній»)

Відстань (s)	Швидкість ($\boldsymbol{v}_{\text{вх}}$)			
	Нуль (C_1)	Мала (C_2)	Середня (C_3)	Велика (C_4)
Нуль (A_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)
Мала (A_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)
Середня (A_3)	Середній (E_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)
Велика (A_4)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)

Таблиця 2.9 – $B_3\psi$. Таблиця нечітких правил для вихідної змінної ψ (φ =«великий»)

Відстань (s)	Швидкість ($\boldsymbol{v}_{\text{вх}}$)			
	Нуль (C_1)	Мала (C_2)	Середня (C_3)	Велика (C_4)
Нуль (A_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)	Малий (E_1)
Мала (A_2)	Великий (E_3)	Великий (E_3)	Великий (E_3)	Великий (E_3)

Середня (A_3)	Середній (E_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)
Велика (A_4)	Середній (E_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)	Середній (E_2)

Нечітка множина (нечітке висловлювання), коли лінгвістична змінна s прийняла значення A_i, $i = 1,2,3,4$, лінгвістична змінна φ прийняла значення B_j, $j = 1,2,3$, і лінгвістична змінна $v_{\text{вх}}$ прийняла значення $C_k, k = 1,2,3,4$, будемо позначати F_{ijk}. Через $\mu_{Fij_k}(x, \alpha, \boldsymbol{v})$ позначимо його функцію приналежності, тоді

$$(x, \alpha, \boldsymbol{v}) = \min\{\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(\alpha), \mu_{C_k}(\boldsymbol{v})\}. \quad (2.5)$$

Через $\mu_{D_l}(x, \alpha, \boldsymbol{v})$ $(l = 1,2,3,4)$ позначимо функцію приналежності нечіткої множини – множини наборів значень вхідних змінних, при яких значенням вихідної змінної $v_{\text{вих}}$ терм D_l:

$$\mu_{D_l}(x, \alpha, \boldsymbol{v}) = \max_{s\, =\, x \wedge\, \varphi\, = \alpha\, \wedge\, v_{\text{вх}}\, = v => D_l} \left\{\mu_{F_{ijk}}(x, \alpha, \boldsymbol{v})\right\}. \quad (2.6)$$

Аналогічно

$$\mu_{E_l}(x, \alpha, v) = \max_{s\, =\, x \wedge\, \varphi\, = \alpha\, \wedge\, v_{\text{вх}}\, = v => E_l} \left\{\mu_{F_{ijk}}(x, \alpha, v)\right\}. \quad (2.7)$$

Через $\mu_{ijkl}^{v_{\text{вих}}}(x, \alpha, v, v_1)$ позначимо ступінь істинності нечіткого висловлювання [(значення терма A_i дорівнює x) I (значення терма B_j дорівнює α) I (значення терма C_k дорівнює v) I значення терма D_l дорівнює v_1] , тоді

$$\mu_{ijkl}^{v_{\text{вих}}}(x, \alpha, v, v_1) = \min\left\{\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(\alpha), \mu_{C_k}(v), \mu_{D_l}(v_1)\right\} \quad (2.8)$$

Через $\mu_{ijkl}^{\boldsymbol{\psi}}(x, \alpha, v, \beta)$ позначимо ступінь істинності нечіткого висловлювання [(значення терма A_i дорівнює x) I (значення терма B_j дорівнює α) I (значення терма C_k дорівнює v) I значення терма E_l дорівнює β] , тоді

$$\mu_{ijkl}^{\boldsymbol{\psi}}(x, \alpha, \boldsymbol{v}, \beta) = \min\left\{\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(\alpha), \mu_{C_k}(\boldsymbol{v}), \mu_{E_l}(\beta)\right\}. \quad (2.9)$$

Як приклад знайдемо значення вихідних показників, якщо параметри дорівнюють відповідно

$$x = 3{,}5 \text{ м}, \ \alpha = 12^{\circ}, \ v = 3{,}25 \text{ м/с}.$$

В таблиці 2.10 вказані ступені істинності того, що значеннями вхідних лінгвістичних змінних при x = 3,5 м, α = 12°, v = 3,25 м/с є конкретні терми. Розглядаються тільки ті випадки, коли значення відповідних функцій приналежності більше нуля.

Таблиця 2.10 - Ступінь істинності нечітких висловлювань при $x = 3{,}5 \text{ м}, \alpha = 12°, v = 3{,}25 \text{ м/с}$

Висловлювання	s=A_2	s=A_3	φ=B_2	φ =B_3	$v_{\text{вх}}$=C_3	$v_{\text{вх}}$=C_4
Ступінь істинності	0,2	0,5	0,33	0,33	0,75	0,25

Аналізуючи дані таблиці 2.10, бачимо, що ситуаціями зі ступенем істинності більше за нуль (для зазначених значень параметрів) є ситуації:

$$F_{223}, F_{224}, F_{233}, F_{234}, F_{323}, F_{324}, F_{333}, F_{334}.$$

Значення функцій приналежності $\mu_{F_{ijk}}(s, \varphi, v_{\text{вх}})$ при *x*= 3,5 м, *α* = 12º, *v* = 3,25 м /с вказані в таблиці 2.11.

Таблиця 2.11 – Значення функції приналежності $\mu_{F_{ijk}}$ (3,5; 12,3; 25)

Ситуації	F_{223}	F_{224}	F_{233}	F_{234}	F_{323}	F_{324}	F_{333}	F_{334}
$\mu_{F_{ijk}}$	0,20	0,20	0,20	0,20	0,33	0,25	0,33	0,25

Позначимо функцію приналежності терма D_l, $l = 1{,}2{,}3{,}4$ лінгвістичної змінної $v_{\text{вих}}$ через μ_{D_l} і функцію приналежності терма $E_l, l = 1{,}2{,}3$ лінгвістичної змінної ψ через μ_{E_l}.

Будемо розглядати тільки ті ситуації, в яких при аналізованих значеннях параметрів ступінь істинності відповідного висловлювання більша за нуль.

Для терму D_1таких ситуацій немає.

Для терму D_2 це ситуації $F_{223}, F_{224}, F_{233}, F_{234} F_{333}, F_{334}$.

Для терму D_3 це ситуації F_{323}, F_{324}.

Для терму D_4 таких ситуацій немає.

Для терму E_1 таких ситуацій немає.

Для терму E_2 це ситуації $F_{223}, F_{224}, F_{323} F_{324}, F_{333}, F_{334}$.

Для терму E_3 це ситуації F_{233}, F_{234}.

З урахуванням сказаного, отримуємо, що

μ_{D_1}(3,5; 12; 3,25) = 0,

μ_{D_2} (3,5; 12; 3,25) = 0,33 і це вірно для ситуації F_{333},

μ_{D_3} (3,5; 12; 3,25) = 0,33 і це вірно для ситуації F_{323},

μ_{D_1} (3,5; 12; 3,25) = 0,

μ_{E_1} (3,5; 12, 3.25) = 0,

μ_{E_2} (3,5; 12; 3,25) = 0,33 і це вірно для ситуації F_{323},

μ_{E_3} (3,5; 12; 3,25) = 0,20 і це вірно для ситуацій F_{233} і F_{234}, для визначеності розглядатимемо F_{233}.

Визначимо тепер значення вихідних змінних – значення змінних $v_{\text{вих}}$ і ψ. Знаходити їх значення будемо приблизно, змінюючи значення v змінної $v_{\text{вих}}$ з кроком 0,5 м/с і змінної ψ з кроком 2°. Нагадаємо, що рішення про зміну швидкості та кута повороту керма приймаються незалежно одне від одного.

Почнемо з визначення значення вихідної змінної $v_{\text{вих}}$. Результати обчислень зведені у таблицях 2.12 та 2.13.

Таблиця 2.12 - Значення функцій приналежності $\mu_{D_k}(v)$

	v										
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\mu_{D_2}(v)$	0	0	0	0	0	0,5	1,0	0,5	0	0	0
$\mu_{D_3}(v)$	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1,0	1,0	1,0

Таблиця 2.13 – Значення функцій приналежності $\mu_{ijkl}^{\text{вих}}$(3,5;12;3,25,v_1) та μ_D(3,5;12;3,25,v_1)

	v										
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\mu_{3332}^{\text{вих}}$	0	0	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0	0	0
$\mu_{3233}^{\text{вих}}$	0	0	0	0	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,3
μ_D	0	0	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33

Через $\mu_D(x, \alpha, v, v_1)$ позначимо функцію приналежності нечіткої множини, що формалізує нечітке висловлювання «швидкість $v_{\text{вих}}$ за умови, що x = 3,5 м, α = 12º, v = 3,25 м/с», тоді

$$\mu_D(x, \alpha, v, v_1) = \max_{(i,j,k,l)} \mu_{ijkl}^{v_{\text{вих}}}(x, \alpha, v, v_1)$$

значення цієї функції вказані в нижньому рядку таблиці 2.13, вони дорівнюють максимальному числу з чисел відповідної графи.

Необхідні значення функцій $\mu_{ijkl}^{v_{\text{вих}}}(x, \alpha, v, v_1)$ для D_2 і D_3 (l= 2,3) вказані у двох перших рядках таблиці 2.13.

Аналогічно будуємо функцію

$$\mu_{\text{E}}(x, \alpha, v, \beta) = \max_{(i,j,k,l)} \mu_{ijkl}^{v_{\text{вих}}}(x, \alpha, v, \beta),$$

результати у таблицях 2.14, 2.15.

Таблиця 2.14 – Значення функцій приналежності $\mu_{E_k}(\alpha)$

	α										
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\mu_{E_2}(\alpha)$	0	0	0	0,5	1,0	0,66	0,33	0	0	0	0
$\mu_{E_3}(\alpha)$	0	0	0	0	0	0	0,33	0,66	1,0	1,0	1,0

Дефазифікація отриманих у таблицях 2.13 та 2.15 результатів за методом «центру тяжіння» дає

$$v_{\text{вих}} = \frac{0,33 \cdot (2,5 + 3 + 3,5 + 4 + 4,5 + 5)}{0,33 \cdot 6} = 3,75,$$

$$\psi = \frac{0{,}33 \cdot (6+8+10+12) + 0{,}2 \cdot (14+16+18+20)}{4 \cdot 0{,}33 + 4 \cdot 0.20} = 12{,}02.$$

Таблиця 2.15 - Значення функцій приналежності $\mu_{ijkl}^{\psi}(3{,}5; 12; 3{,}25, \beta)$ і $\mu_{\mathrm{E}}(3{,}5; 12; 3{,}25, \beta)$

	α										
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
μ_{3332}^{ψ}	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,33	0	0	0	0
μ_{3332}^{ψ}	0	0	0	0	0	0	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
μ_{E}	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,33	0,20	0,20	0,20	0,20

Отже, за поточних умов руху, коли x = 3,5 м, α = 12º, υ = 3,25 м/с, слід збільшити швидкість і довести її до 3,75 м/с, кут практично не змінювати.

2.5. Організаційне управління

2.5.1. Оцінка якості розв'язку щодо його економічної та оперативної характеристик

Розглянемо випадок, коли якість рішення оцінюється за допомогою кількох показників. Такі задачі називаються задачами векторної оптимізації.

Як ілюстрацію розглянемо задачу вибору оптимального варіанта для переміщення груп людей у пункт оперативного призначення будь-яким видом транспорту. Ефективність вибору будемо оцінювати з використанням двох показників ефективності — «оперативна ефективність» та «економічна ефективність» (дві вхідні лінгвістичні змінні).

Терми для «оперативної ефективності»: «висока» — B_1, «середня» — B_2, «низька» — B_3. Терми для «економічної ефективності» (тут і далі під нею будемо розуміти фінансові витрати на виконання поставленої задачі): «дуже дорого» — A_1, «дорого» — A_2, «не дуже дорого» — A_3, «дешево» — A_4.

Нехай залежно від прийнятих рішень, витрати можуть змінюватися від мінімального α до максимального значення β. Тоді витрати, пов'язані з конкретним рішенням, дорівнюватимуть $(1 - \delta)\,\alpha\ +\ \delta\beta,$ де δ — деяке число від нуля до одиниці. Множина значень цього δ розглядатимемо як універсальну множину, на якій задані нечіткі множини, що формалізують терми лінгвістичної змінної «економічної ефективності».

Оперативну ефективність характеризуватимемо ймовірністю виконання задачі P. Будемо припускати, що ця ймовірність лежить у межах від 0,5 до 0,98. Тоді універсальною множиною для термів цієї лінгвістичної змінної є відрізок [0,5; 0,98].

Вихідною є лінгвістична змінна "якість рішення", нехай її термами є: "незадовільна" — C_1(2), "задовільна" — C_2(3), "добра" — C_3(4), "відмінна" — C_4(5). Універсальною множиною тут буде відрізок [2; 5].

Для трикутних чисел, що формалізують терми лінгвістичних змінних, у даній задачі значення чисел a, b, c зазначені в таблиці 2.16. Графіки функцій приналежності наведено на рисунках 2.11 – 2.13. Нечітка база знань представлена таблицею 2.17.

Якщо, наприклад, приймається рішення з економічною ефективністю «дорого», а оперативною – «висока», то за таблицею 2.17 виявляємо, що якість цього рішення має нечітку оцінку 3.

Для задачі, що розглядається, побудуємо чітку оцінку для варіанту, при якому змінна δ, що характеризує витрати, має значення 0,6, а ймовірність виконання дорівнює 0,9.

Таблиця 2.16 – Параметри нечітких трикутних чисел, що формалізують терми, що розглядаються

	Терми лінгвістичної змінної «оперативна ефективність»		
	«низька»	«середня»	«висока»
a	0,50	0,58	0,82
b	0,56	0,74	0,98
c	0,72	0,94	0,98
	Терми лінгвістичної змінної «економічна ефективність»		

	«дешево»	«не дуже дорого»	«дорого»	«дуже дорого»
a	0	0,19	0,50	0,75
b	0,19	0,42	0,70	1,00
c	0,44	0,62	0,90	1,00
	Терми лінгвістичної змінної «якість рішення»			
	«незадовільно»	«задовільно»	«добре»	«відмінно»
a	2,00	2,375	2,750	3,75
b	2,00	3,000	4,000	5,00
c	3,00	3,400	5,000	5,00

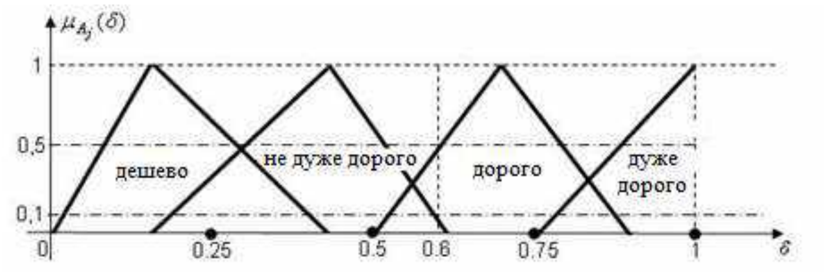


Рисунок 2.11 – Лінгвістична змінна «економічна ефективність»

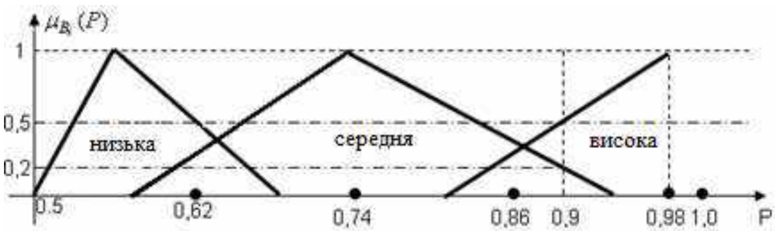


Рисунок 2.12 – Лінгвістична змінна «оперативна ефективність»

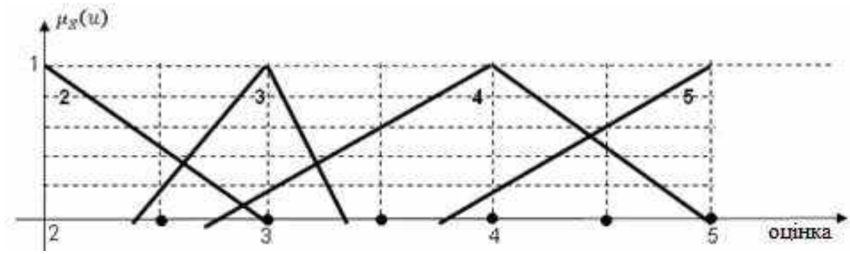


Рисунок 2.13 – Вихідна лінгвістична змінна

Таблиця 2.17 - Нечітка база знань

	Дуже дорого A_1	Дорого A_2	Не дуже дорого A_3	Дешево A_4
Висока B_1	2	3	4	5
Середня B_2	2	2	2	4
Низька B_3	2	2	2	2

У таблиці 2.18 наведено значення функцій приналежності, сполучень (кон'юнкцій) термів вхідних лінгвістичних змінних при $\delta = 0{,}6$ та $\mathrm{P} = 0{,}9$.

Таблиця 2.18 – Ступінь приналежності ситуації $\{\delta, P\} = \{0{,}6, 0{,}9\}$ різним сполученням значень вхідних лінгвістичних змінних

	$\mu_{B_i}(0{,}9)$	Дуже дорого A_1	Дорого A_2	Не дуже дорого A_3	Дешево A_4
1	2	3	4	5	6
$\mu_{A_i}(0{,}6)$	-	0	0,5	0,1	0
Висока B_1	0,5	0	0,5	0,1	0
Середня B_2	0,2	0	0,2	0,1	0
Низька B_3	0	0	0	0	0

Третій рядок та друга графа таблиці 2.18 заповнюються з використанням даних таблиці 2.16 (або на основі графіків функцій приналежності, рисунки 2.11 та 2.12) за формулами

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b], \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & x \in [b,c], \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

для випадку $a < b < c$;

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-c}{b-c}, & x \in (b,c], \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

для випадку $a = b < c$;

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b), \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

для випадку $a < b = c$;

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x = b, \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

для випадку $a = b = c$;

В інших клітинах вказуються значення функції приналежності (істинності) кон'юнкцій відповідних термів вхідних лінгвістичних змінних при зазначених значеннях вхідних лінгвістичних змінних. Ці значення рівні мінімальним із значень у відповідних клітинках третього рядка та другої графи.

Для отримання значення надійності (ступеня впевненості) вихідного терму для варіанта значень вхідних параметрів, що розглядається, треба з вказаних у таблиці 2.18 значень надійності для цього терму взяти максимальне. Результати наведено у таблиці 2.19.

Таблиця 2.19 - Надійність вихідних термів для ситуації $\{\delta, P\} = \{0{,}6, 0{,}9\}$

Вихідні терми	2	3	4	5
Надійність	0,2	0,5	0,1	0

Максимальні додатні значення функцій приналежності вийшли лише для перших трьох термів. Ці значення отримані (дивись таблицю 2.18) для варіантів $B_2 - A_2,\ B_1 - A_2,\ B_1 - A_3$. Позначимо їх відповідно C_{22}, C_{12}, C_{13}.

Визначаємо ступінь приналежності різних значень показника (вихідної змінної) (з кроком 0,5) при сполученнях C_{22}, C_{12}, C_{13} значень параметрів (дивись таблицю 2.20, рядки 2–4). Наприклад, ступінь приналежності числового значення 2 терму показника «задовільна» (C_2) дорівнює нулю (дивись рисунок 2.13); аналогічно ступінь приналежності числового значення 2,5 терму показника «задовільна» дорівнює 0,2 і так далі. У наступних трьох рядках наведено ступені приналежності різних числових значень показника (вихідної змінної) з урахуванням ступеня приналежності відповідного сполучення значень (термів) параметрів (дивись таблицю 2.18).

Таблиця 2.20 - Обчислення ступеня належності різних значень показника, якщо параметри мають значення 0,6 та 0,9

Значення показників	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\mu_{C_{12}}(x)$	0	0,2	1,0	0	0	0	0
$\mu_{C_{13}}(x)$	0	0	0,2	0,6	1,0	0,5	0
$\mu_{C_{22}}(x)$	1,0	0,5	0	0	0	0	0
$e = (\mu_{A_2}(0{,}6) \wedge \mu_{B_1}(0{,}9)) \wedge \mu_{C_{12}}(x)$	0	0,2	0,5	0	0	0	0
$f = (\mu_{A_3}(0{,}6) \wedge \mu_{B_1}(0{,}9)) \wedge \mu_{C_{13}}(x)$	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0
$g = (\mu_{A_2}(0{,}6) \wedge \mu_{B_2}(0{,}9)) \wedge \mu_{C_{22}}(x)$	0,2	0,2	0	0	0	0	0
$e \vee f \vee g$	0,2	0,2	0,5	0,1	0,1	0,1	0

У останньому рядку таблиці 2.20 вказано значення функції приналежності $\mu_{y(X)}(u)$ нечіткої множини «значення показника (вихідної змінної) $y(X)$ при наборі значень параметрів $X = (0{,}6; 0{,}9)$», які дорівнюють максимальним з чисел відповідної графи, тобто ступінь впевненості в тому, що аналізований варіант заслуговує на відповідну оцінку.

Для отримання остаточної оцінки розглянемо два підходи.

В першому випадку у якості оцінки використовується «центр тяжіння», тобто відношення суми добутків елементів першого рядка таблиці 2.20 на відповідні елементи її останнього рядка до суми елементів його останнього рядка. Для нашої задачі отримуємо

$$\frac{2\cdot 0{,}2 + 2{,}5\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}5 + 3{,}5\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}1 + 4{,}5\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0}{0{,}2+0{,}2+0{,}5+0{,}1+0{,}1+0} = 3.$$

Інший підхід пов'язаний з вибором оцінки, ступінь впевненості щодо якої є максимальною. У нас це теж трійка (задовільно).

2.5.2. Вибір оптимального маршруту доставки вантажів при нечітко заданих умовах руху

Автомобільним транспортом у країні перевозиться близько 85% всього обсягу вантажу. Однією з найважливіших задач під час доставки вантажів є вибір маршруту.

Отже, є деяка сукупність маршрутів, властивості яких характеризуються низкою параметрів (вхідних змінних). Відомі значення кожного з цих параметрів для кожного маршруту. Якість маршруту описується деяким показником (вихідною змінною). Потрібно знайти маршрут, для якого значення вихідної змінної є мінімальним.

Метод вирішення цієї задачі полягає в наступному.

Використовуючи підхід, який базується на ідеях нечіткого логічного висновку, викладених Мамдані, для кожного з маршрутів, що розглядаються, за заданими значеннями вхідних змінних визначається значення вихідної змінної. З отриманих значень вибирається мінімальне, відповідний маршрут визнається найкращим.

Розглянемо задачу щодо вибору найкращого за критерієм «витрата пального» маршруту доставки вантажів для ситуації, що часто зустрічається на практиці, коли залежність значень критерію від умови руху (відстань і тривалість руху) визначена неточно або задана нечітко.

Приклад 2.4. З трьох наявних маршрутів, що пов'язують два задані пункти, потрібно вибрати найкращий для організації перевезень вантажів транспортним засобом.

Дані про ці маршрути:

- відстань дорівнює відповідно 52, 60 і 45 км;
- тривалість руху – 52, 47 та 70 хвилин.

Якість маршруту будемо описувати лінгвістичною змінною m — «витрата пального» (вихідна змінна) з термами: «маленька» $-M_1$, «середня» $-M_2$, «велика» $-M_3$, «дуже велика» $-M_4$ (таблиця 2.21).

Таблиця 2.21 - Значення параметрів нечітких чисел

Лінгвістична змінна	Терми	Параметри		
		a	b	c
Відстань (x)	Невелика	35	45	55
	Середня	45	65	75
	Велика	65	85	90
Тривалість руху (t)	Швидка	35	50	65
	Середня	45	70	80
	Велика	65	100	120
Витрата пального (m)	Маленька	20	30	35
	Середня	30	35	45
	Велика	40	45	50
	Дуже велика	45	55	65

Передбачається, що на витрату пального здебільшого впливають два параметри (вхідні змінні), які формалізуються двома лінгвістичними змінними:

s – "відстань" з термами: "невелика" - S_1, "середня" - S_2, "велика" - S_3.

t - "тривалість руху" з термами: "швидка" - T_1, "середня" - T_2, "велика" - T_3.

Усі перелічені терми формалізуються нечіткими множинами – трикутними нечіткими числами. Параметри a, b, c нечітких трикутних чисел, що формалізують терми зазначених лінгвістичних змінних, приведені в таблиці 2.21.

Універсальною множиною для термів змінної «витрата пального» є відрізок [20, 65], одиницею виміру – літр; для термів змінної "відстань" – відрізок [35, 90], одиницею вимірювання – кілометр; для термів змінної "тривалість руху" – відрізок [35, 120], одиницею вимірювання – хвилина.

Функції приналежності нечітких чисел, що розглядаються, наведені в таблиці 2.22.

Графіки функцій приналежності нечітких множин, що формалізують терми лінгвістичних змінних, представлені на рисунках 2.14–2.16.

Таблиця 2.22 - Функції приналежності

Лінгвістична змінна	Терми	Інтервал	
		$x \in (a, b)$	$x \in (b, c)$
Відстань (x)	Невелика	(*x* – 35)/10	(55 - *x*) / 10
	Середня	(*x* – 45)/20	(75 - *x*) / 10
	Велика	(*x* – 65)/20	(90 - *x*) / 5
Тривалість руху (t)	Швидка	(*x* – 35)/15	(65 - *x*) / 15
	Середня	(*x* – 45)/25	(80 - *x*) / 10
	Велика	(*x* – 65)/35	(120 - *x*) / 20
Витрата пального (m)	Маленька	(*x* – 20)/10	(35 - *x*) / 5
	Середня	(*x* – 30)/5	(45 - *x*) / 10
	Велика	(*x* – 40)/5	(50 - *x*) / 5
	Дуже велика	(*x* – 45)/10	(65 - *x*) / 10

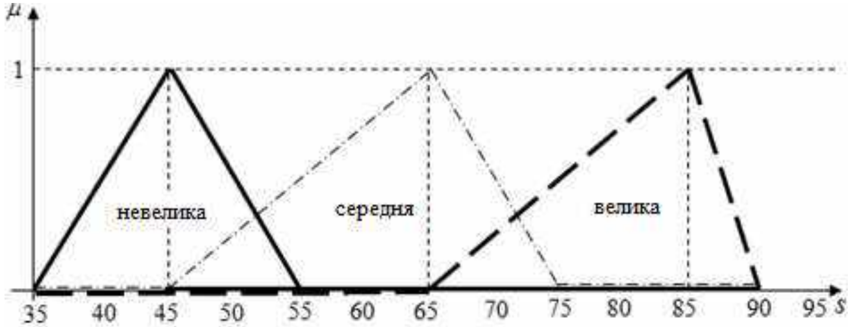


Рисунок 2.14 - Функції приналежності термів змінної «відстань»

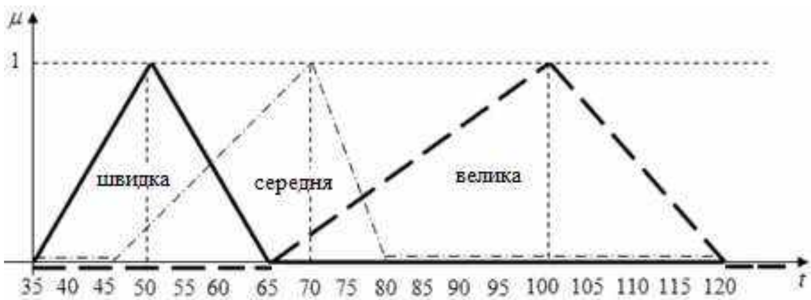


Рисунок 2.15 - Функції приналежності термів змінної «тривалість руху»

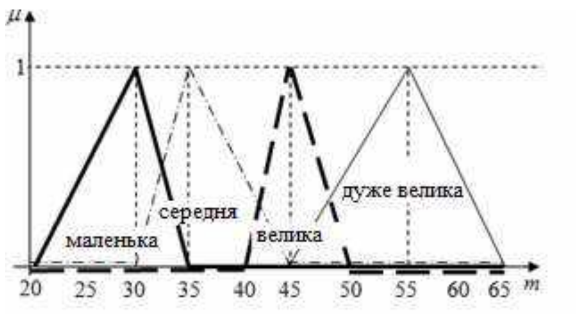


Рисунок 2.16 - Функції приналежності термів змінної «витрата пального»

В таблиці 2.23 представлена база знань, яка дозволяє за сполученням термів, що є значеннями вхідних змінних, визначити терм – значення вихідної змінної.

Якщо, наприклад, розглядається маршрут з відстанню «невелика» та тривалістю руху «велика», то за таблицею 2.23 знаходимо, що витрата пального для нього буде «середньою».

Таблиця 2.23 - База знань (витрата пального в залежності від відстані та часу руху)

Відстань	Тривалість руху		
	Швидка	Середня	Велика
Невелика	Маленька (M_1)	Маленька (M_1)	Середня (M_2)
Середня	Середня (M_2)	Середня (M_2)	Велика (M_3)
Велика	Середня (M_2)	Велика (M_3)	Дуже велика (M_4)

Позначимо через:

$\mu_{S_i}(s), i = 1,2,3$, функцію приналежності терми S_i;

$\mu_{T_i}(t), i = 1,2,3$, функцію приналежності терми T_i;

$\mu_{M_i}(m), i = 1,2,3,4$, функцію приналежності терми M_i.

Розглянемо перший маршрут, для нього відстань дорівнює 52 км, тривалість руху — 52 хвилини. Поєднання різних термів вхідних лінгвістичних змінних при $s = 52$ та $t = 52$ мають значення функції приналежності, зазначені в таблиці 2.24.

Таблиця 2.24 - Ступінь приналежності ситуації $\{s, t\} = \{52,52\}$ різним сполученням значень вхідних змінних

	$\mu_{S_i}(52)$	Швидко	Середня	Велика
$\mu_{T_i}(52)$	-	0,87	0,28	0
Невелика	0,30	0,30	0,28	0
Середня	0,35	0,35	0,28	0
Велика	0	0	0	0

Другий рядок та друга графа таблиці 2.24 заповнюються за відповідними формулами з таблиці 2.22 (або на основі графіків функцій приналежності – рисунки 2.14, 2.15).

При заповненні другої графи таблиці 2.24 при $s = 52$ по таблиці 2.21 знаходимо, що ця відстань, наприклад, відповідає терму «середнє», тобто S_2, при цьому вона менша за моду цього терму, тобто $52 \in (a, b)$. З таблиці 2.22 бачимо, що у цьому випадку $\mu_{S_2}(x) = (x - 45)/20$, тоді $\mu_{S_2}(52) = (52 - 45)/20$. Аналогічно значення функцій приналежності інших термів змінної «відстань» при $s = 52$ дорівнюють $\mu_{S_1}(x) = 0{,}30$, $\mu_{S_3}(x) = 0$.

При заповненні другого рядка таблиці 2.24 при $t = 52$ за таблицею 2.21 знаходимо, що ця тривалість відповідає термам «швидка» та «середня», тобто термам T_1 і T_2, при цьому вона більша за моду терму T_1 (приналежить (b, c)) і менше моди терму T_2 (приналежить (a, b)). Використовуючи таблицю 2.22, знаходимо, що $\mu_{T_1}(52) = (65 - 52)/15 \approx 0{,}87$, $\mu_{T_2}(52) = (52 - 45)/25 \approx 0{,}28$.

Вочевидь, що $\mu_{T_3}(52) = 0$.

У інших клітинах таблиці 2.24 вказуються ступеня істинності кон'юнкцій відповідних термів вхідних змінних при зазначених значеннях вхідних змінних. Ці значення дорівнюють мінімальним із значень у відповідних клітинах другого рядка та другої графи. Наприклад, ступінь істинності кон'юнкції термів S_1 і T_2, тобто нечіткого висловлювання («відстань» = «невелика» І «тривалість руху» = «середня»), за умови, що $s = 52$ і $t = 52$ дорівнює

$$\min\{\mu_{S_1}(52), \mu_{T_2}(52)\} = 0{,}28.$$

Для отримання значення ступеня істинності вихідного терму для зазначеного варіанта значення вхідних змінних треба із зазначених у таблиці 2.24 значень ступеня істинності для цього терму взяти максимальне. Так, наприклад, вислів «вихідним термом є «маленький»» є диз'юнкцією висловлювань «вхідними термами є S_1 І T_1» І «вхідними термами є S_1 І T_2».

У таблиці 2.24 терму «маленька» змінної «витрата пального» відповідають дві ситуації $S_1 - T_1$ і $S_1 – T_2$ і відповідно два значення — 0,30 і 0,28, більше з них 0,30. Отже, ступінь істинності терми M_1 («маленька») вихідний змінної для даного варіанта значень параметрів дорівнює 0,30, що відповідає ситуації $S_1 - T_1$.

Терму «середня» теж відповідають дві ситуації: $S_2 - T_1$ і $S_2 – T_2$ і відповідно значення 0,35 і 0,28, більше їх 0,35. Отже, ступінь істинності терми M_2 («середня») дорівнює 0,35, що відповідає ситуації $S_2 - T_1$.

Визначаємо ступінь приналежності різних значень вихідної змінної (з кроком 5 л) при сполученнях $S_1 - T_1$ і $S_2 – T_1$ значень вхідних змінних, тобто при термах вихідної змінної, які дорівнюють M_1 і M_2 (дивись таблицю 2.25, другий і третій рядки). Значення, що цікавлять нас, можна отримати, використовуючи таблицю 2.22 або рисунок 2.16.

Таблиця 2.25 - Ступінь приналежності різних значень вихідної змінної, якщо вхідні змінні мають значення 0,6 та 0,9

m	20	25	30	35
$\mu_{M_1}(m)$	0	0,50	1,00	0
$\mu_{M_2}(m)$	0	0	0	1,00
$\min\{\mu_{S_1}(52), \mu_{T_1}(52), \mu_{M_1}(m)\}$	0	0,30	0,30	0
$\min\{\mu_{S_2}(52), \mu_{T_2}(52), \mu_{M_2}(m)\}$	0	0	0	0,35
$\mu(m, 52{,}52)$	0	0,30	0,30	0,35

Закінчення таблиці 2.25

40	45	50	55	60	65
0	0	0	0	0	0
0,50	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0,35	0	0	0	0	0
0,35	0	0	0	0	0

Зауважимо, що вислів «витрата пального при заданих умовах дорівнює m_0» еквівалентний висловлюванню [«лінгвістична змінна «витрата пального» прийняла за заданих умов значення «маленька» (M_1) І витрата склала m_0 літрів» АБО «лінгвістична змінна «витрата пального» прийняла при заданих умовах значення «середня» (M_2) І витрата склала m_0 літрів»]. Тоді ступінь істинності $\mu(m_0, 52{,}52)$ нечіткого висловлювання «витрата пального за заданих умов дорівнює m_0» визначається рівністю

$$\mu(m_0, 52{,}52) = \max\{\min\{\mu_{S_1}(52), \mu_{T_1}(52), \mu_{M_1}(m_0)\}, \min\{\mu_{S_2}(52), \mu_{T_2}(52), \mu_{M_2}(m_0)\}\}. \qquad (2.10)$$

В першому рядку таблиці 2.25 вказано можливі витрати пального з кроком 5 л.

У другому та третьому — ступені приналежності цих значень терму M_1 («маленька») та терму M_2 («середня») відповідно. Наприклад, ступінь приналежності числового значення 20 терму M_1 дорівнює нулю (дивись таблицю 2.22 або рисунок 2.16); аналогічно ступінь приналежності значення 25 терму M_1 дорівнює 0,5.

В останньому рядку таблиці 2.25 вказано значення функції приналежності $\mu_M(m)$ нечіткої множини «значення вихідної змінної при наборі значень вхідних змінних (52; 52)» (максимальне з чисел четвертого і п'ятого рядків відповідної графи таблиці), тобто ступінь впевненості в тому, що аналізований варіант заслуговує на відповідну оцінку.

Для отримання остаточної оцінки використовуємо «центр тяжіння», тобто відношення суми добутків елементів першого рядка таблиці 2.25 на відповідні елементи останнього рядка до суми елементів останнього рядка. Для нашого прикладу отримуємо:

$$\frac{0\cdot 20 + 0{,}3\cdot 25 + 0{,}3\cdot 30 + 0{,}35\cdot 35 + 0{,}35\cdot 40}{0 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}35 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0} +$$

$$+\frac{0\cdot 45+0\cdot 50+0\cdot 55+0\cdot 60+0\cdot 65}{0+0{,}3+0{,}3+0{,}35+0{,}35+0+0+0+0+0}=32{,}88\text{ л.}$$

Аналогічні розрахунки для другого маршруту дають 37 л, для третього — 29,78 л.

Отже, оптимальним щодо витрати пального є третій маршрут.

ВИСНОВКИ

Стрімкий розвиток засобів обчислювальної техніки, що відбувається нині, відкриває дедалі нові можливості для підвищення оперативності та обґрунтованості рішень, які приймаються у процесі управління в рамках складних організаційних систем.

У посібнику було розглянуто проблему застосування методів знаходження оптимальних розв’язків у задачах дослідження операцій, коли рішення доводиться приймати за недостатньо чітко визначених умов. У даний час ці розділи математики, які засновані на використанні нечіткої логіки, набувають все більшої популярності. Підходи до вирішення зазначеної проблеми ілюструються на низці прикладів.

Володіння методами розділів математики, заснованих на використанні нечіткої логіки є необхідною складовою освіти різних фахівців. Оскільки такий підхід є зручною мовою для формулювання проблеми та ефективним інструментом для вирішення завдань, що відносяться до широкого кола наукових та управлінських проблем, таких як проектування складних систем, управління великими організаційними та технічними системами, завдання забезпечення безпеки життєдіяльності, економіки, соціології, інформатики тощо.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування. / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко – Київ, 2001.

2. Вовк В.М., Дрогомирецька З.Б. Основи системного аналізу. Навч. посібник. / В.М. Вовк., З.Б. Дрогомирецька – Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 248с.

3. Глушик М.М., Копич І.М., Пенцак О.С., Сороківський В.М. Математичне програмування: Навч. пос. / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак – Львів: «Новий світ-2000», 2006. – 216 с.

4. Дацко М.В., Карбовник М.М. Дослідження операцій. Навч. пос. / М.В. Дацко, М.М. Карбовник – Львів, 2009. – 288 с.

5. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О.Т. Іващука – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.

6. Катренко А.В. Дослідження операцій: Підручник. / А.В. Катренко – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 549 с.

7. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. пос. / О.О. Карагодова, В.Р. Кігель, В.Д. Рожок – К.: ЦУЛ, 2007. – 256 с.

8. Крутовецький В.Я. Дослідження операцій. Навч. посібник. / В.Я. Крутовецький – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264 с.

9. Лавренчук В.П., Букатар М.І., Готинчан Т.І., Пасічник Г.С. Математичні методи дослідження операцій: Навч. пос. / В.П. Лавренчук, М.І. Букатар, Т.І. Готинчан – Чернівці, 2005. – 360 с.

10. Федоренко І.К., Черняк О.І. Дослідження операцій в економіці: Підручник / І.К. Федоренко, О.І. Черняк – К.: Знання, 2007. – 558 с.

11. Чемерис А. Методи оптимізації в економіці: Навчальний посібник. / А. Чемерис, Р. Юринець, О. Мищишин. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 152 с.

12. Mamdani, E. H. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller / E. H. Mamdani, S. Assilian // International Journal of Man-Machine Studies. — 1975. — Vol. 7. — P. 1–13.

13. Altrock, C. Fuzzy logic. Bd. 3 : Werkzeuge. — Munchen, BRD : R. Oldenburg Verlag GmbH. — 1995. — 287 s.

14. Becker, M. Verfahren zur bedarfsgesteuerten Abtauerkennung in Kalteanlagen unter Einsatz eines Fuzzy Entscheiders / M. Becker, S. von Recum // Proc. 39 Internationales Wissenschaftliches Kolloquium. — Ilmenau, BRD, 1994. — S. 316–323.

15. Hakata, T. Fuzzy control of cooling system utilizing heat storage / T. Hakata, J. Masuda // Proc. Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. — Iizuka, Japan, 1990. — P. 77–80.

16. Tobi, T. A practical application of fuzzy control for an airconditioning system / T. Tobi, T. Hanafusa // International Journal of Approximate Reasoning. — 1991. — № 5. — P. 331–348.

Наукове видання

Савченко Ніна Валеріївна,
Кузніченко Володимир Михайлович

НЕЧІТКІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ

Навчальний посібник

ISBN 617-8130-55-8

9 786178 130558

Редакція авторська

Підписано до друку 18.06.2024.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Папір офсетний. Гарнітура Arial.
Ум. друк. арк. 6,85. Наклад 20 прим.

Видавець: Мірошниченко Олег Анатолійович
61002, м. Харків, вул. Дарвіна, 16, кв. 25.
Свідоцтво Державного комітету телебачення і радіомовлення України
серія ДК № 5818 від 28.11.2017 р.
ел. пошта: merash@i.ua

Надруковано у друкарні «Impress»
61002, Харків, вул. Пушкінська, 56
Тел.: (057) 714-42-11, 752-08-38
www.impress.biz.ua