

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

С.Ю. Нестеренко

**ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ РАКЕТНИХ СИСТЕМ, ПРИЗНАЧЕНИХ
ДЛЯ ВИВЕДЕННЯ НА ОРБИТУ І ЗДІЙСНЕННЯ ІМПУЛЬСНИХ
МІЖОРБИТАЛЬНИХ МАНЕВРІВ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ**

Навчальний посібник до курсового й дипломного проектування

Харків "ХАІ" 2009

УДК 629.78.015 (075.8)

Нестеренко С.Ю. Оцінка параметрів ракетних систем, призначених для виведення на орбіту і здійснення імпульсних міжорбітальних маневрів космічних апаратів: навч. посібник до курс. і дипл. проектування / С.Ю. Нестеренко. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2009. – 36 с.

Розглянуто типові космічні маневри з двигунами великої тяги при виведенні штучного супутника на навколопланетну орбіту, а також при імпульсних міжорбітальних маневрах. Наведено необхідний мінімум понять і закономірностей з галузі небесної механіки й космонавтики.

Для студентів, що вивчають курси "Вступ до фаху", "Загальний устрій плазмових прискорювачів та енергоустановок", "Основи теорії й функціонування плазмових прискорювачів".

Іл. 10. Табл. 1. Бібліогр.: 4 назви

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. М. Борщов,
канд. техн. наук Є.Я. Сінельников

ЗМІСТ

Список умовних позначень, індексів і скорочень.....	4
Передмова.....	6
1 Основні поняття з галузі ракетно-космічної техніки.....	7
1.1 Механіка тіла зі змінною масою. Формула Ціолковського.....	7
1.2 Основні характеристики ракетного руху й рушійної установки.....	8
1.3 Рівняння руху космічного апарата.....	9
2 Незбурений кеплерівський рух.....	11
2.1 Обмежена задача двох тіл у небесній механіці.....	11
2.2 Штучний супутник.....	20
3 Маневри з великою тягою.....	21
3.1 Імпульсний маневр.....	21
3.2 Траєкторії Гомана.....	23
4 Запуск штучного супутника на орбіту.....	24
4.1 Маневр "гравітаційний розворот".....	24
4.2 Запуск на базову колову орбіту без урахування втрат на атмосферний опір.....	25
4.3 Запуск на еліптичну орбіту.....	27
4.4 Характеристична швидкість запуску апарата з урахуванням обертання небесного тіла та втрат на атмосферний опір.....	28
5 Багатоступінчасті ракети.....	30
Бібліографічний список.....	35

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ІНДЕКСІВ І СКОРОЧЕНЬ

- a – велика піввісь, м;
 A – апоцентр, м;
 b – мала піввісь, м;
 C_x – коефіцієнт лобового опору;
 E – повна енергія одиниці маси, $\text{м}^2/\text{с}^2$;
 E – ексцентрична аномалія;
 \vec{F} – сила, Н;
 \vec{g} – гравітаційне прискорення, $\text{м}/\text{с}^2$;
 H – товщина шару однорідної атмосфери, м;
 i – орт;
 I_s – питомий імпульс, м/с;
 K – гравітаційний параметр, $\text{м}^3/\text{с}^2$;
 m, M – маса, кг;
 \dot{m} – секундна масова витрата, кг/с;
 p – фокальний параметр, м;
 P – перицентр, м;
 Q – робота над одиницею маси, $\text{м}^2/\text{с}^2$;
 r, R – радіус, м;
 \vec{r} – радіус-вектор, м;
 s – конструкційний параметр;
 S – площа, м^2 ;
 S_m – площа міделя, м^2 ;
 t – час, с;
 T – період обертання, с;
 t_p – час проходження перицентра, с;
 U – потенційна енергія одиниці маси, $\text{м}^2/\text{с}^2$;
 \vec{V} – швидкість, м/с;
 V_{ch} – характеристична швидкість, м/с;
 \vec{w} – прискорення, $\text{м}/\text{с}^2$;
 Z – число Ціолковського;
 α – кут підйому траєкторії;
 $\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$ – гравітаційна стала;
 ε – відносний ексцентриситет;
 η_b – балістичний ККД;
 ϑ – дійсна аномалія;
 $\vec{\mu}$ – момент кількості руху одиниці маси, $\text{м}^2/\text{с}$;
 ρ – щільність, $\text{кг}/\text{м}^3$;
 τ – середня аномалія;

φ – азимут (полярний кут);
 φ_p – аргумент перицентра;
 ω, Ω – частота, s^{-1} ;
КВ – корисний вантаж;
РКС – ракетно-космічна система;
РН – ракета-носій;
РР – робоча речовина;
РРД – рідинний ракетний двигун.

ПЕРЕДМОВА

Характеристики ракетно-космічної системи (РКС), призначеної для вирішення тієї або іншої задачі космонавтики, природно пов'язані з масштабами конкретного завдання. В усіх випадках мова йде про аналіз руху апарата під дією сили тяжіння, тяги двигунів, атмосферного опору й інших чинників. У **задачах балістики**, де необхідним є точне наведення на ціль або виведення космічного об'єкта на задану орбіту, використовується досить складний математичний апарат, що потребує застосування обчислювальних засобів на всіх етапах.

Метою даного посібника є **вирішення проблеми оптимізації РКС**, для чого досить знати необхідні змінення швидкості або енергії космічного об'єкта, що дозволяє використати спрощені методи оцінювання з обов'язковим урахуванням певних характеристик РКС, перш за все – їх рушійних установок.

Серед космічних операцій є одна, яка неодмінно потребує використання рушійної установки з тягою, що перевищує силу тяжіння, – операція виведення супутника на орбіту небесного тіла. Після вирішення цього мінімального завдання необхідність високої тяги двигунів стає менш принциповою, тому що ту саму дію може бути здійснено або завдяки короткочасній роботі двигунів з порівняно великою тягою, або в результаті тривалої роботи двигунів малої тяги. За наявності тяги, що є більшою або збігається з силою тяжіння, всі маневри, крім виведення на орбіту, виконуються за час і на відстанях, на яких потенціальна енергія апарата в полі тяжіння змінюється мало, і такі маневри можна розглядати як імпульсні з урахуванням тільки тяги двигунів.

У роботі викладено методи аналізу імпульсних маневрів космічних апаратів і маневру виведення їх на орбіту на рівні точності, достатньому для визначення характеристичних швидкостей операцій, а також вимог до РКС, що здійснюють ці операції. Крім того, наведено мінімальний обсяг понять і уявлень з галузі небесної механіки, необхідний для фахівців ракетно-космічного напрямку.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ З ГАЛУЗІ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ

1.1 Механіка тіла зі змінною масою. Формула Ціолковського

Реактивний рух, у тому числі ракетний, здійснюється у результаті відкидання частини маси, **робочої речовини** (РР) від літального апарата. При цьому маса апарата відповідно зменшується. Розглянемо задачу одновимірного руху тіла змінної маси у **вільному просторі** за відсутності дії сил, крім реактивної. Рух буде одновимірним, якщо напрямок реактивного прискорення збігається з напрямком швидкості. Отже, від тіла з початковою масою m і швидкістю V , відкинуто в напрямку, протилежному напрямку швидкості, нескінченно малу масу $|dm|$, кінцева швидкість якої дорівнює V_{dm} . Нескінченно мале змінення швидкості апарата dV масою $m - |dm|$, що залишилася, можна визначити із закону збереження імпульсу:

$$(m - |dm|)(V + dV) + V_{dm}|dm| = mV. \quad (1.1)$$

Нехтуючи добутком малих величин $|dm| dV$, можемо одержати

$$m dV = (V - V_{dm})|dm|, \quad (1.2)$$

або

$$m dV = V_e |dm|, \quad (1.3)$$

де V_e – **швидкість витікання** (швидкість відкинутої маси відносно апарата – **точніше див. підрозд. 1.2**);

$$V_e = V - V_{dm}. \quad (1.4)$$

У такому випадку реактивна тяга

$$F_t = m \frac{dV}{dt} = V_e \frac{|dm|}{dt} = \dot{m} V_e, \quad (1.5)$$

де F_t – тяга двигуна, Н;

\dot{m} – секундна масова витрата РР, кг/с;

$$\dot{m} = \frac{|dm|}{dt} = -\frac{dm}{dt}. \quad (1.6)$$

З рівнянь (1.5) і (1.6) можна отримати

$$m \frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt} V_e \quad (1.7)$$

або

$$\frac{dV}{V_e} = -\frac{dm}{m}. \quad (1.8)$$

Розв'язавши рівняння (1.8), одержимо

$$\frac{\Delta V}{V_e} = \ln \frac{m_s}{m_f}, \quad \frac{m_s}{m_f} = e^{\Delta V / V_e}, \quad (1.9)$$

де ΔV – змінення швидкості апарата;

m_s, m_f – стартова (початкова) й кінцева маси апарата.

Вираз (1.9) називають **формулою Ціолковського**, а число Z – **числом Ціолковського**:

$$\frac{m_s}{m_f} = Z. \quad (1.10)$$

1.2 Основні характеристики ракетного руху й рушійної установки

Розглянута у підрозд. 1.1 задача є ідеалізованою у двох аспектах.

По-перше, у будь-якому реальному реактивному літальному апараті різні частини маси відкидаються з різною швидкістю. При цьому у деяких реактивних (наприклад, повітряно-реактивних) двигунах у створенні тяги бере участь не тільки маса, що витрачається з борту апарата, але й узята з навколишнього середовища. Ця частина масової витрати не бере участі в зміненні маси апарата.

На основі рівняння (1.5) можна уточнити вираз для визначення реактивної тяги

$$F_t = \sum_n \dot{m}_n V_{en}, \quad (1.11)$$

де індексом n позначено всі складові масової витрати, що **використані у створенні тяги**.

Сумарна секундна витрата РР

$$\dot{m} = \sum_k \dot{m}_k, \quad (1.12)$$

де індексом k позначено всі складові масової витрати **з борту** апарата.

Користуючись рівняннями (1.11) і (1.12), можна записати

$$F_t = \dot{m} I_s, \quad \dot{m} = \frac{F_t}{I_s}, \quad (1.13)$$

де I_s – **питомий імпульс** двигуна;

$$I_s = \frac{\sum_n \dot{m}_n V_{en}}{\sum_k \dot{m}_k}. \quad (1.14)$$

Таким чином, основним економічним показником реактивного двигуна є питомий імпульс – відношення тяги двигуна до секундної витрати маси робочої речовини.

По-друге, у підрозд. 1.1 рух апарата розглянуто тільки під дією тяги двигуна. Швидкість, якої при цьому набув би апарат, називають **ідеальною**, або **характеристичною швидкістю**

$$m \frac{dV_{ch}}{dt} = |\vec{F}_t|. \quad (1.15)$$

Формулу Ціолковського (1.9) у термінології **питомого імпульсу** й **характеристичної швидкості** можна записати так:

$$\frac{V_{ch}}{I_s} = \ln \frac{m_s}{m_f}, \quad \frac{m_s}{m_f} = e^{V_{ch} / I_s}. \quad (1.16)$$

1.3 Рівняння руху космічного апарата

У попередньому підрозділі показано, що з одного боку **характеристична швидкість відображає** можливості **рушійної установки з урахуванням наявного на борту запасу РР**. З іншого боку, **характеристична швидкість визначає потреби для здійснення певного маневру**. Якщо подати рівнодіючу всіх сил як суму тяги двигунів \vec{F}_t , сферичної складової сили тяжіння **головного центра** \vec{F}_g та інших (збурюючих) сил \vec{F}_Δ , рівняння руху апарата можна записати так:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_t + \vec{F}_g + \vec{F}_\Delta. \quad (1.17)$$

Сила \vec{F}_Δ може складатися, наприклад, з сили атмосферного опору, збурюючої дії інших тіл тяжіння, несферичної складової тяжіння головного центра. З урахуванням закону **всесвітнього тяжіння** (див. розд. 2) з рівняння (1.17) можна записати

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = i_t \frac{dV_{ch}}{dt} + \frac{K\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{F}_\Delta}{m}, \quad (1.18)$$

де i_t – одиничний вектор у напрямку тяги.

Таким чином, за величиною характеристичної швидкості можна оцінювати **потреби для здійснення того або іншого маневру** залежно від швидкості, яку необхідно надати ракетному апарату, і зовнішніх сил, які слід подолати.

Помноживши всі доданки (1.18) скалярно на величину змінення $d\vec{r}$ координати

$$d\vec{r} = \vec{V} dt, \quad (1.19)$$

одержимо

$$V dV = V \cos \alpha_t dV_{ch} - \frac{K dr}{r^2} + \frac{\vec{F}_\Delta}{m} \cdot d\vec{r}, \quad (1.20)$$

де α_t – кут між напрямками швидкості й тяги.

Результатом інтегрування рівняння (1.20) є **закон збереження енергії в реактивному русі**:

$$E - Q_t - Q_\Delta = \text{const}, \quad (1.21)$$

де E – повна енергія одиниці маси апарата;

Q_t і Q_Δ – робота над одиницею маси сили тяги й збурюючих сил;

$$E = \frac{V^2}{2} - \frac{K}{r}, \quad (1.22)$$

$$Q_t = \int V \cos \alpha_t dV_{ch}, \quad (1.23)$$

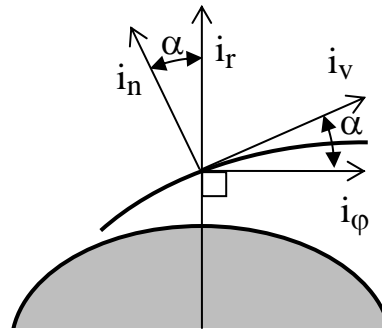
$$Q_\Delta = \int \frac{\vec{F}_\Delta}{m} \cdot d\vec{r}. \quad (1.24)$$

Перший і другий доданки справа у рівнянні (1.22) – це кінетична й потенціальна енергії одиниці маси. Вираз (1.23) свідчить, що робота двигуна є максимальною при $\alpha_t = 0$ і тим більшою, чим вище швидкість апарата. Таким чином, маневри змінення орбіти здійснюються з найменшими витратами характеристичної швидкості в найближчих до центра тяжіння точках вихідної орбіти (де швидкість найбільша) та при паралельних напрямках швидкості й тяги.

Опис такого маневру зручніше робити у так званій **польотній (курсівій) системі координат**, де базову вісь i_v у будь-якій точці спрямовано паралельно напрямку швидкості (рис. 1.1) – **тангенціальному** напрямку.

Поперечно тангенціальному спрямовано орт **нормального** напрямку i_n . Швидкість апарата в польотній системі має тільки одну проекцію – тангенціальну:

$$\vec{V} = V i_v. \quad (1.25)$$



Гравітаційне прискорення в загальному випадку має дві проекції

Рисунок 1.1 – Курсові координати

$$\vec{g} = -\frac{K}{r^2}(i_t \sin \alpha + i_n \cos \alpha). \quad (1.26)$$

Змінення напрямків тангенціального й нормального ортів при русі апарата відбувається аналогічно зміненню напрямків радіального і азимутального ортів у полярних координатах

$$di_v = i_n d\alpha, \quad di_n = -i_v d\alpha. \quad (1.27)$$

У цьому випадку рівняння руху апарата (1.20) у польотній системі координат можна у проекціях записати так:

$$\frac{dV}{dt} = w_{tv} - \frac{K}{r^2} \sin \alpha, \quad (1.28)$$

$$V \frac{d\alpha}{dt} = w_{tn} + \left(\frac{V^2}{r} - \frac{K}{r^2} \right) \cos \alpha, \quad (1.29)$$

$$\frac{dr}{dt} = V \sin \alpha, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{r} \cos \alpha, \quad (1.30)$$

$$\vec{w}_t = -\frac{\vec{F}_t}{m}, \quad (1.31)$$

де \vec{w}_t – реактивне прискорення.

Якщо напрямки тяги й швидкості збігаються, рівняння (1.28), (1.29) мають вигляд

$$\frac{dV}{dt} = w_t - \frac{K}{r^2} \sin \alpha, \quad (1.32)$$

$$V \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{V^2}{r} - \frac{K}{r^2} \right) \cos \alpha. \quad (1.33)$$

2 НЕЗБУРЕНИЙ КЕПЛЕРІВСЬКИЙ РУХ

2.1 Обмежена задача двох тіл у небесній механіці

Обмеженою задачею двох тіл у небесній механіці називають задачу про рух у полі взаємного притягання двох тіл тяжіння, що **мають сферичну симетрію**. Гравітаційне поле над поверхнею сферично симетричного тіла збігається з гравітаційним полем точкового тіла такої ж маси. Рівняння руху обох тіл (позначимо їх α і β) можна записати так:

$$m_{\alpha} \frac{d^2 \vec{r}_{\alpha}}{dt^2} = \vec{F}_{\alpha\beta}, \quad m_{\beta} \frac{d^2 \vec{r}_{\beta}}{dt^2} = \vec{F}_{\beta\alpha}, \quad (2.1)$$

де m_{α}, m_{β} – маси взаємодіючих тіл;

$\vec{r}_{\alpha}, \vec{r}_{\beta}$ – радіуси-вектори їхнього положення;

$\vec{F}_{\alpha\beta}, \vec{F}_{\beta\alpha}$ – сили дії тіла β на тіло α , і навпаки. Їх можна знайти за допомогою закону всесвітнього тяжіння

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha} = -\frac{\gamma m_{\alpha} m_{\beta} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta})}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|^3}, \quad (2.2)$$

де $\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11}$ – гравітаційна стала, $\text{м}^3 \text{с}^{-2} \text{кг}^{-1}$.

Систему рівнянь (2.1) і (2.2) з двома невідомими \vec{r}_{α} і \vec{r}_{β} можна перетворити в два незалежні вирази, увівши дві нові змінні: координату \vec{R}_c центра інерції системи й координату \vec{r} відносного положення:

$$\vec{R}_c = \frac{m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} + m_{\beta} \vec{r}_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}, \quad \vec{r} = \vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}, \quad (2.3)$$

причому з рівнянь (2.1), (2.2) випливає

$$\frac{d^2 \vec{R}_c}{dt^2} = 0; \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\gamma M \vec{r}}{r^3}; \quad (2.5)$$

$$M = m_{\alpha} + m_{\beta}, \quad (2.6)$$

де M – сумарна маса тіл α і β .

Як видно, центр інерції замкненої системи рухається рівномірно прямолінійно:

$$\vec{R}_c = \vec{R}_{c0} + \vec{V}_c t, \quad \vec{V}_c = \text{const.} \quad (2.7)$$

Добуток суми мас і гравітаційної сталої називають **гравітаційним параметром**

$$K = \gamma M. \quad (2.8)$$

Тоді з рівняння (2.6) одержимо

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{K\vec{r}}{r^3}. \quad (2.9)$$

Скалярне множення обох частин (2.9) на елемент радіуса-вектора (1.19) та їх інтегрування дає змогу отримати **рівняння збереження енергії відносного руху**

$$\frac{V^2}{2} - \frac{K}{r} = \text{Const}, \quad (2.10)$$

у якому відповідно **кінетична й потенціальна енергії одиничної маси**

$$E = \frac{V^2}{2}, \quad U = -\frac{K}{r}. \quad (2.11)$$

Запишемо вирази для визначення **моменту імпульсу одиничної маси**:

$$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{V}, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} = \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \times \vec{V}. \quad (2.13)$$

Векторний добуток паралельних векторів дорівнює нулю, тому

$$\vec{V} \times \vec{V} \equiv 0, \quad \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{K\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} \equiv 0. \quad (2.14)$$

Таким чином, у **центральному полі сил** (у якому сила взаємодії залежить тільки від відстані й спрямована вздовж вектора відносного положення) маємо також **рівняння збереження моменту кількості руху**

$$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{V} = \text{const.} \quad (2.15)$$

Вектор $\vec{\mu}$ є водночас поперечним до радіуса-вектора й вектора швидкості. Сталість вектора $\vec{\mu}$, у тому числі й щодо напрямку, означає, що вектор швидкості й радіус-вектор залишаються весь час в одній площині, тобто **задача є плоскою**.

З урахуванням цього її зручніше розв'язувати в **полярних координатах** (рис. 2.1).

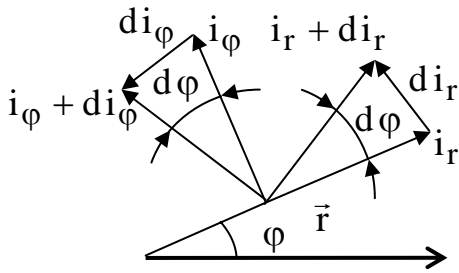


Рисунок 2.1 – Полярні координати

При розв'язанні задач у криволінійних координатах слід пам'ятати, що на відміну від декартових **напрямки ортів у криволінійних координатах є змінними**:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = i_r \frac{dr}{dt} + r \frac{di_r}{dt}. \quad (2.17)$$

З рис. 2.1 видно, що при повороті на малий кут $d\varphi$ старий і новий орти, що за модулем дорівнюють одиниці, виявляються ребрами рівнобедреного трикутника з основою, що дорівнює модулю змінення орта, й кутом при основі, що наближається до прямого $di_r \parallel i_\varphi$, $di_\varphi \parallel i_r$, $|i_r| = |i_\varphi| = 1$, звідки

$$di_r = i_\varphi d\varphi, \quad di_\varphi = -i_r d\varphi. \quad (2.18)$$

З рівняння (2.17) отримаємо вирази проєкцій швидкості відносного руху

$$\vec{V} = i_r \frac{dr}{dt} + i_\varphi r \frac{d\varphi}{dt}, \quad V_r = \frac{dr}{dt}, \quad V_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.19)$$

Рівняння збереження енергії (2.10) у цьому випадку можна записати так:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{K}{r} = \frac{V_r^2}{2} + \frac{V_\varphi^2}{2} - \frac{K}{r} = -\frac{K}{2a}, \quad (2.20)$$

де a – стала з розмірністю довжини, що характеризує повну енергію.

Модуль $|\vec{r} \times \vec{V}|$ у полярних координатах дорівнює добутку r і V_φ . Рівняння збереження моменту кількості руху одиничної маси може бути записано так:

$$|\vec{r} \times \vec{V}| = r V_\varphi = \sqrt{Ka(1 - \varepsilon^2)}, \quad (2.21)$$

де ε – безрозмірна стала, що характеризує величину моменту $\vec{\mu}$.

У такому випадку з рівнянь (2.20) і (2.21) одержимо

$$V_{\varphi} = \frac{\sqrt{Ka(1-\varepsilon^2)}}{r}, \quad V_r = \pm \sqrt{\frac{2K}{r} - \frac{K}{a} - \frac{Ka(1-\varepsilon^2)}{r^2}}. \quad (2.22)$$

З виразів (2.19) і (2.22) випливає

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\sqrt{Ka(1-\varepsilon^2)}}{r^2 \sqrt{\frac{2K}{r} - \frac{K}{a} - \frac{Ka(1-\varepsilon^2)}{r^2}}}. \quad (2.23)$$

Розв'язанням рівняння (2.23) є вираз

$$\vartheta = \varphi - \varphi_P = \pm \arccos\left(\frac{a(1-\varepsilon^2) - r}{\varepsilon r}\right), \quad (2.24)$$

де φ_P – азимутальна координата при відстані $r = a(1-\varepsilon)$, яку називають **аргументом перицентра**;

ϑ – **дійсна аномалія**.

З виразу (2.24) можна одержати **рівняння траєкторії** відносного руху

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_P)} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \vartheta}. \quad (2.25)$$

Визначимо відстані для трьох характерних значень дійсної аномалії ϑ :

$$P = r(0) = a(1-\varepsilon), \quad A = r(\pi) = a(1+\varepsilon), \quad p = r\left(\frac{\pi}{2}\right) = a(1-\varepsilon^2). \quad (2.26)$$

Відстань P називають **перицентром**, A – **апоцентром**, p – **фокальним параметром**. В усіх розглянутих нижче випадках відстань P є мінімальною. При цьому

$$a = \frac{A + P}{2}. \quad (2.27)$$

З рівнянь (2.22), (2.23) можна записати

$$V = \sqrt{\frac{K}{a(1-\varepsilon^2)}} \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \vartheta + \varepsilon^2} = \sqrt{\frac{K}{p}} \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \vartheta + \varepsilon^2}; \quad (2.28)$$

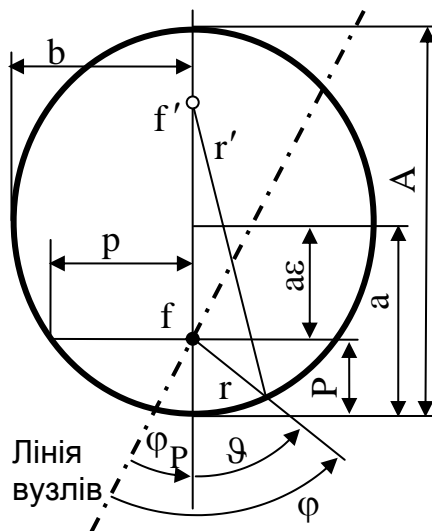
$$V_{\varphi} = \sqrt{\frac{K}{a(1-\varepsilon^2)}} (1 + \varepsilon \cos \vartheta) = \sqrt{\frac{K}{p}} (1 + \varepsilon \cos \vartheta); \quad (2.29)$$

$$V_r = \sqrt{\frac{K}{a(1-\varepsilon^2)}} \varepsilon \sin \vartheta = \sqrt{\frac{K}{p}} \varepsilon \sin \vartheta. \quad (2.30)$$

Залежно від a і ε рівняння (2.25) описує різні криві.
Випадок, коли

$$0 \leq \varepsilon < 1, \quad a > 0, \quad (2.31)$$

відповідає еліптичній траєкторії (рис. 2.2) з великою піввіссю a і відносним ексцентриситетом ε .



Еліпс визначається як геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок (f і f'), названих **фокусами**, є сталою:

$$r + r' = 2a. \quad (2.32)$$

У системі координат відносного руху тіло β розташовано у фокусі f . Найменшою відстанню від цього фокуса є перицентр P (див. (2.26)), найбільшою – апоцентр A .

Еліпс характеризується також величиною **малої півосі**

Рисунок 2.2 – Еліптична траєкторія

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (2.33)$$

На відміну від величини a , що може мати різний знак (з переходом через нескінченність), величини p і P завжди додатні, скінченні й завжди мають геометричний сенс. Еліптичний рух як один з розв'язків задачі двох тіл відображено в **першому законі Кеплера**: планети рухаються по еліптичних орбітах, в одному з фокусів яких розташовано Сонце.

Випадок, в якому

$$\varepsilon = 0, \quad r = a, \quad (2.34)$$

відповідає **коловій траєкторії**, у кожній точці якої

$$V = V_{\varphi} = \sqrt{\frac{K}{a}} = \sqrt{\frac{K}{r}}, \quad V_r = 0. \quad (2.35)$$

Швидкість V (2.35) називається **коловою швидкістю**, яку на умовній сферичній поверхні небесного тіла називають його **першою космічною швидкістю**.

Випадок, де

$$\varepsilon = 1, \quad a \rightarrow \infty, \quad (2.36)$$

відповідає **параболічній траєкторії** з перицентром P і директрисою D , віддаленою від точки перицентра на відстань P (рис. 2.3).

Парабола визначається як **геометричне місце точок, рівновіддалених від фокуса й директриси**:

$$r = r'. \quad (2.37)$$

Значення швидкості (2.28) у кожній точці параболічної траєкторії дорівнює місцевій **параболічній швидкості**

$$V = \sqrt{\frac{2K}{r}}. \quad (2.38)$$

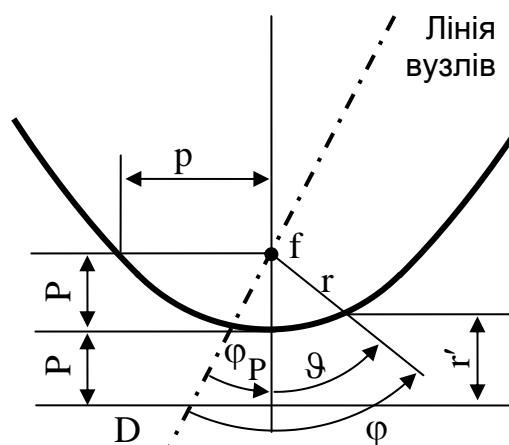


Рисунок 2.3 – Параболічна траєкторія

Параболічну швидкість на умовній сферичній поверхні небесного тіла називають його **другою космічною швидкістю**. На відміну від еліпса параболічна траєкторія є незамкненою й своїми гілками прямує на нескінченність. При цьому

$$V_{\infty} = 0. \quad (2.39)$$

Випадок, коли

$$\varepsilon > 1, \quad a < 0, \quad (2.40)$$

відповідає **гіперболічній траєкторії** з дійсною піввіссю $|a|$, перицентром P і відносним ексцентриситетом ε (рис. 2.4).

Гіпербола визначається як **геометричне місце точок, різниця відстаней яких від двох заданих точок, названих фокусами** (див. f' і f на рис. 2.4), є сталою:

$$r' - r = 2|a|. \quad (2.41)$$

У системі координат відносного руху тіло β розташовано у фокусі f .

Найменша відстань від фокуса f – перицентр P (2.26).

Гіпербола характеризується також величиною **уявної півосі**

$$b = |a|\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \quad (2.42)$$

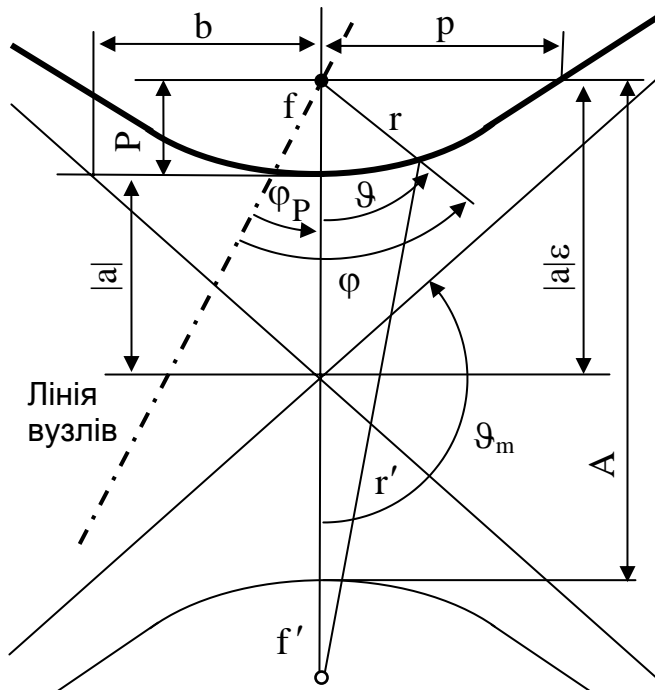


Рисунок 2.4 – Гіперболічна траєкторія

Так само, як і параболічна, гіперболічна траєкторія є незамкненою й своїми гілками спрямована на нескінченність. При цьому, однак, при віддаленні на нескінченність тіла, яке у точці r мало швидкість V , зберігається залишкове значення **швидкості на нескінченності** (див. (2.28)):

$$V_\infty = \sqrt{\frac{K}{|a|}} = \sqrt{V^2 - \frac{2K}{r}}. \quad (2.43)$$

Гіпербола має **прямі асимптоти** (нуль у знаменнику в рівнянні (2.25)), які відповідають максимальному значенню дійсної аномалії:

$$\vartheta_m = \pi - \arccos \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.44)$$

З рівнянь (2.22) можна записати вираз

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{V_r} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2K}{r} - \frac{K}{a} - \frac{Ka(1-\varepsilon^2)}{r^2}}}, \quad (2.45)$$

розв'язання якого має вигляд

$$t = t_P + \sqrt{\frac{a^3}{K}} \tau, \quad (2.46)$$

де t – час проходження через перицентр;
 τ – **середня аномалія**.
 В еліптичному русі

$$\tau = E - \varepsilon \sin E, \quad (2.47)$$

де E – **ексцентрична аномалія**, яку можна визначити з рівняння

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E) = P \frac{1 - \varepsilon \cos E}{1 - \varepsilon}. \quad (2.48)$$

Геометричний зміст ексцентричної аномалії показано на рис. 2.5.

Якщо з центра еліпса провести окружність радіусом a , опустити до великої осі еліпса перпендикуляр, що проходить через точку знаходження об'єкта на еліптичній траєкторії, то кут між великою віссю й напрямком з центра на точку перетину цього перпендикуляра з проведеною окружністю буде дорівнювати ексцентричній аномалії, причому

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.49)$$

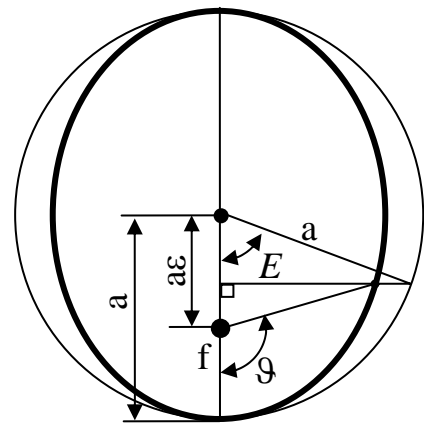


Рисунок 2.5 – Ексцентрична аномалія

З рівнянь (2.47) і (2.49) видно, що середня і ексцентрична аномалії при еліптичному русі мають такий саме період 2π , що й дійсна аномалія:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{K}}, \quad (2.50)$$

звідки впливає **третій закон Кеплера**: квадрати періодів обертання планет співвідносяться як куби великих півосей їхніх еліптичних орбіт.

Вирази (2.47) – (2.49) для випадку гіперболічної траєкторії можна записати так:

$$t = t_P + \sqrt{\frac{|a|^3}{K}} |\tau|; \quad (2.51)$$

$$|\tau| = \varepsilon \operatorname{sh} |E| - |E|; \quad (2.52)$$

$$r = |a|(\varepsilon \operatorname{ch}|E| - 1) = \frac{P(\varepsilon \operatorname{ch}|E| - 1)}{\varepsilon - 1}; \quad (2.53)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}} \operatorname{th} \frac{|E|}{2}. \quad (2.54)$$

При параболічній траєкторії в рівняннях (2.47) – (2.49) $\varepsilon \rightarrow 1$, $a \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. При цьому зберігається межа $a(1 - \varepsilon) = P$, тобто перицентр залишається скінченною величиною. В такому випадку маємо

$$t = t_P + \sqrt{\frac{2P^3}{K}} \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (2.55)$$

Одним з проявів збереження моменту кількості руху в центральному полі сил (2.21) є **другий закон Кеплера**, або закон площ: радіус-вектор в своєму русі за рівні проміжки часу охоплює рівні площі.

2.2 Штучний супутник

Штучним супутником небесного тіла (наприклад Землі) називають штучний об'єкт, здатний рухатися по кеплерівській орбіті або (з урахуванням діючих збурень) по близькій до неї траєкторії без дії тяги протягом відносно тривалого часу – щонайменше одного періоду обертання.

Орбіту з висотою, на якій опір атмосфери дозволяє штучному супутникові зробити один виток, називають **базовою орбітою**. Мінімально необхідною умовою у такому випадку є виведення апарата на **базову орбіту** й надання йому **першої космічної швидкості** (2.35). Для небесних тіл, у яких відсутня атмосфера, радіус базової орбіти фактично збігається з радіусом поверхні самого небесного тіла. Для тіл з атмосферою висота базової орбіти, як правило, є малою порівняно з радіусом планети. На Землі ця висота становить приблизно 200 км. Винятком (у Сонячній системі) є тільки Юпітер і Сатурн, у яких, можливо, взагалі відсутня тверда або рідка поверхня і радіуси яких визначено як **радіуси видимої поверхні**.

Для умов Землі перша космічна швидкість

$$V_{I\oplus} = 7.91 \text{ км/с}, \quad (2.56)$$

друга космічна швидкість (2.38)

$$V_{II\oplus} = 11.19 \text{ км/с}. \quad (2.57)$$

3 МАНЕВРИ З ВЕЛИКОЮ ТЯГОЮ

3.1 Імпульсний маневр

Розглянемо як приклад маневр переходу з колової орбіти радіусом r_0 на параболічну. В ідеальній ситуації при необмежено великій тязі за нескінченно малий час роботи двигуна апарат устигнув би змінити швидкість, але не положення, змінення потенційної енергії дорівнювало б нулю, а змінення швидкості

$$\Delta V^{(\infty)} = V_{II}(r_0) - V_I(r_0), \quad (3.1)$$

де $V_I(r_0)$, $V_{II}(r_0)$ – перша й друга космічні швидкості на відстані r_0 від центра тяжіння:

$$V_I(r_0) = \sqrt{\frac{K}{r_0}}, \quad V_{II}(r_0) = \sqrt{\frac{2K}{r_0}}. \quad (3.2)$$

У такому випадку при нескінченно великій тязі

$$\Delta V^{(\infty)} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{K}{r_0}}, \quad (3.3)$$

У реальній ситуації при скінченній тязі двигуна апарат за час його роботи встигає зробити певний підйом, швидкість апарата змінюється з першої космічної на стартовій відстані від центра тяжіння до другої космічної на фінішній відстані:

$$\Delta V = \sqrt{\frac{2K}{r_f}} - \sqrt{\frac{K}{r_0}}. \quad (3.4)$$

Залежно від величини тяги при різному змінненні відстані змінення швидкості апарата може бути різним, у тому числі навіть від'ємним. Змінення швидкості, таким чином, не є універсальною характеристикою маневру. Таким виявляється змінення повної енергії одиниці маси апарата (1.22) від початкової величини

$$E_0 = \frac{V_I^2(r_0)}{2} - \frac{K}{r_0} = -\frac{V_I^2(r_0)}{2} = -\frac{K}{2r_0} \quad (3.5)$$

до кінцевої

$$E_f = \frac{V_{II}^2(r_f)}{2} - \frac{K}{r_f} = 0. \quad (3.6)$$

При відносно великій тязі підйом за час маневру є незначним:

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad r \approx r_0; \quad (3.7)$$

$$V \frac{d\alpha}{dt} \approx \frac{V^2}{r_0} - \frac{K}{r_0^2}. \quad (3.8)$$

У такому випадку відповідно до формул (1.21), (1.23) за відсутності збурюючих сил змінення повної енергії одиниці маси в одиницю часу можна визначити як

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ_t}{dt} = w_t V. \quad (3.9)$$

З використанням (3.9) можна від диференціювання за часом у рівняннях (1.30) і (3.8) перейти до диференціювання за повною енергією, причому у формулі (3.8), нехтуючи малим підйомом, слід вважати

$$V^2 = V_0^2 + 2(E - E_0), \quad V_0^2 = -2E_0 = V_I^2(r_0) = \frac{K}{r_0} = g_0 r_0. \quad (3.10)$$

У такому випадку

$$w_t \frac{d\alpha}{dE} \approx g_0 \left(1 - \frac{1}{1 + 2 \frac{E - E_0}{V_0^2}} \right), \quad \frac{dr}{dE} \approx \frac{\alpha}{w_t}. \quad (3.11)$$

Приблизне розв'язання рівнянь (3.11) має вигляд

$$\frac{V_{ch}}{V_{ch}^{(\infty)}} \approx 1 + \frac{(31 - 12 \ln 2) \sqrt{2} - 32}{48(\sqrt{2} - 1)} \left(\frac{g_0}{w_t} \right)^2 \approx 1 + 0.0039 \left(\frac{g_0}{w_t} \right)^2. \quad (3.12)$$

Можна зазначити, що при реактивному прискоренні, що дорівнює локальному гравітаційному $w_t = g_0$, визначення маневру як миттєвого змінення швидкості апарата означало б відносну похибку оцінювання характеристичної швидкості менш ніж 0.4%. При реактивному прискоренні $w_t = 0.5 g_0$ похибка була б трохи більшою, ніж 1.5%.

Таким чином, в **імпульсних маневрах**, при яких за час роботи двигуна не відбувається помітний рух апарата вздовж траєкторії (насамперед радіальний), змінення характеристичної й фактичної швидкостей практично збігаються і в

оцінних розрахунках можуть вважатися однаковими. Таким чином, маневр можна вважати імпульсним за таких умов:

- коли вже майже досягнуто локальну колову швидкість;
- якщо реактивне прискорення є порядку або більшим, ніж локальне гравітаційне або відносно малим (але за короткий час при малому радіальному русі апарата).

Не можна розглядати як імпульсні такі маневри:

- тривалі з відносно малим реактивним прискоренням;
- з початковою швидкістю, що помітно поступається локальній коловій.

3.2 Траєкторії Гомана

При переході з однієї колової орбіти на іншу колову найменша характеристична швидкість є можливою у випадку переходу по так званому **еліпсу Гомана** (рис. 3.1). Велика піввісь еліпса Гомана дорівнює половині суми радіусів орбіт, тобто в нижній точці еліпс торкається меншого кола, а у верхній – більшого. Таким чином,

$$a = \frac{R_{\min} + R_{\max}}{2}. \quad (3.13)$$

При цьому згідно з рівняннями (2.28), (2.29)

$$V_P = \sqrt{\frac{2K R_{\max}}{(R_{\min} + R_{\max}) R_{\min}}}, \quad (3.14)$$

$$V_A = \sqrt{\frac{2K R_{\min}}{(R_{\min} + R_{\max}) R_{\max}}}. \quad (3.15)$$

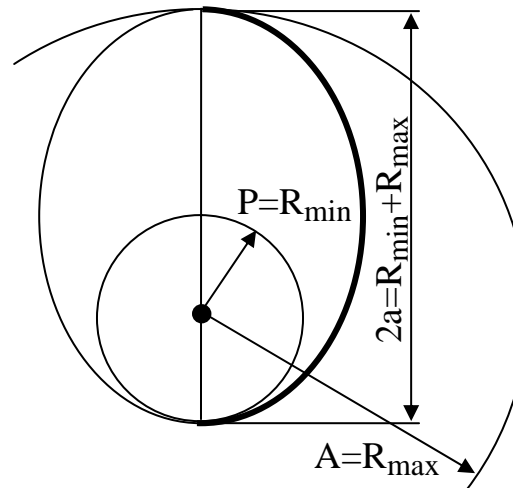


Рисунок 3.1 – Еліпс Гомана

Характеристичну швидкість імпульсного гоманівського переходу можна подати як суму характеристичних швидкостей сходження зі стартової орбіти й виходу на фінішну орбіту:

$$V_{ch P} = \sqrt{\frac{2K R_{\max}}{(R_{\min} + R_{\max}) R_{\min}}} - \sqrt{\frac{K}{R_{\min}}}; \quad (3.16)$$

$$V_{ch A} = \sqrt{\frac{K}{R_{\max}}} - \sqrt{\frac{2K R_{\min}}{(R_{\min} + R_{\max}) R_{\max}}}; \quad (3.17)$$

$$V_{ch} = V_{ch P} + V_{ch A}. \quad (3.18)$$

4 ЗАПУСК ШТУЧНОГО СУПУТНИКА НА ОРБИТУ

4.1 Маневр "гравітаційний розворот"

Виведення штучного супутника на орбіту навколо небесного тіла означає підйом його з поверхні небесного тіла й надання йому на певній висоті швидкості, напрямку і величини якої дозволяють супутникові надалі рухатися вздовж еліптичної орбіти із заданими характеристиками.

У п. 3.1 зазначено, що навіть при великому реактивному прискоренні маневр не можна розглядати як імпульсний, якщо на якійсь його ділянці швидкість апарата помітно поступається локальній коловій. Таке спостерігається при виведенні штучного супутника з поверхні тіла тяжіння або, навпаки, при сходженні з орбіти для посадки на поверхню з використанням реактивної тяги (якщо, наприклад, відсутність атмосфери не дозволяє здійснити аеродинамічне гальмування).

Найбільш економічним маневром виведення на орбіту є так званий **гравітаційний розворот**, коли реактивне прискорення на всьому етапі виведення збігається за напрямком зі швидкістю апарата, а перехід від вертикального підйому до горизонтального руху (розворот) здійснюється тільки під дією гравітаційних сил. При такому маневрі у будь-який момент часу реалізується максимальна величина роботи сили тяги в одиницю часу. При цьому ракету орієнтовано до потоку повітря, що набігає, найменшим перетином (міделем), тобто миттєва робота атмосферного опору є мінімальною.

Опис такого маневру зручніше за все робити в **польотній (курсній) системі координат** (див. рис. 1.1). З урахуванням атмосферного опору рівняння (1.28) – (1.30) можна записати так:

$$\frac{dV}{dt} = w_t - \frac{F_a}{m} - \frac{K}{r^2} \sin \alpha; \quad (4.1)$$

$$V \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{V^2}{r} - \frac{K}{r^2} \right) \cos \alpha; \quad (4.2)$$

$$\frac{dr}{dt} = V \sin \alpha, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{r} \cos \alpha; \quad (4.3)$$

$$\vec{w}_t = -\frac{\vec{F}_t}{m}. \quad (4.4)$$

де F_a – сила атмосферного опору;

\vec{w}_t – **реактивне прискорення**.

Рівняння (4.1) можна перетворити до такого вигляду:

$$\int V dV_{ch} = \frac{V^2}{2} + \frac{K}{R_0} - \frac{K}{R} + Q_a, \quad (4.5)$$

де $V_{ch} = w_t t$ – характеристична швидкість;
 R_0 – радіус поверхні небесного тіла;
 R – радіус орбіти;
 Q_a – робота сили атмосферного опору над одиницею маси апарата,

$$Q_a = \int \frac{\vec{F}_a \cdot d\vec{r}}{m}. \quad (4.6)$$

Для випадку виведення на колову орбіту, де $V = \sqrt{\frac{K}{R}}$ одержимо

$$2 \int V dV_{ch} = \frac{2K}{R_0} - \frac{K}{R} + 2Q_a. \quad (4.7)$$

Якщо ввести **балістичний ККД**

$$\eta_b = \frac{2 \int V dV_{ch}}{V_{ch}^2}, \quad (4.8)$$

вираз (4.7) можна записати як

$$V_{ch} = \sqrt{\frac{1}{\eta_b} \left(\frac{2K}{R_0} - \frac{K}{R} + 2Q_a \right)}. \quad (4.9)$$

4.2 Запуск на базову колову орбіту без урахування втрат на атмосферний опір

Величина η_b залежить від того, як на етапі виведення змінюється похідна $\frac{dV_{ch}}{dV}$. На початковому етапі запуску при вертикальному підйомі ($\sin \alpha = 1$) і

малій швидкості ($F_a = 0$) виконується співвідношення (4.1):

$$\frac{dV_{ch}}{dV} = \frac{w dt}{dV} = 1 - \frac{1}{W_s}; \quad (4.10)$$

$$W_s = \frac{w R_0^2}{K}, \quad (4.11)$$

де W_s – **стартове перевантаження**.

На кінцевому етапі у горизонтальному польоті ($\sin \alpha = 0$) і малій щільності

атмосфери ($F_a = 0$) виконується співвідношення

$$\frac{dV_{ch}}{dV} = \frac{w dt}{dV} = 1. \quad (4.12)$$

Якби на всьому етапі запуску дотримувалася б умова (4.10), то

$$\eta_b = 1 - \frac{1}{W_s}. \quad (4.13)$$

Якби на всьому етапі запуску був правильним вираз (5.12), то

$$\eta_b = 1. \quad (4.14)$$

Очевидно, що дійсне значення η_b має знаходитися в проміжку між величинами (4.13) і (4.14) і бути тим ближче до одиниці, чим більшим є стартове перевантаження. Числові розрахунки стосовно гравітаційного розвороту зі сталим перевантаженням приводять до розв'язання (табл. 4.1), яке з достатньою точністю може апроксимуватися залежностями

$$\eta_b \approx \frac{1}{\left[1 + 0.67 \ln \left(1 + \frac{0.85}{W_s^2 - 1}\right)\right]^2} \quad (\text{похибка менше } 2.5\%); \quad (4.15)$$

$$\frac{R}{R_0} \approx 1 + \frac{0.218}{1.8 W_s^2 - 0.5 W_s - 0.3} \quad (\text{похибка менше } 1.0\%). \quad (4.16)$$

Таблиця 4.1 – Характеристики маневру "гравітаційний розворот"

W_s	$\frac{R}{R_0} - 1$	η_b	$V_{ch}, \text{ км/с}$	W_s	$\frac{R}{R_0} - 1$	η_b	$V_{ch}, \text{ км/с}$
1.0000	0.2178	0.0000	∞	2.2000	0.0291	0.7805	9.0794
1.1000	0.1667	0.2264	17.7714	2.3000	0.0264	0.7986	8.9645
1.2000	0.1308	0.3317	14.5060	2.4000	0.0240	0.8146	8.8664
1.3000	0.1052	0.4170	12.8196	2.5000	0.0219	0.8287	8.7818
1.4000	0.0865	0.4880	11.7651	2.6000	0.0201	0.8413	8.7084
1.5000	0.0724	0.5477	11.0430	2.7000	0.0186	0.8526	8.6442
1.6000	0.0616	0.5982	10.5199	2.8000	0.0172	0.8627	8.5876
1.7000	0.0531	0.6410	10.1255	2.9000	0.0159	0.8718	8.5376
1.8000	0.0463	0.6776	9.8192	3.0000	0.0148	0.8801	8.4931
1.9000	0.0408	0.7091	9.5756	4.0000	0.0081	0.9318	8.2273
2.0000	0.0362	0.7363	9.3781	5.0000	0.0051	0.9559	8.1110
2.1000	0.0324	0.7599	9.2154	10.0000	0.0013	0.9882	7.9620

4.3 Запуск на еліптичну орбіту

У багатьох випадках завдання, поставлене перед космічним апаратом, передбачає виведення його на еліптичну орбіту. Характеристична швидкість такого запуску може відрізнятися від знайденої з використанням наведених вище виразів, тому що як перицентр P , так і апоцентр A заданої орбіти відрізняються від радіуса R (4.16), на якому залежно від величини перевантаження досягається локальна колова швидкість. Виведення апарата на задану еліптичну орбіту в такому випадку здійснюється у два етапи:

- запуск на проміжну еліптичну орбіту з апоцентром, що дорівнює перицентру P заданої еліптичної орбіти;

- імпульсний маневр у точці, що є водночас апоцентром перехідної і перицентром заданої орбіти, для переходу на задану орбіту з апоцентром A .

На першому етапі у випадку, коли величина P більше знайденої в рівнянні (4.16) величини R , передбачено значення характеристичної швидкості, що перевищує характеристичну швидкість "гравітаційного розвороту". Двигуни мають працювати якийсь час після досягнення радіуса R і локальної величини колової швидкості. Якщо величина P менше знайденої за формулою (4.16) величини R , характеристична швидкість виходу апарата на проміжну орбіту поступається характеристичній швидкості "гравітаційного розвороту". Двигуни мають вимкнутися трохи раніше, до досягнення радіуса R і локальної величини колової швидкості. У кожному разі мається на увазі рух з малими кутами підйому траєкторії α й швидкостями, близькими до локальної колової. Це означає, що поправку до характеристичної швидкості на першому етапі можна визначати як характеристичну швидкість гоманівського переходу (3.14) з колової орбіти радіуса R на проміжну орбіту з перицентром R й апоцентром P :

$$\Delta V_{ch1} = \sqrt{\frac{2KP}{R(R+P)}} - \sqrt{\frac{K}{R}} = \sqrt{\frac{K}{R}} \left(\sqrt{\frac{2P}{R+P}} - 1 \right). \quad (4.17)$$

Характеристична швидкість другого етапу виведення на еліптичну орбіту така:

$$\Delta V_{ch2} = \left| \sqrt{\frac{2KA}{P(A+P)}} - \sqrt{\frac{2KR}{P(R+P)}} \right| = \sqrt{\frac{2K}{P}} \left| \sqrt{\frac{A}{A+P}} - \sqrt{\frac{R}{R+P}} \right|. \quad (4.18)$$

У рівнянні (4.17) величина поправки до характеристичної швидкості означає трохи більший або трохи менший час роботи двигунів (залежно від співвідношення R і P), ніж при виведенні апарата на колову орбіту радіусом R , знак цієї поправки зберігається. У формулі (4.18) як зменшення, так і збільшення швидкості для переходу з проміжного еліпса на заданий означає необхідність

додаткового вмикання двигунів, характеристична швидкість дорівнює модулю змінення фактичної швидкості.

Таким чином, характеристичну швидкість запуску апарата на еліптичну орбіту з перицентром P й апоцентром A можна записати без урахування атмосферного опору

$$V_{ch} = \sqrt{\frac{1}{\eta_b} \left(\frac{2K}{R_0} - \frac{K}{R} \right)} + \sqrt{\frac{K}{R} \left(\sqrt{\frac{2P}{R+P}} - 1 \right)} + \sqrt{\frac{2K}{P} \left| \sqrt{\frac{A}{A+P}} - \sqrt{\frac{R}{R+P}} \right|}, \quad (4.19)$$

де величини η_b і R знаходяться відповідно з рівнянь (4.9), (4.15) і (4.16).

4.4 Характеристична швидкість запуску апарата з урахуванням обертання небесного тіла та втрат на атмосферний опір

Характеристична швидкість запуску штучного супутника трохи зменшується за рахунок обертання небесного тіла, оскільки, ще перебуваючи на його поверхні, космічний апарат вже має деяку швидкість. На екваторі Землі швидкість обертання становить $V_r = 463$ м/с. Зниження характеристичної швидкості запуску апарата є найбільшим при старті з екватора в напрямку обертання небесного тіла (проградна орбіта) і з нульовим нахилом площини орбіти до площини екватора. У загальному випадку при запуску апарата з екватора на еліптичну орбіту з довільним кутом нахилу i поправка до характеристичної швидкості за рахунок обертання небесного тіла (за законом косинусів) є такою:

$$\Delta V_{ch} = \sqrt{V_P^2 + V_r^2 - 2V_P V_r \cos i} - V_P, \quad (4.20)$$

де V_P – необхідна швидкість у перицентрі орбіти;

$$V_P = \sqrt{\frac{KA}{(A+P)P}}. \quad (4.21)$$

Втрати на подолання атмосферного опору Q_a можна приблизно оцінити, вважаючи, що найбільша їх частина припадає на щільні шари атмосфери, які ракета проходить на етапі майже вертикального підйому. У такому випадку для ділянки з істотним атмосферним опором (4.6) можна записати

$$Q_a \approx \int \frac{F_a dr}{m}. \quad (4.22)$$

Сила атмосферного опору

$$F_a = C_x S_m \frac{\rho(h) V^2}{2}, \quad (4.23)$$

де C_x – коефіцієнт лобового опору ракети;

S_m – площа міделя;

$\rho(h)$ – щільність атмосфери на висоті h .

Залежність швидкості польоту від досягнутої висоти при вертикальному підйомі в першому наближенні можна знайти, нехтуючи атмосферним опором:

$$V^2 = 2 \frac{K}{R_0^2} (W_s - 1) h. \quad (4.24)$$

Залежність щільності повітря від висоти над поверхнею можна записати, користуючись так званим **барометричним законом**:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}}. \quad (4.25)$$

де ρ_0 – щільність атмосфери на поверхні;

H – **товщина шару однорідної атмосфери**, в якому вмістилася б уся атмосфера небесного тіла, якби щільність, температура й середня молекулярна маса повітря не змінювалися з висотою.

Для атмосфери зі сталою температурою T і середньою молекулярною масою m_m

$$H = \frac{kT}{m_m g}, \quad (4.26)$$

де g – прискорення вільного падіння на поверхні тіла;

k – універсальна газова стала, якщо m_m має розмірність кг/моль, або стала

Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, якщо m_m визначено в кг.

Для Землі $H = 7.15$ км.

З урахуванням виразів (4.22) – (4.26) маємо

$$Q_a \approx (W_s - 1) \frac{C_x}{m} S_m \rho_0 g \int_0^{\infty} e^{-\frac{h}{H}} h dh \approx (W_s - 1) \frac{C_x}{m} S_m \rho_0 g H^2. \quad (4.27)$$

5 БАГАТОСТУПІНЧАСТІ РАКЕТИ

Відношення стартової маси РКС до кінцевої визначається співвідношенням (1.10), до якого число Ціолковського входить у вигляді, наведеному у рівнянні (1.16):

$$\frac{m_s}{m_f} = Z, \quad Z = e^{V_{ch} / I_s}. \quad (5.1)$$

Стартова маса m_s РКС (рис 5.1) складається з маси ракети-носія (РН) m і корисного вантажу (КВ) m_{PL} :

$$m_s = m_{PL} + m. \quad (5.2)$$

Маса РН, у свою чергу, містить масу РР m_p , а також двигунів і конструкції (далі – маса конструкції) m_t :

$$m = m_t + m_p. \quad (5.3)$$

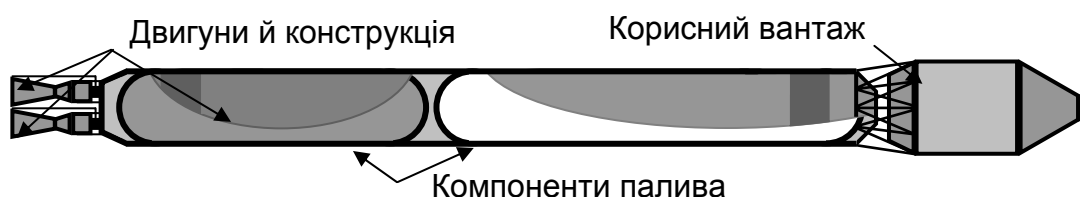


Рисунок 5.1 – Одноступінчаста ракетно-космічна система

Кінцева маса РКС складається з маси КВ m_{PL} і маси конструкції m_t :

$$m_f = m_{PL} + m_t. \quad (5.4)$$

Відношення маси заправленої ракети до маси порожньої конструкції називають **конструкційним параметром**

$$s = \frac{m_t + m_p}{m_t}. \quad (5.5)$$

З рівнянь (1.16), (5.1) – (5.5) можна в результаті отримати

$$\frac{m_s}{m_{PL}} = \frac{Z(s-1)}{s-Z}; \quad (5.6)$$

$$\frac{m}{m_{PL}} = \frac{m_s}{m_{PL}} - 1 = \frac{s(Z-1)}{s-Z}; \quad (5.7)$$

$$\frac{m_t}{m_{PL}} = \frac{m}{m_{PL}s} = \frac{Z-1}{s-Z}; \quad (5.8)$$

$$\frac{m_p}{m_{PL}} = \frac{m(s-1)}{m_{PL}s} = \frac{(s-1)(Z-1)}{s-Z}. \quad (5.9)$$

З формули (5.5) видно, що існує обмеження на значення числа Ціолковського Z , а саме при $Z = s$ відношення стартової маси до маси КВ прямує до нескінченності, тобто є межа характеристичної швидкості, яка може бути реалізована РКС (див. (5.1)):

$$V_{ch \max} = I_s \ln s. \quad (5.10)$$

Величина питомого імпульсу в рідинних ракетних двигунах (РРД) практично однозначно визначається вибором компонентів РР (тепловиділенням на одиницю маси РР), тому що ККД РРД при відносно великій тязі (більше $10^2 \dots 10^3$ Н) є досить близьким до одиниці.

У РРД найбільше значення I_s (~5000 м/с) забезпечує паливне сполучення водень (пальне) + фтор (окислювач). Однак такі двигуни ніколи не використовувалися, тому що в них продуктом реакції



є плавикова кислота (один з компонентів славнозвісної "царської горілки", що розчиняє золото й платину).

Наступне за величиною значення I_s (~4000 м/с) має паливне сполучення водень (пальне) + кисень (окислювач). Продукт реакції у такому випадку є неагресивним й екологічно ідеальним:



Тут обидва компоненти РР є криогенними, тобто мають низьку температуру кипіння. У зрідженому стані ці компоненти не можуть перебувати довго, тому заправлення воднево-кисневої ракети завершується практично перед запуском двигунів.

Проміжним щодо можливої тривалості зберігання є сполучення вуглеводневих паливних (продуктів переробки нафти, наприклад, гасу) з киснем. У таких РРД питомих імпульс досягає 3000 м/с.

За необхідності тривалого зберігання РР перед запуском двигунів як паливо використовують сполучення вуглеводневих паливних з азотовмісними окислювачами (наприклад азотною кислотою). У таких РРД питомих імпульс є на рівні 2700 м/с.

Значення s для різних типів РН залежить від багатьох чинників: матеріалу бака (тут бажано мати максимальне відношення межі міцності до щільності); щільності компонентів РР (при більшій щільності потрібні менші об'єм і, відповідно, маса баків); температури зберігання компонентів РР (за необхідності термостабілізації бака для зберігання криогенного компонента товщину стінок слід

збільшити); розмірів РН (згинальні моменти при нахилі РН у польоті є пропорційними добутку маси й загального розміру РН, тобто зі збільшенням розміру зростають швидше, ніж у прямій пропорції). Наприклад, збільшення стартового перевантаження приводить до зниження характеристичної швидкості при фіксованій досягнутій. Однак таке зростання стартового перевантаження спричиняє необхідність збільшення міцності (й маси) баків, що зменшує величину конструкційного параметра s . У результаті зростання перевантаження не обов'язково означає зниження стартової маси ракети.

Також використання компонентів РР з більш високим питомим імпульсом не обов'язково означає виграв у масі, тому що може виявитися, що більший питомий імпульс забезпечується компонентами РР з меншим значенням конструкційного параметра s .

У наведеному вище прикладі сполученню "водень-кисень" відповідає високий питомий імпульс, але малий конструкційний параметр

$$I_s = 4000 \text{ м/с}; s = 10. \quad (5.13)$$

Сполученню "гас-кисень" відповідає менший питомий імпульс, але більший конструкційний параметр

$$I_s = 3000 \text{ м/с}; s = 20. \quad (5.14)$$

При цьому значення максимально можливої характеристичної швидкості з рівняння (5.10) буде майже однаковим:

$$V_{ch \max} \approx 9000 \text{ м/с}, \quad (5.15)$$

що наближається до найменшої величини, необхідної для виведення космічного апарата на низьку навколоземну орбіту (7910 м/с колової швидкості + втрати на підйом і подолання атмосферного опору).

Таким чином, виведення супутника навіть на низьку навколоземну орбіту "в один прийом" знаходиться на межі можливостей рідинних ракет. Це пов'язано з тим, що після витрати частини РР двигуни мають забезпечувати подальше прискорення не тільки КВ, залишкової маси РР і конструкції, що її містить, але й уже порожніх (непотрібних) баків. Величина $V_{ch \max}$ – це та максимальна характеристична швидкість, яку можуть забезпечити двигуни за умови, що вся кінцева маса складається тільки з маси двигунів і порожніх баків (без КВ).

В історії космонавтики реалізовано тільки одну схему одноступінчастої (точніше, "півтораступінчастої") РКС Atlas-Mercury (рис. 5.2), що використовувалася при здійсненні першої пілотованої космічної програми США.

Стартовий склад системи містив РН Atlas з трьома РРД та одномісний космічний корабель (капсулу) Mercury із системою аварійного рятування (САР) з пороховими двигунами, які мали віддалити капсулу від ракети з наступною посадкою з використанням парашута, якщо позаштатна ситуація виникала на етапі запуску двигунів або початковому етапі, тобто до досягнення деякої мінімальної висоти й швидкості, достатніх для розкриття парашута.

В міру витрат компонентів палива (зменшення маси РКС) робота всіх трьох РРД означала неприпустимо високі перевантаження, і два вже непотрібних РРД

скидалися (САР відстрелювалася ще раніше). Те, що вся інша конструкція, включаючи порожні баки, виводилася на орбіту, для РКС Atlas-Mercury призводило до того, що при стартовій масі більше 200 т маса КВ становила всього ~1.5 т.

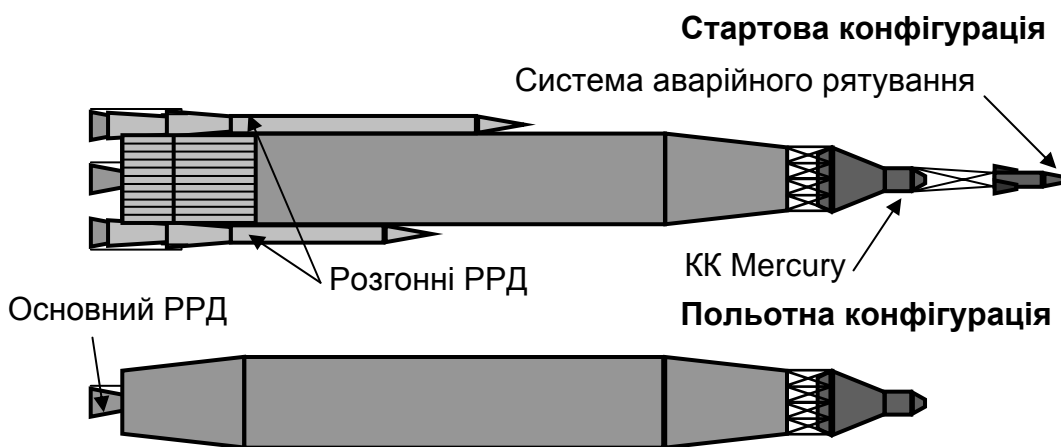


Рисунок 5.2 – "Півтораступінчаста" РКС Atlas-Mercury

Істотне зниження відношення стартової маси до корисної досягається в багаторушпінчастих РКС, де після використання частини палива скидаються як непотрібні вже двигуни й спорожнені баки.

Багаторушпінчасту РН (рис. 5.3) може бути виконано за схемами "тандем", "пакет" або комбінованою.

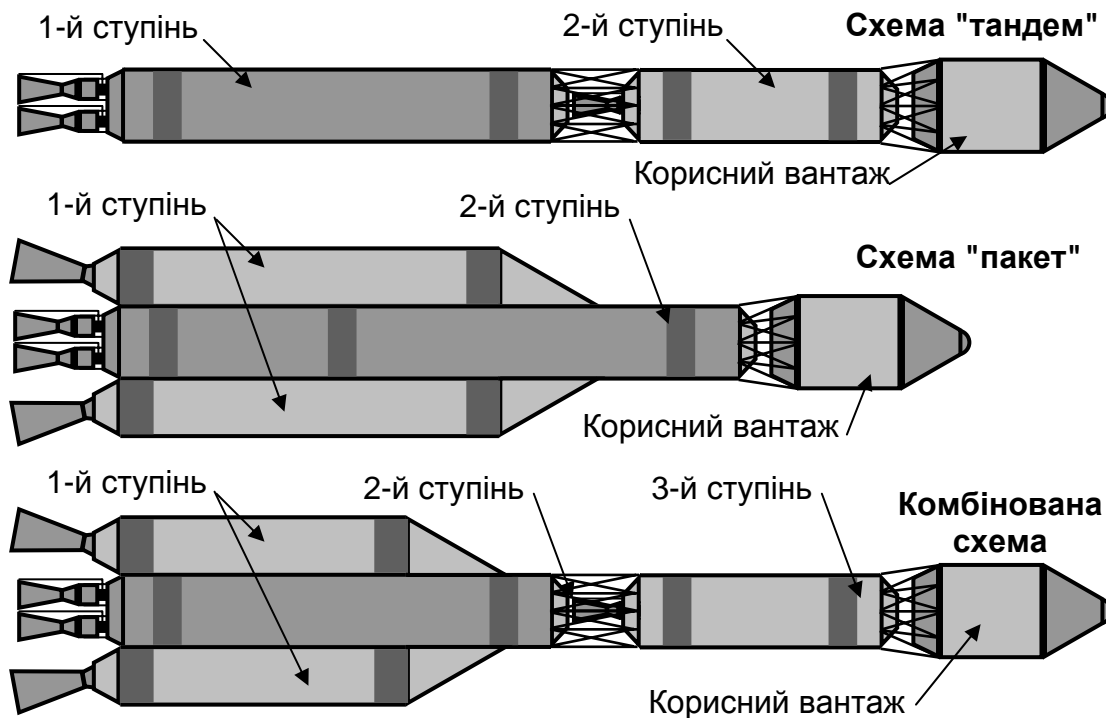


Рисунок 5.3 – Компонування багаторушпінчастих ракет

Нумерація ступенів у багатоступінчастій ракеті відповідає порядку відкидання відпрацьованих ступенів. Позначимо сумарну масу КВ і всіх ступенів, починаючи з і-го, як M_i :

$$M_i = \sum_{n=i}^N m_n + m_{PL}. \quad (5.16)$$

Для зручності запис загальних виразів матиме вигляд

$$M_{N+1} = m_{PL}. \quad (5.17)$$

При цьому маса n-го ступеня й стартова маса РКС

$$m_n = M_n - M_{n+1}; \quad (5.18)$$

$$M_s = M_1. \quad (5.19)$$

Характеристична швидкість розподіляється між ступенями так, що:

$$V_{ch} = \sum_{n=i}^N V_{ch}^{(n)} = \sum_{n=i}^N I_s^{(n)} \ln Z_n, \quad (5.20)$$

де на n-му ступені число Ціолковського

$$Z_n = e^{V_{ch}^{(n)} / I_s^{(n)}}. \quad (5.21)$$

Масові характеристики n-го ступеня визначають за формулами (5.6) – (5.9) із заміною в них величин m_s , m_{PL} і m на M_n , M_{n+1} і m_n відповідно:

- маса РКС після скидання n-1 ступенів

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} = \frac{Z_n (s_n - 1)}{s_n - Z_n}; \quad (5.22)$$

- маса n-го ступеня

$$\frac{m_n}{M_{n+1}} = \frac{M_n}{M_{n+1}} - 1 = \frac{s_n (Z_n - 1)}{s_n - Z_n}; \quad (5.23)$$

- маса конструкції n-го ступеня

$$\frac{m_n^{(t)}}{M_{n+1}} = \frac{m_n}{M_{n+1} s_n} = \frac{Z_n - 1}{s_n - Z_n}; \quad (5.24)$$

- маса РР в n-му ступені

$$\frac{m_n^{(p)}}{M_{n+1}} = \frac{m_n(s_n - 1)}{M_{n+1}s_n} = \frac{(s_n - 1)(Z_n - 1)}{s_n - Z_n}. \quad (5.25)$$

Ті ж складові, які віднесено до маси КВ:

$$\frac{M_i}{m_{PL}} = \prod_{n=i}^N \frac{Z_n(s_n - 1)}{s_n - Z_n}, \quad \frac{M_s}{m_{PL}} = \prod_{n=1}^N \frac{Z_n(s_n - 1)}{s_n - Z_n}; \quad (5.26)$$

$$\frac{m_i}{m_{PL}} = \frac{s_i(Z_i - 1)}{s_i - 1} \prod_{n=i}^N \frac{Z_n(s_n - 1)}{s_n - Z_n}; \quad (5.27)$$

$$\frac{m_i^{(t)}}{m_{PL}} = \frac{Z_i - 1}{s_i - 1} \prod_{n=i}^N \frac{Z_n(s_n - 1)}{s_n - Z_n}; \quad (5.28)$$

$$\frac{m_i^{(p)}}{m_{PL}} = (Z_i - 1) \prod_{n=i}^N \frac{Z_n(s_n - 1)}{s_n - Z_n}. \quad (5.29)$$

Мінімальну стартову масу РКС одержують, якщо для всіх ступенів виявляється однаковим значення комплексу

$$I_s^{(n)} \left(1 - \frac{Z_n}{s_n} \right) = \text{const}. \quad (5.30)$$

Таким чином, викладений аналіз у більшості випадків дозволяє поділити задачу оптимізації РКС на дві частини:

- визначення величини необхідної характеристичної швидкості маневру з урахуванням в першому наближенні чинників неідеальності: обмеженість тяги, атмосферний опір;
- оптимізацію за масою характеристик РКС для забезпечення визначеної в першій частині величини характеристичної швидкості.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы/ Г.Н. Дубошин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
2. Соловьев Ц.В. Прогнозирование межпланетных полетов/ Ц.В. Соловьев, Е.В. Тарасов. – М.: Машиностроение, 1973. – 400 с.
3. Lála P. Malá encyklopedie kosmonautiky/ P. Lála, A. Vítek. – Praha: Mladá fronta, 1982. – 392 s.
4. Пионеры ракетной техники. Гансвиндт, Годдард, Эсно-Пельтри, Оберт, Гоман. Избранные труды. – М.: Наука, 1977. – 632 с.

Нестеренко Сергій Юрійович

**ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ РАКЕТНИХ СИСТЕМ, ПРИЗНАЧЕНИХ
ДЛЯ ВИВЕДЕННЯ НА ОРБИТУ І ЗДІЙСНЕННЯ ІМПУЛЬСНИХ
МІЖОРБІТАЛЬНИХ МАНЕВРІВ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ**

Редактор В.М. Коваль

Зв. план. 2009

Підписано до друку 14.10.2009

Формат 60×84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 2. Обл.-вид. арк. 2.29. Наклад 50 прим.

Замовлення 365. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є.Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>
Видавничий центр "ХАІ"
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu